

УДК 532.529:534.2

## ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА КАПЕЛЬ ПЕРФТОРУГЛЕРОДА В ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. Д. А. Губайдуллин, Ю. В. Федоров\*

Институт механики и машиностроения – ОСП ФИЦ КазНЦ РАН, г. Казань, Россия

\*E-mail: kopperfildd@ya.ru

Поступила в редакцию 06.06.2022 г.

После доработки 06.07.2022 г.

Принята к публикации 13.10.2022 г.

Разработана математическая модель и представлено численное исследование роста парового пузырька в результате акустического испарения сферической капли перфторуглерода, находящейся в вязкоупругой жидкости. Рассмотрены линейные реологические модели Кельвина–Фойгта, Максвелла, Зенера и Олдройда. Задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для радиуса и температуры пузырька, радиуса капли, нормальных напряжений на границе капли совместно с уравнениями теплопроводности для внутренней и внешней жидкости. Пространственная дискретизация уравнений осуществляется с помощью неявной конечно-разностной схемы. Обыкновенные дифференциальные уравнения решаются методом Рунге–Кутты пятого порядка с адаптивным вычислительным шагом. Для проверки корректности численного счета в частном случае проведено сравнение теоретических результатов с известными экспериментальными данными. Продемонстрировано влияние модуля сдвига, времени релаксации упругой несущей фазы и различия реологических моделей на радиальную динамику пузырька пара внутри капли, находящейся во внешней вязкоупругой жидкости.

DOI: 10.31857/S0040364423030122

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большой интерес представляет изучение эмульсий с фазовыми переходами со следующей особенностью. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки пара. Этот процесс известен как акустическое испарение капель [1]. Использование данных эмульсий имеет огромный потенциал в биомедицине [2, 3], поскольку, в отличие от обычных газовых микропузырьков, капли жидкости могут быть достаточно маленькими и могут спокойно протекать через тонкие капилляры. К примеру, при использовании эхографической визуализации капли жидкости, протекающие через сосудистую систему опухолей, могут испаряться и использоваться в качестве контрастных веществ для получения изображения внутренней структуры опухоли [4]. В качестве капель жидкости обычно используют капли перфторуглеродов, таких как декафторбутан  $C_4F_{10}$ , октафторпропан  $C_3F_8$  и додекафторпентан  $C_5F_{12}$  [5–7]. Выбор данных веществ связан с тем, что они остаются метастабильными при физиологической температуре и не могут самопроизвольно испаряться. Для их испарения требуется дополнительная (акустическая) энергия.

В работе [8] приведены экспериментальные результаты по испарению капель октафторпропана и декафторбутана разных размеров, находящихся в

воде. В случае полного испарения капли также получены данные по радиальным колебаниям чистого пузырька пара. Показано, что увеличение начального размера капли приводит к более сильному росту пузырька пара, а также к увеличению амплитуды его колебаний. Экспериментальные данные по испарению капли додекафторпентана в воде представлены в [9]. Там же рассмотрена математическая модель пузырька пара с учетом диффузии газа в безграничной жидкости перфторуглерода. Отмечено, что без учета диффузии газа пузырек пара после первого акустического цикла схлопывается. Наличие диффузии газа позволяет пережить паровому пузырьку первый коллапс и продолжить рост, что хорошо подтверждается экспериментальными данными в наблюдаемых временных масштабах. Влияние концентрации газа на динамику акустических волн в смеси жидкости с паровыми пузырьками отмечено в работах [10, 11]. В частности, показано, что для мелкодисперсных систем (радиус пузырьков пара  $\sim 1$  мкм) влияние фазовых переходов уменьшается из-за роста массовой концентрации газа в пузырьках, связанного с действием капиллярных сил на межфазной поверхности. Обобщение математической модели на случай конечного размера капли перфторуглерода проведено в [12–14]. Исследовано влияние акустических параметров, свойств жидкости и размера капли на процесс акустиче-

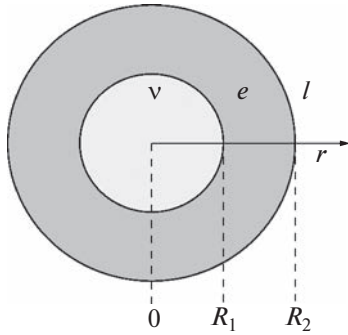


Рис. 1. Схема капли:  $v$  – пар,  $e$  – жидкая фаза,  $l$  – несущая жидкость.

ского испарения. Чтобы предотвратить быстрое растворение капель в несущей жидкости, их обычно покрывают полимерной оболочкой [15].

В [16, 17] разработана математическая модель, описывающая радиальные колебания пузырька пара внутри капли перфторуглерода, покрытой вязкоупругой несжимаемой оболочкой. Вязкоупругость оболочки учитывается по модели Кельвина–Фойгта. Показано, что увеличение размера и модуля сдвига оболочки снижает рост пузырька и замедляет его радиальные колебания. Таким образом, установлено, что механические свойства оболочки играют важную роль в процессе акустического испарения капли и сильно влияют на оптимальные акустические параметры. С другими публикациями, посвященными динамике пузырьков, можно ознакомиться в обзорах [18–20].

В настоящей работе представлена математическая модель и выполнено численное моделирование роста и радиальных колебаний пузырька пара внутри капли перфторуглерода, находящейся во внешней вязкоупругой жидкости. Предлагаемая модель может использоваться как для описания лабораторных экспериментов, где в качестве окружающей жидкости обычно используется вода, так и для описания различных приложений, где в качестве несущей фазы может выступать более сложная жидкость. К примеру, в [21] рассмотрена акустика сложной вязкоупругой смеси полидиметилсилоксана с газовыми пузырьками. Показано существенное влияние упругости несущей фазы на коэффициент затухания и фазовую скорость волны.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается капля жидкости с пузырьком пара в центре внутри массива вязкоупругой жидкости (рис. 1).

Уравнения неразрывности и импульса в сферической системе координат при наличии центральной симметрии и в предположении несжимаемости жидких фаз записываются в виде [22]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_v \rho_v) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}, \quad r < R_1; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_k) = 0, \quad r > R_1, \quad k = e, l; \quad (2)$$

$$\rho_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_k}{\partial r} + \frac{\partial \tau_k}{\partial r} + \frac{3\tau_k}{r}, \quad (3)$$

$$r > R_1, \quad k = e, l.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $r$  – радиальная координата,  $t$  – время,  $u$  – радиальная скорость,  $p$  – давление,  $\tau$  – нормальное напряжение. Решение уравнения (2) записывается следующим образом:

$$u_k = \frac{R_1^2}{r^2} U_k, \quad k = e, l, \quad (4)$$

где  $U_k$  – скорость жидкости на границе включения. Записываются граничные условия на границе  $R_1$  с фазовыми переходами и  $R_2$  без фазовых переходов [22]

$$p_e(R_1) - p_v(R_1) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \tau_e(R_1) - \tau_v(R_1) + J(u_e(R_1) - u_v(R_1)),$$

$$J = \rho_v(\dot{R}_1 - U_v) = \rho_e(\dot{R}_1 - U_e), \quad (5)$$

$$p_l(R_2) - p_e(R_2) + \frac{2\sigma_2}{R_2} = \tau_l(R_2) - \tau_e(R_2),$$

$$u_l(R_2) = u_e(R_2) = \dot{R}_2.$$

Здесь  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $U_v$  – скорость пара;  $J$  – поток массы, обусловленный изменением фазы на границе раздела пар–жидкость. Нормальные напряжения для пара и капли жидкости задаются в виде

$$\tau_v = 2\mu_v \frac{\partial u_v}{\partial r} - \frac{2\mu_v}{3r^2} \frac{\partial r^2 u_v}{\partial r}, \quad \tau_e = 2\mu_e \frac{\partial u_e}{\partial r}, \quad (6)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость. Поскольку вязкость пара меньше, чем вязкость жидкости, поэтому  $\tau_v \ll \tau_e$  и, следовательно, в дальнейшем величиной  $\tau_v$  можно пренебречь.

Реологическая модель, учитывающая вязкоупругость несущей жидкости, записывается в общем виде [23–25] так, что в частных случаях из нее вытекают модели Кельвина–Фойгта ( $\lambda_{1l} = \lambda_{2l} = 0$ ), Максвелла ( $G_l = \lambda_{2l} = 0$ ), Зенера ( $\lambda_{2l} = 0$ ) и трехконстантная модель Олдройда ( $G_l = 0$ ):

$$\lambda_{1l} \dot{\tau}_l + \tau_l = 2G_l \epsilon_l + 2\mu_l \dot{\epsilon}_l + 2\mu_l \lambda_{2l} \ddot{\epsilon}_l, \quad (7)$$

где  $\lambda_{1l}$  – время релаксации вязкоупругой жидкости,  $\lambda_{2l}$  – время ретардации,  $G_l$  – модуль сдвига,  $\epsilon_l$  – деформация. По определению

$$\dot{\epsilon}_l = \frac{\partial u_l}{\partial r} \Big|_{R_2} = -\frac{2R_2^2 \dot{R}_2}{r^3},$$

поэтому

$$\varepsilon_l = -\frac{2}{3r^3}(R_2^3 - R_{20}^3), \quad \ddot{\varepsilon}_l = -\frac{4R_2\dot{R}_2^2 + 2R_2^2\ddot{R}_2}{r^3},$$

где  $R_{20}$  – начальный радиус капли. Представим решение уравнения (7) в виде

$$\tau_l = -\frac{4\mu_l}{r^3}D_l, \quad (8)$$

тогда можно записать дифференциальное уравнение для определения  $D_l$

$$\lambda_{1l}\dot{D}_l + D_l = \frac{G_l(R_2^3 - R_{20}^3)}{3\mu_l} + R_2^2\dot{R}_2 + \lambda_{2l}(2R_2\dot{R}_2^2 + R_2^2\ddot{R}_2). \quad (9)$$

Уравнение импульса (3) интегрируется от  $R_1$  до бесконечности. В этом случае интервал от  $R_1$  до  $R_2$  будет соответствовать параметрам капли жидкости, от  $R_2$  до бесконечности – параметрам несущей жидкости. Тогда, приняв во внимание (4)–(8), после математических преобразований выводится уравнение радиальных колебаний рассматриваемого включения

$$\rho_{d1}R_1\dot{U}_e - 0.5\rho_{d2}U_e^2 + 2\rho_{d1}\dot{R}_1U_e = p_v - p_l - \frac{2\sigma_d}{R_1} + \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_e}\right)J^2 - \frac{4\mu_e}{R_1}\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)U_e - \frac{4\mu_l D_l}{R_2^3}, \quad (10)$$

$$\rho_{d1} = \rho_e + (\rho_l - \rho_e)\frac{R_1}{R_2}, \quad \rho_{d2} = \rho_e + (\rho_l - \rho_e)\frac{R_1^4}{R_2^4},$$

$$\sigma_d = \sigma_1 + \sigma_2\frac{R_1}{R_2}, \quad p_l = p_\infty + p_a,$$

$$\dot{R}_1 = U_e + \frac{J}{\rho_e}. \quad (11)$$

В уравнении (10) слагаемое  $p_a$  определяет внешнее акустическое давление. Если принять  $J = 0$ , то уравнение (10) совпадает с полученным ранее уравнением в работе [26].

Необходимо отметить, что в [27–30] при исследовании эволюции одиночного сферического парового пузырька в жидком углеводороде установлена важность учета неоднородности плотности и температуры пузырька. В частности, показано, что температура пара в однородном пузырьке ( $\partial\rho_v/\partial r = \partial T_v/\partial r = 0$ ) близка к минимальной температуре пара (около границы) в гомобарическом пузырьке ( $\partial\rho_v/\partial r \neq 0$ ,  $\partial T_v/\partial r \neq 0$ ). Оценки, выполненные в [16], показывают, что для перфторуглеродов длина термодиффузии составляет порядка 10 см для частот возмущений от 1 до 10 МГц. В результате можно принять, что температура внутри пузырька пара равна температуре на его

поверхности. Таким образом, давление и температура внутри пузырька определяются по уравнению Клапейрона–Клаузиуса

$$p_v = p_\infty \exp\left[\frac{l}{B_v}\left(\frac{1}{T_{s0}} - \frac{1}{T_v}\right)\right], \quad (12)$$

где  $l$  – удельная теплота парообразования жидкости,  $T_{s0}$  – температура на линии насыщения,  $T_v$  – температура пара внутри пузырька,  $B_v$  – приведенная газовая постоянная.

Далее нужно получить уравнение, описывающее эволюцию температуры  $T_v$ . Для этого записываются уравнения сохранения массы (1) и энергии [31] для паровой фазы в сферической системе координат:

$$\rho_v c_v \frac{\partial T_v}{\partial t} = \frac{\partial p_v}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\rho_v = p_v / (B_v T_v), \quad (14)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость. Используются следующие предположения: пар в пузырьке подчиняется закону идеального газа, плотность пара не постоянна во времени, давление, плотность и температура внутри пузырька однородны ( $\partial p_v/\partial r = \partial \rho_v/\partial r = \partial T_v/\partial r = 0$ ), сохраняется адиабатичность пузырька (тепловой поток  $q_v$  пара равен нулю). Следуя работе [32], умножаем уравнение (1) на  $c_v T_v$  и складываем с уравнением (13), получая

$$\frac{\partial(\rho_v c_v T_v)}{\partial t} + \frac{c_v \rho_v T_v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_v) - \frac{\partial p_v}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Используя уравнение состояния (14), связь между теплоемкостью идеального газа, газовой постоянной и показателем адиабаты и проинтегрировав уравнение (15), находим

$$u_v = -\frac{r}{3\gamma_v} \frac{\dot{p}_v}{p_v}. \quad (16)$$

Комбинируя полученное выражение (16) с (5), а также с уравнением Клапейрона–Клаузиуса (12), приходим к дифференциальному уравнению относительно температуры  $T_v$

$$\dot{T}_v = \frac{3\gamma_v B_v T_v^2}{l R_1} \left[ \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_e} \right) J - U_e \right]. \quad (17)$$

Неизвестный параметр  $R_2$  определяется по закону сохранения массы капли

$$\rho_e \frac{d}{dt}(R_2^3 - R_1^3) = -3R_1^2 J, \quad \text{или} \quad \dot{R}_2 = \frac{R_1^2}{R_2^2} U_e. \quad (18)$$

Для замыкания системы уравнений (9)–(12), (14), (17), (18) необходимо задать массовый поток  $J$ . Поскольку внутри пузырька пара температура од-

нородна и не зависит от радиальной координаты, запишем уравнения теплопроводности для капли:

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \frac{\alpha_e}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{12\mu_e u_e^2}{\rho_e c_e r^2}, \quad (19)$$

$$\alpha_e = \frac{\chi_e}{\rho_e c_e}.$$

Здесь  $\chi$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности. Задаются граничные условия

$$r = R_1: \quad T_e = T_v, \quad J = \frac{\chi_e}{l} \frac{\partial T_e}{\partial r}; \quad (20)$$

$$r = R_2: \quad T_e = T_\infty.$$

Как и в работе [8], здесь сделано предположение, что температура окружающей каплю жидкости постоянна. Таким образом, для определения потока массы  $J$  потребуется решить уравнение теплопроводности в частных производных (19) с граничными условиями (20). Итак, получена замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений (9)–(12), (14), (17)–(20), определяющая рост и радиальные колебания пузырька пара в капле перфторуглерода внутри массива вязкоупругой жидкости.

### НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Если предположить, что пузырек пара в начальный момент времени существует в виде зародыша  $R_1(0) = R_{10}$  и покоится, то скорость границы раздела жидкость–пар удовлетворяет условию  $\dot{R}_1(0) = 0$ . Начальное значение радиуса капли также определено  $R_2(0) = R_{20}$ . Таким образом, давление в пузырьке в начальный момент времени определяется выражением вида

$$p_v(0) = p_{v0} = p_\infty + \frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}},$$

а его температура находится по уравнению Клапейрона–Клаузиуса

$$T_v(0) = T_{v0} = \left( \frac{1}{T_{s0}} - \frac{B_v}{l} \ln \frac{p_{v0}}{p_\infty} \right)^{-1}.$$

Для уравнения (9) начальное условие задается в виде  $D_l(0) = 0$ , а для уравнения теплопроводности (16) в виде  $T_e(r, 0) = T_l(r, 0) = T_\infty$ . Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (9)–(11), (17), (18) проводится методом Рунге–Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага. Для устранения вычислительных проблем при решении уравнения теплопроводности (19), связанных с движением стенок пузырька и капли, по аналогии с [16, 31] границы фиксируются с помощью безразмерных переменных.

Для внутренней жидкой фазы вводится переменная  $x = (R_2 - r)/(R_2 - R_1)$ , в этом случае если  $r \in [R_1, R_2]$ , то  $x \in [0, 1]$ . Тогда частные производные записываются как

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{R}_2 - \dot{h}x}{h} \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = R_2 - R_1,$$

и уравнение теплопроводности (19) принимает вид

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = V_{e2} \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} + V_{e1} \frac{\partial T_e}{\partial x} + V_{e0}, \quad V_{e2} = \frac{\alpha_e}{h^2},$$

$$V_{e1} = -\left[ \frac{1}{h} \left( \dot{R}_2 - \dot{h}x - \frac{R_1^2 U_e}{(R_2 - hx)^2} \right) + \frac{2\alpha_e}{h(R_2 - hx)} \right], \quad (21)$$

$$V_{e0} = \frac{12\mu_e}{\rho_e c_e} \frac{R_1^4 U_e^2}{(R_2 - hx)^6}.$$

Для аппроксимации уравнения (21) применяется неявная схема с погрешностями первого порядка по времени и второго порядка по пространству. Пространственная координата  $x$  дискретизируется  $N$  точками с шагом  $\Delta x$ . Таким образом, частные производные температур могут оцениваться следующими конечно-разностными схемами второго порядка:

$$\frac{\partial T_e}{\partial x} = \frac{T_e|_{i+1} - T_e|_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$\frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} = \frac{T_e|_{i+1} - 2T_e|_i + T_e|_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$i = 2 \dots N - 1.$$

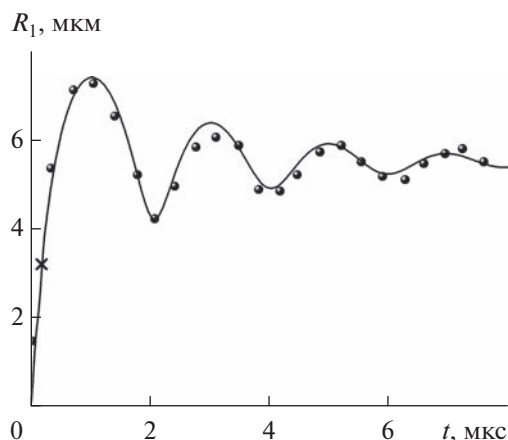
В итоге получается система трехточечных уравнений, которая может быть решена, например, методом прогонки. Когда поле температур на временном шаге найдено, массовый поток  $J$  находится по следующей формуле:

$$J = \frac{\chi_e}{l} \frac{3T_v - 4T_e|_2 + T_e|_3}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для проверки построенной математической модели и выбранной схемы численной реализации в частном случае на рис. 2 приведено сравнение радиуса пузырька пара в зависимости от времени с имеющимися экспериментальными данными [8], полученными при испарении капли октафторпропана, находящейся в воде. Температура воды  $T_\infty = 310$  К, давление  $p_\infty = 10^5$  Па. Теплофизические параметры октафторпропана взяты из работ [8, 22]. Внешнее акустическое давление задано в виде

$$p_a = \begin{cases} -P_a \sin(2\pi f_a t), & 0 \leq t \leq N_a/f_a, \\ 0, & t > N_a/f_a, \end{cases}$$

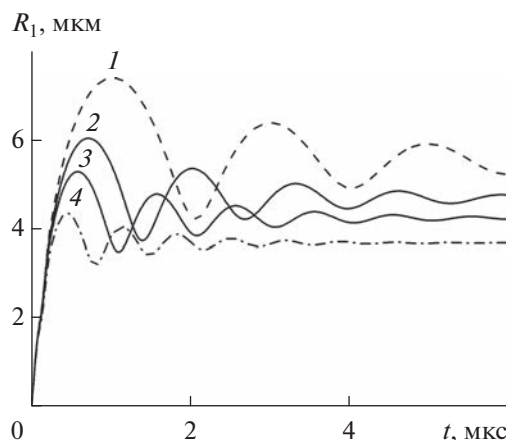


**Рис. 2.** Сравнение зависимости радиуса пузырька пара от времени (кривая) с экспериментальными данными [8] (маркеры); крестик – момент полного испарения капли.

где  $P_a = 0.5 \times 10^6$  Па,  $f_a = 8 \times 10^6$  Гц,  $N_a = 2$ . Начальный радиус пузырька пара  $R_{10} = 10^{-7}$  м, а начальный радиус капли  $R_{20} = 10^{-6}$  м. Следуя работе [8], вязкость несущей фазы  $\mu_l = 0.006$  Па с. В случае, когда капля полностью превращалась в пар (текущий радиус капли совпадал с радиусом пузырька пара), полагалось, что интенсивность массообмена  $J$  приравняется к нулю. В этом случае далее совершал радиальные колебания уже чистый пузырек пара. Наблюдается хорошее согласие теории с экспериментом (рис. 2). Таким образом, математическая модель и ее численная реализация способны правильно воспроизводить ключевые физические процессы, лежащие в основе динамики испарения летучих контрастных веществ с фазовыми переходами.

Теперь рассмотрим динамику капли октафторпропана, находящейся в вязкоупругой жидкости. На рис. 3 приведены зависимости радиуса пузырька пара от времени при различных значениях модуля сдвига несущей фазы. Остальные параметры те же, что и на рис. 2. Как и следовало ожидать, увеличение модуля сдвига несущей фазы приводит к ослаблению роста парового пузырька, а также к более быстрому затуханию его радиальных колебаний. Таким образом, достаточно упругая внешняя жидкость сдерживает радиальные движения включения.

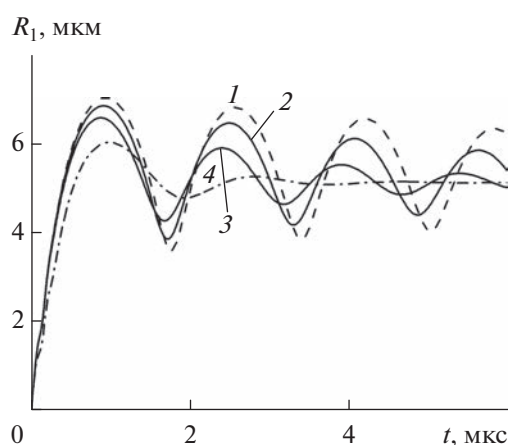
На рис. 4 представлены зависимости радиуса пузырька пара от времени при различных временах релаксации несущей фазы. Видно, что увеличение времени релаксации упругой несущей фазы приводит к более слабому затуханию радиальных колебаний пузырька и к его более быстрому росту. Время релаксации – это время, необходимое вязкоупругой среде или материалу для возврата



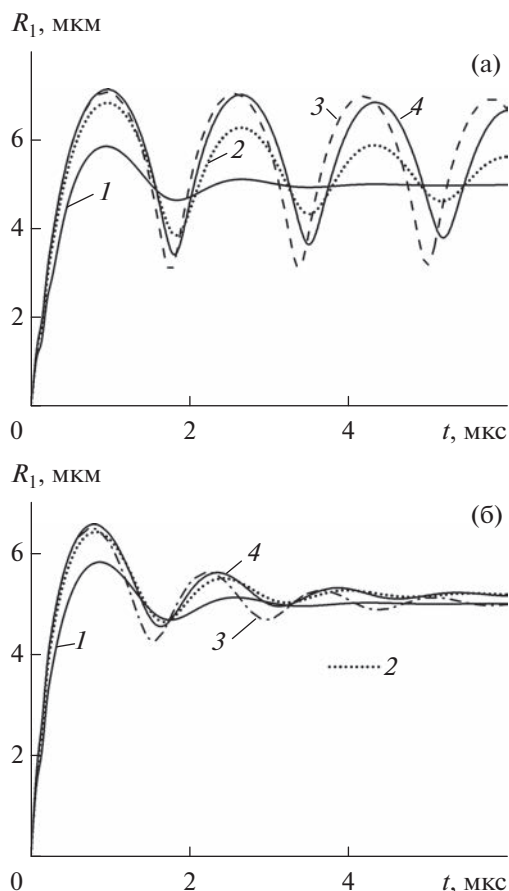
**Рис. 3.** Зависимости радиуса пузырька пара от времени при  $\mu_l = 10^{-3}$  Па с,  $\lambda_{1l} = \lambda_{2l} = 0$  и различных модулях сдвига: 1 –  $G_1 = 0$ , 2 –  $5 \times 10^4$ , 3 –  $10^5$ , 4 –  $2 \times 10^5$  Па.

в начальное ненапряженное состояние. Таким образом, малые времена релаксации упругой жидкости подавляют радиальные движения пузырька, поскольку несущая фаза допускает быстрый возврат в начальное ненапряженное состояние.

На рис. 5 приведены зависимости радиуса пузырька пара от времени при испарении капли октафторпропана, находящейся в вязкоупругой жидкости, с учетом различных линейных реологических моделей и при разных временах релаксации несущей жидкости. Так, для модели Кельвина–Фойгта пузырек пара растет меньше из-за упругости несущей жидкости, а его колебания сильно затухают (рис. 5а). Однако для моделей, в кото-



**Рис. 4.** Зависимости радиуса пузырька пара от времени при  $G_1 = 3 \times 10^3$  Па,  $\lambda_{2l} = 0$ ,  $\mu_l = 10^{-3}$  Па с и различных временах релаксации: 1 –  $\lambda_{1l} = 7 \times 10^{-7}$ , 2 –  $5 \times 10^{-7}$ , 3 –  $3 \times 10^{-7}$ , 4 –  $10^{-9}$  с.



**Рис. 5.** Зависимости радиуса пузырька пара от времени при  $G_l = 10^4$  Па,  $\mu_l = 0.015$  Па с,  $\lambda_{2l} = \lambda_{1l}/5$  с учетом различных реологических моделей: 1 – модель Кельвина–Фойгта, 2 – Олдройда, 3 – Зенера, 4 – Максвелла; (а) –  $\lambda_{1l} = 10^{-6}$  с, (б) –  $2 \times 10^{-7}$ .

рых присутствует время релаксации, рост пузырька и его колебания становятся более интенсивными. При текущем значении времени релаксации в 1 мкс упругость играет лишь небольшую роль в модели Зенера, но частота колебаний увеличивается по сравнению с моделью Максвелла. Время ретардации в модели Олдройда ослабляет рост пузырька пара и усиливает затухание его радиальных колебаний. При меньшем значении времени релаксации  $\lambda_{1l}$  (рис. 5б) амплитуда колебаний пузырька пара существенно уменьшается, а затухание этих колебаний происходит быстрее. Но в начальный промежуток времени все же происходит более быстрый рост пузырька пара. При этом по мере уменьшения  $\lambda_{1l}$  и с течением времени кривая  $R_1(t)$  по модели Зенера начинает ближе прилегать к кривой, построенной по модели Кельвина–Фойгта. Соответствующая тенденция наблюдается и для двух кривых (2 и 4) по моделям Максвелла и Олдройда. Все дело в том, что, если

обратиться к формуле (7), то при  $\lambda_{1l} \rightarrow 0$  модель Зенера переходит в модель Кельвина–Фойгта. Из физических соображений  $\lambda_{2l} < \lambda_{1l}$ , поэтому в данном случае и  $\lambda_{2l} \rightarrow 0$ , тогда модель Олдройда переходит в модель Максвелла. Таким образом, учет релаксации в модели вязкоупругости несущей фазы вызывает на начальном промежутке времени более быстрый рост пузырька пара внутри капли жидкости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически исследована динамика роста парового пузырька под действием акустического давления внутри капли перфторуглерода, находящейся во внешней вязкоупругой жидкости. Проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы.

– С увеличением модуля сдвига упругой несущей фазы происходит меньший рост парового пузырька, а его радиальные колебания быстро затухают.

– Увеличение времени релаксации упругой несущей фазы приводит к меньшему затуханию радиальных колебаний пузырька и к его более быстрому росту.

– С использованием модели Кельвина–Фойгта рост пузырька пара уменьшается из-за упругости несущей жидкости, а его колебания сильно затухают. При больших временах релаксации упругость играет лишь небольшую роль в модели Зенера, но частота колебаний увеличивается по сравнению с моделью Максвелла. Время ретардации в модели Олдройда по сравнению с моделью Максвелла снижает рост пузырька пара и усиливает затухание его радиальных колебаний. При малых временах релаксации в рассматриваемых моделях амплитуда колебаний пузырька пара существенно уменьшается, а затухание этих колебаний происходит быстрее.

– Учет релаксации в моделях вязкоупругости несущей фазы вызывает в начальный период времени более быстрый рост пузырька пара внутри капли жидкости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00025).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kripfgans O.D., Fowlkes J.B., Miller D.L., Eldevik O.P., Carson P.L. Acoustic Droplet Vaporization for Therapeutic and Diagnostic Applications // *Ultrasound Med. Biol.* 2000. V. 26. P. 1177.
2. Sheeran P.S., Dayton P.A. Phase-change Contrast Agents for Imaging and Therapy // *Curr. Pharm. Des.* 2012. V. 18. P. 2152.
3. Kee A.L.J., Teo B.M. Biomedical Applications of Acoustically Responsive Phase Shift Nanodroplets:



- Current Status and Future Directions // *Ultrason. Sonochem.* 2019. V. 56. P. 37.
4. *Rapoport N., Gao Z., Kennedy A.* Multifunctional Nanoparticles for Combining Ultrasonic Tumor Imaging and Targeted Chemotherapy // *J. Natl. Cancer Inst.* 2007. V. 99. № 14. P. 1095.
  5. *Sheeran P.S., Wong V.P., Luois S., McFarland R.J., Ross W.D., Feingold S., Matsunaga T.O., Dayton P.A.* Decafluorobutane as a Phase-change Contrast Agent for Low-energy Extravascular Ultrasonic Imaging // *Ultrason. Med. Biol.* 2011. V. 37. P. 1518.
  6. *Sheeran P.S., Luois S., Dayton P.A., Matsunaga T.O.* Formulation and Acoustic Studies of a New Phase-shift Agent for Diagnostic and Therapeutic Ultrasound // *Langmuir.* 2011. V. 27. P. 10412.
  7. *Sheeran P.S., Luois S., Mullin L.B., Matsunaga T.O., Dayton P.A.* Design of Ultrasonically-activatable Nanoparticles Using Low Boiling Point Perfluorocarbons // *Biomaterials.* 2012. V. 33. P. 3262.
  8. *Doinikov A.A., Sheeran P.S., Bouakaz A., Dayton P.A.* Vaporization Dynamics of Volatile Perfluorocarbon Droplets: a Theoretical Model and in Vitro Validation // *Med. Phys.* 2014. V. 41. P. 102901.
  9. *Shpak O., Stricker L., Versluis M., Lohse D.* The Role of Gas in Ultrasonically Driven Vapor Bubble Growth // *Phys. Med. Biol.* 2013. V. 58. P. 2523.
  10. *Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И.* Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления // *ТВТ.* 2019. Т. 57. № 5. С. 748.
  11. *Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И.* Особенности отражения прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкостей при прямом их падении // *ТВТ.* 2019. Т. 57. № 2. С. 284.
  12. *Cho S., Son G.* A Level Set Method for Bubble Growth in Acoustic Droplet Vaporization // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* 2018. V. 93. P. 83.
  13. *Cho S., Son G.* Numerical Study of Droplet Vaporization under Acoustic Pulsing Conditions // *J. Mech. Sci. Technol.* 2019. V. 33. № 4. P. 1673.
  14. *Park S., Son G.* Numerical Investigation of Acoustic Vaporization Threshold of Microdroplets // *Ultrason. Sonochem.* 2021. V. 71. P. 105361.
  15. *Rapoport N.* Phase-shift, Stimuli-responsive Perfluorocarbon Nanodroplets for Drug Delivery to Cancer // *Wiley Interdiscip. Rev. Nanomed. Nanobiotechnol.* 2012. V. 4. № 5. P. 492.
  16. *Guedra M., Coulouvrat F.* A Model for Acoustic Vaporization of Encapsulated Droplets // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2015. V. 138. № 6. P. 3656.
  17. *Lacour T., Brasier T., Coulouvrat F.* Ultimate Fate of a Dynamical Bubble/Droplet System Following Acoustic Vaporization // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. P. 051702.
  18. *Prosperetti A.* Vapor Bubbles // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2017. V. 49. P. 221.
  19. *Вараксин А.Ю.* Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // *ТВТ.* 2013. Т. 51. № 3. С. 421.
  20. *Вараксин А.Ю.* Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований // *ТВТ.* 2020. Т. 58. № 4. С. 646.
  21. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А.* Акустические волны в вязкоупругих пузырьковых средах // *ТВТ.* 2019. Т. 57. № 1. С. 150.
  22. *Губайдуллин Д.А., Панин К.А., Федоров Ю.В.* Акустика жидкости с покрытыми оболочкой каплями при наличии фазовых переходов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 4. С. 41.
  23. *Warnez M.T., Johnsen E.* Numerical Modeling of Bubble Dynamics in Viscoelastic Media with Relaxation // *Phys. Fluids.* 2015. V. 27. P. 063103.
  24. *Zilonova E., Solovchuk M., Sheu T.W.H.* Bubble Dynamics in Viscoelastic Soft Tissue in High-intensity Focal Ultrasound Thermal Therapy // *Ultrason. Sonochem.* 2018. V. 40. P. 900.
  25. *Zilonova E., Solovchuk M., Sheu T.W.H.* Dynamics of Bubble-bubble Interactions Experiencing Viscoelastic Drag // *Phys. Rev. E.* 2019. V. 99. P. 023109.
  26. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Акустические волны в жидкости с газовыми включениями, имеющими жидкую прослойку и вязкоупругую оболочку // *ТВТ.* 2021. Т. 59. № 4. С. 533.
  27. *Yang H., Desyatov A.V., Cherkasov S.G., McConnell D.B.* On the Fulfillment of the Energy Conservation Law in Mathematical Models of Evolution of Single Spherical Bubble // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 51. P. 3623.
  28. *Десятков А.В., Ильмов Д.Н., Кубышкин А.П., Черкасов С.Г.* Математическое моделирование эволюции одиночного сферического парового пузырька на основе гомобарической модели // *ТВТ.* 2011. Т. 49. № 3. С. 436.
  29. *Ильмов Д.Н., Черкасов С.Г.* Теплофизические процессы при сжатии парового пузырька в жидком углеводороде на основе гомобарической модели // *ТВТ.* 2012. Т. 50. № 5. С. 676.
  30. *Ильмов Д.Н., Филатов Н.И., Черкасов С.Г.* Сжатие паровых включений в жидком водороде // *Тепловые процессы в технике.* 2015. № 8. С. 350.
  31. *Haо Y., Prosperetti A.* The Dynamics of Vapor Bubbles in Acoustic Pressure Fields // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. P. 2008.
  32. *Десятков А.В., Ильмов Д.Н., Черкасов С.Г.* Математическое моделирование эволюции одиночного сферического парового пузырька при его сжатии внешним давлением // *ТВТ.* 2008. Т. 46. № 1. С. 92.