ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2023, том 61, № 2, с. 315–317

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 536.24

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА

 Ю. В. Видин, В. С. Злобин*

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

**E-mail: zlobinsfu@mail.ru*

Поступило в редакцию 03.10.2022 г.
После доработки 29.12.2022 г.
Принято к публикации 30.12.2022 г.

Предложен метод исследования характеристических уравнений, и получены аналитические формулы для определения корней характеристического уравнения в задаче нестационарной теплопроводности сферического тела. Данные формулы позволяют определять любое необходимое количество корней с высокой точностью, что особенно важно при решении задач теплопроводности в начальный момент времени. Предложенный метод может быть использован для исследования более сложных характеристических уравнений, возникающих в других задачах теплообмена.

DOI: 10.31857/S0040364423020199

ВВЕДЕНИЕ

При определении нестационарного температурного поля в сплошном сферическом теле необходимо использовать математическое решение в виде бесконечного ряда [1, 2]. Основной проблемой при применении такой зависимости является нахождение корней μ_n характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi}-1}, \tag{1}$$

которому соответствует бесчисленное множество собственных чисел μ, причем каждый последующий больше предыдущего

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \ldots .$$

В (1) число $\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha R}{\lambda}$ – безразмерный параметр, определяющий интенсивность теплообмена (нагрева или охлаждения) на поверхности шара; α – коэффициент теплоотдачи на поверхности шара, Вт/(м^2 К); R – радиус наружной поверхности шара, м; λ – коэффициент теплопроводности материала шара, Вт/(м К).

Для расчета неустановившегося температурного поля в начальной стадии процесса чем меньше продолжительность начальной стадии нагрева (или охлаждения), тем большее количество корней уравнения (1) приходится определять. В монографии [1] приведена таблица значений первых шести корней μ_n для ряда фиксированных значений Bi. Однако наряду с имеющимися табличными значениями μ_n целесообразно дополнительно располагать более общей аналитической методикой нахождения чисел μ_n для произвольных величин Bi и порядковых номеров n. При этом желательно, чтобы рекомендуемые расчетные зависимости были максимально простыми и обладали приемлемой точностью с инженерной точки зрения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения поставленной в работе задачи целесообразно придерживаться определенной последовательности.

1. Bi = 0. Предварительно исследуем уравнения (1) для частного случая Bi = 0. Тогда исходная зависимость принимает вид

$$\operatorname{tg}\mu = \mu.$$

Корни этого уравнения для $n = 2, 3, 4, \ldots$ находим по простому соотношению

$$\mu_n = \frac{(2n-1)}{8}\pi + \sqrt{\frac{9(2n-1)^2}{64}\pi^2 - \frac{3}{2}}, \tag{2}$$

при $n = 1$ $\mu_1 = 0$.

Проиллюстрируем возможности формулы (2) на конкретных примерах. Так, при $n = 2$, согласно (2), получаем

$$\mu_2 = \frac{(2\times 2-1)}{8}\pi + \sqrt{\frac{9(4-1)^2}{64}\pi^2 - \frac{3}{2}} = 4.4934,$$

при $n = 6$

$$\mu_6 = \frac{(2\times 6 - 1)}{8}\pi + \sqrt{\frac{9(12-1)^2}{64}\pi^2 - \frac{3}{2}} = 17.2208.$$

Эти значения корней полностью соответствуют табличным [1]. Рассчитанные по выражению (2) собственные числа μ_n можно рассматривать как оценку снизу соответствующих корней уравнения (1).

2. 0 < Bi ≤ 1. Далее разрабатываем также сравнительно простые расчетные соотношения для нахождения чисел μ_n в интервале $0 < \mathrm{Bi} \le 1$. Очевидно, что при Bi = 1 формула (1) записывается так

$$\mathrm{tg}\mu = \to \infty.$$

Следовательно, в этом случае искомые корни μ_n равны

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi, \tag{3}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Следует отметить, что формула (3) справедлива также и для случая расчета нестационарного симметричного температурного поля неограниченной пластины при граничных условиях первого рода ($\mathrm{Bi} \to \infty$) [1].

Для определения величин μ_n в случае, когда $\mathrm{Bi} < 1$, представим формулу (3) в виде

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi - \beta, \tag{4}$$

где β — вспомогательный безразмерный коэффициент.

Тогда зависимость (1) принимает вид

$$\mathrm{ctg}\beta = \frac{\frac{2n-1}{2}\pi - \beta}{1-\mathrm{Bi}}.$$

Аппроксимируя ctgβ соотношением [3]

$$\mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{3},$$

получаем квадратное алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид

$$\beta = \frac{3(2n-1)\pi}{4(2+\mathrm{Bi})} - \sqrt{\frac{9(2n-1)^2\pi^2}{16(2+\mathrm{Bi})^2} - \frac{3(1-\mathrm{Bi})}{2+\mathrm{Bi}}}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), находим

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\times$$
$$\times\,\pi\left[1 - \frac{3}{2(2+\mathrm{Bi})}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16(1-\mathrm{Bi})(2+\mathrm{Bi})}{3(2n-1)^2\pi^2}}\right)\right]. \tag{6}$$

Рассчитаем по (6) μ_2 и μ_6 при Bi = 0.5:

$$\mu_2 = \frac{3}{2}\pi\left[1 - \frac{3}{5}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\times 2.5}{3\times 3^2\pi^2}}\right)\right] = 4.60423,$$

$$\mu_6 = \frac{11}{2}\pi\left[1 - \frac{3}{5}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{16\times 0.5\times 2.5}{3\times 11^2\pi^2}}\right)\right] = $$
$$= 17.24982.$$

Данные результаты полностью соответствуют табличным значениям [1]. Выражение (6) может быть эффективно использовано для нахождения первого ($n = 1$) собственного числа μ_1, являющегося, как правило, наиболее важным. Однако при сравнительно небольших значениях Bi (примерно $\mathrm{Bi} < 0.3$) удобнее использовать также очень простую зависимость вида

$$\mu_1^2 = 7.5\left(\sqrt{1+0.8\mathrm{Bi}} - 1\right), \tag{7}$$

которая получена преобразованием уравнения (1) к виду

$$\mathrm{Bi} - 1 = -\mu\,\mathrm{ctg}\mu.$$

Представляя ctgμ в виде усеченного степенного ряда [3]

$$\mathrm{ctg}\mu = \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu^3}{45},$$

получаем биквадратное алгебраическое уравнение

$$\mu^4 + 15\mu^2 - 45\mathrm{Bi} = 0,$$

откуда находим

$$\mu_1^2 = -\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{225}{4} + 45\mathrm{Bi}} = -\frac{15}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{1 + \frac{180}{225}\mathrm{Bi}}.$$

Проведя необходимые преобразования, получаем формулу (7) для определения первого корня характеристического уравнения (1) при $\mathrm{Bi} < 0.3$.

Например, при Bi = 0.2 на основе (7) находим $\mu_1 = 0.7601$. Табличная величина согласно [1] $\mu_1 = 0.7593$, т.е. невязка в данном случае составляет около 0.1%.

3. Bi > 1. Далее аналогично математически исследуется характеристическое уравнение (1) для случая $\mathrm{Bi} > 1$. Тогда вместо условия (4) примем

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi + \beta. \tag{8}$$

Выполняя действия, аналогичные ранее изложенным, находим

$$\beta = \frac{3(2n-1)\pi}{4(\mathrm{Bi}+2)}\left(\sqrt{1 + \frac{16(\mathrm{Bi}-1)(\mathrm{Bi}+2)}{3(2n-1)^2\pi^2}} - 1\right). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), окончательно получим

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\times$$
$$\times\pi\left[1+\frac{3}{2(\mathrm{Bi}+2)}\left(\sqrt{1+\frac{16(\mathrm{Bi}-1)(\mathrm{Bi}+2)}{3(2n-1)^2\pi^2}}-1\right)\right]. \quad (10)$$

Проиллюстрируем возможности рекомендуемого соотношения (10) на конкретных числовых примерах. Примем Bi = 2 и рассчитаем

$$\mu_2 = \frac{3}{2}\pi\left[1+\frac{3}{8}\left(\sqrt{1+\frac{16\times1\times4}{3\times9\pi^2}}-1\right)\right] = 4.9132,$$

$$\mu_6 = \frac{11}{2}\pi\left[1+\frac{3}{8}\left(\sqrt{1+\frac{16\times1\times4}{3\times11^2\pi^2}}-1\right)\right] = $$
$$= 17.3364.$$

Полученные величины μ_2 и μ_6 полностью согласуются с табличными значениями [1]. Выполним аналогичные расчеты для более высокого значения параметра Bi = 5:

$$\mu_2 = \frac{3}{2}\pi\left[1+\frac{3}{14}\left(\sqrt{1+\frac{448}{3\times9\pi^2}}-1\right)\right] = 5.3561,$$

$$\mu_6 = \frac{11}{2}\pi\left[1+\frac{3}{14}\left(\sqrt{1+\frac{16\times4\times7}{3\times11^2\pi^2}}-1\right)\right] = $$
$$= 17.5033.$$

И в данном примере наблюдается также хорошее согласование с табличными величинами, которые, согласно [1], равны $\mu_2 = 5.3540$ и $\mu_6 = 17.5034$.

Таким образом, выведенная формула (10) позволяет рассчитывать корни μ_n характеристического уравнения (1) с высокой степенью точности в диапазоне $1 \le \mathrm{Bi} \le 5$. При этом вычисленные μ_n либо полностью совпадают с известными табличными значениями [1], либо с ростом параметра Bi очень мало отличаются от них.

4. Bi > 10. Для области высоких Bi (например, Bi > 10) целесообразно использовать представление искомых корней в форме

$$\mu_n = n\pi - \beta.$$

Тогда, применяя вышеописанный математический подход, удается получить следующее аналитическое решение для определения μ_n:

$$\mu_n = n\pi\left[1-\frac{3\mathrm{Bi}}{2n^2\pi^2}\left(\sqrt{1+\frac{4n^2\pi^2}{3\mathrm{Bi}^2}}-1\right)\right]. \quad (11)$$

На основе зависимости (11) определим для Bi = 10 корни μ_1 и μ_6:

$$\mu_1 = \pi\left[1-\frac{3\times10}{2\pi^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{3\times10\pi^2}}-1\right)\right] = 2.8371,$$

$$\mu_6 = 6\pi\left[1-\frac{3\times10}{2\times6^2\pi^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\times6^2\pi^2}{3\times10^2}}-1\right)\right] = $$
$$= 17.7392.$$

Сопоставление этих результатов с данными [1] свидетельствует, что расхождение не превышает 0.05%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенные числовые расчеты показывают, что рекомендуемая аналитическая методика позволяет определять собственные значения характеристического уравнения (1) с высокой точностью, используя весьма простые инженерные формулы.

В заключение следует также сказать, что предлагаемые в статье аналитические методы решения характеристического уравнения (1) могут быть применены для эффективного исследования других типов зависимостей, например приводимых в работах [4–6]. При необходимости значения полученных корней можно уточнить путем прямой подстановки в правую часть характеристического уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. *Лыков А.В.* Теоретические основы строительной теплофизики. Минск: Изд-во АН БССР, 1961. 520 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1965. С. 608.
4. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Аналитический расчет нестационарного температурного поля плоского тела при переменном коэффициенте теплопроводности // ТВТ. 2019. Т. 57. № 5. С. 790.
5. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* К расчету собственных чисел нестационарной теплопроводности плоского тела при несимметричных граничных условиях третьего рода // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 2. С. 75.
6. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Определение собственных значений в задаче нестационарной теплопроводности неоднородного плоского тела // Изв. РАН. Энергетика. 2022. № 2. С. 73.