

УДК 536.2.02

О ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. А. Б. Петрин*

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

**E-mail: a_petrin@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.07.2021 г.

После доработки 23.09.2021 г.

Принята к публикации 28.09.2021 г.

Исследуется задача теплопроводности для точечного нестационарного источника тепла, расположенного внутри или снаружи плоскостной среды. Находится решение для гармонического источника тепла, а затем решение для произвольной временной зависимости точечного тепловыделения. Гармоническое решение задачи для произвольных плоскостных сред получено в виде одномерного интеграла.

DOI: 10.31857/S0040364423010106

ВВЕДЕНИЕ

Во многих современных технических приложениях возникает необходимость анализа нестационарной теплопроводности в плоскостных структурах [1–8]. В задачах теплопроводности в слоистых средах используется матричный метод [9–12], который, как правило, применяется для решения двумерных задач. Подобные матричные методы успешно применяются к задачам излучения и распространения электромагнитных полей в плоскостных средах [13]. В работах [14–16] предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостной структуры, являющегося развитием работ [17, 18]. В частности, в [14–16] продемонстрировано применение метода аналитического упрощения решения, имеющего потенциально важное общетеоретическое значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостной структуре [19] позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задач и ускорило численные расчеты. В данном исследовании методы работ [14–16, 19] применяются сначала к нахождению трехмерного решения задачи теплопроводности от точечного гармонического источника тепла в плоскостных средах, а затем задача обобщается на случай точечного источника с произвольным временным изменением тепловыделения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим задачу нахождения поля температуры от точечного источника тепла, расположенного внутри плоскостной структуры, которая состоит из нескольких пленок и из окружающей слоистую структуру двух полупространств. Предполагается, что материалы, из которых состоят слои плоскостной структуры, являются однородными и изотропными, с постоянными характеристиками, такими как плотность, удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности. Для определенности сначала считается, что источник расположен в одной из пленок. Затем задача обобщается на случай, когда источник расположен на их границе или в одном из полупространств.

Суть метода исследования задачи состоит в следующем. В каждом слое выполняется уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Это уравнение линейное. На каждой границе слоя должны выполняться условия непрерывности температуры и нормального к границе потока тепла при переходе через границу. В силу линейности уравнения, можно разложить объемную плотность мощности тепловыделения нестационарного источника тепла на гармонические слагаемые по Фурье (на гармонические источники). Для каждого гармонического источника можно найти гармоническое решение уравнения теплопроводности. Тогда, в силу линейности уравнения и граничных условий, решение для исходного не-

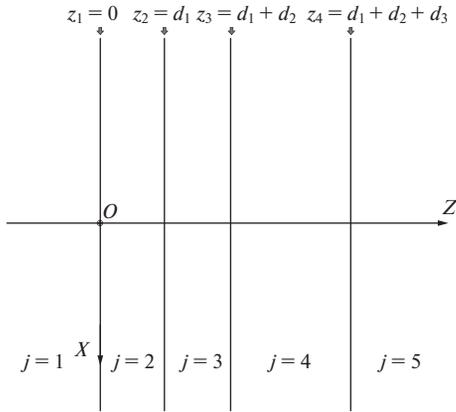


Рис. 1. Геометрия плоскостной структуры, состоящей из трех пленок.

стационарного источника есть сумма (интеграл) всех гармонических решений [20, главы 23–25].

Пусть общее число пленок равно N_f , толщина m -й пленки равна d_m и полная толщина слоистой структуры $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$. Общее число границ пленок $N = N_f + 1$. Области пространства пронумерованы как $j = 1, \dots, (N + 1)$ (на рис. 1 показана для примера задача с $N = 4$ и $N_f = 3$). Предполагается, что пленки имеют плотность, удельную теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности ρ_j, c_j, κ_j , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с параметрами ρ_1, c_1, κ_1 и $\rho_{N+1}, c_{N+1}, \kappa_{N+1}$. Также через z_j обозначены координаты N границ пленок по оси Z : $z_1 = 0, z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$ при $j = 2, \dots, N$.

Нестационарное уравнение теплопроводности в области с номером j можно записать через поле температуры в этой области T_j в виде

$$\rho_j c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} - \kappa_j \Delta T_j = \rho_h, \quad (1)$$

где ρ_h – объемная плотность мощности тепловыделения точечного источника, Δ – оператор Лапласа. На границах области должны выполняться граничные условия – условия непрерывности температуры и нормального к границе потока тепла:

на левой границе $z = z_{j-1}$

$$T_j(x, y, z_{j-1}, t) = T_{j-1}(x, y, z_{j-1}, t),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_j}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1},t)} = -\kappa_{j-1} \frac{\partial T_{j-1}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1},t)},$$

на правой границе $z = z_j$

$$T_j(x, y, z_j, t) = T_{j+1}(x, y, z_j, t),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_j}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j,t)} = -\kappa_{j+1} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j,t)}.$$

Разложим функции $\rho_h(t)$ и $T_j(t)$ по Фурье

$$\rho_h(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{h,\omega}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$T_j(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{j,\omega}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где $\rho_{h,\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_h(t) e^{i\omega t} dt, T_{j,\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_j(t) \times e^{i\omega t} dt$. Тогда уравнение (1) можно записать для каждой гармоники в виде

$$i\omega \rho_j c_j T_{j,\omega} + \kappa_j \Delta T_{j,\omega} = -\rho_{h,\omega}. \quad (2)$$

Причем граничные условия для каждой гармоники имеют вид

на левой границе $z = z_{j-1}$

$$T_{j,\omega}(x, y, z_{j-1}) = T_{j-1,\omega}(x, y, z_{j-1}),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_{j,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1})} = -\kappa_{j-1} \frac{\partial T_{j-1,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1})},$$

на правой границе $z = z_j$

$$T_{j,\omega}(x, y, z_j) = T_{j+1,\omega}(x, y, z_j),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_{j,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j)} = -\kappa_{j+1} \frac{\partial T_{j+1,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j)}.$$

Решая уравнение (2) в каждой области с учетом граничных условий, находим поле температур $T_{j,\omega}(x, y, z)$ во всех областях, а затем $T_j(x, y, z, t)$ с помощью обратного преобразования Фурье.

ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОЕ, СВОБОДНОМ ОТ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу. Пусть в области с номером j нет источников тепла между границами z_{j-1} и z_j (рис. 2).

Представим поле температур в гармонической задаче $T_{j,\omega}$ в виде фурье-разложения

$$T_{j,\omega}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \hat{T}_{j,\omega}(\xi, \eta, z).$$

Тогда в рассматриваемой области уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \hat{T}_{j,\omega}}{dz^2} - \gamma_j^2 \hat{T}_{j,\omega} = 0, \quad (3)$$

где $\gamma_j = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$.

Уравнения (3) при фиксированных значениях ξ и η есть обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной z . Задача состоит в нахождении из уравнений (3) функции $\hat{T}_{j,\omega}$ в рассматриваемой области.

Линейно независимые решения уравнений (3) можно записать в виде

$$T_{j,\omega}^{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{j,\omega}^{\pm}(\xi, \eta) \times e^{\mp\gamma_j z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (4)$$

Общее решение уравнений (3) в области $[z_{j-1}, z_j]$ имеет вид

$$\hat{T}_{j,\omega}(\xi, \eta, z) = \hat{T}_{j,\omega}^+ e^{-\gamma_j(z-z_{j-1})} + \hat{T}_{j,\omega}^- e^{\gamma_j(z-z_j)},$$

и тогда

$$T_{j,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{j,\omega}^+ e^{-\gamma_j(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{j,\omega}^- e^{\gamma_j(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (5)$$

где $\hat{T}_{j,\omega}^+$ и $\hat{T}_{j,\omega}^-$ – функции только от ξ и η .

Отметим особо следующую принципиально важную идею: общее решение уравнения (3), состоящее из линейной комбинации решений (4), должно быть записано таким образом, чтобы существовали обратные преобразования Фурье. Поэтому форма записи общего решения для поля в слое (5) не случайна, она выделяет физически верное решение. Первое слагаемое справа в формуле (5) представляет собой поле от источников, находящихся слева от левой границы слоя. При этом поле будет уменьшаться при удалении вправо (при удалении от источников слева от слоя). Второе слагаемое представляет собой поле от источников, находящихся справа от правой границы слоя (внутри слоя источников нет по условию). Это поле будет уменьшаться при удалении влево (при удалении от источников справа от слоя).

Из (5) находим фурье-образ температурного поля $\hat{T}_{j,\omega}$ и нормальной компоненты теплового потока $\hat{h}_{j,\omega} = -\kappa_j \nabla \hat{T}_{j,\omega}$ на границах области j :

$$\left(\begin{matrix} \hat{T}_{j,\omega} \\ \hat{h}_{j,\omega,z} \end{matrix} \right)_{z=z_{j-1}} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_j d_{j-1}} \\ \kappa_j \gamma_j & -\kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{j,\omega}^+ \\ \hat{T}_{j,\omega}^- \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\left(\begin{matrix} \hat{T}_{j,\omega} \\ \hat{h}_{j,\omega,z} \end{matrix} \right)_{z=z_j} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_j d_{j-1}} & 1 \\ \kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} & -\kappa_j \gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{j,\omega}^+ \\ \hat{T}_{j,\omega}^- \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$.

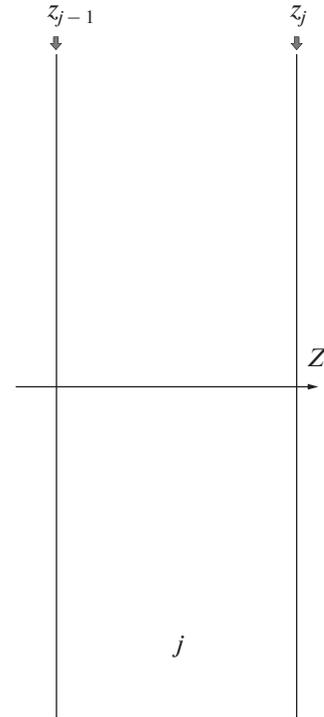


Рис. 2. Пленка с номером j , расположенная между границами z_{j-1} и z_j .

Вводя вектор-столбец температур $\hat{\mathcal{T}}_j = (\hat{T}_{j,\omega}^+; \hat{T}_{j,\omega}^-)^T$, который по формуле (5) однозначно определяет гармоническое поле температур $T_{j,\omega}(x, y, z)$ и его фурье-образ $\hat{T}_{j,\omega}(\xi, \eta, z)$ в области j , запишем выражения (6) и (7) в матричном виде

$$\left(\begin{matrix} \hat{T}_{j,\omega} \\ \hat{h}_{j,\omega,z} \end{matrix} \right)_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \hat{\mathcal{T}}_j, \quad (8)$$

$$\left(\begin{matrix} \hat{T}_{j,\omega} \\ \hat{h}_{j,\omega,z} \end{matrix} \right)_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{T}}_j, \quad (9)$$

где матрицы \mathbf{L}_j и \mathbf{R}_j имеют вид

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_j d_{j-1}} \\ \kappa_j \gamma_j & -\kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_j d_{j-1}} & 1 \\ \kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} & -\kappa_j \gamma_j \end{pmatrix}. \quad (10)$$

ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ, СВОБОДНОЙ ОТ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет источников тепла. На границе

$z = z_j$ между областями с номерами j и $j + 1$ непрерывность на границе температурных полей и нормальных компонент векторов плотности потока тепла ($h_{j,\omega,z} = -\kappa_j \partial T_{j,\omega} / \partial z$ и $h_{j+1,\omega,z} = -\kappa_{j+1} \partial T_{j+1,\omega} / \partial z$) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{j,\omega} \Big|_{(x,y,z_j)} - T_{j+1,\omega} \Big|_{(x,y,z_j)} &= 0, \\ \kappa_j \frac{\partial T_{j,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j)} - \kappa_{j+1} \frac{\partial T_{j+1,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j)} &= 0, \end{aligned}$$

где поле температур $T_{j+1,\omega}$ в области $j + 1$ выражается формулой (5), в которой произведена замена индексов $j \rightarrow j + 1$. Так как рассматриваемые уравнения теплопроводности – линейные, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, т.е. граничные условия выполняются для фурье-образов соответствующих величин:

$$\hat{T}_{j,\omega} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \hat{T}_{j+1,\omega} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0, \quad (11)$$

$$\hat{h}_{j,\omega,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \hat{h}_{j+1,\omega,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0. \quad (12)$$

Записывая граничные условия (11), (12) с помощью выражений (8) и (9), получим матричное уравнение на границе $z = z_j$:

$$\mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{T}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{\mathcal{T}}_{j+1}, \quad (13)$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$, $d_j = z_{j+1} - z_j$, а матрицы \mathbf{R}_j и \mathbf{L}_{j+1} выражаются формулами (10).

Уравнение (13) можно записать для $j = 2, \dots, (N - 1)$, где $(N + 1)$ – общее число областей, т.е. для всех границ, исключая первую ($j = 1$) и последнюю ($j = N$) границы, или $z_1 = 0$ и $z_N = d_{\text{tot}}$.

Общее решение для поля температуры $T_{j,\omega}$ в области $j = 1$, т.е. в интервале $(-\infty, z_1]$, где $z_1 = 0$, записывается в виде

$$\begin{aligned} T_{1,\omega}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^+ e^{-\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^- e^{\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда, учитывая, что из (14) следует

$$\left(\begin{array}{c} \hat{T}_{1,\omega} \\ \hat{h}_{1,\omega,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \hat{T}_{1,\omega}^+ \\ \hat{T}_{1,\omega}^- \end{array} \right),$$

запишем граничные условия на границе $z_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right) \times \hat{\mathcal{T}}_1 = \mathbf{L}_2 \times \hat{\mathcal{T}}_2. \quad (15)$$

Аналогично общее решение для поля температуры в области $j = N + 1$, т.е. в интервале $[z_N, +\infty)$, выглядит так:

$$\begin{aligned} T_{N+1,\omega}(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ e^{-\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{N+1,\omega}^- e^{\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда, учитывая, что из (16) следует

$$\left(\begin{array}{c} \hat{T}_{N+1,\omega} \\ \hat{h}_{N+1,\omega,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_N} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ \\ \hat{T}_{N+1,\omega}^- \end{array} \right),$$

граничные условия на границе z_N имеют вид

$$\mathbf{R}_N \times \hat{\mathcal{T}}_N = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right) \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1}. \quad (17)$$

Уравнения (13), (15) и (17) позволяют связать вектор-столбцы температур в первой и последней областях задачи (в полупространствах, вне плоскостной структуры):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}_1 &= \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right)^{-1} \times [\mathbf{L}_2 (\mathbf{R}_2)^{-1}] \times \dots \times [\mathbf{L}_N (\mathbf{R}_N)^{-1}] \times \\ &\times \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right) \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1}, \end{aligned}$$

или

$$\hat{\mathcal{T}}_1 = \mathbf{M} \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1},$$

где матрица \mathbf{M} имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathfrak{L}_1 \times \left(\prod_{m=2}^N \mathfrak{L}_m \right) \times \mathfrak{L}_{N+1}, \quad \mathfrak{L}_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right)^{-1}, \\ \mathfrak{L}_m &= \mathbf{L}_m (\mathbf{R}_m)^{-1}, \\ \mathfrak{L}_{N+1} &= \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Пусть имеется точечный источник тепла, расположенный в точке $(0, 0, z_d)$ в области с номером s (рис. 3), с мощностью тепловыделения $q(t)$ со спектральной мощностью тепловыделения

$$q_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{i\omega t} dt.$$

Пусть гармоника частоты ω данного источника тепла определяется распределением пространственной плотности мощности тепловыделения

$$\rho_h(x, y, z) = q_\omega \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_d),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образ этого распределения определяется следующим выражением:

$$\hat{\rho}_{h,\omega}(\xi, \eta, z) = q_\omega \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \delta(x) \delta(y) \times \\ \times \delta(z - z_d) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = q_\omega \delta(z - z_d).$$

Пусть этот точечный источник тепла находится в бесконечно тонком слое $\left(z_d - \frac{\Delta z}{2}, z_d + \frac{\Delta z}{2}\right)$. Тогда, для фурье-образов полей из (2) можно записать [21] в пределе (при $\Delta z \rightarrow 0$) уравнения

$$\begin{cases} \Delta \hat{T}_{s,\omega} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0, \\ \Delta \hat{h}_{s,\omega,z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} q_\omega. \end{cases}$$

Эти предельные уравнения можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_{s,\omega} \\ \hat{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d+0} - \begin{pmatrix} \hat{T}_{s,\omega} \\ \hat{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (18) через вектор-столбцы $\hat{\mathcal{T}}_1$ и $\hat{\mathcal{T}}_{N+1}$ полупространств снаружи плоскостойкой структуры. Для этого область с номером s разбивается на две области с индексами l и r (левая и правая на рис. 3). Введем вектор-столбцы $\hat{\mathcal{T}}_l$ и $\hat{\mathcal{T}}_r$ в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (18) можно выразить как

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_{s,\omega} \\ \hat{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d-0} = \mathbf{R}_l \times \hat{\mathcal{T}}_l, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_{s,\omega} \\ \hat{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d+0} = \mathbf{L}_r \times \hat{\mathcal{T}}_r. \quad (20)$$

Кроме того, из (13) следует, что

$$\hat{\mathcal{T}}_1 = \mathbf{Q}_L \times \hat{\mathcal{T}}_l, \quad (21)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_r = \mathbf{Q}_R \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1}, \quad (22)$$

где матрицы \mathbf{Q}_L , \mathbf{Q}_R представляются формулами

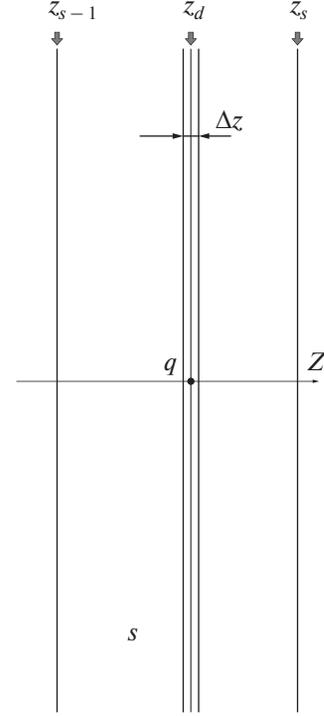


Рис. 3. Точечный гармонический источник тепла q_ω , расположенный в точке $(0, 0, z_d)$ в области с номером s .

$$\mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_l \gamma_l & -\kappa_l \gamma_l \end{pmatrix}^{-1} \times [\mathbf{L}_2 (\mathbf{R}_2)^{-1}] \times \dots \times \\ \times [\mathbf{L}_{s-1} (\mathbf{R}_{s-1})^{-1}] \times \mathbf{L}_l, \\ \mathbf{L}_l = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_s(z_d - z_{s-1})} \\ \kappa_s \gamma_s & -\kappa_s \gamma_s e^{-\gamma_s(z_d - z_{s-1})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_R = (\mathbf{R}_r)^{-1} \times [\mathbf{L}_{s+1} \times (\mathbf{R}_{s+1})^{-1}] \times \dots \times [\mathbf{L}_N \times (\mathbf{R}_N)^{-1}] \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_s(z_s - z_d)} & 1 \\ \kappa_s \gamma_s e^{-\gamma_s(z_s - z_d)} & -\kappa_s \gamma_s \end{pmatrix}.$$

Подставляя (21), (22) в (19), (20) и затем полученные выражения в (18), получаем

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{T}}_1 + \mathbf{V}, \quad (23)$$

где $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$ – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостойкую систему точечного источника тепла, а матрицы \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от источника тепла и выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_s(z_s-z_d)} \\ \kappa_s \gamma_s & -\kappa_s \gamma_s e^{-\gamma_s(z_s-z_d)} \end{pmatrix} \mathbf{Q}_R = \\ &= \mathfrak{Z}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^N \mathfrak{Z}_m \right) \times \mathfrak{Z}_{N+1}, \\ \mathbf{H}_L &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma_s(z_s-z_d)} & 1 \\ \kappa_s \gamma_s e^{-\gamma_s(z_s-z_d)} & -\kappa_s \gamma_s \end{pmatrix} (\mathbf{Q}_L)^{-1} = \\ &= \left(\mathfrak{Z}_1 \times \left(\prod_{m=2}^{s-1} \mathfrak{Z}_m \right) \times \mathfrak{Z}_L \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где матрицы \mathfrak{Z}_m при $m \neq s$ выражаются формулой

$$\mathfrak{Z}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1},$$

а матрицы \mathfrak{Z}_L и \mathfrak{Z}_R :

$$\mathfrak{Z}_L = \mathbf{L}_l \times (\mathbf{R}_l)^{-1}, \quad \mathfrak{Z}_R = \mathbf{L}_r \times (\mathbf{R}_r)^{-1}.$$

Далее в рассматриваемой задаче точечный источник тепла находится исключительно внутри плоскостной структуры. Поэтому в столбцах $\hat{\mathcal{T}}_1$ и $\hat{\mathcal{T}}_{N+1}$ есть только компоненты волн, идущие от плоскостной структуры. В таком случае данные столбцы имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{T}}_1 &= (0; \hat{T}_{1,\omega}^-)^T, \\ \hat{\mathcal{T}}_{N+1} &= (\hat{T}_{N+1,\omega}^+; 0)^T. \end{aligned}$$

Чтобы получить оставшиеся, отличные от нуля, компоненты $\hat{\mathcal{T}}_1$ и $\hat{\mathcal{T}}_{N+1}$ разобьем матрицы \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L на элементы $H_{RA}, H_{RB}, H_{RC}, H_{RD}$ и $H_{LA}, H_{LB}, H_{LC}, H_{LD}$ следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (23) принимает вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}_{1,\omega}^- \end{pmatrix} + \mathbf{V}. \quad (24)$$

Если еще учесть, что $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$, то уравнение (24) можно представить следующей системой из двух матричных уравнений:

$$\begin{aligned} H_{RA} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ &= H_{LB} \hat{T}_{1,\omega}^-, \\ H_{RC} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ &= H_{LD} \hat{T}_{1,\omega}^- + q_\omega. \end{aligned}$$

Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где введен вектор-столбец $\hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = (\hat{T}_{1,\omega}^-, \hat{T}_{N+1,\omega}^+)^T$.

Решая это уравнение, находим $\hat{T}_{1,\omega}^-$ и $\hat{T}_{N+1,\omega}^+$, а значит, убывающие при удалении от плоскостной структуры температурные поля

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \frac{q_\omega H_{RA}}{H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}}, \quad (26)$$

$$\hat{T}_{N+1,\omega}^+ = \frac{q_\omega H_{LB}}{H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}}. \quad (27)$$

Убывающее влево поле (в направлении $z \rightarrow -\infty$) находим по формуле

$$T_{1,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^- e^{\gamma_i z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (28)$$

и убывающее вправо поле (в направлении $z \rightarrow +\infty$) – по формуле

$$\begin{aligned} T_{N+1,\omega}(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ e^{-\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (29)$$

Наконец, при необходимости, зная $\hat{\mathcal{T}}_1$ и $\hat{\mathcal{T}}_{N+1}$, можно найти последовательно вектор-столбцы температур в любой внутренней области $\hat{\mathcal{T}}_j$, так как они однозначно определяются граничными условиями. После этого гармоническое поле температур в любой из этих областей может быть найдено по формуле (5). Таким образом, гармоническое поле температур можно определить во всем пространстве.

ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР ОТ ГАРМОНИЧЕСКОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Пусть теперь рассматривается простейшая задача – точечный гармонический источник тепла на границе двух разных однородных полупространств.

Тогда $N = 1$, $z_0 = 0$, $\mathbf{H}_R = \mathfrak{Z}_2$, $\mathbf{H}_L = (\mathfrak{Z}_1)^{-1}$ и уравнение (23) примет вид

$$\mathfrak{Z}_2 \hat{\mathcal{T}}_2 = (\mathfrak{Z}_1)^{-1} \times \hat{\mathcal{T}}_1 + \mathbf{V}, \quad (30)$$

где $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$, $\mathfrak{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\mathfrak{Z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix}$.

Тогда уравнение (30) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{T}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{T}}_1 + \mathbf{V}.$$

Далее в рассматриваемой задаче источник находится на границе, поэтому в столбцах $\hat{\mathcal{T}}_1$ и $\hat{\mathcal{T}}_2$ есть только компоненты волн, идущие от грани-

цы полупространств. Тогда эти столбцы имеют вид $\hat{\mathcal{T}}_1 = (0; \hat{T}_{1,\omega}^-)^T$, $\hat{\mathcal{T}}_2 = (\hat{T}_{2,\omega}^+; 0)^T$.

Матрицы \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L записываются как

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_2\gamma_2 & -\kappa_2\gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1\gamma_1 & -\kappa_1\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

С использованием вектор-столбца $\hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = (\hat{T}_{1,\omega}^-; \hat{T}_{2,\omega}^+)^T$, уравнение (25) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix},$$

или в явном виде

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \kappa_1\gamma_1 & \kappa_2\gamma_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{T}_{1,\omega}^- \\ \hat{T}_{2,\omega}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) имеет вид

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \hat{T}_{2,\omega}^+ = \frac{q_\omega}{\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2}.$$

Тогда гармоническое поле температур точечного источника в первом полупространстве (в области $j = 1$) представляется в виде

$$T_{1,\omega}(x, y, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{e^{\gamma_1 z}}{(\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta,$$

во втором полупространстве (в области $j = 2$) в виде

$$T_{2,\omega}(x, y, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{e^{-\gamma_2 z}}{(\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Переходя к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi, & y &= \rho \sin \psi, \\ \xi &= \lambda \cos \vartheta, & \eta &= \lambda \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (32)$$

получаем $\gamma_j = \gamma_j(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\zeta_j}$ и

$$T_{1,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \times \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta \right) \frac{e^{\gamma_1 z}}{(\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2)} \lambda d\lambda,$$

$$T_{2,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \times \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta \right) \frac{e^{-\gamma_2 z}}{(\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2)} \lambda d\lambda.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0(\rho\lambda), \quad (33)$$

получаем

$$T_{1,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda) e^{\gamma_1 z}}{(\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2)} \lambda d\lambda \text{ при } z \leq 0,$$

$$T_{2,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda) e^{-\gamma_2 z}}{(\kappa_1\gamma_1 + \kappa_2\gamma_2)} \lambda d\lambda \text{ при } z \geq 0.$$

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ ГРАНИЦЫ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим теперь задачу нахождения гармонического температурного поля от точечного источника тепла, расположенного на расстоянии d от плоской границы двух полупространств (рис. 4). Можно рассмотреть эту задачу как задачу нахождения температурного поля от точечного источника тепла, расположенного на поверхности пленки толщиной d , причем коэффициенты теплопроводности, плотности и удельные теплоемкости при постоянном давлении этой пленки и полупространства справа равны. Таким образом, имеется три области плоскостной структуры. Индекс $j = 1$ соответствует полупространству с параметрами $\rho_1, c_1, \kappa_1, \gamma_1$, $j = 2$ – пленке с параметрами $\rho_2, c_2, \kappa_2, \gamma_2$,

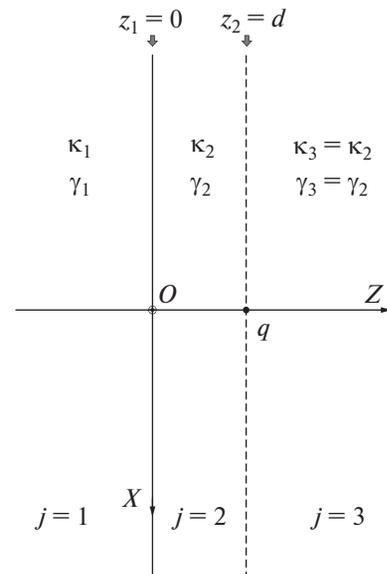


Рис. 4. Точечный гармонический источник тепла q_ω , расположенный на расстоянии d от плоской границы двух полупространств.

а $j = 3$ – свободному полупространству с параметрами $\rho_3 = \rho_2$, $c_3 = c_2$, $\kappa_3 = \kappa_2$, $\gamma_3 = \gamma_2$.

Тогда $N = 2$, $z_d = z_2 = d$, $\mathbf{H}_R = \mathfrak{D}_3$, $\mathbf{H}_L = = (\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2)^{-1}$ и уравнение (23) примет вид

$$\mathfrak{D}_3 \times \hat{\mathcal{T}}_3 = (\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2)^{-1} \times \hat{\mathcal{T}}_1 + \mathbf{V},$$

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathfrak{D}_2 &= \mathbf{L}_2 (\mathbf{R}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_2 d} \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 d} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-\gamma_2 d} & 1 \\ \kappa_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 d} & -\kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathfrak{D}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_3 \gamma_3 & -\kappa_3 \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а вектор-столбец гармонического точечного источника тепла равен $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$.

Учитывая, что $(\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2)^{-1} = \mathfrak{D}_2^{-1} \times \mathfrak{D}_1^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L &= \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} = (\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2)^{-1} = \mathfrak{D}_2^{-1} \times \mathfrak{D}_1^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma_2 d} & 1 \\ \kappa_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 d} & -\kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_2 d} \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 d} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С использованием вектор-столбца $\hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = = (\hat{T}_{1,\omega}^-; \hat{T}_{3,\omega}^+)^T$ уравнение (25) для данной задачи принимает вид

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & 1 \\ -H_{LD} & \kappa_2 \gamma_2 \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Решая линейное уравнение (34), получаем

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \frac{q_\omega e^{-\gamma_2 d}}{\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2}, \quad (35)$$

$$\hat{T}_{3,\omega}^+ = \frac{q_\omega (\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1)}{2\kappa_2 \gamma_2 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} e^{-2\gamma_2 d} + \frac{q_\omega}{2\kappa_2 \gamma_2}. \quad (36)$$

Отметим, что при $d \rightarrow 0$ получаются представленные выше формулы для точечного гармониче-

ского источника тепла на плоской границе полупространств

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \hat{T}_{3,\omega}^+ = q_\omega / (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2).$$

Учитывая (35) и (36), по формулам (28), (29) получаем гармонические температурные поля в полупространстве $j = 1$ и в пространстве $j = 3$ (в рассматриваемом случае $\gamma_3 = \gamma_2$):

$$\begin{aligned} T_{1,\omega}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^- e^{\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{e^{(\gamma_1 z - \gamma_2 d)}}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \\ T_{3,\omega}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \hat{T}_{3,\omega}^+ e^{-\gamma_2(z-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{(\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1) e^{-\gamma_2(z+d)}}{\gamma_2 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{e^{-\gamma_2(z-d)}}{\gamma_2} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам (32), получаем

$$\begin{aligned} T_{1,\omega}(\rho, \psi, z) &= \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta \right) \times \\ &\times \frac{e^{(\gamma_1 z - \gamma_2 d)}}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} \lambda d\lambda, \\ T_{3,\omega}(\rho, \psi, z) &= \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\kappa_2} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta \right) \frac{(\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1) e^{-\gamma_2(z+d)}}{\gamma_2 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} \lambda d\lambda + \\ &+ \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\kappa_2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta \right) \frac{e^{-\gamma_2(z-d)}}{\gamma_2} \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Снова, учитывая (33), получаем

$$\begin{aligned} T_{1,\omega}(\rho, \psi, z) &= \frac{q_\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda) e^{(\gamma_1 z - \gamma_2 d)}}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} \lambda d\lambda \\ &\text{при } z \leq 0, \\ T_{3,\omega}(\rho, \psi, z) &= \frac{q_\omega}{4\pi\kappa_2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda) (\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1) e^{-\gamma_2(z+d)}}{\gamma_2 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} \times \\ &\times \lambda d\lambda + \frac{q_\omega}{4\pi\kappa_2} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda) e^{-\gamma_2(z-d)}}{\gamma_2} \lambda d\lambda \text{ при } z \geq d. \end{aligned}$$

Найдем теперь поле температур при $0 \leq z \leq d$, т.е. в слое $j = 2$. Учитывая (15) и выражения

$\hat{\mathcal{T}}_1 = (0; \hat{T}_{1,\omega}^-)^T$ и $\hat{\mathcal{T}}_2 = (\hat{T}_{2,\omega}^+; \hat{T}_{2,\omega}^-)^T$, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_2 d} \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 d} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{T}_{2,\omega}^+ \\ \hat{T}_{2,\omega}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}_{1,\omega}^- \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражение (35) для $\hat{T}_{1,\omega}^-$, получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_2 d} \\ \kappa_2 \gamma_2 & -\kappa_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 d} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{T}_{2,\omega}^+ \\ \hat{T}_{2,\omega}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(q_\omega e^{-\gamma_2 d})}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} \\ \frac{(\kappa_1 \gamma_1 q_\omega e^{-\gamma_2 d})}{-(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)} \end{pmatrix},$$

из которого находим

$$\hat{T}_{2,\omega}^+ = \frac{q_\omega e^{-\gamma_2 d} (\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1)}{2\kappa_2 \gamma_2 (\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2)}, \tag{37}$$

$$\hat{T}_{2,\omega}^- = \frac{q_\omega}{2\kappa_2 \gamma_2}. \tag{38}$$

Тогда уравнение (5) записывается для слоя $j = 2$ для рассматриваемой задачи в виде

$$T_{2,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{2,\omega}^+ e^{-\gamma_2 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{2,\omega}^- e^{\gamma_2(z-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя в данное выражение (37) и (38), получаем

$$T_{2,\omega}(x, y, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2 2\kappa_2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1) e^{-\gamma_2(z+d)}}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2) \gamma_2} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{q_\omega}{(2\pi)^2 2\kappa_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma_2(z-d)}}{\gamma_2} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Переходя к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам (32), получаем

$$T_{2,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2 2\kappa_2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\theta)} d\theta \right) \times \frac{(\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1) e^{-\gamma_2(z+d)}}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2) \gamma_2} \lambda d\lambda + \frac{q_\omega}{(2\pi)^2 2\kappa_2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\theta)} d\theta \right) \frac{e^{\gamma_2(z-d)}}{\gamma_2} \lambda d\lambda.$$

Аналогично, учитывая (33), окончательно получаем

$$T_{2,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{4\pi\kappa_2} \int_0^{+\infty} J_0(\rho\lambda) \frac{(\kappa_2 \gamma_2 - \kappa_1 \gamma_1) e^{-\gamma_2(z+d)}}{(\kappa_1 \gamma_1 + \kappa_2 \gamma_2) \gamma_2} \times \lambda d\lambda + \frac{q_\omega}{4\pi\kappa_2} \int_0^{+\infty} J_0(\rho\lambda) \frac{e^{\gamma_2(z-d)}}{\gamma_2} \lambda d\lambda.$$

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ ГРАНИЦЫ ПЛЕНКИ, НАНЕСЕННОЙ НА ГРАНИЦУ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Далее рассматривается задача нахождения температурного поля от точечного гармонического источника тепла, расположенного на расстоянии d от пленки толщиной h , материал которой имеет плотность, удельную теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности равные соответственно ρ_p, c_p, κ_p . Пленка нанесена на поверхность полупространства

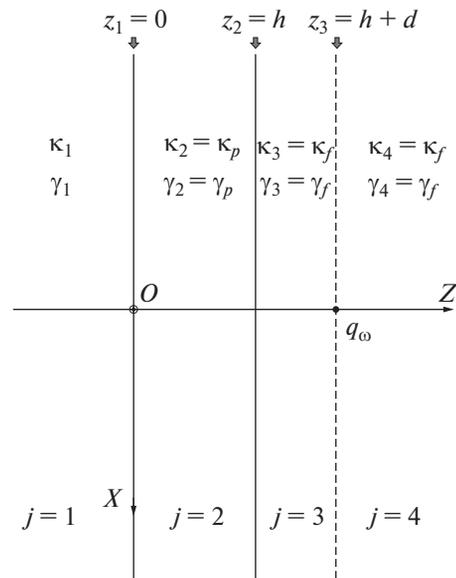


Рис. 5. Точечный гармонический источник тепла q_ω , расположенный на расстоянии d от плоской пленки толщиной h .

(рис. 5). Можно рассмотреть данную задачу как задачу нахождения температурного поля от точечного гармонического источника тепла, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщиной d , причем плотность, удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности этой вспомогательной пленки и полупространства справа однородны и равны соответственно ρ_f, c_f, κ_f . Таким образом, имеется четыре области плоскостной структуры. В предложенной выше нумерации индекс $j = 1$ соответствует полупространству с ρ_1, c_1, κ_1 , $j = 2$ – реальной пленке с $\rho_2 = \rho_p, c_2 = c_p, \kappa_2 = \kappa_p$, $j = 3$ – вспомогательной пленке с $\rho_3 = \rho_f, c_3 = c_f, \kappa_3 = \kappa_f$ и толщиной d , равной расстоянию от источника до пленки, а $j = 4$ – свободному полупространству с $\rho_4 = \rho_f, c_4 = c_f, \kappa_4 = \kappa_f$ (рис. 5).

Тогда $N = 3$, $z_2 = h$, $z_d = z_3 = h + d$, $\mathbf{H}_R = \mathfrak{D}_4$, $\mathbf{H}_L = (\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{D}_3)^{-1}$ и уравнение (23) принимает вид

$$\mathfrak{D}_4 \times \hat{\mathcal{T}}_4 = (\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{D}_3)^{-1} \times \hat{\mathcal{T}}_1 + \mathbf{V},$$

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathfrak{D}_2 &= \mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_p h} \\ \kappa_p \gamma_p & -\kappa_p \gamma_p e^{-\gamma_p h} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma_p h} & 1 \\ \kappa_p \gamma_p e^{-\gamma_p h} & -\kappa_p \gamma_p \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathfrak{D}_3 &= \mathbf{L}_3 \times (\mathbf{R}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_f d} \\ \kappa_f \gamma_f & -\kappa_f \gamma_f e^{-\gamma_f d} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma_f d} & 1 \\ \kappa_f \gamma_f e^{-\gamma_f d} & -\kappa_f \gamma_f \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathfrak{D}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_f \gamma_f & -\kappa_f \gamma_f \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а вектор-столбец точечного гармонического источника тепла равен $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$. В представленных формулах для среды с индексом j используются выражения $\gamma_j = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$.

Учитывая, что $(\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{D}_3)^{-1} = \mathfrak{D}_3^{-1} \times \mathfrak{D}_2^{-1} \times \mathfrak{D}_1^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L &= \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} = (\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{D}_3)^{-1} = \\ &= \mathfrak{D}_3^{-1} \times \mathfrak{D}_2^{-1} \times \mathfrak{D}_1^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma_f d} & 1 \\ \kappa_f \gamma_f e^{-\gamma_f d} & -\kappa_f \gamma_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_f d} \\ \kappa_f \gamma_f & -\kappa_f \gamma_f e^{-\gamma_f d} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma_p h} & 1 \\ \kappa_p \gamma_p e^{-\gamma_p h} & -\kappa_p \gamma_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_p h} \\ \kappa_p \gamma_p & -\kappa_p \gamma_p e^{-\gamma_p h} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_f \gamma_f & -\kappa_f \gamma_f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вводя вектор-столбец $\hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = (\hat{T}_{1,\omega}^-; \hat{T}_{4,\omega}^+)^T$, уравнение (25) для данной задачи можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & 1 \\ -H_{LD} & \kappa_f \gamma_f \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{T}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Из (38) следует

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \frac{q_\omega}{\kappa_f \gamma_f H_{LB} - H_{LD}}, \quad \hat{T}_{4,\omega}^+ = \frac{H_{LB} q_\omega}{\kappa_f \gamma_f H_{LB} - H_{LD}}. \quad (39)$$

В явном виде выражения (39) можно получить через гиперболические синусы и косинусы, если в (39) подставить

$$\begin{aligned} H_{LB} &= \text{ch}(-\gamma_f d) \text{ch}(-\gamma_p h) + \\ &+ \frac{\kappa_p \gamma_p}{\kappa_f \gamma_f} \text{sh}(-\gamma_f d) \text{sh}(-\gamma_p h) - \\ &- \frac{\kappa_1 \gamma_1}{\kappa_p \gamma_p} \text{ch}(-\gamma_f d) \text{sh}(-\gamma_p h) - \\ &- \frac{\kappa_1 \gamma_1}{\kappa_f \gamma_f} \text{sh}(-\gamma_f d) \text{ch}(-\gamma_p h), \\ H_{LD} &= \kappa_f \gamma_f \text{sh}(-\gamma_f d) \text{ch}(-\gamma_p h) + \\ &+ \kappa_p \gamma_p \text{ch}(-\gamma_f d) \text{sh}(-\gamma_p h) - \\ &- \kappa_1 \gamma_1 \frac{\kappa_f \gamma_f}{\kappa_p \gamma_p} \text{sh}(-\gamma_f d) \text{sh}(-\gamma_p h) - \\ &- \kappa_1 \gamma_1 \text{ch}(-\gamma_f d) \text{ch}(-\gamma_p h). \end{aligned}$$

Таким образом, можно представить решение в свободном полупространстве с точечным гармоническим источником тепла в виде $\hat{T}_{4,\omega}^+ = \mathfrak{D}(\gamma_1, \gamma_p, \gamma_f) q_\omega$, где алгебраическая функция $\mathfrak{D}(\gamma_1, \gamma_p, \gamma_f) = \frac{H_{LB}}{(\kappa_f \gamma_f H_{LB} - H_{LD})}$ зависит от постоянных параметров всех областей задачи и толщин пленок h, d . Тогда

$$T_{4,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{4,\omega}^+ e^{-\gamma_f(z-h-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathfrak{F}}(\gamma_1, \gamma_p, \gamma_f) e^{-\gamma_f(z-h-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Переходя к полярным координатам в плоскостях (x, y) и (ξ, η) по формулам (32), получаем

$$T_{4,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta \right) \times$$

$$\times \tilde{\mathfrak{F}}(\gamma_1, \gamma_p, \gamma_f) e^{-\gamma_f(z-h-d)} \lambda d\lambda.$$

С учетом представления (33) получаем

$$T_{4,\omega}(\rho, \psi, z) = \frac{q_\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\rho\lambda) \tilde{\mathfrak{F}}(\gamma_1, \gamma_p, \gamma_f) \times$$

$$\times e^{-\gamma_f(z-h-d)} \lambda d\lambda \text{ при } z \geq (h+d). \quad (40)$$

Аналогично можно найти решения во всех областях плоскостной структуры.

Наконец, отметим, что в общем случае задачи с большим числом слоев (например, при описании градиентных структур) найти явные аналитические выражения для функций $\hat{T}_{1,\omega}^-$ и $\hat{T}_{N+1,\omega}^+$ из (26) и (27) может оказаться затруднительным. Тогда можно воспользоваться методом работы [19], суть которого применительно к данной задаче заключается в вычислении функций $\hat{T}_{1,\omega}^-$ и $\hat{T}_{N+1,\omega}^+$ от λ в конечном числе точек λ_σ , приближении этих функций сплайнами, переходе к полярным системам координат (32) в формулах (28), (29) и дальнейшем переходе с учетом (33) к одномерному интегрированию по λ .

НАХОЖДЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕПЛООВОГО ПОЛЯ ВО ВРЕМЕНИ ОТ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Выше найдены решения задачи теплопроводности для гармонического точечного источника тепла в плоскостной среде. Теперь найти решения для нестационарного точечного источника тепла элементарно: надо взять обратное преобразование Фурье от решения гармонической задачи $T_{j,\omega}$ и учесть начальные условия.

Приведем пример области $j = 4$ при $z \geq (h+d)$ последней рассмотренной задачи. Выражение для гармонического решения $T_{4,\omega}$ представлено формулой (40). Если в начальный момент (при $t \rightarrow -\infty$) температура везде постоянна и равна T_0 , тогда нестационарное поле температур можно представить формулой

$$T_4(\rho, \psi, z, t) = T_0 + (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{4,\omega}(\rho, \psi, z) e^{-i\omega t} \times$$

$$\times d\omega = T_0 + (2\pi)^{-2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} J_0(\rho\lambda) \tilde{\mathfrak{F}}(\gamma_1, \gamma_p, \gamma_f) e^{-\gamma_f(z-h-d)} \lambda d\lambda \right) \times$$

$$\times q_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad (41)$$

где $q_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{i\omega t} dt$ — известная функция от ω .

Аналогично можно получить нестационарное решение для любой рассмотренной выше задачи в любой из подобластей плоскостной структуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена оригинальная матричная техника нахождения фундаментального решения нестационарной задачи теплопроводности в плоскостных средах. Главным преимуществом предложенного метода является представление гармонического решения одномерным интегралом, что дает значительное упрощение и ускорение численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Гостехиздат, 1952.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В. Теория теплопереноса: решение задач для многослойных конструкций: учеб. пособие для бакалавриата, специалитета и магистратуры / Под общ. ред. Э. М. Карташова. М.: Изд-во Юрайт, 2018.
4. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // ТВТ. 2012. Т. 50. № 1. С. 118.
5. Ройзен Л.И. Приближенный метод решения задач теплопроводности многослойных тел // ТВТ. 1981. Т. 19. № 4. С. 821.
6. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: Изд-во Красноярск. политех. ин-та, 1974.
7. Цой П.В. К теории разработок методов расчета нестационарного теплообмена // ТВТ. 1986. Т. 24. № 3. С. 514.
8. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983.
9. Pollack H.N. Steady State Heat Conduction in Layered Mediums: The Half-space and Sphere // Journal of Geophysical Research. 1965. V. 70. № 22. P. 5645.
10. Negi J.G., Singh R.N. A Matrix Method for Heat Conduction in Multi-layered Media // Pure and Applied Geophysics. 1969. V. 73. № 1. P. 143.

11. *Negi J.G., Singh R.N.* Heat Transfer in Multi-layered Media with Temperature Dependent Sources // *Pure and Applied Geophysics*. 1968. V. 69. № 1. P. 110.
12. *Matysiak S.J., Perkowski D.M.* Temperature Distributions in a Periodically Stratified Layer with Slant Lamination // *Heat and Mass Transfer*. 2014. V. 50. № 1. P. 75.
13. *Chew W.C.* Waves and Fields in Inhomogeneous Media. N.Y.: IEEE Press, 1995.
14. *Петрин А.Б.* Элементарный излучатель, расположенный на границе или внутри слоистой структуры // *Оптика и спектроскопия*. 2020. Т. 128. № 11. С. 1676.
15. *Петрин А.Б.* Излучение в дальней зоне элементарного излучателя, расположенного на границе плоскострой структуры // *Оптика и спектроскопия*. 2020. Т. 128. № 12. С. 1874.
16. *Петрин А.Б.* Элементарный излучатель на границе плоскострой структуры // *ЖЭТФ*. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
17. *Кинг Р., Смит Г.* Антенны в материальных средах: в 2-х книгах. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
18. *King R.W.P.* The Propagation of Signals Along a Three-layered Region // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1988. V. 36. № 6. P. 1080.
19. *Петрин А.Б.* О теории плоской линзы из материала с отрицательным преломлением // *Оптика и спектроскопия*. 2021. Т. 129. № 1. С. 55.
20. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. Пространство. Время. Движение. М.: Мир, 1977.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.