

Том 68, Номер 7

ISSN 0033-8494  
Июль 2023



# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 68, номер 7, 2023

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Искусственные магнитные проводники на основе частотно-селективных поверхностей

*Ю. Н. Казанцев, О. А. Дьяконова*

627

---

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Реконструкция сигналов линейных стационарных систем с помощью тестовых испытаний

*А. В. Новиков-Бородин*

632

Оптимальное дискретное оценивание отсчетов дискретно-непрерывного марковского процесса на фоне коррелированного марковского шума

*А. Н. Детков*

650

Субоптимальный алгоритм измерения частоты основного тона с использованием дискретного фурье-преобразования речевого сигнала

*В. В. Савченко, Л. В. Савченко*

660

Метод демодуляции сигналов в системе PD-NOMA с применением нелинейного алгоритма с последовательным исключением демодулированных компонент

*В. Б. Крейнделин, Л. А. Варукина*

669

Метод формирования недвоичных последовательностей Гордона–Миллса–Велча для систем передачи цифровой информации

*В. Г. Стародубцев*

676

---

## ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Аппроксимации передаточных функций высокого порядка дробной степени

*А. С. Коротков, А. Каврук*

683

---

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

Генерация гиперзвуковых колебаний в схеме магнитострикционного преобразователя с положительной обратной связью

*В. С. Власов, Д. А. Плешев, Ф. Ф. Асадуллин, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов*

693

---

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

Система лазерных интерферометров с большим пространственным разнесением для изучения сейсмо-деформационных колебаний Земли

*М. Н. Дубров, И. А. Ларионов, Д. В. Александров, В. В. Кравцов*

703

Повышение показателей качества функционирования нечетких вычислителей на стадии дефаззификации

*А. Е. Васильев, А. В. Вегнер, Д. Е. Голубева, А. С. Доценко, В. А. Карпенко*

718

---

## ХРОНИКА

Памяти Анатолия Васильевича Вашковского

727

---

---



## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874;621.396

### ИСКУССТВЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ ПРОВОДНИКИ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНО-СЕЛЕКТИВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2023 г. Ю. Н. Казанцев<sup>а</sup>, \*, О. А. Дьяконова<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

\*E-mail: yukazantsev@mail.ru

Поступила в редакцию 20.05.2020 г.

После доработки 20.03.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

Предложены и исследованы новые полосно-пропускающие частотно-селективные поверхности (ЧСП). Получены формулы для расчета модуля и фазы коэффициента отражения искусственных магнитных проводников, на основе предложенных ЧСП. Проведено сопоставление результатов электродинамического моделирования и расчета по формулам. Показана возможность расширения рабочей полосы частот.

DOI: 10.31857/S0033849423060062, EDN: XMDXPR

#### ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–9] были исследованы частотно-селективные поверхности (ЧСП). В работе [10] показано, что ЧПС при падении на нее плоской электромагнитной волны ведет себя как искусственный магнитный проводник (ИМП), коэффициент отражения от которого на резонансной частоте равен +1.

Аналогичным образом ведут себя ЧСП-структуры на основе емкостных решеток [11–17]. В работе [14] было показано, что в ИМП-структуре могут быть использованы как полосно-отражающие, так и полосно-пропускающие ЧСП, а в работе [17] проведено исследование функциональных связей между характеристиками ЧСП (резонансная частота и  $Q$ -фактор) и характеристиками ИМП (положение и ширина полосы рабочих частот). При этом было показано, что применение в ИМП-структуре полосно-пропускающей ЧСП позволяет обеспечить более широкую полосу рабочих частот, чем применение полосно-отражающей ЧСП.

Цель данной работы – исследовать характеристики ИМП на основе полосно-пропускающих ЧСП и провести сравнительный анализ при тех же значениях периода решетки и диэлектрической проницаемости, что и в работе [6].

#### 1. РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛОСНО-ПРОПУСКАЮЩИХ ЧСП И ИМП НА ИХ ОСНОВЕ

На рис. 1а представлен общий вид ИМП, включающий в свой состав ЧСП 1, расположен-

ную на слое диэлектрика 2 толщиной  $D$  и с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Диэлектрический слой с противоположной стороны от ЧСП покрыт слоем металла 3. Эквивалентная схема рис. 1б дана для ЧСП в случае однородного пространства с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , а на рис. 1в – ЧСП расположена на границе двух полупространств с диэлектрическими постоянными, равными 1 и  $\epsilon$ .

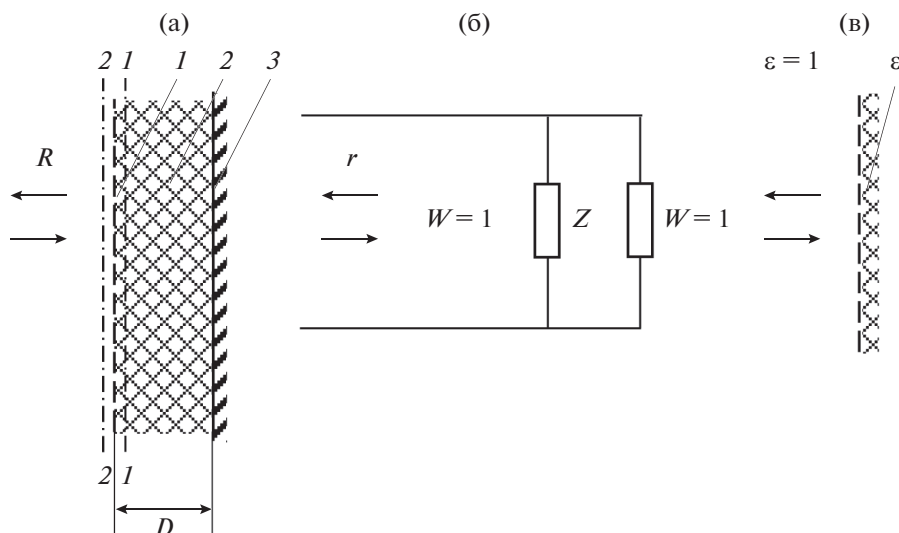
На рис. 2 показаны модели шести полосно-пропускающих ЧСП с одинаковым периодом 3 мм. Эти модели содержат щели в электропроводящей поверхности. В качестве базовой выбрана модель М1 структуры, впервые представленной в работе [6]. Общим в этих моделях является то, что на резонансных частотах их импеданс стремится к бесконечности.

На рис. 3 приведены частотные зависимости коэффициента отражения от ЧСП с моделями, показанными на рис. 2, а в табл. 1 приведены значения резонансных частот  $f_p$  и  $Q$ -факторов.

Соответствующая толщина  $D$  диэлектрической подложки ИМП определяется по следующей формуле [18]:

$$D = \left[ \left( \arctg \frac{2.5}{Q} \sqrt{\frac{2\epsilon}{\epsilon+1}} \right) / \left( k_p \sqrt{\frac{2\epsilon}{\epsilon+1}} \right) \right]. \quad (1)$$

В табл. 1 указаны также толщины  $D$  диэлектрических подложек ИМП, рассчитанные по формуле (1) на основе моделей М1...М6 (см. рис. 2) при условии  $\epsilon = 10.2$ .



**Рис. 1.** ИМП на основе полосно-пропускающей ЧСП: а – схема ИМП, б – эквивалентная схема ЧСП в свободном пространстве, в – ЧСП на границе полупространств с диэлектрическими постоянными 1 и  $\epsilon$ .

Как следует из рис. 2 и табл. 1, значения резонансных частот  $f_p$  и  $Q$ -факторов ЧСП с М1...М6 меньше, чем с М1. Так, например, с М1 резонансные частоты и  $Q$ -факторы для ЧСП равны  $f_p = 28$  ГГц,  $Q = 2$ , а с М2  $f_p = 18$  ГГц,  $Q = 1.4$ . Отношение периода решетки 3 мм к резонансной длине волны  $\lambda_p = 23.3$  мм для М6 равно 0.129, т.е. около  $1/8$ . Соответствующее отношение для М1 равно 0.28, т.е. несколько больше  $1/4$ . При этом величина  $Q$ -фактора для обеих моделей приблизительно одинакова.

В состав расчетных структур ИМП входил ЧСП с моделями всех шести типов, (с М1 по М6), расположенных на слоях диэлектрика ( $\epsilon = 10.2$ ), металлизированных с противоположных сторон. Толщины диэлектрических слоев взяты в соот-

ветствии с результатами оценок, приведенными в табл. 1.

На рис. 4 представлены частотные зависимости фазы коэффициента отражения от ИМП на основе полосно-пропускающих ЧСП с моделями всех шести типов.

Фаза коэффициента отражения ИМП определяется по следующей формуле [18]:

$$\varphi = 2 \arctg \left[ \frac{\sqrt{\epsilon}}{\operatorname{tg} k D \sqrt{\epsilon}} - 2Qt \left( \frac{kt}{k_p} - \frac{k_p}{kt} \right) \right], \quad (2)$$

где  $k = 2\pi f/c$ ,  $k_p = 2\pi f_p/c$  – волновые числа,  $c$  – скорость света,  $t^2 = (\epsilon + 1)/2$ .

В табл. 2 приведены резонансные частоты  $f_0$ , частоты  $f_{+90}$  и  $f_{-90}$ , при которых фаза коэффициента отражения равна  $+90^\circ$  либо  $-90^\circ$  соответственно, и относительная ширина рабочей полосы ИМП

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_{-90} - f_{+90}}{f_0}.$$

Нумерация ИМП определяется моделями, представленными на рис. 2: 1...6 соответственно М1...М6.

Из данных табл. 2 видно, что результаты численного моделирования значений  $f_0$  и  $\Delta f/f_0$  близки к результатам расчета по формуле (2). Основным в этих результатах является то, что рабочие частоты ИМП на основе моделей М2...М6 расположены существенно ниже рабочей частоты ИМП на основе модели М1 при одинаково малых значениях их периодов.

**Таблица 1.** Резонансные частоты и  $Q$ -факторы ЧСП

Модель	$f_p$ , ГГц	$Q$ -фактор ЧСП	$D$ , мм
М1	28.0	2.0	1.3
М2	18.0	1.36	2.3
М3	15.0	1.75	2.6
М4	14.6	1.82	2.6
М5	13.6	1.86	2.8
М6	12.9	1.98	2.9

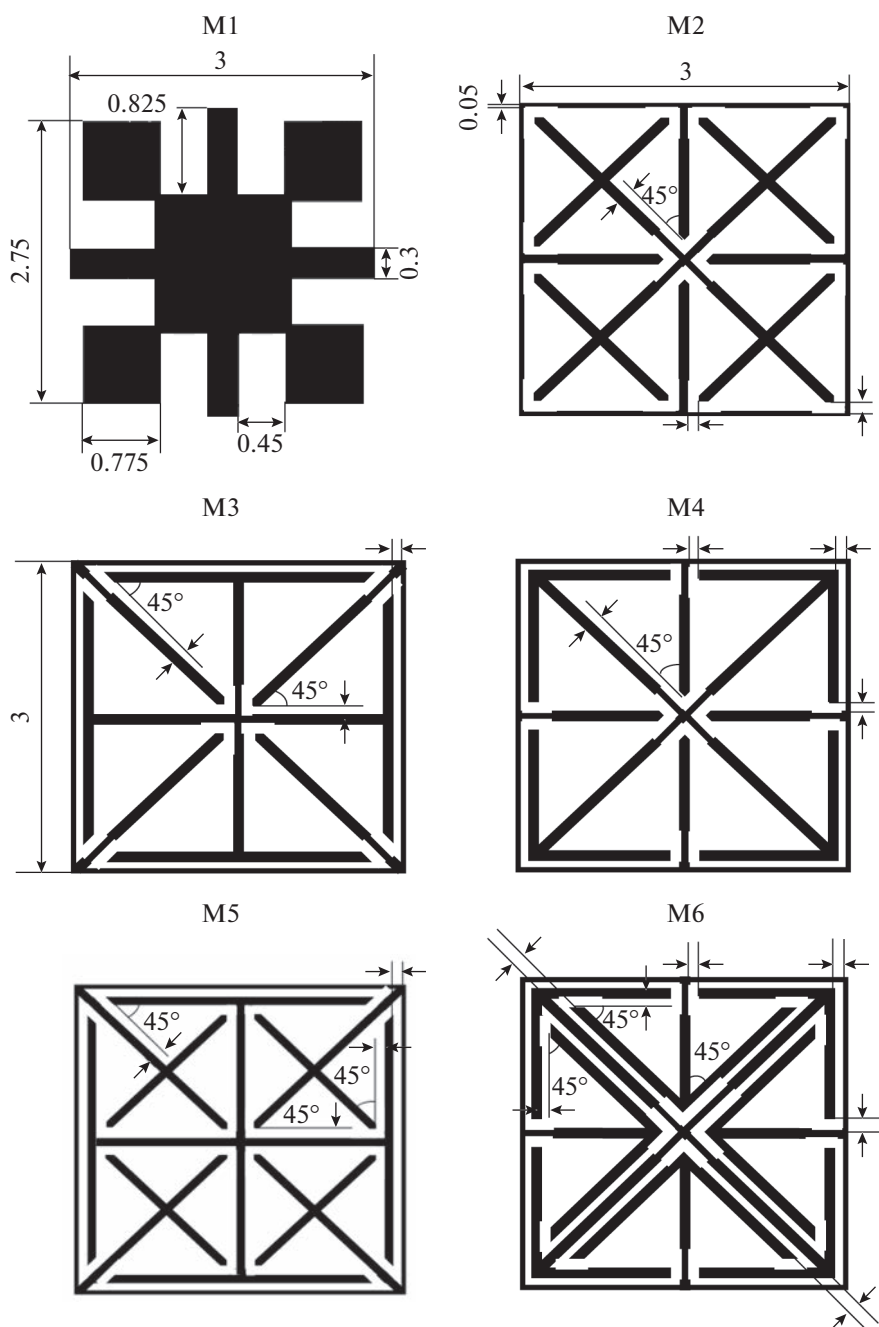


Рис. 2. Модели M1...M6 полосно-пропускающих ЧСП; ширина проводников 0.1 мм, ширина зазоров, отмеченных стрелками, 0.1 мм; остальные значения в мм.

Частотная зависимость коэффициента отражения  $R$  от полосно-пропускающей ЧСП в свободном пространстве рассчитывается по следующей формуле [19]:

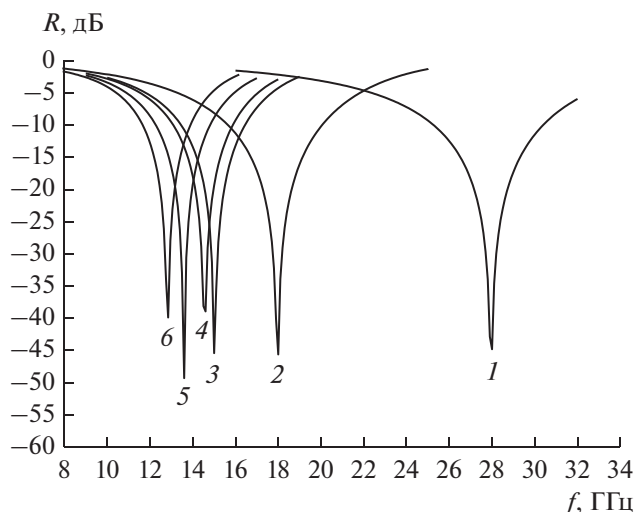
$$R = \frac{-1}{1 + j[Q(f/f_p - f_p/f)]}, \quad (3)$$

где  $f$  – частота,  $f_p$  – резонансная частота,  $Q$  – фактор ЧСП.

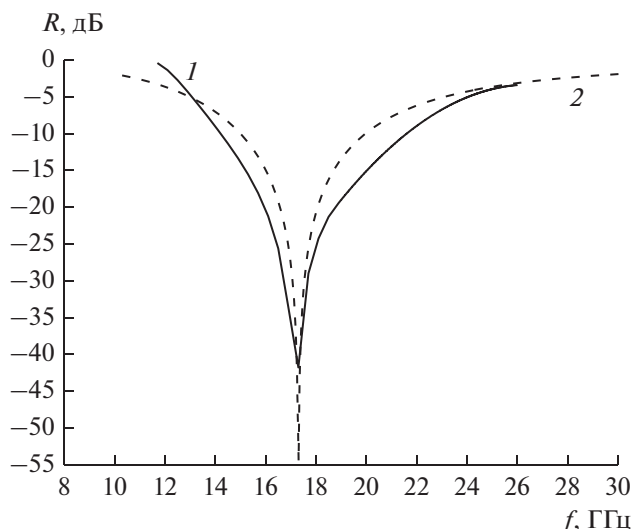
## 2. ИЗМЕНЕНИЕ РАБОЧЕЙ ЧАСТОТЫ ИМП

В работе рассмотрен вариант изменения рабочей частоты ИМП на примере модели M1. Целью численного моделирования частотной зависимости фазы коэффициента отражения от ИМП являлось исследование путей модификации структуры в сторону низких частот.

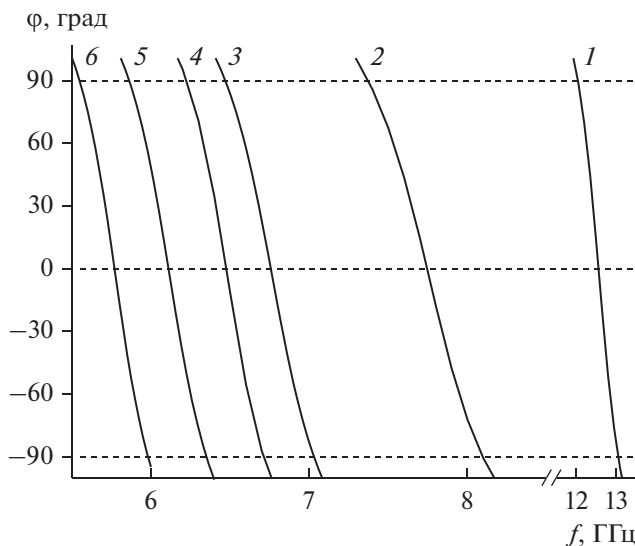
Резонансные частоты ЧСП и ИМП существенно различны и определяются минимумом



**Рис. 3.** Частотные зависимости коэффициента отражения  $R$  от ЧСП для М1...М6 (см. рис. 2) соответственно кривые 1...6.



**Рис. 5.** Частотные зависимости коэффициента отражения  $R$  от ЧСП с модифицированной моделью: 1 – численное моделирование, 2 – расчет по формуле (3).



**Рис. 4.** Частотные зависимости фазы коэффициента отражения  $\varphi$  от ИМП для моделей М1...М6 (соответственно кривые 1...6).

коэффициента отражения и нулевой фазой коэффициента отражения соответственно. Любая возможность изменения рабочей частоты представляет существенный интерес. Наличие функциональных связей между характеристиками ИМП, параметрами ЧСП и диэлектрического слоя позволяют решить эту задачу. По приближенным формулам (1)–(3) сделана предварительная оценка ЧСП модифицированной модели М1 и проведено численное моделирование. Все размеры модифицированной модели (см. рис. 2, М1) увеличены в 1.75 раза, таким образом, период решетки увеличился до 5.25 мм.

Также были рассчитаны значения резонансной частоты  $f_p$ ,  $Q$ -фактора ЧСП с модифицированной моделью М1 и толщины  $D$  диэлектрической подложки ИМП. Толщина  $D$  рассчитана по формуле (1) при условии  $\epsilon = 10.2$ .  $f_p = 17.3$  ГГц,  $Q = 1.35$ ,  $D = 2.5$  мм.

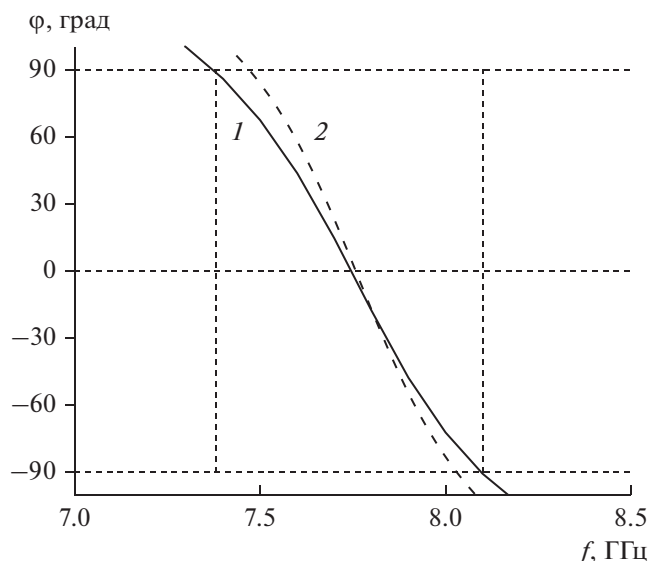
На рис. 5 приведены частотные зависимости от ЧСП с модифицированной моделью М1 в свободном пространстве: 1 – получена численным моделированием, 2 – рассчитана по формуле (3). Как видно из сравнения рис. 5 с рис. 3 (кривая 1) резонансная частота ЧСП понизилась с 28 до 17.3 ГГц.

На рис. 6 представлены частотные зависимости фазы коэффициента отражения от ИМП с модифицированной моделью М1 ЧСП: 1 – получена численным моделированием, 2 – рассчитана

**Таблица 2.** Резонансные частоты  $f_0$  и полосы рабочих частот ИМП

Номер ИМП	$f_0$ , ГГц		$f_{+90}$ , ГГц	$f_{-90}$ , ГГц	$\Delta f / f_0$ %	
	ЧМ	Р	ЧМ	ЧМ	ЧМ	Р
1	12.5	12.0	12.0	13.0	8.0	9.5
2	7.75	8.35	7.37	8.1	9.4	12.0
3	6.76	6.96	6.47	7.02	8.3	11.0
4	6.48	6.77	6.22	6.71	7.6	10.0
5	6.11	6.31	5.89	6.36	7.7	10.0
6	5.77	5.99	5.55	5.08	7.5	9.5

Примечание: ЧМ – численное моделирование, Р – расчет по формулам.



**Рис. 6.** Частотные зависимости фазы коэффициента отражения  $\varphi$  от ИМП с модифицированной моделью ЧСП: 1 – численное моделирование, 2 – расчет по формуле (2).

по формуле (2). Из сравнения рис. 6 с рис. 4 (кривая 1) видно, что резонансная частота ИМП уменьшилась с 12.5 до 7.76 ГГц, а рабочая полоса частот осталась 9%.

Приближенный расчет по формулам хорошо согласуется с численным моделированием. Отличие составляет порядка 10%.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получены следующие результаты.

1. Путем численного моделирования частотной зависимости коэффициента отражения от предложенных типов полосно-пропускающих ЧСП структур найдены значения их резонансных частот и  $Q$ -факторов. Эти частоты и  $Q$ -факторы меньше, чем у базовой структуры, причем отношение периода к резонансной длине волны снизилось с  $1/4$  до  $1/8$ .

2. Построены новые структуры ИМП на основе полосно-пропускающих ЧСП (М2...М6) с периодом решетки 3 мм и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 10.2$ , как и у базовой модели М1. Резонансные частоты новых моделей лежат в пределах 5.77...7.75 ГГц, а рабочая полоса ИМП изменяется от 7.5 до 9.4%. При этом базовая модель имеет более высокую резонансную частоту в 12.5 ГГц с рабочей полосой ИМП 8%.

3. Показано на примере структуры ИМП с ЧСП базовой модели (М1), что при увеличении в 1.75 раза толщины диэлектрического слоя с  $\epsilon = 10.2$

и всех размеров решетки происходит сдвиг резонансной частоты ИМП в область низких частот.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания ИРЭ РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Qian Y., Radisic V., Itoh T. // Proc. 1997 Int. Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC). Hong-Kong. 2–5 Dec. 1997. N.Y.: IEEE, 1997. V. 2. P. 585.
2. Qian Y., Yang F-R., Itoh T. // Proc. 1998 Int. Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC) Yokohama. 08–11 Dec. Tokyo: IEICE, 1998. P. 589.
3. Yang F-R., Qian Y., Coccioli R., Itoh T. // IEEE Trans. 1998. V. MW-8. P. 372.
4. Yang F-R., Qian Y., Itoh T. // Proc. 1998 Int. Asia-Pacific Microwave Conf. (APMC) Yokohama. 08–11 Dec. Tokyo: IEICE, 1998. P. 593.
5. Yang F-R., Coccioli R., Qian Y., Itoh T. // Dig. 1999 IEEE Antennas and Propagation Soc. Int. Symp. Orlando. 11–16 Jul. N.Y.: IEEE, 1999. V. 3. P. 1920.
6. Coccioli R., Yang F-R., Ma R. P., Itoh T. // IEEE Trans. 1999. V. MTT-47. № 11. P. 2123.
7. Yang F-R., Qian Y., Itoh T. // Dig. 1999 IEEE Microwave Theory and Techniques Soc. (MTT-S) Int. Microwave Symp. Anaheim. 13–19 Jun. N.Y.: IEEE, 1999. V. 3. P. 919.
8. Yang F-R., Ma R.P., Qian Y., Itoh T. // IEEE Trans. 1999. V. MTT-47. № 8. P. 1509.
9. Yang F-R., Coccioli R., Qian Y., Itoh T. // Dig. 2000 IEEE Microwave Theory and Techniques Soc. (MTT-S) Int. Microwave Symp. 11–16 Jun. Boston. N.Y.: IEEE, 2000. V. 3. P. 1529.
10. Chang Q.C., Qian Y., Itoh T. // Progress in Electromagnetics Research. PIER. 2003. V. 41. P. 211.
11. Sievenpiper D., Zhang L., Broas R.J. et al. // IEEE Trans. 1999. V. MTT-47. № 11. P. 2059.
12. Broas R.J., Sievenpiper D., Yablonovitch E. // IEEE Trans. 2001. V. MTT-49. № 7. P. 1262.
13. Broas R.J., Sievenpiper D., Yablonovitch E. // IEEE Trans. 2005. V. AP-53. № 4. P. 1377.
14. Hiranandani M.A., Yakovlev A.B., Kishk A.A. // IEEE Proc. Microw. Antennas Propag. 2006. V. 153. № 5. P. 487.
15. Kern D.J., Werner D.H., Monorchio A. et al. // IEEE Trans. 2005. V. AP-53. № 1. P. 8.
16. Sohn J.R., Kim K.Y., Lee J.-H., Tae H.-S. // Progress in Electromagnetics Research (PIER). 2006. V. 61. P. 27.
17. Казанцев Ю.Н., Крафтмахер Г.А., Мальцев В.П. // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 874.
18. Дьяконова О.А., Казанцев Ю.Н. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug18/10/text.pdf>.
19. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.



---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.3.088,621.3.087

**РЕКОНСТРУКЦИЯ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ  
С ПОМОЩЬЮ ТЕСТОВЫХ ИСПЫТАНИЙ**

© 2023 г. А. В. Новиков-Бородин\*

Институт ядерных исследований РАН,  
пр. 60-летия Октября, 7а, Москва, 117312 Российская Федерация

\*E-mail: novikov.borodin@gmail.com

Поступила в редакцию 21.03.2022 г.

После доработки 28.06.2022 г.

Принята к публикации 27.09.2022 г.

Предложены и проанализированы методы тестовых испытаний, предназначенные для математической реконструкции входных сигналов линейных стационарных систем обработки информации из искаженных ими и зашумленных выходных сигналов. Показано, что использование данных тестовых испытаний позволяет осуществить не слепую реконструкцию без определения функций искажений сигналов или аппаратных функций систем обработки, которые, в общем случае, могут принадлежать к классу обобщенных функций. Рассмотрены особенности применения техники регуляризации в методах тестовых испытаний при решении некорректно поставленных и плохо обусловленных задач реконструкции реальных недетерминированных сигналов. Проанализированы критерии выбора тестовых сигналов. Представлены результаты численных экспериментов по восстановлению одномерных сигналов и двумерных изображений при разных уровнях зашумления.

DOI: 10.31857/S0033849423070082, EDN: WPIOFD

**ВВЕДЕНИЕ**

Реальные системы обработки информации, такие как системы измерения, усиления, приема-передачи и др. преобразований сигналов и изображений, несовершенны, что приводит к систематическим искажениям обрабатываемых ими данных и к появлению в них шумов и неопределенностей. Уменьшение искажений и неопределенностей в выходных сигналах путем усовершенствования оборудования связано с решением сложных научно-технических задач и с созданием дорогостоящей аппаратуры. Доступной альтернативой аппаратным методам могут стать математические методы восстановления входных сигналов из искаженных и зашумленных выходных на основе математической модели процесса обработки информации. Большинство подобных инверсных задач реконструкции являются некорректно поставленными и плохо обусловленными, универсальных подходов к их решению не существует и разработка эффективных в том или ином случае методов восстановления обрабатываемой информации, является актуальным и востребованным направлением исследований (см., например, [1–11]). Из существующих подходов к решению некорректных задач можно выделить вариационные [12–17] и итерационные [18–25] методы регуляризации, а также методы с использованием вейвлет-преобразований [26–28].

В данной работе рассматриваются линейные стационарные (ЛС) системы обработки информации, имеющие важное значение и широко используемые при измерениях, усилении, приеме-передачи и других преобразованиях сигналов (см., например, [29–37]). При математической реконструкции внешних воздействий  $v(x)$  из откликов  $w(x)$  ЛС-систем, поведение которых характеризуется аппаратной функцией  $u(x)$ , используется приближенное вследствие недетерминированности реальных сигналов и неопределенности аппаратной функции уравнение типа свертки  $w(x) \approx (u * v)(x)$ .

Определение аппаратной функции является первоочередной задачей еще на стадии постановки задачи реконструкции, но часто трудности ее определения превосходят проблемы самой реконструкции сигналов. Во многом это связано с тем, что в отличие от сигналов, описываемых основными функциями, аппаратные функции зачастую относятся к классу обобщенных (см., например, [38–40] и примеры в разд. 1), что делает неприемлемыми многие методы их определения, такие, например, как численные или экспериментальные, в которых, по сути, предпринимается попытка аппроксимации обобщенных функций основными. Аналитические методы определения аппаратных функций с помощью математического

моделирования работы ЛС-систем возможны далеко не всегда, так как моделирование является крайне непростой задачей в случае сложных ЛС-систем и может быть неточным в случае быстродействующих и прецизионных из-за проблем учета паразитных параметров и взаимосвязей элементов приборов. Подобные проблемы определения аппаратных функций еще на стадии постановки задачи приводят к тому, что математические методы реконструкции сигналов для устранения систематических искажений в сложных системах обработки информации практически не применяются, за исключением отдельных случаев, когда аппаратная функция относится к классу основных или, реже, некоторых разрывных функций.

В данной работе для решения задачи математической реконструкции сигналов, искаженных ЛС-системами, предлагаются методы тестовых испытаний (ТИ), в которых моделирование ЛС-систем и определение их аппаратных функций не требуются, что устраняет многие из указанных выше проблем. Реконструкция сигналов в ТИ-методах осуществляется не из ЛС-уравнения, а из уравнения тестовых испытаний, которое тоже является уравнением типа свертки, но содержит только сигналы из класса основных функций, что значительно упрощает задачу реконструкции и позволяет использовать многие существующие методы решения некорректно поставленных задач. В данной работе для реконструкции сигналов и изображений с помощью тестовых испытаний была использована техника регуляризации по Тихонову [12–17], которая удобна для контроля за процессом регуляризации и для иллюстрации применения предлагаемых ТИ-методов. На основе техники регуляризации рассматриваются варианты восстановления непрерывных сигналов и дискретных данных прямыми и спектральными (с использованием преобразований Фурье) методами регуляризации. Особое внимание в работе уделено практическим вопросам выбора тестовых сигналов, стабилизаторов и параметров регуляризации, напрямую влияющих на точность реконструкции. Представлены примеры восстановления одномерных сигналов и двумерных изображений.

## 1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ИСПЫТАНИЙ

*Линейные стационарные* системы имеют важное значение и широко используются при измерениях, усилении, приеме-передаче и другой обработке сигналов (см., например, [29–37]). Поведение ЛС-системы в исследуемой области  $D$  характеризуется *аппаратной* функцией  $u(x)$ , и ее *отклик*  $w(x)$  (выходной сигнал) на внешнее *воздействие*  $v(x)$  (входной сигнал) в случае недетерминированных

сигналов приближенно описывается *уравнением типа свертки*

$$w(x) \approx (u * v)(x) = \int_D u(x - \xi) v(\xi) d\xi, \quad (1)$$

которое будем называть уравнением линейных стационарных систем или, сокращенно, ЛС-уравнением. Неопределенность ЛС-уравнения для реальных недетерминированных сигналов  $w(x)$ ,  $v(x)$  и функции  $u(x)$  с шумами и неопределенностями  $\Delta w(x)$ ,  $\Delta v(x)$  и  $\Delta u(x)$  составляет

$$\eta(x) = -\Delta w + u * \Delta v + \Delta u * v + \Delta u * \Delta v.$$

При  $\eta(x) = 0$  ЛС уравнение (1) переходит в строгое уравнение свертки  $w(x) = (u * v)(x)$  для детерминированных сигналов.

Помимо интерпретации функции  $u(x)$  как аппаратной или приборной (в радиотехнике и электронике), в других областях науки и техники в зависимости от основных процессов, описываемых уравнением (1), она интерпретируется как весовая (в теории систем, экспериментальной физике и математической статистике), как функция рассеяния (информационные системы обработки сигналов и изображений) и др. В математике функция  $u(x)$  называется ядром свертки. Далее функцию  $u(x)$  будем называть *системной* или, подчеркивая специфику данной работы, *аппаратной*, но понимая ее в общем смысле, т.е. включая все физические проявления линейного стационарного процесса (1) при работе ЛС-систем.

Задача реконструкции воздействий  $v(x)$  из откликов  $w(x)$  математическими методами из приближенного уравнения типа свертки (1) является инверсной, некорректно поставленной и, зачастую, плохо обусловленной, т.е. если пренебречь неопределенностями в (1), то найденное точное решение может сколь угодно много отличаться от реконструируемого воздействия, даже если исходные неопределенности были сколь угодно малы. В общем случае, решение может вообще не существовать или быть неоднозначным.

В существующих методах решения обратных некорректно поставленных задач ищется не точное, а приближенное решение, степень приближения которого к истинному решению критически зависит от неопределенности исходных данных (функций  $w(x)$  и  $u(x)$ ). Особые затруднения вызывает точность определения аппаратных функций  $u(x)$ , которые в отличие от сигналов  $w(x)$  и  $v(x)$ , описываемых основными функциями, зачастую относятся к классу обобщенных. Так, если, например, поведение ЛС-системы описывается обык-

новенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$w(x) = a_n v^{(n)}(x) + a_{n-1} v^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 v'(x) + a_0 v(x),$$

то аппаратная функция такой системы будет равна сумме производных от дельта-функции  $\delta(x)$ :

$$u(x) = a_n \delta^{(n)}(x) + a_{n-1} \delta^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \delta'(x) + a_0 \delta(x),$$

что следует из представления  $v(x) = (\delta * v)(x)$  и линейных свойств свертки (подробнее см., например, в [38–40]), т.е. будет обобщенной функцией. В частности, последний член  $u(x) = a_0 \delta(x)$  соответствует аппаратной функции “простейшей” “идеальной” измерительной или усилительной ЛС-системы, не искажающей форму входного сигнала, так как

$$w(x) \approx a_0 (\delta * v)(x) = a_0 v(x).$$

Принадлежность аппаратных функций к классу обобщенных делает неприемлемыми для ее определения многие существующие подходы. Аналитическое описание аппаратных функций на основе моделирования работы ЛС-систем возможно далеко не всегда, так как является крайне непростой задачей в случае сложных систем и неточной в случае быстродействующих и прецизионных из-за проблем учета паразитных параметров и взаимосвязей элементов приборов. Принципиальные проблемы возникают при попытках определения аппаратных функций численными расчетами или экспериментальным путем, где, по сути, предпринимается попытка аппроксимации обобщенных функций основными, что или невозможно, или приведет к погрешностям, неприемлемым для использования аппаратных функций при дальнейшей реконструкции сигналов из ЛС-уравнений (1).

Например, определить аппаратную функцию  $u(x)$  прямым экспериментом как отклик ЛС-системы на входное воздействие в виде дельта-функции (при  $v(x) = \delta(x)$ :  $w(x) \approx (u * \delta)(x) = u(x)$ ) невозможно из-за невозможности сгенерировать входной сигнал с нулевой длительностью и бесконечной амплитудой, а также из-за ограничений на допустимый диапазон входных сигналов реальных систем. Если же вместо дельта-функции использовать некоторое тестовое воздействие  $v(x) = v_c(x)$  из допустимого диапазона входных сигналов ЛС-системы, найти отклик на него  $w_c(x)$  и попробовать реконструировать аппаратную функцию  $u(x)$  математическими методами из ЛС-уравнения (1) для этих сигналов:  $w_c(x) \approx (u * v_c)(x)$ , то, поскольку эта задача является некорректно постав-

ленной, методическая погрешность приближенной реконструкции аппаратной функции существующими методами с учетом ее принадлежности к классу обобщенных может быть слишком велика и полученное решение будет непригодно для дальнейшего использования при реконструкции сигналов. Кроме того, требования к тестовым сигналам могут оказаться слишком жесткими и нереализуемыми на практике. Например, чтобы реконструировать аппаратную функцию  $u(x) = a\delta(x)$  “идеального” усилителя, не искажающего форму входного сигнала ( $w(x) \approx a(\delta * v)(x) = av(x)$ ), частотный диапазон тестовых сигналов должен перекрывать бесконечный диапазон частот, что на практике для реальных сигналов недостижимо.

В *методе тестовых испытаний*, предлагаемом в данной работе для реконструкции сигналов, также используются тестовое воздействие  $v_c(x)$  и отклик  $w_c(x)$ , находящиеся в допустимых диапазонах ЛС-систем и, следовательно, связанные уравнением (1):  $w_c(x) \approx (u * v_c)(x)$ , но определение аппаратной функции в ТИ-методах не требуется, что позволяет частично или полностью решить указанные выше проблемы. Действительно, свертывая обе части уравнения (1) с функцией  $v_c(x)$  и учитывая коммутативность и ассоциативность свертки и уравнение связи тестовых сигналов, можно исключить аппаратную функцию и получить *основное ТИ-уравнение*

$$(w * v_c)(x) \approx (w_c * v)(x). \quad (2)$$

ТИ-уравнение (2), как и (1), является приближенным уравнением типа свертки, но не содержит аппаратных функций, а только сигналы из класса основных функций, что дает возможность восстановления воздействий  $v(x)$  из него многими существующими методами решения некорректных задач. Неопределенность ТИ-уравнения зависит от неопределенностей  $\Delta w(x)$ ,  $\Delta v(x)$  и  $\Delta w_c(x)$ ,  $\Delta v_c(x)$  в сигналах  $w(x)$ ,  $v(x)$  и  $w_c(x)$ ,  $v_c(x)$  и равна:

$$\eta_c(x) = -(\Delta w * v_c + w * \Delta v_c + \Delta w * \Delta v_c)(x) + (\Delta w_c * v + w_c * \Delta v + \Delta w_c * \Delta v)(x).$$

Тестовые сигналы, содержащие информацию о работе ЛС-систем, можно определить многими способами, например, с помощью численных расчетов, что даже для сложных ЛС-систем не вызывает больших затруднений. При экспериментальном определении тестовых сигналов ЛС-системы рассматриваются как “черный ящик” и их анализ вообще не требуется (достаточно информации о их линейности и стационарности). При этом в тестовых сигналах автоматически учитываются паразитные взаимосвязи элементов устройств, что дает возможность использовать ТИ-методы для

реконструкции сигналов быстродействующих и прецизионных ЛС-систем любой сложности.

К сложным ЛС-системам можно отнести системы, состоящие из произвольного числа последовательно и/или параллельно соединенных ЛС-подсистем. Действительно, последовательно соединенные ЛС-системы являются ЛС-системой в силу ассоциативности свертки:

$$w(x) = (u_n * \dots * (u_1 * v))(x) = \\ = ((u_n \dots u_1) * v)(x) = (u * v)(x),$$

а параллельно соединенные – в силу ее линейности:

$$w(x) = (u_n * v)(x) + \dots + (u_1 * v)(x) = \\ = ((u_n + \dots + u_1) * v)(x) = (u * v)(x).$$

Подобные *составные* ЛС-системы очень распространены. Такими системами являются, например, электронные схемы из любого количества пассивных элементов (резисторов, конденсаторов, индуктивностей, линий связи и т.д.) (см. пример в разд. 6) и активных элементов (операционных усилителей, транзисторов и др.), работающих в линейном режиме.

ТИ-методами можно реконструировать не только сигналы на входе составной ЛС-системы, но и, в силу линейности свертки, сигналы на входе или выходе любой из ее ЛС-подсистем. При реконструкции сигналов на входе ЛС-подсистем тестовые сигналы должны быть определены в соответствующих узлах. При определении тестовых сигналов экспериментальным путем не требуется анализ ни составной системы, ни ее подсистем.

Классификация и обзор существующих методов решения некорректно поставленных задач реконструкции сигналов из класса основных функций из ТИ-уравнений (2) не входит в рамки данной работы. Далее для реконструкции сигналов и изображений будет использоваться техника регуляризации по Тихонову [12–17], которая удобна для контроля за процессом регуляризации и для иллюстрации использования ТИ-методов. Будут рассмотрены варианты восстановления непрерывных сигналов и дискретных данных прямыми и спектральными (с использованием преобразований Фурье) методами регуляризации. Особое внимание будет уделено практическим вопросам выбора тестовых сигналов, стабилизаторов и параметров регуляризации, напрямую влияющих на точность реконструкции.

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

Задача реконструкции воздействий из приближенных уравнений типа свертки, таких как уравнение ЛС-систем (1) и уравнение тестовых испытаний (2), является инверсной, некорректно поставленной и, зачастую, плохо обусловленной. В

ТИ-методах для реконструкции сигналов используется ТИ-уравнение (2), которое, как и ЛС-уравнение (1) является уравнением типа свертки, но не содержит функций из класса обобщенных, а содержит лишь сигналы, относящиеся к классу основных функций. Если в (1) ограничиться рассмотрением функций из класса основных, то методы решения ЛС-уравнения (1) принципиально не будут отличаться от методов решения ТИ-уравнения (2), и, заменив в известных решениях уравнения (1) функции  $w(x)$  на  $(w * v_c)(x)$  и  $u(x)$  на  $w_c(x)$ , можно перейти от решений ЛС-уравнения (1) к решениям ТИ-уравнения (2). Далее эти замены будем называть *переходными*.

В технике регуляризации по Тихонову регуляризованным решением  $v_r(x)$  уравнения типа свертки (1) считается функция, при которой достигается минимум функционала:

$$v_r(x) = \min_v (\|w - u * v\|^2 + P[v, p]). \quad (3)$$

Здесь  $\|f(x)\|$  – норма функции  $f(x)$ , обычно принимаемая как евклидова норма

$$\|f(x)\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Стабилизирующий член  $P[v, p]$ , где  $p = \{p_i\}$  – параметры регуляризации, обеспечивает устойчивость решения при варьировании исходных данных. При оптимальном выборе стабилизатора  $P[v, p]$  достигается минимум невязки  $\|v_r(x) - v(x)\|$  регуляризованного решения и реконструируемого воздействия. Вопросы выбора стабилизатора  $P[v, p]$  и параметров регуляризации  $p$  будут рассмотрены ниже.

Спектр  $V_r(\omega)$  или преобразование Фурье регуляризованного решения  $v_r(x)$  (3) можно выразить в явном виде через спектры  $W(\omega)$ ,  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  функций  $w(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ :

$$V_r(\omega) = \frac{U^*(\omega)W(\omega)}{U^*(\omega)U(\omega) + Q(\omega, q)} = \\ = \frac{U^*(\omega)W(\omega)}{|U(\omega)|^2 + Q(\omega, q)}. \quad (4)$$

Здесь  $Q(\omega, q)$  – стабилизирующий член с параметрами регуляризации  $q = \{q_i\}$ ,  $|U(\omega)|^2 = U^*(\omega)U(\omega)$ ,  $U^*(\omega)$  – комплексное сопряжение к  $U(\omega)$  (в многомерном случае сопряженно-транспонированный оператор). Связь между стабилизаторами в

(3) и (4) можно найти, используя равенство Планшереля

$$P[v, p] = \int_{\Omega} Q(\omega, q) |V(\omega)|^2 d\omega,$$

где  $\Omega$  — пространство частот.

Методы (3) и (4) поиска регуляризованного решения эквивалентны в силу линейности Фурье-преобразования, но обладают некоторой спецификой при применении на практике, поэтому далее будем рассматривать оба способа, называя метод (4) *спектральным*, а (3) — *прямым*.

Область реконструкции спектра  $V(\omega)$  воздействия  $v(x)$  ограничена *диапазоном реконструкции*

$$\Omega_{\eta} = \{\omega : \gamma |N(\omega)| \leq |W(\omega)|\},$$

где спектр отклика  $W(\omega)$  может быть выделен на фоне спектра  $N(\omega)$  неопределенностей  $\eta(x)$  уравнения (1). Здесь коэффициент  $\gamma > 0$  характеризует методы выделения спектра. Используя равенство Планшереля, можно оценить ограничение  $\delta v_r^{\eta}$  на точность  $\delta v_r$  реконструкции воздействия  $v(x)$  в диапазоне  $\Omega_{\eta}$ :

$$\begin{aligned} \delta v_r &\geq \delta v_r^{\eta} = 1 - \frac{\|V\|_{\Omega_{\eta}}}{\|V\|} = \\ &= 1 - \frac{1}{\|V\|} \left[ \int_{\Omega_{\eta}} |V(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

При стремлении уровня неопределенности в (1) к нулю:  $\|\eta(x)\| \rightarrow 0$  (при этом в силу равенства Планшереля норма его спектра также стремится к нулю:  $\|N(\omega)\| \rightarrow 0$ ), для любого  $\gamma > 0$  точность  $\delta v_r$  будет ограничена полосой пропускания ЛС-системы  $\Omega_U = \{\omega : U(\omega) \neq 0\}$ , так как

$$W(\omega) \rightarrow U(\omega)V(\omega) \quad \text{и} \quad \Omega_{\eta} \rightarrow \Omega_U.$$

Поскольку для функций из класса основных методы решения ТИ-уравнения (2) принципиально не отличаются от методов решения ЛС-уравнения (1), то, заменяя в (3) функцию  $w(x)$  на  $(w * v_c)(x)$  и функцию  $u(x)$  на  $w_c(x)$ , получим функционал для регуляризованного решения ТИ-уравнения (2):

$$v_r(x) = \min_v \left( \|w * v_c - w_c * v\|^2 + P[v, p] \right). \quad (6)$$

Аналогично, заменяя в (4) спектр  $W(\omega)$  на  $W(\omega)V_c(\omega)$  и спектр  $U(\omega)$  на  $W_c(\omega)$ , получим спектр регуляризованного решения:

$$V_r(\omega) = \frac{W_c^*(\omega)W(\omega)V_c(\omega)}{W_c^*(\omega)W_c(\omega) + Q(\omega, q)}. \quad (7)$$

По аналогии с (5), используя равенство Планшереля, можно оценить ограничение  $\delta v_r^c$  на уровень относительной погрешности  $\delta v_r$  реконструкции воздействия  $v(x)$  из ТИ-уравнения (2) в диапазоне реконструкции  $\Omega_{\eta}^c = \{\omega : \gamma |N_c(\omega)| \leq |W(\omega)V_c(\omega)|\}$ :

$$\begin{aligned} \delta v_r &\geq \delta v_r^c = 1 - \frac{\|V\|_{\Omega_{\eta}^c}}{\|V\|} = \\ &= 1 - \frac{1}{\|V\|} \left[ \int_{\Omega_{\eta}^c} |V(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

При стремлении уровня неопределенности ТИ-уравнения (2) к нулю  $\|\eta_c(x)\| \rightarrow 0$  (в силу равенства Планшереля:  $\|N_c(\omega)\| \rightarrow 0$ ), точность реконструкции будет ограничена не только полосой пропускания ЛС-системы, как в (5), но и частотным диапазоном  $V_c(\omega)$  тестового воздействия, или, поскольку  $U(\omega)V_c(\omega) \rightarrow W_c(\omega)$ , — частотным диапазоном  $W_c(\omega)$  тестового отклика. При этом

$$\Omega_{\eta}^c \rightarrow \{\omega : U(\omega)V_c(\omega) \neq 0\}.$$

Отметим, что неопределенность ТИ-уравнения (2) можно уменьшить, уменьшив случайные шумы и неопределенности в тестовых сигналах  $w_c(x)$  и  $v_c(x)$  статистическими методами, например, повторяя тестовые испытания необходимое количество раз при проведении тестовых испытаний экспериментальным путем. Таким же образом можно уменьшить случайные шумы и неопределенности в реконструируемом отклике  $w(x)$ , если имеется возможность повторить измерения и вид воздействий при этом не меняется.

Уравнение тестовых испытаний (2) можно использовать не только для реконструкции воздействий, но и для моделирования отклика  $w(x)$  ЛС-систем на заданное воздействие  $v(x)$ . При этом в ТИ-уравнении (2) известными будут воздействие  $v(x)$  и тестовые сигналы  $v_c(x)$  и  $w_c(x)$ , а неизвестным будет отклик  $w(x)$ . Заменяя в (3)  $w(x)$  на  $(v * w_c)(x)$  и  $u(x)$  на  $v_c(x)$ , получим функционал для моделирования отклика  $w(x)$ :

$$w_r(x) = \min_w \left( \|v * w_c - v_c * w\|^2 + P[w, p] \right).$$

Аналогично, заменив в (4)  $W(\omega)$  на  $V(\omega)W_c(\omega)$  и  $U(\omega)$  на  $V_c(\omega)$ , получим выражение для регуляризованного спектра  $W_r(\omega)$  моделируемого отклика:

$$W_r(\omega) = \frac{V_c^*(\omega)V(\omega)W_c(\omega)}{V_c^*(\omega)V_c(\omega) + Q(\omega, q)}.$$

Диапазон спектра  $W_r(\omega)$  будет, как и в (8), ограничен диапазоном спектра тестового воздействия и полосой пропускания ЛС-системы  $\Omega_\eta^c$ , и точность моделирования в этом диапазоне будет ограничена погрешностью

$$\delta w_r \geq \delta w_r^c = 1 - \frac{\|w\|_{\Omega_\eta^c}}{\|w\|} = 1 - \frac{1}{\|W\|} \left[ \int_{\Omega_\eta^c} |W(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}.$$

### 3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Критерием оптимальности выбора стабилизаторов  $P[v, p]$  и  $Q(\omega, q)$  и параметров регуляризации  $p$  и  $q$  в выражениях (3), (6) и (4), (7) является минимум невязки  $\|v_r(x) - v(x)\|$  полученного решения и искомого воздействия, но так как искомое воздействие неизвестно, то напрямую применить этот критерий невозможно. Выбор осуществляют в зависимости от интерпретации процессов (1) и (2) и наличия априорной информации о них. Исследование этого вопроса в частных случаях различной априорной информации посвящен целый ряд работ (см., например, [1–5, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 22]). В данном разделе будут описаны общие закономерности и подходы, позволяющие упростить задачу выбора стабилизаторов и параметров регуляризации на практике применительно к рассматриваемому случаю реконструкции сигналов и изображений ЛС-систем.

Реальные сигналы  $w(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w_c(x)$  и  $v_c(x)$  в ЛС-системах обычно описываются вещественными функциями, а шумы и неопределенности в каждом из сигналов не коррелируют с ними. В этом случае оптимальный стабилизатор в выражениях (4) и (7), обеспечивающий минимум невязки

$$\|v_r(x) - v(x)\| = \|V_r(\omega) - V(\omega)\|,$$

не зависит от параметров регуляризации  $q = \{q_i\}$  и соответствует так называемому фильтру Винера:

$$Q(\omega, q) = |N(\omega)|^2 / |V(\omega)|^2,$$

где  $|V(\omega)|^2$  – энергетический спектр восстанавливаемого сигнала  $v(x)$ , а  $|N(\omega)|^2$  – энергетический спектр неопределенностей  $\eta(x)$  или  $\eta_c(x)$  рассматриваемых уравнений (1) или (2). Эти спектры для случайных стационарных процессов понимаются в смысле математического ожидания и, как правило, неизвестны, но из того, что они неотрицательны и для вещественных функций симмет-

ричны, следует, что стабилизатор надо искать в виде неотрицательной симметричной функции:

$$Q(\omega, q) = \sum_{i=0}^n q_i \omega^{2i},$$

где  $q_i \geq 0$ ,  $q_n > 0$ , а  $2n$  – порядок стабилизатора. Используя связь между стабилизаторами  $P[v, p]$  и  $Q(\omega, q)$  (см. комментарии к (4)) и учитывая преобразование Фурье для производных, получим вид соответствующих стабилизаторов в (3) и (6):

$$P[v, p] = \sum_{i=0}^n \int_D p_i \left| \frac{d^{2i} v}{dx^{2i}} \right|^2 dx, \quad p_i \geq 0, \quad p_n > 0,$$

которые, следовательно, подразумевают поиск решения, имеющего непрерывные производные порядка  $2n$ . Значения параметров регуляризации  $q_i$  и  $p_i$  определяют “степень сглаженности”  $2i$ -й производной регуляризованного решения, т.е. при  $q_i, p_i = 0$  сглаженность  $2i$ -й производной будет равна нулю, а при увеличении этих параметров ее гладкость будет возрастать. В частности, стабилизаторы нулевого порядка ( $2n = 0$ ):  $Q(\omega, q) = q_0$  и  $P[v, p] = p_0 \|v\|^2$  соответствуют поиску решений, “степень непрерывности” которых определяется значениями  $q_0$  и  $p_0$ .

Если все параметры регуляризации и, следовательно, стабилизирующие члены равны нулю:  $p, q = 0$ , то будет найдено “несглаженное”, так называемое обобщенное решение Мура–Пенроуза, которое, в общем случае, неустойчиво. В другом крайнем случае, когда значения параметров регуляризации стремятся к бесконечности  $p, q \rightarrow \infty$ , соответствующее регуляризованное решение будет “сглажено” до нуля:  $v_r^{p,q}(x) \rightarrow 0$ , что напрямую следует из выражений (4) и (7).

Поскольку высшие  $i$ -тые компоненты стабилизаторов более эффективно, чем низшие, сглаживают функции, подавляя высшие частотные гармоники сигналов, в простейшем случае можно ограничиться рассмотрением стабилизатора вида  $Q(\omega, q) = q|\omega|^{2z}$ , где  $q, z > 0$ , причем  $z$ , в общем случае, может быть действительным числом, что в стабилизаторе  $P[v, p]$  будет пониматься как производная “нецелого порядка”:

$$f^{(z)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega} \omega^z F(\omega) \exp(I\omega x) d\omega,$$

где  $F(\omega)$  – спектр функции  $f(x)$ ,  $I = \sqrt{-1}$ .

Из приведенных рассуждений о возрастании гладкости решения при увеличении значений параметров регуляризации следует простой способ “визуальной” оценки оптимальных значений параметров регуляризации для реальных сигналов,

физический спектр которых, как правило, ограничен, а высокочастотные гармоники в основном соответствуют шумам и неопределенностям. В этом случае при некоторых значениях параметров регуляризации  $p$  (или  $q$ ), близких к нулю, решение  $v_r^p(x)$  будет содержать высокочастотные выбросы, напоминающие случайные, на фоне некоторого низкочастотного тренда, соответствующего физическому сигналу. Высокочастотные выбросы можно сгладить, увеличивая значения  $p$  в высших компонентах стабилизаторов (или значение  $z$  в простейшем представлении  $Q(\omega, q) = q|\omega|^{2z}$ ). Оптимальными можно считать значения, при которых амплитуда выбросов значительно уменьшилась, а форма “основного тренда” не изменилась или изменилась незначительно. Практика работы показывает (см. примеры в разд. 6), что даже значительные отклонения параметров регуляризации от оптимального значения, как правило, не приводят к существенному возрастанию погрешности решения.

Более точные оценки параметров регуляризации следуют из монотонности возрастания невязок  $\|w - u * v_r^p\|$  или  $\|v_c * w - w_c * v_r^p\|$  с ростом значений параметров регуляризации  $p$  (или  $q$ ). Действительно, невязки  $\|w - u * v_r^p\|$  и  $\|v_c * w - w_c * v_r^p\|$  монотонно возрастают от 0 при  $p, q = 0$  (когда обобщенное решение не расходится) до  $\|w\|$  и  $\|v_c * w\|$  при  $p, q \rightarrow \infty$  соответственно (так как при  $p, q \rightarrow \infty$ :  $v_r^p(x) \rightarrow 0$ ) и при оптимальных значениях параметров регуляризации будут соответствовать уровню неопределенности соответствующих уравнений:  $\|w - u * v_r^p\| \approx \|\eta\|$  для (1) и  $\|v_c * w - w_c * v_r^p\| \approx \|\eta_c\|$  для (2). Отсюда также следуют условия на уровень неопределенности уравнений:  $\|\eta\| \leq \|w\|$  в (1) и  $\|\eta_c\| \leq \|v_c * w\|$  в (2), при которых реконструкция возможна.

Для поиска оптимального решения можно также использовать и другую априорную информацию о процессах (1) или (2) (как отмечалось выше, см., например, [1–5, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 22]). В рассматриваемых случаях обработки сигналов ЛС-систем априорно могут быть известны (или предполагаются известными) некоторые характеристики воздействий по амплитуде, длительности, фронтам, энергии, форме и т.п., которые при оптимальных значениях параметров регуляризации должны быть примерно равны соответствующим характеристикам найденного решения. В общем случае, если приводятся в соответствие несколько априорных данных, для поиска оптимального решения задается целевая функция, включающая сравниваемые характеристики с весовыми коэффициентами, зависящим от значимости характеристик.

#### 4. ВЫБОР ТЕСТОВЫХ СИГНАЛОВ

Характеристики тестовых сигналов напрямую влияют на точность реконструкции сигналов ТИ-методами, что предъявляет особые требования к их выбору.

Во-первых, как отмечалось при выводе ТИ-уравнения (2), характеристики тестовых сигналов  $v_c(x)$  и  $w_c(x)$  должны удовлетворять допустимым диапазонам для аппаратуры рассматриваемой ЛС-системы по амплитуде, частотному, динамическому диапазону и другим параметрам. Эти требования будем называть *аппаратным* критерием выбора тестовых сигналов.

Во-вторых, тестовые сигналы должны обеспечивать минимально возможный уровень неопределенности  $\eta_c(x)$  ТИ-уравнения (2), что будем называть критерием *неопределенности* при их выборе. Если представить  $\eta_c(x)$  в виде

$$\eta_c(x) = (\Delta w_c * v - \Delta w * v_c)(x) + (w_c * \Delta v - w * \Delta v_c)(x) + (\Delta w_c * \Delta v - \Delta w * \Delta v_c)(x),$$

то видно, что она будет минимальна, если тестовые сигналы  $w_c(x)$  и  $v_c(x)$  совпадут или будут пропорциональны реконструируемому сигналу  $w(x)$  и  $v(x)$  с точностью до шумов и неопределенностей. Выполнение этого критерия, по существу, означает реконструкцию воздействий подбором тестовых сигналов, что довольно сложно осуществить на практике. Более реальным является уменьшение не шумов и неопределенностей в тестовых сигналах, что при экспериментальном определении можно осуществить статистическими методами, повторяя тестовые измерения необходимое количество раз.

В-третьих, диапазон спектра тестового воздействия должен быть не меньше диапазона спектра реконструируемого воздействия или, если последнее неизвестно, не меньше полосы пропускания ЛС-системы. В противном случае, как было показано ранее (см. (5) и (8)), может возрасти погрешность реконструкции из-за ограничений, связанных с уменьшением частотного диапазона реконструкции

$$\Omega_\eta^c = \{\omega : \gamma |N_c(\omega)| \leq |W(\omega) V_c(\omega)|\}.$$

С точки зрения частотного критерия наиболее универсальным было бы использование тестового воздействия в виде дельта-функции, которая имеет равномерный спектр во всем пространстве частот, но использование таких сигналов противоречит аппаратному критерию. Метод тестовых испытаний позволяет в качестве тестового воздействия взять любое приближение дельта-функции, удовлетворяющее аппаратному критерию. Но если, например, в одномерном случае взять воздействие в виде прямоугольного импульса с

конечной амплитудой  $A$  и длительностью  $2T$ :  $v_c(t) = d(t) = A$  при  $t \in (-T, T)$ , то спектр такого воздействия

$$D(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T \exp(-I\omega t) dt = \frac{2AT}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T},$$

будет иметь множество нулей на оси частот при  $\omega T = \pi k$ , где  $k$  – целое, не равное нулю, причем первый нуль при  $\omega = \pi/T$ , ограничивающий диапазон реконструкции  $\Omega_{\eta}^c$ , будет обратно пропорционален длительности импульса. Расширить диапазон реконструкции можно, сместив нули спектра в область высших частот за полосу пропускания ЛС-системы или за верхнюю границу частотного диапазона реконструируемого сигнала, но при этом потребуется уменьшить длительность тестового импульса и пропорционально увеличить его амплитуду, чтобы не снижать амплитуду  $2AT$  спектра сигнала в области низких частот. Во многих случаях требуемое уменьшение длительности и увеличение амплитуды может снова привести к противоречию с аппаратным критерием.

В качестве приближения к дельта-функции можно попытаться использовать сигналы другой формы, например, гауссовы импульсы

$$v_c(t) = g(t) = A \exp\left(-t^2/(2\sigma^2)\right), \quad \sigma > 0,$$

спектр которых

$$G(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2/(2\sigma^2) - I\omega t\right) dt = A\sigma \exp\left(-\omega^2\sigma^2/2\right),$$

хоть и неравномерен, но не обращается в ноль при любых частотах. Проблему, однако, это не решает, поскольку амплитуда спектра гауссова импульса быстро спадает в области высоких частот, и для расширения диапазона реконструкции, как и в случае с прямоугольным импульсом, потребуется уменьшать его длительность (значение  $\sigma$ ) и увеличивать амплитуду, что также может привести к противоречию с аппаратным критерием.

Решение можно найти, если идти не по пути приближения воздействий к дельта-функции, а по пути использования воздействий специальной формы. Рассмотрим, например, тестовые импульсы в виде равнобедренной трапеции с длительностью  $2T$ , передним фронтом  $b$  и задним  $B$ :

$$r(t) = \begin{cases} A, & \text{при } t \in (-T, T), \\ \frac{A}{b}(t + T + b), & \text{при } t \in [-T - b, -T], \\ \frac{A}{b}(t + T + b), & \text{при } t \in [-T - b, -T]. \end{cases}$$

Спектр этого импульса

$$R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T-b}^{T+B} r(t) \exp(-I\omega t) dt$$

можно представить в виде

$$R(\omega) = \frac{I\omega A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega B}{2}\right)}{\frac{\omega B}{2}} \exp\left(-I\omega\left(T + \frac{B}{2}\right)\right) - \frac{I\omega A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega b}{2}\right)}{\frac{\omega b}{2}} \exp\left(I\omega\left(T + \frac{b}{2}\right)\right). \quad (9)$$

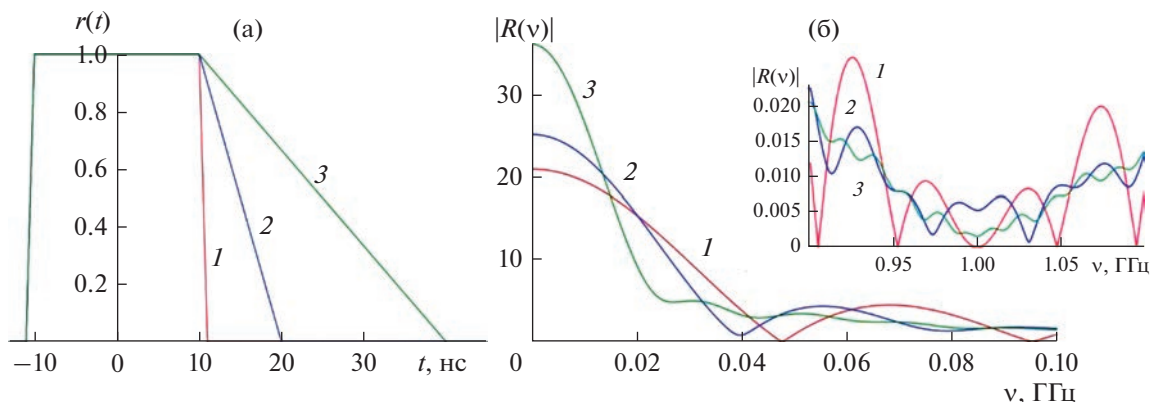
В случае равных фронтов ( $B = b$ ) этот спектр

$$R(\omega) = \frac{A(2T + b)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega b/2)}{\omega b/2} \frac{\sin(\omega(T + b/2))}{\omega(T + b/2)},$$

как и прямоугольный импульс, будет иметь множество нулей на оси частот при  $\omega(T + b/2) = \pi k$  и  $\omega b/2 = \pi m$ , где  $k, m$  – целые числа, не равные нулю. Причем первый нуль при  $\omega = \pi/(T + b/2)$ , ограничивающий диапазон спектра, как и в случае с прямоугольным импульсом, будет обратно пропорционален длительности импульса, что потребует для расширения диапазона реконструкции  $\Omega_{\eta}^c$  уменьшать длительность импульса и увеличивать его амплитуду и снова может привести к противоречию с аппаратным критерием. Однако при разных фронтах ( $B \neq b$ ) слагаемые в (9) обратятся в ноль при  $\omega b = 2\pi k$  и  $\omega B = 2\pi m$ , где  $k, m$  – целые числа, не равные нулю, и если отношение фронтов  $B/b$  – иррациональное число, то спектр  $R(\omega)$  нигде на оси частот не обратится в ноль.

На рис. 1а показаны графики трапециевидных импульсов  $r(t)$  с передним фронтом  $b = 1$  нс, длительностью полочки  $2T = 20$  нс, длительностях заднего фронта  $B = 1, 3\pi, 10\pi$  нс. На рис. 1б – графики модуля спектров  $|R(\nu)|$ ,  $\nu = \omega/(2\pi)$  ГГц, этих импульсов в диапазоне от 0 до 100 МГц и в окрестности  $\nu = 1$  ГГц. При  $B = b = 1$  нс спектр равнобедренной трапеции имеет множество нулей на оси частот. При увеличении заднего фронта до  $B = 3\pi$  нс (иррациональное отношение  $B/b$ ) низкочастотные проседания модуля спектра (9) уменьшаются и при  $B = 10\pi$  нс сглаживаются и превращаются в затухающие с частотой осцилляции на фоне основного тренда, определяемого первым слагаемым  $\sin(\omega b/2)/(\omega b/2)$  в (9), нули спектра которого зависят от величины переднего фронта, а не от длительности импульса. В увеличенном масштабе показаны спектры в окрестности первого нуля спектра первого слагаемого в (9)





**Рис. 1.** Трапецидальные импульсы  $r(t)$  с разной длительностью заднего фронта 1 ( $T$ ),  $3\pi$  (2) и  $10\pi$  нс (3) (а) и графики модуля их спектров  $|R(v)|$  в диапазоне частот от 0 до 100 МГц и в окрестности 1 ГГц (на вставке) (б).

( $v = 1$  ГГц). При иррациональном соотношении фронтов  $B/b = 3\pi$ ,  $10\pi$  второе слагаемое отлично от нуля и модуль спектра не равен нулю  $|R(v)| \neq 0$ .

Несмотря на то, что при иррациональном соотношении фронтов  $B/b$  модуль спектра нигде не обращается в ноль, при небольших соотношениях фронтов его просадка в области низких частот ( $\sim 30$ – $50$  МГц на рис. 1) может быть значительной, что приведет к сокращению диапазона реконструкции. На практике для уменьшения просадок удобно полагать  $B, T \gg b$  и  $B \geq 3T$  (соотношение длительности заднего фронта и полочки больше, чем 3 : 2:  $B \geq 3T$ ).

При воздействии в форме разноразмерной трапеции диапазон реконструкции будет определяться не длительностью импульса, влияющего на амплитуду низкочастотного спектра, а величиной его переднего фронта. Уменьшая длительность переднего фронта разноразмерного трапецидального импульса, можно расширить диапазон реконструкции вплоть до полосы пропускания ЛС-системы, а увеличивая длительность импульса, — достичь необходимой амплитуды спектра в области низких частот и при этом не вступить в противоречие с аппаратным критерием.

Максимально увеличить амплитуду спектра в области низких частот можно, устремляя задний фронт импульса к бесконечности  $B \rightarrow \infty$ . В пределе получим тестовый сигнал в виде нефинитной справа ступенчатой функции с передним фронтом  $b$ , спектр которой, согласно (9), будет равен

$$R(\omega) \rightarrow A/(\sqrt{2\pi}I\omega) \sin(\omega b/2)/(\omega b/2).$$

Уменьшая фронт ступеньки, можно сдвинуть первый нуль спектра ступенчатой функции, определяющий диапазон реконструкции, за полосу пропус-

кания ЛС-системы, при этом амплитуда спектра в области низких частот будет максимально возможной. Отметим, забегая вперед, что использовать в качестве тестового воздействия импульс в виде ступенчатой функции, как и другие нефинитные справа сигналы, можно только при реконструкции с помощью прямых методов регуляризации.

К выводам, аналогичным анализу разноразмерной трапеции, можно прийти, если рассмотреть воздействие в виде импульса с разными экспоненциальными фронтами, такими как сигналы вида

$$e(t) = A(1 - \exp(-a_0(t + T))) \text{ при } -T < t \leq T,$$

$$A(1 - \exp(-2a_0T)) \exp(-a(t - T)) \text{ при } t > T,$$

где  $a_0 \gg a > 0$ , но эти импульсы, как и ступенька, не являются финитными справа, что приводит к определенным трудностям при использовании спектральных методов реконструкции. Кроме того, могут возникнуть сложности с генерацией экспоненциальных импульсов при проведении тестовых испытаний экспериментальным путем.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

В большинстве практических случаев реальные сигналы крайне трудно выразить через аналитические функции, что определяет важность численных расчетов при математической реконструкции сигналов. При проведении численных расчетов сигналы представляют или сразу получают в виде массивов их значений в некоторых дискретных точках интересующей области. В одномерном случае (многомерный случай будет рассмотрен позже) функции  $w(x)$ ,  $v(x)$ ,  $u(x)$  из (1), определенные на вещественной оси  $x$ , представим в виде множеств  $\mathbf{w} = \{w_i\}$ ,  $\mathbf{v} = \{v_i\}$ ,

$\mathbf{u} = \{u_i\}$  их значений  $w_i = w(x_i)$ ,  $v_i = v(x_i)$ ,  $u_i = u(x_i)$  в точках  $x_i = i\Delta$ , где  $i$  – целое число, а  $\Delta$  – шаг разбиения оси  $x$ .

Согласно (1) значение  $w_k = w(x_k)$  в точке  $x_k = k\Delta$  можно представить в виде интеграла:

$$w_k = w(k\Delta) \approx \int_{-\infty}^{\infty} u(k\Delta - \xi)v(\xi) d\xi.$$

Частичная сумма этого интеграла на введенном разбиении равна

$$w_k \approx \sum_i u[(k-i)\Delta]v(i\Delta)\Delta = \sum_i u_{ki}v_i\Delta,$$

что совпадает с выражением дискретной свертки, где дискретная характеристика системы переопределена как  $u_i = u(i\Delta)\Delta$ :

$$w_k \approx \sum_i u_{k-i}v_i = \sum_i u_i v_{k-i}. \quad (10)$$

Дискретное уравнение свертки (10) является частичной суммой интеграла в (1) и обеспечивает лишь приближенное соответствие между значениями функций  $w_i = w(x_i)$ ,  $v_i = v(x_i)$ ,  $u_i = u(x_i)$  в точках разбиения. Таким образом, уравнение (10) изначально содержит ошибки при дискретизации сигналов, и, в общем случае, задача реконструкции сигналов из него некорректно поставленной. Ошибки при дискретизации можно уменьшить, уменьшая шаг разбиения, т.к. при  $\Delta \rightarrow 0$  частичная сумма сходится к значению интеграла

$$w_k \rightarrow \sum_i u_{ki}v_i.$$

Чтобы представить аппаратную функцию из класса обобщенных в дискретном виде, необходимо уменьшать шаг разбиения  $\Delta$  до нуля, при этом количество дискретных значений сигналов будет стремиться к бесконечности. В ТИ-методах для реконструкции сигналов используется ТИ-уравнение (2), которое не содержит функций из класса обобщенных, а содержит лишь сигналы, относящиеся к классу основных функций, которые вполне можно с необходимой точностью (например, используя теорему Котельникова) представить в дискретном виде.

Далее, как и раньше, ТИ-уравнения (2) в дискретном виде и расчетные выражения для реконструкции дискретных сигналов из них получим с помощью переходных замен из известных выражений для ЛС-уравнений (1), функции в которых относятся к классу основных.

Интерпретируя массивы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  как вектора и вводя матрицы Тёплица

$$\mathbf{U} = \{u_{ij}\} = \{u_{i-j}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{V} = \{v_{ij}\} = \{v_{i-j}\}$$

с порождающими векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , дискретное уравнение типа свертки (10) можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{w} \approx \mathbf{U}\mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{u}. \quad (11)$$

Если функции  $v(x)$  и  $u(x)$  из (1) определены на конечных интервалах  $(a, c)$  и  $(b, d)$ , то функция  $w(x)$  будет определена на интервале  $(a+b, c+d)$ , и при однородном разбиении оси  $x$  размеры  $n, m, k$  векторов  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  будут конечны и связаны соотношением  $n = m + k - 1$ . Матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  в этом случае являются прямоугольными матрицами размером  $n \times m$  и  $n \times k$  соответственно, а уравнения (11) представляют собой переопределенную прямоугольную систему линейных алгебраических уравнений, содержащую все актуальные значения дискретных функций. Регуляризованное дискретное решение  $\mathbf{v}_r$  такой системы, соответствующее (3), со стабилизатором первого порядка в дискретном виде дается выражением

$$\mathbf{v}_r = [\mathbf{U}^*\mathbf{U} + p_0\mathbf{I} + p_1\mathbf{D}_1^2]^{-1} \mathbf{U}^*\mathbf{w}. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{U}^*$  – сопряженно-транспонированная матрица,  $\mathbf{I}$  и  $(\cdot)^{-1}$  – единичная и обратная  $m \times m$  матрицы,  $p_0$  и  $p_1$  – неотрицательные параметры регуляризации. Матрица  $\mathbf{D}_1^2 = \mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1$ , где  $\mathbf{D}_1 = \{d_{ij}\}$  –  $m \times m$  матрица, соответствует оператору первых конечных разностей с ненулевыми элементами  $d_{ii} = 1$  и  $d_{i+1,i} = -1$ . Согласно идеологии методов регуляризации при определенных значениях параметров регуляризации дискретное решение системы (12) существует и устойчиво к вариации исходных данных, а обратная матрица в (12) является симметричной, положительно определенной и достаточно хорошо обусловленной.

Прямоугольные переопределенные системы (11) можно преобразовать в квадратные, дополнив векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  нулями до размера  $n$  вектора  $\mathbf{w}$ . Применяя к таким векторам  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  дискретное  $n$ -точечное прямое и обратное преобразование Фурье (ДПФ)

$$Z_i = \sum_{j=0}^{n-1} z_j \exp\left(-\frac{2\pi I}{n} ij\right) \quad \text{и}$$

$$z_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \exp\left(\frac{2\pi I}{n} ij\right),$$

( $i, j = 0, \dots, n-1$ ,  $I = \sqrt{-1}$ ), из (4) для стабилизатора первого порядка получим дискретный регуля-

ризированный спектр  $V_r = \{V_i^r\}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , восстанавливаемого воздействия  $\mathbf{v}$ :

$$V_i^r = \frac{U_i^* W_i}{U_i^* U_i + q_0 + q_1 i^2}. \quad (13)$$

Здесь  $q_0$  и  $q_1$  – неотрицательные параметры регуляризации.

Нефинитные справа функции  $v(x)$ ,  $u(x)$  и  $w(x)$  можно свести к финитным, если для них существуют конечные базовые интервалы:  $(a, c)$ ,  $(b, d)$  и  $(a+b, c+d)$ ,  $a, b, c, d \neq \infty$ , вне которых значениями функций можно пренебречь, т.е. если

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} |v(x)| dx &\approx \int_a^c |v(x)| dx, \\ \int_b^{+\infty} |u(x)| dx &\approx \int_b^d |u(x)| dx, \\ \int_{a+b}^{+\infty} |w(x)| dx &\approx \int_{a+b}^{c+d} |w(x)| dx. \end{aligned}$$

Погрешности при сведении функций к финитным можно интерпретировать как дополнительные неточности в исходных данных, что позволяет использовать прямые (12) и спектральные (13) методы регуляризации для решения некорректно поставленных задач реконструкции.

Прямые методы регуляризации (12) можно также применять в случае финитных слева и нефинитных справа функций  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$ , определенных на интервалах  $(a, \infty)$ ,  $(b, \infty)$  и  $(a+b, \infty)$ , для которых базовых интервалов не существует. Векторы, соответствующие таким функциям, имеют бесконечные размеры, но для конечных векторов  $\mathbf{u} = \{u_i\}$ ,  $\mathbf{v} = \{v_i\}$  и  $\mathbf{w} = \{w_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , содержащих любое количество первых  $n$  элементов, можно получить аналогичную (11) конечную систему  $n$  линейных алгебраических уравнений и, используя выражения (12), восстановить элементы вектора  $\mathbf{v} = \{v_i\}$ . Отметим, что использование спектральных методов (13) для решения таких систем приведет к неверным результатам, так как сигналы будут рассматриваться как периодические на данных интервалах, что может не соответствовать условию задачи.

В методе тестовых испытаний вместо уравнения типа свертки (1) рассматривается основное уравнение тестовых испытаний (2), регуляризованное решение которого можно найти с помощью замен функций в выражениях (3) и (4). Аналогично, подставляя в уравнение (11) вместо матрицы Теплица  $\mathbf{U}$  матрицу  $\mathbf{W}_c$  с производящим вектором  $\mathbf{w}_c$

и вместо вектора  $\mathbf{w}$  – вектор  $\mathbf{V}_c \mathbf{w}$ , получим аналогичное (2) основное дискретное уравнение тестовых испытаний:

$$\mathbf{V}_c \mathbf{w} \approx \mathbf{W}_c \mathbf{v}. \quad (14)$$

Соответствующие подстановки в (12) дают решение (14) прямыми методами регуляризации:

$$\mathbf{v}_r = [\mathbf{W}_c^* \mathbf{W}_c + p_0 \mathbf{I} + p_1 \mathbf{D}_1^2]^{-1} \mathbf{W}_c^* \mathbf{V}_c \mathbf{w}, \quad (15)$$

а подстановки дискретных спектров соответствующих функций в (13) (при возможности использования интегральных преобразований) дают выражение для дискретного спектра  $V_r = \{V_i^r\}$  регуляризованного решения  $\mathbf{v}_r$ :

$$V_i^r = \frac{W_i^{c*} V_i^c W_i}{W_i^{c*} W_i^c + q_0 + q_1 i^2}. \quad (16)$$

Спектры в (16), как и в (13), получены из векторов, дополненных нулями до размера, одинакового с вектором максимального размера. Оптимальные значения параметров регуляризации ищутся способами, аналогичными описанным ранее для не дискретных функций.

Дискретное ТИ-уравнение (14) можно также использовать для моделирования отклика  $\mathbf{w}$  ЛС-систем на заданное воздействие  $\mathbf{v}$ . В этом случае, заменяя в (12)  $\mathbf{w}$  на  $\mathbf{V}_c \mathbf{v}$  и  $\mathbf{U}$  на  $\mathbf{V}_c$ , получим регуляризованное решение  $\mathbf{w}_r$  для моделируемого отклика  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w}_r = [\mathbf{V}_c^* \mathbf{V}_c + p_0 \mathbf{I} + p_1 \mathbf{D}_1^2]^{-1} \mathbf{V}_c^* \mathbf{W}_c \mathbf{v}. \quad (17)$$

Аналогичные замены спектров в (12) дают регуляризованный спектр  $W_r = \{W_i^r\}$  моделируемого отклика  $\mathbf{w}$ :

$$W_i^r = \frac{V_i^{c*} W_i^c V_i}{V_i^{c*} V_i^c + q_0 + q_1 i^2}. \quad (18)$$

При обработке данных большого объема  $n$  прямые методы регуляризации (12), (15) и (17) требуют выполнения порядка  $O(5n^3 + 2n)$  операций с матрицами и векторами, а спектральные (13), (16) и (18) с использованием быстрых прямого и обратного преобразований Фурье – порядка  $O(7n \lg(n) + n)$  операций.

Однако спектральные методы можно использовать для реконструкции сигналов далеко не всегда и не на всех интервалах. Дело в том, что при численных расчетах функции рассматриваются на конечных интервалах и по умолчанию предполагается, что при использовании прямых методов регуляризации функции равны нулю вне этих интервалов, а при использовании спектраль-

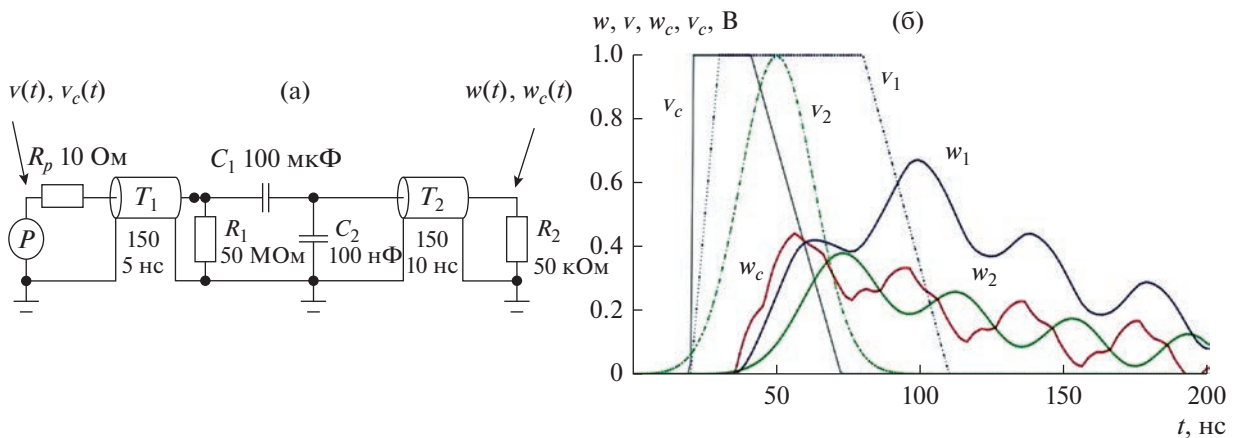


Рис. 2. Принципиальная электрическая схема емкостного делителя напряжения (а) и графики сигналов на его входе  $v_1, v_2, v_c$  и выходе  $w_1, w_2, w_c$  (б).

ных — что они периодически продолжены вовне. Если функции финитны и рассматриваемые интервалы включают всю область определения функций, то решения, полученные прямыми и спектральными методами, совпадут. Если функции нефинитны справа, но рассматриваемые интервалы включают их базовые интервалы, то решения, полученные прямыми и спектральными методами, будут примерно равны. Если же функции нефинитны справа и не имеют базовых интервалов, то решения, полученные спектральными методами, будут неверны. Поскольку прямые методы позволяют проводить реконструкцию для любых финитных слева функций (т.е. сигналов, имеющих начало), то с этой точки зрения прямые методы регуляризации более универсальны, чем спектральные.

С физической точки зрения спектральные методы дают установившееся решение для периодических на рассматриваемых интервалах сигналов, а прямые — неустановившееся решение для сигналов, равных нулю вне рассматриваемых интервалов. Если, например, переходные процессы в ЛС-системе долго не затухают, то короткое воздействие приведет к отклику, длительность которого на много порядков может превышать длительность воздействия. При реконструкции прямыми методами регуляризации можно ограничиться рассмотрением интервала, включающего лишь интервал короткого воздействия или даже интересующую его часть, в то время как при использовании спектральных методов необходимо рассматривать весь интервал существования переходных процессов или, по крайней мере, базовый интервал, за пределами которого этими процессами можно пренебречь.

В случае нефинитных справа функций спектральные методы неприменимы. Если функции определены на конечных или имеют базовые интервалы, но интересующий интервал реконструк-

ции меньше базового в  $k$  раз, то для реконструкции прямыми методами потребуется  $O(4n^3/k^3 + n/k)$  операций, а для спектральных —  $O(7n \lg(n) + n)$  операций, и при некоторых  $k$  до определенных значений  $n$  прямые методы могут быть быстрее спектральных. Например, при  $k = 10^3$  прямые методы будут быстрее спектральных до  $n \approx 1.5 \times 10^5$  ( $n/k \approx 150$ ), при  $k = 10^4$  — до  $n \approx 5.2 \times 10^6$  ( $n/k \approx 520$ ), а при  $k = 10^5$  — до  $n \approx 18.2 \times 10^7$  ( $n/k \approx 1820$ ).

## 6. РЕКОНСТРУКЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим численный эксперимент реконструкции одномерных сигналов ЛС-систем методом тестовых испытаний на примере емкостного делителя напряжения. Принципиальная электрическая схема делителя и сигналы на его входе  $v_1(t), v_2(t), v_c(t)$  и выходе  $w_1(t), w_2(t), w_c(t)$  представлены на рис. 2. Делитель состоит из емкостей  $C_1 = 100$  мкФ,  $C_2 = 100$  нФ, сопротивлений  $R_1 = 50$  МОм,  $R_2 = 50$  кОм и предназначен для уменьшения амплитуды высоковольтных входных сигналов ( $v(t), v_c(t)$ ), поступающих от источника  $P$  с внутренним сопротивлением  $R_p = 10$  Ом, до низковольтных сигналов ( $w(t), w_c(t)$ ) на выходе устройства. Сигналы передаются по помехозащищенным линиям передачи  $T_1$  и  $T_2$  (витая пара) с волновым сопротивлением 150 Ом и задержками распространения сигнала 5 и 10 нс соответственно. Делитель представляет собой ЛС-систему, так как является составной системой (см.

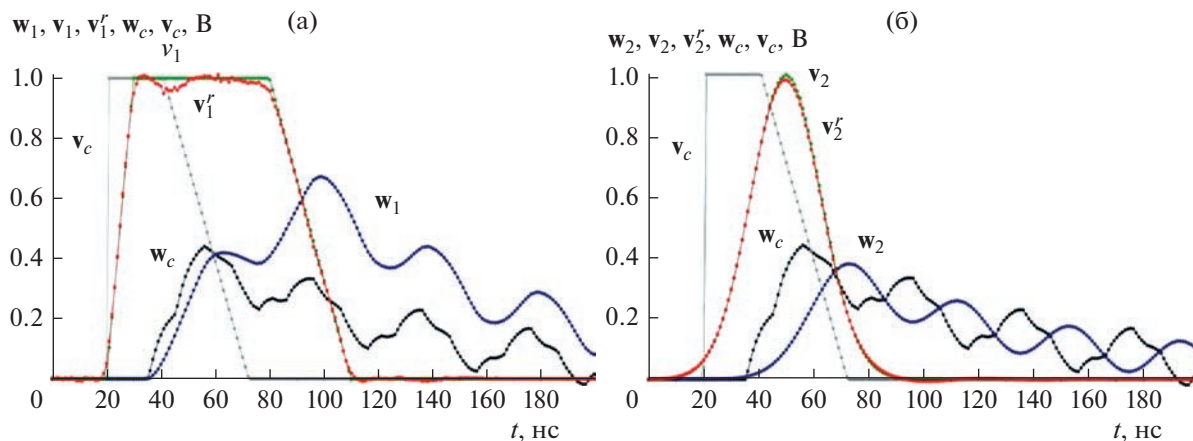


Рис. 3. Реконструкция  $v_1^r$  входного трапецеидального сигнала  $v_1$  из выходного сигнала  $w_1$  (а) и реконструкция  $v_2^r$  входного гауссова сигнала  $v_2$  из выходного сигнала  $w_2$  (б) прямыми численными ТИ-методами.

разд. 1) из пассивных элементов, и сигналы в нем могут быть реконструированы ТИ-методами.

Численный расчет выходных  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ ,  $w_c(t)$  и входных  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_c(t)$  сигналов делителя проводился с помощью симулятора аналоговых/цифровых схем Micro-Cap 12.2.0.4 от Spectrum Software. Принципиальная электрическая схема делителя была взята из стандартной библиотеки этой программы. Для удобства сравнения сигналов отклики  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ ,  $w_c(t)$  показаны с постоянным масштабным коэффициентом, компенсирующим падение напряжения на делителе. Частота среза делителя составляет  $\approx 1$  МГц, что значительно меньше диапазонов спектров входных сигналов, поэтому в процессе обработки высокочастотные спектры сигналов искажаются и форма выходных сигналов существенно отличается от формы входных.

Восстановлению ТИ-методами подлежат входные трапецеидальный  $v_1(t)$  и гауссов  $v_2(t)$  сигналы, показанные на рис. 2. Исходными данными для их реконструкции служат выходные сигналы  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$  и тестовые сигналы  $w_c(t)$  и  $v_c(t)$ . Согласно описанной ранее процедуре выбора тестовых сигналов в качестве тестового воздействия был использован финитный импульс в виде разноразмерной трапеции с передним фронтом 1 нс, длительностью полочки 20 нс и задним фронтом  $10\pi$  нс. Реконструкцию проводили прямыми ТИ-методами, так как выбранный интервал реконструкции от 0 до 200 нс не является базовым для рассматриваемых сигналов и применять спектральные методы в этом случае нельзя (см. комментарии в разд. 5). При реконструкции использован стабилизатор нулевого порядка (с  $p_1 = 0$  в (15)). Результаты реконструкции  $v_1^r$  и  $v_2^r$  входных

сигналов  $v_1$  и  $v_2$  из выходных  $w_1$  и  $w_2$  в точках дискретизации с шагом  $\Delta t = 1.0$  нс представлены на рис. 3а и 3б.

Несмотря на то, что дополнительные случайные шумы в исходные сигналы на рис. 3 не добавлялись, но решаемая задача реконструкции является некорректно поставленной, так как исходные данные содержат ошибки дискретизации (см. комментарии к (10)), а также ошибки вычислений и округлений при представлении данных. Погрешность восстановления трапецеидального импульса  $v_1^r$  (рис. 3а) в точках выборки составила

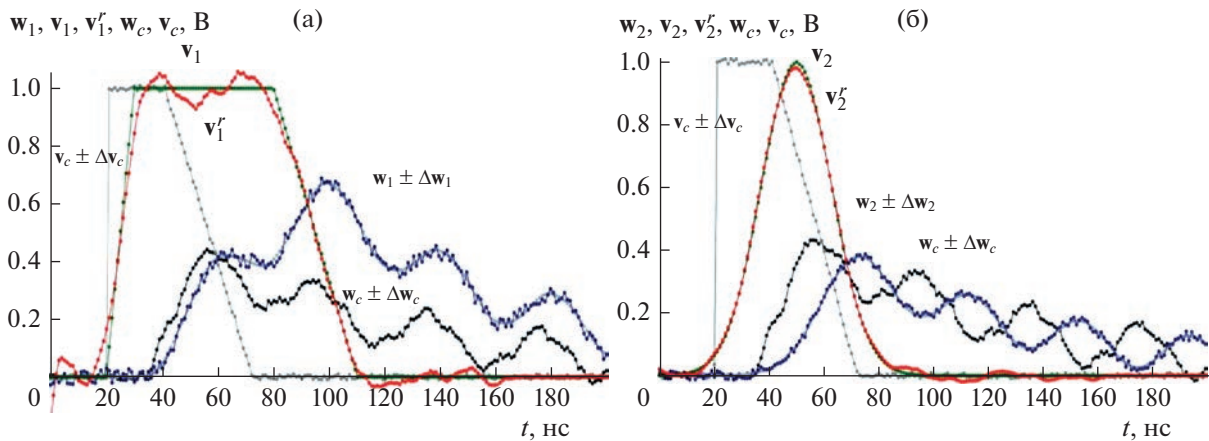
$$\delta v_1^r = \|\mathbf{v}_1^r - \mathbf{v}_1\| / \|\mathbf{v}_1\| = 2.2\%,$$

а гауссова импульса  $v_2^r$  (рис. 3б) –

$$\delta v_2^r = \|\mathbf{v}_2^r - \mathbf{v}_2\| / \|\mathbf{v}_2\| = 1.8\%.$$

При добавлении случайных шумов в исходные выходные и тестовые сигналы увеличивается общая неопределенность  $\eta_c$  ТИ-уравнений (2) и (14), что влияет на погрешность реконструкции.

На рис. 4а представлен пример восстановления  $v_1^r$  трапецеидального входного сигнала  $v_1$  из выходных данных  $w_1$  со случайными шумами  $\Delta w_1$  ( $\delta w_1 = \|\Delta w_1\| / \|w_1\| = 4.5\%$ ), а на рис. 4б – пример восстановления  $v_2^r$  гауссова входного сигнала  $v_2$  из выходных данных  $w_2$  со случайными шумами  $\Delta w_2$  ( $\delta w_2 = \|\Delta w_2\| / \|w_2\| = 4.9\%$ ). В этих примерах шумы в тестовых данных были равны  $\delta w_c = \|\Delta w_c\| / \|w_c\| = 2.9\%$  и  $\delta v_c = \|\Delta v_c\| / \|v_c\| = 1.5\%$ . Погрешность восстановления трапецеидального



**Рис. 4.** Восстановление  $v_1^r$  трапецидального входного сигнала  $v_1$  из выходных данных  $w_1$  с шумами  $\Delta w_1$  (а) и восстановление  $v_2^r$  гауссова входного сигнала  $v_2$  из выходных данных  $w_2$  с шумами  $\Delta w_2$  (б) прямыми численными ТИ-методами.

и гауссова входных сигналов составила соответственно

$$\delta v_1^r = \frac{\|v_1^r - v_1\|}{\|v_1\|} = 6.7\% \text{ и}$$

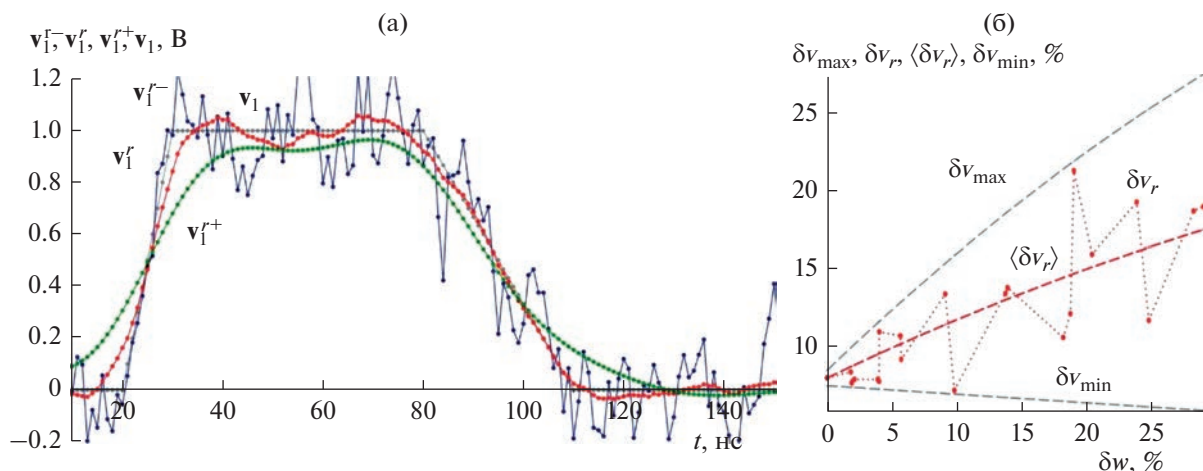
$$\delta v_2^r = \frac{\|v_2^r - v_2\|}{\|v_2\|} = 2.7\%,$$

что даже меньше уровня неопределенностей в исходном выходном сигнале  $w_2$  ( $\delta w_2 = 4.9\%$ ) из-за сглаживания шумов при регуляризации.

На рис. 3 и 4 приведены результаты реконструкции сигналов при оптимальных значениях параметра регуляризации  $p_0$  в (15), соответствующие минимуму невязки  $\|v_r - v\|$  реконструированного  $v_r$  и истинного  $v$  воздействия на интервале реконструкции  $T$  от 0 до 150 нс. Но поскольку истинное воздействие изначально неизвестно, на практике применяются описанные ранее методы выбора параметров регуляризации. На рис. 5а представлены результаты реконструкции  $v_1^r$ ,  $v_1^{r-}$  и  $v_1^{r+}$  трапецидального воздействия  $v_1$  при оптимальном значении параметра регуляризации  $p_0 = 0.155$  ( $v_1^r$ ) и неоптимальных – на два порядка меньше и больше оптимального:  $0.01p_0$  ( $v_1^{r-}$ ) и  $100p_0$  ( $v_1^{r+}$ ) соответственно. При значениях параметра регуляризации меньше оптимального в реконструкции ( $v_1^{r-}$ ) на всем интервале даже до начала воздействия присутствуют высокочастотные выбросы, напоминающие случайные. С увеличением параметра регуляризации амплитуда выбросов начинает уменьшаться и при превышении оптимальных значений начинает сглаживаться основной импульс, что приводит к появлению сигнала перед началом воздействия. На практике оптимальным значением параметра регуляризации можно

считать значения, при которых амплитуда высокочастотных выбросов в реконструируемом сигнале минимальна и форма “основного тренда” не искажена. Погрешности при таком “визуальном” определении даже при больших отклонениях от оптимальных значений, как правило, незначительны. Так, при оптимальном значении параметра регуляризации  $p_0$  (см. рис. 5а) погрешность реконструкции сигнала  $v_1^r$  составляет  $\delta v_1^r = \frac{\|v_1^r - v_1\|}{\|v_1\|} = 6.7\%$ . При двукратном уменьшении значения параметра регуляризации погрешность реконструкции составила 7.3%, а при трехкратном – 8.2%. При двукратном увеличении параметра регуляризации погрешность реконструкции составила 7.0%, а при трехкратном – 7.3%.

При определении оптимального значения параметров регуляризации также можно использовать различные априорные сведения об ЛС-системе, обрабатываемых сигналах и шумах в них. Например, может быть известна форма части импульса воздействия, скажем, длительность переднего фронта или длительность полочки реконструируемого трапецидального сигнала  $v_1(t)$ . В этих случаях при определении параметра регуляризации  $p_0$  можно использовать критерий минимума невязки  $\|v_r - v\|_{T_K}$  на соответствующей части  $T_K$  интервала реконструкции  $T$ . В рассмотренных примерах реконструкции трапецидального сигнала такие ограничения интервала невязки  $T_K$  от 0 до 30 нс при сравнении переднего фронта приведут к увеличению погрешности  $\delta v_1^r$  на всем интервале реконструкции с 2.2 до 2.4% на рис. 3а и с 6.687 до 6.693% на рис. 4а, а при сравнении длительности при  $T_K$  от 30 до 80 нс – на рис. 3а с 2.2 до 2.3% и на рис. 4а с 6.7 до 7.5%.



**Рис. 5.** Результаты реконструкции  $v_1^{r-}$ ,  $v_1^r$  и  $v_1^{r+}$  трапецидального воздействия  $v_1$  при оптимальном  $p_0$  ( $v_1^r$ ) и неоптимальных  $0.01p_0$  ( $v_1^{r-}$ ) и  $100p_0$  ( $v_1^{r+}$ ) значениях параметра регуляризации (а) и графики погрешности  $\delta v_r = \|\mathbf{v}_r - \mathbf{v}\|/\|\mathbf{v}\|$  реконструкции  $\mathbf{v}_r$  воздействия  $\mathbf{v}$  из отклика  $\mathbf{w}$  при различных уровнях шумов  $\delta w = \|\Delta \mathbf{w}\|/\|\mathbf{w}\|$  в нем, наиболее ожидаемых значений  $\langle \delta v_r \rangle$  и эмпирических пределов  $\delta v_{\min}$  и  $\delta v_{\max}$  погрешности реконструкции (б).

Погрешность реконструкции зависит не только от уровня, но и от распределения шумов и неопределенностей в исходных данных, что вызывает значительный разброс погрешности реконструкции при одинаковом уровне шумов и неопределенностей. На рис. 5б показаны значения погрешности  $\delta v_r = \|\mathbf{v}_r - \mathbf{v}\|/\|\mathbf{v}\|$  реконструкции  $\mathbf{v}_r$  воздействия  $\mathbf{v}$  в разных численных экспериментах при различных уровнях шумов  $\delta w = \|\Delta \mathbf{w}\|/\|\mathbf{w}\|$  в отклике  $\mathbf{w}$  и фиксированном уровне неопределенностей в тестовых данных

$$\delta w_c = \|\Delta \mathbf{w}_c\|/\|\mathbf{w}_c\| = 2.9\% \quad \text{и} \\ \delta v_c = \|\Delta \mathbf{v}_c\|/\|\mathbf{v}_c\| = 1.5\%.$$

Для наглядности показаны наиболее ожидаемые значения  $\langle \delta v_r \rangle$  и примерные эмпирические пределы  $\delta v_{\min}$  и  $\delta v_{\max}$  погрешности реконструкции. Замедление роста погрешности реконструкции при увеличении уровня неопределенности ТИ-уравнения объясняется тем, что при возрастании амплитуды шума увеличиваются высокочастотные составляющие его спектра, которые более эффективно сглаживаются при регуляризации.

Программа реконструкции сигналов на основе выражения (15) со стабилизатором нулевого порядка (при  $p_1 = 0$ ) была написана на языке Maple 2017.3 Waterloo Maple Inc. и оформлена в виде подпрограммы, входными данными для которой являются векторы  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}_c$ ,  $\mathbf{v}_c$  и параметр регуляризации  $p_0$ . Время работы подпрограммы при реконструкции сигналов на рис. 3 и 4 (размерность векторов и матриц равна 500) при расчетах на

компьютере HP 255 G7 с процессором AMD Ryzen 3, 2.5 ГГц в среде Maple 2017 составило 0.2...0.4 с.

## 7. ВОССТАНОВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Многомерные данные и изображения обычно представляют собой массивы дискретных значений обрабатываемых сигналов в некоторых точках дискретизации в рассматриваемых областях. Для больших, но конечных объемов данных предпочтительны методы с использованием интегральных преобразований (см. оценки в разд. 5). В случае реконструкции  $\mathbf{V}_r = \{v_{ij\dots}^r\}$  многомерного массива данных  $\mathbf{V} = \{v_{ij\dots}\}$  из массива искаженных данных  $\mathbf{W} = \{w_{ij\dots}\}$  с использованием тестовых данных  $\mathbf{V}_c = \{v_{ij\dots}^c\}$  и  $\mathbf{W}_c = \{w_{ij\dots}^c\}$  уравнение (15) со стабилизатором первого порядка имеет вид

$$V_{ij\dots}^r = \frac{W_{ij\dots}^{c*} V_{ij\dots}^c W_{ij\dots}}{W_{ij\dots}^{c*} W_{ij\dots}^c + q_0 + q_1(i^2 + j^2 + \dots)}, \quad (19)$$

где

$$V_r = \{V_{ij\dots}^r\}, \quad V = \{V_{ij\dots}\}, \quad W = \{W_{ij\dots}\}, \\ V_c = \{V_{ij\dots}^c\} \quad \text{и} \quad W_c = \{W_{ij\dots}^c\}$$

– многомерные спектры массивов  $\mathbf{V}_r$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{V}_c$  и  $\mathbf{W}_c$ . Многомерные спектры исходных данных можно получить с помощью многомерного  $n$ -точечного ДПФ. При этом, чтобы достичь мини-

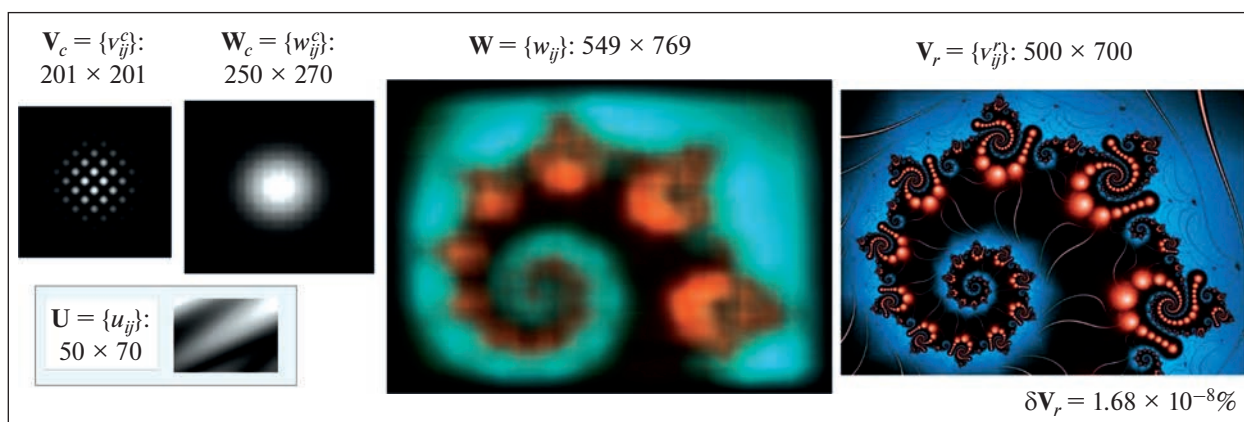


Рис. 6. Восстановление  $V_r$  изображения  $V$  из изображения  $W$  при его размытии с ядром  $U$  спектральными ТИ-методами с использованием тестовых изображений  $V_c$  и  $W_c$ .

мальной погрешности восстановления, исходные массивы необходимо преобразовать в массивы размера  $n \times n \times \dots$ , где  $n$  – наибольший размер для всех массивов, заполняя нулями добавленные элементы. Например, если массив  $W$  имеет размер  $k \times n \times m \times \dots$  и  $n$  является наибольшим числом для всех массивов, то все массивы, включая  $W$ , должны быть преобразованы в массивы размера  $n \times n \times \dots$  с нулевыми добавленными элементами.

На рис. 6 представлен пример восстановления  $V_r$  цветного изображения  $V$  из размытого изображения  $W$  в формате jpeg по формуле (19). Ядро искажения  $U$  было выбрано случайным образом в виде асимметричной прямоугольной матрицы размером  $50 \times 70$  и полагалось одинаковым для всех трех цветовых слоев, поэтому при реконструкции достаточно было использовать тестовые изображения  $W_c$  и  $V_c$  в градациях серого.

В общем случае, если искажения в цветовых слоях изображений различны, тестовые изображения должны быть в цветовом формате реконструируемого изображения. Каждый цветовой слой восстанавливаемого изображения  $V$  составлял  $500 \times 700$  пикселей, а слой искаженного и увеличенного за счет размытия изображения  $W$  –  $549 \times 769$  пикселей. Тестовое изображение  $V_c$  имело размер  $201 \times 201$  пикселей, а размытое тестовое изображение  $W_c$  –  $250 \times 270$  пикселей.

Согласно алгоритму восстановления (16) все изображения  $W$ ,  $W_c$  и  $V_c$  сначала преобразовывались в изображения максимального размера  $769 \times 769$  пикселей с заполнением добавленных элементов нулями. Затем с помощью двумерного  $n$ -точечного ДПФ определялись их многомерные спектры  $W$ ,  $W_c$  и  $V_c$  размером  $769 \times 769$  и был найден спектр регуляризованного решения (16).

Изображение  $V_r$  было восстановлено из спектра  $V_r$  с помощью обратного  $n$ -точечного ДПФ. При реконструкции использовался стабилизатор нулевого порядка. Исходный размер ( $500 \times 700$  пикселей) восстановленного изображения определяли по разнице размеров тестовых изображений. Погрешность реконструкции (без дополнительных шумов в исходных данных) составила

$$\delta V_r = \max_{ij} (|V_{ij}^r - V_{ij}|) / \max_{ij} (V_{ij}) = 1.68 \times 10^{-8} \%$$

Точность реконструкции сильно зависит от используемого тестового изображения (см. разд. 4). Так, при использовании тестового изображения в виде шахматной доски размером  $201 \times 201$  пикселя погрешность реконструкции составит  $\delta V_r = 0.3\%$ , а при размере  $80 \times 80$  –  $\delta V_r = 0.6\%$ . Погрешность реконструкции изображений оказалась намного меньше, чем при реконструкции одномерных сигналов, что связано с использованием ядра искажений  $U$  из класса основных функций, а не обобщенных, как в примере, приведенном в разд. 6.

Программа реконструкции изображений на основе выражения (19) со стабилизатором нулевого порядка ( $p_1 = 0$ ) была написана на языке Maple 2017.3 Waterloo Maple Inc. в виде подпрограммы, входными данными для которой являются изображения  $W$ ,  $W_c$ ,  $V_c$  и параметр регуляризации  $p_0$ . Согласно оценкам, представленным в разд. 5, число операций  $N(n)$  при реконструкции изображения размером  $n \times n$  составляет порядка  $N(n) \sim O(14n^2 \lg(n) + n^2)$ . Время реконструкции цветного (три слоя) jpeg-изображения  $500 \times 700$  пикселей (максимальный размер  $n = 769$ ), представленного на рис. 6, при расчетах на компьютере HP 255 G7 с процессором AMD Ryzen 3, 2.5 ГГц в среде Maple 2017 составило 127.1 с, что соответ-



ствует времени расчета каждого из слоев  $t = 127.1/3 = 42.4$  с. Время реконструкции другого jpeg-изображения в градациях серого (имеющего один слой) размером  $201 \times 201$  пикселей (максимальный размер  $n_2 = 270$ ) составило  $t_2 = 4.453$  с. Пересчет времени расчета большего изображения из данных для меньшего дает близкое значение

$$t_2 N(n)/N(n_2) = 42.8 \text{ с} \approx t = 42.4 \text{ с},$$

что свидетельствует о хорошей точности оценок числа операций при реконструкции.

Аналогичным образом можно обрабатывать массивы данных любой размерности. Как и в одномерном случае, метод тестовых испытаний позволяет провести реконструкцию без детального анализа каналов и устройств получения и передачи информации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены и проанализированы математические методы реконструкции внешних воздействий из откликов на эти воздействия линейных стационарных систем обработки информации с помощью проведения тестовых испытаний. Использование данных тестовых испытаний позволяет осуществить не слепую реконструкцию сигналов без определения функций их искажений или аппаратных функций систем обработки. Реконструкция сигналов осуществляется из уравнения тестовых испытаний, которое является уравнением типа свертки и описывает работу ЛС-систем, но при этом не содержит аппаратных функций, которые, в общем случае, могут принадлежать к классу обобщенных, а только сигналы из класса основных функций. Такой подход значительно упрощает задачу реконструкции и позволяет использовать многие существующие методы решения некорректно поставленных и плохо обусловленных задач для восстановления реальных недетерминированных сигналов.

Рассмотрены особенности применения в методах тестовых испытаний техники регуляризации при решении некорректно поставленных задач реконструкции. Проанализированы критерии выбора тестовых сигналов, погрешности реконструкции. Представлены результаты численных экспериментов по восстановлению одномерных сигналов и двумерных изображений при разных уровнях зашумления.

Предложенные математические методы восстановления сигналов позволяют повысить точность, разрешающую способность и расширить область применения ЛС-систем, что является доступной альтернативой аппаратным методам, связанным с трудноразрешимыми научно-техническими задачами и дорогостоящими технологическими решениями. Рассмотренные математические мето-

ды восстановления, в отличие от аппаратных, не ограничены физическими возможностями реализации устройств, что обуславливает широкие возможности их практического применения.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность руководству Отдела экспериментальной физики Института ядерных исследований РАН за поддержку данной работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mueller J.L., Siltanen S.* Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications. Philadelphia: SIAM, 2012. V. 10.
2. *Hansen P.C.* Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms. Fundamentals of Algorithms. Philadelphia: SIAM, 2010.
3. *Kaipio J., Somersalo E.* Statistical and Computational Inverse Problems. N.Y.: Springer, 2010.
4. *Chen K.* Matrix Preconditioning Techniques and Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
5. *Tarantola A.* Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation. Philadelphia: SIAM, 2005.
6. *Vito E.D., Rosasco L., Caponnetto A. et al.* // J. Machine Learning Research. 2005. P. 883.
7. *Ben-Israel A., Greville T.N.E.* Generalized Inverses: Theory and Applications. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2003. <https://doi.org/10.1007/b97366>
8. *Zhang X., Burger M., Bresson X., Osher S.* // SIAM J. Imaging Sci. 2010. V. 3. № 3. P. 253. <https://doi.org/10.1137/090746379>
9. *Afonso M.V., Bioucas-Dias J.M., Figueiredo M.A.T.* // IEEE Trans. 2011. V. IP-20. № 3. P. 681.
10. *Gonzalez C.R., Woods R.E.* Digital Image Processing. 3rd ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2008.
11. *Василенко Г.И., Тараторин А.М.* Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
12. *Benning M., Burger M.* // 2018. arXiv:1801.09922v1 [math.NA].
13. *Kazufumi I., Bangti J.* Inverse Problems: Tikhonov Theory and Algorithms. Singapore: World Scientific., 2014.
14. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
15. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
16. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.
17. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
18. *Матысок О.В.* Итерационная регуляризация некорректных задач. Saarbrücken: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015.

19. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС, 2004.
20. Vogel C.R. Computational Methods for Inverse Problems. Philadelphia: SIAM, 2002.
21. Gilyazov S.F., Goldman N.L. Regularization of Ill-posed Problems by Iteration Methods. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
22. Шлома А.М. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1996. Т. 36. № 3. С. 15.
23. Vaidyanathan P.P., Chen T. // IEEE Trans. 1995. V. SP-43. № 5. P. 1090.
24. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
25. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
26. Chen S.S., Donoho D.L., Saunders M.A. // SIAM Rev. 2001. V. 43. № 1. P. 129.
27. Percival D.B., Walden A.T. Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
28. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1999.
29. Domínguez A. // IEEE Pulse. 2015. V. 6. № 1. P. 38.
30. von zur Gathen J., Gerhard J. Modern Computer Algebra. 3-rd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
31. Crutchfield S. The Joy of Convolution. Web Applet. N.Y.: Johns Hopkins Univ., 2010. <http://www.jhu.edu/signals/convolve/>.
32. Hespanha J.P. Linear System Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009.
33. Phillips C.I., Parr J.M., Riskin E.A. Signals, Systems and Transforms. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007.
34. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. школа, 2005.
35. Uludag A.M. // J. Mathematical Analysis and Appl. 1998. V. 227. № 2. P. 335. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6091>
36. Sobolev V.I. Convolution of Functions, Encyclopedia of Mathematics. Helsinki: EMS Press, 2001.
37. Напалков В.В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
38. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004. 7-е изд.
39. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
40. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391;519.217

ОПТИМАЛЬНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ОТСЧЕТОВ  
ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА  
НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННОГО МАРКОВСКОГО ШУМА

© 2023 г. А. Н. Детков\*

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,  
ул. Викторенко, 7, Москва, 125319 Российская Федерация

\*E-mail: detkov@gosniias.ru

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.

После доработки 11.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Методами марковской теории оценивания случайных процессов решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов оценивания отсчетов непрерывных компонент векторного дискретно-непрерывного марковского случайного процесса с учетом известных статистических характеристик аддитивного марковского коррелированного шума. При синтезе алгоритмов использован метод разностных измерений. Приведена структурная схема квазиоптимального цифрового фильтра. На простом примере методом имитационного моделирования показана работоспособность квазиоптимального алгоритма в статистически неопределенных ситуациях.

DOI: 10.31857/S0033849423060025, EDN: XLNUGM

## ВВЕДЕНИЕ

В современных радиоэлектронных системах (РЭС) алгоритмы оптимальной или квазиоптимальной обработки случайных процессов практически реализуются с помощью средств цифровой обработки сигналов [1–3]. Поэтому указанные алгоритмы необходимо синтезировать в дискретной форме в виде рекуррентных соотношений, удобных для такой реализации. В то же время в большинстве случаев математические модели оцениваемых и наблюдаемых в РЭС процессов имеют непрерывную форму записи, что обусловлено физической сущностью происходящих с сигналами явлений. В связи с этим возникает проблема синтеза оптимальных алгоритмов дискретной фильтрации отсчетов непрерывных случайных процессов [4, 5].

В то же время современная элементная база позволяет использовать в электронных измерительных устройствах РЭС высокую частоту дискретизации, что приводит к автокорреляции измерительных отсчетов. Поэтому при статистическом синтезе цифровых фильтров (ЦФ) необходимо учитывать коррелированность шумов измерений, которые существенно влияют на формируемые оценки фильтрации [6–8].

В случае окрашенных шумов измерений традиционный подход к разработке алгоритмов фильтрации заключается в преобразовании уравнений состояния и измерения к требуемой канонической форме либо методом расширения простран-

ства состояний, либо “декорреляцией” случайного процесса за счет разностных измерений [6, 7, 9]. Наиболее просто задача решается методом расширения пространства состояний, который используется, например, при статистическом синтезе ЦФ [3]. Однако из-за необходимости фильтрации коррелированного шума наряду с информационным сообщением требуются дополнительные вычислительные затраты, вызванные увеличением размерности  $(n + m)$ -мерного расширенного вектора состояния, что особенно критично для многопозиционных РЭС [10] и при оценивании дискретно-непрерывных марковских процессов (ДНМП) в условиях статистически неопределенных ситуациях [11]. Метод разностных измерений не требует увеличения размерности вектора состояния, однако для моделей вектора состояния и измерения в дискретном времени оценка вектора состояния формируется с запаздыванием на один шаг [7]. Тем не менее этот метод представляет наибольший практический интерес и используется далее в работе при синтезе алгоритмов оценивания.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вектор состояния рассматриваемой динамической системы описывается линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) с постоянными во времени коэффициентами, зависящими от изме-

нящегося во времени случайного дискретного параметра  $A(k)$ :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}^{(x)}(A(k))\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}^{(x)}(A(k))\mathfrak{E}^{(x)}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

а модель наблюдения – линейным алгебраическим уравнением

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{W}(t), \quad (2)$$

представляющим аддитивную смесь оцениваемого  $n_x$ -мерного вектора фазовых координат  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_x}(t)]^T$  и коррелированного  $n_y$ -мерного вектора марковского шума  $\mathbf{W}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_{n_y}(t)]^T$ , отождествляемого с вектором состояния дополнительной линейной системы:

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} = \mathbf{F}^{(w)}(B(k))\mathbf{W}(t) + \mathbf{G}^{(w)}(B(k))\mathfrak{E}^{(w)}(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{W}(t_0) = \mathbf{W}_0,$$

где  $\mathbf{X}(t_0)$ ,  $\mathbf{W}(t_0)$  – векторы начальных фазовых координат, имеющие гауссовское распределение;  $\mathbf{F}^{(x)}$ ,  $\mathbf{F}^{(w)}$  – матрицы известных коэффициентов размером  $(n_x \times n_x)$  и  $n_y \times n_y$  соответственно;  $\mathbf{G}^{(x)}$ ,  $\mathbf{G}^{(w)}$  – матрицы интенсивностей шумов размером  $(n_x \times n_x)$  и  $(n_y \times n_y)$  соответственно;  $\mathbf{Q}^{(x)} = \mathbf{G}^{(x)}\mathbf{G}^{(x)T}$ ,  $\mathbf{Q}^{(w)} = \mathbf{G}^{(w)}\mathbf{G}^{(w)T}$  – матрицы коэффициентов диффузии векторов  $\mathbf{X}(t)$  и  $\mathbf{W}(t)$  соответственно;  $T$  – операция транспонирования;  $\mathfrak{E}^{(x)}$ ,  $\mathfrak{E}^{(w)}$  – векторы белых гауссовских шумов (БГШ) соответствующей размерности с нулевыми математическими ожиданиями и единичными матрицами интенсивностей;  $A(k) \equiv A(t_k)$ ,  $B(k) \equiv B(t_k)$  – дискретные марковские процессы, характеризующие соответственно состояние параметров рассматриваемой динамической системы и окрашенных шумов измерений, описываемые цепями Маркова на  $M_1$  и  $M_2$  положений соответственно, с матрицами вероятностей переходов:

$$\Pi_1(k-1, k) = \left\{ \pi_{ij}^a(k-1, k) \right\} = \left\{ P(A(k) = a_j | A(k-1) = a_i) \right\},$$

$$i, j = \overline{1, M_1},$$

$$\Pi_2(k-1, k) = \left\{ \pi_{nm}^b(k-1, k) \right\} = \left\{ P(B(k) = b_m | B(k-1) = b_n) \right\},$$

$$n, m = \overline{1, M_2},$$

смена состояний которых может происходить только в фиксированные моменты времени  $t_k = t_0 + k\Delta$ ,

$k = 1, 2, \dots$ , разделенные постоянным интервалом  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ ;  $M_1, M_2$  – число значений дискретных параметров  $a_j, b_m$  соответственно,  $P$  – оператор вероятности.

В соответствии с методом разностных измерений в непрерывном времени эквивалентное уравнение измерений имеет канонический вид [6]

$$\mathbf{Y}^{(s)}(t) = \frac{\mathbf{Y}(t)}{dt} - \mathbf{F}^{(w)}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}_{jm}^{(y)}\mathbf{X}(t) + \mathfrak{E}^{(s)}(t), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{F}_{jm}^{(y)} = \mathbf{H}\mathbf{F}_j^{(x)} - \mathbf{F}_m^{(w)}\mathbf{H};$$

$$\mathbf{F}_{jm}^{(y)} \equiv \mathbf{F}^{(y)}(A(k) = a_j, B(k) = b_m);$$

$$\mathbf{F}_j^{(x)} \equiv \mathbf{F}^{(x)}(A(k) = a_j);$$

$$\mathbf{F}_m^{(w)} \equiv \mathbf{F}^{(w)}(B(k) = b_m);$$

$\mathfrak{E}^{(s)}(t)$  – вектор БГШ

$$\mathfrak{E}^{(s)}(t) = \mathbf{H}\mathbf{G}_j^{(x)}\mathfrak{E}^{(x)}(t) + \mathbf{G}_m^{(w)}\mathfrak{E}^{(w)}(t);$$

$$\mathbf{G}_j^{(x)} \equiv \mathbf{G}^{(x)}(A(k) = a_j);$$

$$\mathbf{G}_m^{(w)} \equiv \mathbf{G}^{(w)}(B(k) = b_m)$$

со статистическими характеристиками

$$\mathbf{M}\{\mathfrak{E}^{(s)}\} = 0,$$

$$\mathbf{M}\{\mathfrak{E}^{(s)}(t)\mathfrak{E}^{(s)T}(t + \tau)\} = (\mathbf{H}\mathbf{G}_j^{(x)}\mathbf{G}_j^{(x)T}\mathbf{H}^T + \mathbf{G}_m^{(w)}\mathbf{G}_m^{(w)T})\delta(\tau).$$

Из (4) видно, что эквивалентное измерение вектора сообщения  $\mathbf{X}(t)$  происходит на фоне вектора БГШ  $\mathfrak{E}^{(s)}(t)$  за счет компенсации корреляционных связей процесса  $\mathbf{W}(t)$ , характеризующих матрицей  $\mathbf{F}_m^{(w)}$ .

Однако дискретизация процесса  $\mathbf{Y}^{(s)}(t)$  наиболее часто осуществляется выборочными мгновенными значениями, для которых весовая функция выбора представляет собой  $\delta$ -функцию [4]. Такой подход является некорректным при синтезе алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных случайных сообщений, так как мгновенные отсчеты при наличии в измерениях БГШ не имеют смысла в силу их бесконечной дисперсии [4]. В этом случае требуется эквивалентное разностное представление математических моделей оцениваемых и измеряемых процессов, имеющих непрерывную форму записи. Для этого перепишем (4)

так, чтобы статистическая динамика векторного процесса  $\mathbf{Y}(t)$  описывалась СДУ

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{F}_m^{(w)}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}_{jm}^{(y)}\mathbf{X}(t) + \mathbf{H}\mathbf{G}_j^{(x)}\mathbf{\Xi}^{(x)}(t) + \mathbf{G}_m^{(w)}\mathbf{\Xi}^{(w)}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0. \quad (5)$$

Воспользуемся далее основами теории условных марковских процессов Стратоновича [12], в соответствии с которыми модели (2) и (5) описываются в виде совместного ДНМП  $\mathbf{Z}(t) = [\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T]^T$ , СДУ которого имеет вид

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \mathbf{F}_{jm}^{(z)}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{G}_{jm}^{(z)}\mathbf{\Xi}^{(z)}(t), \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F}_{jm}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_j^{(x)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{jm}^{(y)} & \mathbf{F}_m^{(w)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{jm}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_j^{(x)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\mathbf{G}_j^{(x)} & \mathbf{G}_m^{(w)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Xi}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}^{(x)} \\ \mathbf{\Xi}^{(w)} \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (6) определяется выражением [12]

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, t_0)\mathbf{Z}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, \tau)\mathbf{G}_{jm}^{(z)}(\tau)\mathbf{\Xi}^{(z)}(\tau)d\tau, \quad (7)$$

где фундаментальная матрица решений  $\mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, t_0) = \mathbf{F}_{jm}^{(z)}\mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, t_0), \quad \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (8)$$

а  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{0}$  – единичная и нулевая матрицы соответственно.

Интеграл в правой части равенства (7) представляет собой векторный процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей центральных моментов второго порядка:

$$\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, \tau)\mathbf{G}_{jm}^{(z)}(\tau_k)\mathbf{G}_{jm}^{(z)T}(\tau)\mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)T}(t, \tau)d\tau, \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}(t_0, t_0).$$

С учетом (8), (9), СДУ (6) может быть представлено в статистически эквивалентной форме в виде разностного уравнения с шагом дискретизации  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$  – дискретное время)

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(k, k-1)\mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)}(k, k-1)\mathbf{N}^{(z)}(k-1), \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{Z}(k) \equiv \mathbf{Z}(t_k), \quad \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_j^{(xx)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{\Phi}_m^{(yy)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{\Gamma}_m^{(yy)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(x)} \\ \mathbf{N}^{(y)} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{N}^{(x)}$  и  $\mathbf{N}^{(y)}$  – векторы размером  $n \times 1$  и  $m \times 1$  соответственно независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;  $\mathbf{Z}_0 = \mathcal{N}\{\mathbf{Z} - \mathbf{m}_0; \mathbf{B}_0\}$  – вектор начальных фазовых координат, имеющий нормальное распределение с вектором математических ожиданий  $\mathbf{m}_0$  и корреляционной матрицей  $\mathbf{B}_0$ .

Элементы блочной матрицы  $\mathbf{B}_{jm}^{(zz)} = \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)}\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)T}$  имеют вид

$$\mathbf{B}_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j^{(xx)} & \mathbf{B}_{jm}^{(xy)} \\ \mathbf{B}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{B}_m^{(yy)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)}\mathbf{\Gamma}_j^{(xx)T} & \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)}\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)T} \\ \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)}\mathbf{\Gamma}_j^{(xx)T} & \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)}\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)T} + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)}\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)T} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(xx)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)}$  – нижние треугольные матрицы, формируемые из соответствующих элементов блочной матрицы  $\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}$ , например, с помощью алгоритма Холецкого [14].

Таким образом, для неперекрывающихся интервалов времени уравнения состояния (1) и наблюдения (5) могут быть представлены из (10) в статистически эквивалентной форме в виде разностных уравнений с шагом дискретизации  $\Delta = t_k - t_{k-1}$ :

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{\Phi}_j^{(xx)}\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)}\mathbf{N}^{(x)}(k-1), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{\Phi}_{jm}^{(yx)}\mathbf{X}(k-1) + \mathbf{\Phi}_{jm}^{(yy)}\mathbf{Y}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)}\mathbf{N}^{(x)}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)}\mathbf{N}^{(y)}(k-1), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0. \quad (12)$$

В (11) и далее для простоты записи аргументы  $k$ ,  $k-1$  всех функций, где это возможно и не вызывает сомнений, не приводятся.

Эквивалентное дискретное представление (11), (12) непрерывных моделей векторов сообщения (2) и измерения (5) является абсолютно точным в том смысле, что для любых  $t_k - t_{k-1} > 0$  оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, как и решение системы СДУ (2), (5), без погрешностей аппроксимации [4].

Применительно к решаемой задаче синтеза вектор состояния представляет собой ДНМП

$$\left[ \mathbf{X}^T(k), A(k), B(k) \right]^T \equiv \left[ \mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k) \right]^T,$$

где  $\mathbf{X}(k)$  – непрерывная  $n_x$ -мерная компонента ДНМП, описывающая в пространстве состояний динамику фазовых координат случайного процесса;  $\mathbf{S}(k) \equiv [A(k), B(k)]^T$  – дискретная компонента ДНМП – двухкомпонентный дискретный марковский процесс, причем марковские цепи  $A(k)$  и  $B(k)$  не зависят друг от друга и не зависят от  $\mathbf{X}(k)$ .

Цель данной работы – на основе марковской теории оценивания случайных процессов разработать оптимальные (квазиоптимальные) алгоритмы оценивания ДНМП  $\left[ \mathbf{X}^T(k), A(k), B(k) \right]^T$  по наблюдаемым дискретным отсчетам выходных сигналов измерителей  $\mathbf{Y}(k) \equiv \mathbf{Y}(t_k)$ , формируемых на фоне окрашенных шумов измерений  $\mathbf{W}(t)$ .

## 2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СМЕШАННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Обозначим апостериорное распределение смешанного вектора состояния  $\left[ \mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k) \right]^T$  по наблюдаемой последовательности измерений  $\mathbf{y}_1^k = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k)\}$  как  $\omega_{jm}(\mathbf{x}(k))$ . Величина  $\omega_{jm}(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k)$  равна вероятности одновременного выполнения условий

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k) \in (\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k) + d\mathbf{x}(k)), \\ A(k) = a_j, \quad B(k) = b_m, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}(k)$  – детерминированное значение случайной величины  $\mathbf{X}(k)$  при условии

$$\mathbf{Y}_1^k = \{\mathbf{Y}(1), \mathbf{Y}(2), \dots, \mathbf{Y}(k)\} = \mathbf{y}_1^k.$$

На основании свойств марковских процессов в дискретном времени запишем рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} \omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = \frac{f_{jm}(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k))}{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int f_j(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1)) \omega_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $f_j(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1)) = f(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1), A(k) = a_j)$  – условная плотность вероятности (ПВ), определяемая с помощью уравнения (11);  $\omega_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$  – апостериорное распределение, полученное на

предыдущем  $k - 1$ -м шаге по последовательности измерений  $\mathbf{y}_1^{k-1} = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k-1)\}$ ;

$f_{jm}(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m)$  – одношаговая функция правдоподобия;  $f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})$  – нормирующий коэффициент,  $\sum_i = \sum_{i=1}^{M_1}$ ,  $\sum_n = \sum_{n=1}^{M_2}$ . В (13) интегрирование по переменной  $\mathbf{x}$  ведется в области  $\mathfrak{R}^{n_x}$ .

Выражение (13) по своей сути – интегрально-рекуррентная формула Стратоновича [12] апостериорного распределения смешанного вектора состояния  $\left[ \mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k) \right]^T$  в дискретном времени и представляет собой решение задачи оценивания этого вектора состояния. Оптимальный алгоритм является рекуррентным и описывает эволюцию апостериорного распределения  $\omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k))$  на каждом  $k$ -м шаге. Начальное условие  $\omega_{jm}^*(\mathbf{x}_0)$  равно известному априорному совместному распределению случайных величин  $\mathbf{X}_0, A_0, B_0$ .

Вводя обозначение  $\tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k))$  (экстраполированное по измерениям  $\mathbf{y}_1^{k-1} = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k-1)\}$  распределения смешанного вектора состояния  $\left[ \mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k) \right]^T$ ), перепишем (13) в виде цепочки из двух формул

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k)) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int f_j(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1)) \omega_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = \frac{f_{jm}(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k))}{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k)). \quad (15)$$

Уравнение (14) описывает преобразование апостериорного распределения предыдущего шага в экстраполированное распределение  $\tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k))$ . С помощью соотношения (15) производится уточнение экстраполированного распределения на основе полученного измерения  $\mathbf{y}(k)$  и определяется апостериорное распределение  $\omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k))$ .

Для нахождения апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП на текущем  $k$ -м шаге  $\mathbf{P}_{jm}^*(k)$  проинтегрируем (13) по переменным  $\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1)$ , в результате получим систему рекуррентных уравнений

$$\tilde{\mathbf{P}}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \mathbf{P}_{in}^*(k-1), \quad (16)$$

$$P_{jm}^*(k) = \frac{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{P}_{jm}(k), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{jm}(k) &= P(A(k) = a_j, B(k) = b_m | \mathbf{y}_1^{k-1}), \\ P_{jm}^*(k) &= P(A(k) = a_j, B(k) = b_m | \mathbf{y}_1^k), \\ f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1}) &= \\ &= \int f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m) \times \\ &\times \tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (18)$$

– условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов, а нормирующий множитель  $f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})$  определяется как

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1}) &= \sum_i \sum_n \sum_j \sum_m \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ &\times f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1}) P_{jm}^*(k), \\ \sum_j &= \sum_{j=1}^{M_1}, \quad \sum_m = \sum_{m=1}^{M_2}. \end{aligned}$$

Для нахождения условной ПВ непрерывной компоненты ДНМП

$$f_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^k)$$

введем в рассмотрение условную экстраполированную ПВ непрерывной компоненты ДНМП

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1})$$

и применим свойство условных распределений. В результате из (14) и (15) получим систему рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1) \times \\ &\times \int f_j(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1)) f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \\ f_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) &= \\ &= \frac{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m)}{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1})} \times \\ &\times \tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)), \end{aligned} \quad (19) \quad (20)$$

где  $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k))$  – условная экстраполированная ПВ вектора  $\mathbf{X}(k)$  при условии  $A(k) = a_j, B(k) = b_m$ ;

$f_{jm}^*(\mathbf{x}(k))$  – условная апостериорная ПВ вектора  $\mathbf{X}(k)$  при условии  $A(k) = a_j, B(k) = b_m$ ;

$f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$  – условная апостериорная ПВ век-

тора  $\mathbf{X}(k-1)$  при условии  $A(k-1) = a_j, B(k-1) = b_n$ , полученная на предыдущем  $k-1$ -м шаге.

Синтезированный алгоритм совместной фильтрации компонент ДНМП (16)–(20) является нелинейным даже для линейных априорных уравнений (11), (12). Нелинейные операции выполняются при вычислении условной ПВ (16), используемой для определения апостериорных вероятностей (17). Особенность синтезированного алгоритма состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов между собой.

### 3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДНМП НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При практической реализации синтезированного оптимального алгоритма совместного оценивания компонент ДНМП (16)–(20) встречаются значительные трудности. Они обусловлены требованием больших объемов памяти и быстродействия вычислителя при выполнении численного интегрирования многомерных ПВ для получения требуемых оптимальных оценок компонент ДНМП в реальном масштабе времени. Поэтому представляет большой интерес синтез квазиоптимальных алгоритмов фильтрации и экстраполяции [5, 15].

Существует большое количество различных методов синтеза квазиоптимальных алгоритмов нелинейного оценивания [16]. Наибольшее распространение получил метод гауссовской аппроксимации, который требует минимальных вычислительных затрат по сравнению с остальными методами и во многих случаях позволяет задать необходимое качество оценивания, несмотря на приближенное нахождение компонент ДНМП. Для этого следует выполнить двухмоментную параметрическую гауссовскую аппроксимацию апостериорного распределения  $f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$ , которая состоит в замене этой неизвестной функции некоторыми известными функциями, в частности условными математическим ожиданием и ковариационной функцией, случайные значения которых определяются так:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) &\equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}(k-1) | A(k-1) = \\ &= a_j, B(k-1) = b_n, \mathbf{Y}_1^{k-1}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) &\equiv \mathbf{cov}\{\mathbf{X}(k-1), \mathbf{X}(k-1) | A(k-1) = \\ &= a_j, B(k-1) = b_n, \mathbf{Y}_1^{k-1}\}. \end{aligned}$$

Применяя, таким образом, на каждом  $k$ -м шаге гауссовскую аппроксимацию для условного апостериорного распределения  $f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$ , можно

показать, что квазиоптимальный алгоритм фильтрации непрерывного компонента ДНМП описывается системой рекуррентных уравнений.

Вектор текущей условной оценки непрерывного компонента ДНМП и ковариационная матрица ее погрешностей

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(k) &\equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{Y}_1^k\}, \\ \mathbf{R}_{jm}^*(k) &\equiv \\ &\equiv \mathbf{cov}\{\mathbf{X}(k), \mathbf{X}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{Y}_1^k\} \end{aligned}$$

определяются с учетом (5), (7) по результатам текущих измерений  $\mathbf{Y}(k) \equiv \mathbf{Y}(t_k)$ , формируемых накоплением (интегрированием) непрерывного наблюдения  $\mathbf{Y}(t)$  на интервалах времени между соседними отсчетами оцениваемого непрерывного компонента ДНМП:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(k) &= \tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) + \mathbf{K}_{jm}(k) \times \\ &\times \left( \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{Y}(\tau) d\tau - \Phi_{jm}^{(yy)} \mathbf{Y}(k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_{jm}^*(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k) - \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) (\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)})^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yx)T}. \quad (22)$$

Здесь

1)  $\mathbf{K}_{jm}(k)$  – оптимальный коэффициент передачи:

$$\mathbf{K}_{jm}(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) (\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)})^{-1}, \quad (23)$$

2)  $\tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k)$  – условно-прогнозная оценка непрерывного компонента ДНМП при условии  $A(k) = a_j, B(k) = b_m$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k)$  – ковариационная матрица погрешностей предсказания:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \Phi_j^{(xx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \Phi_j^{(xx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(xx)T} + \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_j^{(xx)T} + \right. \\ &+ \left[ \Phi_j^{(xx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) \right] \times \\ &\times \left[ \Phi_j^{(xx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) \right]^T \Big\}, \end{aligned} \quad (25)$$

3)  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k)$  – прогнозируемое значение вектора измерений и  $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k), \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yx)T}(k)$  – условные ковариационные матрицы погрешностей предсказания

априори:  $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \Phi_j^{(yx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1)$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yx)T}(k) = \left( \Phi_j^{(xx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(yx)T} + \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_j^{(yx)T} \right)$ ;

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left( \Phi_j^{(xx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(yx)T} + \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_j^{(yx)T} \right); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \Phi_j^{(yx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(yx)T} + \Gamma_j^{(yx)} \Gamma_j^{(yx)T} + \right. \\ &+ \Gamma_j^{(yy)} \Gamma_j^{(yy)T} + \left[ \Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) \right] \times \\ &\times \left[ \Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) \right]^T \Big\}. \end{aligned} \quad (28)$$

При этом начальные условия для квазиоптимального алгоритма оценивания вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений (16), (17), (21)–(28) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(0) &= \mathbf{M}\{\mathbf{X}_0\}, \quad \mathbf{R}_{jm}^*(0) = \mathbf{cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0\}, \\ P_{in}^*(0) &= P_0, \quad i = \overline{1, M_1}, \quad n = \overline{1, M_2}. \end{aligned}$$

Уравнения оценивания апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП (16), (17) остаются без изменения, а условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов (17) определяется из [15]:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Y}(k) | \mathbf{X}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{Y}_1^{k-1}) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det\{\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k)\}}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}(k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k)) \times \right. \\ &\times \left. \left[ \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k) \right]^{-1} (\mathbf{Y}(k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k))^T\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Задача оценивания вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений считается решенной, если на выходе оптимального фильтра на каждом  $k$ -м шаге формируется оптимальная оценка, соответствующая определенному критерию оптимальности. Байесовское решение может быть получено на основе минимизации апо-



стериорного риска [17], который применительно к решаемой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^o(k) &= (\mathbf{x}^o(k), A(k) = a_j^o, B(k) = b_m^o) = \\ &= \arg \min_{\bar{\mathbf{x}}(k), j, m} \sum_{\mu=1}^{M_1} \sum_{\nu=1}^{M_2} \int g_{j\mu\nu}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) \times \\ &\quad \times w_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (30)$$

где  $g_{j\mu\nu}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{x}}(k))$  – функция потерь;  $\mathbf{u}^o(k)$  – оптимальное решение.

При решении многих практических задач малым ошибкам непрерывного компонента соответствуют меньшие потери. В таких случаях применяется функция потерь [15], простая по дискретному и квадратичная по непрерывному компонентам:

$$\begin{aligned} g_{j\mu\nu}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) &= \alpha(1 - \delta_{j\mu\nu}) + \\ &+ \beta \delta_{j\mu\nu} (\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k))^T (\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\alpha, \beta$  – коэффициенты потерь;  $\delta_{j\mu\nu}$  – символ Кронекера:

$$\delta_{j\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mu, m = \nu, \\ 0, & \text{если } j \neq \mu, m \neq \nu, \\ \mu = \overline{1, M_1}, \quad \nu = \overline{1, M_2}. \end{cases}$$

Функция потерь (31) означает, что при любом неправильном определении значений дискретного компонента потери равны коэффициенту  $\alpha$ , а при правильном принятии решения потери пропорциональны сумме квадратов ошибок оценки непрерывного компонента. Подставляя выражение (31) в (30) и выполняя минимизацию апостериорного риска, можно показать, что решающее правило имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{если } P_{jm}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{jm}^*(k) \} \} &\geq \\ \geq P_{\mu\nu}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{\mu\nu}^*(k) \} \}, & \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{то } \mathbf{X}^o(k) = \mathbf{X}_{jm}^*(k), \quad a_j^o = a_j^*, \quad b_m^o = b_m^*,$$

где  $\text{Tr} \{ \mathbf{A} \}$  – след матрицы  $\mathbf{A}$ .

Таким образом, в качестве безусловной оценки непрерывного компонента ДНМП выступает условное апостериорное математическое ожидание  $\mathbf{X}_{jm}^*(k)$ . Из (32) следует, что принятие решения сводится к максимизации взвешенных апостериорных вероятностей дискретных компонент ДНМП. При этом следует отметить, что с увеличением погрешности оценки непрерывного компонента ДНМП уменьшаются веса погрешностей оценки дискретных компонент ДНМП. В результате может приниматься гипотеза с меньшей апостериорной вероятностью, но и с меньшими погрешностями оценки непрерывного компонента

ДНМП, т.е. может отвергаться гипотеза с большей апостериорной вероятностью.

Условная ковариационная матрица  $\mathbf{R}_{jm}^*(k)$  характеризует качество оценки при правильном определении значений дискретных компонент  $A(k) = a_j, B(k) = b_m$ . Безусловная ковариационная матрица  $\mathbf{R}^*(k)$  погрешностей оценки непрерывного компонента ДНМП определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*(k) &= \sum_j \sum_m \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{jm}^*(k) \left( \mathbf{R}_{jm}^*(k) + \right. \\ &\left. + \left( \mathbf{X}_{jm}^*(k) - \mathbf{X}^*(k) \right) \left( \mathbf{X}_{jm}^*(k) - \mathbf{X}^*(k) \right)^T \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Квазиоптимальный цифровой фильтр оценивания вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений (рис. 1), реализующий алгоритм (16), (17), (21)–(28), (32)–(33), является многоканальным с числом каналов  $M = M_1 \times M_2$  и в основном сохраняет структуру и все обратные связи, присущие оптимальному устройству. На вход каждого канала подаются текущие измерения  $\mathbf{Y}(k) \equiv \mathbf{Y}(t_k)$ , значения которых формируются из предварительно проинтегрированного аналоговым образом непрерывного процесса  $\mathbf{Y}(t)$  за время одного такта, в конце каждого такта интегратор (ИНТ) обнуляется. Каждый канал состоит из блока КУ – вычисления коэффициентов усиления  $\mathbf{K}_{jm}(k)$ ; блока оценки (БО), в котором рассчитываются векторы условных оценок  $\mathbf{X}_{jm}^*(k)$ ,  $\mathbf{X}_{in}^*(k-1)$ ; блока прогноза БП, в котором вычисляются условно-прогнозные оценки  $\tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k)$ ; блока апостериорных вероятностей (БАВ), в котором рассчитываются  $P_{jm}^*(k)$ ,  $P_{in}^*(k-1)$ ,  $\tilde{P}_{jm}(k)$ , и блока вычисления корреляционных матриц БКМ, в котором вычисляются  $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k)$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k)$ ,  $\mathbf{R}_{jm}^*(k)$  и  $\mathbf{R}_{in}^*(k-1)$ . Окончательное решение о принятии безусловных оценок  $\mathbf{X}^*(k) = \mathbf{X}_{jm}^*(k)$ ,  $A(k) = a_j^*$ ,  $B(k) = b_m^*$  принимается в решающем устройстве (РУ).

### 3.1. Пример

В качестве примера приведены результаты моделирования квазиоптимального алгоритма оценивания ДНМП на фоне гауссовского марковского случайного шума в условиях изменений статистических свойств этого шума в процессе оценивания. По условию постановки задачи исходный вектор состояния  $\mathbf{X}(t) = [x \ v]^T$  априорного уравнения (1) и

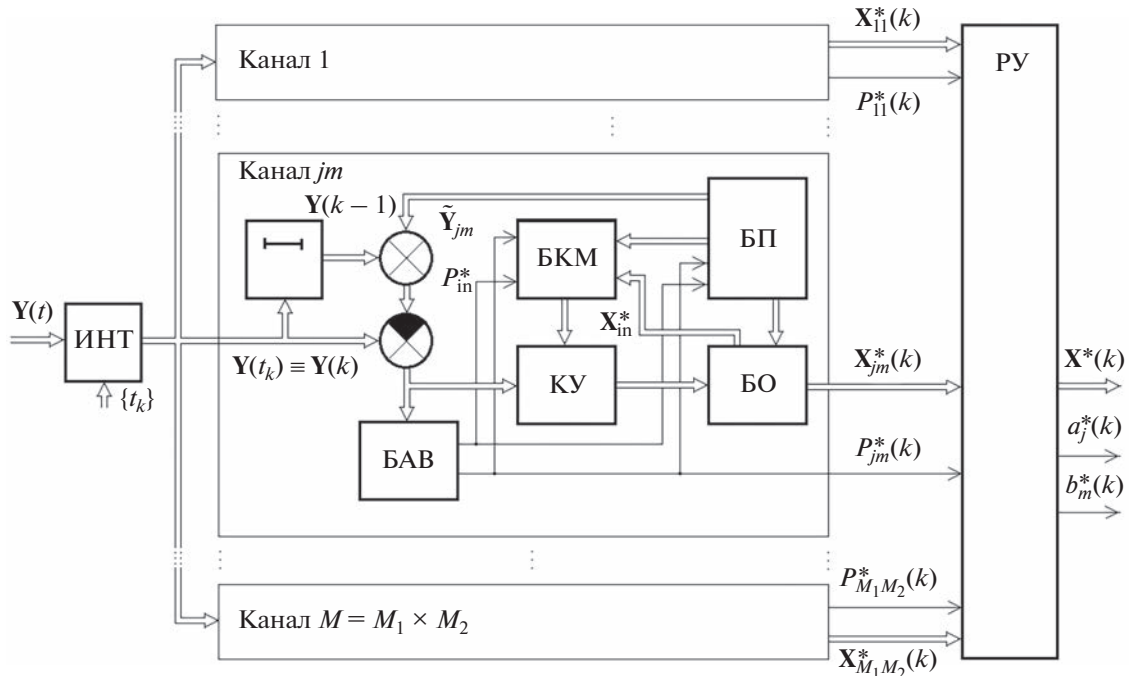


Рис. 1. Структурная схема M-канального цифрового фильтра.

гауссовский марковский случайный шум измерений  $w(t)$  определяются СДУ:

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(t), \tag{34}$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = -2\alpha_v v - 2\alpha_v^2 x + \sqrt{8\alpha_v^3 A(k)} \sigma_v^2 \xi_1(t),$$

$$\frac{d}{dt} w(t) = -\alpha_w w + \sqrt{2\alpha_w B(k)} \sigma_w^2 \xi_2(t), \tag{35}$$

где  $x$  и  $v$  – наблюдаемая и ненаблюдаемая непрерывная компонента ДНМП соответственно;  $\alpha_v$ ,  $\alpha_w$  – коэффициенты, характеризующие ширину спектральной плотности флуктуаций случайных процессов  $x(t)$  и  $w(t)$  соответственно;  $\sigma_v^2$ ,  $\sigma_w^2$  – дисперсии флуктуаций случайных процессов  $x(t)$  и  $w(t)$  соответственно;  $A(k)$ ,  $B(k)$  – дискретные компоненты ДНМП;  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  – стандартные БГШ. Исходное уравнение наблюдения соответствует (2) для  $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ .

Проверка качества квазиоптимального алгоритма проведена с помощью статистического моделирования на ЭВМ для случая, когда параметры уравнений (34), (35) имеют следующие значения:  $\Delta = 0.5$  с,  $\alpha_v = 2\pi/20$  рад/с,  $q = \sigma_v^2/\sigma_w^2 = 5$ ;  $\alpha_w = 10\alpha_v$ , а цепи Маркова принимают значения  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ ;  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 10$ . Вероятности перехода  $\pi_{11}^a = \pi_{11}^b = 0.9$ ;  $\pi_{12}^a = \pi_{12}^b = 0.1$ . В целях повышения надежности функционирования алгоритма была

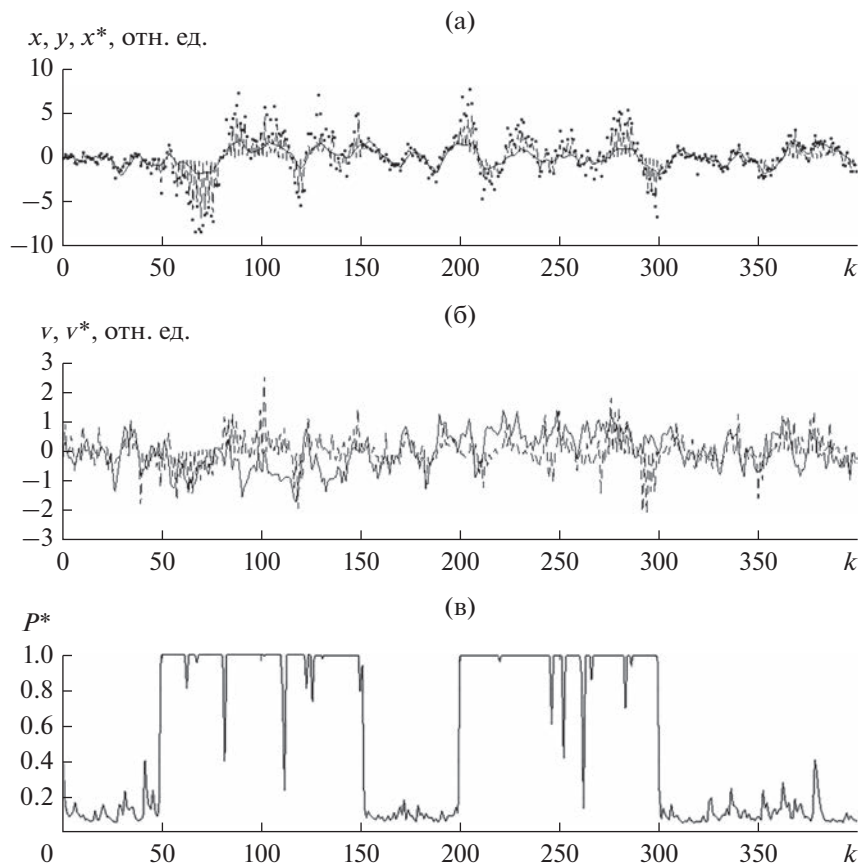
сформирована тестовая реализации для дискретных компонент  $A(k)$ ,  $B(k)$ . При этом было принято, что длина реализации  $k = \overline{1.400}$ , а цепи Маркова запишем как

$$A(k) = \begin{cases} a_1, & 1 \leq k < 49, \quad 151 \leq k < 400, \\ a_2, & 50 \leq k < 150, \end{cases}$$

$$B(k) = \begin{cases} b_1, & 1 \leq k < 199, \quad 301 \leq k < 400, \\ b_2, & 200 \leq k < 300. \end{cases}$$

Определение статистических характеристик квазиоптимальных алгоритмов оценивания проводилось методом Монте-Карло, при этом тестовая реализация дискретных цепей Маркова  $A(k)$ ,  $B(k)$  сохранялась неизменной, а независимые гауссовские последовательности  $\Xi_1(k)$ ,  $\Xi_2(k)$  формировались с помощью датчика случайных чисел. Для определения оценок дискретного и непрерывного компонентов использовалось решающее правило (31)–(32), для которого коэффициенты потерь принимали значения  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ . Результаты моделирования приведены на рис. 2.

Данные рис. 2 показывают работоспособность квазиоптимального алгоритма (16), (17), (21)–(28), (31) и (32) при оценке компоненты ДНМП, что особенно важно в случае, когда одновременно наблюдается статистическая неопределенность как у характеристик непрерывных компонент ДНМП, так и у скачкообразных изменениях статистических характеристик окрашенного шума в канале измерений.



**Рис. 2.** Зависимости от дискретного времени: а)  $x(k)$  – наблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (сплошная),  $x^*(k)$  – оценки наблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (штриховая),  $y(k)$  – измерений на фоне окрашенного шума (пунктирная); б)  $v(k)$  – ненаблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (сплошная),  $v^*(k)$  – оценки ненаблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (штриховая); в)  $P^*$  – совместной вероятности правильного обнаружения изменений статистических характеристик наблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП и окрашенного шума измерений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами теории условных марковских процессов решена задача оптимального оценивания отсчетов непрерывных компонент векторной марковской последовательности ДНМП на фоне коррелированного марковского шума. Синтезированные алгоритмы основаны на использовании метода разностных измерений и разложении смешанной апостериорной плотности вероятности вектора состояния  $[X^T(k), A(k), B(k)]^T$  и являются алгоритмами с обратными связями по дискретному процессу  $S^T(k) = [A(k), B(k)]$ . На базе квазиоптимального алгоритма разработана соответствующая структурная схема цифрового фильтра.

Особенность синтезированного квазиоптимального алгоритма состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов ДНМП между собой, что потребует дополнительных вы-

числительных затрат по сравнению с известными алгоритмами. Однако современная высокопроизводительная вычислительная техника позволяет построить практически реализуемый цифровой фильтр в статистически неопределенных ситуациях.

Применение метода разностных измерений не увеличивает вычислительные затраты в цифровом фильтре, так как размерность вектора состояния остается неизменной, как и при оценивании отсчетов непрерывных случайных процессов на фоне БГШ. В то же время существенно упрощается аналоговая часть аналого-цифрового преобразователя (АЦП) по сравнению с аналогичными алгоритмами [18, 19], так как задержка на один такт реализуется в ЦФ после АЦП, а также следует отметить отсутствие операции аналогового дифференцирования присущей классическим алгоритмам фильтрации непрерывных случайных процессов в непрерывном времени по методу разностных измерений [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
2. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
3. Величкин А.И. // РЭ. 1990. Т. 35. № 7. С. 1471.
4. Миронов М.А. // РЭ. 1993. Т. 38. № 1. С. 141.
5. Миронов М.А. Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. М.: Изд-во ФГУП "ГосНИИАС", 2013.
6. Sage A.P., Melsa J.L. Estimation Theory with Applications to Communication and Control. N. Y.: McGraw-Hill, 1971.
7. Xu Y., Shmaliy Y.S., Shen T. et al. // IEEE Sensors J. 2021. V. 21. № 5. P. 6384.  
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2020.3038242>
8. Jain B. // IEEE Trans. 1975. V. AC-20. № 3. P. 365.  
<https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100979>
9. Stavrou P.A., Skoglund M. // IEEE Control Systems Lett. 2022. V. 6. P. 331.  
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3074455>
10. Luo Y., Zhou J., Yang W. // IEEE Trans. 2022. V. CSII-69. № 6. P. 2807.  
<https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3136184>
11. Детков А.Н. // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 748.
12. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
13. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
15. Детков А.Н. // РЭ. 2022. Т. 67. № 5. С. 485.
16. Руденко Е.А. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. № 1. С. 43.
17. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1978.
18. Детков А.Н. // РЭ. 1995. Т. 40. № 9. С. 1406.
19. Детков А.Н. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 59.

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.391:534.442

## СУБОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ОСНОВНОГО ТОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА

© 2023 г. В. В. Савченко<sup>а, \*</sup>, Л. В. Савченко<sup>б</sup><sup>а</sup> Редакция журнала “Радиотехника и электроника”,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация<sup>б</sup> Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,  
ул. Б. Печерская, 25, Нижний Новгород, 603155 Российская Федерация

\*E-mail: vvsavchenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.

После доработки 22.12.2022 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Отталкиваясь от определения основного тона речи диктора как минимальной частоты линейчатого спектра мощности вокализованных отрезков речевого сигнала, дана оценка потенциально достижимой точности ее измерения в условиях действия фоновых помех типа белого гауссова шума. На основе этой оценки разработан субоптимальный алгоритм измерения частоты основного тона по короткому фрейму речевого сигнала. Эффективность разработанного алгоритма подтверждена результатами проведенного эксперимента, в ходе которого использовалось авторское программное обеспечение.

DOI: 10.31857/S0033849423060128, EDN: XMZLPZ

### ВВЕДЕНИЕ

Частота основного тона (ЧОТ) относится к числу наиболее информативных акустических характеристик речевого сигнала [1, 2] и в этом качестве широко используется в системах автоматической обработки речи (АОР) различного назначения [3–6]. Как следствие, на протяжении многих лет измерение ЧОТ является классической задачей исследований в области речевых технологий. Неудивительно поэтому, что существует множество разных подходов к ее решению, в рамках которых предложено множество разных алгоритмов [7, 8]. Казалось бы, данное направление исследований должно быть давно исчерпано, по крайней мере в теории. Однако работы, связанные с ЧОТ, имеют явную тенденцию к развитию и даже к расширению в будущем [4–9]. Сказанное объясняется, на наш взгляд, тем, что у разработчиков и пользователей речевых технологий на данный момент отсутствует необходимая ясность в вопросе о потенциально достижимой точности измерения ЧОТ при действии случайных помех в канале связи [10, 11]. Проблема обостряется условиями внутридикторской вариативности речевого сигнала [12–14], а также малых выборок наблюдений на относительно коротких (десятые и сотые доли секунды) отрезках его приблизительной (квази-) стационарности [15–20]. Поэтому актуальной представ-

ляется тема исследования, проведенного в рамках данной статьи. Его цель – разработка субоптимального алгоритма измерения ЧОТ на фоне помех типа белого гауссова шума. Для ее достижения используется авторская методика дискретного спектрального моделирования [21].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Согласно акустической теории речеобразования [1] энергетический спектр или спектр мощности  $G_x(f)$  вокализованных отрезков (фреймов) речевого сигнала имеет линейчатую структуру [14]. Его минимальная частота  $F_0$ , она же – период повторения  $K = 0.5F/F_0 \gg 1$  узкополосных (квазигармонических) составляющих речевого сигнала в частотной области ( $F$  – частота временной дискретизации), и определяет понятие ЧОТ [3, 4]. Например, в диапазоне значений ЧОТ  $F_0 = 100 \dots 200$  Гц дикторов-мужчин [11, 22] при частоте дискретизации речевого сигнала  $F = 8$  кГц (соответствует полосе пропускания стандартного телефонного канала связи) получаем  $K = 4000/(100 \dots 200) = 20 \dots 40$  гармоник с частотами  $F_0, 2F_0, \dots, KF_0$ . Оптимальный алгоритм обработки такого сигнала осуществляется по схеме последовательного соединения двух линейных фильтров [23, 24]: внутривариационной автокомпенсации речевого сигнала

$x(t)$  и межпериодного накопления сигнала  $y(t)$  на выходе автокомпенсатора. В основе их практической реализации используются предикторы речи [24, 25]) двух уровней: в пределах одного периода основного тона  $T_0 = 1/F_0 \gg T = 1/F$  и на интервале нескольких таких периодов. Внутрипериодный автокомпенсатор (обеляющий фильтр [17]) нацелен на выравнивание [24]) или обеление [26, 27]) в полосе рабочих частот  $f \leq 0.5F$  огибающей спектра мощности  $G_x(f)$ . В идеале на его выходе мы должны получить периодическую (с периодом  $T_0$ ) последовательность импульсов возбуждения голосового тракта диктора [24, 28]. Для ее выделения из сигнала  $y(t)$  и предназначен упомянутый выше межпериодный накопитель. При обработке во временной области он выполняется по схеме рекурсивного (гребенчатого) фильтра. Однако в этом случае остро возникает проблема априорной неопределенности в отношении истинного значения периода основного тона  $T_0$ . В теории [29] эту проблему преодолевают путем многоканальной (многоальтернативной) обработки речевого сигнала с настройкой каждого канала на соответствующий возможный вариант периода  $T_0$  [30]. Выбор наилучшей альтернативы осуществляется условным наблюдателем по принципу максимизации мощности сигнала на выходе соответствующего канала. Это весьма затратное во всех отношениях техническое решение, которое плохо сочетается с режимом измерений ЧОТ в реальном времени [9, 31]. Поэтому на практике в роли накопителя импульсов сигнала  $y(t)$  широко применяют простейший фильтр нижних частот (ФНЧ) [10, 32] с полосой прозрачности в диапазоне  $[\min F_0; \max F_0]$  Гц, или близкую к нему в принципиальном отношении кепстральную обработку [25, 33]. В таком случае оконечный блок измерителя выполняется по схеме частотного детектора.

В рамках универсальной стохастической модели речевого сигнала [12] точность измерений ЧОТ может быть охарактеризована дисперсией погрешности  $\sigma_F^2$ . В предположении о стационарности сигнала в пределах речевого фрейма воспользуемся известной формулой [29]

$$\sigma_F^2 = (h_z^2 \tau_z^2)^{-1}$$

дисперсии погрешности измерений частоты узкополосного (радио) импульса при действии белого гауссова шума. Здесь  $h_z^2$  и  $\tau_z$  — соответственно отношение сигнал/шум по мощности (ОСШ) и эффективная длительность сигнала  $z(t)$  на выходе ФНЧ. Для случая прямоугольной формы его огибающей выполняется равенство  $\tau_z = \pi\tau/\sqrt{3}$ , где  $\tau$  — длительность речевого фрейма. При этом в

пересчете к среднеквадратичному отклонению (СКО) погрешности измерений получаем

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{3}{(\pi\tau)^2 h_z^2}}. \quad (1)$$

Потребуем от СКО (1) выполнения условия вида  $\delta_F = \sigma_F/F_0 \leq \delta_0$ , где  $\delta_0$  — некоторый пороговый (относительный) уровень. В расчете на гауссово распределение погрешности измерений это условие гарантирует с доверительной вероятностью 0.95 длину доверительного интервала на уровне  $\Delta_F = 2\sigma_F \leq 2\delta_0 F_0$ . Например, при  $F_0 = 100$  Гц и  $\delta_0 = 4...5\%$  получаем  $\Delta_F = 8...10$  Гц, что соответствует типовым требованиям пользователей [6–10] к точности измерения ЧОТ в системах АОР. Отсюда вытекает ограничение вида

$$h_z^2 = \frac{3}{(\pi\tau\sigma_F)^2} \geq \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi\tau\delta_0 F_0}\right)^2.$$

Так, в условиях рассматриваемого примера при длительности речевого фрейма  $\tau = 20...30$  мс ОСШ  $h_z^2$  на выходе ФНЧ должно быть не ниже порога 18...23 дБ. Отметим, что это практически трудно выполнимое требование, поскольку величина ОСШ определяется в выражении (1) через энергию лишь одной из  $K$  гармонических составляющих спектра мощности  $G_y(f)$  последовательности  $y(t)$  импульсов возбуждения. Соответственно, и энергия сигнала  $z(t)$  на выходе ФНЧ в  $K$  раз меньше, чем энергия сигнала  $y(t)$  на его входе.

Исправить ситуацию кардинальным образом можно за счет суммирования энергии всех  $K \gg 1$  гармоник ЧОТ речевого сигнала в спектре мощности  $G_y(f)$  отклика обеляющего фильтра  $y(t)$ . По аналогии с (1) в таком случае будем иметь<sup>1</sup>

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{3}{(\pi\tau)^2 K h_z^2}}. \quad (2)$$

При этом сильно ослабляются требования наблюдателя к интенсивности фонового шума на входе измерителя ЧОТ. Так, при  $K = 30$  в условиях предыдущего примера получим выигрыш по ОСШ, превышающий 15 дБ. Однако для его осуществления на практике требуется принципиально иной, по сравнению с межпериодным накоплением, способ обработки: с адаптацией к тонкой структуре речевого сигнала на интервале длительностью  $\tau \gg T_0$  в несколько периодов основного тона.

Наиболее естественным способом измерения ЧОТ с суммированием энергии ее гармоник на частотах  $F_k = kF_0$ ,  $k \leq K$ , является обработка речевого сигнала в частотной области — с использованием дискретного фурье-преобразования (ДФП)

<sup>1</sup> На выходе обеляющего фильтра пачка сигнальных составляющих в частотной области имеет прямоугольную форму [9].

[34]. Его размерность  $M \gg 1$  определяет избираемую способность ДФП по частоте  $\Delta f = F/M$ . Поскольку в нашем случае требуется выполнить условие  $\Delta f \leq \Delta F$ , то при  $\Delta F = (8 \dots 10)$  Гц и  $F = 8$  кГц получаем  $M \geq 1000$ . Данному условию отвечает, в частности, алгоритм быстрого преобразования Фурье [29] размерностью  $M = 2^{10}$ . Проблема вычислительной сложности и быстродействия измерителя ЧОТ при этом практически утрачивает свою актуальность, однако возникает новая проблема – вредное влияние первых формант в спектрах мощности гласных звуков речи [22, 32]. В силу своей относительной интенсивности они подавляют значительную часть гармоник ЧОТ в низкочастотной части спектра  $G_y(f)$  и этим сильно искажают результаты измерений [24, 28]. По-видимому, именно данным обстоятельством объясняется общеизвестный феномен [3, 35] так называемых грубых ошибок [1, 24]) в задаче измерения ЧОТ. Между тем существует способ, если не исключить совсем, то сильно ослабить указанную проблему. Он связан с идеей обеления огибающей линейчатого спектра мощности  $G_x(f)$  речевого сигнала<sup>2</sup> с использованием авторегрессионной модели (АР-модели)  $G_p(f)$  относительно небольшого порядка  $p = 8 \dots 10$ , адаптированной по результатам ДФП на интервале наблюдений длительностью  $\tau$ . Соответствующая вычислительная процедура, причем в высокоскоростном варианте, подробно описана в работе [21].

## 2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА

Спектр мощности речевого сигнала, заданного в пределах наблюдаемого фрейма  $x(t)$  конечной длительности  $\tau = 20 \dots 30$  мс последовательностью своих эквидистантных (с периодом  $T = 1/F = \text{const}$ ) отсчетов  $x(n) = x(t_n)$  в дискретном времени  $t = t_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , где  $N = \tau/T$ , определяется квадратом модуля спектральной плотности Фурье общего вида:

$$S_x(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi n f T), \quad f \leq 1/(2T),$$

где  $j$  – символ мнимой единицы. При применении  $M$ -точечного ДФП выражение для спектра мощности приобретает следующий вид:

$$G_x(f_m) = \left| T \sum_{n=0}^{M-1} x(n) \exp(-j2\pi n m M^{-1}) \right|^2, \quad (3)$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1,$$

<sup>2</sup> Понятие огибающей тонкой структуры спектра мощности речевого сигнала, или его спектральной огибающей, широко используется в области АОР и подробно описано, например, в работе [13].

где  $f_m = m\Delta f$ ;  $\Delta f = F/M$ . Здесь только первые  $N$  из  $M \gg N$  отсчетов временного ряда  $\{x(n)\}$  отличны от нуля [34]. Вместе с тем АР-модель того же сигнала  $x(t)$  в частотной области имеет вид инверсного преобразования [18, 19]

$$\begin{aligned} \hat{G}_x(f_m) &= \sigma_x^2 T \left| 1 - \sum_{i=1}^p a_p(i) \exp(-j2\pi i m M^{-1}) \right|^{-2} = \\ &= \sigma_x^2 T \left| \sum_{i=0}^p b(i) \exp(-j2\pi i m M^{-1}) \right|^{-2} = \\ &= \sigma_x^2 T |B_p(jf_m)|^{-2} \triangleq \hat{G}_x(f_m; b_{p+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

квадрата модуля комплексного коэффициента передачи

$$B_p(jf_m) = \sum_{i=0}^p b(i) \exp(-j2\pi i m M^{-1}) \quad (5)$$

линейного трансверсального фильтра  $p$ -го порядка. Здесь  $a_p(i)$  –  $i$ -й элемент вектора  $\mathbf{a}_p = \{a_p(i)\}$  коэффициентов линейной авторегрессии того же порядка  $p$ ;  $\sigma_x^2$  – масштабный множитель;  $b(i)$  –  $i$ -й элемент вектора  $\mathbf{b}_{p+1} = \{1; -\mathbf{a}_p\}$  весовых коэффициентов. Сигнал  $y(t)$  на выходе фильтра (5) в частотной области описывается выражением

$$G_y(f_m) = G_x(f_m) / \hat{G}_x(f_m) = |B_p(jf_m)|^2 G_x(f_m), \quad (6)$$

в котором множитель  $\sigma_x^2$  приравнен к единице как не имеющий значения в контексте решаемой задачи. При правильно подобранном в (5) векторе коэффициентов  $\mathbf{b}_{p+1} = \{b(i)\}$  и при относительно невысоком порядке  $p$  выражение (6) определяет ключевой элемент в составе измерителя ЧОТ: обеляющий фильтр или блок выравнивания огибающей спектра мощности  $G_x(f)$ . Проблема состоит в том, что при учете внутридикторской вариативности речевого сигнала данный вектор должен быть адаптирован к спектру (3) в режиме скользящего окна наблюдений [12]. В работе [21] в этих целях предложена итеративная (пошаговая) процедура оптимизации градиентного типа

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{p+1}(l) &= \mathbf{b}_{p+1}(l-1) - \\ &- \gamma_0 \nabla \rho_{M-\text{COSH}}(\mathbf{b}_{p+1}) \Big|_{\mathbf{b}_{p+1}=\mathbf{b}_{p+1}(l-1)}, \quad (7) \\ & \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с использованием дискретного спектра (3) в качестве эталона. Здесь  $\gamma_0$  – шаг итераций,  $l$  – номер шага;  $\nabla$  – знак градиента. В указанной процедуре в роли целевого функционала применяется модификация COSH-расстояния следующего вида:

$$\rho_{M\text{-COSH}}(\mathbf{b}_{p+1}) = \sqrt{\left[ M^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{G}_x(f_m; \mathbf{b}_{p+1}) G_x^{-1}(f_m) \right] \left[ M^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} G_x(f_m) \hat{G}_x^{-1}(f_m; \mathbf{b}_{p+1}) \right]} - 1 \geq 0. \quad (8)$$

Отличительной особенностью данной модификации является свойство масштабной инвариантности и высокое быстродействие [36]. Как следствие, последовательность приближений (7) сходится в окрестности точки искомого оптимума

$$\mathbf{b}_{\text{opt}} = \text{Arg min } \rho_{M\text{-COSH}}(\mathbf{b}_{p+1}) \quad (9)$$

всего за  $L = 8 \dots 16$  итераций [21]. При этом в соответствии с (6) в спектре мощности отклика обесцвечивающего фильтра  $y(t)$  будет сформировано  $K = F/F_0 \gg 1$  ярко выраженных гармонических составляющих  $G_{y,k}(f_m)$  с равномерным сдвигом между собой по частоте – в идеале на  $F_0$ . Измеряя величину частотного сдвига тем или иным способом, мы получаем искомую оценку ЧОТ  $\hat{F}_0$ .

Продуктивным для выявления периодических компонент в сигнале  $y(t)$  представляется подход [35, 37], основанный на вычислении автокорреляционной функции (АКФ) спектра (9) на выделенном наборе частот  $\{f_m\}$ . При условии его предварительного амплитудного квантования (нормализации) на два уровня:

$$G_z(f_m) = \sum_{k=1}^K G_{z,k}(f_m), \quad (10)$$

$$G_{z,k}(f_m) = \begin{cases} 1, & G_{y,k}(f_m) > g_0, \\ 0, & G_{y,k}(f_m) \leq g_0, \end{cases}$$

где  $g_0$  – некоторый пороговый уровень, получим решающее правило вида

$$\hat{F}_0 = \text{Arg max}_{r_1 \leq r \leq r_2} Q(\Delta f_r). \quad (11)$$

Здесь  $Q(\Delta f_r)$  – нормированная к единице АКФ квантованного спектра мощности (10). Ее аргументом служит частотный сдвиг  $\Delta f_r = r\Delta f$  в границах  $r_1\Delta f \leq \Delta f_r \leq r_2\Delta f$  анализируемого диапазона частот. Эти границы регулируются выбором двух констант  $r_1 \leq r_2 < M$ . Причем для исключения тривиального для любой АКФ результата:  $\hat{F}_0 = 0$ , константа  $r_1 \geq 1$  не может быть установлена равной нулю. Напротив, рекомендуется устанавливать соотношение  $r_1 = \min F_0/\Delta f \gg 1$ . При достижении равенства  $f_r = F_0$  зависимость  $Q(\Delta f_r)$  реализует эффект суммирования энергии гармоник ЧОТ.

Выражения (3)–(11) в совокупности определяют предлагаемый алгоритм измерения ЧОТ повышенной точности. Вычислитель АКФ играет в нем роль межпериодного накопителя сигнала  $y(t)$  в частотной области. Его близость к оптимальному алгоритму по эффективности (2) подтверждается результатами проведенного далее эксперимента.

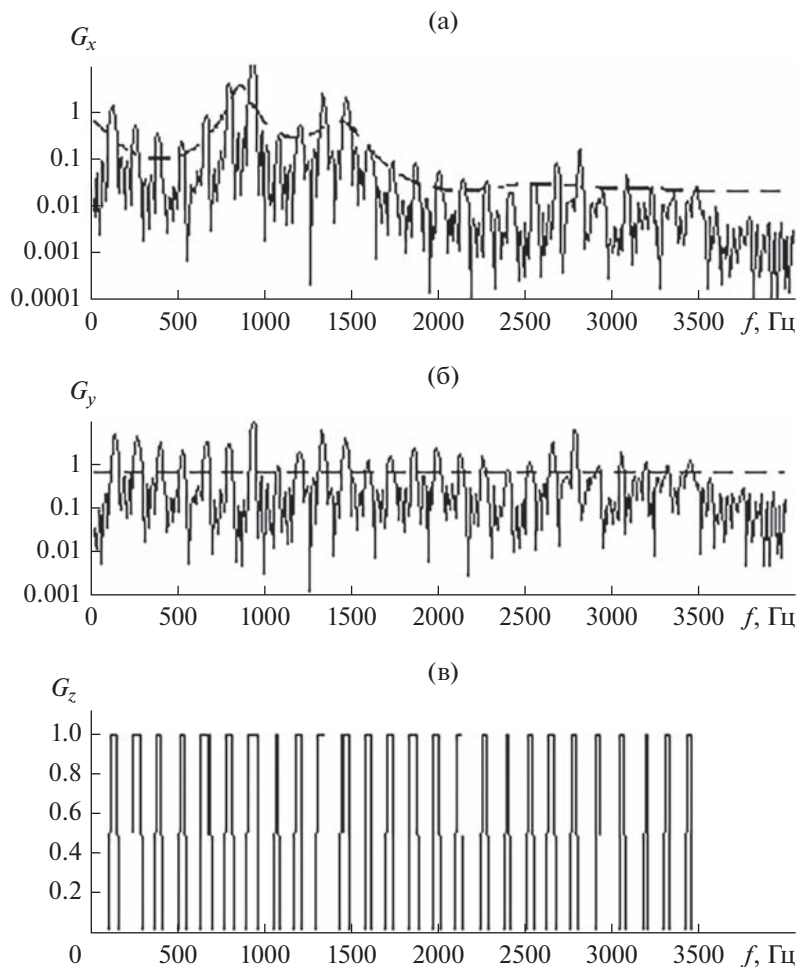
### 3. ПРОГРАММА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперимент проводился в два этапа. На первом объектом исследования служили сигналы шести гласных звуков русской речи в их аддитивной смеси с белым гауссовым шумом. Дисперсия шума, а вслед за ней и ОСШ  $h_x^2$  на входе измерителя ЧОТ варьировались в эксперименте в пределах 0...40 дБ. Длительность каждого сигнала (2.5...3 с) изначально была рассчитана на его автоматическое членение на множество коротких ( $\tau = 30$  мс) фреймов данных  $x(t)$  при их частичном (по 20 мс) перекрытии во времени. При этом частота дискретизации  $F$  была установлена равной 8 кГц. В результате объем речевой базы данных по каждому гласному звуку речи составил  $R = (2.5 \dots 3)/10^{-2} = 250 \dots 300$  независимых фреймов размерностью  $N = 30 \times 8 = 240$  отсчетов речевого сигнала для каждого отдельного значения ОСШ. По каждому фрейму с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье при равенстве длины его окна  $M = 2^{10}$  был вычислен с шагом по частоте  $\Delta f = 8000/1024 = 7.8125$  Гц текущий (мгновенный) спектр мощности (3) наблюдаемого сигнала  $x(t)$ . Затем согласно (4) была построена АР-модель его огибающей. По ней в соответствии с (10) был сформирован линейчатый спектр  $G_y(f)$  последовательности  $y(t)$  импульсов возбуждения голосового тракта контрольного диктора. После этого путем автокорреляционной обработки (11) была получена выборочная оценка ЧОТ. Ее инструментальная погрешность измерений  $0.5\Delta f$  была сокращена до 1...2 Гц путем интерполяции зависимости  $Q(\Delta f_r)$  в окрестностях локального максимума. В дальнейшем она была подвергнута совместно с аналогичными оценками  $\hat{F}_0$  в пределах  $R$ -выборки экспериментальных данных  $\{x(t)\}$  статистическому усреднению. В итоге при доверительной вероятности 0.9 погрешность выборочной оценки ЧОТ в ее относительном выражении  $\varepsilon_F = 1.65/\sqrt{R} = 1.65/\sqrt{(250 \dots 300)}$  составила 9...10% [17, 38].

Все основные вычисления в ходе эксперимента были выполнены с использованием новейшей модификации авторской компьютерной программы Phoneme Training<sup>3</sup>. Полученные результаты отражены в виде графиков и диаграмм на рис. 1–6.

<sup>3</sup> Программа размещена в режиме открытого доступа на сайте авторов статьи по ссылке <https://sites.google.com/site/frompldcreators/produkty-1/phonemetraining>.





**Рис. 1.** Спектр мощности сигнала гласного звука “а” (сплошная линия) и его огибающая (штриховая линия) на входе измерителя ЧОТ (а), на выходе обеляющего фильтра (б) и выходе амплитудного квантователя (в).

На рис. 1а–1в представлено типичное семейство спектров мощности гласного звука “а” от контрольного диктора в условиях относительно небольшого ( $h_x^2 = 30$  дБ) фоновых шума – на выходах спектрального анализатора (3), обеляющего фильтра (6) и амплитудного квантователя (10) соответственно. Штриховой линией на рисунке показана форма огибающей спектра мощности речевого сигнала. Из сравнения графиков на рис. 1а и 1б друг с другом хорошо видны эффекты как спектрального АР-моделирования, так и выравнивания спектральной огибающей [9]. Горизонтальной линией на втором графике отмечен пороговый уровень  $g_0$ , равный в данном случае средней мощности сигнала  $y(t)$  в частотной области:

$$P_y = M^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} G_y(f_m).$$

При этом график на рис. 1в наглядно отражает назначение амплитудного квантователя (10) в составе субоптимального измерителя ЧОТ, а имен-

но: нормализация по форме и по уровню гармонических составляющих спектра (9). А достигаемый эффект в полной мере отражают графики нормированной АКФ спектра мощности речевого сигнала на рис. 2а и 2б, построенные согласно (11) при равенстве  $h_x^2 = 30$  и 10 дБ соответственно. Как видим, амплитуда

$$q_F = Q(\Delta f_r) \Big|_{\Delta f_r = \hat{f}_0} \quad (12)$$

первого пика АКФ в области боковых лепестков (на рис. 2 отмечен темным квадратом) существенно зависит от ОСШ. Однако его положение в частотной области, а, значит, и результат  $\hat{F}_0 \approx 132.8$  Гц измерений ЧОТ, стабильны в обоих случаях. Это признак достаточно высокой помехоустойчивости предложенного измерителя.

В развитие данного вывода на рис. 3 представлен график зависимости СКО оценки ЧОТ (11) от ОСШ при действии гласного звука речи “а” на фоне белого шума (кривая 1). Для сравнения здесь же представлен график потенциально до-

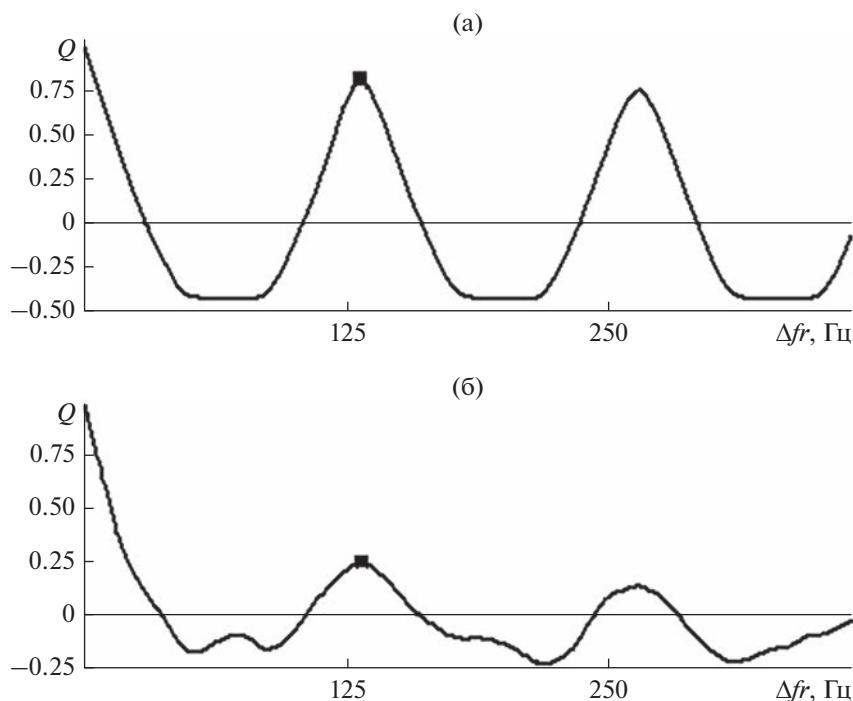


Рис. 2. Нормированная АКФ спектра мощности речевого сигнала на выходе амплитудного квантователя (б) при ОСШ, равном 30 (а) и 10 дБ (б).

стижимой СКО (2) при равенстве  $K = 30$  (кривая 2). При этом ОСШ  $h_x^2$  было пересчитано в ОСШ на входе измерителя по формуле  $h_x^2 = h_x^2 + 10$ , дБ. В ней учтен известный эффект ослабления речевого сигнала на выходе автокомпенсатора [18]. Его количественная характеристика – в данном случае 10 дБ – получена экспериментальным путем [19] применительно к фонеме “а” от контрольного диктора. Как видим, оба графика мало отличаются друг от друга в области рабочих значений ОСШ  $h_x^2 \geq 10$  дБ. Напротив, они сильно разнятся с графиком аналогичной зависимости (1) в отсутствие эффекта межпериодного накопления (кривая 3). По сравнению с ним субоптимальный алгоритм характеризуется выигрышем в пороговых сигналах порядка 8...12 дБ.

Сделанные выводы сохраняют справедливость для всех остальных, наряду с фонемой “а”, гласных звуков речи контрольного диктора. Правда, оценки ЧОТ при этом могут сильно варьироваться по величине. Например, для звука “и” от контрольного диктора результат  $\hat{F}_0$  составил 115...118 Гц. С указанной точки зрения не только теоретическое, но и практическое значение имеют результаты второго, заключительного этапа эксперимента.

В качестве его объекта исследования была взята строка “Ночь, улица, фонарь, аптека” (А. Блок) в произнесении контрольного диктора. Аудиозапись, сделанная в закрытом помещении при ОСШ по-

рядка 30 дБ, была разделена на последовательность фреймов  $x(t)$  длительностью по  $\tau = 30$  мс. По каждому из них была осуществлена обработка сигнала согласно алгоритму (3)–(10). Полученные результаты представлены в виде семейства временных диаграмм на рис. 4. Синхронно с речевым сигналом (рис. 4а) показана (рис. 4б) последовательность формируемых согласно (11)

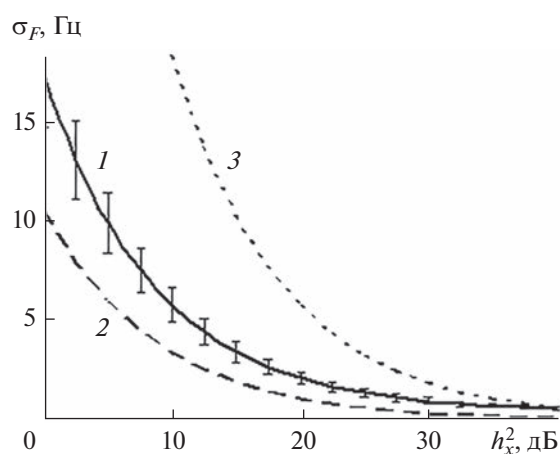


Рис. 3. Зависимость СКО погрешности измерения ЧОТ от ОСШ: кривая 1 – по результатам проведенного эксперимента; кривая 2 – в потенциально достижимом варианте (2) при равенстве  $K = 30$ ; кривая 3 – в отсутствие эффекта межпериодного накопления (1).

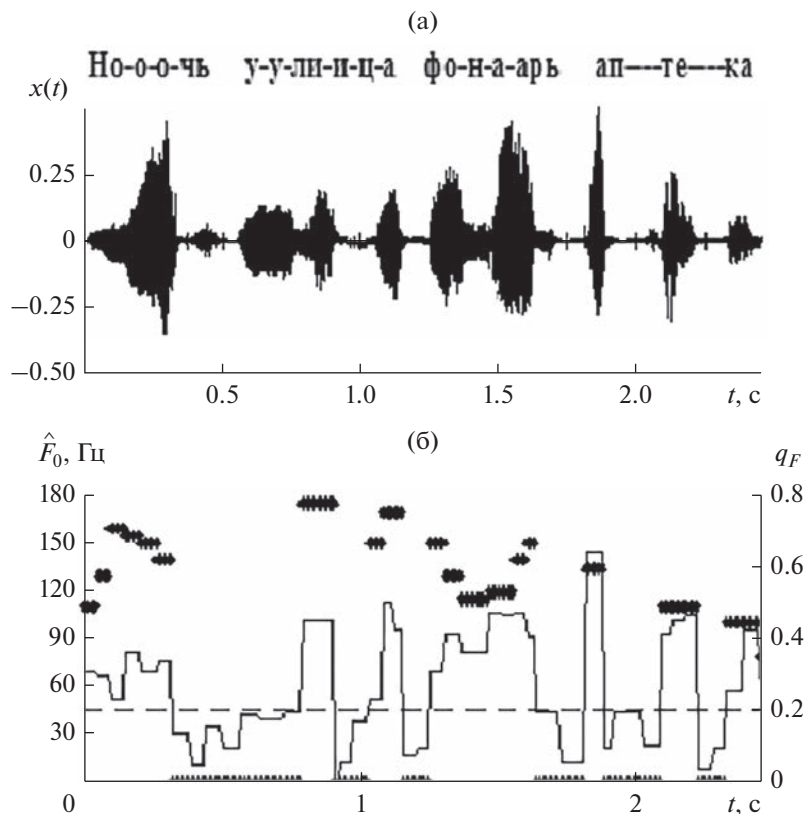


Рис. 4. Временная диаграмма контрольного речевого сигнала (а) и траектория ЧОТ в динамике (б).

оценок ЧОТ (отмечены маркером), а также соответствующая временная диаграмма амплитуды первого пика АКФ. Чем больше эта амплитуда  $q_F$ , тем выше надежность текущего результата  $\hat{F}_0$ .

Как видим, оценки ЧОТ сильно разнятся между собой по надежности. При этом разрывы и пропуски на диаграмме оценок ЧОТ (рис. 4б) указывают на соответствующие недостаточно вокализованные, в частности назальные звуки речи диктора. Причем величина ЧОТ в динамике зависит не только от типа фонемы, но и от интонации диктора в момент ее произнесения.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Измерение (отслеживание) ЧОТ речевого сигнала является нетривиальной задачей, поскольку до сих пор существует ряд нерешенных проблем. Так, например, в силу своего определения частоту  $F_0$  можно легко перепутать с ее первой гармоникой (эффект удвоения тона “pitch doubling” [24]) или с первой формантой в спектре гласного звука речи. Кроме того, измерить ЧОТ с высокой точностью сложно по аудиозаписям невысокого качества, так как нужный пик на низких частотах спектра мощности в этом случае сильно ослабе-

вает [7, 8]. Предложенный в данной статье алгоритм решает обе проблемы принципиальным образом: в нем перед корреляционной обработкой [35] гармоники ЧОТ выравниваются друг с другом по амплитуде путем адаптации их огибающей (4) под огибающую спектра (3). Достаточно высокая скорость сходимости итеративной процедуры (7), лежащей в основе указанной адаптации, обусловлена использованием масштабной-инвариантной меры (8) информационного рассогласования в качестве целевого функционала оптимизационной задачи [21].

Еще одно положительное качество предложенного алгоритма состоит в возможности автоматической регистрации вокализованных фреймов речевого сигнала по признаку превышения некоторого порогового уровня  $q_0$  боковыми пиками АКФ из выражения (12). В нашем примере (см. рис. 2) этот порог равен  $q_0 = 0.2 \dots 0.25$ , и по нему нетрудно отделить вокализованные фреймы речи диктора от глухих или недостаточно вокализованных фреймов. Напротив, для большинства известных алгоритмов измерений ЧОТ процедура классификации такого рода является одной из основных составляющих их вычислительной сложности [22, 33].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования разработан субоптимальный алгоритм измерения ЧОТ речевого сигнала, в котором реализован эффект суммирования энергии гармоник. Его ключевое звено – обеляющий фильтр спектральной огибающей – формируется на основе ДФП методом дискретного спектрального моделирования. Эффективность предложенного алгоритма характеризуется высокой степенью близости его характеристик к потенциально достижимым характеристикам эффективности.

Полученные результаты предназначены для применения в системах АОР различного назначения, включая речевые коммуникации [13, 14], прикладную акустику [7, 8] и другие, в целях отслеживания в динамике изменений эмоционального состояния их пользователей по колебаниям ЧОТ в режиме реального времени [38, 39].

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10010).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rabiner L.R., Shafer R.W.* Theory and Applications of Digital Speech Processing. Boston: Pearson, 2011.
2. *Hirst D., Looze C.* // Cambridge Handbooks in Language and Linguistics. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2021. P. 336.  
<https://doi.org/10.1017/9781108644198.014>
3. *Schenkman B.N., Gidla V.K.* // Appl. Acoustics. 2020. V. 163. Article 107214.  
<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2020.107214>
4. *Allam A.R., Ashour A.S., Elnaby M.A., El-Samie F.E.* // 7th Int. Japan-Africa Conf. Electronics, Communications and Computations (JAC-ECC). 2019. P. 106.  
<https://doi.org/10.1109/JAC-ECC48896.2019.9051338>
5. *Souza G.V., Duarte J.M., Viegas F. et al.* // J. Voice. 2020. V. 34. № 4. P. 641.  
<https://doi.org/10.1016/j.jvoice.2018.12.007>
6. *Stahl J., Mowlae P.* // Speech Communication. 2019. V. 111. P. 1.  
<https://doi.org/10.1016/j.specom.2019.05.001>
7. *Sharma G., Umapathy K., Krishnan S.* // Appl. Acoustics. 2020. V. 158. Article No 107020.  
<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.107020>
8. *Zhang W., Wang R., Zhang Q., Fang S.* // Appl. Acoustics. 2020. V. 166. Article No 107338.  
<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2020.107338>
9. *Савченко А.В., Савченко В.В.* // Измерит. техника. 2022. № 6. С. 60.  
<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2022-6-60-66>
10. *Yadav I.C., Shahnawazuddin S., Pradhan G.* // Digital Signal Processing. 2019. V. 86. P. 55.  
<https://doi.org/10.1016/j.dsp.2018.12.013>
11. *Kumar S.* // Int. J. Speech Technol. 2019. V. 22. P. 885.  
<https://doi.org/10.1007/s10772-019-09634-5>
12. *Savchenko V.V.* // Radioelectronics and Communications Systems. 2020. V. 63. P. 532.  
<https://doi.org/10.3103/S0735272720100039>
13. *Tohyama M.* // Acoustic Signals and Hearing. Kanagawa, Japan: Acad. Press, 2020. P. 89.  
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-816391-7.00013-9>
14. *Gibson J.D.* // Information. 2016. V. 32. № 7.  
<https://doi.org/10.3390/info7020032>
15. *Gu Yu., Wei H.L.* // Inform. Sci. 2018. V. 451–452. P. 195.  
<https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.04.007>
16. *Cui S., Li E., Kang X.* // IEEE Int. Conf. Multimedia and Expo (ICME). London: United Kingdom. 2020. P. 1.  
<https://doi.org/10.1109/ICME46284.2020.9102765>
17. *Smith S.R.* // J. Acoustical Soc. Amer. 2021. V. 150. Article No. A113.  
<https://doi.org/10.1121|10|0007806|>
18. *Савченко В.В., Савченко А.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 11. С. 1101.  
<https://doi.org/10.31857/S0033849420110157>
19. *Savchenko V.V., Savchenko A.V.* // Radioelectronics and Commun. Systems. 2019. V. 62. № 5. P. 276.  
<https://doi.org/10.3103/S0735272719050042>
20. *Kashani H.B., Sayadiyan A.* // Computer Speech & Language. 2018. V. 50. P. 105.  
<https://doi.org/10.1016/j.csl.2017.12.008>
21. *Савченко В.В., Савченко Л.В.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 11. С. 1100.  
<https://doi.org/10.31857/S0033849421110085>
22. *Kent R.D., Vorperian H.K.* // J. Commun. Disorders. 2018. V. 74. P. 74.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcomdis.2018.05.004>
23. *Gibson J.D.* // Information. 2019. V. 179. № 10.  
<https://doi.org/10.3390/info10050179>
24. *Markel J.D., Gray A.H.* // Linear Prediction of Speech. Communication and Cybernetics. Berlin: Springer, 1976. V. 12.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-66286-7\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-66286-7_8)
25. *Sueur J.* // Sound Analysis and Synthesis with R. Cham: Springer, 2018.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-77647-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77647-7_12)
26. *Esfandiari M., Vorobyov S.A., Karimi M.* // Signal Processing. 2020. V. 171. Article No 107480.  
<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107480>
27. *Jaramillo A.E., Nielsen J.K., Christensen M.G.* // 27th Europ. Signal Processing Conf. (EUSIPCO). 2019. P. 1.  
<https://doi.org/10.23919/EUSIPCO.2019.8902763>
28. *Palaparthi A., Titze I.R.* // Speech Communication. 2020. V. 123. P. 98.  
<https://doi.org/10.1016/j.specom.2020.07.003>
29. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: Справочник / Под ред. Я.Д. Ширмана. 2-е изд. М.: Радиотехника, 2007.
30. *Sinha R., Shahnawazuddin S.* // Computer Speech & Language. 2018. V. 48. P. 103.  
<https://doi.org/10.1016/j.csl.2017.10.007>
31. *Zeremadini J., Messaoud M., Bouzid A.* // Appl. Acoustics. 2017. V. 120. P. 45.  
<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2017.01.013>

32. *Jouvet D., Laprie Y.* // 25th Eur. Signal Processing Conf. (EUSIPCO). 2017. P. 1614.  
<https://doi.org/10.23919/EUSIPCO.2017.8081482>
33. *Oppenheim A.V., Schaffer R.W.* // IEEE Signal Processing Magazine. 2004. V. 21. № 5. P. 95.  
<https://doi.org/10.1109/MSP.2004.1328092>
34. *Marple S.L.* Digital spectral analysis with applications. 2-nd ed. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2019.
35. *Parlak C., Altun Yu.* // Mathematical Problems in Engineering. 2021. V. 2021. Article No. 6658951.  
<https://doi.org/10.1155/2021/6658951>
36. *Savchenko A.V., Savchenko V.V. & Savchenko L.V.* // Optimization Lett. 2021. № 7. P. 1.  
<https://doi.org/10.1007/s11590-021-01790-5>
37. *Levkov D.G., Panin A.G., Tkachev I.I.* // The Astrophysical J. 2022. V. 925. № 2. P. 109.  
<https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac3250>
38. *Савченко А.В., Савченко Л.В.* // Измерит. техника. 2021. № 4. С. 72.  
<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-4-49-57>
39. *Аксай М.В., Оғуз К.* // Speech Communication. 2020. V. 116. P. 56.  
<https://doi.org/10.1016/j.specom.2019.12.001>

**МЕТОД ДЕМОДУЛЯЦИИ СИГНАЛОВ В СИСТЕМЕ PD-NOMA  
С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО АЛГОРИТМА  
С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ИСКЛЮЧЕНИЕМ  
ДЕМОДУЛИРОВАННЫХ КОМПОНЕНТ**

© 2023 г. В. Б. Крейнделин<sup>а</sup>, \*, Л. А. Варукина<sup>а</sup>

<sup>а</sup> *Московский технический университет связи и информатики,  
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация*

*\*E-mail: vitkrend@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.07.2022 г.

После доработки 15.08.2022 г.

Принята к публикации 13.09.2022 г.

Предложен метод демодуляции сигналов в системе с неортогональным многостанционным доступом с разделением по мощности, реализующий принцип последовательного исключения демодулированных компонент с учетом дисперсии ошибки оценивания и с применением нелинейной функции. Приведены результаты моделирования предложенного метода в системе сотовой связи: использование предложенного метода позволяет получить выигрыш 1...3.5 дБ по сравнению с известными алгоритмами в зависимости от соотношения мощностей передачи сигналов трех абонентских терминалов.

DOI: 10.31857/S0033849423070069, EDN: WPFVW

**ВВЕДЕНИЕ**

В существующих системах подвижной связи для организации доступа множества пользователей к одной частотной несущей используются следующие ортогональные методы разделения каналов:

– система 2G – частотное и временное разделение (Time Division Multiple Access, TDMA, Frequency Division Multiple Access, FDMA);

– система 3G – кодовое разделение (Code Division Multiple Access, CDMA);

– системы 4G и 5G – ортогональное частотное мультиплексирование (Orthogonal Frequency Division Multiple Access, OFDMA).

Емкость таких систем ограничивается базой ортогонального разделения каналов – числом ортогональных ресурсов, поддерживаемых на одной несущей, и уровнем помех между ресурсами при нарушении их свойства ортогональности вследствие многолучевого распространения сигналов.

В рамках исследований и разработки систем 4G и 5G рассматривались также варианты неортогонального разделения каналов [1] (Non-Orthogonal Multiple Access, NOMA). В отличие от ортогональных методов, в основе методов NOMA используется концепция контролируемого уровня помех между неортогональными ресурсами одной несущей [2], что устраняет одно из ограничений по количеству мультиплексируемых сигна-

лов разных пользователей – нет ограничения по базе ортогональных ресурсов. Такой подход потенциально позволяет повысить спектральную эффективность систем связи [2].

Методы NOMA можно разделить на две категории – неортогональное разделение ресурсов по мощности (Power Domain NOMA, PD-NOMA) и неортогональное кодовое разделение ресурсов (Code Division NOMA, CD-NOMA) [2].

В методе CD-NOMA реализуется разделение каналов с помощью квазиортогональных расширяющих кодовых последовательностей (есть аналогия с CDMA). Метод PD-NOMA реализует уплотнение сигналов разных пользователей с разной мощностью в одном частотно-временном ресурсе. В этом случае сигнал каждого пользователя является помехой для сигналов других пользователей, но в приемном устройстве сигналы разных пользователей можно демодулировать даже при наличии взаимной интерференции, например, с помощью алгоритма последовательного исключения помех (Successive Interference Cancellation, SIC) [3–6].

Технология NOMA пока не реализована в системах подвижной связи во многом из-за того, что отсутствуют эффективные алгоритмы демодуляции. Алгоритм SIC не всегда обеспечивает

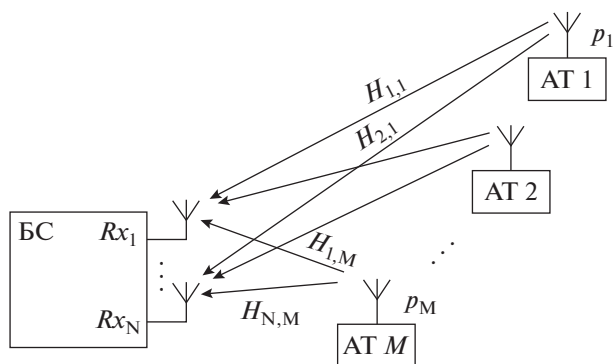


Рис. 1. Система PD-NOMA: АТ – абонентский терминал, БС – базовая станция, Rx – приемный тракт.

требуемую помехоустойчивость системы связи при использовании NOMA.

В данной статье предлагается модифицированный алгоритм SIC, более эффективный чем исходный алгоритм.

### 1. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С НЕОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГО-СТАНЦИОННЫМ ДОСТУПОМ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ПО МОЩНОСТИ

Пример системы PD-NOMA показан на рис. 1. В данном случае рассматривается линия “вверх” в системе сотовой связи, где, как показано на рис. 1, сигналы  $M$  абонентских терминалов АТ передаются на базовую станцию БС. Сигнал, передаваемый абонентским терминалом  $m$ -го пользователя, описывается выражением

$$x_m = \sqrt{p_m} \theta_m; \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

где  $x_m$  – передаваемый сигнал  $m$ -го пользователя,  $m = 1, \dots, M$ ;  $p_m$  – мощность сигнала  $m$ -го пользователя;  $\theta_m$  – комплексный информационный символ, передаваемый  $m$ -м пользователем.

Переданные сигналы после воздействия в радиоканале рэлеевских замираний и аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) поступают в  $N$  приемных трактов Rx. Модель сигнала, принимаемого базовой станцией, можно описать следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{P}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{Y}$  – вектор отсчетов комплексных огибающих на входе демодулятора размером  $N \times 1$ ;  $\mathbf{H}$  – матрица комплексных коэффициентов передачи канала связи размером  $N \times M$ ;  $\mathbf{P}$  – диагональная матрица размером  $M \times M$ , содержащая на главной диагонали элементы  $\sqrt{p_m}$ ;  $\boldsymbol{\theta}$  – вектор переданных информационных символов размером  $M \times 1$ , каждая компонента которого есть ком-

плексное число, принадлежащее множеству  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(K)}\}$ ,  $K$  – кратность модуляции;  $\boldsymbol{\eta}$  – комплексный гауссовский случайный вектор размером  $N \times 1$  с нулевым средним и корреляционной матрицей  $\mathbf{V}_\eta = 2\sigma^2 \mathbf{1}$  размером  $N \times N$ .

Предполагая, что в приемнике базовой станции известна матрица коэффициентов передачи каналов между абонентскими терминалами и базовой станцией  $\mathbf{H}$ , а также известны мощности передачи сигналов всех пользователей  $p_1, p_2, \dots, p_M$ , уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{H}\mathbf{P}$  – матрица размером  $N \times M$ .

### 2. ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЕМОДУЛЯЦИИ

Задача демодуляции состоит в том, чтобы путем обработки принятого вектора  $\mathbf{Y}$  в модели (2) найти оценку  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  вектора информационных символов  $\boldsymbol{\theta}$ . Для вычисления оценки  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  может использоваться алгоритм максимального правдоподобия (Maximum Likelihood, ML) [2, 7–9]. Оценка вектора информационных символов, оптимальная по критерию максимума правдоподобия, находится с помощью перебора всех возможных комбинаций вектора  $\boldsymbol{\theta}$ , количество которых определяется порядком  $K$  квадратурной амплитудной модуляции (Quadrature Amplitude Modulation, QAM):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{G}\boldsymbol{\theta}\|^2.$$

Вычислительная сложность этого метода экспоненциально растет по мере увеличения количества передающих антенн  $M$  и пропорциональна величине  $K^M$ .

Другим известным методом демодуляции является алгоритм SIC [2, 6, 10–14]. В этом случае для демодуляции в приемном устройстве сначала вычисляется корреляционная матрица ошибок оценивания по методу минимума среднеквадратической ошибки (МСКО) [15, 16]:

$$\mathbf{V} = 2\sigma^2 (\mathbf{G}'\mathbf{G} + 2\sigma^2 \mathbf{1})^{-1}. \quad (3)$$

Элементы  $v_{i,i}$  главной диагонали матрицы  $\mathbf{V}$  являются дисперсиями ошибок оценивания символов пользователей,  $i = 1, 2, \dots, M$ , по методу МСКО.

Демодуляция сигналов пользователей осуществляется в порядке возрастания элементов  $v_{i,i}$ . В рассматриваемых ниже процедурах демодуляции предполагается, что имеет место такое упорядочение абонентов, чтобы выполнялось условие  $v_{1,1} < v_{2,2} < \dots < v_{M,M}$ . Рассмотрим работу алгоритма SIC по шагам.

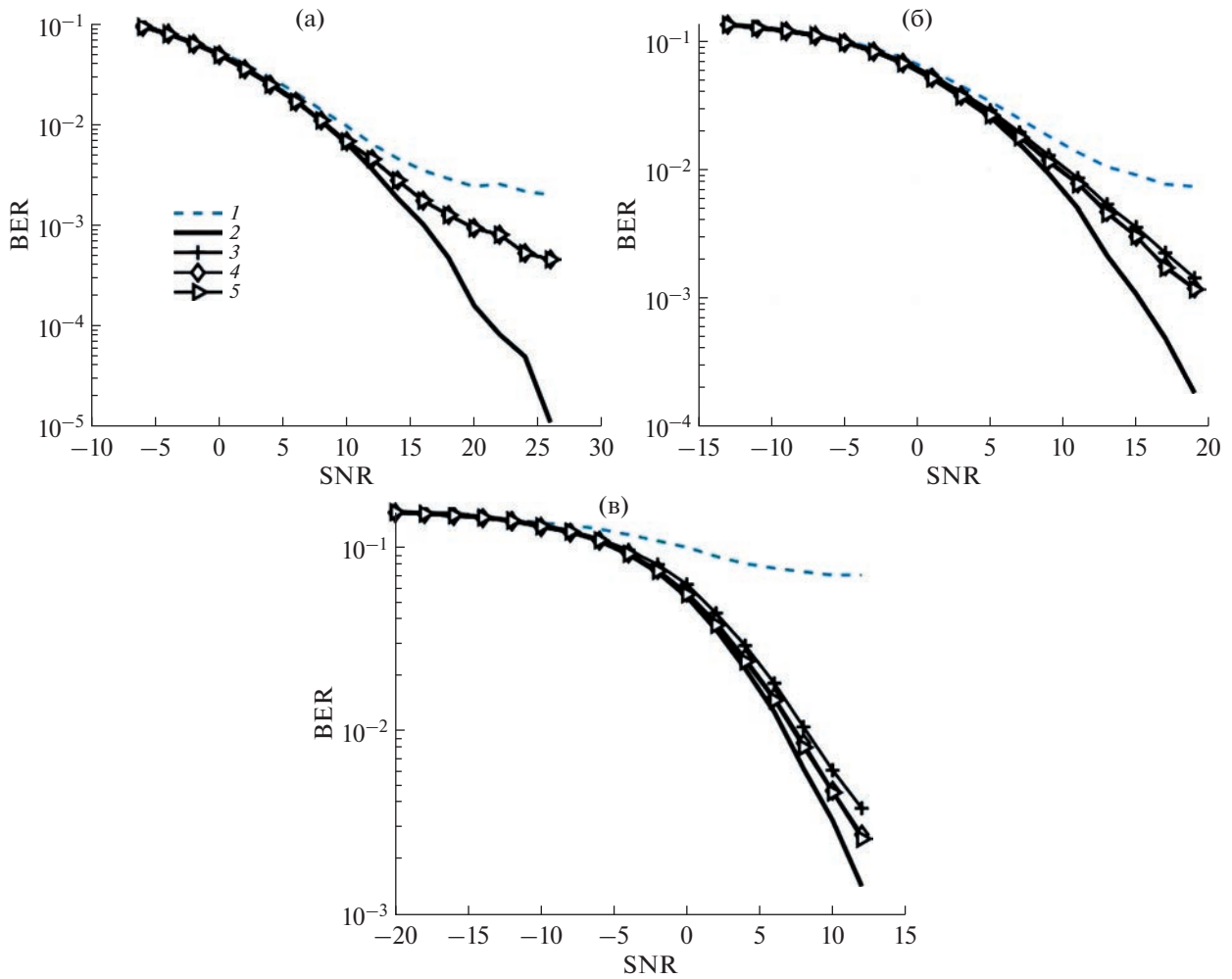


Рис. 2. Зависимости вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум для АТ 1 (а), АТ 2 (б) и АТ 3 (в): 1 – SIC, 2 – ML, 3 – Non-linear Alg  $\alpha = 1$ , 4 – Non-linear Alg  $\alpha = 0.5$ , 5 – Non-linear Alg  $\alpha = 0.1$ .

**Шаг 1.** Вычисление оценки информационного символа  $\theta_1$  для пользователя 1.

Мягкая оценка символа первого пользователя вычисляется следующим образом:

$$\hat{\vartheta}_1 = (\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1' + 2\sigma^2 \mathbf{1})^{-1} \mathbf{G}_1' \mathbf{Y}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{G}_1$  – первый столбец матрицы  $\mathbf{G}$ .

Далее вычисляем жесткую оценку первого символа как ближайшую точку созвездия QAM:

$$\hat{\theta}_1 = Q(\hat{\vartheta}_1), \quad (5)$$

где функция округления  $Q(\dots)$  зависит от метода модуляции.

**Шаг  $m$ ,  $m = 2, \dots, M$ .** Вычисление оценки информационного символа для пользователя  $m$ .

Из принятого сигнала вычитаем реплику сигнала, соответствующего демодулированному на предыдущем шаге символу:

$$\mathbf{Y}_m^{(\text{кор})} = \mathbf{Y}_{m-1}^{(\text{кор})} - \mathbf{G}_{m-1} \hat{\theta}_{m-1}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{G}_{m-1}$  – столбец с номером  $m - 1$  матрицы  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Y}_{m-1}^{(\text{кор})}$  – вектор принятого сигнала, скорректированный на шаге  $m - 1$ . Следует отметить, что при демодуляции сигнала первого пользователя имеем  $\mathbf{Y}_1^{(\text{кор})} = \mathbf{Y}$ .

Вычисляем мягкую оценку символа  $m$ -го пользователя:

$$\hat{\vartheta}_m = (\mathbf{G}_m \mathbf{G}_m' + 2\sigma^2 \mathbf{1})^{-1} \mathbf{G}_m' \mathbf{Y}_m^{(\text{кор})}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{G}_m$  – это  $m$ -й столбец матрицы  $\mathbf{G}$ .



Далее вычисляем жесткую оценку  $m$ -го символа, как ближайшую точку созвездия QAM:

$$\hat{\theta}_m = \mathcal{Q}(\hat{\vartheta}_m). \quad (8)$$

Метод SIC имеет существенный недостаток, который заключается в эффекте “размножения ошибок”: ошибка демодуляции одной из компонент приводит к ошибкам при демодуляции на всех последующих итерациях. Частично этот эффект уменьшается, но полностью не устраняется сортировкой пользователей. Кроме того, в этом алгоритме не учитывается точность оценивания символов на предыдущих итерациях, используются жесткие оценки символов, что не позволяет достичь высоких характеристик помехоустойчивости демодуляции.

### 3. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД ДЕМОДУЛЯЦИИ

Устранить недостатки описанного алгоритма SIC предлагается путем его модификации – применения нелинейной функции для вычисления мягких оценок и учета дисперсии ошибок оценивания на каждом шаге.

*Шаг 1.* Демодуляция сигнала 1-го пользователя.

При демодуляции сигнала 1-го пользователя рассматриваем сумму сигналов остальных пользователей как случайную помеху, которую можно аппроксимировать гауссовской случайной величиной. В этом случае уравнение наблюдения (2) можно записать в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{G}_1\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\xi}_1, \quad (9)$$

где  $\mathbf{G}_1$  – это первый столбец матрицы  $\mathbf{G}$ ,  $\boldsymbol{\xi}_1$  – суммарный вектор помех от сигналов других пользователей и АБГШ размерности  $N \times 1$ , т.е.

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{G}_2\boldsymbol{\theta}_2 + \mathbf{G}_3\boldsymbol{\theta}_3 + \dots + \mathbf{G}_M\boldsymbol{\theta}_M + \boldsymbol{\eta},$$

где  $\mathbf{G}_i$  – это  $i$ -й столбец матрицы  $\mathbf{G}$ .

Корреляционная матрица вектора  $\boldsymbol{\xi}_1$  (размером  $N \times N$ ) равна

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{G}_{-1} \mathbf{G}_{-1}' + 2\sigma^2 \mathbf{1}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{G}_{-1}$  – это матрица  $\mathbf{G}$  после вычеркивания первого столбца.

Вычисляем оценку информационного символа первого пользователя по методу МСКО:

$$\hat{\lambda}_1 = \left( \mathbf{G}_1' (\mathbf{U}^{(1)})^{-1} \mathbf{G}_1 + 1 \right)^{-1} \mathbf{G}_1' (\mathbf{U}^{(1)})^{-1} \mathbf{Y}. \quad (11)$$

Дисперсия ошибки оценивания составит

$$\omega_1 = \left( \mathbf{G}_1' (\mathbf{U}^{(1)})^{-1} \mathbf{G}_1 + 1 \right)^{-1}. \quad (12)$$

Преобразуем оценку (11) с использованием следующей нелинейной функции  $f(\cdot)$  [16]:

$$\hat{\theta}_1 = f(\hat{\lambda}_1) = \frac{\sum_{k=1}^K \theta(k) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} |\hat{\lambda}_1 - \theta(k)|^2\right\}}{\sum_{k=1}^K \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} |\hat{\lambda}_1 - \theta(k)|^2\right\}}, \quad (13)$$

где  $K$  – порядок модуляции переданных символов, множество значений которых  $\{\theta(1), \theta(3), \dots, \theta(k), \dots, \theta(K)\}$ .

В случае четырехпозиционной фазовой модуляции (Quadrature Phase Shift Keying, QPSK),  $K = 4$ ,  $\theta(k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $k = 1; 2; 3; 4$ , выражение (13) имеет следующий вид [16]:

$$\hat{\theta}_1 = f(\hat{\lambda}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_1)}{\sqrt{2}\sigma^2}\right) + j \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\operatorname{Im}(\hat{\lambda}_1)}{\sqrt{2}\sigma^2}\right). \quad (14)$$

В формуле (14) вместо дисперсии АБГШ  $\sigma^2$  будем использовать дисперсию ошибки оценивания (12) и параметр  $\alpha$  (для различных значений которого будут исследованы характеристики предлагаемого алгоритма) [17]:

$$\hat{\theta}_1 = f(\hat{\lambda}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_1)}{\sqrt{2}\alpha\omega_1}\right) + j \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th}\left(\frac{\operatorname{Im}(\hat{\lambda}_1)}{\sqrt{2}\alpha\omega_1}\right). \quad (15)$$

Дисперсия ошибки оценивания  $\hat{\theta}_1$  [16–18]:

$$\gamma_1 = 1 - |\hat{\theta}_1|^2. \quad (16)$$

*Шаг 2.* Демодуляция сигнала 2-го пользователя.

При демодуляции сигнала 2-го пользователя из принятого сигнала вычитаем реплику сигнала 1-го пользователя:

$$\mathbf{Y}_2^{(\text{кор})} = \mathbf{Y} - \mathbf{G}_1 \hat{\theta}_1. \quad (17)$$

Уравнение наблюдения принимает вид

$$\mathbf{Y}_2^{(\text{кор})} = \mathbf{G}_2 \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\xi}_2, \quad (18)$$

где  $\boldsymbol{\xi}_2$  – вектор помех от недемультированных сигналов других пользователей, АБГШ, а также учитывающий ошибку оценивания символа 1-го пользователя, т.е.

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{G}_3 \boldsymbol{\theta}_3 + \mathbf{G}_4 \boldsymbol{\theta}_4 + \dots + \mathbf{G}_M \boldsymbol{\theta}_M + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}_1 (\boldsymbol{\theta}_1 - \hat{\theta}_1). \quad (19)$$

Корреляционная матрица вектора  $\boldsymbol{\xi}_1$ , размер которой  $N \times N$ , имеет вид

$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{G}_{-1[...2]} \mathbf{G}_{-1[...2]}' + 2\sigma^2 \mathbf{1} + \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1' \gamma_1, \quad (20)$$

где  $\mathbf{G}_{-[1...2]}$  – это матрица  $\mathbf{G}$  после вычеркивания 1-го и 2-го столбцов.

Вычисляем оценку информационного символа 2-го пользователя по методу МСКО:

$$\hat{\lambda}_2 = \left( \mathbf{G}'_2 (\mathbf{U}^{(2)})^{-1} \mathbf{G}_2 + 1 \right)^{-1} \mathbf{G}'_2 (\mathbf{U}^{(2)})^{-1} \mathbf{Y}_2^{(\text{коп})}. \quad (21)$$

Дисперсия ошибки оценивания имеет вид

$$\omega_2 = \left( \mathbf{G}'_2 (\mathbf{U}^{(2)})^{-1} \mathbf{G}_2 + 1 \right)^{-1}. \quad (22)$$

Преобразуем оценку (31) с использованием нелинейной функции  $f(\cdot)$  для случая QPSK:

$$\hat{\theta}_2 = f(\hat{\lambda}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \left( \frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_2)}{\sqrt{2\alpha\omega_2}} \right) + j \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \left( \frac{\operatorname{Im}(\hat{\lambda}_2)}{\sqrt{2\alpha\omega_2}} \right). \quad (23)$$

Дисперсия ошибки оценивания символа 2-го пользователя составляет

$$\gamma_2 = 1 - |\hat{\theta}_2|^2. \quad (24)$$

Вычисляем жесткую оценку символа (8), как ближайшую точку созвездия QPSK:

$$\tilde{\theta}_2 = Q(\hat{\theta}_2). \quad (25)$$

Далее обобщим операции по демодуляции символа для  $m$ -го пользователя.

*Шаг  $m$ .* Вычисление оценки информационного символа для пользователя  $m$ .

При демодуляции сигнала  $m$ -го пользователя из принятого сигнала вычитаем реплику сигнала, соответствующего демодулированному на предыдущем шаге символу:

$$\mathbf{Y}_m^{(\text{коп})} = \mathbf{Y}_{m-1}^{(\text{коп})} - \mathbf{G}_{m-1} \hat{\theta}_{m-1}. \quad (26)$$

Следует отметить, что при демодуляции сигнала первого пользователя имеем  $\mathbf{Y}_1^{(\text{коп})} = \mathbf{Y}$ .

Уравнение наблюдения с учетом скомпенсированной составляющей можно записать в виде

$$\mathbf{Y}_m^{(\text{коп})} = \mathbf{G}_m \theta_m + \xi_m, \quad (27)$$

где  $\mathbf{G}_m$  –  $m$ -й столбец матрицы  $\mathbf{G}$ ,  $\xi_m$  – вектор помех от немодулированных сигналов других пользователей, АБГШ, а также учитывающий ошибки оценивания символов на предыдущих шагах, т.е.

$$\xi_m = \mathbf{G}_{m+1} \theta_{m+1} + \mathbf{G}_{m+2} \theta_{m+2} + \dots + \mathbf{G}_M \theta_M + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}_1 (\theta_1 - \hat{\theta}_1) + \mathbf{G}_2 (\theta_2 - \hat{\theta}_2) + \dots + \mathbf{G}_{m-1} (\theta_{m-1} - \hat{\theta}_{m-1}). \quad (28)$$

Корреляционная матрица вектора  $\xi_m$  размером  $N \times N$  имеет вид

$$\mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{G}_{-[1...m]} \mathbf{G}'_{-[1...m]} + 2\sigma^2 \mathbf{1} + \mathbf{G}_{m-1} \mathbf{G}'_{m-1} \gamma_{m-1} + \dots + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}'_2 \gamma_2 + \mathbf{G}_1 \mathbf{G}'_1 \gamma_1, \quad (29)$$

где  $\mathbf{G}_{-[1...m]}$  – это матрица  $\mathbf{G}$  после вычеркивания столбцов  $1 \dots m$ .

Вычисляем оценку информационного символа  $m$ -го пользователя по методу МСКО:

$$\hat{\lambda}_m = \left( \mathbf{G}'_m (\mathbf{U}^{(m)})^{-1} \mathbf{G}_m + 1 \right)^{-1} \mathbf{G}'_m (\mathbf{U}^{(m)})^{-1} \mathbf{Y}_m^{(\text{коп})}. \quad (30)$$

Дисперсия ошибки оценивания имеет вид

$$\omega_m = \left( \mathbf{G}'_m (\mathbf{U}^{(m)})^{-1} \mathbf{G}_m + 1 \right)^{-1}. \quad (31)$$

Преобразуем оценку (31) с использованием нелинейной функции  $f(\cdot)$  для случая QPSK:

$$\hat{\theta}_m = f(\hat{\lambda}_m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \left( \frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_m)}{\sqrt{2\alpha\omega_m}} \right) + j \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \left( \frac{\operatorname{Im}(\hat{\lambda}_m)}{\sqrt{2\alpha\omega_m}} \right). \quad (32)$$

Дисперсия ошибки оценивания символа  $m$ -го пользователя (32) составляет

$$\gamma_m = 1 - |\hat{\theta}_m|^2. \quad (33)$$

После получения мягких оценок символов  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_M$  всех пользователей вычисляем их жесткие оценки (8), как ближайшие точки созвездия QPSK:

$$\tilde{\theta}_m = Q(\hat{\theta}_m). \quad (34)$$

Выражения (10)–(34) описывают предлагаемый алгоритм демодуляции.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для анализа эффективности предлагаемого алгоритма (10)–(34) было проведено статистическое моделирование системы PD-NOMA с тремя абонентскими терминалами, передающими информацию на базовую станцию, оснащенную двумя приемными антеннами. Моделирование проводилось для сигналов с модуляцией QPSK.

В результате моделирования были получены зависимости вероятности ошибки на бит (Bit Error Rate, BER) от отношения сигнал/шум на символ (Signal-to-Noise Ratio, SNR) для трех алгоритмов обработки в приемнике – алгоритма максимального правдоподобия (ML), алгоритма последовательного исключения помех (SIC), предлагаемого нелинейного алгоритма (Non-linear Alg). Характеристики предложенного алгоритма исследованы

для соотношения мощностей  $p_1/p_2 = 5$ ,  $p_2/p_3 = 5$ , где  $p_1$  – мощность передачи первого АТ,  $p_2$  – мощность передачи второго АТ,  $p_3$  – мощность передачи третьего АТ; а также для значения параметра  $\alpha$ , равного 1, 0.5, 0.1.

Из рис. 2а–2в видно, что предлагаемый алгоритм (10)–(34) позволяет получить выигрыш в помехоустойчивости по сравнению с традиционным алгоритмом SIC:

– Для АТ 1, работающего с наибольшей мощностью  $p_1 = 5p_2 = 25p_3$ , при  $\text{BER} = 10^{-2}$  выигрыш по сравнению с алгоритмом SIC составляет 3.5 дБ, характеристики предлагаемого алгоритма совпадают с характеристиками алгоритма ML для любого значения  $\alpha$ ;

– Для АТ 2, работающего с мощностью  $p_2 = p_1/5 = 5p_3$ , при  $\text{BER} = 10^{-2}$  выигрыш по сравнению с алгоритмом SIC составляет 3.5 дБ для  $\alpha = 0.5$  и  $\alpha = 0.1$ ;

– Для АТ 3, работающего с наименьшей мощностью  $p_3 = p_1/25 = p_2/5$ , при  $\text{BER} = 10^{-2}$  отличие от характеристик алгоритма ML составляет 1 дБ для  $\alpha = 0.5$  и  $\alpha = 0.1$ , а алгоритм SIC не позволяет демодулировать символы с приемлемым значением  $\text{BER} = 10^{-2}$ .

Вычислительная сложность проанализированных алгоритмов демодуляции зависит от числа пользователей  $M$  [16, 19–21], как показано ниже:

Алгоритм	Вычислительная сложность
ML	$O(K^M)$
Традиционный алгоритм SIC	$O(M^3)$
Предложенный алгоритм	$O(M^3)$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенный нелинейный алгоритм демодуляции для системы PD-NOMA имеет существенный выигрыш в помехоустойчивости по сравнению с известным алгоритмом SIC при сравнимой вычислительной сложности. В некоторых случаях его характеристики помехоустойчивости практически совпадают с характеристиками алгоритма ML при меньшей вычислительной сложности.

Поясним, что отмеченный выигрыш в помехоустойчивости достигается за счет дополнительного учета неточности оценок символов на промежуточных итерациях и введения мягкой нелинейной функции на каждой итерации. Такой вид нели-

нейной функции позволяет существенно ограничить нежелательное явление “размножения ошибок”, свойственное известному алгоритму SIC [22, 23].

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yuan Y., Yuan Z., Tian L. // IEEE Commun. Magaz. 2020. V. 58. № 7. P. 90.
2. Liu Y., Qin Z., Ding Z. Non-Orthogonal Multiple Access for Massive Connectivity. N.Y.: Springer, 2020.
3. Luo F.-L., Zhang J. Signal Processing for 5G. Algorithms and Implementations. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2016.
4. Wai W.K., Tsui C.Y., Cheng R.S. // Proc. IEEE Wireless Communication and Networking Conf. (WCNC). 2000. N.Y.: IEEE, 2000. V. 1. P. 310. [https://www.researchgate.net/publication/285507183\\_A\\_low\\_complexity\\_V-BLASTSTBC\\_detection\\_algorithm\\_for\\_MIMO\\_system](https://www.researchgate.net/publication/285507183_A_low_complexity_V-BLASTSTBC_detection_algorithm_for_MIMO_system).
5. Охрименко А.А., Крюков Я.В., Покаместов Д.А. // Тр. XV Междунар. научн.-практич. конф. “Электронные средства и системы управления”. Томск. 20–22 нояб. 2019. Томск.: ТГУ, 2019. С. 28.
6. Al-Imari M., Xiao P., Imran M.A., Tafazolli R. // Proc. 11th Int. Symp. on Wireless Commun. Systems (ISWCS). Barcelona. 26–29 Aug. 2014. N.Y.: IEEE, 2014. P. 781.
7. Yan C., Harada A., Benjebbour A. et al. // Proc. 2015 IEEE 81st Vehicular Technology Conf. (VTC Spring). Glasgow. 11–14 May. N.Y.: IEEE, 2015. Paper № 7146043. <https://doi.org/10.1109/VTCSpring.2015.7146043>
8. Hussain M., Rasheed H. // Hindawi Wireless Commun. and Mobile Computing. 2020. V. 2020. Article ID 8845371. <https://doi.org/10.1155/2020/8845371>
9. Saito K., Benjebbour A., Kishiyama Y. et al. // IEEE Int. Conf. on Communication Workshop (ICCW). London. 8–12 Jun. 2015. N.Y.: IEEE, 2015. P. 1161.
10. Lin B., Tang X., Ghassemlooy Z. et al. // 2017 First South American Colloquium on Visible Light Communications (SACVLC). Santiago. 13 Nov. N.Y.: IEEE, 2017. Paper № 8267609. <https://doi.org/10.1109/SACVLC.2017.8267609>
11. Mohan A. // M.Tech Seminar Report on Non Orthogonal Multiple Access. Thrissur: Government Engineering College, 2016. Reg. № TCR15ECCP01. 27 pages. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.35859.89126>
12. Куликов Г.В., Тамбовский С.С., Савватеев Ю.И., Гребенко Ю.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 2. С. 152.
13. Liu Y., Qin Z., Elkaslan M. et al. // Proc. IEEE. 2017. N.Y.: IEEE, 2017. V. 105, № 12. P. 2347.
14. Aldabasa M., Toka M., Gökçeli S. et al. // Hindawi Wireless Commun. and Mobile Computing. 2018.

- V. 2018. Article ID 9713450.  
<https://doi.org/10.1155/2018/9713450>
15. Higuchi K., Benjebbour A. // IEICE Trans. on Commun. Japan. 2015. V. E98-B. № 3. P. 403.
  16. Крейнделин В.Б. Новые методы обработки сигналов в системах беспроводной связи. СПб.: Линк, 2009.
  17. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Резнёв А.А. // РЭ. 2021. Т. 66. № 12. С. 1189.
  18. Ding Z., Liu Y., Choi J. et al. // IEEE Commun. Magaz. 2017. N.Y.: IEEE, 2017. V. 55. № 2. P. 185.
  19. Vaezi M., Ding Z., Poor H.V. Multiple Access Techniques for 5G Wireless Networks and Beyond. N.Y.: Springer, 2019.
  20. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Григорьев В.А. и др. // РЭ. 2020. Т. 65. № 3. С. 257.
  21. Yuanwei Liu, Zhang S., Mu X. et al. // 2022. <https://arxiv.org/pdf/2108.04561.pdf>.
  22. Moltafet M., Joda R., Mokari N. et al. // IEEE Trans. 2018. V. COM-66. № 12. P. 6463.
  23. Vaezi M., Schober R., Ding Z., Poor H.V. // IEEE Wireless Commun. N.Y.: IEEE, 2019. V. 26. № 5. P. 174.

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 519.725;512.62

**МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ НЕДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ  
ГОРДОНА–МИЛЛСА–ВЕЛЧА ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ  
ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ**

© 2023 г. В. Г. Стародубцев\*

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,  
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация

\*E-mail: vgstarod@mail.ru

Поступила в редакцию 16.11.2022 г.

После доработки 06.12.2022 г.

Принята к публикации 10.12.2022 г.

На основе обобщения метода формирования двоичных последовательностей разработан метод формирования недвоичных последовательностей Гордона–Миллса–Велча (ГМВП) с периодом  $N = p^{mn} - 1$ , формируемых над полем  $GF(p)$ . Получено выражение для вычисления вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  базисной  $M$ -последовательности (МП) для суммируемых последовательностей при синтезе ГМВП. Представлена методика формирования недвоичных ГМВП для произвольных МП. Показано, что значения компонент вектора сдвигов  $S_{m,n,r}$  базисной МП зависят от распределение цифр на позициях  $p$ -ичного представления соответствующих индексов децимации.

DOI: 10.31857/S0033849423060141, EDN: XNIMFO

**ВВЕДЕНИЕ**

Современные системы передачи цифровой информации (СПЦИ) по радиоканалам характеризуются широким использованием сигналов с расширенным спектром (СРС), формируемых с помощью псевдослучайных последовательностей (ПСП) [1–4]. Наряду с двоичными последовательностями в современных и перспективных СПЦИ могут применяться недвоичные ПСП, обладающие заданными корреляционными и структурными свойствами [3, 5–13]. Повышение помехозащитности СПЦИ достигается применением ПСП с малым уровнем пиков корреляционной функции. К классу минимаксных последовательностей с двухуровневой периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) относятся как двоичные, так и недвоичные  $M$ -последовательности (МП) и последовательности Гордона–Миллса–Велча (ГМВП) [14–16]. При этом ГМВП имеют более высокую структурную скрытность, характеризуемую эквивалентной линейной сложностью (ЭЛС), что определяет приоритетность их применения в СПЦИ, к которым предъявляются повышенные требования по конфиденциальности [17, 18].

Недвоичные ГМВП характеризуются более высоким по сравнению с двоичными последовательностями выигрышем в структурной скрытности, который определяется отношением ЭЛС ГМВП и МП  $M = I_{s\text{ГМВП}}/I_{s\text{МП}}$  при сопоставимых

периодах. Например, для пятеричных ГМВП с периодом  $N = 15624$  выигрыш составляет  $M = 50$ , а для двоичных ГМВП с периодом  $N = 16383$  выигрыш составляет  $M = 32$ . С увеличением периода и значности  $p$  выигрыш возрастает. Так, для семеричных ГМВП с периодом  $N = 117648$  выигрыш составляет  $M = 196$ , а для двоичных ГМВП с периодом  $N = 262143$  выигрыш  $M = 128$ .

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Формирование недвоичных ГМВП осуществляется над конечными полями  $GF(p)$ . Все вычисления производятся в полях

$$GF[(p^m)^n] = GF(p^S), \quad S = mn.$$

Период последовательностей является составным числом, т.е.  $N = p^{mn} - 1$ . Символы  $d_i$  ГМВП определяются выражением [3, 15]

$$d_i = \text{tr}_m[(\text{tr}_{mn,m}(\alpha^i))^r], \quad 1 \leq r < p^m - 1, \quad (1)$$

$$(r, p^m - 1) = 1,$$

где  $\text{tr}_{a,b}(\cdot)$  — след элемента, принадлежащего полю  $GF(p^a)$ , в поле  $GF(p^b)$ ;  $\alpha \in GF((p^m)^n)$  — примитивный элемент;  $r$  — натуральное число, взаимно простое с порядком мультипликативной группы подполя  $GF(p^m)$ , равным  $p^m - 1$ .

Формирование недвоичных ГМВП в соответствии с (1) характеризуется достаточной вычис-

лительной сложностью, определяемой необходимостью построения расширенного поля  $GF(p^m)^n$  и двухэтапного вычисления функций следа  $\text{tr}_{a,b}(\cdot)$ . Для построения поля  $GF(p^m)^n$  требуется не менее  $2(mn - 2)p^{mn}$  операций модульного сложения и умножения.

Основную вычислительную нагрузку при прямом формировании ГМВП составляют вычисления функций следа. Например, при формировании троичной ГМВП с периодом  $N = 3^6 - 1 = 728$  и параметрами  $m = 3, n = 2, r = 5$  для определения символа  $d_1$  выполняются следующие операции в поле  $GF(3^6)$ , построенном по полиному  $f(x) = x^6 + x + 2$ :

– вычисление функции следа из поля  $GF(3^6)$  в подполе  $GF(3^3)$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{6,3}\alpha &= \alpha + \alpha^{27} = \\ &= 010000 + 222120 = 202120 = \alpha^{280}; \end{aligned}$$

– возведение элемента  $\alpha^{280}$ , принадлежащего подполю  $GF(3^3)$ , в степень  $r = 5$

$$(\alpha^{280})^5 = \alpha^{280 \times 5 \bmod 728} = \alpha^{672};$$

– вычисление функции следа из подполя  $GF(3^3)$  в простом поле  $GF(3)$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{3,1}\alpha^{672} &= \alpha^{672} + \alpha^{672 \times 3 \bmod 728} + \alpha^{672 \times 9 \bmod 728} = \\ &= \alpha^{672} + \alpha^{560} + \alpha^{224} = 010211 + 112001 + \\ &\quad + 111121 = 200000 = 2. \end{aligned}$$

При вычислениях необходимо выполнить несколько переходов от степенной формы записи элементов поля к векторной и обратно. Всего для нахождения всех символов ГМВП необходимо выполнить  $N = p^{mn} - 1$  таких вычислительных процедур.

Для полей  $GF(p^m)^n$  при  $n = 2$  известны алгоритмы формирования троичных, пятеричных и семеричных ГМВП [11, 14, 16], основанные на представлении базисной МП в виде матрицы размерности  $[(p^m - 1) \times (p^m + 1)]$ . Вычислительная сложность определяется необходимостью определения правил формирования циклических сдвигов столбцов матрицы базисной МП, нахождения проверочного полинома ГМВП по алгоритму Берлекемпа–Мессис, позволяющего вычислить вектор индексов децимации, и решения системы уравнений для вычисления вектора сдвигов базисной МП при формировании ГМВП.

Цель данной статьи – разработка метода формирования недвоичных ГМВП, основанного на аналитическом определении вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  символов базисной МП и упрощенном вычислении вектора ее сдвигов для суммируемых последовательностей.

Метод формирования недвоичных ГМВП является обобщением метода для двоичных последовательностей [18] и включает алгоритм формирования вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  символов базисной недвоичной МП, методику определения полных наборов векторов индексов децимации  $A_{m,n,r}$  для произвольных МП и алгоритм определения вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$  базисной МП при формировании суммируемых последовательностей.

Разработанный метод характеризуется низким уровнем вычислительной сложности, обусловленным отсутствием необходимости построения конечных полей  $GF(p^m)^n$  и двухэтапного вычисления функций следа. Формируется только одна базисная МП в каноническом виде по заданному примитивному полиному и известному начальному состоянию. При реализации алгоритма формирования вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  основные преобразования выполняются с множеством целых чисел, что характеризуется низкой вычислительной сложностью.

## 2. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРА ИНДЕКСОВ ДЕЦИМАЦИИ $A_{m,n,r}$

Основной составляющей метода является алгоритм формирования вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$ . Число компонент вектора  $A_{m,n,r} = (I_{d1}, I_{d2}, \dots, I_{dM})$  равно отношению ЭЛС ГМВП и МП  $M = l_{s\text{ГМВП}}/l_{s\text{МП}}$ . Тогда ЭЛС формируемой ГМВП определяется выражением

$$l_{s\text{ГМВП}} = mnM. \tag{2}$$

Формирование ГМВП может быть реализовано аппаратным и программным способом. При аппаратной реализации формирование ГМВП выполняется на основе совокупности из  $M$  регистров сдвига с линейными обратными связями, определяемыми коэффициентами неприводимых полиномов  $h_{ci}(x)$ , являющихся множителями проверочного полинома ГМВП  $h_{\text{ГМВП}}(x)$ .

При программной реализации алгоритма структура полиномов  $h_{ci}(x)$  не учитывается. Используется понятие вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$ , компоненты которого  $I_{di}$  соответствуют индексам полиномов  $h_{ci}(x)$ .

Алгоритм формирования вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  символов базисной недвоичной МП основан на модифицированном алгоритме формирования аналогичного вектора для двоичных последовательностей, разработанным в [19]. Первое отличие, определяющее научную новизну, заключается в модернизации выражения для вспомогательного параметра  $k_i$

$$k_i = i(p^m - 1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, T - 1, \tag{3}$$

**Таблица 1.** Исходные данные для формирования МП в каноническом виде

$p$	$S = mn$	Полином $h_1(x)$	Символы $d_0 d_1 \dots d_{S-1}$
3	$2 = 1 \times 2$	$x^2 + x + 2$	20
	$3 = 1 \times 3$	$x^3 + 2x + 1$	002
	$4 = 2 \times 2$	$x^4 + x + 2$	1000
	$5 = 1 \times 5$	$x^5 + 2x + 1$	20001
	$6 = 3 \times 2$	$x^6 + x + 2$	000001
	$6 = 2 \times 3$	$x^6 + x + 2$	000001
	$7 = 1 \times 7$	$x^7 + x^2 + 2x + 1$	1000010
	$8 = 2 \times 4$	$x^8 + 2x^3 + 2$	20000200
	$8 = 4 \times 2$	$x^8 + 2x^3 + 2$	20000200
	$9 = 3 \times 3$	$x^9 + x^4 + x^2 + 1$	000001020
5	$2 = 1 \times 2$	$x^2 + x + 2$	24
	$3 = 1 \times 3$	$x^3 + 3x + 2$	304
	$4 = 1 \times 4$	$x^4 + x^2 + 2x + 2$	4034
	$4 = 2 \times 2$	$x^4 + x^2 + 2x + 2$	4034
	$5 = 1 \times 5$	$x^5 + 4x + 2$	00004
	$6 = 1 \times 6$	$x^6 + x^2 + 2x + 2$	100010
	$6 = 2 \times 3$	$x^6 + x^2 + 2x + 2$	100010
	$6 = 3 \times 2$	$x^6 + x^2 + 2x + 2$	100010
7	$2 = 1 \times 2$	$x^2 + x + 3$	26
	$3 = 1 \times 3$	$x^3 + 3x + 2$	301
	$4 = 1 \times 4$	$x^4 + x^2 + 3x + 5$	4055
	$4 = 2 \times 2$	$x^4 + x^2 + 3x + 5$	4055
11	$2 = 1 \times 2$	$x^2 + x + 7$	2,10
	$3 = 1 \times 3$	$x^3 + x^2 + 5$	3,10,1
	$4 = 1 \times 4$	$x^4 + x + 2$	4008
	$4 = 2 \times 2$	$x^4 + x + 2$	4008

где параметр  $T$  равен числу компонент  $I_{bi}$  вектора альтернатив  $\mathbf{V}_{m,n,r}$  в котором содержатся все индексы децимации  $I_{di}$ , являющиеся компонентами вектора  $\mathbf{A}_{m,n,r}$ . Для конечного поля  $GF[(p^m)^n]$  параметр  $T$  определяется по выражению

$$T = (p^{mn} - 1) / (p^m - 1). \tag{4}$$

Вторым отличием является порядок вычисления функции  $g(r)$ . В двоичном случае ее значение

определяется числом единиц в двоичном представлении параметра  $r$ . При  $p > 2$  она равна арифметической сумме значений разрядов  $p$ -го представления данного параметра.

Компоненты  $I_{bi}$  вектора альтернатив  $\mathbf{V}_{m,n,r}$  вычисляются в соответствии с заданным значением параметров  $r$  и  $k_i$

$$I_{bi} = r + k_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, T - 1. \tag{5}$$

Отметим, что при  $i > T - 1$  наступает циклическое повторение значений компонент  $I_{bi}$  по  $\text{mod}(p^{mn} - 1)$ .

Для перехода от вектора альтернатив  $\mathbf{V}_{m,n,r}$  к вектору индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  необходимо представить значения компонент  $I_{bi}$  в  $p$ -й системе счисления, выбрать те из них, которые удовлетворяют значению функции  $g(r)$ , и исключить компоненты, которые относятся к одинаковым циклотомическим классам.

При формировании ГМВП базисная МП представляется в каноническом виде, ее символы определяются выражением (1) при  $r = 1$

$$d_i = \text{tr}_{m,n,1}(\alpha^i), \quad i = 0, 1, \dots, p^{mn} - 2, \tag{6}$$

требующим построения расширенного поля  $GF[(p^m)^n]$ .

Формирование МП вместо (6) может быть реализовано без построения конечного поля на основании полинома

$$h_{МП}(x) = h_1(x) = x^S + h_{S-1}x^{S-1} + \dots + h_1x + h_0$$

в соответствии с выражением

$$d_{S+i} = -h_0d_{0+i} - h_1d_{1+i} - \dots - h_{S-1}d_{S-1+i}, \quad i = 0, \dots, N - S - 1, \tag{7}$$

где  $d_j$  – символы начального состояния МП ( $0 \leq j < S$ ), а операции выполняются по  $\text{mod } p$ .

Для получения базисной МП в каноническом виде для различных сочетаний параметров  $p, m, n$  используются примитивные полиномы  $h_1(x)$  степени  $S = mn$  и начальные символы  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots, S - 1$ ), приведенные в табл. 1. При других начальных символах формируются МП не в каноническом виде.

В качестве примера определим вектор индексов децимации  $\mathbf{A}_{3,2,17}$  в расширенном поле  $GF[(p^m)^n] = GF[(3^3)^2]$  с примитивным полиномом  $h_1(x) = x^6 + x + 2$  для значения параметра  $r = 17_{10} = 122_3$  и функции  $g(r) = 1+2+2 = 5$ .

Компоненты  $I_{bi}$  вектора альтернатив  $\mathbf{V}_{3,2,17}$ , число которых равно  $T = 28$ , вычисляются в соответствии с (3) и (5)

$$\mathbf{V}_{3,2,17} = 17, 43, 69, 95, 121, 147, 173, 199, 22, 251, 277, 303, 329, 355, 381, 407, 433, 459, 485, 511, 537, 563, 589, 615, 641, 667, 693, 719.$$

После проверки функции  $g(r) = 5$  и приведения компонент  $I_{bi}$  к минимальным значениям в циклотомических классах определяется вектор индексов децимации

$$A_{3,2,17} = 17, 43, 23, 95, 121, 49, 101, 103, 25. \quad (8)$$

Линейная сложность ГМВП с периодом  $N = 728$ , сформированной путем сложения ПСП с данными индексами децимации базисной МП, в соответствии с (2) равна  $l_s = 54$ , т.е. в 9 раз превышает ЭЛС МП.

Методика определения полных наборов векторов индексов децимации  $A_{m,n,r}$  для произвольных МП основана на свойстве повторяемости соотношений между корнями проверочных полиномов базисной и произвольной МП и соответствует аналогичной методике для двоичного случая [18]. Символы произвольной МП с аналогичным периодом образуются путем децимации символов базисной МП по некоторому индексу  $I_{МП}$ . Компоненты вектора  $A_{m,n,r}$  преобразуются в компоненты вектора  $A_{m,n,r}^{МП}$  в соответствии с выражением

$$I_{di}^{МП} = I_{di} \times I_{МП} \pmod{(p^{mn} - 1)}. \quad (9)$$

Полученные компоненты приводятся к минимальным значениям в соответствующих циклотомических классах.

В качестве примера рассмотрим формирование ГМВП в поле  $GF[(3^3)^2]$ , если произвольная МП образуется из базисной по индексу  $I_{МП} = 97$ . Преобразуя вектор индексов децимации вида (8) в соответствии с (9), получим новый вектор

$$A_{3,2,17}^{97} = 115, 59, 47, 215, 73, 203, 37, 125, 241, \quad (10)$$

на основании которого может быть синтезирована новая ГМВП.

Число различных ГМВП, которые могут быть сформированы для заданных значений параметров  $p, m, n$  и  $r$ , равно числу МП с периодом  $N = p^{mn} - 1$ .

### 3. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА СДВИГОВ $C_{m,n,r}$

Алгоритм определения вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$  базисной МП для суммируемых последовательностей при формировании недвоичных ГМВП является обобщением аналогичного алгоритма для двоичного случая. При  $p = 2$  децимация всех последовательностей производится с символа  $d_0$  базисной МП. Особенностью формирования недвоичных ГМВП является то, что децимация суммируемых последовательностей может начинаться с некоторого сдвига базисной МП. Анализ формирования ГМВП при  $p = 3, 5, 7$  [11, 14, 16]

показал, что возможные сдвиги определяются выражением

$$\lambda_i = kN/(p - 1), \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad (11)$$

$$k = 0, 1, \dots, p - 2.$$

Таким образом, основная проблема при формировании недвоичных ГМВП с известным вектором индексов децимации  $A_{m,n,r}$  мощностью  $M$  заключается в нахождении начальных сдвигов  $\lambda_i$  базисной МП, образующих вектор сдвигов  $C_{m,n,r}$  аналогичной мощности, для каждого индекса децимации  $I_{di}$ .

В общем случае для определения вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$  требуется выполнить число операций вычисления ПАКФ формируемых последовательностей

$$L_1 = (p - 1)^M.$$

Для уменьшения числа операций был проведен анализ распределения сдвигов  $\lambda_i$  с учетом  $p$ -го представления индексов децимации  $I_{di}$ . Анализ показал, что последовательности, формируемые по индексам децимации, имеющим одинаковое распределение ненулевых цифр на позициях  $p$ -го представления, обладают одинаковыми начальными сдвигами. Например, при  $p = 5$  и  $g(r) = 3$  последовательности с индексами децимации  $I_{d1} = 7_{10} = 12_5, I_{d2} = 11_{10} = 21_5, I_{d3} = 27_{10} = 102_5, I_{d4} = 51_{10} = 201_5, I_{d5} = 127_{10} = 1002_5$  имеют одинаковый начальный сдвиг  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 3N/4$ .

Данное свойство позволяет уменьшить число операций при определении вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$ . Объединим в группы индексы децимации  $I_{di}$  с одинаковым в каждой группе распределением цифр на позициях их  $p$ -го представления. Можно показать, что число  $M_1$  групп для различных значений функции  $g(r)$  ограничено сверху произведением  $mn(p - 1)/2$  и всегда меньше общего числа индексов децимации. При этом число операций вычисления ПАКФ равно

$$L_2 = (p - 1)^{M_1}. \quad (12)$$

Выигрыш в вычислительной сложности составляет

$$W = L_1/L_2 = (p - 1)^{M/M_1}. \quad (13)$$

Алгоритм определения вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$  при децимации базисной МП записывается в следующем виде.

*Шаг 1.* Перевод компонент  $I_{di}$  вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  в  $p$ -ю систему счисления.

*Шаг 2.* Объединение индексов децимации в группы с одинаковым распределением цифр на позициях их  $p$ -го представления.

*Шаг 3.* Вычисление ПАКФ формируемой последовательности для различных значений сдвига в каждой группе.



**Таблица 2.** Формирование ГМВП  $F_{ГМВП}$  для векторов  $A_{3,2,17}$  и  $C_{3,2,17}$

ПСП	Сдвиг	Символы базисной МП и их значения													
		$d_0$	$d_{17}$	$d_{34}$	$d_{51}$	$d_{68}$	$d_{85}$	$d_{102}$	$d_{119}$	$d_{136}$	$d_{153}$	$d_{170}$	$d_{187}$	$d_{204}$	$d_{221}$
$F_{17}$	0	$d_0$	$d_{17}$	$d_{34}$	$d_{51}$	$d_{68}$	$d_{85}$	$d_{102}$	$d_{119}$	$d_{136}$	$d_{153}$	$d_{170}$	$d_{187}$	$d_{204}$	$d_{221}$
		0	1	1	1	2	0	1	1	2	1	1	0	2	1
$F_{43}$	364	$d_{364}$	$d_{407}$	$d_{450}$	$d_{493}$	$d_{536}$	$d_{579}$	$d_{622}$	$d_{665}$	$d_{708}$	$d_{23}$	$d_{66}$	$d_{109}$	$d_{152}$	$d_{195}$
		0	1	0	1	1	2	0	2	1	1	0	2	1	2
$F_{23}$	0	$d_0$	$d_{23}$	$d_{46}$	$d_{69}$	$d_{92}$	$d_{115}$	$d_{138}$	$d_{161}$	$d_{184}$	$d_{207}$	$d_{230}$	$d_{253}$	$d_{276}$	$d_{299}$
		0	1	0	1	2	2	0	2	2	1	0	2	2	2
$F_{95}$	364	$d_{364}$	$d_{459}$	$d_{554}$	$d_{649}$	$d_{16}$	$d_{111}$	$d_{206}$	$d_{301}$	$d_{396}$	$d_{491}$	$d_{586}$	$d_{681}$	$d_{48}$	$d_{143}$
		0	1	2	1	1	0	2	1	1	1	2	0	1	1
$F_{121}$	0	$d_0$	$d_{121}$	$d_{242}$	$d_{363}$	$d_{484}$	$d_{605}$	$d_{726}$	$d_{119}$	$d_{240}$	$d_{361}$	$d_{482}$	$d_{603}$	$d_{724}$	$d_{117}$
		0	2	1	2	1	2	1	1	0	2	2	0	1	0
$F_{49}$	364	$d_{364}$	$d_{413}$	$d_{462}$	$d_{511}$	$d_{560}$	$d_{609}$	$d_{658}$	$d_{707}$	$d_{28}$	$d_{77}$	$d_{126}$	$d_{175}$	$d_{224}$	$d_{273}$
		0	2	0	2	1	0	0	2	2	2	0	1	1	0
$F_{101}$	0	$d_0$	$d_{101}$	$d_{202}$	$d_{303}$	$d_{404}$	$d_{505}$	$d_{606}$	$d_{707}$	$d_{80}$	$d_{181}$	$d_{282}$	$d_{383}$	$d_{484}$	$d_{585}$
		0	0	2	0	1	1	2	2	0	0	1	0	1	2
$F_{103}$	364	$d_{364}$	$d_{467}$	$d_{570}$	$d_{673}$	$d_{48}$	$d_{151}$	$d_{254}$	$d_{357}$	$d_{460}$	$d_{563}$	$d_{666}$	$d_{41}$	$d_{144}$	$d_{247}$
		0	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	0
$F_{25}$	0	$d_0$	$d_{25}$	$d_{50}$	$d_{75}$	$d_{100}$	$d_{125}$	$d_{150}$	$d_{175}$	$d_{200}$	$d_{225}$	$d_{250}$	$d_{275}$	$d_{300}$	$d_{325}$
		0	1	0	1	2	2	0	1	2	1	0	1	2	0
$F_{ГМВП}$		0	2	1	2	0	2	1	1	2	2	1	2	0	2

*Шаг 4.* При получении двухуровневой ПАКФ, соответствующей ГМВП, переход к окончанию алгоритма с определением финального вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$ .

В качестве примера определим вектор сдвигов  $C_{m,n,r} = C_{3,2,17}$  для вектора индексов децимации  $A_{3,2,17}$  мощностью  $M = 9$  из (8) при формировании

ГМВП с периодом  $N = 3^6 - 1 = 728$  в расширенном поле  $GF[(3^3)^2]$  с примитивным полиномом  $h_1(x) = x^6 + x + 2$  для значения параметра  $r = 17_{10} = 122_3$ .

*Шаг 1.* Перевод компонент вектора  $A_{3,2,17}$  в троичную систему счисления:

$$A_{3,2,17} = (17, 43, 23, 95, 121, 49, 101, 103, 25)_{10} = (122, 1121, 212, 10112, 11111, 1211, 10202, 10211, 221)_3. \tag{14}$$

*Шаг 2.* Объединение индексов децимации в  $M_1 = 3$  группы:

$$G_1 = (17, 23, 101, 25)_{10} = (122, 212, 10202, 221)_3;$$

$$G_2 = (43, 95, 49, 103)_{10} = (1121, 10112, 1211, 10211)_3;$$

$$G_3 = (121)_{10} = (11111)_3.$$

*Шаг 3.* Максимальное число вычислений ПАКФ равно  $L_2 = 2^3 = 8$ . Выигрыш в вычислительной сложности по сравнению с  $L_1 = 2^9 = 512$  составляет  $W = 2^6 = 64$ . С увеличением  $p$  и  $M$  выигрыш возрастает.

Двухуровневая ПАКФ для ГМВП была получена при сдвигах  $\lambda_{G1} = 0, \lambda_{G2} = N/2 = 364, \lambda_{G3} = 0$ . Финальный вектор сдвигов  $C_{m,n,r}$  при децимации базисной МП имеет вид

$$C_{3,2,17} = 0, 364, 0, 364, 0, 364, 0, 364, 0. \tag{15}$$

*Шаг 4.* Базисная МП строилась по проверочному полиному

$$h_{МП}(x) = h_1(x) = x^6 + x + 2$$

в соответствии с выражением

$$d_{6+i} = d_{0+i} + 2d_{1+i}, \quad i = 0, \dots, 721, \tag{16}$$

где суммирование символов выполняется по mod 3 с начальными символами  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ , равными 0, 0, 0, 0, 0, 1 соответственно.

Двухуровневая ПАКФ была получена для ГМВП  $F_{ГМВП}$ , образованной путем суммирования девяти ПСП  $F_j$  (значение  $j$  соответствует индексу децимации) с символами  $d_i$  базисной МП из (16) и вектором сдвигов вида (15). В табл. 2 представлены

**Таблица 3.** Векторы индексов децимации  $A_{m,n,r}$  и сдвигов  $C_{m,n,r}$

$p$	$m$	$n$	$N$	$r_{10}$	$r_p$	$g(r)$	$M$	$A_{m,n,r}$	$C_{m,n,r}$
3	2	3	728	5	12	3	6	5, 7, 13, 29, 31, 37	0, 0, 364, 0, 364, 364
	2	4	6560	5	12	3	10	5, 7, 13, 29, 31, 37, 55, 85, 109, 271	0, 0, 3280, 0, 3280, 3280, 0, 3280, 3280, 3280
	3	3	19682	7	21	3	6	7, 11, 37, 85, 163, 271	0, 0, 9841, 9841, 0, 9841
5	2	2	624	19	34	7	10	19, 23, 43, 47, 67, 71, 91, 193, 167, 187	0, 0, 312, 468, 0, 468, 312, 156, 156, 468
	1	5	3124	3	3	3	7	3, 7, 11, 27, 31, 51, 131	0, 781, 781, 781, 0, 781, 0
	3	2	15624	9	14	5	5	9, 101, 133, 257, 381	0, 0, 7812, 0, 7812
7	1	2	48	5	5	5	3	5, 11, 17	0, 40, 8
	2	2	2400	17	23	5	6	17, 23, 65, 71, 113, 401	0, 0, 2000, 1600, 2000, 1200
11	1	2	120	3	3	3	2	3, 13	0, 48
	2	2	14640	13	12	3	3	13, 23, 133	0, 0, 1464

*Примечание.* Пример векторов индексов децимации и сдвигов в первой строке:  $A_{m,n,r} = A_{2,3,5} = 5, 7, 13, 29, 31, 37$ ;  $C_{m,n,r} = C_{2,3,5} = 0, 0, 364, 0, 364, 364$ .

сегменты данных последовательностей длиной 14 символов.

Отметим, что при формировании  $F_{ГМВП}$  все суммируемые по mod 3 последовательности являются МП, кроме ПСП  $F_{49}$ , период которой равен 104. Значения индексов  $i$  в  $d_i$  вычисляются по mod 728.

Полученный вектор сдвигов  $C_{3,2,17}$  вида (15) может быть использован при формировании ГМВП для произвольной МП, например, образуемой из базисной МП по индексу  $I_{МП} = 97$  с вектором индексов децимации  $A_{3,2,17}^{97}$  вида (10). Основное требование заключается в неизменности порядка следования компонентов векторов. Отметим, что в обоих случаях при формировании ГМВП используются только символы базисной МП вида (16).

Для некоторых значений параметров получены наборы векторов индексов децимации и векторов сдвигов базисных МП, которые представлены в табл. 3. Формирование МП проводилось в соответствии с исходными данными из табл. 1.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработан метод формирования не двоичных ГМВП, включающий алгоритм формирования вектора индексов децимации  $A_{m,n,r}$  для базисной МП, методику определения полных наборов векторов индексов децимации для произвольных МП и алгоритм определения вектора сдвигов  $C_{m,n,r}$  базисной МП при формировании суммируемых последовательностей. Отличие алгоритма формирования вектора  $A_{m,n,r}$  от двоичного случая заключается в выражении для вспомогательного параметра  $k_i$  при определении вектора

альтернатив  $B_{m,n,r}$  и числа  $T$  его компонент. Вычисление вектора  $A_{m,n,r}$  не требует построения расширенных полей  $GF(p^m)$ . Новизна алгоритма определения вектора  $C_{m,n,r}$  определяется вычислением сдвигов базисной МП при ее децимации для получения суммируемых последовательностей в соответствии с индексами децимации  $I_{d_i}$ . Практическая значимость алгоритма заключается в уменьшении числа вычислительных операций, которое определяется тем, что процедура децимации символов базисной МП по индексам, имеющим одинаковое распределение цифр на позициях  $p$ -го представления, начинается с одинаковых начальных сдвигов МП.

Для различных значений параметров  $p, m, n$  и  $r$  определены векторы индексов децимации  $A_{m,n,r}$  и сдвигов  $C_{m,n,r}$  позволяющие синтезировать ГМВП по символам базисной МП.

Полученные результаты могут быть использованы в современных и перспективных СПЦИ с многофазными СРС, к которым предъявляются повышенные требования как по структурной скрытности, так и по корреляционным свойствам.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Инатов В.П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007.
2. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Вильямс, 2003.
3. *Golomb S.W., Gong G.* Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar. Cambridge: Univ. Press, 2005.

4. Вишнеvский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005.
5. Ипатов В.П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992.
6. CDMA: прошлое, настоящее, будущее. М.: МАС, 2003.
7. Chen X., Zhang H. // J. Theor. Appl. Inform. Technol. 2013. V. 52. № 1. P. 51.
8. Shi X., Zhu X., Huang X., Yue Q. // IEEE Commun. Lett. 2019. V. 23. № 7. P. 1132.
9. Cho C.-M., Kim J.-Y., No J.S. // IEICE Trans. Commun. 2015. V. E98. № 7. P. 1268.
10. Kim Y.S., Chung J.S., No J.S., Chung H. // IEEE Trans. 2008. V. IT-54. № 8. P. 3768.
11. Стародубцев В.Г., Ткаченко В.В., Боброва Е.А. // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 5. С. 405.
12. Liang H., Tang Y. // Finite Fields and Their Appl. 2015. V. 31. P. 137.
13. Kim J.Y., Choi S.T., No J.S., Chung H. // IEEE Trans. 2011. V. IT-57. № 6. P. 3825.
14. Стародубцев В.Г. // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 4. С. 912.
15. No J.S. // IEEE Trans. 1996. V. IT- 42. № 1. P. 260.
16. Стародубцев В.Г. // РЭ. 2022. Т. 67. № 8. С. 788.
17. Chung H.B., No J.S. // IEEE Trans. 1999. V. IT-45. № 6. P. 2060.
18. Стародубцев В.Г. // РЭ. 2020. Т. 65. № 2. С. 169.
19. Стародубцев В.Г. // РЭ. 2021. Т. 66. № 4. С. 380.

**ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

УДК 621.372.54

**АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ  
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ**

© 2023 г. А. С. Коротков\*, А. Каврук

<sup>a</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
ул. Политехническая, 29, Санкт Петербург, 195251 Российская Федерация

\*E-mail: korotkov@spbstu.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

После доработки 22.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Рассмотрены различные решения задачи аппроксимации передаточных функций дробного порядка и показана методика решения задачи устойчивости для подобных функций. Проведено сравнение уже имеющихся решений задачи аппроксимации функции  $p^\alpha$  с предложенным на основе критерия наименьшей среднеквадратичной ошибки. В качестве примера представлены результаты моделирования фильтра с применением предложенного решения.

DOI: 10.31857/S0033849423060086, EDN: ХМОСТЕ

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основе представления передаточных функций дробной степени, т.е. нецелочисленной степени, лежит понятие интеграла и производной дробного порядка. Существует несколько возможных вариантов определения данных функций. В качестве примера приведем определения Римана–Лиувилля для интеграла и производной дробного порядка  $\alpha$  функции  $f(t)$  [1] (подробнее см. [2]):

$$J^\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx,$$

$$D^\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} f(x) dx,$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция. Преобразование Лапласа  $L\{\cdot\}$  при нулевых начальных условиях позволяет преобразовать представление функций из временной области в частотную:

$$L\{J^\alpha(f(t))\} = F(p)/p^\alpha,$$

$$L\{D^\alpha(f(t))\} = p^\alpha F(p),$$

где  $p$  – комплексная частота;  $F(p)$  – образ в частотной области функции  $f(t)$ .

Рассмотрим элемент, получивший название псевдоемкость, который занимает промежуточное положение между конденсатором и сопротивлением. Связь тока и напряжения данного элемента

описывается во временной и частотной областях следующими выражениями:

$$i(t) = C \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}, \quad L\{i(t)\} = I(p) = Cp^\alpha U(p),$$

где  $C$  – псевдоемкость с размерностью  $[Фс^{\alpha-1}]$ .

Рассмотрим частотные свойства такого элемента. Для этого подставим  $p = j\omega$ :

$$Z(j\omega) = \frac{1}{C(j\omega)^\alpha} = \frac{1}{C\omega^\alpha \exp\left(\frac{j\pi\alpha}{2}\right)}.$$

Модуль и аргумент (разность фаз между напряжением и током) импеданса псевдоемкости:

$$|Z(j\omega)| = \frac{1}{C\omega^\alpha}, \quad \arg(Z(j\omega)) = -\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Аналогично определяется элемент псевдоиндуктивность. Комбинация элементов с дробной степенью зависимости импедансов от частоты составляет физическую основу реализации устройств с дробной передаточной функцией.

Возможные практические применения устройств с дробными схемными функциями рассмотрены, например, в [3, 4] и [5]. Выделяются применения в области биологии, медицины, биофизики и других естественных науках. Однако основные исследования сосредоточены в области систем управления [4], радиотехники и электроники [6], в том числе являются практически значимыми задачи синтеза схем и цепей с дробными передаточными функциями. Характерным примером

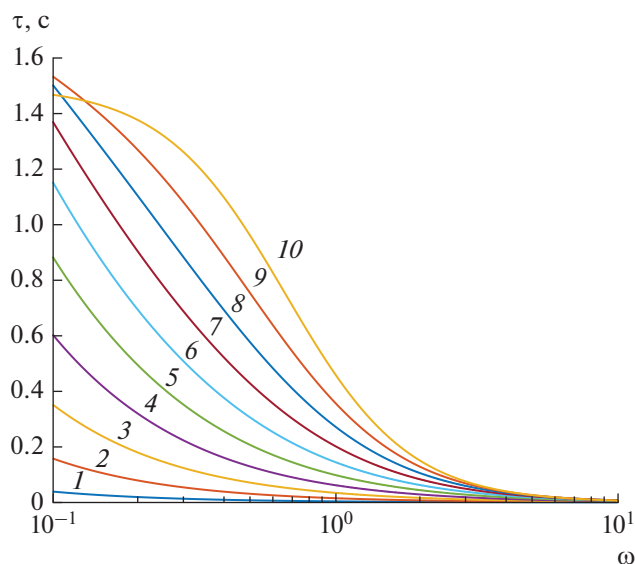


Рис. 1. Зависимость ГВЗ от частоты при разных порядках интегратора:  $\alpha = 0.1$  (1), 0.2 (2), 0.3 (3), 0.4 (4), 0.5 (5), 0.6 (6), 0.7 (7), 0.8 (8), 0.9 (9), 1.0 (10).

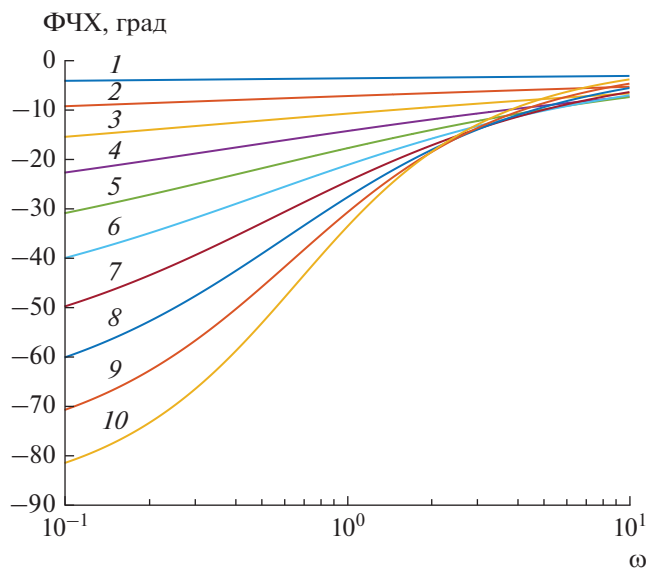


Рис. 2. Фазочастотная характеристика регулятора при разных порядках интегратора:  $\alpha = 0.1$  (1), 0.2 (2), 0.3 (3), 0.4 (4), 0.5 (5), 0.6 (6), 0.7 (7), 0.8 (8), 0.9 (9), 1.0 (10).

является регулятор для системы автоматического управления, так называемый ПИД-регулятор, который представляет параллельное соединение трех блоков: линейного усилителя (пропорционального множителя, П), интегратора, И, дифференциатора, Д. Устройство используется в петле обратной связи контура регулирования и определяет ошибку слежения, длительность переходного процесса, устойчивость. В качестве примера рассмотрим передаточную функцию простейшего регулятора, содержащего усилитель и интегратор:

$$T(p) = K_p + K_i/p^\alpha.$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) и групповое время запаздывания (ГВЗ) такого регулятора определяются по выражению

$$\varphi = -\arctg \left( \frac{K_i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\omega^\alpha K_p + K_i \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right), \quad \tau = -\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Не ограничивая общности, примем коэффициенты  $K_p = 3$  и  $K_i = 2$ . На рис. 1, 2 показаны зависимости в диапазоне нормированных частот ГВЗ и ФЧХ от дробного порядка  $\alpha$  передаточной функции интегратора. Приблизительно до частоты 0.1 ГВЗ ПИ-регулятора с целочисленной передаточной функцией практически не изменяется; для регулятора с дробной передаточной функцией полюса, в которой ГВЗ близко к постоянному, уже, но абсолютное значение ГВЗ меньше.

Приведенный пример показывает, что построение устройств с дробными передаточными функ-

циями открывает новые возможности, обусловленные появлением дополнительной степени свободы при точном определении порядка функции. Поскольку рассматриваемый класс задач соответствует проблеме оптимального синтеза цепей, то, как первый этап, содержит процедуру аппроксимации, в основе которой анализ устойчивости [7, 8] и использование классических функций Баттерворта [9, 10], Чебышева [11], Кауэра [12]. Следует отметить, что общие закономерности, свойственные перечисленным аппроксимациям с целочисленными степенями, хорошо известны из теории фильтров и сохраняются также для аппроксимаций с дробными степенями. Поэтому основную сложность представляет выбор функции, с помощью которой осуществляется преобразование аргумента комплексной частоты в дробной степени  $p^\alpha$  к виду дробно-рациональной функции. Данное преобразование осуществляется с помощью разложения функции  $p^\alpha$  в непрерывную дробь [13]. Однако данное разложение не является единственным. Как следствие, возникает необходимость сопоставительного анализа различных разложений с точки зрения возникающей ошибки аппроксимации и выбора наилучшего решения, поскольку в опубликованных статьях, в том числе перечисленных, такой анализ не проводился (см., например, [9–12, 14, 15]).

Цель данной работы – решение задачи аппроксимации передаточных функций высокого порядка дробной степени на основе целочисленных аппроксимаций; сопоставительный анализ представленных решений; выбор решений, обес-

печивающих минимальную амплитудную и фазовую ошибки, включая численные оценки ошибок для функций различных порядков и пример.

### 1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕПЕЙ С ПЕРЕДАТОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

Коротко рассмотрим основной подход к анализу устойчивости цепей с передаточными функциями высокого порядка дробной степени [7, 8]. Определим знаменатель передаточной функции как

$$D(p) = a_m p^{\alpha_m} + a_{m-1} p^{\alpha_{m-1}} + \dots + a_1 p^{\alpha_1} + a_0 p^{\alpha_0} = \sum_{i=0}^m a_i p^{\alpha_i},$$

где показатель степени всегда можно представить обыкновенной дробью  $\alpha_i = k_i/v$ , причем числитель и знаменатель – целые числа. Тогда, после замены переменной  $W = p^{1/v}$  представим знаменатель передаточной функции выражением

$$D(W) = a_m W^{k_m} + a_{m-1} W^{k_{m-1}} + \dots + a_1 W^{k_1} + a_0 W^{k_0}.$$

Расположение корней полученного уравнения степени  $k_m$  на комплексной плоскости переменной  $W$  определяет устойчивость рассматриваемой схемы, поскольку проведенная замена переменной соответствует преобразованию из  $p$ -плоскости в  $W$ -плоскость, в которой область расположения корней ограничена лучами, направленными под углом  $\pm \frac{\pi}{v}$  к горизонтальной оси. Если корень находится в области, ограниченной лучами, направленными под углом  $\pm \frac{\pi}{2v}$ , то система неустойчива. Рассмотрим следующий пример. Пусть решена задача аппроксимации на основе функции Баттерворта, причем порядок знаменателя передаточной функции равен 1.5 [9]:

$$p^{3/2} + 0.6800 p^{1/2} + 0.8591 = 0. \tag{1}$$

Для решения задачи воспользуемся заменой переменной  $W = p^{1/2}$  в выражении (1). Тогда знаменатель передаточной функции равен

$$W^3 + 0.6800W + 0.8591 = 0. \tag{2}$$

Так как  $p$  – комплексная частота  $p = |p| \exp(i\varphi)$ , то

$$W = p^{1/2} = \sqrt{|p|} \exp(i\varphi/2) = |W| \exp(i\theta).$$

Откуда определим систему уравнений вида

$$\begin{cases} |W|^3 \cos 3\theta + 0.6800 |W| \cos \theta + 0.8591 = 0 \\ |W|^3 \sin 3\theta + 0.6800 |W| \sin \theta = 0 \end{cases}.$$

Представим решения системы:  $|W| = 1.0936$ ;  $\theta = \pm 1.2362$  рад =  $\pm 70.83$  град. Так как для рас-

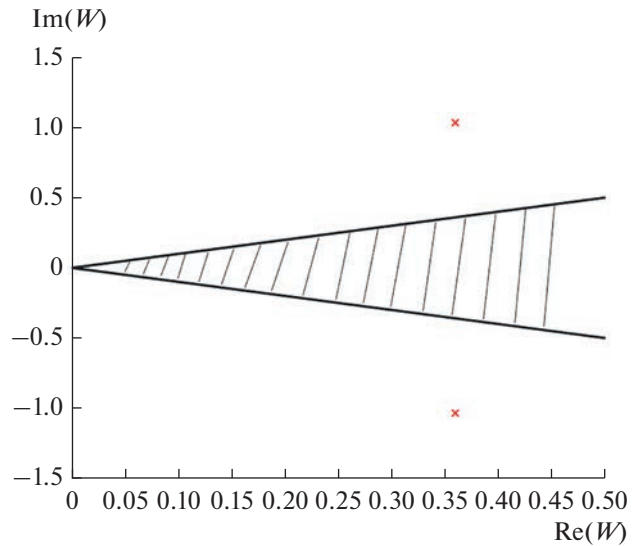


Рис. 3. Расположение полюсов (обозначены крестиками) на комплексной плоскости  $W$  (заштрихованная область – зона неустойчивости).

сматриваемого примера  $v = 2$ , то область неустойчивости составляет  $[-45, +45]$  град. Решения находятся вне этой области (рис. 3), следовательно, цепь устойчива.

Следует отметить, что для решения задачи устойчивости ограниченно применимы алгебраические критерии, например Рауса–Гурвица, так как полином знаменателя передаточной функции после подстановки имеет целочисленный порядок. Если критерий выполнен, то устойчивость обеспечивается. Однако невыполнение критерия не является показателем неустойчивости. Действительно, для функции (2) не выполняется необходимое условие, а именно: коэффициент при второй степени равен 0 (должен быть положительным), т.е. заведомо известно, что полюса передаточной функции лежат в правой полуплоскости. Тем не менее устойчивость, как показано, имеет место. Другими словами, непосредственно ответ об устойчивости с использованием критерия Рауса–Гурвица дать нельзя, поскольку область устойчивости расширяется на часть правой полуплоскости.

### 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПО БАТТЕРВОРТУ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

В работе [9] предлагается следующее решение задачи аппроксимации для максимально плоской функции. Рассматривается следующая передаточная функция:

$$H_{n+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{n+\alpha} + k_2},$$

где  $n$  – целое число,  $\alpha$  – дробное число, причем  $0 < \alpha < 1$ ,  $k_1$  и  $k_2$  – положительные коэффициенты. Анализ устойчивости показывает, что если  $n + \alpha > 2$ , то схема становится неустойчивой. Следовательно, может быть реализована только передаточная функция в виде

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_2}. \quad (3)$$

Тогда передаточная функция высокого порядка аппроксимируется выражением

$$H_{n+\alpha}(p) = \frac{H_{1+\alpha}(p)}{B_{n-1}(p)},$$

где  $B_{n-1}(p)$  – полином Баттерворта  $(n-1)$ -го порядка. Например, для аппроксимации порядка  $(2 + \alpha)$  получим

$$H_{2+\alpha}(p) = \frac{H_{1+\alpha}(p)}{1 + p}.$$

Изучение свойств функции (3) показало, что модуль функции, т.е. амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), имеет “выброс” в области частоты среза [9]. Как следствие, для реализации гладкой функции Баттерворта необходимо внести поправку. В этой связи на практике используются модифицированные функции [9, 10]:

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_2 p^\alpha + k_3}, \quad (4)$$

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_2 p + k_3}, \quad (5)$$

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + k_2 p^{\alpha_2} + k_3}. \quad (6)$$

Для определения коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  в [9, 10] было проведено решение оптимизационной задачи в постановке следующего вида:

$$\begin{aligned} \min_x \| |H(x, \omega)| - |B_1(\omega)| \|^2 = \\ = \min_x \sum_{i=1}^l (|H(x, \omega_i)| - |B_1(\omega_i)|)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $H(x, \omega)$  – функции (4)–(6);  $B_1(\omega)$  – полином Баттерворта 1-го порядка;  $\omega_i$  – частотные точки;  $x = \{k_1, k_2, k_3\}$ . При решении оптимизационной задачи коэффициент  $k_1$  фиксирован,  $k_1 = 1$ . Коэффициенты  $k_2$ ,  $k_3$  варьировались в диапазонах  $0 < k_2 \leq 2$ ,  $0 < k_3 \leq 2$ . Решение проводилось в MatLab с использованием процедуры минимизации наименьшей квадратичной ошибки (процедура LSE). Порядок функции менялся от 1.01 до 1.99 с шагом 0.01. В результате получены множества значений коэффициентов  $k_2$ ,  $k_3$  как функций от  $\alpha$ . Далее использована процедура интерполяции

и построены зависимости для коэффициентов  $k_2$ ,  $k_3$  от как от аргумента для функций (4)–(6). В качестве примера приведем результат, представленный в [9] для функции (4):

$$\begin{aligned} k_1 = 1, \quad k_2 = 1.0683\alpha^2 + 0.1610\alpha + 0.3324, \\ k_3 = 0.2937\alpha + 0.7122. \end{aligned}$$

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПО ЧЕБЫШЕВУ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

В работе [11] рассмотрено решение задачи на основе аппроксимации по Чебышеву. Предложен подход, аналогичный рассмотренному. Выражение (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \min_x \| |H(x, \omega)| - |C_n(\omega)| \|^2 = \\ = \min_x \sum_{i=1}^l (|H(x, \omega_i)| - |C_n(\omega_i)|)^2, \end{aligned}$$

где  $C_n(\omega)$  – передаточная функция фильтра Чебышева  $n$ -го порядка. На первом этапе решения задачи рассматривается функция

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_3 p^\alpha + k_2}, \quad (8)$$

для которой определяются коэффициенты при  $n = 2$ . При этом использована передаточная функция Чебышева с неравномерностью 3 дБ. Получены решения для коэффициентов  $k_i$  при значениях  $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8$ . Далее рассмотрены функции  $H_{2+\alpha}(p)$ ,  $H_{3+\alpha}(p)$ , полученные как перемножением функции (8) и билинейной передаточной функции (8) и перемножением функции (8) и квадратичной передаточной функции соответственно:

$$\begin{aligned} H_{2+\alpha}(p) &= \frac{k_1}{p^{2+\alpha} + k_5 p^{1+\alpha} + k_4 p^\alpha + k_3 p + k_2}, \\ H_{3+\alpha}(p) &= \\ &= \frac{k_1}{p^{3+\alpha} + k_6 p^{2+\alpha} + k_5 p^2 + k_4 p^{1+\alpha} + k_3 p + k_2}. \end{aligned}$$

Далее в расчетах были использованы функции Чебышева 3-го и 4-го порядков с неравномерностью 3 дБ и при тех же значениях  $\alpha$ .

### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПО ЗОЛОТАРЕВУ–КАЭУРУ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

В работе [12] приводится решение задачи на основе аппроксимации по Золотареву–Кауэру. Как и в случае аппроксимации по Чебышеву, коэффициенты определяются из решения оптимизационной задачи. Для решения была выбрана

передаточная функция 2-го порядка с подавлением в полосе задерживания 50 дБ, нулем на частоте 10.4 рад/с и с максимумом в полосе пропускания 5 дБ:

$$E_2(p) = 0.0032 \frac{p^2 + 108.0248}{p^2 + 0.4562p + 0.6075}.$$

Искомая передаточная функция порядка  $(1 + \alpha)$ :

$$H_{1+\alpha}(p) = a_4 \frac{a_1 p^{1+\alpha} + 1}{a_2 p^{1+\alpha} + a_3 p^\alpha + 1}.$$

Рассматривалась минимизация квадратичной ошибки:

$$\begin{aligned} \min_x \| |H(\mathbf{x}, \omega)| - |E_2(\omega)| \|^2 &= \\ = \min_x \sum_{i=1}^l (|H_{1+\alpha}(\mathbf{x}, \omega_i)| - |E_2(\omega_i)|)^2. \end{aligned}$$

Дополнительно исследовалось влияние диапазона частот на решение оптимизационной задачи. С точки зрения минимизации ошибки по подавлению в полосе задерживания целесообразно использовать наиболее широкий диапазон, обладающий симметрией относительно частоты среза (в работе рассмотрен диапазон  $10^{-5} \dots 10^5$  рад/с).

При минимизации ошибки в полосе пропускания целесообразно рассматривать несимметричный диапазон (например, в данной работе рассмотрен диапазон  $10^{-5} \dots 10^1$  рад/с). Чем более

широкая часть полосы пропускания рассматривается, тем ближе АЧХ к необходимому коэффициенту передачи, но при этом обеспечивается меньшее подавление в полосе задерживания.

### 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

Как отмечалось, основу реализации передаточных функций дробной степени составляют псевдоемкость и псевдоиндуктивность, импеданс которых пропорционален (обратно пропорционален) функции  $p^\alpha$ . Основной подход предполагает аппроксимацию функции  $p^\alpha$  с помощью физически реализуемой дробно-рациональной функции. Рассмотрим решение на примере функции (4) в виде

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1}{p^{1+\alpha} + k_3 p^\alpha + k_2} = \frac{k_1}{pp^\alpha + k_3 p^\alpha + k_2}.$$

Предположим, что множитель  $p^\alpha$  удалось представить дробно-рациональной функцией:

$$p^\alpha \approx \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{a_2 + a_1 p + a_0 p^2},$$

где коэффициенты  $a_i$  зависят от  $\alpha$ . Тогда после подстановки получим

$$H_{1+\alpha}(p) = \frac{k_1 (a_2 + a_1 p + a_0 p^2)}{(k_3 a_0 + k_2 a_2) + (a_0 + k_3 a_1 + k_2 a_1) p + (a_1 + k_3 a_2 + k_2 a_0) p^2 + a_2 p^3}.$$

То есть реализация передаточной функции дробной степени сводится к реализации дробно-рациональной функции.

В большинстве работ (см., например, [10]) рассматривается аппроксимация функции  $p^\alpha$  с помощью разложения в непрерывную дробь. При этом исходная функция представляется тождеством вида

$$p^\alpha \equiv \frac{(1+p)^\alpha}{(1+1/p)^\alpha}. \tag{9}$$

Следует отметить, что при больших значениях  $\omega$  поведение функции преимущественно определяется числителем:  $p^\alpha \approx (1+p)^\alpha$ . При малых значениях  $\omega$  поведение функции преимущественно определяется знаменателем:  $p^\alpha \approx (1+1/p)^\alpha$ . В основе решения – результаты, представленные в [13]. В частности, там показано, что справедливо следующее разложение в непрерывную дробь:

$$(1+x)^\alpha \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{(1+\alpha)x}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha x}{2 + \frac{(1-\alpha)x}{3 + \frac{(2+\alpha)x}{2 + \frac{(2-\alpha)x}{5 + \dots}}}}}. \tag{10}$$

Слагаемое  $n$ -го уровня в этом разложении описывается выражением

$$(1+x)^\alpha \approx \frac{1}{1 + \dots + \frac{(n+\alpha)x}{2 + \frac{(n-\alpha)x}{2n+1 \dots}}}$$

Если ограничить разложение тремя уровнями (дробью первого порядка), то получим

$$(1+x)^\alpha \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + \frac{(1+\alpha)x}{2}}} = \frac{1 + (1+\alpha)x/2}{1 + (1-\alpha)x/2}. \tag{11}$$



Используя данный результат для разложения функции  $(1 + 1/x)^\alpha$  путем замены переменной  $x \leftrightarrow 1/x$  в (11), представим

$$(1 + 1/x)^\alpha \approx \frac{(1 + \alpha)/2 + x}{(1 - \alpha)/2 + x} \tag{12}$$

Таким образом, окончательно для функции (9) разложение примет вид

$$p^\alpha \approx \left( \frac{1 + (1 + \alpha)p/2}{1 + (1 - \alpha)p/2} \right) \left( \frac{(1 - \alpha)/2 + p}{(1 + \alpha)/2 + p} \right) = \frac{2(1 - \alpha) + (5 - \alpha^2)p + 2(1 + \alpha)p^2}{2(1 + \alpha) + (5 - \alpha^2)p + 2(1 - \alpha)p^2} \tag{13}$$

Следует отметить, что разложение в непрерывную дробь не единственно. В [13] приведены другие варианты разложения. Следовательно, функция  $p^\alpha$  может быть представлена иным выражением. Еще один результат, но без вывода, приведен в [14, 15]. Анализ показал, что аппроксимирующая функция из [14, 15] выполнена на основе разложения (10), если ограничить разложение функции  $(1 + x)^\alpha$  пятью уровнями согласно (10) и далее осуществить замену переменной  $x \leftrightarrow p - 1$ . Получен следующий результат:

$$p^\alpha \approx \frac{(2 - 3\alpha + \alpha^2) + (8 - 2\alpha^2)p + (2 + 3\alpha + \alpha^2)p^2}{(2 + 3\alpha + \alpha^2) + (8 - 2\alpha^2)p + (2 - 3\alpha + \alpha^2)p^2} \tag{14}$$

Для повышения точности аппроксимации можно использовать дробь более высокого порядка. Как

$$p^\alpha \approx \frac{12(\alpha^2 - 3\alpha + 2) + 6(\alpha^3 - \alpha^2 - 16\alpha + 28)p + (\alpha^4 - 41\alpha^2 + 292)p^2 + 6(-\alpha^3 - \alpha^2 + 16\alpha + 28)p^3 + 12(\alpha^2 + 3\alpha + 2)p^4}{12(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 6(-\alpha^3 - \alpha^2 + 16\alpha + 28)p + (\alpha^4 - 41\alpha^2 + 292)p^2 + 6(\alpha^3 - \alpha^2 - 16\alpha + 28)p^3 + 12(\alpha^2 - 3\alpha + 2)p^4} \tag{16}$$

Данный результат соответствует решению, приведенному без вывода в [10]. Для функции  $p^{1/2}$  разница с (16) составляет около 1 дБ в полосе частот 2-й декады.

### 6. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД И РАЗЛОЖЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

В [13] отмечена взаимосвязь между разложением в ряд и разложением в непрерывную дробь. Возникает вопрос: если разложение в непрерывную дробь неоднозначно, то как это соответствует единственности разложения в ряд. Проверим рассмотренные выше результаты. Для этого пред-

ставим числитель выражения (9) дробно-рациональными функциями 1-го и 2-го порядков:

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0}, \tag{17}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \tag{18}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \tag{19}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_2 p^2 + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \tag{20}$$

$$(1 + x)^\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + x - \frac{(1 - \alpha)x}{2 - \frac{(1 + \alpha)x}{3(1 + x) - \frac{2(2 - \alpha)x}{4 - \dots}}}}}$$

Слагаемое  $n$ -го уровня в данном разложении описывается выражением

$$(1 + x)^\alpha = \frac{1}{1 + \dots - \frac{n(n - \alpha)x}{2n - \frac{n(n - \alpha)x}{(2n + 1)(1 + x)} \dots}}$$

Если ограничить разложение пятью уровнями (дробью 2-го порядка), то получим

$$(1 + x)^\alpha \approx \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + x - \frac{(1 - \alpha)x}{2 - \frac{(1 + \alpha)x}{3(1 + x) - \frac{2(2 - \alpha)x}{4}}}}} = \frac{12 + 6(2 + \alpha)x + (2 + 3\alpha + \alpha^2)x^2}{12 + 6(2 - \alpha)x + (2 - 3\alpha + \alpha^2)x^2} \tag{15}$$

Используя результат для разложения функции  $(1 + 1/x)^\alpha$  путем замены переменной  $x \leftrightarrow 1/x$  и выражение (15), представим функцию (9) с помощью дроби 4-го порядка как:

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0}. \quad (21)$$

Рассмотрим решение для функции 1-го порядка (17):

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{1 + b_1 p}{1 + c_1 p}.$$

Осуществим разложение в ряд левой и правой частей данного выражения

$$(1 + p)^\alpha \approx 1 + \alpha p + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p^2 + \dots,$$

$$\frac{1 + b_1 p}{1 + c_1 p} \approx 1 + (b_1 - c_1) p + \frac{-2b_1 c_1 + 2c_1^2}{2} p^2 + \dots$$

И далее приравняем коэффициенты при равных степенях аргумента  $p$  до 2-го порядка малости:

$$\alpha = b_1 - c_1, \quad \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} = \frac{-2b_1 c_1 + 2c_1^2}{2}.$$

Решение данной системы имеет вид

$$b_1 = (1 + \alpha)/2, \quad c_1 = (1 - \alpha)/2,$$

что полностью соответствует результату (11). Замена переменной  $p \leftrightarrow 1/p$  приводит к выражениям (12), (13). Разложения в ряд Тейлора, составление систем уравнений и решения для функций

2-го порядка проводятся аналогично рассмотренному случаю и показывают следующие результаты в виде разложений функции  $(1 + p)^\alpha$ : решение с использованием (18) соответствует решению (16); решение с использованием (19) приводит к результату вида

$$\begin{aligned} (1 + p)^\alpha &\approx \frac{6}{\alpha^2 - \alpha} + \frac{2(2 + \alpha)}{\alpha(\alpha - 1)} p = \\ &= \frac{6}{\alpha^2 - \alpha} - \frac{4}{\alpha} p + p^2 = \\ &= \frac{6 + 2(2 + \alpha) p}{6 - 4(\alpha - 1) p + \alpha(\alpha - 1) p^2}, \end{aligned}$$

что соответствует разложению в непрерывную дробь (10), ограниченному 4-м уровнем:

$$\begin{aligned} (1 + x)^\alpha &= \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{1 + \frac{(1 + \alpha)x}{2 + \frac{(1 - \alpha)x}{3}}}} = \\ &= \frac{(4 + 2\alpha)x + 6}{(\alpha^2 - \alpha)x^2 + (4 - 4\alpha)x + 6\alpha}. \end{aligned}$$

Результат для функции (9):

$$p^\alpha \approx \frac{3\alpha(\alpha - 1) + (\alpha^3 + \alpha^2 - 14\alpha + 12)p + 2(-2\alpha^2 - 2\alpha + 13)p^2 + 6(\alpha + 2)p^3}{p(6(\alpha + 2) + 2(-2\alpha^2 - 2\alpha + 13)p + (\alpha^3 + \alpha^2 - 14\alpha + 12)p^2 + 3\alpha(\alpha - 1)p^3)}. \quad (22)$$

Рассмотрим аппроксимирующую функцию (22) на предмет устойчивости. Для этого осуществим

подстановку выражения (22) в передаточную функцию порядка  $(1 + \alpha)$ :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{p^\alpha p + k_2 p^\alpha + k_3} = \\ &= \frac{p(a_3 + a_2 p + a_1 p^2 + a_0 p^3)}{p^4(a_3 + a_0 k_3) + p^3(a_2 + a_3 k_2 + a_1 k_3) + p^2(a_1 + a_2 k_2 + a_2 k_3) + p(a_0 + a_1 k_2 + a_3 k_3) + a_0 k_2}, \end{aligned}$$

где  $a_i$  – коэффициенты числителя (22);  $k_2, k_3$  – коэффициенты передаточной функции порядка  $(1 + \alpha)$ , причем  $k_2, k_3 > 0$  [9]. Используем значения коэффициентов  $k_2, k_3$  согласно результатам работы [9]. Знаменатель передаточной функции является полиномом Гурвица, если все коэффициенты одного знака, что выполняется для всех коэффициентов кроме свободного члена: свободный член во всем диапазоне значений  $\alpha$  от 0 до 1 принимает отрицательные значения, остальные коэффициенты – положительные. Таким обра-

зом, решение (22) соответствует неустойчивой схеме, и далее его не рассматриваем.

Для функций (20), (21) получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} (1 + p)^\alpha &\approx \frac{3}{\alpha^2 - 1} - \frac{\alpha + 2}{2(\alpha - 1)} p^2 = \\ &= \frac{3}{\alpha^2 - 1} - \frac{3\alpha}{\alpha^2 - 1} p + p^2 = \\ &= \frac{6 - (\alpha + 2)(\alpha + 1)p^2}{6 - 6\alpha p + 2(\alpha^2 - 1)p^2}, \end{aligned}$$

$$(1 + p)^\alpha \approx \frac{-\frac{3}{\alpha - 2} - \frac{2(1 + \alpha)}{\alpha - 2} p - \frac{\alpha^2 + \alpha}{2(\alpha - 2)} p^2}{-\frac{3}{\alpha - 2} + p} = \frac{-6 - 4(1 + \alpha)p - (\alpha^2 + \alpha)p^2}{-6 + 2(\alpha - 2)p},$$

для которых не удалось обнаружить соответствие в разложениях дробей. При этом для функции (9) имеем

$$p^\alpha \approx \frac{6(\alpha^2 - 1) - 18\alpha p + (-\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 20)p^2 + 3(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha)p^3 + 3(-\alpha^2 - 3\alpha - 2)p^4}{-3(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 3\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 2)p + (-\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 20)p^2 - 18\alpha p^3 + 6(\alpha^2 - 1)p^4}, \quad (23)$$

$$p^\alpha \approx \frac{p(12(\alpha - 2) + 4(2\alpha^2 - 2\alpha - 13))p + 2(\alpha^3 - \alpha^2 - 14\alpha - 12)p^2 + 6\alpha(-\alpha - 1)p^3}{6\alpha(-\alpha - 1) + 2(\alpha^3 - \alpha^2 - 14\alpha - 12)p + 4(2\alpha^2 - 2\alpha - 13)p^2 + 12(\alpha - 2)p^3}. \quad (24)$$

Обобщая приведенные результаты, отметим, что совпадение разложения в дробь и разложения в ряд имеет место для аппроксимаций с полиномами одного порядка в числителе и знаменателе (9), если рассматривается  $2n + 1$  уровней разложения, где  $n$  – порядок аппроксимации числителя/знаменателя функции (9), т.е. для решений вида (17), (18).

### 7. СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АППРОКСИМАЦИЙ

Проанализируем каждую из аппроксимирующих функций и сравним с (9) при различных значениях  $\alpha$ . Критерий сравнения – среднеквадратичная ошибка. Абсолютную и относительную амплитудные ошибки при заданном значении  $\alpha$  будем определять соотношением

$$\Delta_A^\alpha = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|G(\alpha, \omega_i)| - \omega^\alpha)^2},$$

$$\delta_A^\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (|G(\alpha, \omega_i)| - \omega^\alpha)^2}{\sum_{i=1}^N \omega^{2\alpha}}},$$

где  $G(\alpha, \omega_i)$  – одна из аппроксимирующих функций (13), (14), (16), (23), (24) при фиксированном значении  $\alpha$  и переменном значении частоты  $\omega_i$ ,  $N$  – количество отсчетов по частотной оси. Для расчета был взят диапазон нормированных частот от 0.1 до 10.0, количество точек равно  $10^5$ . Ошибка вычислялась в диапазоне значений  $\alpha$  от 0.01 до 0.99 с шагом 0.01. Результаты представлены на рис. 4.

Из приведенных результатов следует, что в диапазоне значений  $\alpha$  от 0.01 до 0.10 амплитудные ошибки различных решений близки. При  $\alpha$  от 0.1 до 0.6 функция (13) дает наилучший результат среди рассмотренных. При  $\alpha$  от 0.60 до 0.99 функция (24) дает наименьшую ошибку в сравнении с другими. При  $\alpha$  от 0.10 до 0.86 среднеквадратичная ошибка функции (13) меньше, чем функции (14).

Аналогично приведем формулу расчета фазовых ошибок:

$$\Delta_\phi^\alpha = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \arg(G(\alpha, \omega_i)) - \frac{\pi\alpha}{2} \right)^2}.$$

Для расчета был использован тот же диапазон частот и значений  $\alpha$ , что и в случае определения амплитудных ошибок. Результаты расчета представлены на рис. 5.

Из приведенных результатов следует, что для различных функций ошибка аргумента  $p^\alpha$  при малых  $\alpha$  отличается незначительно. Для функций (14), (16) фазовые ошибки во всем диапазоне значений  $\alpha$  по сравнению с другими решениями являются наименьшими. Функция (14) имеет меньшие ошибки, чем функция (13) того же порядка. Резюмируя результаты по амплитудным и фазовым

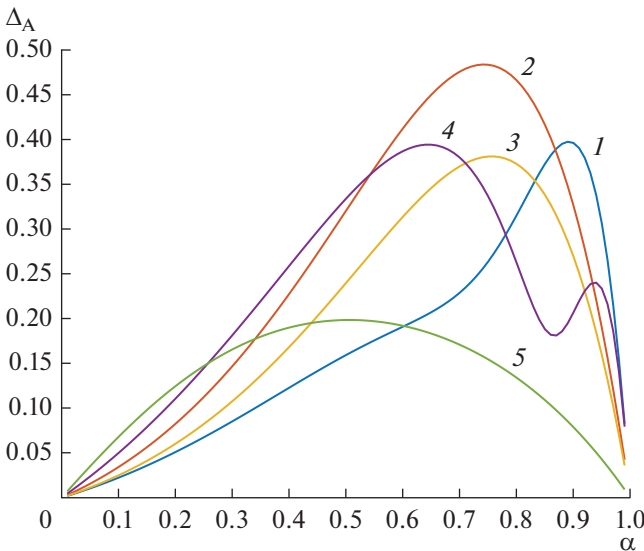
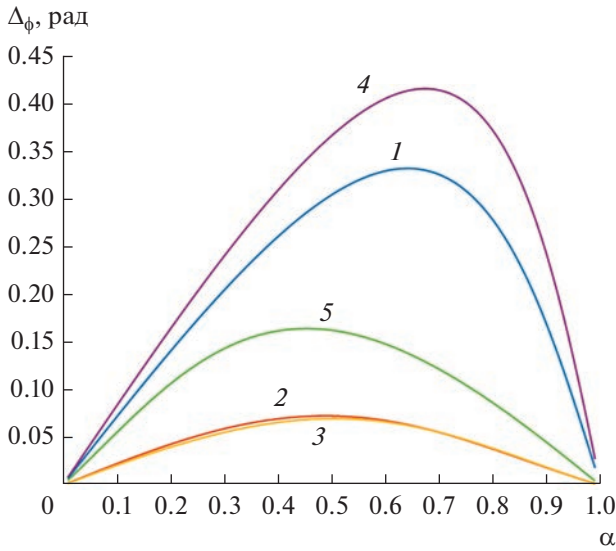


Рис. 4. Среднеквадратичные амплитудные ошибки аппроксимации функции  $p^\alpha$ : кривая 1 – (13), кривая 2 – (14), кривая 3 – (16), кривая 4 – (23), кривая 5 – (24).



**Рис. 5.** Среднеквадратичные фазовые ошибки аппроксимации функции  $p^\alpha$ : кривая 1 – (13), кривая 2 – (14), кривая 3 – (16), кривая 4 – (23), кривая 5 – (24).

ошибкам, отметим, что функции (13), (23) не являются оптимальными с точки зрения фазовых ошибок. В случае других решений удастся либо получить меньшую ошибку по амплитудным характеристикам, но при этом проиграть по фазовым ошибкам, либо наоборот. Компромиссным вариантом является решение (16).

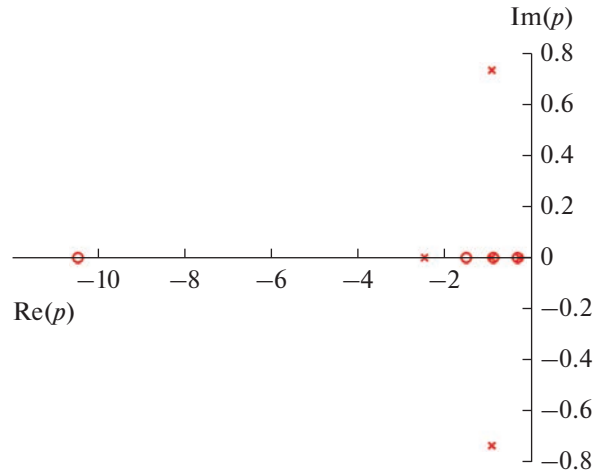
В качестве практического примера представим результаты для фильтра нижних частот Баттерворта порядка 1.5 с использованием аппроксимирующей функции (16). Передаточная функция с учетом (1) имеет вид

$$T(p) = \frac{0.20p^4 + 2.65p^3 + 6.26p^2 + 4.75p + 1.00}{p^5 + 5.60p^4 + 11.77p^3 + 12.29p^2 + 6.08p + 1.00}.$$

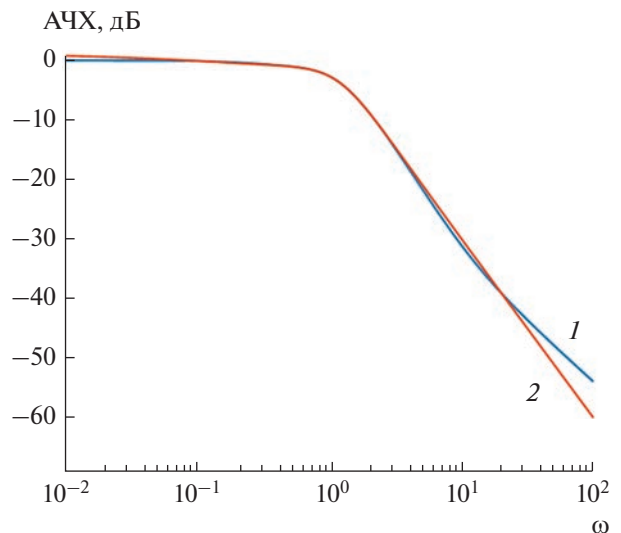
Расположение полюсов и нулей на комплексной плоскости представлено на рис. 6, что соответствует устойчивой схеме. АЧХ фильтра показана на рис. 7. Ошибка в верхней части приведенного диапазона частот не превышает 1 дБ.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены методы решения задачи аппроксимации функции  $p^\alpha$  для построения передаточных функций высокого порядка дробной степени. Проведен сопоставительный анализ решений (13), (14), (16), (23), (24) в диапазоне нормированных частот от 0.1 до 10. Исключено из рассмотрения неустойчивое решение (22). Показано, что при значениях дробной части показателя степени



**Рис. 6.** Расположение полюсов и нулей передаточной функции ФНЧ с использованием аппроксимации (16).



**Рис. 7.** Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ Баттерворта порядка 1.5: кривая 1 – фильтр с функцией (16), кривая 2 – идеальный дробный фильтр.

передаточной функции  $\alpha$  от 0.10 до 0.60 аппроксимация (13) дает наилучший результат по критерию минимума относительной амплитудной среднеквадратичной ошибки, которая не превышает 7%. При  $\alpha$  от 0.60 до 0.99 рекомендуется использовать предложенную в данной работе аппроксимацию (24), преимуществом которой по сравнению с известными решениями (13) [10], (14) [14, 15], (16) [10] и решением, предложенным также в данной работе (23), является наименьшая относительная амплитудная ошибка, не превышающая 7% в полосе частот две декады при 4-м порядке приближения. Для функций (14), (16) фазовые ошибки во всем диапазоне значений  $\alpha$  по сравнению с

другими решениями являются наименьшими и составляют до 0.08 и 0.07 рад соответственно.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-15-2022-31).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руман Б. Сочинения. М.: Гостехтеориздат, 1949.
2. Потанов А.А. // Журн. радиоэлектроники. 2010. № 1. С. 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan10/4/text.pdf>.
3. Elwakil A. // IEEE Circuits and Systems Magaz. 2010. V. 10. № 4. P. 40. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2010.938637>
4. Warriar P., Shah P. // IEEE Access. 2021. V. 9. Article No. 58982. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3073033>
5. Psychalinos C., Elwakil A., Allagui A., Tepljakov A. // Int. J. Electron. Commun. (AEU). 2017. V. 81. P. 132. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2017.07.016>
6. Sladok O., Koton J., Kubanek D. et al. // IEEE Access. 2021. V. 9. Article No. 92178. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3091544>
7. Radwan A.G., Soliman A.M., Elwakil A.S., Sedeek A. // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 40. P. 2317. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.10.033>
8. Soltan A., Radwan A.G., Soliman A.M. // Circuits, Syst., Signal Process. 2015. V. 34. P. 1461. <https://doi.org/10.1007/s00034-014-9925-z>
9. Freeborn T.J. // Circuits, Syst., Signal Process. 2016. V. 35. P. 1983. <https://doi.org/10.1007/s00034-015-0226-y>
10. Maundy B., Elwakil A.S., Freeborn T.J. // Signal Processing. 2011. V. 91. P. 484. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.06.018>
11. Freeborn T., Maundy B., Elwakil A.S. // Mathematical Problems in Engineering. 2015. V. 2015. Article ID 832468. <https://doi.org/10.1155/2015/832468>
12. Kubanek D., Freeborn T.J., Koton J., Dvorak J. // Appl. Sci. 2018. V. 8. P. 2603. <https://doi.org/10.3390/app8122603>
13. Khovanskii A.N. The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. Groningen: Noordhoff, 1963.
14. Tsirimokou G., Laoudias C., Psychalinos C. // Int. J. Circ. Theor. Appl. 2015. V. 43. P. 1105. <https://doi.org/10.1002/cta.1995>
15. Freeborn T.J., Maundy B., Elwakil A.S. // IET Circuits Devices Syst. 2010. V. 4. № 6. P. 514. <https://doi.org/10.1049/iet-cds.2010.0141L>

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874;537.624

ГЕНЕРАЦИЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ  
В СХЕМЕ МАГНИТОСТРИКЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ  
С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2023 г. В. С. Власов<sup>a, \*</sup>, Д. А. Плешев<sup>a, b</sup>, Ф. Ф. Асадуллин<sup>b</sup>, В. Г. Шавров<sup>c, \*\*</sup>, В. И. Щеглов<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина,  
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация

<sup>b</sup> Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова,  
Институтский переулочек, 5 Литер У, Санкт-Петербург, 192021 Российская Федерация

<sup>c</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: vshcheg@cplire.ru

\*\*E-mail: shavrov@cplire.ru

Поступила в редакцию 02.08.2022 г.

После доработки 02.08.2022 г.

Принята к публикации 26.09.2022 г.

Рассмотрена задача о генерации гиперзвуковых колебаний в схеме магнитоотрицательного преобразователя, охваченного цепью положительной обратной связи. Введен “параметр связи”, отражающий усиление сигнала в цепи обратной связи. Рассмотрено развитие магнитных и упругих колебаний во времени. По мере увеличения параметра связи выявлены три основных режима колебаний: начальная релаксация, стационарные автоколебания и хаотические автоколебания. Исследовано влияние величины параметра связи и параметра затухания намагниченности на время развития и амплитуду колебаний. Выявлены характерные значения обоих параметров, соответствующие переходам между режимами. Приведены практические рекомендации для выбора параметров системы с целью наиболее эффективного возбуждения гиперзвуковых колебаний.

DOI: 10.31857/S0033849423060177, EDN: ХОНАЕР

ВВЕДЕНИЕ

Задача возбуждения мощных ультразвуковых колебаний весьма актуальна не только в таких традиционных областях, как механическая обработка материалов, дефектоскопия, гидролокация [1, 2], но и при исследовании свойств твердого тела [3] и обработке информации методами акустоэлектроники [4, 5], где повышение быстродействия и пространственного разрешения требуют использования упругих колебаний гиперзвуковых частот  $10^9 \dots 10^{12}$  Гц.

Для возбуждения упругих колебаний столь высоких частот весьма перспективными можно считать магнитоотрицательные преобразователи [6], использующие сочетание ферромагнитного резонанса с упругим [7], рабочим веществом для которых является железо-иттриевый гранат (ЖИГ), обладающий рекордными магнитными и упругими свойствами [8].

В традиционных схемах магнитоотрицательного преобразователя [6, 7] мощность излучаемого гиперзвука ограничивается параметрическим возбуждением обменных спиновых волн [9], пре-

одолением которого является выбор конструкции преобразователя в виде ферритовой пластины, намагниченной по нормали к ее плоскости [10–12].

Традиционным способом подвода энергии к магнитоотрицательному преобразователю является внешний, подключаемый к нему генератор электрического сигнала соответствующей частоты. Однако в радиотехнике широко используется возбуждение электрических колебаний в колебательном контуре без внешнего генератора путем включения его в цепь положительной обратной связи [13, с. 365, рис. 278], [14, с. 367], [15, с. 270]. При этом подвод энергии к контуру происходит за счет усиления сигнала в цепи обратной связи, которое в свою очередь осуществляется за счет источника постоянного тока.

Можно полагать, что снабжение магнитоотрицательного преобразователя цепью обратной связи также должно привести к генерации упругих колебаний. Частота таких колебаний будет задаваться резонансными свойствами преобразователя, а амплитуда будет ограничиваться его же нелинейными свойствами.

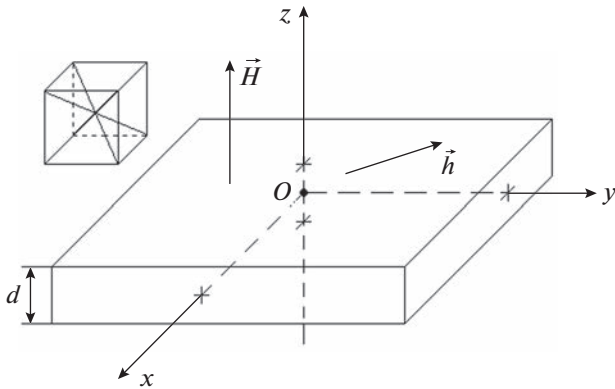


Рис. 1. Геометрия задачи. Слева сверху показана схема ориентации кубической ячейки.

Работа посвящена исследованию возможности генерации мощных гиперзвуковых колебаний в схеме магнестрикционного преобразователя, охваченного цепью положительной обратной связи.

## 1. ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

Геометрия задачи, соответствующая схеме рабочего элемента магнестрикционного преобразователя, совпадающая с принятой в работе [10], показана на рис. 1. В основе задачи лежит плоскопараллельная пластина толщиной  $d$ , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины. Внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено перпендикулярно плоскости пластины, в плоскости пластины действует переменное магнитное поле  $\vec{h}$ . Задача решается в декартовой системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совпадает с плоскостью пластины, а оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат  $O$  находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам  $z = \pm d/2$ .

Следуя [10], приведем полную систему уравнений движения и граничные условия для намагниченности и упругого смещения.

Уравнения для намагниченности:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} [(m_y + \alpha m_x m_z) H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) H_{ey} - \alpha (m_y^2 + m_z^2) H_{ex}], \quad (1)$$

а уравнения для  $m_y$  и  $m_z$  получаются из (1) циклической перестановкой  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В этих уравнениях  $m_{x,y,z} = M_{x,y,z}/M_0$  – нормированные компоненты намагниченности,  $M_0$  – намагниченность на-

сыщения,  $\alpha$  – параметр магнитного затухания,  $\gamma$  – гироманнитная постоянная.

Входящие в уравнения (1) эффективные поля имеют вид

$$H_{ex} = h_x + H_{ax}, \quad (2)$$

$$H_{ey} = h_y + H_{ay}, \quad (3)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}, \quad (4)$$

где  $h_{x,y}$  – компоненты переменного поля, задаваемого извне, а  $H_{ax,y,z}$  – компоненты переменного поля, определяемые магнитоупругим взаимодействием:

$$H_{ax} = -\frac{B_2}{M_0} \left[ m_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (5)$$

где  $u_{x,y,z}$  – компоненты упругого смещения,  $B_2$  – константа магнитоупругого взаимодействия, а  $H_{ay}$  и  $H_{az}$  получаются из (5) циклической перестановкой  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Уравнения для упругого смещения:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (6)$$

где  $c_{44}$  – константа (модуль) упругости,  $\rho$  – плотность материала пластины,  $\beta$  – параметр упругого затухания, а уравнение для  $u_y$  получается из (6) заменой  $x$  на  $y$ .

Граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_x m_z, \quad (7)$$

а условие для  $u_y$  получается из (7) заменой  $x$  на  $y$ .

По условию задачи магнестрикционный преобразователь охвачен цепью обратной связи. Это означает, что с преобразователя снимается сигнал, который далее усиливается, после чего посредством цепи обратной связи, уже будучи усиленным, снова подается на тот же преобразователь. Будем считать, что сигналом является соответствующая компонента намагниченности, а усиление зададим путем умножения этой компоненты на параметр связи  $g$ . Таким образом, входящие в (2) и (3) компоненты переменного поля принимают вид

$$h_x = (h_{0x} + g m_x) \sin(2\pi f t); \quad (8)$$

$$h_y = -(h_{0y} + g m_y) \cos(2\pi f t). \quad (9)$$

В этих выражениях параметр  $g$  имеет размерность поля, так как величина  $m_{x,y}$  безразмерная. Как видим, при  $g = 0$  и отличных от нуля равных друг другу  $h_{0x}$  и  $h_{0y}$  поле (8), (9) имеет циркулярную поляризацию с правым вращением. При  $h_{0x} = h_{0y} = 0$

для возбуждения колебаний в системе должны быть заданы начальные (при  $t = 0$ ) значения намагниченности  $m_{x0}, m_{y0}$ .

Система уравнений (1)–(9) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка [16, с. 702, 707] по методике, приведенной в [10]. Результатами расчета являлись развертки магнитных и упругих колебаний по времени, а также зависимости амплитуд колебаний в стационарном режиме от величины постоянного поля.

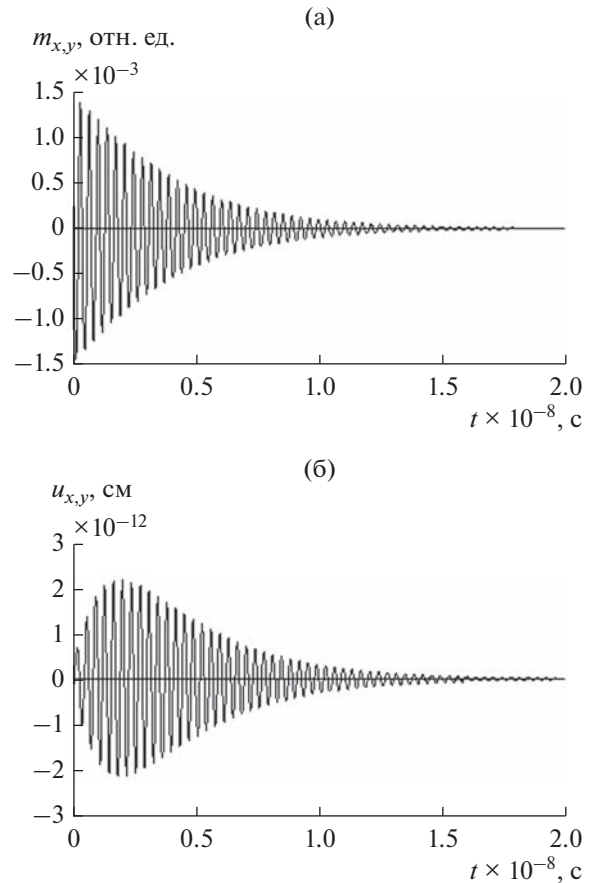
При расчете использовались параметры материала, типичные для монокристалла ЖИГ:  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $B_2 = 6.96 \times 10^6$  эрг см<sup>-3</sup>,  $c_{44} = 7.64 \times 10^{11}$  эрг см<sup>-3</sup>,  $\rho = 5.17$  г см<sup>-3</sup>. Поле  $H_0 = 2750$  Э. При этом частота ферромагнитного резонанса (ФМР) при  $\gamma = 2.8$  МГц Э<sup>-1</sup> равнялась 2800 МГц; толщина пластины  $d$  равнялась 0.6865 мкм, что соответствовало упругому резонансу на частоте ФМР. Параметры затухания магнитной и упругой подсистем, кроме особо оговоренных случаев, выбирались следующими:  $\alpha = 0.02$ ,  $\beta = 10^9$  с<sup>-1</sup>. Внешние переменные поля  $h_{0x}$  и  $h_{0y}$  полагались отсутствующими, начальные нормированные на  $M_0$  значения намагниченности  $m_{x0}, m_{y0}$  равнялись 0.01 отн.ед., а параметр связи  $g$  менялся от нуля до 1500 Э.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ

Рассматриваемая система представляет собой магнитострикционный преобразователь, охваченный цепью обратной связи. Согласно общим положениям теории подобных систем [13, с. 364], если обратная связь является положительной, то в системе при достаточном уровне связи возможны автоколебания. Основные режимы колебаний в данной системе, задаваемые уровнем связи.

**Режим № 1. Начальная релаксация.** Этот режим имеет место при величине параметра связи  $g$  менее 350 Э. Развитие во времени магнитных и упругих колебаний приведено на рис. 2.

Из рис. 2а видно, что колебания намагниченности, начиная с уровня  $1.5 \times 10^{-3}$  отн. ед., спадают (релаксируют) по времени в соответствии с экспоненциальным законом затухания. Амплитуда уменьшается в 10 раз при времени  $0.95 \times 10^{-8}$  с. При выключении обратной связи (т.е. при  $g = 0$ ) колебания начинаются с той же амплитуды  $1.5 \times 10^{-3}$  и спадают по экспоненте до уровня 0.1 от начального значения за время  $0.55 \times 10^{-8}$  с. Здесь время спада в первую очередь определяется величиной параметра затухания  $\alpha$  в уравнении (1), так как при принятых параметрах влияние упругой системы на затухание магнитной достаточно



**Рис. 2.** Развитие во времени колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) при параметре связи  $g = 200$  Э.

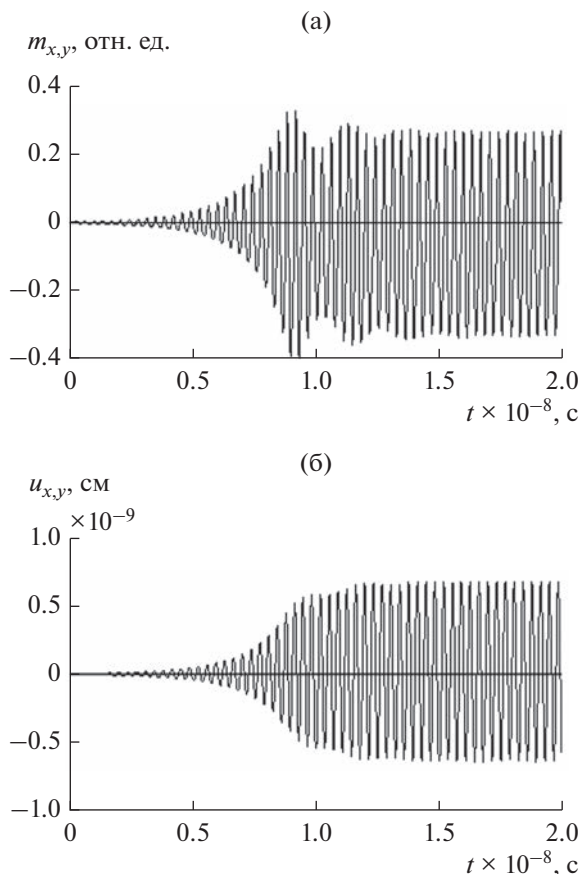
мало. Увеличение времени спада при включении обратной связи свидетельствует о том, что такая связь частично компенсирует затухание.

Упругая система здесь играет роль нагрузки, налагаемой на магнитную, т.е. упругие колебания развиваются под действием возбуждения, создаваемого магнитной системой. При этом, как видно из сравнения рис. 2б с рис. 2а, пока амплитуда магнитных колебаний довольно велика, т.е. до времени около  $0.2 \times 10^{-8}$  с, амплитуда упругих колебаний растет, а далее амплитуда упругих колебаний падает, поскольку магнитные колебания ослабевают.

В обоих случаях колебания являются полностью регулярными, их частота задается условиями ферромагнитного резонанса и резонанса упругих колебаний в пластине, а амплитуда следует экспоненциальным законам релаксации.

**Режим № 2. Стационарные автоколебания.** Этот режим имеет место при величине параметра связи  $g$  в интервале 350...1150 Э. Развитие во времени магнитных и упругих колебаний приведено на рис. 3.





**Рис. 3.** Развитие во времени колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) при параметре связи  $g = 550$  Э.

Из рис. 3а видно, что колебания намагниченности начиная с весьма низкого уровня (задаваемого начальным смещением  $1.5 \times 10^{-3}$  отн. ед.) нарастают по закону, близкому к экспоненциальному, вплоть до времени  $0.9 \times 10^{-8}$  с, при котором их уровень достигает 0.35 отн. ед. С этого момента рост амплитуды колебаний намагниченности прекращается и после нескольких затухающих переколебаний небольшой амплитуды при времени около  $1.5 \times 10^{-8}$  с амплитуда устанавливается на постоянном уровне 0.25 отн. ед. Примечательно, что уровень установившихся магнитных колебаний (рис. 3а) здесь превышает уровень, создаваемый начальным смещением (рис. 2а) более чем на два порядка (около 300 раз). Экспоненциальный рост амплитуды колебаний намагниченности обусловлен компенсацией потерь в магнитной системе за счет обратной связи. То есть здесь положительная обратная связь вносит в колебательную систему как бы отрицательное сопротивление [13, с. 369]. Ограничение колебаний происходит тогда, когда приток энергии в систему за счет усиления сигнала в цепи обратной связи

приходит в равновесие с ее оттоком в кристаллическую решетку за счет магнитной релаксации. Можно полагать, что здесь работает расстроенный механизм ограничения колебаний, свойственный нелинейной системе с посторонним возбуждением [17, с. 116], каковой в настоящем рассмотрении является магнитная [18, с. 261, рис. 9.2].

Из рис. 3б видно, что упругие колебания здесь также развиваются под действием возбуждения, создаваемого магнитной системой, т.е. их амплитуда увеличивается, следуя за магнитной, и ограничение их также наступает синхронно с ограничением по магнитной системе. Стационарный уровень  $0.6 \times 10^{-9}$  см здесь превышает максимум упругих колебаний на рис. 3б ( $2.0 \times 10^{-12}$  см) также более чем на два порядка (около 350 раз).

Здесь, как и в предыдущем случае, как магнитные, так и упругие колебания являются полностью регулярными, а их частота задается условиями резонанса магнитной и упругой систем.

**Режим № 3. Хаотические автоколебания.** Этот режим имеет место при величине параметра связи  $g$ , превышающей 1150 Э. В данной работе исследовалось увеличение  $g$  до 25000 Э, где общий характер режима сохранялся, а дальнейшее увеличение параметра связи приводило к уходу упругого смещения на бесконечность (более  $10^{-4}$  см), что можно трактовать как механическое разрушение системы, поэтому далее не рассматривалось. Развитие во времени магнитных и упругих колебаний в этом режиме представлено на рис. 4.

Из рис. 4а видно, что колебания намагниченности, начиная с низкого уровня, задаваемого начальным смещением, после небольшой задержки — около  $0.1 \times 10^{-8}$  с по амплитуде резко возрастают, уже при времени около  $0.2 \times 10^{-8}$  с приближаясь к амплитуде 0.8 отн. ед., что близко к полному раскрытию конуса прецессии намагниченности, составляющему 1.0 отн. ед. Далее колебания приобретают скачкообразный хаотический характер с вариациями амплитуды между 0.1 и 0.8 отн. ед. Слегка просматривается периодичность, соответствующая частоте магнитного резонанса, однако резкие скачки амплитуды свидетельствуют о значительном расширении спектра колебаний в окрестности этой частоты.

Наблюдаемое ограничение максимальной амплитуды колебаний, по-видимому, связано с уменьшением восприимчивости магнитной системы, так как по мере увеличения раскрытия прецессии ориентация возбуждающего переменного поля приближается к ориентации вектора намагниченности, в результате чего их взаимодействие ослабевает. В то же время роль расстроенного механизма также усиливается, что и приводит в совокупности к ограничению амплитуды на уровне порядка 0.8 отн. ед.

Упругие колебания, представленные на рис. 4б, также имеют довольно нерегулярный характер, однако здесь можно говорить о скачкообразном возбуждении значительных по времени групп более или менее регулярных колебаний, частота которых соответствует частоте упругого резонанса. Однако амплитуда и продолжительность таких групп меняются случайным образом, составляя по амплитуде от  $0.2 \times 10^{-9}$  до  $0.9 \times 10^{-9}$  см и по протяженности во времени от  $0.2 \times 10^{-8}$  до  $0.6 \times 10^{-8}$  с. По внешнему виду такие колебания напоминают биения, однако проверка показывает, что при увеличении параметра связи  $g$  выше 1500 Э и далее структура типа “биений” нарушается и колебания все более приближаются к хаотическим.

### 3. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА СВЯЗИ НА ВРЕМЯ РАЗВИТИЯ И АМПЛИТУДУ КОЛЕБАНИЙ

В предыдущем разделе показано, что характер колебаний, развивающихся после задания начального смещения, определяется глубиной обратной связи. Автоколебания возможны только в режимах № 2 и № 3, когда усиление первичного сигнала в цепи обратной связи становится достаточно высоким. Из рис. 3 и 4 видно, что такие колебания развиваются с определенным запаздыванием по времени. Рассмотрим этот вопрос более подробно, для чего обратимся к рис. 5, где представлены зависимости времени развития амплитуды колебаний до определенного уровня от величины параметра связи. Кривая 1 соответствует времени  $\tau_p$ , при котором амплитуда достигает значения 0.1 от максимума. Кривая 2 соответствует времени  $\tau_s$ , при котором амплитуда устанавливается постоянной на максимальном уровне. Характерные значения параметров связи  $g_A$  и  $g_B$  (отмечены стрелками на горизонтальной оси) соответствуют границам перехода между режимами № 1 и № 2 ( $g_A$ ) и между режимами № 2 и № 3 ( $g_B$ ). При этом порог возбуждения автоколебаний соответствует  $g_A$ : левее этого значения автоколебания отсутствуют (режим № 1) и соответствующие кривые уходят на бесконечность. Правее значения  $g_A$  вплоть до  $g_B$  имеют место регулярные стационарные автоколебания (режим № 2), При параметре связи больше  $g_B$  автоколебания имеют хаотический характер (режим № 3).

Из рис. 5 видно, что обе зависимости, будучи подобными, по характеру близки к обратной пропорциональности. Такой же вид их сохраняется в логарифмическом масштабе (вставка). Расстояние между кривыми 1 и 2 по вертикали по мере увеличения параметра связи  $g$  уменьшается. Однако при  $g > g_B$  кривая 2 идет уже параллельно

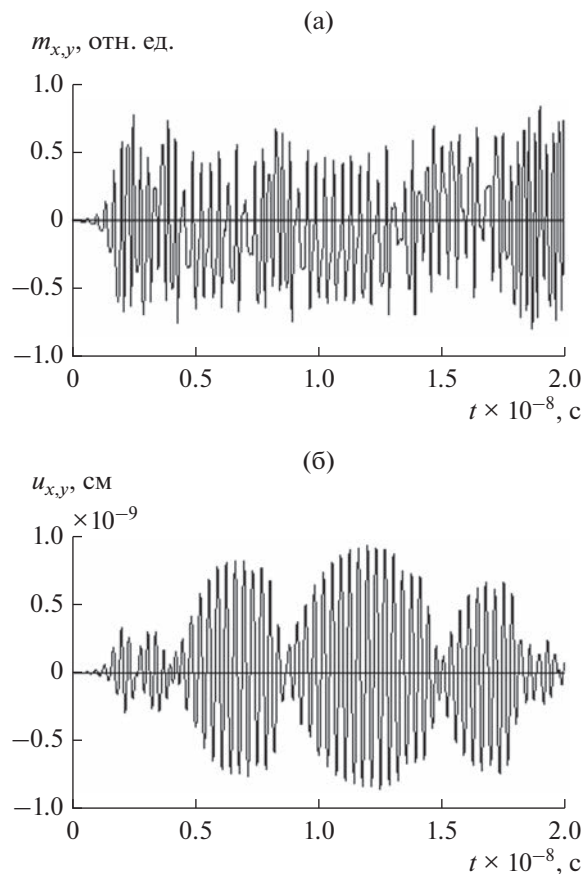
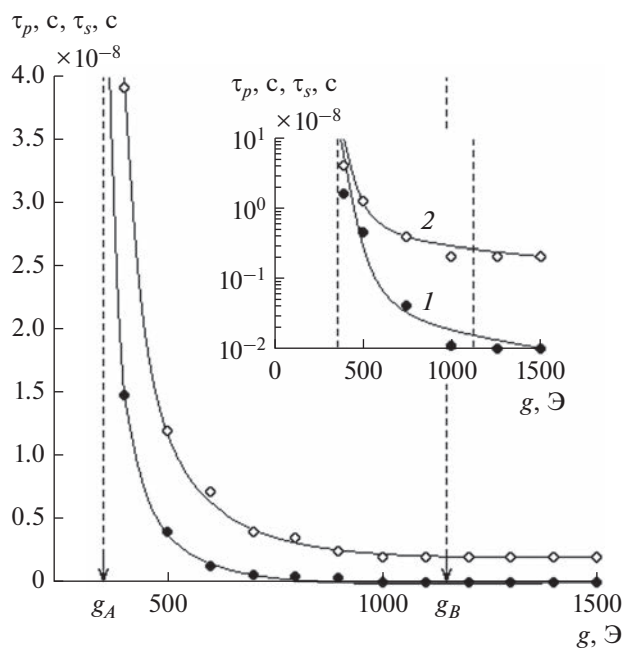


Рис. 4. Развитие во времени колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) при параметре связи  $g = 1200$  Э.

кривой 1, так что расстояние между кривыми выходит на постоянный уровень. Это означает, что в случае хаотического режима (№ 3) для выхода амплитуды на стационарный уровень всегда требуется определенное время — около  $0.2 \times 10^{-8}$  с. Можно полагать, что здесь проявляется механизм нестационарного запаздывания, свойственный системам, подобным рассматриваемому здесь магнитострикционному преобразователю [19, с. 106; 20–22]. В общем случае этот вопрос требует отдельного рассмотрения, в первую очередь в более широком интервале изменения параметра связи.

Рассмотрим теперь влияние параметра связи на амплитуду установившихся колебаний, для чего обратимся к рис. 6, где показаны соответствующие зависимости для намагниченности (а) и упругого смещения (б) от величины параметра связи.

Из рис. 6 видно, что в обоих случаях при  $g < g_A$  амплитуда тех и других колебаний крайне мала, ибо по прошествии времени релаксации около  $1.0 \times 10^{-8}$  с, когда как раз начинается установле-

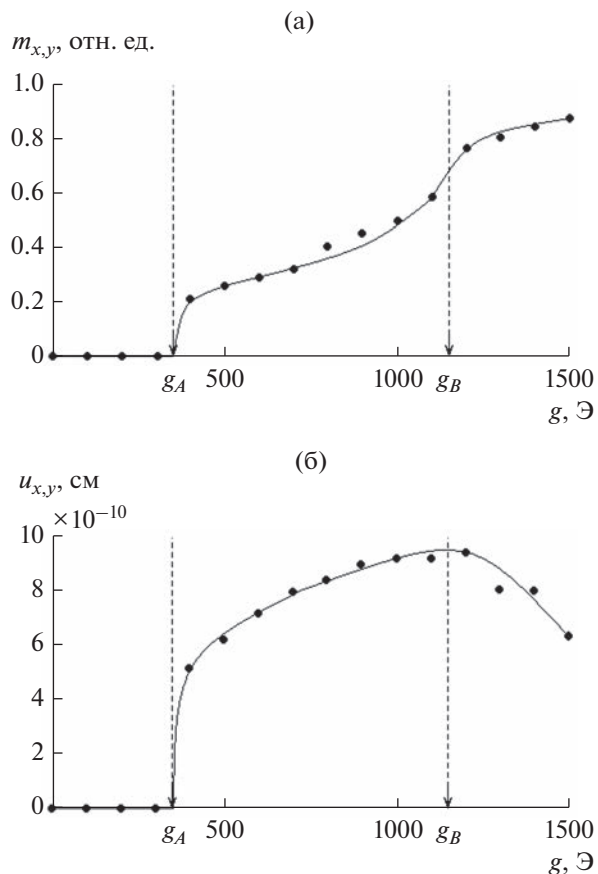


**Рис. 5.** Зависимости времени развития амплитуды колебаний намагниченности до уровня 0.1 от максимума (кривая 1) и до уровня полного максимума (кривая 2) от величины параметра связи, где  $g_A = 350$  Э,  $g_B = 1150$  Э; на вставке – те же зависимости в логарифмическом масштабе.

ние стационарной амплитуды (см. рис. 3 и 4), они полностью затухают (см. рис. 2).

Начиная с величины параметра связи больше  $g_A$ , т.е. когда степень обратной связи превышает пороговое значение, амплитуда колебаний намагниченности (см. рис. 6а) резко растет, что в свою очередь вызывает рост амплитуды колебаний упругого смещения (см. рис. 6б). Далее, поскольку упругая система нагружает магнитную, рост амплитуды колебаний намагниченности замедляется, проявляя тенденцию стремления к насыщению (рис. 6а при  $g \rightarrow g_B$ ). Уровень насыщения здесь определяется балансом энергии между поступлением от усилителя обратной связи и оттоком в решетку за счет релаксации. Амплитуда упругих колебаний также растет, постепенно при  $g \rightarrow g_B$  выходя на насыщение. Однако так продолжается только до тех пор, пока система пребывает в режиме стационарных автоколебаний (№ 2), т.е. пока колебания намагниченности остаются регулярными.

Дальнейшее увеличение обратной связи, т.е. параметра  $g$  выше  $g_B$ , приводит к срыву колебаний намагниченности со стационарного режима, прецессия теряет правильный круговой характер, становясь скачкообразной, в результате чего ко-



**Рис. 6.** Зависимости установившейся амплитуды колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) от величины параметра связи, где  $g_A = 350$  Э,  $g_B = 1150$  Э.

лебания намагниченности в ходе таких скачков “выскакивают” за уровень стационарного режима и их максимальная амплитуда снова увеличивается. Дальнейшее увеличение параметра связи снова приводит колебания намагниченности к насыщению, заметному уже при  $g$  больше 1300 Э (см. рис. 6а). Однако в этом случае насыщение происходит из-за того, что конус прецессии намагниченности раскрывается почти полностью, так что больше намагниченность увеличиваться просто не может по причине достижения максимально возможного значения, определяемого структурой спиновой решетки магнитного материала.

Амплитуда колебаний упругого смещения (см. рис. 6б), оставаясь довольно высокой, все же после  $g_B$  заметно падает, так как условия возбуждения упругих колебаний магнитными из-за хаотичности скачков намагниченности существенно ухудшается. То есть упругое смещение просто “не успевает” следовать за весьма быстрыми хаотически следующими скачками намагниченности.

4. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА ЗАТУХАНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ НА ВРЕМЯ РАЗВИТИЯ И АМПЛИТУДУ КОЛЕБАНИЙ

В режиме автоколебаний обратная связь как бы компенсирует потери энергии в колебательной системе, обусловленные ее процессами релаксации. Поскольку в данном рассмотрении главной является магнитная система, тогда как упругая является лишь ее нагрузкой, то на первом этапе будем полагать, что ведущую роль играет релаксация именно магнитной системы. В такой системе уровень потерь энергии определяется параметром затухания  $\alpha$ , входящим в уравнение (1). Таким образом, при большем значении этого параметра для реализации автоколебаний необходима большая величина обратной связи. Рассмотрим процесс развития автоколебаний при различных значениях параметра  $\alpha$ . Для большей общности будем следить как за магнитной, так и за упругой системами. Для простоты рассмотрения зададим уровень обратной связи фиксированным в области значений, при параметрах, принятых в предыдущем разделе, соответствующих режиму № 2 (см. рис. 5).

Рассмотрение развития колебаний во времени (см. разд. 2) показывает, что при изменении параметра затухания  $\alpha$  в системе реализуются те же режимы, что и при изменении параметра связи, только в обратном порядке благодаря взаимно противоположному действию этих параметров.

Критические значения параметра  $\alpha$ , при которых происходит смена режимов, обозначим через  $\alpha_B$  и  $\alpha_A$  (где  $\alpha_B < \alpha_A$ ). Так, при  $0 < \alpha < \alpha_B$  реализуется режим № 3 (хаотические автоколебания), при  $\alpha_B < \alpha < \alpha_A$  реализуется режим № 2 (стационарные автоколебания) и при  $\alpha_A < \alpha < +\infty$  реализуется режим № 1 (начальная релаксация).

Обратимся к рис. 7, где представлены зависимости времени развития амплитуды колебаний намагниченности до уровня 0.1 от максимума  $\tau_{pm}$  (1) и до уровня полного максимума  $\tau_{sm}$  (2), а также времени развития упругих колебаний до стационарного уровня  $\tau_{su}$  (3) от величины параметра затухания намагниченности  $\alpha$ . Как видим из рисунка, все зависимости ведут себя весьма сходным образом, причем всегда время  $\tau_{sm}$  несколько превышает время  $\tau_{pm}$ , так как оба они относятся к одной и той же системе, а время  $\tau_{su}$  несколько превышает оба эти времени, т.е. упругая система при раскачке немного отстает от магнитной вследствие собственной инерционности.

Все кривые имеют вид, обратный кривым, приведенным на рис. 5, т.е. также близки к обратной пропорциональности с тем отличием, что здесь отсчет по горизонтальной оси происходит в обратную сторону и начинается не с нуля, а со

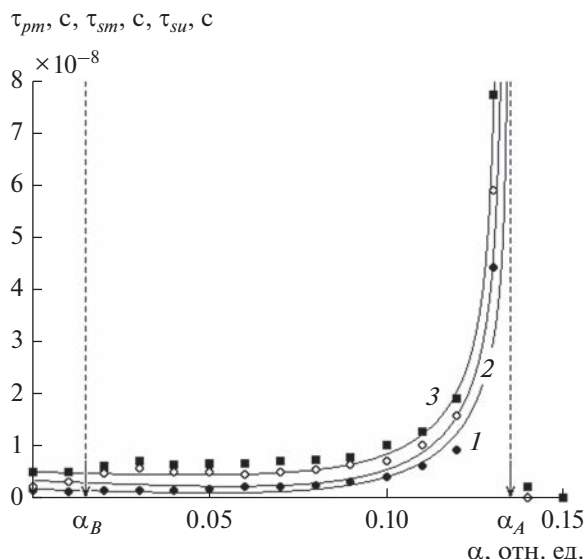
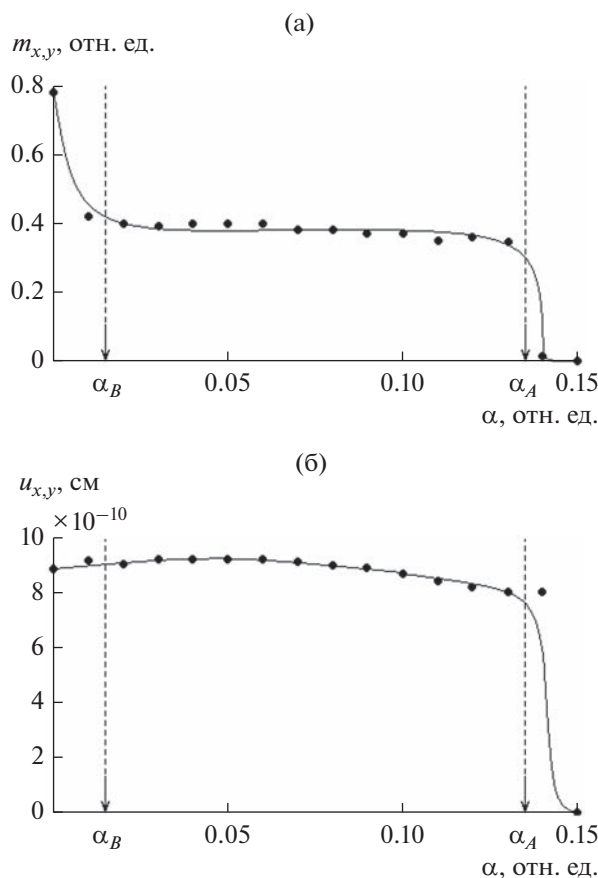


Рис. 7. Зависимости времени развития амплитуды колебаний намагниченности до уровня 0.1 от максимума  $\tau_{pm}$  (кривая 1) и до уровня полного максимума  $\tau_{sm}$  (кривая 2), а также времени развития упругих колебаний до стационарного уровня  $\tau_{su}$  (кривая 3) от величины параметра затухания намагниченности  $\alpha$ , где  $\alpha_B = 0.015$  отн. ед.,  $\alpha_A = 0.135$  отн. ед. (показаны вертикальными пунктирными линиями со стрелками на горизонтальной оси). Параметр связи  $g = 1000$  Э.

значения  $\alpha = \alpha_A$ . Таким образом, положение о взаимно обратном влиянии параметров затухания и связи на возбуждение автоколебаний полностью подтверждается.

Рассмотрим теперь амплитудные параметры возбуждаемых автоколебаний, для чего обратимся к рис. 8, где представлены зависимости установленной амплитуды колебаний намагниченности (а) и упругого смещения (б) от величины параметра затухания намагниченности  $\alpha$ .

Из рис. 8а видно, что при  $0 < \alpha < \alpha_B$ , где реализуется режим № 3, амплитуда колебаний намагниченности довольно высока, так что конус прецессии раскрывается почти полностью (до 0.8 отн.ед.). При  $\alpha_B < \alpha < \alpha_A$ , т.е. в режиме № 2, амплитуда колебаний намагниченности во всем интервале изменения  $\alpha$  сохраняется на постоянном уровне (около 0.4 отн.ед.), довольно удаленном еще от полного раскрыва конуса прецессии. При  $\alpha_A < \alpha < +\infty$ , т.е. в режиме № 1, автоколебания не реализуются, так что амплитуда колебаний намагниченности падает почти до нуля, оставаясь на уровне, задаваемом начальным смещением (согласно данным разд. 1,  $m_{x0}, m_{y0}$  равны 0.01 отн. ед.).



**Рис. 8.** Зависимости установившейся амплитуды колебаний намагнитченности (а) и упругого смещения (б) от величины параметра затухания намагнитченности  $\alpha$ , где  $\alpha_B = 0.015$  отн. ед.,  $\alpha_A = 0.135$  отн. ед. Параметр связи  $g = 1000$  Э.

Обращаясь к рис. 8б, видим, что при  $0 < \alpha < \alpha_B$ , т.е. в режиме № 3, амплитуда упругих колебаний ( $9 \times 10^{-10}$  см) не столь высока, как можно было бы ожидать исходя из высокого уровня кривой для намагнитченности на рис. 8а. При  $\alpha_B < \alpha < \alpha_A$ , т.е. в режиме № 2, амплитуда колебаний упругого смещения держится на постоянном уровне около  $9 \times 10^{-10}$  см, следуя постоянству амплитуды колебаний намагнитченности в этом интервале (см. рис. 8а).

Следует отметить, что в интервале  $0 < \alpha < \alpha_B$ , т.е. в режиме № 3, амплитуда имеет тот же уровень, что и в интервале  $\alpha_B < \alpha < \alpha_A$ , т.е. в режиме № 2, в обоих случаях  $9 \times 10^{-10}$  см. Можно полагать, что невысокий уровень амплитуды колебаний в режиме № 3 связан с тем фактом, что здесь колебания намагнитченности имеют скачкообразный хаотический характер, так что колебания упругой системы в промежутках между скачками

не успевают развиться до значительной амплитуды. То есть имеет место то же отставание упругой системы от скачков магнитной, что и загиб вниз кривой, приведенной на рис. 8б, при параметре связи, превышающем значение  $g_B$ .

Из рис. 8б видно, что при  $\alpha_A < \alpha < +\infty$ , т.е. при переходе в режим № 1, где автоколебания отсутствуют, амплитуда упругих колебаний резко падает, так как теперь уже обратная связь не компенсирует потери энергии и как магнитные, так и упругие колебания, начиная с уровня, заданного начальным смещением, постепенно полностью затухают.

Таким образом, с точки зрения наиболее эффективного возбуждения упругих колебаний большой амплитуды, предпочтительным является режим № 2, причем уровень магнитного затухания в допустимом интервале ( $\alpha_B < \alpha < \alpha_A$ ) не играет заметной роли, а интенсивность возбуждаемых колебаний задается уровнем обратной связи, как это можно видеть из рис. 8б.

## 5. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА ЗАТУХАНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ НА АМПЛИТУДУ ВОЗБУЖДАЕМОГО УПРУГОГО СМЕЩЕНИЯ

Все сказанное выше относится к влиянию затухания магнитной системы. При этом полагалось, что упругая система является нагрузкой при параметре упругого затухания, равном  $\beta = 10^9$  с<sup>-1</sup> (см. разд. 1).

Проверка роли затухания упругой системы показала, что при увеличении параметра  $\beta$  в 10 раз магнитные колебания не меняются, характер упругих колебаний также не меняется, однако их амплитуда уменьшается в 7 раз и появляется небольшое смещение нулевой линии (положения равновесия) вверх на величину в 10 раз меньшую амплитуды.

При уменьшении параметра  $\beta$  в 10 раз магнитные колебания также не меняются, задержка упругих колебаний не меняется (совпадает с задержкой магнитных), амплитуда плавно нарастет до уровня в 5–6 раз большего начальной. Время установления такой постоянной амплитуды превышает время задержки в 15–20 раз.

Таким образом, хотя условия самовозбуждения автоколебаний не меняются, однако для получения максимальной амплитуды упругих колебаний следует выбирать материал с меньшим значением параметра упругого затухания.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о генерации гиперзвуковых колебаний в схеме магнитоэлектрического преобразователя с положительной обратной связью. Приведена геометрия задачи, в основе которой

лежит обладающая магнитоупругими свойствами ферритовая пластина, намагниченная по нормали к ее плоскости. Обратная связь введена путем задания пропорциональной зависимости между амплитудой возбуждающего поля и амплитудой возбуждаемых этим полем колебаний намагниченности. Для характеристики такой зависимости введен “параметр связи”  $g$ , отражающий усиление сигнала в цепи обратной связи. При этом основной является магнитная система, а упругая система, в которой возбуждаются гиперзвуковые упругие колебания, является нагрузкой для магнитной системы.

Рассмотрено развитие магнитных и упругих колебаний во времени. По мере увеличения параметра связи выявлены три основных режима колебаний.

Режим № 1 – начальная релаксация. Режим № 2 – стационарные автоколебания. Режим № 3 – хаотические автоколебания. Исследовано влияние величины параметра связи на время развития и амплитуду колебаний. Выявлены два характерных значения параметра связи: первый соответствует переходу от режима № 1 к режиму № 2, а второй – от режима № 2 к режиму № 3. Показано, что ниже первого значения автоколебания вообще отсутствуют, между первым и вторым автоколебания имеют стационарный характер, а выше второго – хаотический. При этом зависимость времени развития автоколебаний до максимального значения амплитуды от величины параметра связи имеет вид обратной пропорциональности, начинаясь от бесконечности сразу после  $g_A$  и стремясь к нулю при стремлении параметра связи к бесконечности. Зависимость амплитуды колебаний намагниченности от параметра связи, начинаясь резким подъемом от значения  $g_A$ , плавно возрастает, стремясь к насыщению, соответствующему полному раскрытию конуса прецессии. Амплитуда упругих колебаний в основном повторяет рост амплитуды магнитных, несколько снижаясь после прохождения  $g_B$  из-за низкой эффективности возбуждения упругой системы хаотическими магнитными колебаниями.

Исследовано влияние величины параметра затухания намагниченности на время развития, характер и амплитуду возбуждаемых колебаний. Показано, что при изменении параметра затухания в системе имеют место те же три режима колебаний, теперь, по мере увеличения этого параметра, сменяющие друг друга в порядке, обратном порядку чередования режимов при увеличении параметра связи. Для характеристики смены режимов введены два характерных значения параметра затухания:  $\alpha_B$ , при котором режим № 3 сменяется режимом № 2, и  $\alpha_A$ , при котором режим № 2 сменяется режимом № 1. Показано, что время развития амплитуды колебаний имеет вид, подобный обрат-

ной пропорциональной зависимости при изменении параметра связи, с тем отличием, что здесь отсчет значений  $\alpha$  по горизонтальной оси происходит в обратную сторону и начинается не с нуля, а со значения  $\alpha = \alpha_A$ . Показано, что амплитуда магнитных колебаний при значениях параметра  $\alpha$  меньших  $\alpha_B$ , т.е. в режиме № 3, резко падает от величины, близкой к полному раскрытию конуса прецессии до примерно половины этого значения. При дальнейшем увеличении параметра  $\alpha$  в течение всего интервала между  $\alpha_B$  и  $\alpha_A$ , т.е. в режиме № 2, амплитуда колебаний сохраняется постоянной, после чего в режиме № 1 убывает до значения, соответствующего начальному смещению намагниченности. Амплитуда упругих колебаний ведет себя сходным образом, за исключением выброса при малых значениях  $\alpha$ , после чего сохраняется постоянной до полного спада намагниченности, где также убывает практически до нуля.

Кратко рассмотрено влияние параметра затухания упругой системы на характер возбуждаемых колебаний. Показано, что при увеличении или уменьшении параметра упругого затухания на порядок, колебания магнитной системы не меняются, а колебания упругой по амплитуде и времени развития следуют пропорциональному изменению параметра затухания.

В качестве практической рекомендации отмечено, что с точки зрения наиболее эффективного возбуждения упругих колебаний предпочтительным является выбор параметра связи (т.е. коэффициента усиления в цепи обратной связи), соответствующего режиму № 2, а упругую систему следует выбирать из условий наименьшего затухания.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бергман Л.* Ультразвук. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
2. *Ультразвук.* Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979.
3. *Такер Дж., Рэмpton В.* Гиперзвук в физике твердого тела / Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
4. *Каринский С.С.* Устройства обработки сигналов на ультразвуковых поверхностных волнах. М.: Сов. радио, 1975.
5. *Гуляев Ю.В.* // Проблемы современной радиотехники и электроники / Под ред. В.А. Котельникова. М.: Наука, 1980. С. 297.

6. *Голямина И.П.* // Физика и техника мощного ультразвука / Под ред. Л.Д. Розенберга. Кн. 1. Источники мощного ультразвука. М.: Наука, 1967. С. 111.
7. *Ле-Кроу Р., Комсток Р.* // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзон. Т. 3Б. Динамика решетки. М.: Мир, 1968. С. 156.
8. *Штраусс В.* // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзон. Т. 4Б. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир, 1970. С. 247.
9. *Моносов Я.А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
10. *Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
11. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2013. № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.
12. *Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 5. С. 482.
13. *Харкевич А.А.* Основы радиотехники. М.: Физматлит, 2007.
14. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1964.
15. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
17. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978.
18. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.
19. *Шавров В.Г., Щеглов В.И., Иванов А.П.* Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука. Сыктывкар: Коми республ. типография, 2021.
20. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.
21. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники 2017. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
22. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектроники 2017. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 531.715.1

# СИСТЕМА ЛАЗЕРНЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ С БОЛЬШИМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАЗНЕСЕНИЕМ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СЕЙСМО-ДЕФОРМАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ

© 2023 г. М. Н. Дубров<sup>а</sup>, \*, И. А. Ларионов<sup>б</sup>, Д. В. Александров<sup>а</sup>, В. В. Кравцов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>б</sup> Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, ул. Мирная, 7, с. Паратунка, Камчатский край, 684034 Российская Федерация

\*E-mail: mnd139@ire216.msk.su

Поступила в редакцию 23.12.2021 г.

После доработки 26.01.2022 г.

Принята к публикации 25.02.2022 г.

Рассмотрены полученные в течение 2016–2020 гг. результаты уникальных экспериментов по синхронной регистрации колебаний земной поверхности тремя лазерными интерферометрами-деформографами, разнесенными на расстояние 6740 км: два 100-метровых лазерных деформографа (Фрязино Московская область) и один 18-метровый (пункт “Карымшина” Камчатский край). Показано, что частотно-стабилизированные и термоуправляемые лазеры, а также системы регистрации сдвигов интерферограммы компенсационного и модуляционного типов обеспечивают абсолютное инструментальное разрешение 0.1...0.01 нм.

DOI: 10.31857/S0033849423070033, EDN: WOPJFW

### ВВЕДЕНИЕ

Среди экспериментальных методов и средств, используемых для исследования геофизических процессов, особое место занимают измерительные системы с пространственно разнесенными инструментами. Одной из важных задач обнаружения и идентификации сейсмических (акустических) явлений, которые можно квалифицировать, например, как предвестники или индикаторы процессов подготовки и развития крупного землетрясения, является способность системы выделять слабый полезный сигнал на уровне фоновых природных и антропогенных помех. Эти вопросы выходят на первый план, когда возникает проблема точного определения параметров слабого землетрясения или сейсмического события искусственного происхождения. Измерения деформаций твердой Земли, таких как расширение и сжатие, наклоны и сдвиги земной коры, являются фундаментальными методами исследования в геофизике, поскольку предоставляют для научного анализа первичную информацию о движениях геологической среды. Эти инструментальные методы [1–3] совместно с классическими гравиметрическими системами сейсмического мониторинга открывают новые возможности комбинированной обработки одно-временного измерения смещений и деформаций земли в поле сейсмической волны [4, 5]. Повыше-

ние точности регистрации сейсмических процессов, исследование природы и временной динамики сейсмо-деформационных волновых полей становятся особенно плодотворными при использовании пространственно-разнесенных систем синхронно работающих приборов [6–9].

В данной работе представлены результаты уникальных экспериментов, включающих синхронную регистрацию сейсмо-деформационных колебаний земной поверхности тремя лазерными интерферометрами, находящимися на расстоянии 6740 км друг от друга и установленными в асейсмической (Московская обл.) и сейсмически активной (Камчатский край) зонах. Предварительные результаты проводимых экспериментов были представлены на XI Международной конференции STRPEP-2020 в Паратунке [10]. В данной публикации приводится подробное описание используемых методов и инструментов, а также расширенный анализ регистрируемых данных и полученных результатов.

### 1. ЛАЗЕРНО-ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Волновые возмущения, возбуждаемые источником любой физической природы в сплошной



среде, можно представить в виде нестационарного векторного поля пространственных смещений  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) частиц среды. Смещения вызывают изменения давления или деформации среды в зависимости от ее реологических, механических и других физических свойств.

Простейшая задача детектирования акустической волны в жидкой или газовой среде решается путем измерения временных изменений давления в некоторой точке  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) внутри этой среды с помощью, например, микрофона, микробарографа и пр. Для регистрации направления и координат источника используют пространственно распределенную систему акустических датчиков.

Иные условия возникают в упругой сплошной среде. Ее уравнение движения

$$\begin{aligned} \partial^2 \xi_k / \partial t^2 = \chi \partial^2 \xi_m / \partial x_k \partial x_m + \\ + q \partial^2 \xi_k / \partial x_1^2 \quad (k, m = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1)$$

в левой части содержит вторые производные по времени компонент вектора смещений частиц, а в правой – комбинацию вторых производных по пространству смещений в некоторой заданной плоскости, например,  $x_1 = 0$  ( $\chi$  и  $q$  – размерные комбинации констант Ламе и материальных параметров среды).

В сейсмологии три составляющие вектора ускорения в левой части (1) измеряют акселерограммы. Трехкомпонентный датчик с известной диаграммой направленности может определять интенсивность волны и азимут источника колебаний. Локализация источника выполняется с использованием продольных и поперечных объемных волн (так называемых первичных Р и вторичных S сейсмических волн). Объем информации, получаемой от одного датчика, здесь увеличивается по сравнению с акустическим методом зондирования.

Данная работа направлена на повышение эффективности регистрации упругих волн в сплошной среде: применяем лазерные интерферометры, измеряющие напряжения (деформации) среды в правой части уравнения (1), которые описываются тензором второго ранга – шесть независимых компонент. Еще возрастает количество регистрируемых параметров и уравнений для их вычисления.

И далее мы применяем многокомпонентную лазерную тензометрическую антенну, состоящую из системы пространственно разнесенных лазерных интерферометров [6, 8], что позволяет наиболее полно реализовать преимущества разрабатываемого метода геофизического мониторинга.

В данной работе используем лазерные интерферометры-деформографы, регистрирующие изменения длины  $\Delta l$  выбранного базиса протяженностью  $l$ , относительная линейная деформация

определяется как  $\varepsilon = \Delta l / l$ . Инструменты длиной 18 и 100 м установлены в двух пунктах наблюдения, отличающихся друг от друга и сейсмичностью, и тектонической активностью. Интерферометры на Фрязинском лучеводном полигоне (подземной лучеводной линии) [10–15] расположены в асейсмической зоне Московской синеклизы [16]. Мощность осадочного чехла в районе полигона составляет 1400...1600 м, крупный, опущенный на глубину 3...4 км участок кристаллического фундамента – Подмосковский авлакоген находится в 20...30 км от места установки интерферометров [10, 16]. Удаленный лазерный интерферометр-деформограф работает в сейсмоактивном регионе в зоне тектонического разлома у восточного побережья Камчатки [17, 18].

В экспериментах применяются два типа лазерных интерферометров (рис. 1). Неравноплечие интерферометры (см. рис. 1а и 1в) измеряют линейную деформацию, которая определяет изменения длины большого плеча и выражается в долях длины волны лазера. Равноплечий интерферометр (см. рис. 1б), построенный по классической схеме Майкельсона, измеряет разность деформаций в двух взаимно перпендикулярных направлениях, что соответствует поперечной деформации сдвига параллельно гипотенузе треугольника, образованного плечами этого интерферометра.

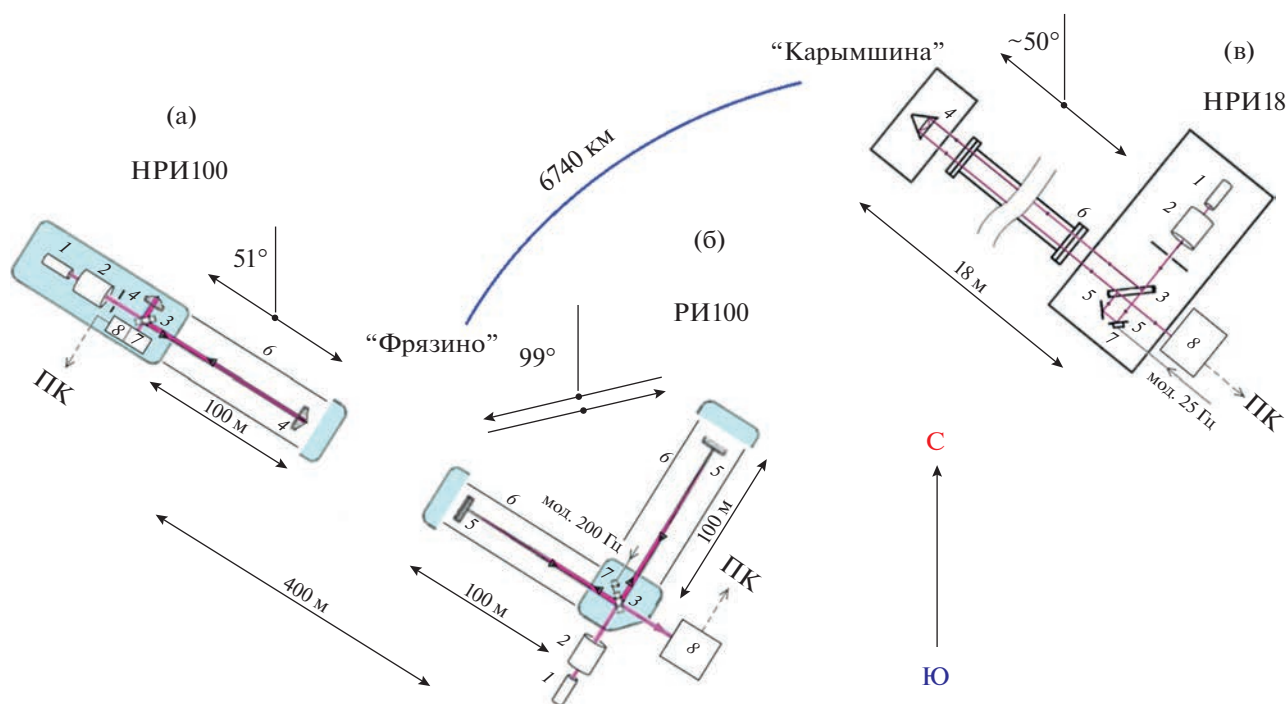
На Фрязинском лучеводном полигоне (далее – п. “Фрязино”) данные получены с использованием двух 100-метровых инструментов (см. рис. 1а и 1б) – неравноплечего интерферометра НРИ100 [15] и равноплечего РИ100 [11], расстояние между ними 400 м. Лазеры, оптические и электронные блоки расположены под землей на глубине около 1.5...2 м. Световые пучки проходят через наполненную воздухом подземную стальную трубу, которая частично связана с атмосферой.

Лазерный 18-метровый неравноплечий интерферометр НРИ18 (см. рис. 1в) установлен на поверхности земли на полуострове Камчатка (пункт комплексных геофизических наблюдений “Карымшина” [17, 18]). Оптические элементы смонтированы на обсадных трубах двух пятиметровых сухих скважин, расположенных на расстоянии 18 м друг от друга. Оптический путь экранирован герметичной трубой, которая защищена от ветра и осадков специальным укрытием.

Используются частотно-стабилизированные и термоуправляемые лазеры с длиной волны  $\lambda = 632.8$  нм. В неравноплечих интерферометрах остаточная нестабильность частоты  $\Delta \nu$  вызывает погрешность при измерении деформаций:

$$\varepsilon = \Delta l / l = \Delta \nu / \nu. \quad (2)$$

Относительная долговременная нестабильность частоты  $\Delta \nu / \nu$  для используемых лазеров составляет  $\sim 10^{-9}$  в течение часов и суток. Кратковременная



**Рис. 1.** Оптические схемы и ориентация в пространстве неравноплечих (а, в) и равноплечего (б) интерферометров-деформографов: 1 – лазер, 2 – коллиматор, 3 – светоделительная пластинка, 4 – трипель-призмный отражатель, 5 – зеркало, 6 – защитная труба, 7 – зеркальный гальванометр или модулирующий электромеханический (пьезокерамический) преобразователь, 8 – фотоприемник.

точность интерферометра улучшается в схемах терморегулирования оптической длины лазера и интерферометра [19]. Отсутствие принудительной модуляции резонатора лазера снижает кратковременную (1...10 с) нестабильность до  $10^{-12}$  при установке приборов в условиях подземной линии, что соответствует погрешности измерения 0.01...0.1 нм для интерферометров длиной 10...100 м. При таких измеряемых величинах важными становятся эффекты обратного оптического рассеяния, которые на порядки снижают реальную точность измерений. Ограничение на уровень оптической обратной связи лазера и интерферометра имеет вид [20]

$$D_i G \ll K_i / t^2, \quad (3)$$

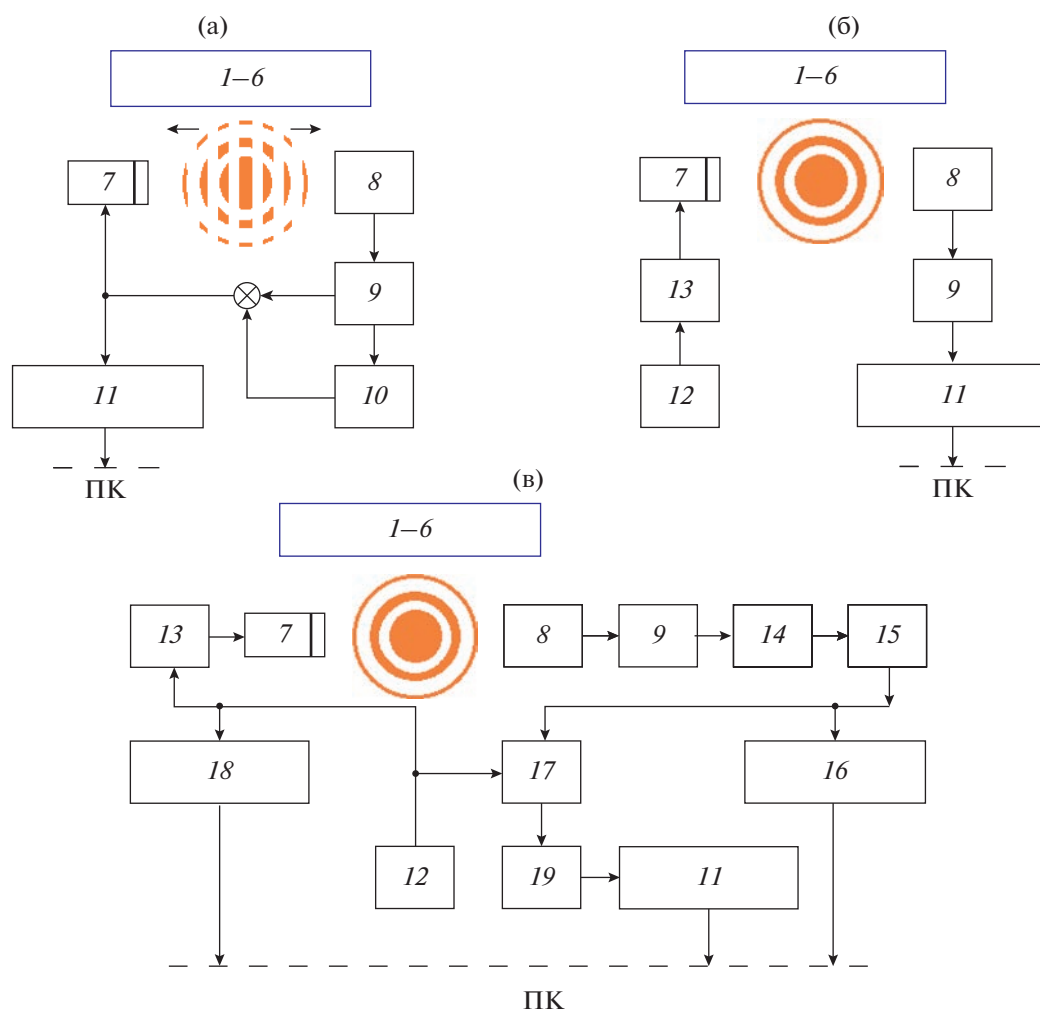
где  $K_i = l_i / l$  – отношение длин лазера  $l_i$  и интерферометра  $l$ ,  $t$  – коэффициент пропускания зеркала лазера,  $G$  – коэффициент отражения зеркал интерферометра, представляющий амплитуду волны  $TEM_{00}$ ,  $D_i$  – параметр усиления эффекта обратной связи, зависящий от метода стабилизации частоты лазера [20].

Сдвиги интерферограммы измеряют системой регистрации (в трех вариантах), преобразующей изменение длины интерферометра  $\Delta l$  в электрический сигнал (рис. 2а–2в). Образцы этих сигналов для инструментов НРИ100, РИ100 и НРИ18,

результаты их обработки и примеры регистрации землетрясений приведены на рис. 3 и 4.

НРИ100 снабжен компенсационной регистрирующей системой (см. рис. 2а), содержащей прозрачно-отражающую решетку (растр) в качестве датчика положения интерферограммы и исполнительный механизм в виде малоинерционного зеркального гальванометра 7,двигающего изображение интерферограммы вдоль раstra [21]. Фотоприемник 8, усилитель УПТ 9 и интегратор 10, подключенные к зеркальному гальванометру, образуют систему автоматического регулирования со статическим и астатическим звеньями в цепи обратной связи. Аналоговый выходной сигнал пропорционален смещению интерферограммы, ее период  $\lambda/2 = 316.4$  нм – масштаб калибровки. Диапазон частот данной модели системы ограничен сверху ( $\sim 100$  Гц), рекордное разрешение равно 0.01...0.001 нм в полосе 1 Гц [22]. Расширение динамического диапазона обеспечивает устройство автоматического переноса начала отсчета в нулевое положение при отклонении зеркала гальванометра до края решетки-раstra (рис. 3а, кривая 1), переносы удаляются при обработке (рис. 3а, кривая 2 и рис. 4а).

В РИ100 в п. “Фрязино” (см. рис. 2б) применяется система регистрации модуляционного типа. Электромеханический модулятор 7 питается синусоидальным напряжением опорной частоты 12, 13 и



**Рис. 2.** Функциональные блок-схемы систем регистрации неравноплечих (а, в) и равноплечего (б) интерферометров-деформографов: 1–6 – элементы интерферометров НРИ100, РИ100 и НРИ18 (см. рис. 1), 7 – модулятор, 8 – фотоприемник, 9 – усилитель, 10 – интегратор, 11 – АЦП, 12 – опорная частота, 13 – генератор модулирующего напряжения, 14 – полосовой фильтр, 15 – преобразователь синус-меандр, 16 – измерительный счетчик, 17 – фазовый детектор, 18 – опорный счетчик, 19 – ФНЧ.

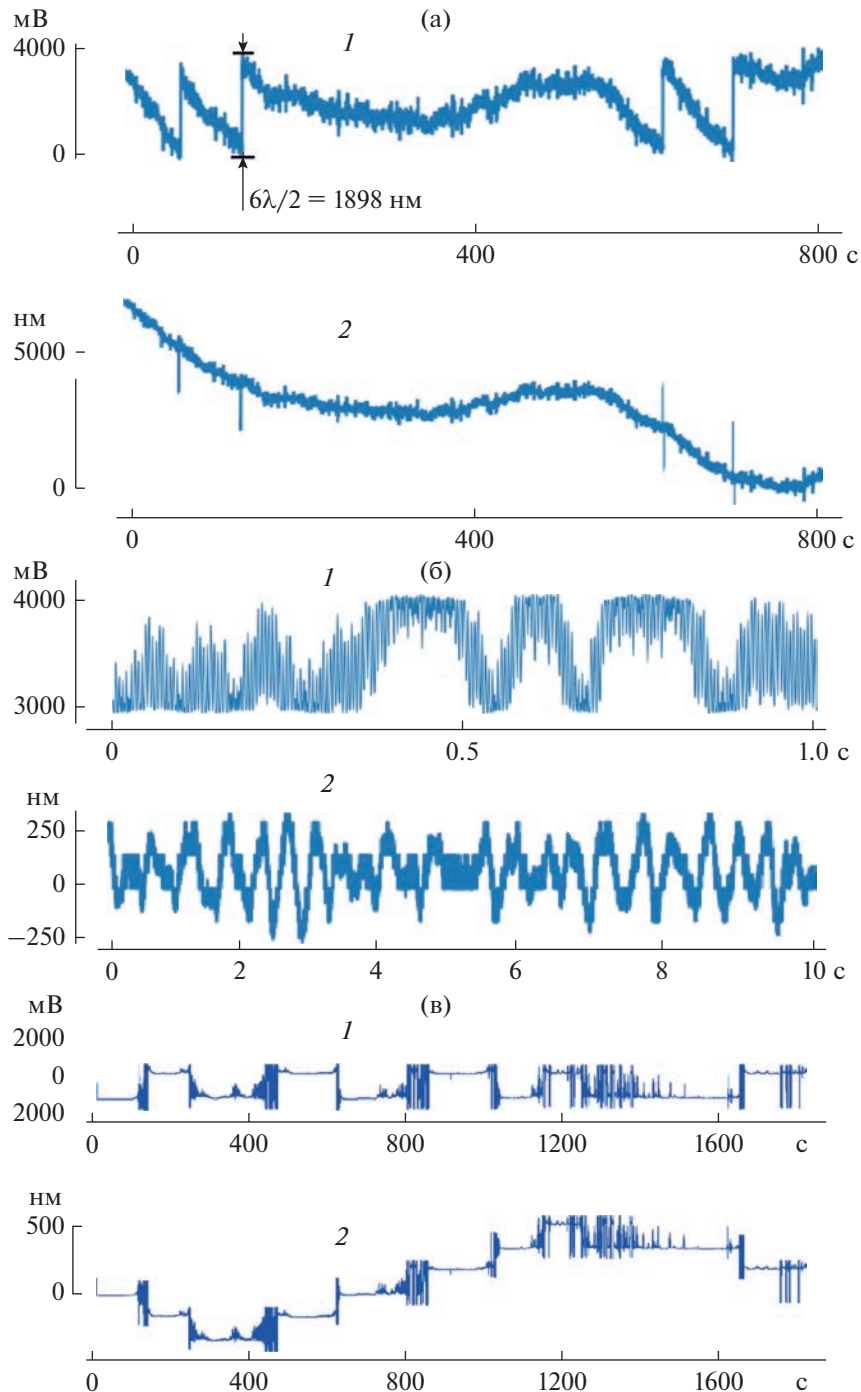
формирует интерференционный сигнал. Вычисление разности фаз в пределах  $0 \dots 2\pi$  и учет переходов через  $2\pi$  выполняет персональный компьютер ПК на стадии обработки. Разрешение системы  $0.1 \dots 1$  нм (рис. 3б и 4б).

В системе регистрации НРИ18 в п. “Карымшина” (см. рис. 2в) для выделения интерференционного сигнала используется пьезокерамический модулятор 7, подключенный к опорному генератору пилообразного напряжения 12, 13. Разность фаз между опорным (12, 13) и измерительным (8, 9, 14, 15) каналами измеряется фазовым детектором 17, а количество переходов через  $2\pi$  вычисляется на ПК как разность показаний измерительного и опорного счетчиков (см. рис. 2в, 16 и 18 соответственно). Базовая точность регистрирующей системы составляет  $\lambda/4 = 158$  нм, либо  $\lambda/2 = 316$  нм в зависимости от настройки (рис. 3в и 5г). Линеа-

ризация выхода фазового детектора позволяет улучшить разрешающую способность системы до  $0.1 \dots 1$  нм.

Для оцифровки сигналов в трех описанных системах используются 12...16-разрядные АЦП с частотой дискретизации до 2 кГц, результаты поступают и накапливаются в ПК.

В интерферометрах-деформографах с воздушно-наполненным защитным трактом присутствуют погрешности, связанные с изменениями показателя преломления воздуха, которые определяются температурой, влажностью и давлением окружающей атмосферы. Вклад первых двух факторов в термостабильных подземных помещениях не является существенным, но вариации атмосферного давления влияют на работу интерферометров любой конструкции [14, 23]. В этом случае



**Рис. 3.** Исходные записи интерференционных сигналов (1) в п. “Фрязино” для инструментов НРИ100 (а) и РИ100 (б) и в п. “Карымшина” для НРИ18 (в); результаты обработки соответствующих сигналов (2).

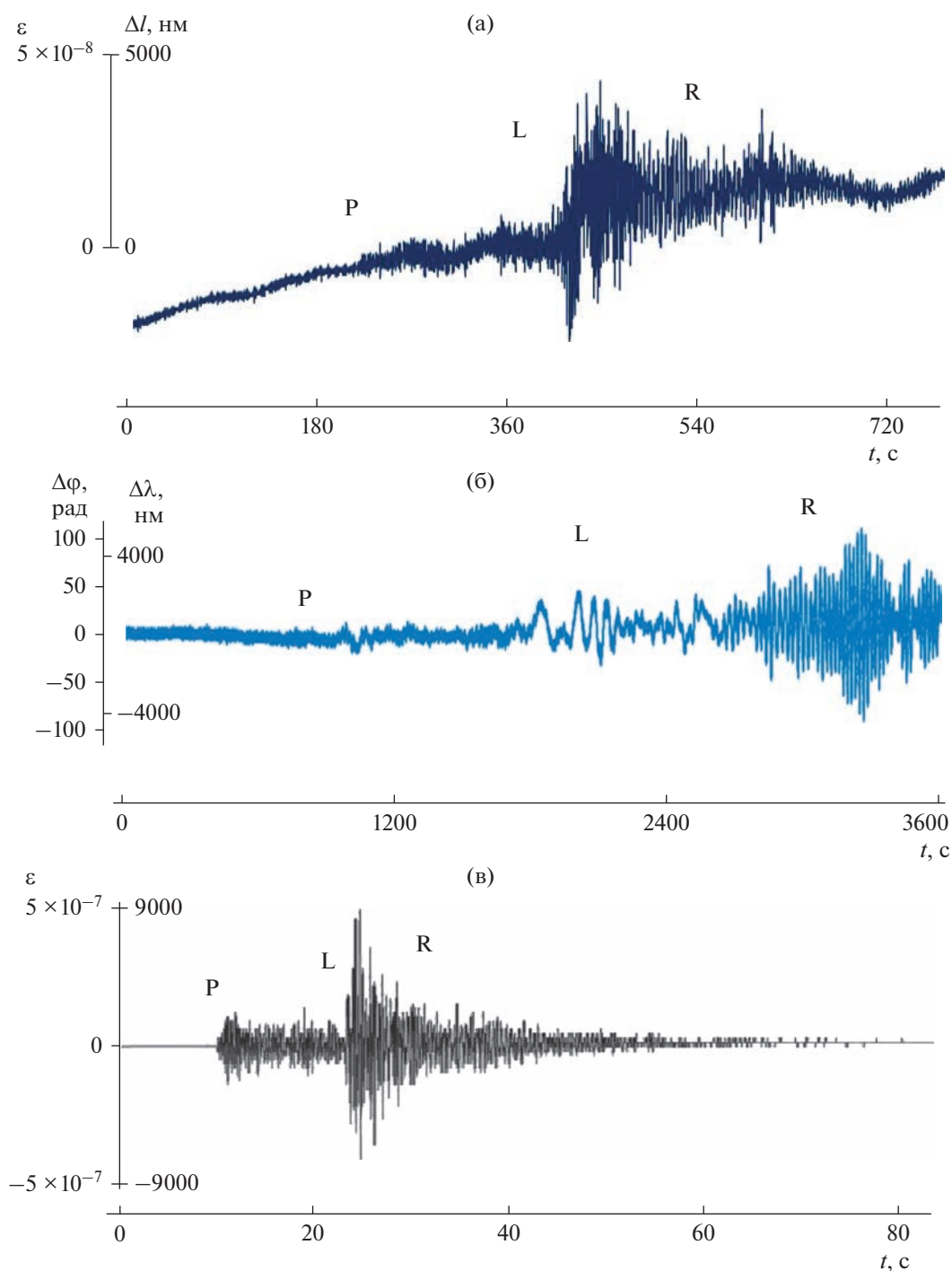
сигнал  $U$  на выходе системы регистрации лазерного интерферометра выражается соотношением

$$U = A\Delta l + B\Delta p, \quad (4)$$

где  $\Delta l$  – приращение длины деформографа,  $\Delta p$  – вариации атмосферного давления, коэффициент  $A$  – чувствительность интерферометра к деформациям,  $B$  – его барическая погрешность. Напри-

мер, для интерферометра НРИ100 в соответствии с рис. 3а величина коэффициента  $A = 2 \times 10^3$  В/мм. Второй коэффициент  $B$  в соответствии с расчетами [14] для герметизированного интерферометра изменяется в диапазоне

$$B_1 = 3.6 \times 20 \text{ мВ/мбар} = 72 \text{ мВ/мбар}, \quad (5a)$$



**Рис. 4.** Примеры регистрации удаленных землетрясений: 04.09.2018 г., Урал,  $m_b = 5.4$  (а), 16.09.2015 г., Чили,  $M_w = 8.3$  (б) и локального землетрясения 14.03.2016 г. у Восточного побережья Камчатки,  $M_p = 4.5$  (в).

а для свободно связанного с атмосферой —

$$B_2 = 72 \text{ В/мбар}. \quad (56)$$

Важно отметить, что коэффициент  $B_1$  (5а) для интерферометра-деформографа с герметизированной защитной трубой уменьшается всего лишь в  $\sim 4$  раза (до  $B_0 = 20$  мВ/мбар) при ее замене на ва-

кумированную [23]. Вместе с тем при частичной связи измерительного плеча интерферометра с внешней атмосферой ( $B_1 < B < B_2$ ) и измерении деформаций порядка прилива в твердой Земле  $\varepsilon = \Delta l/l \sim 10^{-8} \dots 10^{-7}$  оба слагаемых в соотношении (4) становятся близкими по абсолютной величине и прибор одинаково эффективно регистрирует ли-

**Таблица 1.** Данные Единой геофизической службы РАН (ЕГС) и Геологической службы США (USGS) о землетрясениях

Дата (UTC) гг-мм-дд	Время (USGS/ЕГС), чч:мм:сс	Широта (USGS/ЕГС)	Долгота (USGS/ЕГС)	Магнитуда: $M_w$ USGS/ $M_s$ ЕГС	Район (USGS/ЕГС)
2016-03-02	12:49:48	4.95° ю.ш.	94.3° в.д.	$M_w$ 7.8	Юго-западнее Суматры, Индонезия
	12:49:46	4.78° ю.ш.	94.26° в.д.	$M_s$ 7.5	
2017-09-08	04:49:19	15.0° с.ш.	93.9° з.д.	$M_w$ 8.2	101 км ЮЮВ от Трес Пикос, Мексика Побережье Чьяпас, Мексика
	04:49:19	15.0° с.ш.	93.69° з.д.	$M_s$ 8.3	
2020-01-28	19:10:24	19.42° с.ш.	78.8° з.д.	$M_w$ 7.7	Карибское м. (ССЗ от Люсии, Ямайка) Район Кубы (между Кубой и Ямайкой)
	19:10:25	19.54° с.ш.	78.8° з.д.	$M_s$ 7.7	

Примечание. См. ссылки: ЕГС – /www.ceme.gsras.ru/cgi-bin/new/catalog.pl; USGS – //earthquake.usgs.gov/earthquakes/.

нейную комбинацию деформаций земной поверхности и вариаций атмосферного давления. Это свойство интерферометра-деформографа дает интересную возможность для изучения особенностей деформационно-барических процессов и их взаимосвязи с геодинамическими явлениями, ответственными как за процессы подготовки и развития крупных землетрясений [24, 25], так и за их воздействие на атмосферу Земли [24, 26].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ СИНХРОННЫХ СЕЙСМОДЕФОРМАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Проанализируем наиболее крупные землетрясения, одновременно зарегистрированные интерферометрами в Московском регионе и на Камчатке в 2016–2020 гг. (табл. 1).

Особенностью сейсмограмм для интерферометров и деформографов любых типов является незначительная амплитуда короткопериодных объемных Р-волн по сравнению с записями стандартных сейсмических каналов [4]. Длиннопериодные поверхностные волны Релея (R) и Лява (L) имеют большие амплитуды и регистрируются интерферометрами с достаточной точностью (рис. 4а–4в).

Амплитуда деформации среды уменьшается с ростом длины сейсмической волны прямо пропорционально скорости ее распространения в среде [4, 6]. Скорости объемных Р-волн значительно превышают скорости локальных микросейсм, что затрудняет выделение Р-волн на фоне помех. Вместе с тем объемные телесеismicкие волны в пункте регистрации всегда имеют большие углы выхода [27], и поэтому интерферометр с горизонтальным плечом, обладая более узкой диаграммой направленности [6, 11], здесь опять

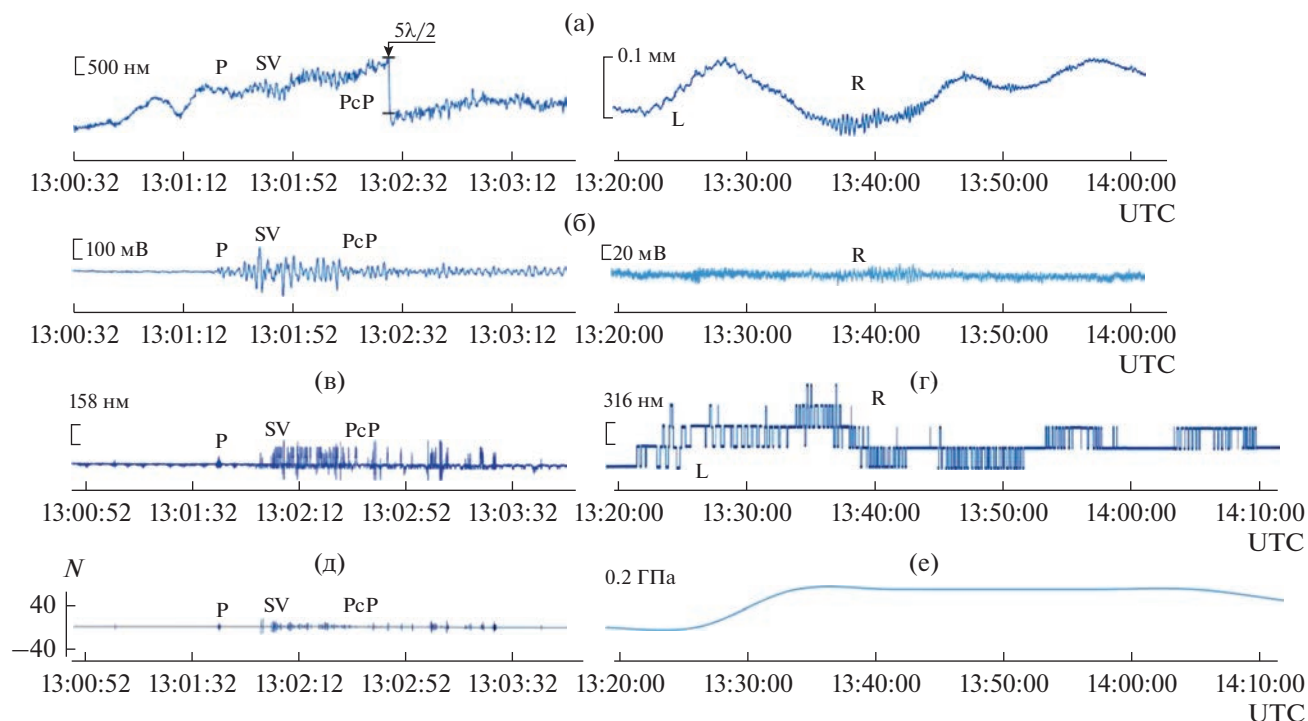
находится в менее благоприятной ситуации по сравнению со стандартным сейсмоприемником маятникового типа. Поэтому чувствительность и инструментальная точность приборов для измерения относительных деформаций  $\epsilon = \Delta l/l$  в поле сейсмической волны при пересчете на абсолютные смещения  $\xi_x$  отдельных частиц среды должны быть сопоставимы с соответствующими параметрами стандартных сейсмических приборов. К настоящему времени эти условия реализуются в наиболее совершенных лазерно-интерферометрических инструментах и установках [1, 4, 5, 28].

### 2.1. Регистрация и выделение короткопериодных объемных Р-волн

Предварительные результаты регистрации землетрясения 02.03.2016 г. (см. табл. 1) лазерными интерферометрами в п. “Карымшина” и “Фрязино” рассмотрены в наших предыдущих публикациях [10, 25]. Ниже приведем более подробный анализ полученного экспериментального материала и уточнения результатов детальной обработки данных.

Фрагменты записей землетрясения показаны на рис. 5. Первые три минуты записей содержат вступления объемной продольной Р-волны. Записи длиннопериодных поверхностных L- и R-волн в течение 30...40 мин после вступления объемных волн приведены в правых колонках рис. 5а, 5б, 5г.

Неожиданным оказалось, что цифровая система регистрации интерферометра НРИ18 в п. “Карымшина” (см. рис. 5в, 5д), обладая меньшей точностью в условиях низкого уровня микросейсмических помех, за счет ее нелинейных свойств зафиксировала вступление объемных волн с большей чувствительностью. Спектрально-временной анализ данных позволяет точнее определить вре-



**Рис. 5.** Фрагменты синхронной регистрации землетрясения  $M_w$  7.8 (юго-западнее Суматры 2016 г.), выполненные в п. “Фрязино” инструментом НРИ100 (а) и вертикальной Z-компонентой сейсмоприемника SNG-11 [29] (б) и в п. “Карымшина” инструментом НРИ18: сигнал на выходе фазового детектора (в), разность показаний измерительного и опорного счетчиков в нм (г) и единицах числа импульсов (д), вариации атмосферного давления в пункте “Карымшина” (е).

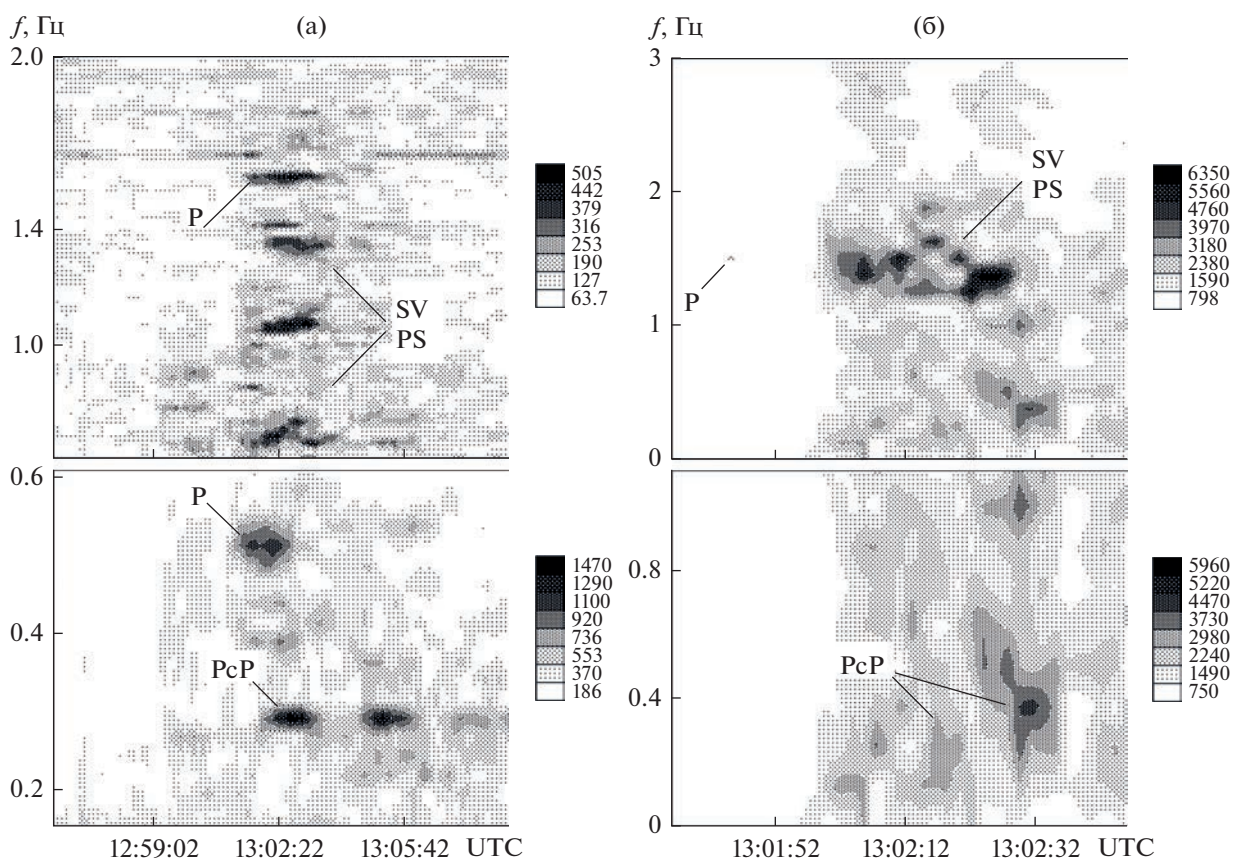
мена прихода, микроструктуру и частоты выделяемых волн (рис. 6).

Временная синхронизация удаленных инструментов осуществлялась по радиовещательным сигналам точного времени с погрешностью 1 с. Сравнение полученных результатов с данными ближайших сейсмических станций – Обнинск (ОВН) и Петропавловск-Камчатский (РЕТ) Единой геофизической службы РАН – представлено

в табл. 2. Времена прихода Р-волны согласуются с этими данными и соответствуют эпицентральному расстоянию: при возрастании  $\Delta$  пропорционально увеличивается время пробега волны от гипоцентра до пункта регистрации. Расчетные оценки для средних скоростей распространения: 12.15 км/с (“Фрязино”) и 12.22 км/с (“Карымшина”) согласуются с классической моделью Земли Джеффриса–Гутенберга [30, 31] и совпадают с

**Таблица 2.** Времена прихода Р-волны от землетрясения 02.03.2016 г. (Юго-западнее Суматры  $M_w$  7.8/ $M_s$  7.5;  $t_0 = 12:49:48...46$  UTC) по данным лазерных деформографов в пунктах “Фрязино”, “Карымшина” и сейсмических станций Обнинск и Петропавловск-Камчатский ([www.ceme.gsras.ru/](http://www.ceme.gsras.ru/))

Пункт	Эпицентральное расстояние, км	$\Delta$ , град	Время прихода (UTC), чч:мм:сс	Время пробега
“Фрязино”	8470	76.31	13:01:25	11 м 37 с
“Карымшина”	8740	78.74	13:01:45	11 м 57 с
Обнинск	8510	76.67	13:01:35.8	11 м 48 с
Петропавловск-Камчатский	8760	78.92	13:01:50.4	12 м 02 с



**Рис. 6.** Микроструктура спектрально-временных диаграмм времен прихода и частотных диапазонов объемных P- и PcP-волн, а также обменных PS- и SV-волн, выделенных в пунктах “Фрязино” (а) и “Карымшина” (б) после землетрясения 02.03.2016 г., Суматра. Справа от каждой диаграммы – распределения в координатах время–частота для спектральной яркости, ее уровни (отн. ед.).

оценками по сейсмическим данным станций Обнинска и Петропавловск-Камчатского с точностью 1.07 и 0.74% соответственно.

Интересен спектральный состав и временная (фазовая) структура выделенных волновых пакетов. P-волна, зарегистрированная в п. “Фрязино” в 13:01:25 UTC (см. рис. 5а), на спектрально-временной диаграмме состоит из ряда интерферирующих компонент в диапазоне 0.52...1.58 Гц (рис. 6а). При этом три из пяти компонент – 0.68, 1.06 и 1.36 Гц – появляются с задержкой ~30 с относительно P-волны, содержащей две лидирующие компоненты 0.52 и 1.58 Гц. Три запаздывающие компоненты можно интерпретировать как рассеянные SV- и обменные PS-волны [30, 31], возбуждаемые основной P-волной при ее отражении и прохождении через границы раздела, в данном случае – Подмосковский авлакоген [16] в 20...30 км от пункта установки приборов, а также границу Мохоровичича, залегающую здесь на глубине ~45...48 км. В отличие от приходящей снизу продольной P-волны, SV- и PS-волны содержат значительные тангенциальные компоненты смещений земной поверхности и хорошо регистрируются го-

ризонгально расположенными интерферометрами. Это особенно отчетливо проявляется на спектрально-временной диаграмме в п. “Карымшина” (рис. 6б). Запаздывающие на 20...40 с фазы SV- и PS-волн (группа компонент в районе 1.2...1.5 Гц) в шесть–восемь раз интенсивнее основной P-волны.

Четко на спектрально-временных диаграммах (см. рис. 6а и 6б) выделяются более низкочастотные, отраженные от земного ядра фазы PcP-волны [30, 31] с временем прихода 13:02:12 UTC (п. “Фрязино”) и 13:02:30 UTC (п. “Карымшина”), которые представлены спектральными компонентами в районе 0.29 и 0.37 Гц. Возможность разделения этих волн с помощью используемой методики представляется весьма интересной в связи с тем, что годографы Джеффриса для P- и PcP-ветвей на эпицентральных расстояниях вблизи  $\Delta = 80^\circ$  практически сливаются [30, 31].

Иная ситуация наблюдается при выделении объемных волн от более крупного землетрясения  $M_w$  8.2 (Мексика 08.09.2017 г.) (см. табл. 1). Это мощное сейсмическое событие зарегистрировано



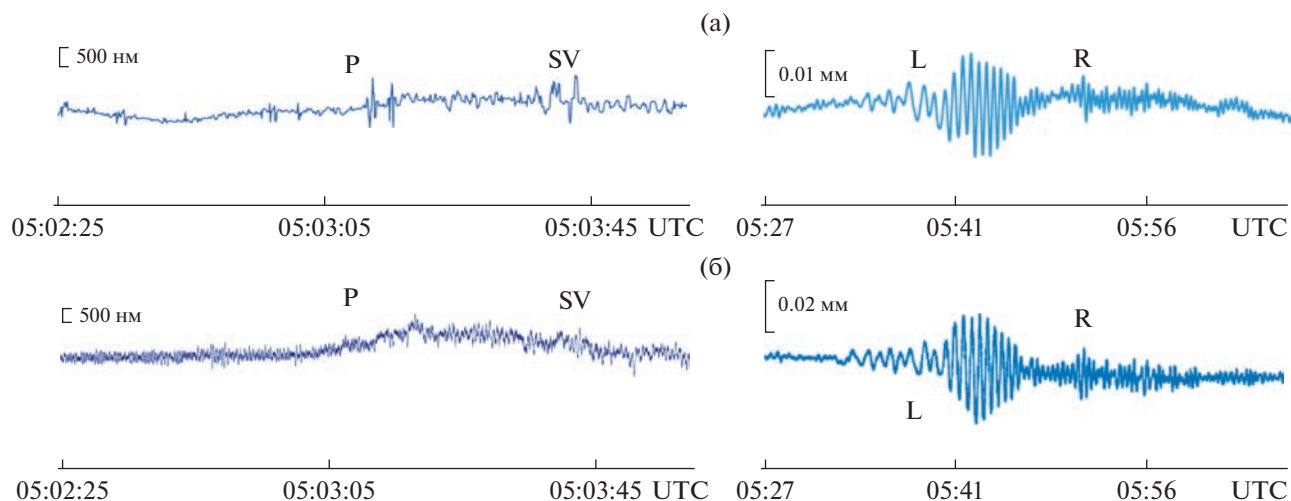


Рис. 7. Фрагменты записей землетрясения  $M_w$  8.2 (2017 г., Мексика), выполненные инструментами НРИ100 (а) и РИ100 (б) в п. “Фрязино”: приход объемных волн (слева), регистрация поверхностных волн (справа).

в п. Фрязино интерферометрами НРИ100 и РИ100, расположенными на расстоянии 0.4 км друг от друга [11, 15] (рис. 7). Смещения  $\Delta l$  в момент прихода Р-волны (05:02:51...52 UTC) не превышают 100...200 нм для интерферометра НРИ100 (см. рис. 7а) и находятся на уровне микросейсмических помех на записи интерферометра РИ100 (см. рис. 7б). Это объясняется величиной эпицентрального расстояния  $\sim 10930$  км ( $\Delta \sim 98.5^\circ$ ) для п. “Фрязино”, который находится на границе зоны тени как для прямой Р-волны, так и для отраженных и рассеянных волн [30, 31]. В результате оба прибора регистрируют интерферирующие цуги слабых дифрагированных волн каждого из указанных типов (см. рис. 7а и 7б).

Синхронные записи землетрясения 28.01.2020 (Карибское море), полученные интерферометрами в п. “Фрязино” и “Карымшина” приведены на рис. 8. Время в очаге 19:10:24...25 UTC указано вертикальными стрелками. Эпицентральное расстояние до обоих пунктов наблюдения здесь на 1300...1600 км больше, чем для землетрясения у берегов Суматры 2016 г. (см. начало данного подраздела), и траектория объемных волн соответственно ближе к зоне тени. Расчетное время вступления Р-волны на записях указано вертикальными линиями. Ее приход почти неразличим в п. “Фрязино” в связи с высоким уровнем микросейсм (а), и выделить волну возможно рассмотренным выше методом спектрально-временного анализа. Вступление Р-волны в п. “Карымшина” приходится на нелинейный участок характеристики системы регистрации с малым значением коэффициента преобразования  $A$  (см. формулу (4)), и амплитуда измеряемых колебаний становится меньше разрешающей способности систе-

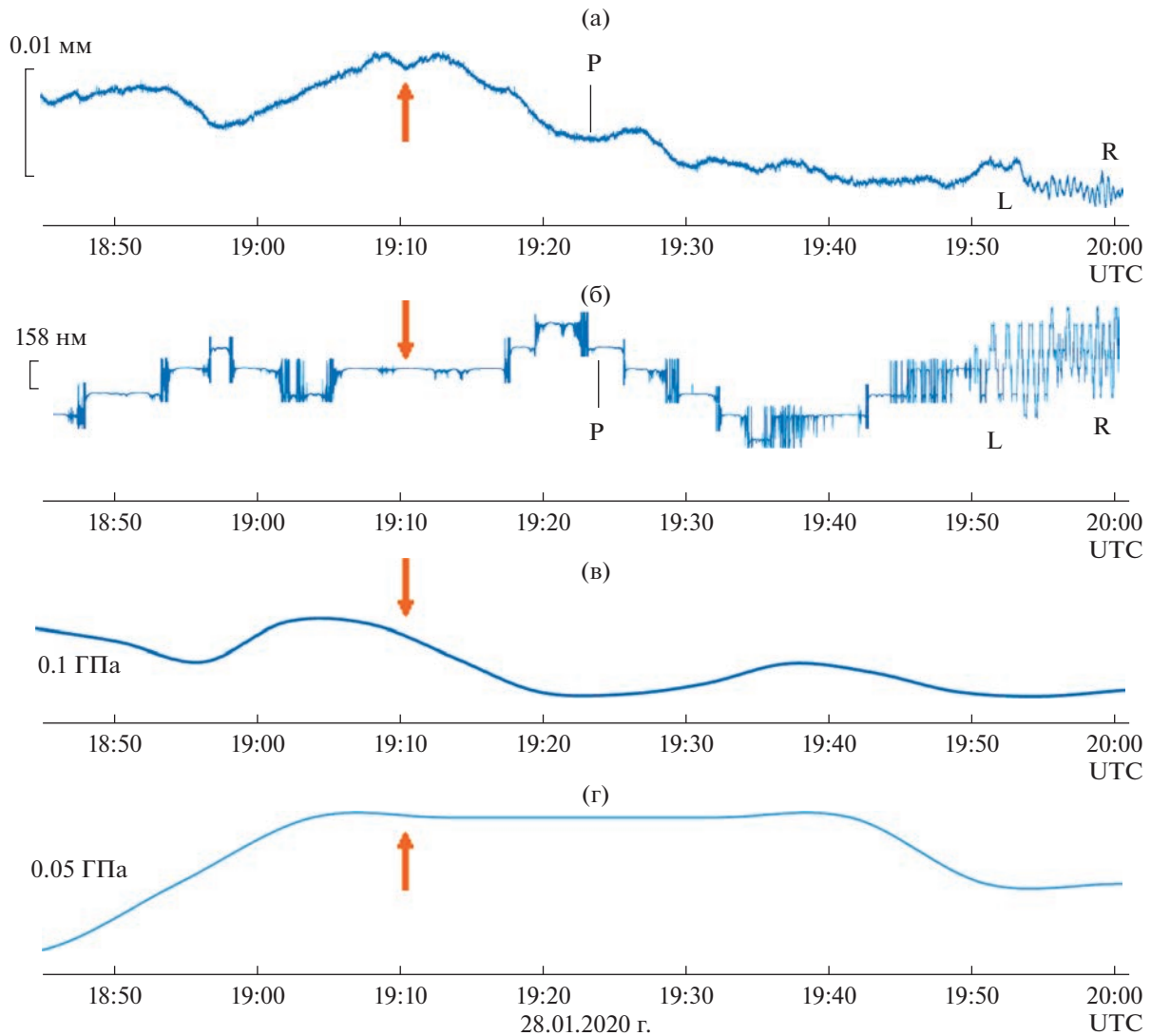
мы регистрации 1...0.1 нм, что на 18-метровой базе соответствует величине относительных деформаций порядка

$$\varepsilon = \Delta l / l \sim 10^{-10} \dots 10^{-11}.$$

## 2.2. Низкочастотные и сверхнизкочастотные сейсмодеоформационные колебания

Результаты регистрации низкочастотных (длиннопериодных) волн от рассматриваемых землетрясений (см. табл. 1) приведены в правых колонках на рис. 5а–5г и 7, в правых частях рис. 8а–8б и на рис. 9.

Поверхностные волны в п. “Фрязино” и “Карымшина” (см. рис. 5а и 5г) для цугов с максимальной амплитудой имеют характерные периоды 40...50 с (L-волны) и 15...25 с (R-волны). Базовая точность и масштаб записи на рис. 5г выражены в единицах  $\lambda/2 = 316$  нм. Поверхностная поперечная волна L не содержит вертикальной компоненты смещений и отсутствует на записи сейсмического Z-канала (см. рис. 5б справа). Волна R, содержащая вертикальную и горизонтальную компоненты, на этой записи имеет заметную, хотя и незначительную амплитуду вследствие резкого падения амплитудно-частотной характеристики сейсмического канала в диапазоне периодов больше 10 с (собственная частота маятника SNG-11 составляет 5 Гц [29]). Время прихода наиболее интенсивных цугов L- и R-волн в п. “Фрязино” и “Карымшина” составляет соответственно 13:23:30...50 и 13:37:10...40 UTC. С учетом эпицентральных расстояний каждого из пунктов (см. табл. 2) получены оценки средних скоростей распространения этих волн:  $V_L = 4.17 \dots 4.30$  км/с и  $V_R = 2.96 \dots 3.06$  км/с,



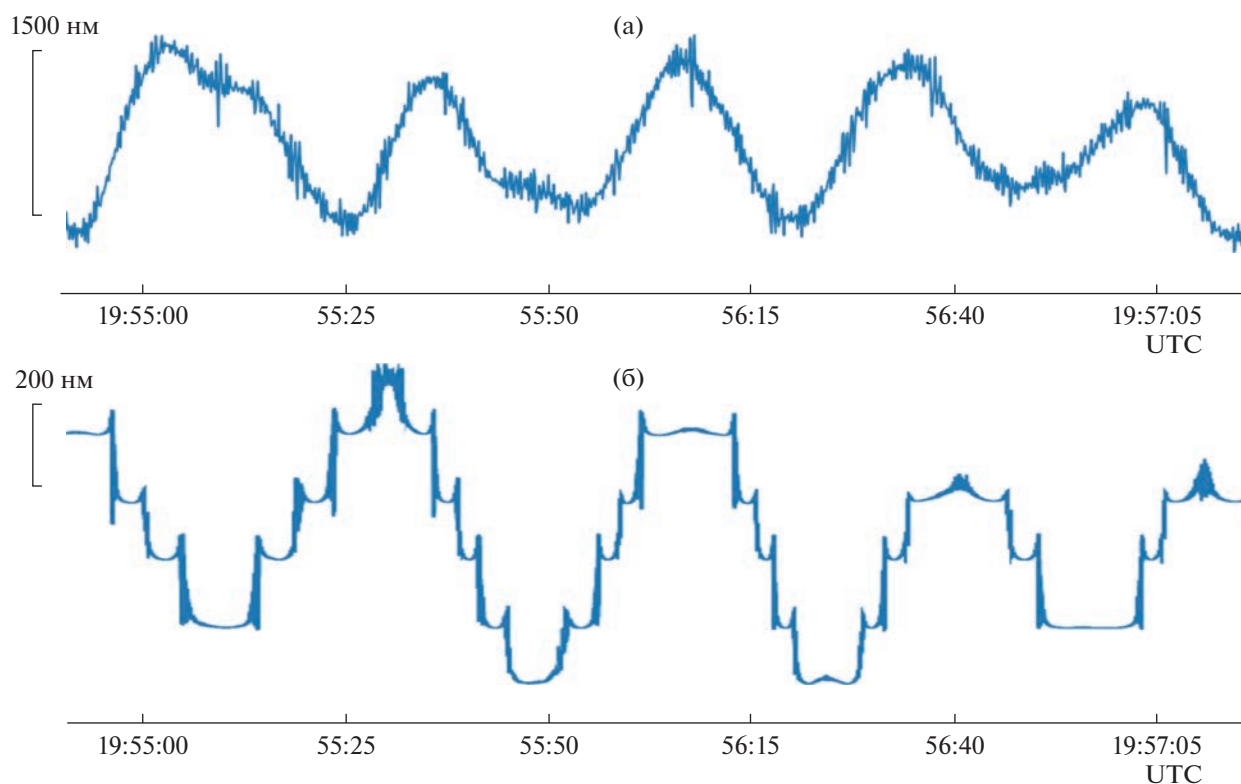
**Рис. 8.** Синхронные записи землетрясения  $M_w$  7.7 (2020 г., Карибском море), выполненные инструментами НРИ100 (а) и НРИ18 (б) и вариации атмосферного давления соответственно в п. “Фрязино” (в) и “Карымшина” (г).

которые хорошо согласуются с величинами групповых скоростей L- и R-волн по независимым сейсмическим и тензометрическим измерениям [31, 32].

Сравнение поверхностных L- и R-волн от мексиканского  $M_w$  8.2 землетрясения 08.09.2017, зарегистрированных двумя интерферометрами на Фрязинском лучеводном полигоне, дано в правой части рис. 7. Максимальные амплитуды L-волн сдвига для интерферометра РИ100 (рис. 7б справа) в 05:42 UTC достигают величины 20.2 мкм. Это примерно в два раза превышает максимальную амплитуду L-волн 10.5 мкм на записи интерферометра НРИ100 (рис. 7а слева). Расчетное отношение амплитуд для диаграмм направленности интерферометров РИ100 и НРИ100 в поле поперечной

волны равно 2 : 1 [6, 11], что с точностью ~ 4% соответствует экспериментально полученному значению.

Поверхностные L- и R-волны от землетрясения  $M_w$  7.7 в Карибском море 28.01.2020, зарегистрированные в п. “Фрязино” и “Карымшина” с 19:40 до 20:00 UTC совершенно различны (см. рис. 8а и 8б). Хотя разность эпицентральных расстояний для этих пунктов составляет всего лишь несколько процентов, волновые пути различаются и в момент их максимальных амплитуд в 19:55...19:58 UTC (рис. 9): характерные периоды колебаний в п. “Фрязино” и “Карымшина” — 30 и 35 с соответственно. Это объясняется разностью фазовых скоростей этих волн [31] и геологией среды на пути их распространения: сигнал из Карибского



**Рис. 9.** Синхронные записи поверхностных волн, вызванных землетрясением  $M_w$  7.7 (28 января 2020 г.): регистрация интерферометром НРИ100 “Фрязино” (а), регистрация интерферометром НРИ18 “Карымшина”, базовая точность  $\lambda/4 = 158$  нм (б).

бассейна приходит в п. “Фрязино” через Атлантику и Западную часть Евразии, тогда как в п. “Карымшина” волна проходит вдоль бортов Тихоокеанской и Северо-Американской тектонических плит.

Кроме стандартных длиннопериодных L- и R-волн на рис. 5 и 8 видны особые сверхдлиннопериодные (сверхнизкочастотные) колебания с характерными периодами 10...40 мин. Амплитуда этих колебаний в три-четыре раза превышает амплитуду L- и R-волн, что указывает на возможное их барическое происхождение. К настоящему времени нами накоплен опыт, свидетельствующий о связи наблюдаемых деформационно-барических процессов с активностью тропических циклонов в Мировом океане, часто предшествующих сильным землетрясениям и выступающим здесь в роли их триггерного механизма [25, 33].

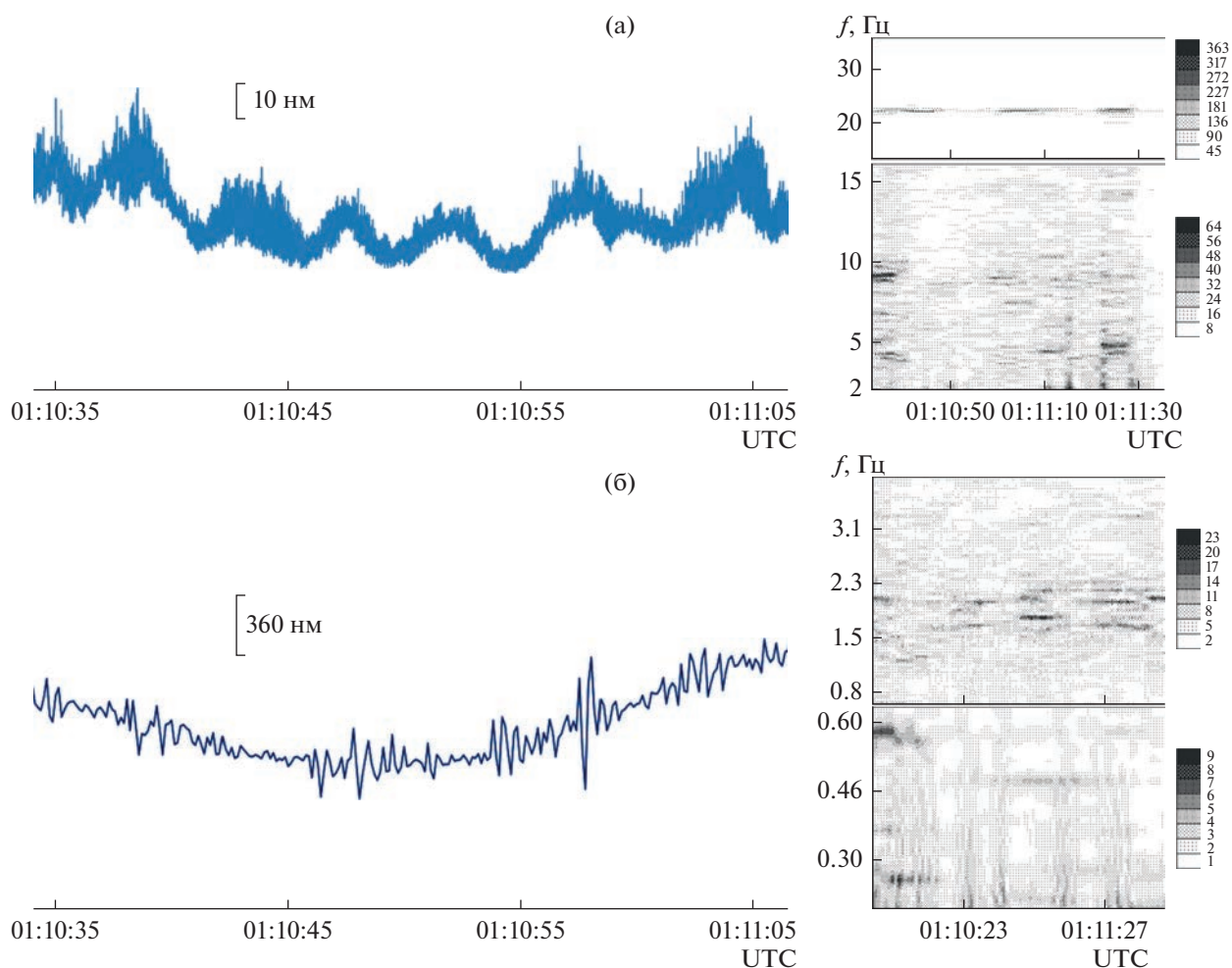
Так, землетрясение 02.03.2016 г. (Суматра,  $M_w$  7.8) можно связать с развитием мощного тропического циклона Winston (высшей категории 5 SSHWS) в южной части Тихого океана в феврале 2016 г. и завершением его активности 03.03.2016 г. у берегов Австралии. Карибское землетрясение 28.01.2020 г. (см. рис. 8) на границе

Северо- и Южно-Американской плит сопровождается очень редким явлением — развитием у берегов Бразилии (Южная Атлантика) субтропического циклона Kurumi 22–26.01.2020 г. и его ускоренным перемещением через границу раздела плит в сторону Африканской тектонической плиты.

Для обоих землетрясений (рис. 5 и 8) наблюдается корреляция сверхдлиннопериодных колебаний, зарегистрированных в пунктах “Фрязино” и “Карымшина” с характерной временной задержкой 7...8 мин. Подтверждением барического происхождения обнаруженных волн является корреляция сигналов лазерных интерферометров-деформографов и вариаций атмосферного давления (рис. 5е и 8в, 8г). Оценки деформационно-барического коэффициента  $B$  (4) для обоих инструментов в относительных единицах изменяются в пределах  $1...3 \times 10^{-7}$  ГПа $^{-1}$ .

### 2.3. Изучение синхронных записей микросейсмических деформаций

Микросейсмы непрерывно и повсеместно возбуждают земную кору в частотном диапазоне  $10^{-2}...10^2$  Гц. В диапазоне периодов более 1 с, они



**Рис. 10.** Синхронные записи микросейсмических деформаций и их спектрально-временные диаграммы, полученные в пунктах “Карымшина” (а) и “Фрязино” (б) 28 января 2020 г.

вызываются океаническим прибоем, ветром и крупными метеорологическими возмущениями в океанах. Микросейсм в частотном диапазоне выше 1 Гц обычно возбуждаются техногенными источниками и формируют пространственно распределенные частично когерентные сейсмические поля. Исследование свойств и поведения широкополосных микросейсмических колебаний рассматривается в качестве возможного метода изучения предвестников землетрясений [13, 25, 34].

Лазерный интерферометр позволяет исследовать характеристики микросейсм в широких диапазонах частот и амплитуд. Вместе с тем система пространственно разнесенных лазерных интерферометров в состоянии определить когерентные свойства детектируемых микросейсмических полей. В течение 2016–2020 гг. лазерными интерферометрами в п. “Фрязино” и “Карымшина” выполнен ряд сеансов синхронного измерения микросейсмических деформаций. Примеры анализа

данных, полученных за 18 ч до землетрясения  $M_w$  7.7 в Карибском море 2020 г. (см. табл. 1), приведены на рис. 10.

Система регистрации интерферометра НРИ18 (п. “Карымшина”) в линейном режиме фиксирует 4...6 с штормовые микросейсм (см. рис. 10а слева). Их относительно большая амплитуда 10...20 нм объясняется близостью (30...40 км) прибора на тихоокеанском побережье. Обычные амплитуды 4...6 с штормовых микросейсм из Атлантики, регистрируемые в Московском регионе (1000...1200 км до океанического побережья) составляют единицы нанометров для лазерного интерферометра такой же длины, установленного в глубокой штольне [3]. Синхронно работающий 100-метровый интерферометр в п. “Фрязино” фиксирует 0.3...0.4 с техногенные микросейсм (см. рис. 10б слева). Их амплитуды возрастают до 200...300 нм днем и уменьшаются в несколько раз в ночной период.

Результаты спектрально-временного анализа высокочастотных микросейсм показаны на (рис. 10 справа). В п. “Карымшина” (см. рис. 10а справа) выделяются пики на частотах 4.5, 9.1 и 14 Гц. Узкий и интенсивный пик 22 Гц является достаточно когерентным и обусловлен резонансными свойствами конструкции прибора. На спектрограммах интерферометра в п. “Фрязино” (см. рис. 10б справа) обнаруживаются следующие пики: 0.27, 0.49 и 0.59 Гц. Расщепленный спектральный пик на частоте около 1.9 Гц выделяется на верхней части спектрограммы рис. 10б и демонстрирует здесь умеренные когерентные свойства. Следует отметить, что сильное расщепление этого спектрального пика мы наблюдали с помощью этого же 100-метрового лазерного деформографа перед крупным  $M_w$  8.3 землетрясением в Чили 16 сентября 2015 г. [25].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены и проанализированы результаты уникальных экспериментов по синхронной регистрации сейсмодформационных колебаний поверхности Земли тремя лазерными интерферометрами с измерительными базами 18...100 м, разнесенными на расстояние 6740 км. Используемые методы и достигнутые результаты, судя по опубликованным к настоящему времени данным, являются оригинальными и получены впервые.

Применяемые в качестве источников излучения, частотно-стабилизированные и термоуправляемые лазеры совместно с регистрирующими системами компенсационного и модуляционного типов, измеряющими сдвиги интерферограммы, обеспечивают абсолютное инструментальное разрешение 0.1...0.01 нм на интерферометрических базах протяженностью до 100 м.

Эффективность предложенных методов продемонстрирована на примерах регистрации удаленных землетрясений  $M_w$  7.7...8.2 и выделения используемых в сейсмологии объемных и поверхностных волн. Представлены результаты спектрального анализа данных, полученных в сеансах синхронных наблюдений в течение 2016–2020 гг. Проведено сравнение результатов регистрации с данными региональных и глобальных сейсмических служб. Развитие предложенных методов может быть полезно для обнаружения и идентификации предвестников крупных сейсмических событий и других опасных природных явлений.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (тема 0030-2019-0014) и ИКИР ДВО РАН (тема АААА-А21-121011290003-0).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takemoto S., Momose H., Araya A. et al.* // J. Geodynamics. 2006. V. 41. № 1–3. P. 23.
2. *Amoruso A., Crescentini L.* // J. Geodynamics. 2009. V. 48. № 3–5. P. 120.
3. *Volkov V.A., Dubrov M.N.* // Marees Terrestres Bull. d'Informations. 2014. V. BIM-148. P. 11971.
4. *Николаев А.В., Луканенков А.В., Дубров М.Н.* // ДАН. 2010. Т. 430. № 6. С. 816.
5. *Barbour A.J., Agnew D.C.* // Bull. Seismological Soc. Amer. 2012. V. 102. № 6. P. 2484.
6. *Дубров М.Н., Матвеев Р.Ф.* // РЭ. 1998. Т. 43. № 9. С. 1147.
7. *Spudich P., Fletcher J.B.* // Bull. Seismological Soc. Amer. 2008. V. 98. № 4. P. 1898.
8. *Dubrov M.N., Aleksandrov D.V.* // Proc. 6th Int. Conf. Antenna Theory and Techniques. Sevastopol. 17–21 Sep. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. P. 307.
9. *Долгих Г.И.* // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. № 20. С. 46.
10. *Aleksandrov D., Dubrov M., Kravtsov V., Larionov I.* // Proc. XI Int. Conf. Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors. Paratunka. 22–25 Oct. 2020. Ser. E3S Web of Conf. V. 196. Les Ulis: EDP Sci. 2020. Article № 02010.
11. *Дубров М.Н., Кармалева Р.М.* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 7. С. 81.
12. *Вардя В.П., Дубров М.Н., Коршунов И.П., Матвеев Р.Ф.* // РЭ. 1978. Т. 23. № 10. С. 2068.
13. *Dubrov M.N., Alyoshin V.A.* // Tectonophysics. 1992. V. 202. № 2–4. P. 209.
14. *Дубров М.Н., Латынина Л.А., Матвеев Р.Ф., Пономарев А.В.* // Физика Земли. 1998. № 12. С. 22.
15. *Александров Д.В., Дубров М.Н., Крайцов В.В.* // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 2. С. 44.
16. *Колосова Н.Н., Чурилова Е.А.* Атлас Московской области. М.: Просвещение, 2004. С. 11.
17. *Ларионов И.А., Непомнящий Ю.А.* // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 3. С. 85.
18. *Маранулец Ю.В., Руленко О.П., Ларионов И.А., Мищенко М.А.* // ДАН. 2011. Т. 440. № 3. С. 403.
19. *Дубров М.Н.* Устройство для измерения перемещений и деформаций объектов. Пат. РФ № 2336495. Оpubл. офиц. бюл. “Изобретения. Полезные модели” № 29 от 20.10.2008.
20. *Дубров М.Н.* Длиннобазовая лазерная интерферометрия: учет обратного рассеяния. М.: МФТИ, 2011.
21. *Дубров М.Н.* Следящая система для оптических интерферометров. А. с. СССР № 720292. Оpubл. Б.И. № 9 от 05. 03.1980.

22. *Dubrov M.N., Medvedev P.V.* // Proc. 4th Int. Conf. on Advanced Optoelectronics and Lasers. Alushta. 29 Sep.–4 Oct. 2008. N.Y.: IEEE, 2008. P. 165.
23. *Бергер Д., Ловберг Р.* // Приборы для научных исследований. 1969. Т. 40. № 12. С. 41.
24. *Дубров М.Н., Смирнов В.М.* // Геомагнетизм и аэрономия. 2013. Т. 53. № 1. С. 53.
25. *Aleksandrov D.V., Dubrov M.N., Larionov I.A. et al.* // J. Volcanology and Seismology. 2019. V. 13. № 3. P. 193.
26. *Захаров В.И., Пилипенко В.А., Грушин В.А., Хамидуллин А.Ф.* // Солнечно-земная физика. 2019. Т. 5. № 2. С. 114.
27. *Аветисов Г. П.* // Геофизические методы разведки в Арктике. Л.: НИИГА, 1974. Вып. 9. С. 96.
28. *Лоборев В.М., Перцев С.Ф., Судаков В.В. и др.* Физика ядерного взрыва. Т. 5. Контроль ядерных испытаний. М.: Физматлит, 2017. С. 161.
29. SNG-11D/GSC-11D/OPEN. Проспект фирмы GeoSpace. Houston., 2006. <https://ds.iris.edu/ds/nrl/sensor/geospace/gs-11d/>.
30. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
31. *Жарков В.Н.* Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука, 1983.
32. *Karmaleyeva R.M., Latynina L.A., Savarensky E.F.* // Pure and Appl. Geophys. 1970. V. 82. № 1. P. 85.
33. *Volkov V., Mrlina J., Dubrov M. et al.* // Geodesy and Geodynamics. 2020. V. 11. № 6. P. 442.
34. *Sobolev G.A.* // Natural Hazards and Earth Systems. Sci. 2011. V. 11. № 2. P. 445.

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 004.89

### ПОВЫШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЕЙ НА СТАДИИ ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ

© 2023 г. А. Е. Васильев<sup>а</sup>, \*, А. В. Вегнер<sup>а</sup>, Д. Е. Голубева<sup>а</sup>, А. С. Доценко<sup>а</sup>, В. А. Карпенко<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
Лоцманская ул., 3, Санкт-Петербург, 190121 Российская Федерация

\*E-mail: avasil@corp.smtu.ru

Поступила в редакцию 09.09.2022 г.

После доработки 17.02.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

Предложен подход к реализации процедуры дефаззификации в микропроцессорных системах нечеткой обработки информации. Рассмотрена вычислительно-эффективная модель операции дефаззификации, основанная на использовании понятия меры справедливости логического заключения как композиции текущих значений достоверности всех элементов условной части правила, предлагающего это заключение. Применение подхода обеспечивает существенное повышение качества нечеткой аппроксимации при незначительной сложности алгоритмических и аппаратно-программных средств. Приведены примеры использования данного подхода в практических задачах.

DOI: 10.31857/S0033849423060153, EDN: XNQWMZ

#### ВВЕДЕНИЕ

Современные адаптивные системы, реализуемые с применением нечетких вычислителей, активно применяются в задачах управления широким спектром технических объектов различного назначения [1–6]. Характер требований, предъявляемых к таким системам управления, зачастую приводит к необходимости разрешения разработчиком дилеммы, заключающейся в выборе одного из двух антагонистических критериев оптимизации нечеткого вычислителя — максимизации точности операций нечеткого вывода или минимизации затрат ресурсов: следование первому критерию вынуждает разработчика применять вычислительные схемы, влекущие за собой существенное усложнение аппаратной части или (при программной реализации вычислителя) увеличение тактовой частоты процессора для обеспечения требуемого темпа нечеткой обработки потока входных данных. Усложнение же аппаратной части вычислительной системы, равно как и повышение тактовой частоты ее работы, влечет за собой снижение сбоеустойчивости и рост энергопотребления [7, 8]. Наиболее явственно такая дилемма заметна при решении задач аппроксимации вычислительно-сложных функций на бортовых процессорах с применением методов нечеткой обработки информации [9, 10].

Таким образом, актуальной задачей развития методов и средств интеллектуальной обработки данных в бортовых системах управления является

задача оптимизации нечеткого вычислителя: повышение достигаемой точности при одновременном снижении затрат ресурсов. Очевидно, что, как и для любой вычислительной системы, существует два основных пути оптимизации нечеткого вычислителя: структурный и алгоритмический.

В работе нечеткого вычислителя можно выделить три основные стадии: фаззификацию, нечеткий логический вывод и дефаззификацию; следует отметить, что наиболее тесно с алгоритмическими процессами обработки связана именно стадия дефаззификации [11–14].

Синтез аппаратных структур, обеспечивающих оптимизацию первой и второй стадий работы нечеткого вычислителя, рассматривался, в частности, в статьях [15, 16].

В данной статье речь пойдет о синтезе вычислительной модели и алгоритма ее расчета, обеспечивающих оптимизацию работы нечеткого вычислителя на стадии дефаззификации.

#### 1. ТИПОВЫЕ МОДЕЛИ ОПЕРАЦИИ ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ

В настоящее время математический аппарат теории нечетких множеств предлагает значительное количество методов дефаззификации и их вариаций, в том числе, как указывается в [17]: AI (adaptive integration), BADD (basic defuzzification distributions), BOA (bisector of area), CDD (constraint decision defuzzification), COA (center of area),

COG (center of gravity), ECOA (extended center of area), EQM (extended quality method), FCD (fuzzy clustering defuzzification), FM (fuzzy mean), FOM (first of maximum), GLSD (generalized level set defuzzification), ICOG (indexed center of gravity), IV (influence value), LOM (last of maximum), MeOM (mean of maxima), MOM (middle of maximum), QM (quality method), RCOM (random choice of maximum), SLIDE (semi-linear defuzzification), WFM (weighted fuzzy mean) и др. [17].

Установлено, что применяемый в нечетком вычислителе метод дефаззификации оказывает существенное влияние на результаты нечетких вычислений (рис. 1 [18]).

Анализ технических решений, применяемых при построении систем управления на основе нечетких вычислителей, показывает, что к одной из наиболее широко распространенных на практике моделей операции дефаззификации относится модель “средневзвешенное максимумов” [19]. Популярность этой модели объясняется простотой технической реализации стадии дефаззификации как в аппаратном, так и в программном обеспечении нечетких вычислителей [20].

К изъянам указанной модели, на которых следует остановиться подробнее, относится недостаточно высокая точность нечетких вычислений на границах зон действия правил. Поясним сказанное на двух характерных примерах, носящих иллюстративный характер. В системе проектирования Fuzzy51 [21] создадим нечеткий контроллер (рис. 2), обеспечивающий изменение угла наклона отрезка посредством изменения параметра  $k$ :  $y := kx$  (отметим, что исходя из специфики данной зависимости при описании каждого из термов достаточно использовать кусочно-линейные функции принадлежности). Создадим также нечеткий контроллер (рис. 3), обеспечивающий изменение амплитуды квадратичной зависимости посредством изменения коэффициента усиления  $k$ :  $y := k(x - 127.5)**2$  (исходя из специфики данной зависимости при описании термов переменной  $x$  необходимо использовать нелинейные функции принадлежности). Анализ результатов динамического тестирования обоих контроллеров показывает, что на границах термов качество воспроизведения идеальной передаточной характеристики снижается.

Как уже отмечалось, попытка увеличить количество термов лингвистических переменных, несколько замаскировав визуальную выразительность проблемы, не устранил ее сути и при этом увеличит вычислительную сложность технической реализации нечеткого аппроксиматора.

Следует отметить, что подобный эффект в значительной мере определяется именно используемой математической моделью операции дефаззификации и лишь в малой степени зависит от видов функций принадлежности и от технических

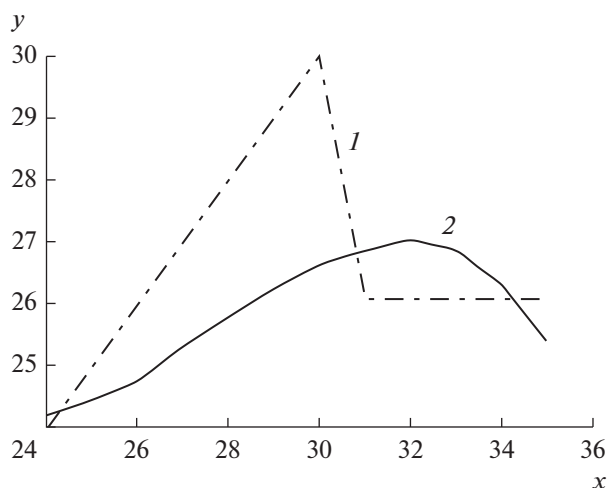


Рис. 1. Пример различий в результатах нечетких вычислений при применении двух различных методов дефаззификации [18]: метод Max (1) и метод CoG (2).

аспектов реализации нечеткого вычислителя; так, на рис. 4 приведена 3D-визуализация передаточной характеристики нечеткого вычислителя зависимости  $y := kx$ , реализованного в системе Fuzzy51 и, для сравнения, в последней (на момент написания данной статьи) версии пакета САПР нечетких вычислителей FuzzyTech [22]. Очевидна качественная аналогия двух передаточных характеристик.

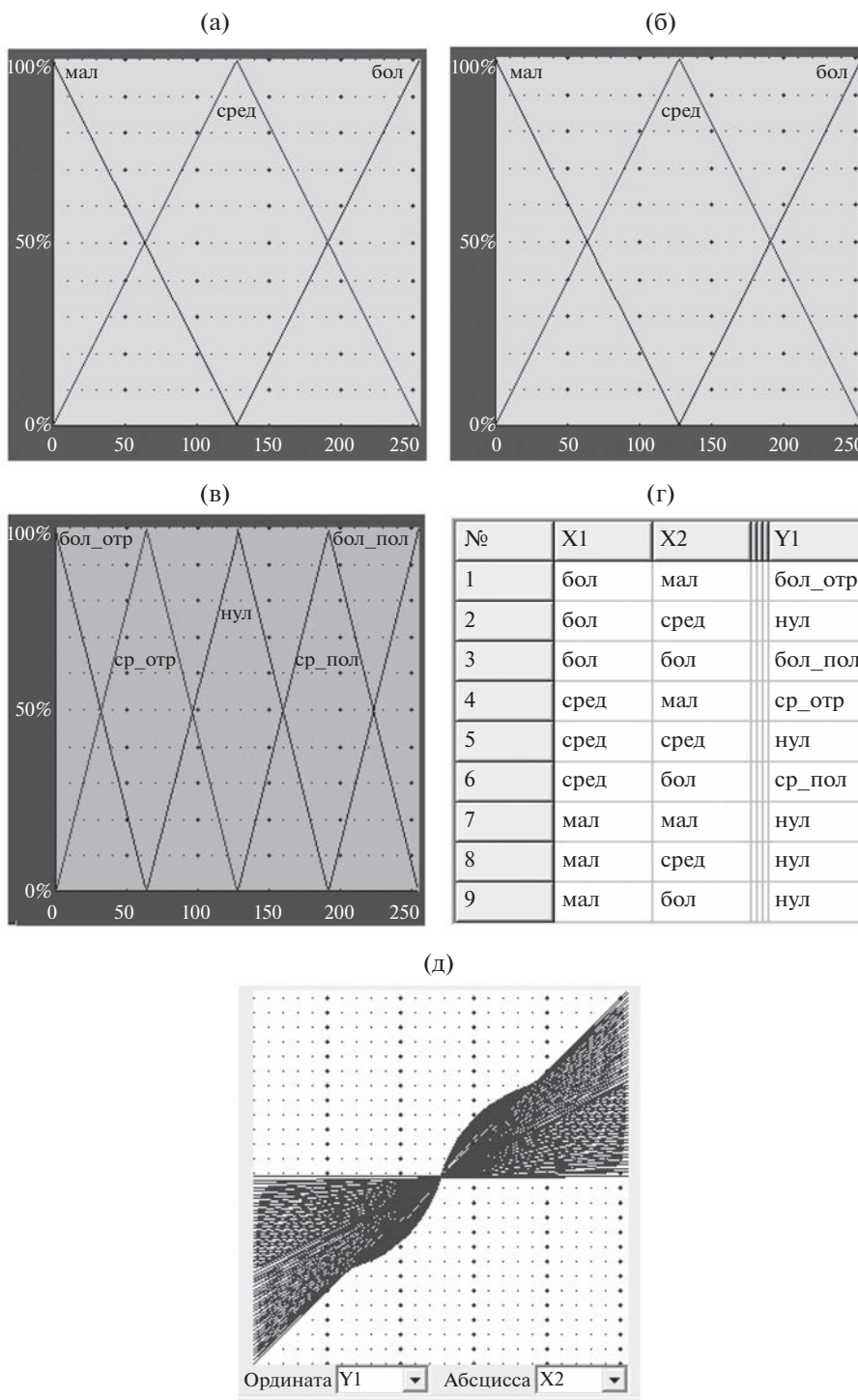
Таким образом, актуальной является задача принципиального разрешения проблемы качества нечеткой аппроксимации посредством модификации вычислительной модели операции дефаззификации.

## 2. ПРЕДЛАГАЕМАЯ МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ОПЕРАЦИИ ДЕФАЗЗИФИКАЦИИ

Предрасположенность нечетких аппроксиматоров (в том числе рассмотренных выше), использующих модель дефаззификации “средневзвешенное максимумов”, к искажению идеальной передаточной характеристики носит своего рода генетический характер: степень справедливости правила определяется только одним фрагментом части “Если”, имеющим при текущих значениях входных переменных наименьшее значение, а остальные фрагменты условной части правила игнорируются. В рассмотренных примерах на некотором диапазоне изменения переменной-аргумента минимальные значения имел один фрагмент условной части правила, при выходе за пределы этого диапазона — другой.

Подобный принцип — “переключение” между фрагментами правила, монополюсно определяющими степень справедливости правила в целом, —





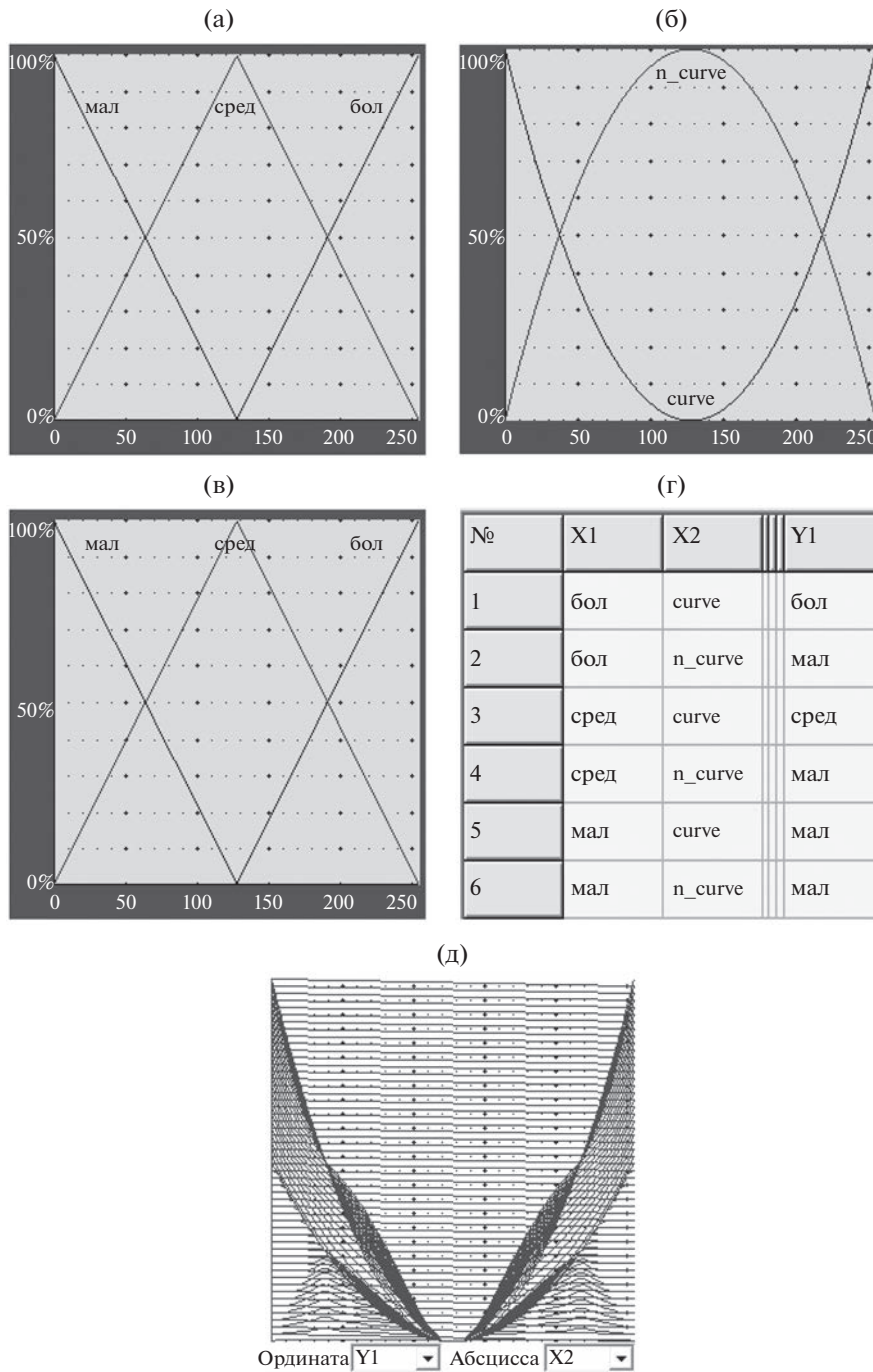
**Рис. 2.** Нечеткий вычислитель зависимости  $y := kx$ : а – термы переменной  $k$ ; б – термы переменной  $x$ ; в – термы переменной  $y$ ; г – база правил; д – семейство графиков передаточной функции  $y = f(x)$ .

имеет очевидным следствием и “переключение” фрагментов передаточных характеристик.

Продемонстрируем сказанное на примере.

Пусть для рассмотренного выше (см. рис. 2) нечеткого аппроксиматора зависимости  $y := kx$  па-

раметр  $k$  равен 255, что означает его принадлежность категории “большой” со степенью справедливости 100%. В таком случае значение  $y$  определяется ансамблем правил 1 и 2 (когда  $x$  изменяется в диапазоне от 0 до 127), или же ансамблем правил 2 и 3 (когда  $x$  изменяется в диапазоне от 128 до 255).



**Рис. 3.** Нечеткий вычислитель зависимости  $y := k(x - 127.5)**2$ : а – термы переменной  $k$ ; б – термы переменной  $x$ ; в – термы переменной  $y$ ; г – база правил; д – семейство графиков передаточной функции  $y = f(x)$ .

Пусть, например,  $x$  линейно изменяется от 255 до 128. В этом случае степень справедливости правила 3 линейно убывает от 100 до 0%, а степень справедливости правила 2, соответственно, линейно возрастает от 0 до 100%. Таким образом, значение  $y$  определяется соотношением степеней справедливости правила 3 (задающего  $y$  равным 255) и правила 2 (задающего  $y$  равным 128). В результате

значение  $y$ , как и в идеальной исходной модели зависимости, линейно убывает от 255 до 128.

Пусть теперь для того же нечеткого аппроксиматора параметр  $k$  равен 230, что означает его принадлежность категории “большой” со степенью справедливости 80% и категории “средний” со степенью справедливости 20%. Пусть в то же самое время аргумент  $x$ , изменяясь, принимает

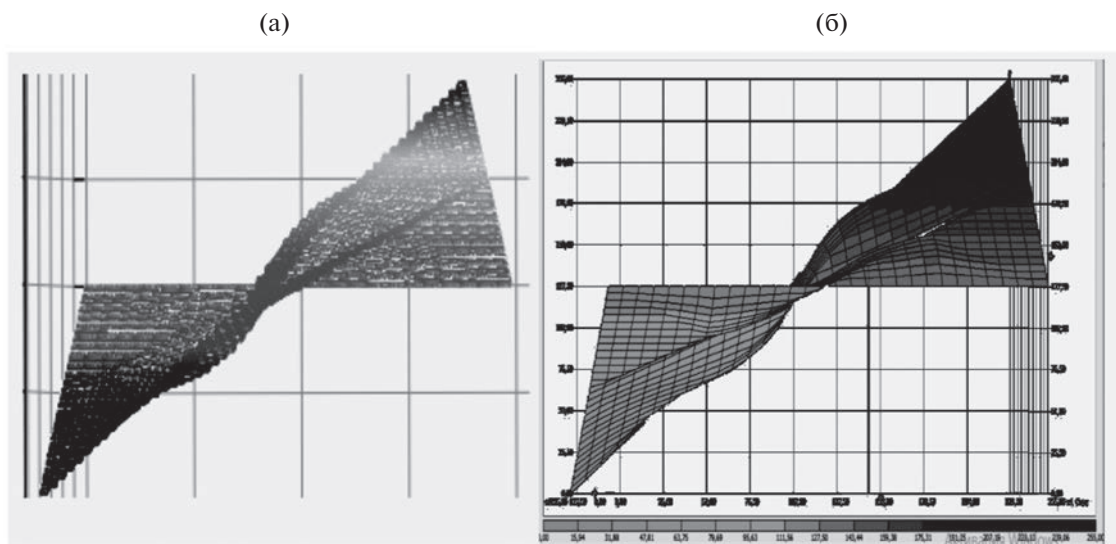


Рис. 4. 3D-визуализация передаточной функции нечеткого вычислителя зависимости  $y=kx$ , реализованного в популярных САПР: Fuzzy51 (а) и FuzzyTech (б).

убывающие значения, начиная с максимального (255). Тем самым степень его принадлежности категории “большой” убывает, начиная с величины 100%, а степень принадлежности категории “средний” возрастает, начиная с 0%.

В этом случае влиять на значение величины  $y$  будут не только правила 2 и 3, но также и правила 5 и 6. Для соответствия аппроксиматора идеальной модели вычислений (предполагающей линейное изменение  $y$ ) степени справедливости этих четырех правил также должны подчиняться соответствующей пропорциональности.

Пока  $x$ , уменьшаясь, не достиг величины 230, степень справедливости правила 3 (задающего  $y$  равным 255) составляет 80%, степень справедливости правила 2 (задающего  $y$  равным 128) возрастает от 0% до 20%. Степень справедливости правила 6 (задающего  $y$  равным 192) составляет 20%, степень справедливости правила № 5 (задающего  $y$  равным 128) возрастает от 0% до 20%. В точке  $x = 255$  отклонение от идеальной модели аппроксимации составляет менее одной единицы младшего разряда (ЕМР), в точке  $x = 230$  отклонение составляет уже 3 ЕМР, а максимальная приведенная погрешность такой аппроксимации составит 9.5%!

Сказанное отражает табл. 1 (напомним, что в рассматриваемой модели дефаззификации при наличии нескольких правил, формирующих одно и то же значение выходной величины, действует только одно правило — имеющее наибольшую среди всех степень справедливости).

Для преодоления указанного недостатка предлагается модифицировать операцию дефаззифи-

кации, используя для расчета выходного значения соотношение

$$\frac{\sum_{i \in 1:N} \left( \prod_{k \in 1:M} \mu_k \right) Y_{\max_i}}{\sum_{i \in 1:N} \left( \prod_{k \in 1:M} \mu_k \right)},$$

где  $N$  — число правил нечеткого контроллера,  $M$  — число элементов части “Если” каждого правила с ненулевой степенью справедливости.

Таким образом, вес очередного правила будет определяться не минимальной степенью справедливости условий, составляющих часть “Если”, а произведением всех их значений.

В таком случае для рассмотренного выше примера степень справедливости правил, а следовательно, и формируемых ими значений выходной переменной будет принципиально иной (табл. 2). Обращаем внимание читателя, что сумма степеней уверенности кортежа действующих правил теперь в точности равна 100%; при этом вклад в формирование значения выходной величины вносит каждое правило, вне зависимости от величины его степени справедливости — тем самым обеспечивается адекватность поведения проектируемого нечеткого контроллера его идеальной (проектной) модели поведения.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

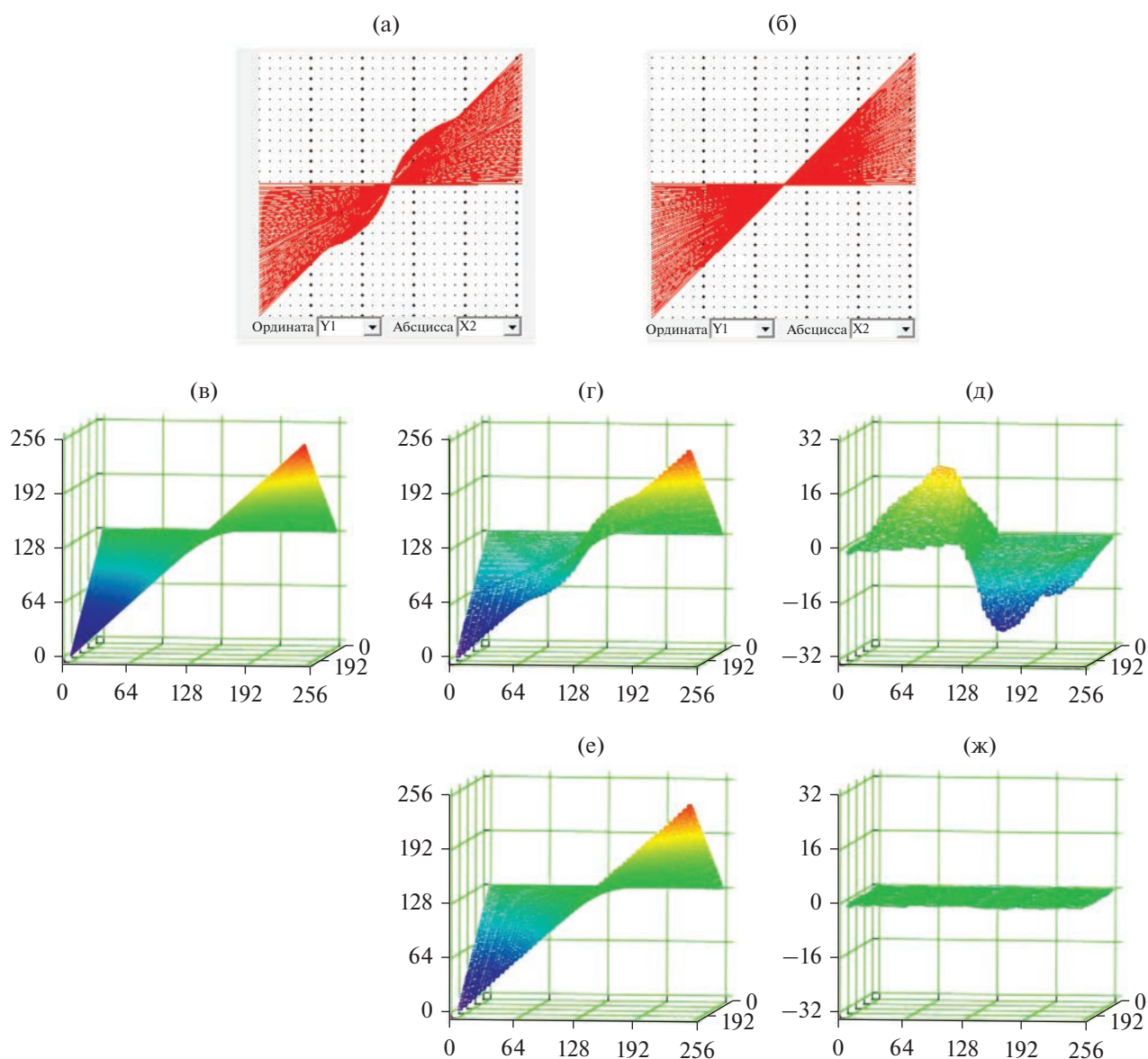
Проиллюстрируем перспективность предложенного подхода, проведя динамические испытания нечетких контроллеров, имеющих те же опи-

**Таблица 1.** Иллюстрация причин возникновения погрешностей нечеткой аппроксимации, применяющей операцию дефаззификации методом “средневзвешенное максимумов”

Номер правила	Значения величин					
	$k$	$\mu(k), \%$	$x$	$\mu(x), \%$	$U_{\text{правила}}$	$\mu_{\text{правила}}, \%$
2	230	80	255	0	128	0
3	230	80	255	100	255	80
5	230	20	255	0	128	0
6	230	20	255	100	192	20
$U_{\text{нечеткий}} = [(255 \times 0.8 + 192 \times 0.2)/(0.8 + 0.2)] = 242$ $U_{\text{идеальный}} = 242.5$						
2	230	80	230	20	128	20
3	230	80	230	80	255	80
5	230	20	230	20	128	20
6	230	20	230	80	192	20
$U_{\text{нечеткий}} = [(128 \times 0.2 + 255 \times 0.8 + 192 \times 0.2)/(0.2 + 0.8 + 0.2)] = 223$ $U_{\text{идеальный}} = 219.9$						
2	230	80	150	82	128	80
3	230	80	150	18	255	18
5	230	20	150	82	128	20
6	230	20	150	18	192	18
$U_{\text{нечеткий}} = [(128 \times 0.8 + 255 \times 0.18 + 192 \times 0.18)/(0.8 + 0.18 + 0.18)] = 158$ $U_{\text{идеальный}} = 147.8$						

**Таблица 2.** Иллюстрация возможности снижения погрешностей нечеткой аппроксимации посредством применения новой модели операции дефаззификации

Номер правила	Значения величин					
	$k$	$\mu(k), \%$	$x$	$\mu(x), \%$	$U_{\text{правила}}$	$\mu_{\text{правила}}, \%$
2	230	80	255	0	128	0
3	230	80	255	100	255	80
5	230	20	255	0	128	0
6	230	20	255	100	192	20
$U_{\text{нечеткий}} = [(255 \times 0.8 + 192 \times 0.2)/(0.8 + 0.2)] = 242$ $U_{\text{идеальный}} = 242.5$						
2	230	80	230	20	128	16
3	230	80	230	80	255	64
5	230	20	230	20	128	4
6	230	20	230	80	192	16
$U_{\text{нечеткий}} = [(128 \times 0.16 + 255 \times 0.64 + 128 \times 0.04 + 192 \times 0.16)/(0.16 + 0.64 + 0.04 + 0.16)] = 220$ $U_{\text{идеальный}} = 219.9$						
2	230	80	150	82	128	65.6
3	230	80	150	18	255	14.4
5	230	20	150	82	128	16.4
6	230	20	150	18	192	3.6
$U_{\text{нечеткий}} = [(128 \times 0.656 + 255 \times 0.144 + 128 \times 0.164 + 192 \times 0.036)/(0.656 + 0.144 + 0.164 + 0.036)] = 149$ $U_{\text{идеальный}} = 147.8$						



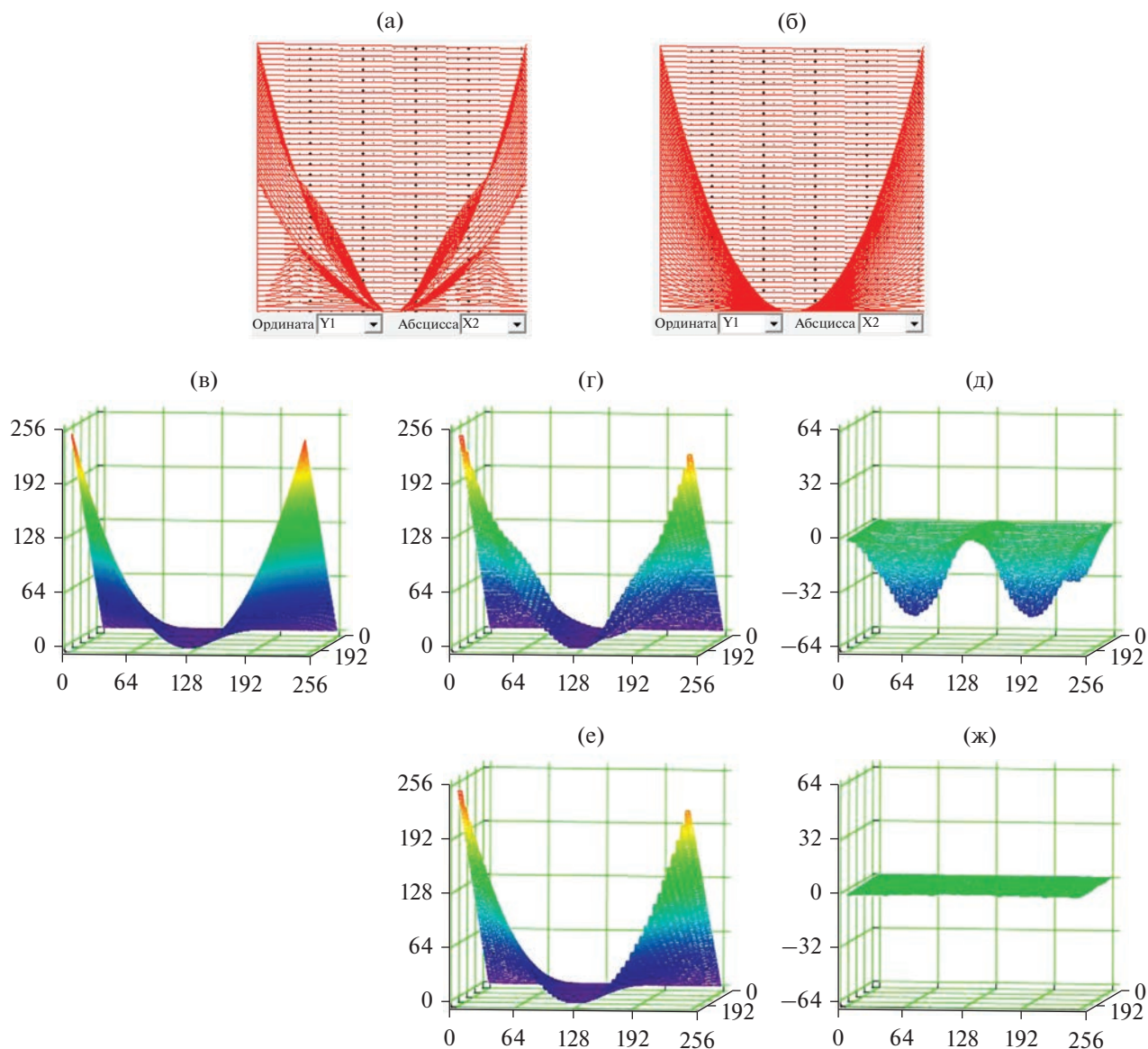
**Рис. 5.** Сравнение точности нечеткой аппроксимации зависимости  $y := kx$  при применении двух моделей дефаззификации. Семейство графиков передаточной функции, реализуемых моделью “средневзвешенное максимумов” (а) и предлагаемой моделью дефаззификации (б), а также 3D-поверхности – идеальная поверхность (в), поверхность, реализуемая моделью “средневзвешенное максимумов” (г), поверхность погрешности аппроксимации (д), поверхность, реализуемая предлагаемой моделью дефаззификации (е), поверхность погрешности аппроксимации (ж). Поверхности погрешностей приведены в увеличенном масштабе.

сания, что и представленные на рис. 2 и 3, но использующих предложенную модель операции дефаззификации, учитывающую степени справедливости всех фрагментов каждого правила.

На рис. 5 сравнивается поведение двух нечетких контроллеров, аппроксимирующих зависимость  $y := kx$  – контроллера, использующего традиционную модель операции дефаззификации “средневзвешенное максимумов”, и контроллера, использующего предлагаемую модель дефаззификации.

Анализ поверхностей погрешности аппроксимации (рис. 5д и 5ж) встроенными средствами среды MathCad показал, что максимальная приведенная погрешность при использовании операции “средневзвешенное максимумов” составляет 9.5% (рис. 5д), а при использовании предлагаемой модели – 0.4% (рис. 5ж).

На рис. 6 сравнивается поведение двух нечетких контроллеров, аппроксимирующих поверхность, образуемую графиком квадратичной зависимости с уменьшаемым коэффициентом усиления – кон-



**Рис. 6.** Сравнение точности нечеткой аппроксимации квадратичной зависимости с убывающим коэффициентом усиления при применении двух моделей дефазификации. Семейство графиков передаточной функции, реализуемых моделью “средневзешенное максимумов” (а) и предлагаемой моделью дефазификации (б), а также 3D-поверхности – идеальная поверхность (в); поверхность, реализуемая моделью “средневзешенное максимумов” (г), поверхность погрешности аппроксимации (д); поверхность, реализуемая предлагаемой моделью дефазификации (е); поверхность погрешности аппроксимации (ж). Поверхности погрешностей приведены в увеличенном масштабе.

троллера, использующего традиционную модель операции дефазификации “средневзешенное максимумов”, и контроллера, использующего предлагаемую модель дефазификации.

Выполненный теми же средствами, что и в первом иллюстративном примере, анализ поверхностей погрешности аппроксимации (рис. 6д и 6ж) показал, что максимальная приведенная погрешность при использовании традиционной операции дефазификации составляет 18.5% (рис. 6д), а при использовании предлагаемой модели – 0.5% (рис. 6ж).

Как показывают статистически значимые серии экспериментов, аналогичных продемонстрированным, применение предложенной модели операции дефазификации позволяет снизить погрешность нечеткой аппроксимации более чем на порядок, что представляет существенный практический интерес.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, дальнейшее развитие методов и средств нечеткой обработки информации для

применения в бортовых вычислителях в значительной степени зависит от совершенствования подходов к реализации внутренних “атомарных” операций, осуществляемых на различных стадиях функционирования нечеткого контроллера. Достигаемые при этом преимущества (прежде всего в качестве воспроизведения исходной поведенческой модели или исходной модели обработки данных, улучшаемом в типовых случаях, как показали эксперименты, на порядок), безусловно, оправдывают затраты на их реализацию.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shafei M.A.R., Ibrahim D.K., Bahaa M.* // Ain Shams Engineering J. 2022. V. 13. № 5. Article No 101710.
2. *Liu K.-W., Kuo Ch.-Ch.* // Int. J. Advanced Manufacturing Technol. 2022. V. 121. № 11–12. P. 7325.
3. *Mahdab S., Moualdia A.* // Rev. Roumaine des Sciences Techniques. Serie Electrotechnique et Energetique. 2022. V. 67. № 2. P. 111.
4. *Fernando A.H., Lim L.A.G., Bandala A.A. et al.* // Proc. 2021 IEEE 13th Int. Conf. on Humanoid, Nanotechnology, Information Technology, Communication and Control, Environment, and Management (HNICEM). Manila. 28–30 Nov. N.Y.: IEEE, 2021, Article No. 177837.
5. *Cetin O.* // Studies in Systems, Decision and Control. 2021. V. 344. P. 237.
6. *Qureshi M.S., Swarnkar P., Gupta S.* // Robotics and Autonomous Systems. 2018. V. 109. P. 68.
7. *Andre E., Dulong R., Guermouche A., Trahay F.* // Concurrency and Computation: Practice and Experience. 2022. V. 34. № 31. Article No. e6580.
8. *Garcia A.M., Serpa M., Griebler D. et al.* // Lecture Notes in Computer Science, 2020, V. 12254. P. 142.
9. *Baez-Sanchez A., Flores-Franulic A., Moretti A.C. et al.* // Fuzzy Sets and Systems. 2022. V. 443. P. 34.
10. *Xu B., Lu X.* // IEEE Access. 2020. V. 8. Article No. 215327.
11. *Ruiz A., Gutierrez J., Fernandez J.A.F.* // IEEE Micro. 1995. V 15. № 6. P. 67.
12. *Esogbue A.O., Song Q.* // Fuzzy Optimization and Decision Making. 2003. V. 2. № 4. P. 283.
13. *Mahato S.K., Bhattacharyee N., Pramanik R.* // Int. J. of Operational Research. 2020. V. 37. № 3. P. 307.
14. *Mahdiani H.R., Banaiyan A., Haji Seyed Javadi M. et al.* // Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2013. V. 26. № 1. P. 162.
15. *Васильев А.Е., Васильянов Г.С., Кабезас Тания Д.Ф. и др.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 12. С. 1243.
16. *Васильев А.Е.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 3. С. 291.
17. *Van Leekwijck W., Kerre E.* // Fuzzy Sets and Systems. 1999. V. 108. № 2. P. 159.
18. *Saletic D., Velasevic D., Mastorakis N.* // Proc. 6th WSEAS Int. Conf. on Circuits, Systems, Communications and Computers. Athens: WSEAS, 2002. P. 7.
19. Fuzzy Logic Application HandBook. Mount Prospect: Intel Corporation, 1994.
20. *Jones M.T.* AI Application Programming. Hingham: Charles River Media, 2003.
21. *Васильев А.Е.* Встраиваемые системы автоматики и вычислительной техники. Микроконтроллеры. М.: Горячая линия-Телеком, 2018.
22. INFORM: Institut für Operations Research und Management GmbH. <https://www.fuzzytech.com/download/>. Дата обращения 06.09.2022.

## ПАМЯТИ АНАТОЛИЯ ВАСИЛЬЕВИЧА ВАШКОВСКОГО

DOI: 10.31857/S0033849423070100, EDN: TXEESP



1 апреля 2023 г. ушел из жизни один из старейших сотрудников Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук (ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН), доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии, член редколлегии журнала “Радиотехника и электроника” Анатолий Васильевич Вашковский.

А.В. Вашковский родился 19 декабря 1931 г. в г. Опочка Псковской обл. в семье учителей. После окончания средней школы в Москве, с 1950 по 1955 гг. Анатолий Васильевич учился на радиотехническом факультете Московского энергетического института, по окончании которого в декабре 1955 г. он в качестве младшего научного сотрудника был принят в одну из лабораторий Института радиотехники и электроники АН СССР, которой заведовал член-корреспондент АН СССР А.А. Пистолькорс. Молодой сотрудник начал свою научную деятельность с измерения электрических параметров ферритов и исследования возможности создания параметрических ферромагнитных усилителей. В 1963 г. после окончания заочной аспирантуры А.В. Вашковский защитил кандидатскую диссертацию и перешел на должность старшего научного сотрудника, а в 1968 г.

стал заведующим лабораторией по исследованию СВЧ-свойств ферромагнетиков. В 1973 г. Анатолий Васильевич защитил докторскую диссертацию, а в 1982 г. был удостоен звания профессора. Под руководством Анатолия Васильевича защитили кандидатские диссертации 14 человек, двое из которых впоследствии стали докторами наук.

А.В. Вашковский является автором или соавтором около 400 опубликованных научных трудов и изобретений, в том числе открытия (Я.А. Моносов, А.В. Вашковский “Эффект взаимодействия СВЧ и ультразвуковых колебаний в ферритах”, № 42 от 21.03.1963), книги А.В. Вашковский, В.С. Стальмахов, Ю.П. Шараевский “Магнитоэлектрические волны в электронике сверхвысоких частот” (изд-во Саратовского университета, 1993) и двух брошюр.

А.В. Вашковский является основателем спинволновой электроники СВЧ как научного направления, лежащего на стыке радиофизики и физики магнитных явлений. Большинство его работ посвящено исследованию линейных и нелинейных характеристик и свойств спиновых волн в различных анизотропных ферритовых средах и структурах. В частности, Анатолием Васильевичем совместно с коллегами исследованы ферромагнитный резонанс неоднородной прецессии в феррите, коэффициент шумов ферритового усилителя, электромагнитное излучение при нелинейном спинволновом резонансе в феррите, параметрическое взаимодействие ультразвуковых и магнитных колебаний в ферромагнетике, параметрическое возбуждение магнитоэлектрических волн в ферритовых пластине и диске, нестабильность магнитоэлектрических волн, магнитоэлектрический резонанс и гальваномагнитный эффект в структуре феррит-полупроводник, усиление магнитоэлектрических волн параметрической накачкой, различные линии задержки, фильтры, типы преобразователей для возбуждения магнитоэлектрических волн. А.В. Вашковским с соавторами было изучено отражение поверхностной магнитоэлектрической волны от края плёнки и было обнаружено, что известный закон о равенстве углов падения и отражения луча для указанной волны не выполняется.

В 1988 г. за выполнение перечисленных работ Анатолий Васильевич в составе коллектива авторов был удостоен звания лауреата Государственной премии СССР за “Создание научных основ магнитоэлектроники”.



В дальнейшем А.В. Вашковским совместно с коллегами были исследованы влияние неоднородности постоянного магнитного поля на траектории поверхностных магнитостатических волн, преломление этих волн на границе раздела ферритовых сред, преобразование их в электромагнитные волны и характеристики магнитостатических волн в структуре феррит–высокотемпературный сверхпроводник, в ферритовых пленках с доменной структурой и в пленках, граничащих с магнитной стенкой. С помощью спиновых волн с неколлинеарной ориентацией групповой и фазовой скоростей были обнаружены такие физические эффекты, как возникновение отрицательного преломления, отрицательное отражение, обратное отражение, возникновение двух отраженных лучей и др.

Анатолий Васильевич являлся членом Научного совета РАН по проблеме “Физическая элек-

троника”, членом редколлегии журнала “Радиотехника и электроника”, а также членом Оргкомитета некоторых международных и российских научных конференций, таких как “Спинволновая электроника СВЧ”, “Новые магнитные материалы микроэлектроники” и “Спиновая электроника и гировекторная электродинамика”.

А.В. Вашковский был доброжелательным, пунктуальным, отзывчивым и вежливым человеком, обладавшим энциклопедическими знаниями. Все, кому довелось с ним общаться, помнят его как внимательного собеседника, который мог дать полезный совет по любому научному вопросу.

Редакция и редколлегия журнала, коллеги и друзья выражают глубокое соболезнование родным и близким покойного. Светлый образ Анатолия Васильевича навсегда останется в памяти людей, которые его знали.