

УДК 532.529

ТРЕХМЕРНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ И НЕКОТОРЫЕ “АНОМАЛЬНЫЕ” ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

© 2023 г. О. А. Синкевич*, Г. О. Зинченко

Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Москва, Россия

*E-mail: oleg.sinkevich@ifm.mpei.ac.ru

Поступила в редакцию 31.05.2022 г.

После доработки 26.07.2022 г.

Принята к публикации 13.10.2022 г.

Исследованы возможности образования и характеристики стационарных сосредоточенных вихрей специального типа $\nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}$ применительно к атмосфере Земли. Дано обобщение данного типа вихрей, относящихся к классу течений Громеки–Бельтрами, Н.Е. Жуковского и С.Г. Чефранова, на сферическую систему координат. Построено два типа новых решений задачи о сосредоточенном вихре с двумя и тремя компонентами вектора скорости: 1) центры декартовой и сферической системы координат совпадают; 2) сферический вихрь находится над твердой поверхностью. Найлены распределения векторных полей скоростей и давления в сосредоточенном вихре. Данное решение расширяет ранее изученную авторами задачу о сосредоточенном вихре в цилиндрической системе координат. Проведен анализ влияния толщины сферического слоя на изменение характеристик течения. Обсуждается использование полученных характеристик сосредоточенных вихрей для интерпретации ряда наблюдаемых “аномальных” явлений в атмосфере, типа НЛО, шаровых молний, для объяснения которых часто привлекаются механизмы, лежащие за пределами современной физики.

DOI: 10.31857/S0040364423030213

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время накопилось большое количество наблюдений о различного рода аномальных явлениях в атмосфере Земли: шаровые молнии [1, 2], “огненные боксеры”, НЛО [3], строгие геометрические орнаменты на полях и т.п. Проблема НЛО обсуждается на сотне сайтов и содержит более миллиона публикаций, где для объяснения реально наблюдаемых или ошибочно интерпретируемых явлений авторы этих публикаций пытаются привлечь фантастические гипотезы, включая участие инопланетян. Возможно, что данные публикации полезны для публицистических и экономических целей. Однако современное развитие науки и, в частности, методов описания турбулентных течений позволяет, хотя бы качественно, объяснить механизмы возникновения наблюдаемых явлений. Анализ «аномальных», с точки зрения неподготовленного исследователя, явлений требует одновременного учета многих физических факторов: гидродинамики турбулентных течений, атмосферного электричества, влияния космических излучений и возмущений в магнитосфере Земли. Только учет всех факторов даст понять и предсказать возможность появления аномальных явлений, не привлекая потусторонние силы. В этой связи интерес представляют частные случаи вихревых течений, обладающих максимальной спиральностью, в которых направ-

ления векторов завихренности и скорости коллинеарны $\nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}$ и которые относятся к классу течений Н.Е. Жуковского [4], Громеки–Бельтрами [5, 6], С.Г. Чефранова [7]. Как будет показано ниже, эти течения допускают локализованные в пространстве вихревые течения, дополняющие торнадо и пылевые вихри.

Существуют два частных случая, когда нелинейная система стационарных уравнений турбулентного течения несжимаемой среды

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} - \nu \Delta \mathbf{u} = 0$$

при $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ распадается на две подсистемы:

$$1) \nu \neq 0, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \nu \Delta \mathbf{u} = 0, \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0.$$

$$2) \nu = 0, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} = 0, \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0.$$

Во втором случае существует нетривиальное решение, обладающее максимальной спиральностью $S = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{u} = k\mathbf{u}^2$, в котором скорость и давление находятся из уравнений

$$\boldsymbol{\Omega} = k\mathbf{u}, \quad \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0.$$

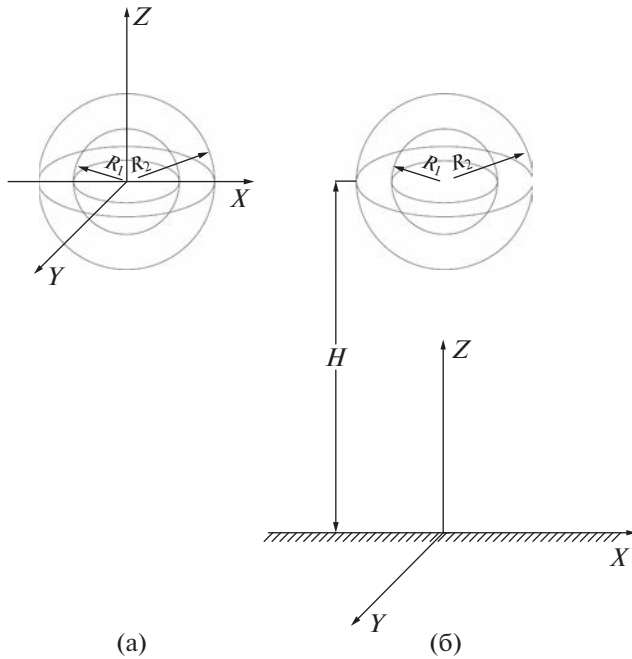


Рис. 1. Сферический слой, в котором центры декартовой и сферической систем координат совпадают (а), (б) — сфера вынесена на расстояние H от центра декартовой системы координат.

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости среды; ν — коэффициент турбулентной вязкости; ρ_0 — постоянная плотность среды; k — неизвестный параметр, который находится в процессе решения задачи.

Второй случай допускает аналитическое решение. Ранее в [8] были исследованы вихревые течения данного класса с двумя и тремя компонентами скорости в цилиндрической системе координат. В данной работе построено решение для течения, сосредоточенного в сферическом слое, находящемся на определенной высоте H от поверхности (рис. 1), с двумя и тремя компонентами вектора скорости.

Покажем возможность нахождения поля скоростей аналитически в сферическом слое

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

когда выполняется условие

$$\Omega \equiv \nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}, \quad k = \text{const.}$$

Зная поле скоростей, можно найти распределения давлений из уравнения

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим более детально методы построения решения задачи (1), (2) в сферической области, когда вихревое течение происходит в сфере, поднятой на высоту H от поверхности земли или

воды (рис. 1), используя следующие связи между декартовыми и сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = H + r \cos \theta. \end{cases}$$

Учитывая, что система дифференциальных уравнений и, следовательно, ее решение инвариантны относительно смещения координат на постоянную величину, приведем перевод полученного ранее решения в новые результаты.

С учетом условия коллинеарности векторов скорости и завихренности уравнение сохранения импульса Эйлера распадается на систему уравнений для скорости (1) и на уравнение (2) для нахождения распределения давления.

Рассмотрим более детально особенности наблюдаемых вихревых течений.

СТАЦИОНАРНОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕХ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ

Когда присутствуют все три проекции скорости, зависящие от трех координат $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (u_r(\mathbf{r}), u_\theta(\mathbf{r}), u_\varphi(\mathbf{r}))$, $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, то систему уравнений (1) и уравнение неразрывности можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) = k u_r, \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \right) = k u_\theta, \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = k u_\varphi, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Считая жидкость несжимаемой $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, сведем уравнение (1) к следующей системе:

$$\begin{cases} \Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = -k^2 u_r, \\ \Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} = -k^2 u_\varphi, \\ \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = -k^2 u_\theta, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} -$$

оператор Лапласа.

Используя уравнение неразрывности, можно преобразовать первое уравнение системы (4) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} = -k^2 u_r; \quad u_r(R_1, \varphi, \theta) = 0; \quad (5) \\ u_r(R_2, \varphi, \theta) = 0, \quad R_2 > R_1; \\ u_r(r, \varphi, \theta) = u_r(r, \varphi + 2\pi, \theta). \end{aligned}$$

Используя метод разделения переменных

$$u_r = R(r)T(\theta)F(\varphi),$$

получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + (r^2 k^2 - \varepsilon^2) R = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \xi^2 = 0, \\ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + (\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \xi^2) T = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где k, ε, ξ — неизвестные константы, которые будут найдены в ходе решения.

Замена переменной $R = R^*/r$ в первом уравнении системы (6) приводит к дифференциальному уравнению Бесселя порядка ε , решением которого является линейная комбинация функций Бесселя первого $J_\varepsilon(k_n r)$ и второго рода $Y_\varepsilon(k_n r)$. Из граничных условий (5) находим параметр k (здесь рассмотрены два предельных случая: $\rho = R_1/R_2 \ll 1$; $\rho \approx 1$).

Решением первого уравнения системы (6) является следующая функция:

$$\begin{aligned} R_n = C_n Y_\varepsilon(k_n R_1) \frac{1}{r} \left(\frac{J_\varepsilon(k_n r)}{J_\varepsilon(k_n R_1)} - \frac{Y_\varepsilon(k_n r)}{Y_\varepsilon(k_n R_1)} \right), \quad (7) \\ \rho \ll 1, k_{n,\varepsilon} = \mu_n^{(\varepsilon)}/R_2; \quad \rho \approx 1, k_{n,\pi} = \frac{n\pi}{R_2 - R_1}. \end{aligned}$$

Решение (7) при $\rho \ll 1$ соответствует сфере большого радиуса, когда градиенты скоростей по радиальному направлению малы. Решение (7) при $\rho \approx 1$ соответствует сфере малого радиуса.

Полное решение задачи содержит бесконечный ряд по всем R_n . При $n \neq 1$ возможны перепады скоростей на границах сферы, вплоть до возможной смены направления движения в пределах вихря. В дальнейшем для наглядной физической интерпретации решения принимается $n = 1$.

Решение второго уравнения системы (6) имеет вид суммы тригонометрических функций. Также

используя граничные условия и оставляя только нечетную составляющую, получаем

$$F_l = B_l \sin(\xi_l \varphi), \quad \xi_l = l, \quad l = 1, 2, \dots, \infty \quad (8)$$

и оставим только первый член данного решения ($l = 1$).

Последнее уравнение системы (6) необходимо преобразовать перед решением:

$$\sin^2 \theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + (\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \xi^2) T = 0. \quad (9)$$

Проводя замену переменных

$$\varepsilon^2 = \zeta(\zeta + 1), \quad x = \cos \theta, \quad T = y \sin^\xi \theta,$$

можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2(\xi + 1)x \frac{\partial y}{\partial x} + (\xi - \zeta)(\xi + \zeta + 1)y = 0.$$

Решение полученного уравнения можно представить в виде производной порядка ξ общего решения уравнения Лежандра

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 y_\zeta}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial y_\zeta}{\partial x} + \zeta(\zeta + 1)y_\zeta = 0$$

по независимой переменной x

$$y = \frac{d^\xi y_\zeta}{dx^\xi} = \frac{dy_\zeta}{dx},$$

где y_ζ — общее решение уравнения Лежандра при любом значении параметра ζ .

Решение данного уравнения хорошо известно. Используя функции Лежандра при следующих параметрах:

$$\zeta_m = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon_m^2}}{2} \approx \varepsilon_m - \frac{1}{2} = m,$$

$$\varepsilon_m = \frac{2m + 1}{2}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty,$$

можно получить достаточно простую функцию для азимутальной зависимости при $\zeta = 1, \varepsilon = \frac{3}{2}$:

$$T = A \sin \theta. \quad (10)$$

Следует помнить, что другие наборы параметров ζ_m, ε_m приводят к другим типам течения.

Совмещая полученные выражения (7), (8), (10), получаем окончательное выражение для радиальной проекции скорости:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, \varphi) = C Y_{1.5}(k_1 R_1) \frac{\sin \varphi \sin \theta}{r} \times \\ \times \left(\frac{J_{1.5}(k_1 r)}{J_{1.5}(k_1 R_1)} - \frac{Y_{1.5}(k_1 r)}{Y_{1.5}(k_1 R_1)} \right). \end{aligned}$$

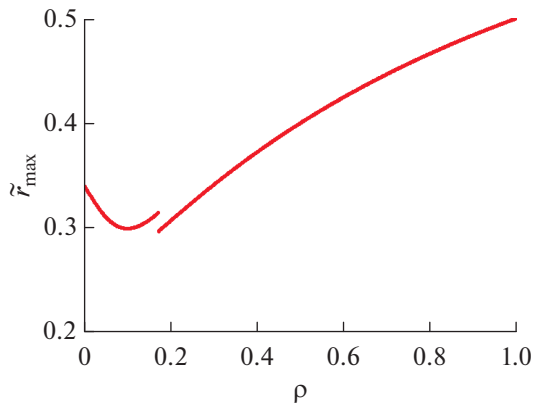


Рис. 2. Расположение точек максимума в зависимости от параметра ρ .

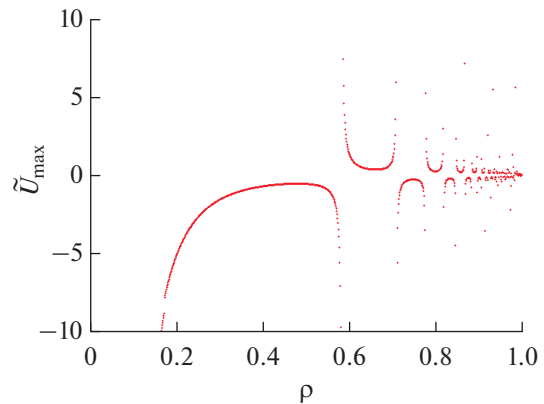


Рис. 3. Изменение максимального значения безразмерной скорости в зависимости от параметра ρ .

Уточненное значение параметра k_n при $\varepsilon = 3/2$ определяется следующим образом [9]:

$$k_n = \frac{\pi n}{3(R_2 - R_1)} \times \left[q_n^{1/3} (1 + \sqrt{1 - q_n^{-2}})^{1/3} + q_n^{-1/3} (1 + \sqrt{1 - q_n^{-2}})^{-1/3} + 1 \right], \quad (11)$$

где

$$q_n = 1 + \frac{27}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho - 1}{\pi n} \right)^2, \quad \rho = \frac{R_1}{R_2}.$$

Стоит отметить, что минимальное значение $\rho_{\min}$ при $n = 1$, при котором нужно переходить от определения параметра $k_{n,\varepsilon}$ по (7) к k_n по (11), является

$$\rho_{\min, n=1} = 0.172.$$

При увеличении параметра n область выполнения связи (11) растет: $\rho_{\min, n} \sim (n + c)^{-1}$.

Из уравнения неразрывности (3) определяем другие компоненты скорости. Введем дополнительную функцию Ψ так, чтобы уравнение неразрывности всегда тождественно выполнялось:

$$u_r = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Psi \sin \theta}{\partial \phi \partial \theta},$$

$$u_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r^2 \Psi \sin \theta}{\partial r \partial \theta},$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r^2 \Psi}{\partial r \partial \phi}.$$

Проекции вектора скорости имеют вид

$$u_r(r, \theta, \phi) = C \sin \phi \sin \theta \frac{Z_{1.5}(k_1 r)}{r k_1},$$

$$u_\phi = \frac{C}{2} \sin^2 \theta \cos \phi \left(Z_{0.5}(k_1 r) - \frac{Z_{1.5}(k_1 r)}{2 r k_1} \right), \quad (12)$$

$$u_\theta = -\frac{C}{4} \sin \phi \left(\frac{\theta}{\sin \theta} - \cos \theta \right) \left(Z_{0.5}(k_1 r) - \frac{Z_{1.5}(k_1 r)}{2 r k_1} \right),$$

где функция $Z_\varepsilon(k_1 r)$ определяется следующим образом:

$$Z_\varepsilon(k_1 r) = \frac{J_\varepsilon(k_1 r)}{J_{1.5}(k_1 R_1)} - \frac{Y_\varepsilon(k_1 r)}{Y_{1.5}(k_1 R_1)}.$$

Анализируя радиальную проекцию скорости, можно прийти к выводу, что направление движения, расположение точек максимума и максимальные значения меняются в зависимости от толщины слоя (рис. 2, 3).

На рис. 4 приведено векторное поле скорости в сечении $y = 0$ (рис. 1), или при угле $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, при заданном отношении внутреннего и внешнего радиусов $\rho = 0.5$. При данном значении параметра видно, что ближе к внутренней границе течение происходит по часовой стрелке, а у внешней границы — против. Также в правой части сферы ($\phi = \pi/2$) течение направлено в центр сферы. При изменении параметра ρ течение может поменять свое направление на противоположное. Однако если жидкость движется вовнутрь (при $\phi = \pi/2$), то во внутренней части сферы скорость всегда направлена по часовой стрелке, а снаружи — против. И наоборот, если жидкость истекает изнутри, то внутри скорость направлена против часовой стрелки, а снаружи — по часовой. Скорость

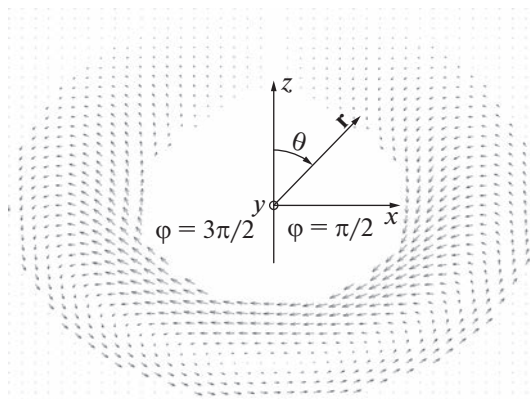


Рис. 4. Векторное поле скорости $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы на соответствующие оси) при $\rho = 0.5$.

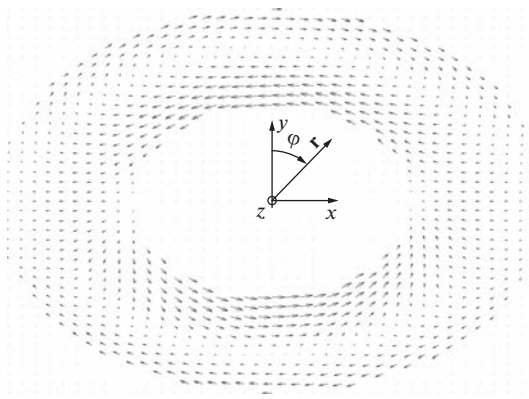


Рис. 5. Векторное поле скорости $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\phi \mathbf{e}_\phi$ при $\rho = 0.5, \theta = \pi/2$.

достигает своего максимума в нижней части сферы ($\theta = \pi$), а ближе к верхней жидкость сильно тормозится.

На рис. 5 приведено векторное поле скорости в сечении $z = 0$ (рис. 1), или при угле $\theta = \pi/2$ и заданном $\rho = 0.5$. Как и на рис. 4, здесь видны многочисленные вихревые структуры, которые описываются схожим образом.

Поле давления. Зная все проекции скорости, можно по (2) определить давление

$$p(\mathbf{r}) = C_p - \rho_0 \frac{\mathbf{u}^2(\mathbf{r})}{2}. \quad (13)$$

Пусть константа C_p определяется заданным внешним давлением p_0 . Также зададим осредненное значение давления на внешней границе сферы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(R_2, \varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ & = p_0 - \frac{\rho_0}{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u_\varphi^2 + u_\theta^2) \sin \theta d\theta d\varphi = p_{\text{гр}}. \end{aligned}$$

Из данного выражения можно определить константу для скорости (12). На внешней границе сферического вихря распределение скоростей определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r(r = R_2) &= 0, \\ u_\varphi(r = R_2) &= \frac{C}{2} Z_{0.5}(k_1 R_2) \sin^2 \theta \cos \varphi, \\ u_\theta(r = R_2) &= -\frac{C}{4} Z_{0.5}(k_1 R_2) \sin \varphi \left(\frac{\theta}{\sin \theta} - \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Сумма квадратов скоростей — четная функция по θ . После умножения на $\sin \theta$ получается нечет-

ная функция. Следовательно, интеграл по всей сфере равен нулю:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u_\varphi^2 + u_\theta^2) \sin \theta d\theta = 0.$$

Поэтому определим константу для верхней и нижней полусферы:

$$\begin{aligned} 2 \frac{p_0 - p_{\text{гр,в}}}{\rho_0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (u_\varphi^2 + u_\theta^2) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{C^2}{32} Z_{0.5}^2(k_1 R_2) \left[(2Ca - 1)\pi + \frac{134 - 105\zeta_3}{30} \right]. \end{aligned}$$

Откуда для верхней полусферы получаем

$$\begin{aligned} C &= 8 \frac{\left[(2Ca - 1)\pi + \frac{134 - 105\zeta_3}{30} \right]^{-1/2}}{Z_{0.5}(k_1 R_2)} \times \\ &\times \sqrt{\frac{p_0 - p_{\text{гр,в}}}{\rho_0}}, \quad p_0 > p_{\text{гр,в}}. \end{aligned}$$

Для нижней полусферы среднее давление на границе больше внешнего:

$$\begin{aligned} C &= 8 \frac{\left[(2Ca - 1)\pi + \frac{134 - 105\zeta_3}{30} \right]^{-1/2}}{Z_{0.5}(k_1 R_2)} \times \\ &\times \sqrt{\frac{p_{\text{гр,н}} - p_0}{\rho_0}}, \quad p_{\text{гр,н}} > p_0. \end{aligned}$$

Здесь Ca — число Каталана, ζ_3 — дзета-функция Римана.

Учитывая, что в пределах сферы данная константа не может принимать различные значения, получаем связь внешнего давления и осредненного по поверхности сферы:

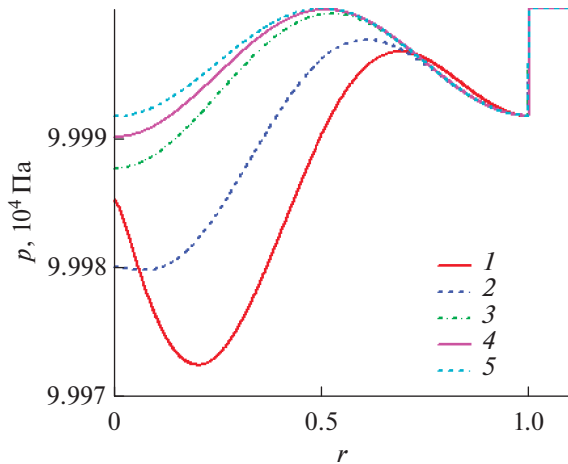


Рис. 6. Распределение давления по радиусу при различных значениях параметра: 1 – $\rho = 0.100$, 2 – 0.294 , 3 – 0.661 , 4 – 0.833 , 5 – 0.992 .

$$p_0 = \frac{p_{\text{гр,в}} + p_{\text{гр,н}}}{2}.$$

Зная константы, можно построить распределение давления по радиусу (рис. 6), а также максимальный перепад давления и разность давления между левой и правой границами сферы (рис. 7).

Переписывая (13) в безразмерном виде с использованием $\Delta \tilde{p}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta p(\mathbf{r})}{\rho_c u_{\text{хар}}^2}$, получаем следующую зависимость:

$$\Delta \tilde{p}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{u}^2(\mathbf{r})}{2}. \quad (14)$$

На рис. 8а построено поле давления для сечения $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. Полученное распределение давления хорошо коррелирует с рис. 4. Наибольшие перепады давления находятся ближе к центру сферы при угле $\theta \approx 3\pi/4$.

На рис. 8б построено поле давления для горизонтального сечения $z = 0$ ($\theta = \pi/2$).

СТАЦИОНАРНОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ

Существуют и более простые типы течений в сферическом слое, когда присутствуют только угловые проекции скорости, а радиальная компонента отсутствует. Возможность существования такого течения показана на рис. 9.

Для изучения данного типа течения нужно вернуться к системе (3) и упростить ее:

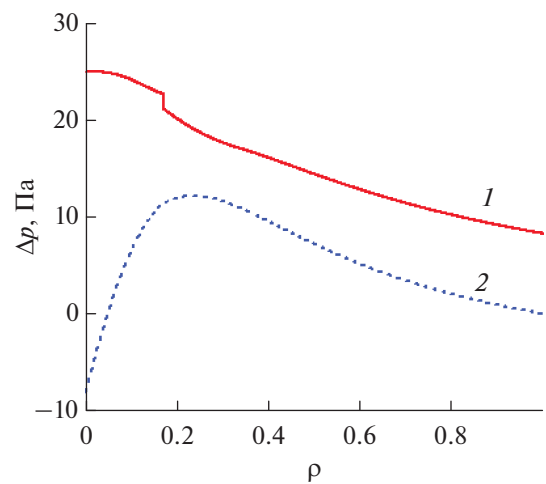


Рис. 7. Максимальный перепад давления (1) и разность между внешним и внутренним давлением (2).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\varphi \sin \theta) = \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_\varphi) = ku_\theta, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) = ku_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Подставляя азимутальную скорость из третьего уравнения во второе, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru_\theta) = -rk^2 u_\theta.$$

Найденное решение можно подставить обратно и определить азимутальную проекцию скорости. Таким образом, радиальная зависимость для двух проекций скорости выглядит так:

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{1}{r}(A(\varphi, \theta) \sin kr + B(\varphi, \theta) \cos kr), \\ u_\varphi &= \frac{1}{r}(A(\varphi, \theta) \cos kr - B(\varphi, \theta) \sin kr). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя данные выражения в оставшиеся уравнения системы (15), можно получить уравнения для переменных A, B :

$$\begin{cases} \frac{\partial A \sin \theta}{\partial \theta} = \frac{\partial B}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial B \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Сделаем следующую замену так, чтобы первое уравнение всегда тождественно выполнялось:

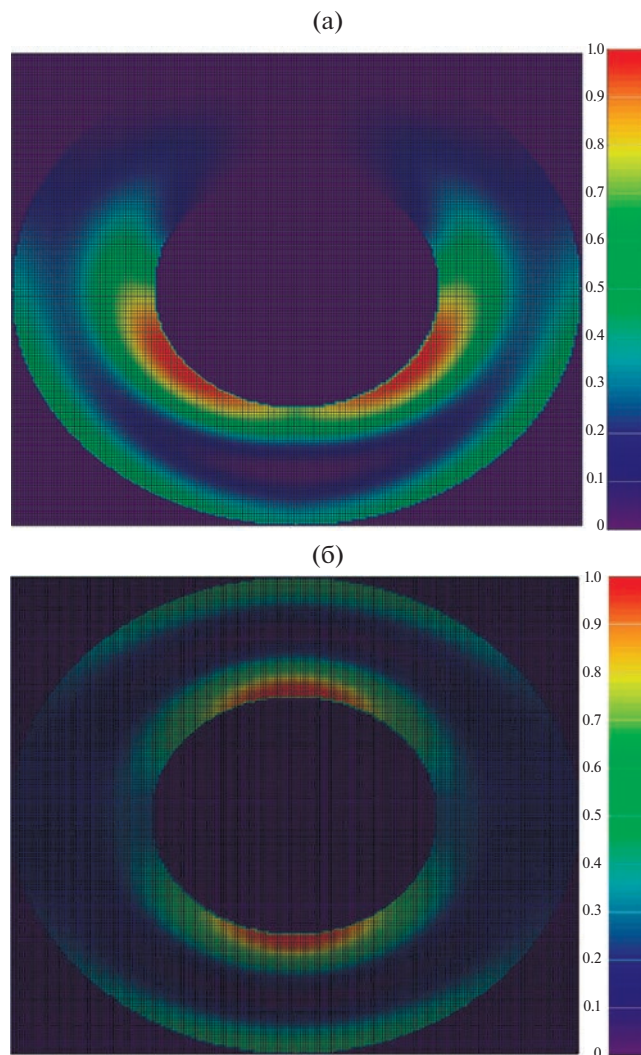


Рис. 8. Поля давления при $\rho = 0.5$, $\varphi = \pi/2$ (а), (б) – $\theta = 0.5$, $\varphi = \pi/2$.

$$B = \frac{\partial \Psi \sin \theta}{\partial \theta}; \quad A = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \quad (17)$$

Следовательно, получаем уравнение для функции Ψ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi \sin \theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 0,$$

в котором проведем разделение переменных:

$$\Psi = T(\theta) F(\varphi).$$

В результате получаем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} \sin^2 \theta \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial T_1}{\partial \theta} - n^2 T_1 = 0, & T_1 = T \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -Fn^2. \end{cases} \quad (18)$$

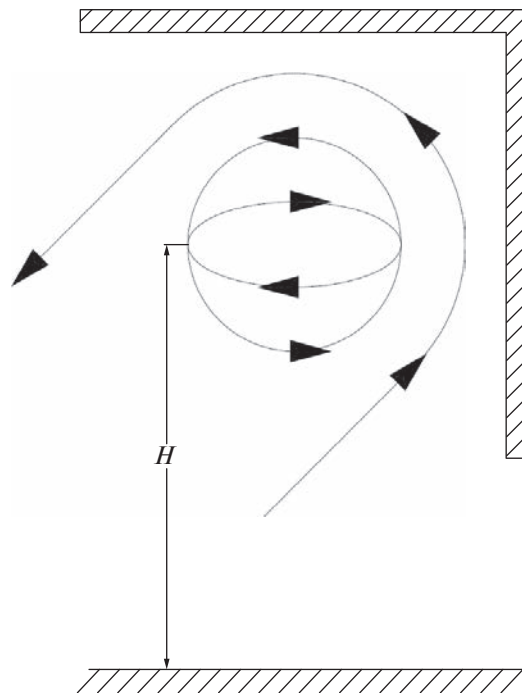


Рис. 9. Пример набегающего потока жидкости на угловую стенку с образованием сферического вихря.

Решением второго уравнения является сумма тригонометрических функций, но, оставляя только нечетную составляющую, получаем

$$F_n = C_{1n} \sin(n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (19)$$

Как и ранее, оставим только первый член данного решения ($n = 1$).

Первое уравнение системы является аналогом уравнения (9) при $\varepsilon = 0$. Проводя сходные замены

$$x = \cos \theta; \quad T_1 = y \sin^n \theta, \quad (20)$$

можно получить следующее уравнение:

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2(n+1)x \frac{\partial y}{\partial x} + n(n+1)y = 0. \quad (21)$$

Его решением является производная порядка n от общего решения уравнения Лежандра:

$$y = \frac{d^n y_0}{dx^n}, \quad y_0 = C_2 + C_3 \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Решение уравнения (21) можно найти, используя связи

$$y = \frac{dy_0}{dx} = C_3 \frac{1}{1-x^2}.$$

Проводя обратные замены (18), (20), получим полярную зависимость

$$T = \frac{C_3}{\sin^2 \theta},$$

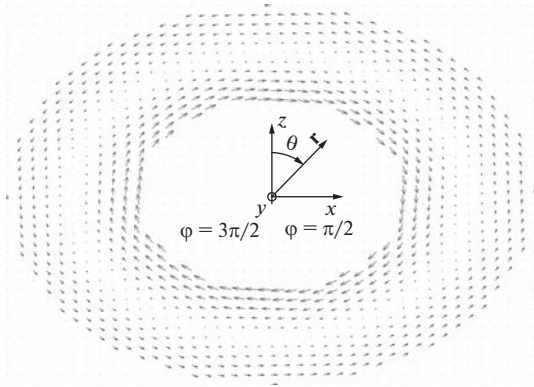


Рис. 10. Векторное поле скорости $\mathbf{u} = u_\theta \mathbf{e}_\theta$ при $\rho = 0.5$.

с помощью которой и с учетом связи (19) можно определить Ψ :

$$\Psi = \frac{C}{\sin^2 \theta} \sin \varphi.$$

Далее можно вернуться к (17) и найти распределение угловых проекций скорости (16):

$$B = -C \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \sin \varphi, \quad A = \frac{C}{\sin^2 \theta} \cos \varphi;$$

$$u_\theta = C \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos \varphi \frac{\sin kr}{r} - C \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \sin \varphi \frac{\cos kr}{r}; \quad (22)$$

$$u_\varphi = C \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos \varphi \frac{\cos kr}{r} + C \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \sin \varphi \frac{\sin kr}{r}.$$

Необходимо определить только параметр k , который еще неизвестен в (22). Для этого можно воспользоваться различными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_\theta(r = R_1) = u_\theta(r = R_2) = 0, \\ \left. \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right|_{r=R_2} = 0, \quad u_\theta(r = R_1) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Из первых граничных условий получается следующее условие:

$$A(\varphi, \theta) \frac{\sin kR_1}{R_1} + B(\varphi, \theta) \frac{\cos kR_1}{R_1} = 0,$$

$$A(\varphi, \theta) \frac{\sin kR_2}{R_2} + B(\varphi, \theta) \frac{\cos kR_2}{R_2} = 0.$$

Существует нетривиальное решение, когда определитель матрицы равен нулю:

$$\sin kR_1 \cos kR_2 - \cos kR_1 \sin kR_2 = 0,$$

или

$$\sin(kR_2 - kR_1) = 0.$$

Отсюда параметр получается следующим:

$$k_n = \frac{\pi n}{R_2 - R_1}. \quad (24)$$

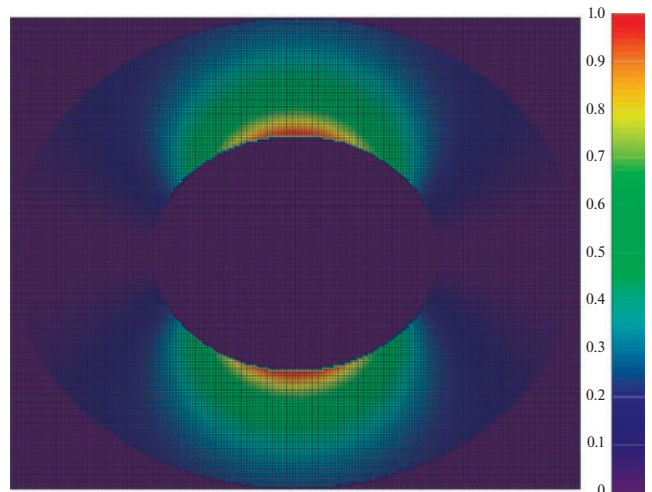


Рис. 11. Поле давления при $\rho = 0.5$, $\varphi = \pi/2$.

Данное значение параметра k соответствует очень тонкому сферическому слою (7) при наличии радиальной проекции скорости:

$$R_2 - R_1 \rightarrow 0 \Rightarrow u_r \rightarrow 0 \Rightarrow k_n \rightarrow \frac{\pi n}{R_2 - R_1}.$$

При другом граничном условии из (23) параметр k определяется следующим трансцендентным уравнением:

$$kR_2 = \tan(kR_2 - kR_1).$$

Векторное поле скорости и поле давления. Используя определения параметра (24), построим векторное поле скорости в заданном сечении. Рис. 4 и 10 схожи, за исключением отсутствия радиальной проекции скорости. Также если на рис. 4 в верхней части сферы течение жидкости практически отсутствует, то на рис. 8б и сверху, и снизу модуль скорости достигает своего максимума.

На рис. 11 давление определялось аналогично (14):

$$\Delta \tilde{p}(\mathbf{r}) = (\tilde{u}_\theta^2 + \tilde{u}_\varphi^2)/2.$$

Максимальные перепады давления находятся в верхней и нижней частях сферы ближе к центру, в правой и левой частях сферы происходит торможение, в отличие от случая на рис. 6.

ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА $\nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}$ И ИХ РОЛЬ В ОБРАЗОВАНИИ РАЗЛИЧНОГО РОДА ЯВЛЕНИЙ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Среди всех возможных нестационарных турбулентных течений несжимаемой среды существуют режимы, при которых коэффициент турбу-

лентной вязкости $\nu(r, t, u)$ не только зависит от осредненных характеристик течения и координат, но сама эта зависимость претерпевает бифуркации, т.е. изменяется в процессе течения:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{u} \times \mathbf{u} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \nabla \nu(r, t, \mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}, \quad (25) \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} + L(\nabla, r, t, \mathbf{u}, \nu, B) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $L(\nabla, r, \mathbf{u}, \nu)$ — оператор, описывающий в рамках соответствующей модели динамику изменения коэффициента турбулентной вязкости; $B(t, \mathbf{u})$ — бифуркационный параметр.

Можно предположить, что внутри рассматриваемых течений возникает специфическая генерация турбулентности, в результате которой вихревое течение перестраивается таким образом, что выполняются условия

$$\begin{aligned} \nabla \nu(r, t) \nabla \mathbf{u} &\rightarrow 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \\ \nabla \times \mathbf{u} \times \mathbf{u} &\rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

и единственным нетривиальным решением ($\mathbf{u} \neq 0$) является связь $\nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}$, в которой параметр k находится из удовлетворения граничным условиям. Такой класс вихревых течений относится к самоорганизующимся режимам и может реализовываться лишь в специальных случаях и состояниях атмосферы. В этом случае система (25) для полей скорости и давления сводится к уравнениям (1), (2) с соответствующими граничными условиями. Неизвестный параметр k является собственным значением данной задачи и находится в процессе ее решения.

Теперь определим, каким образом сосредоточенные вихри рассмотренного типа могут быть использованы для интерпретации ряда “аномальных” явлений, о которых шла речь в начале работы. Для примера на рис. 12 изображен наблюдавшийся в последнее время авиацией США объект [3], который не смогли идентифицировать.

Авторы не утверждают, что все особенности “аномальных” явлений могут быть объяснены на основе сосредоточенных вихрей. Однако ряд наблюдаемых свойств допускает вполне правдоподобную качественную и количественную трактовку в рамках современной физики.

Отметим некоторые из них.

1. Как следует из рис. 5, 6, в сосредоточенном вихре возникают области пониженного давления, где под воздействием электрического поля грозового облака могут возникать электрические разря-



Рис. 12. Один из многочисленных примеров НЛО, о котором сказано: “Правительство США не может объяснить 143 из 144 случаев неопознанных летающих объектов, о которых сообщили военные самолеты” [3].

ды, сопровождающиеся свечением [10]. Используя известную для газового разряда зависимость Пашена, можно показать, что для характерных параметров вихря выполняются условия возникновения разряда. В этих случаях в атмосфере наблюдаются замкнутые движущиеся объекты.

В других условиях возникновению и развитию локализованных электрических разрядов могут способствовать захваченные внутрь вихря атмосферные загрязнения, включая металлические объекты, космические лучи и возмущения в магнитосфере Земли. Интенсивность излучений может возрастать при вспышках на Солнце. В некоторых случаях интенсивности внешних электрических полей недостаточно для зажигания разряда, но ее хватает для возбуждения газов внутри вихря. Этот процесс может сопровождаться импульсом излучения из-за разной оптической толщины замкнутого вихря, распространение излучения иногда может быть локализовано в определенном направлении. Из-за захвата вихрем различного сорта примесей могут возникать свечения различного типа.

Ряд таких визуальных образований наблюдатели могут отнести к шаровым молниям [1, 2], включая шаровые молнии гигантских размеров, о которых сообщали очевидцы.

2. Область сосредоточенного вихря, напоминающая тарелку, может перемещаться под воздействием ветра. В вихрях из-за захвата и зарядки пыли может содержаться пылевая плазма, излучение которой может приводить к образованию светящихся объектов причудливой конфигурации [12]. Понятно, что столкновение летательного аппарата с сосредоточенным вихрем может приводить к повреждению аппарата.

3. Возникновение электромагнитного излучения от электрических разрядов, развивающихся

внутри сосредоточенного вихря, может приводить к нарушению связи. Как показывают полученные выше решения, распределение давления в сосредоточенном вихре, примыкающем к поверхности почвы, может носить периодический характер, оставляя после разрушения вихря концентрические круги на поверхности полей. Перечень различных воздействий и анализ возможностей сосредоточенных вихрей в атмосферах других планет можно продолжить, но это так же, как и количественные оценки, является предметом отдельной работы.

Кроме того, как следует из полученных решений, на границах вихря возникает разрыв угловой скорости. Это приводит к развитию неустойчивости Кельвина—Гельмгольца и разрушению сосредоточенного вихря за характерное время, обратно пропорциональное коэффициенту вязкости в атмосфере.

4. Наличие влаги и электрических полей может приводить к образованию водорода (это явление наблюдалось в ураганах). Кроме того, сосредоточенные вихри могут захватывать в себя различные газы (например, радон), включая горючие. Из-за вращения могут возникать области с повышенной концентрацией определенных элементов. Накопление внутри вихря водорода и других горючих компонентов, поступающих от атмосферных выбросов, при превышении ими некоторого критического значения и при наличии электрического разряда в вихре [11] может способствовать взрывному разрушению вихревого образования. Все это в совокупности может вызывать горение или детонацию внутри вихря. Поэтому разрушение вихря может сопровождаться интенсивными акустическими импульсами.

Более детальный анализ каждого из отмеченных процессов, возникающих внутри сосредоточенного вихря, и получение количественных критериев требуют отдельного исследования. Это особенно касается случаев нахождения в вихре электрических спичек разного знака (пылевой плазмы) [12, 13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы характеристики стационарных сосредоточенных вихрей максимальной спиральности $\nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}$ в атмосфере Земли. С использованием системы уравнений (1), (2) построено новое стационарное трехмерное решение задачи для течения, сосредоточенного в сферическом слое, расположенном на высоте H от поверхности.

Изучены режимы с двумя и с тремя компонентами скорости и рассчитаны поля скорости и давления для таких типов течения.

Учитывая возможности образования вихрей во влажной атмосфере, проанализировано влияние толщины слоя на изменение характеристик течения.

Рассмотрены возможности образования стационарных сосредоточенных вихрей при развитии турбулентных течений, когда изменение коэффициента турбулентности приводит к связи $\nabla \times \mathbf{u} = k\mathbf{u}$. Дан пример существования некрупного сферического вихря при набегающем на угловую стенку потоке жидкости.

Обсуждено использование полученных характеристик сосредоточенных вихрей для интерпретации ряда наблюдаемых “аномальных” явлений в атмосфере, типа НЛО, шаровых молний, для объяснения которых часто привлекаются механизмы, лежащие за пределами современной физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синкевич О.А. Долгоживущие плазменные образования и проблемы шаровой молнии. Часть I // ТВТ. 1997. Т. 34. № 4. С. 651.
2. Синкевич О.А. Долгоживущие плазменные образования и проблемы шаровой молнии. Часть II // ТВТ. 1997. Т. 34. № 6. С. 968.
3. <https://www.nbcnews.com/politics/politics-news/ufo-report-government-can-t-explain-143-144-mysterious-flying-n1272390>
4. Жуковский Н.Е. О присоединенных вихрях. Собр. соч. Т. 4. М.—Л., 1949.
5. Громека И.С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собр. соч. М., 1952. С. 76.
6. Beltrami E. Considerazioni hidrodinamiche // Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. 1889. V. 22. P. 122.
7. Чефранов С.Г. Генерация спиральности в однородно-винтовых течениях // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. Вып. 5(13). С. 1133.
8. Синкевич О.А., Зинченко Г.О., Ивочкин Ю.П. Одноточные стационарные, сосредоточенные вихри специального типа и системы таких вихрей // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 548.
9. Nickalls R.W.D. A New Approach to Solving the Cubic: Cardan's Solution Revealed // Mathematical Gazette. 1993. V. 77. P. 354.
10. Синкевич О.А., Маслов С.А., Гусейн-заде Н.Г. Электрические разряды и их роль в генерации вихрей // Физика плазмы. 2017. Т. 43. № 2. С. 203.
11. Sinkevich O.A. Influence of Electrical Discharges on Combustion (The Generalized Borghi Diagram) // High Temp. 2018. V. 56. № 4. P. 496.
12. Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space / Eds. V.E. Fortov, G.E. Morfill. Series in Plasma Physics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010. 418 p.
13. Ting Wang. A Theoretical Note on Aerodynamic Lifting in Dust Devils // Icarus. 2016. № 265. P. 79.