

Том 68, Номер 3

ISSN 0033-8494

Март 2023



# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 68, номер 3, 2023

---

---

## ОБЗОР

Собственное стимулированное интенсивное пикосекундное излучение в режиме насыщения усиления и “порогового” состояния электронно-дырочной плазмы в гетероструктуре  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$

*Н. Н. Агеева, И. Л. Броневай, А. Н. Кривоносов*

211

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Двумерные задачи достижения сверхразрешения в радиолокации и дистанционном зондировании

*Б. А. Лаговский, А. Б. Самохин*

249

---

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Параметры плотности распределения вероятности флуктуаций кажущегося центра излучения от втулки винта вертолета при ее радиолокационном наблюдении

*М. А. Степанов*

256

---

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Оптимизация гарантированной скорости передачи информации псевдослучайными сигналами с рандомизированной базой в условиях преднамеренных помех

*А. М. Чуднов, Я. В. Кичко, Л. П. Сапунова*

263

Идентификация сигналов на фоне помех трансформирующего типа со стиранием

*В. В. Климов*

271

---

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

Воздействие мощного импульса света на траектории магнитостатических волн в линейно неоднородном поле

*В. С. Власов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов*

279

---

## ПРИМЕНЕНИЕ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

Акустические исследования изменения характера дыхания при умственной деятельности человека

*А. В. Герус, В. В. Герасимов, В. И. Миргородский, Е. М. Кораблев*

287

---

## **НАНОЭЛЕКТРОНИКА**

Последовательное соединение мемристора с другими дискретными элементами: резистором, полупроводниковым диодом, катушкой индуктивности и емкостью

*А. Е. Китаев, А. И. Белов, Д. В. Гусейнов, А. Н. Михайлов*

295

---

## **НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ**

Бездроссельный повышающий DC/DC-преобразователь

*В. П. Бабенко, В. К. Битюков, А. И. Лавренов*

305

---

---

УДК 537.311.322

## СОБСТВЕННОЕ СТИМУЛИРОВАННОЕ ИНТЕНСИВНОЕ ПИКОВОСЕКУНДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ УСИЛЕНИЯ И “Порогового” СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ ПЛАЗМЫ В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$

© 2023 г. Н. Н. Агеева<sup>а</sup>, И. Л. Бронева<sup>а, \*</sup>, А. Н. Кривоносов<sup>а</sup><sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: bil@cplire.ru

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 29.07.2022 г.

Принята к публикации 14.08.2022 г.

В обзоре представлена третья часть экспериментального исследования излучения и возбуждаемых им оптоэлектронных эффектов. В начале мощной оптической пикосекундной накачки слоя GaAs гетероструктуры  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  в нем возникает пикосекундное излучение. Экспериментально доказано, что это – усиленное спонтанное (стимулированное) излучение со спецификой распространения в гетероструктуре. Показано, что благодаря большой интенсивности излучения электронно-дырочная плазма поддерживается в “пороговом” состоянии с инверсией населенности электронов в узком энергетическом интервале. В связи с этим с плотностью электронов становятся однозначно связаны их температура, а следовательно, их распределение между долинами и т.п. Найдено, что ограничение инверсии означало насыщение усиления излучения, когда усиление лимитируется энергетическим транспортом носителей заряда на уровни, с которых они вынужденно рекомбинируют. Определено, что транспорт, замедляемый нагревом носителей из-за их взаимодействия с излучением, при связи температуры носителей с их плотностью, определяет динамику излучения в целом и его спектральных компонент.

DOI: 10.31857/S0033849423030014, EDN: ICCPIP

### ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый обзор является описанием третьей части нашего последовательного экспериментального исследования собственного стимулированного интенсивного пикосекундного излучения (далее – s-излучение) и возбуждаемых им оптоэлектронных нелинейных пикосекундных эффектов в гетероструктуре  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  (далее – гетероструктуры). В первой части было исследовано влияние s-излучения на неравновесную электронно-дырочную плазму (ЭДП) и зависящее от нее просветление (увеличение прозрачности) слоя GaAs. При интерпретации экспериментальных результатов было успешно использовано приближение “порогового” состояния ЭДП [1, 2]. Вторая часть исследования посвящена обнаружению последовательности оптоэлектронных процессов, приводящих к осциллирующему во времени и в энергетическом пространстве отклонению от фермиевского распределения электронов, возбуждаемому полем s-излучения [3].

В монографии [4] и др. рассмотрены следующие основные свойства усиленного спонтанного

(иначе, стимулированного) излучения: а) направленность в пространстве; б) значительно более узкий, чем у спонтанного излучения, спектр; в) порог образования; г) значительная интенсивность; д) некоторая пространственная и временная когерентность, значительно меньшая, чем у лазерного излучения. Цель данного обзора, во-первых, экспериментально уточнить представляемые в монографиях характерные свойства стимулированного излучения применительно к s-излучению в полупроводниковой гетероструктуре. Приведено и прямое экспериментальное доказательство того, что s-излучение – это усиленное спонтанное излучение. Во-вторых, представить возникновение такого режима насыщения усиления s-излучения, в котором из-за указанного насыщения устанавливается одновременное пороговое состояние ЭДП. В этом режиме s-излучение создает обеднение инверсной населенности электронов на дне зоны проводимости, транслируемое периодически по зоне для поддержания детального равновесия переходов электронов с излучением и поглощением продольных оптических (LO) фо-

нонов. Трансляция поддерживает ширину области инверсной населенности электронов в энергетическом пространстве настолько небольшой и приблизительно фиксированной, что ее наличием во многих случаях можно пренебречь. Состояние ЭДП в этом приближении названо пороговым. В нем плотность неравновесных носителей заряда и их температура становятся связаны. К примерам возникающих благодаря этому состоянию эффектов можно добавить образование однозначной связи плотности носителей с перенормировкой запрещенной зоны из-за их кулоновского взаимодействия, с частотой плазмонов, и др. Значительное внимание отводится результатам экспериментального исследования динамики s-излучения при насыщении его усиления. Подобную ситуацию, в которой интенсивность стимулированного излучения уже влияет на его усиление, исследовали преимущественно теоретически. Предсказывалось, что в такой ситуации интенсивность излучения должна возрастать линейно с расстоянием, проходимым им в активной области [5, 6] и др., и похожее было обнаружено нами экспериментально. В описываемых в обзоре исследованиях были экспериментально обнаружены нелинейные явления, имевшие с предсказанными (полученными математически) в [5] как сходство, так и существенные отличия. Обнаруженные явления в значительной степени связаны с взаимодействием s-излучения с неравновесными носителями заряда. Взаимодействие замедляло охлаждение и, соответственно, транспорт носителей в энергетическом пространстве (ЭТН) в область экстремумов зон проводимости и валентной, откуда они вынужденно рекомбинируют. Замедляемый таким образом транспорт определяет, при связи температуры носителей с их плотностью, динамику и s-излучения как целого и его спектральных компонент. Названного взаимодействия мы не встретили в упомянутой теории. Отсюда и отмеченное отличие экспериментальных и теоретических результатов. Соответствовавшее эксперименту замедление охлаждения накаченных носителей из-за их взаимодействия с излучением было определено в теории [7]. Выявить охарактеризованные выше явления удалось благодаря возможности проводить измерения s-излучения в реальном времени с пикосекундным разрешением. То, что эти явления возбуждали именно в слое GaAs, объясняется тем, что свойства этого прямозонного полупроводника хорошо изучены, он широко используется в полупроводниковой оптоэлектронике и является удобным для таких исследований. Генерация излучения и сопутствующие процессы не маскируются теми особенностями, которые привносили бы, например, низкоразмерные структуры.

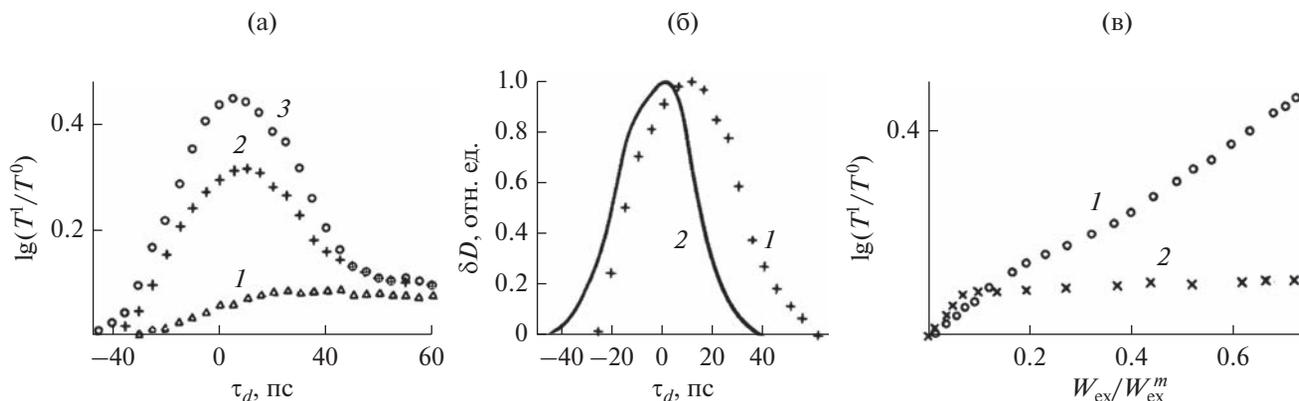
В данном обзоре представлены обнаруженные закономерности, которым при насыщении уси-

ления и пороговом состоянии ЭДП подчиняются стимулированное интенсивное пикосекундное излучение гетероструктуры и его взаимодействие с ней. Часть закономерностей получена только эмпирически, поэтому может послужить экспериментальной базой для интенсификации исследований нелинейной динамики генерации вынужденного излучения в полупроводниковой гетероструктуре и возбуждаемых им эффектов. В итоге существенно дополнено представление о режиме насыщения усиления, о специфике динамики излучения и ЭДП в этом режиме, параметрах s-излучения на основных его этапах, способах их изменения и т.д. Описанные исследования актуальны и в прикладном отношении в связи с использованием в сверхбыстродействующей полупроводниковой оптоэлектронике сверхкоротких, а значит, интенсивных световых импульсов.

Публикуемые в последние годы статьи по стимулированному излучению в полупроводниках и излучению полупроводниковых лазеров в основном посвящены исследованиям новых полупроводниковых соединений, как объемных, так и низкоразмерных. Исследуются их структурные и оптические свойства. При этом измеряются спектры спонтанного и стимулированного излучения при низких и комнатных температурах и различных уровнях накачки исследуемых образцов. Много внимания уделяется снижению порога генерации стимулированного излучения. Исследуются свойства импульсного и непрерывного лазерного излучения из различных по составу полупроводниковых структур. В основном внимание уделяется оптимизации потерь в лазерах, снижению порога генерации, стабилизации длины волны, температуры стабильной генерации излучения. Имеются исследования об уменьшении длительности лазерных импульсов и подавлении боковых мод за счет изменения температуры. По исследованиям пикосекундной динамики собственного интенсивного стимулированного излучения при насыщении его усиления в полупроводнике или полупроводниковой гетероструктуре в основном найдены публикации, освещаемые в работе [3] и данном обзоре.

#### 1. ПИКОСЕКУНДНОЕ ОБРАТИМОЕ ПРОСВЕТЛЕНИЕ СЛОЯ GaAs – ПРИЗНАК ПИКОСЕКУНДНОГО СТИМУЛИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В работе [8] слой GaAs гетероструктуры возбуждался импульсом света, длительность которого на полувысоте (FWHM) равна 30 пс, а энергия фотона  $\hbar\omega_{ex}$  несколько превышала ширину запрещенной зоны  $E_g$ . Возбуждающий импульс имел максимальную энергию, проходящую через область зондирования  $W_{ex}^m \approx 100$  мкДж. Для этого и



**Рис. 1.** Зависимость от времени задержки  $\tau_d$ : а – просветления при энергии фотона зондирующего импульса  $\hbar\omega_p = 1.562$  эВ и при  $W_{\text{ex}} = 0.074W_{\text{ex}}^m$  (1),  $W_{\text{ex}} = 0.52W_{\text{ex}}^m$  (2),  $0.72W_{\text{ex}}^m$  (3), б – дополнительного вклада в просветление  $\delta D$  (1), кросс-корреляционная функция возбуждающего и зондирующего импульсов (2); в – зависимость просветления от энергии возбуждающего импульса при  $\hbar\omega_p = 1.562$  эВ и  $\tau_d = 5$  (1) и 60 пс (2).

всех других световых импульсов, упоминаемых в обзоре, оба слоя  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  были прозрачны. Исследовалось просветление (увеличение прозрачности) GaAs, возникающее из-за накачки неравновесных носителей заряда при фундаментальном поглощении возбуждающего света. Измерения проводили методом накачки-зондирования (pump-probe) и, как все эксперименты, описываемые в обзоре, при комнатной температуре  $T_R$ . Величину просветления рассчитывали по формуле

$$\lg(T^1/T^0) = \lg\left[\frac{(E_p^1/E_r^1)}{(E_p^0/E_r^0)}\right], \quad (1)$$

где  $T$  – прозрачность образца при наличии (индекс 1) и отсутствии (0) накачки;  $E_p$  – средняя энергия зондирующего импульса,  $E_r$  – средняя энергия опорного импульса в канале зондирования. Подробнее о технике измерений см. [3]. При относительно небольших энергиях  $W_{\text{ex}}$  возбуждающего импульса (называемого также импульсом накачки) просветление возрастало на протяжении этого импульса, а затем спадало с приблизительно характерным временем релаксации спонтанной рекомбинации,  $\tau_{\text{sp}} \sim 0.5$  нс (рис. 1а, кривая 1). Это соответствовало установившимся ранее представлениям [9]. Но когда энергия импульса накачки превышала некоторое пороговое значение  $W_{\text{ex-th}}$ , то наблюдалось не предполагавшееся явление: превышение просветления над некоторым уровнем происходило обратимо в пикосекундном временном диапазоне (см. рис. 1а, кривые 2 и 3). То есть был обнаружен вклад в просветление

$$\delta D = \lg(T^1/T^0) - \lg(T^*/T^0),$$

который с инерционностью  $\sim 10$  пс возрастал и спадал обратимо относительно кросс-корреляционной функции импульсов накачки и зондирования (рис. 1б), где  $T^*$  – остаточная, т.е. оставшаяся

сразу после окончания этого вклада, прозрачность образца. Остаточное просветление оказалось универсальным в том смысле, что его величина при фиксированном диаметре  $D_{\text{ex}}$  возбуждающего луча не зависела от энергий импульса накачки  $W_{\text{ex}} \geq W_{\text{ex-th}}$  (рис. 1в) и его фотона  $\hbar\omega_{\text{ex}} > E_g$  [1]. Просветление, достигнув уровня остаточного, далее релаксирует со временем  $\sim \tau_{\text{sp}}$ . Как одно из двух возможных объяснений пикосекундного спада обратимого вклада в просветление в работе [10] было предположено аномально быстрое возникновение стимулированного излучения в слое GaAs. Вынужденная рекомбинация носителей, создаваемая таким излучением, могла при спаде накачки уменьшать плотность ЭДП и просветление до уровня остаточного, при котором излучение бы прекращалось. Позднее похожие предположения были сделаны в работах [11, 12].

Анализ экспериментальных спектров просветления, измеренных при диаметре луча накачки на полувысоте (FWHM) в местоположении образца  $D_{\text{ex}} \approx 0.7$  мм, показал их соответствие изложенному предположению [13]. При остаточном просветлении ЭДП имела температуру  $T_c = T_R$ . Расстояние между квазиуровнями Ферми электронов и дырок составляло  $\mu_e - \mu_h \approx E_g$ , что соответствовало порогу образования инверсии населенности электронами энергетических уровней зоны проводимости по отношению к населенности уровней валентной зоны. Подразумеваются те уровни зон проводимости и валентной, между которыми происходят прямые оптические переходы электронов. Плотность электронов и дырок (пороговая) составляла  $n_{\text{th}} = p_{\text{th}} \approx 1.1 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Из-за отсутствия инверсии населенности при этих условиях не должно быть стимулированного излучения. В максимуме обратимого просветления при задержке

зондирующего импульса относительно возбуждающего  $\tau_d = 6$  пс плотность носителей заряда была существенно больше,  $n = p \approx 3.5 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Значения квазиуровней Ферми, отсчитываемые от дна зоны проводимости, составляли  $\mu_e = 0.104 \text{ эВ}$  и  $E_g + \mu_h = 0.066 \text{ эВ}$ . Это означало, что имеется спектральная область шириной  $0.038 \text{ эВ}$ , где усиливается свет с энергией фотонов

$$\mu_e - \mu_h \geq \hbar\omega_s \geq E_g. \quad (2)$$

Максимальный коэффициент усиления составляет при этом около  $300 \text{ см}^{-1}$ . ЭДП с такими параметрами могла генерировать стимулированное излучение, если, как сказано выше, допустить его аномально быстрое возникновение. Близость  $\mu_e - \mu_h$  и  $E_g$  при  $\tau_d = 6$  пс соответствовала тому, что во время накачки стимулированное излучение ограничивает плотность носителей.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ s-ИЗЛУЧЕНИЯ

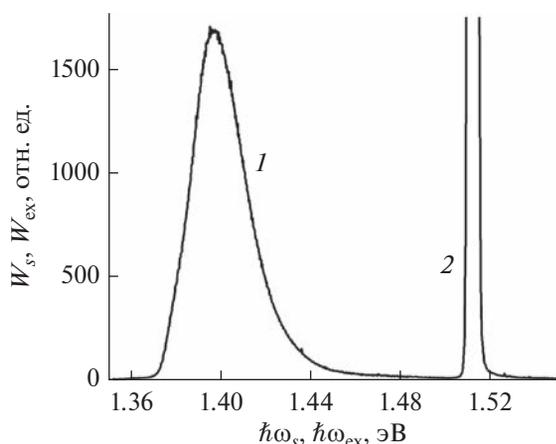
Предположение об аномально быстром возникновении пикосекундного рекомбинационного излучения получило затем экспериментальное подтверждение. Сначала это было сделано косвенными методами. То, что подобное излучение возникает в структуре GaAs/AlGaAs MQWS не позднее 12 пс после ее накачки фемтосекундным импульсом, было показано в работе [11]. В [14] сообщалось об экспериментальном обнаружении s-излучения из фотонакачиваемого слоя GaAs гетероструктуры. Сверхбыстрое возникновение s-излучения доказывалось там характером зависимости энергии s-излучения от пикосекундной задержки между двумя пикосекундными импульсами накачки с различающимися энергиями фотонов. Как и должно быть для стимулированного излучения, s-излучение возникало порогово, при конечной плотности энергии возбуждающего импульса (подробнее см. далее, в разд. 4).

В реальном времени s-излучение впервые было измерено в работе [15]. В этой и описываемых ниже в данном обзоре работах опыты проводились на спектродифрактометрическом пикосекундном лазерном комплексе с автоматизированной системой сбора и обработки измеряемых величин. Комплекс состоял из следующих компонентов [3, 16]: задающего YAG-лазера с диодной накачкой, системы усилителей лазерного импульса, удвоителей частоты светового импульса (кристаллов KDP), двух параметрических генераторов света на  $\text{LiNbO}_3$  с температурной перестройкой длины волны — один для генерации накачивающего, второй — зондирующего или других импульсов длительностью (FWHM)  $t_p \approx 10$  пс с линейной поляризацией света, спектродифрактометрической системы. Наиболее важными компонентами последней являлись:

а) двойной спектрограф, используемый как для спектральных измерений, так и (в режиме вычитания дисперсии) в качестве полосового фильтра длин волн, не искажающего длительность излучения; б) пикосекундная электронно-оптическая камера (ЭОК); в) две ПЗС-камеры для регистрации соответственно спектра излучения и изменения со временем интенсивности  $I_{s-m}$  спектральной компоненты излучения, пропущенной спектрографом (ПЗС — прибор с зарядовой связью).

Гетероструктура с площадью поверхности  $8 \times 8 \text{ мм}^2$  и с толщиной слоев около  $1 \text{ мкм}$  изготовлена молекулярно-лучевой эпитаксией. В середине на площади  $4 \times 4 \text{ мм}^2$  гетероструктура была освобождена от подложки, и туда фокусировался луч накачки. Энергия фотона, длительность (FWHM) импульса накачки составляли соответственно  $\hbar\omega_{\text{ex}} = 1.512 \text{ эВ}$  и  $t_p = 11.3$  пс, диаметр фокусного пятна луча накачки равнялся  $D_{\text{ex}} \approx 0.5 \text{ мм}$ , угол между лучом накачки и нормалью к эпитаксиальным слоям гетероструктуры —  $10^\circ$ .

На поверхности гетероструктуры, за исключением торцевых, было нанесено антиотражающее покрытие. Вследствие интенсивной накачки в GaAs возникло s-излучение, усиливавшееся преимущественно вдоль эпитаксиального слоя. Из-за несовершенства волноводных качеств гетероструктуры часть s-излучения вытекала через ее поверхность. Напомним, что распространение света в веществе должно сопровождаться рассеянием этого света [17]. Достаточным условием для такого явления служит наличие электронов, способных колебаться под действием переменного поля световой волны. В нашем случае это накаченные неравновесные электроны. Если среда оптически однородна, то в первом приближении полное взаимное гашение вторичных волн, вызываемых колебаниями электронов, будет происходить для любого направления распространения излучения, не лежащего в плоскости слоя GaAs. Из-за наличия в реальных средах оптических неоднородностей (дефектов) взаимное гашение вторичных волн становится не полным, а частичным, и возникает рассеянный в разных направлениях свет. Доля s-излучения, распространявшаяся внутри телесного угла  $\Omega \approx 9 \times 10^{-4} \text{ ср}$  с осью, ортогональной поверхности гетероструктуры, направлялась в двойной спектрограф. Указанная часть s-излучения была выбрана для измерения, потому что выходит прямо из активной области, не изменяясь из-за поглощения в пассивной области и отражения от торцов образца. Экспериментальные результаты показали, что эта доля s-излучения обладала характерными свойствами стимулированного излучения. Чтобы ослабить часть рассеянного в образце света накачки, попадающую в спектрограф, перед его входной щелью был установлен анализатор (призма Глана), на-

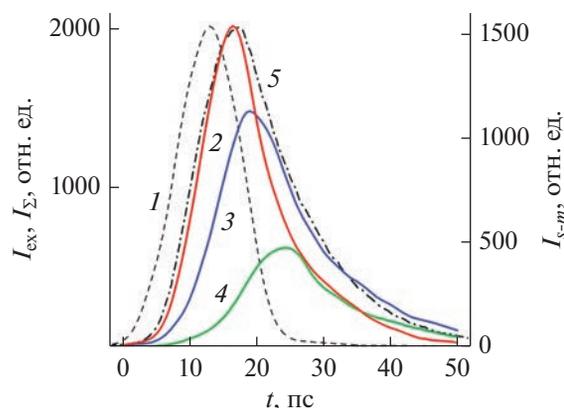


**Рис. 2.** Интегральные по времени экспериментальные: кривая 1 – спектр стимулированного излучения из GaAs  $W_s = f(\hbar\omega_s)$ , кривая 2 – основание спектра света накачки  $W_{ex} = f(\hbar\omega_{ex})$ .

строенный на пропускание света, поляризация которого ортогональна поляризации накачки. Интегральные по времени спектр  $W_s(\hbar\omega_s)$  энергии s-излучения и спектр энергии  $W_{ex}(\hbar\omega_{ex})$  рассеянного образом света накачки, попадавшего внутрь угла  $\Omega$ , регистрировались ПЗС-камерой PIXIS (рис. 2).

При измерении временной формы (огibaющей) импульса излучения двойной спектрограф был настроен, как указывалось выше, на режим вычитания дисперсии. В результате через выходную щель спектрографа выходило излучение с той же длительностью, которая была у нее при входе в спектрограф. Это излучение направлялось в ЭОК, где зависимость интенсивности излучения от времени преобразовывалась в пространственную зависимость интенсивности (далее – хронограмма) и регистрировалась ПЗС-камерой. Когда измеряли огибающую спектральной компоненты s-излучения (далее – s-компонента), промежуточную щель между первой и второй ступенями спектрографа раскрывали так, чтобы она пропускала излучение спектральной ширины  $\delta\hbar\omega = 7.6$  мэВ. В результате через выходную щель спектрографа выходила только требуемая для измерения s-компонента. На рис. 3 представлены следующие хронограммы: импульса накачки, интегрального по спектру s-излучения, избранных s-компонент. Как и ожидалось, s-излучение возникает и растет с пикосекундной задержкой относительно фронта мощной пикосекундной оптической накачки полупроводника. Длительность s-излучения сравнима с длительностью накачки.

Приводимые в обзоре хронограммы были измерены в начальной части динамического диапазона хронометрической системы. Представление о погрешностях измерений ЭОК PS-1/S1, ис-



**Рис. 3.** Хронограммы импульсов накачки  $I_{ex}(t)$  (кривая 1) и избранных s-компонент  $I_{s-m}(t)$  с различными энергиями фотона:  $\hbar\omega_s = 1.406$  (2), 1.396 (3), 1.387 эВ (4). Хронограмма интегрального по спектру s-излучения  $I_{\Sigma}(t)$  (кривая 5).

пользовавшейся в экспериментах, дано в [18]. При измерении в расчет принимались только те акты накачки, для которых отклонения энергии импульса накачки от заданного значения не превышали  $\pm 5\%$ . Накопление данных продолжалось до тех пор, пока усредненные спектр или хронограмма не переставали с точностью 3% зависеть от числа импульсов накачки. При накоплении хронограмм осуществлялась автоматическая компенсация джиттера (нестабильности запуска линейной развертки) ЭОК [3, 19]. Сам же джиттер не превышал  $\pm 4.5$  пс.

### 3. КОГЕРЕНТНОСТЬ, РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ БРЭГГОВСКИЙ ОТРАЖАТЕЛЬ, ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ

В работе [20] было обнаружено, что практически с самого начала s-излучения его спектр модулирован интерференционной картиной, свидетельствующей о когерентности s-компонент. Хотя спонтанное излучение считается стохастическим, и его усиление не должно приводить к существенно когерентному стимулированному излучению. Причем отсутствует влияние отражения от торцов или зеркал, которое считается атрибутом когерентизации в лазере. Возникает уже поднимающийся в [3] вопрос для решения в будущем: каков механизм когерентизации спектральной компоненты собственного стимулированного излучения гетероструктуры.

Подробное объяснение образования интерференции в указанном случае приведено в [3, 21], поэтому здесь дадим лишь краткое пояснение. Поле в волноводе рассматривают как результат сложения парциальных волн (концепция Бриллюэна [22]). Применительно к волноводной гетеро-

структуре плоские однородные волны s-излучения, называемые парциальными, двигаются зигзагообразно, отражаясь от гетерограниц. Две наиболее интенсивные парциальные волны s-компоненты с длиной волны в вакууме  $\lambda_0$ , распространяясь в диаметральной направлении в слое GaAs под углом  $\beta$  к гетерограницам навстречу друг другу, формируют почти стоячую волну. Ее пучности составляют решетку, удовлетворяющую граничным условиям, выявленным в [21]. Для получающейся решетки пучностей угол  $\beta$  должен удовлетворять соотношению

$$\sin \beta = k\lambda_0 / (2n_0d), \quad (3)$$

где  $d$  – толщина слоя GaAs,  $k$  – целое число, отчего решетка (точнее, угол  $\beta$ ) может меняться только дискретно, что и подтвердилось экспериментально. Принимая для оценки, что  $k = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.886$  мкм,  $n_0 = 3.6$  – показатель преломления, получаем  $\beta \approx 4.7^\circ$ . Решетка узлов подобна решетке пучностей, но сдвинута в диаметральной направлении на  $\lambda_0/4n_0\cos\beta$ . Пучности создают локальные максимумы распределения интенсивности s-излучения в пространстве. В них заселенность энергетических уровней зоны проводимости обедняется s-излучением по сравнению с заселенностью в местоположении локальных минимумов интенсивности, т.е. узлов. В результате возникает модуляция распределения в пространстве плотности  $n$  неравновесных электронов. Из-за зависимости показателя преломления  $n_0$  от плотности  $n$  возникает аналогичная модуляция  $n_0$  в пространстве, которую можно рассматривать как модификацию брэгговской решетки.

Положительная обратная связь (ПОС) для излучения создается брэгговской решеткой, когда волна, рассеиваясь на периодических неоднородностях, меняет направление распространения на обратное. При этом все отраженные волны должны быть синфазны и интерферировать конструктивно. Условие такого отражения от периодической структуры выполняется для лучей обоих направлений. В результате возникают две связанные волны одинаковой частоты, распространяющиеся в противоположных направлениях. Таким образом, периодическая решетка создает обратную связь в обоих направлениях и на всей протяженности решетки. Этот эффект реализуется, если один из оптических параметров среды промодулирован в направлении распространения волны по какому-либо периодическому закону, причем период  $a$  модуляции удовлетворяет условию Вульфа–Брэгга

$$a = m_1\lambda_0 / (2n_0), \quad (4)$$

где  $m_1$  – целое число. В направлении вдоль любой из траекторий, для которых угол  $\beta$  удовлетворяет соотношению (3), набор перпендикулярных ей

пучностей и узлов вызывает осцилляции  $n_0$  в пространстве с периодом

$$a_1 = \lambda_0 / (2n_0). \quad (5)$$

Выражение (5) – это условие Вульфа–Брэгга для  $m_1 = 1$ . Следовательно, набор пучностей и узлов наводит брэгговскую решетку модуляции показателя преломления  $n_0$ , создающую ПОС для s-компоненты с длиной волны  $\lambda_0$ , движущейся перпендикулярно плоскостям этой решетки. Благодаря ПОС эта s-компонента усиливается и создает локальный максимум (ЛМ) на спектре s-излучения. Брэгговская решетка должна способствовать появлению в спектре излучения помимо ЛМ при  $\lambda_0$  еще других ЛМ, приблизительно разделенных с ним интервалами, кратными

$$\xi_B = hc_0 / 2n_0l \text{ (эВ)}, \quad (6)$$

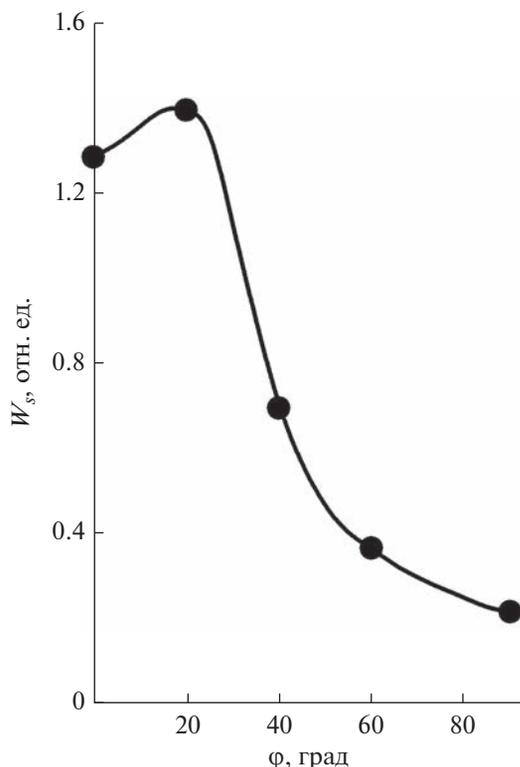
где  $l$  – длина участка траектории s-компонент, движущихся под углом  $\beta$ , между двумя последовательными их отражениями от гетерограниц,  $h$  – постоянная Планка,  $c_0$  – скорость света в вакууме.

Так создается конструктивная интерференция, усиливающая определенные выше s-компоненты. Во время максимума излучения распределенный брэгговский отражатель (РБО) “размывается”, а на спаде излучения РБО образуется вновь, но уже создающий ПОС для тех s-компонент, для которых на фронте интерференция была деструктивной и которые двигаются под слегка отличным углом. В итоге все s-компоненты, интегральные по времени, распространявшиеся под двумя углами, близкими к  $4.7^\circ$ , окажутся усиленными созданной РБО конструктивной интерференцией. По оценкам, опирающимся на экспериментальные данные, коэффициент отражения РБО этих s-компонент равен  $R_B \approx 0.36$  при условиях, указанных в работе [21].

В согласии с образованием РБО с  $k = 1$  и  $\beta = 4.7^\circ$ , движение в слое GaAs наиболее интенсивной части s-излучения под близким углом  $\beta \approx 5^\circ$  следовало и из измеренной в [23] диаграммы направленности s-излучения (рис. 4). Согласно диаграмме s-излучение максимальной энергии выходило из торца образца под углом к гетерограницам  $\varphi \approx 20^\circ$ , как и следовало по закону Снеллиуса:  $n_0\sin\beta = \sin\varphi$ .

#### 4. ПОРОГ ВОЗНИКНОВЕНИЯ. СПЕКТР УСИЛЕНИЯ. СВЯЗЬ СТИМУЛИРОВАННОГО И СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЙ, ДЛИНА УСИЛЕНИЯ s-КОМПОНЕНТ

При пространственно неоднородном, например гауссовом, распределении интенсивности света накачки по сечению ее луча длины усиления различных спектральных компонент излучения должны быть различны. Это схематически пояснено на рис. 5. Он несколько сходен с рисун-



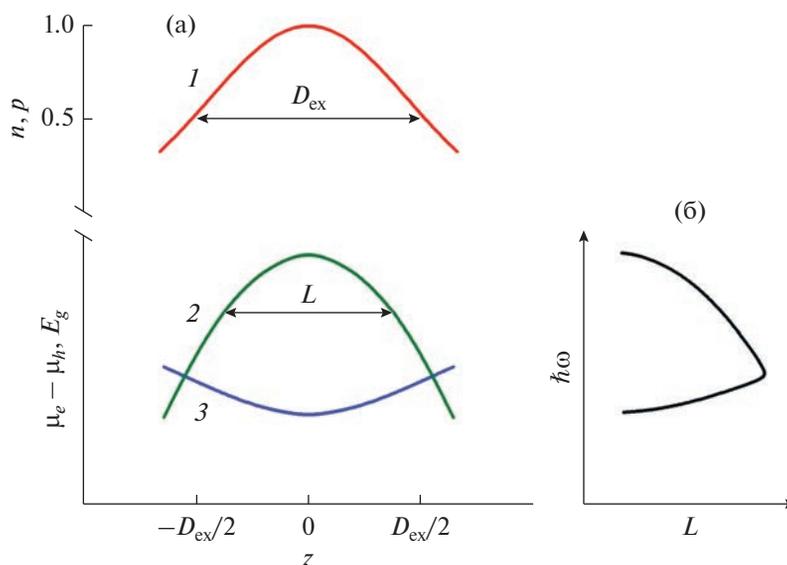
**Рис. 4.** Диаграмма направленности s-компоненты с  $\hbar\omega_s = 1.379$  эВ;  $\varphi$  – угол, отсчитанный от нормали к плоскости эпитаксиального слоя.

ком из работы [24, рис. 1], в которой предполагалось, что неоднородное пространственное распределение накаченных носителей возникает из-за пространственно неоднородного распределения

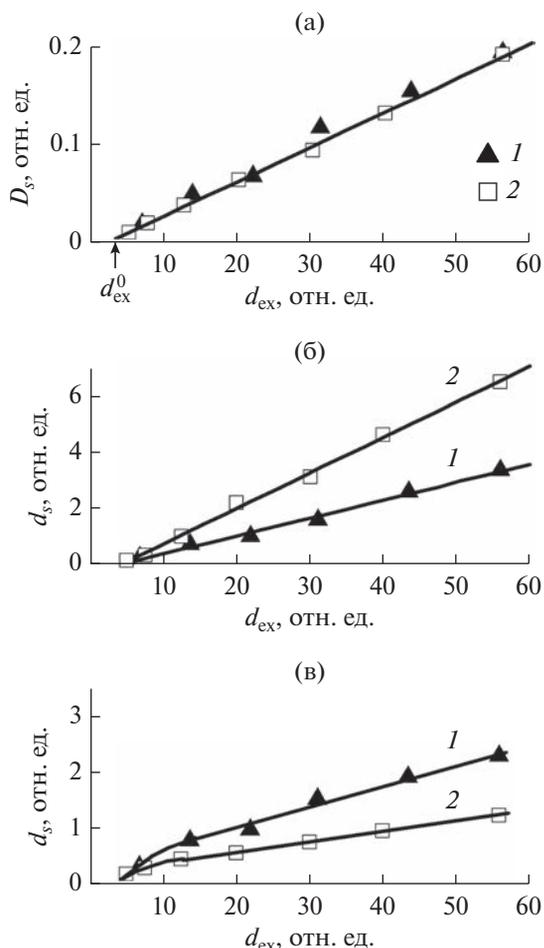
интенсивности излучения при насыщении его усиления и стационарной накачке. На рис. 5 представлен фрагмент (кривая 1) близкого к гауссову распределения плотности неравновесных носителей заряда  $n = p$  вдоль диаметра накаченной области GaAs. В термодинамически неравновесном состоянии этой области единого уровня Ферми для нее уже не существует, вместо него вводятся квазиуровни Ферми для электронов  $\mu_e$  и для дырок  $\mu_h$  (уже применявшиеся в разд. 1). С появлением неравновесных носителей в зоне проводимости и в валентной зоне происходит как бы “расщепление” первоначального уровня Ферми на два квазиуровня,  $\mu_e$  и  $\mu_h$ , каждый из которых смещается по направлению к своей зоне по мере возрастания плотности носителей [25]. Зависимость  $\mu_e - \mu_h = f(z)$  отображает кривая 2 на рис. 5.

Когда при накачке разность квазиуровней Ферми увеличится настолько, что превысит ширину запрещенной зоны  $E_g$ , то создастся инверсия населенности электронами таких энергетических уровней зоны проводимости, при рекомбинации с которых электроны будут излучать фотоны спектрального диапазона (2) [4].

Инверсная заселенность обуславливает усиление излучения стимулируемой им излучательной рекомбинацией. Если при распространении вдоль слоя GaAs излучения диапазона (2) усиление превысит потери, то образуется стимулированное излучение. Отсюда очевидно, что оно должно возникать, когда энергия накачки достигнет порогового значения, требуемого для образования в спектре



**Рис. 5.** Схемы: (а) распределения в пространстве плотности носителей заряда (1), разности квазиуровней Ферми ( $\mu_e - \mu_h$ ) (2), ширины запрещенной зоны  $E_g$  (3), ожидаемых при гауссовом распределении интенсивности света накачки по сечению ее луча ( $z$  – координата точки, лежащей на диаметре накаченной области GaAs,  $D_{ex}$  – диаметр луча накачки); б – зависимости длины усиления  $L$  s-компоненты от энергии ее фотона  $\hbar\omega$ .



**Рис. 6.** Зависимости плотности интегральной по спектру энергии s-излучения  $D_s$  (а), плотности энергии s-компоненты  $d_s$  при  $\hbar\omega_s = 1.39$  (б) и  $1.42$  эВ (в) от плотности энергии возбуждающего импульса  $d_{ex}$  при  $\hbar\omega_{ex} = 1.485$  эВ и  $D_{ex} = 0.2$  (1),  $0.7$  мм (2).

фундаментального поглощения света области необходимого усиления света. Оба условия выполнялись для s-излучения. Пороговый характер образования s-излучения был экспериментально подтвержден, в частности, в работе [26] и на рис. 6. На рисунке –  $d_{ex} = W_{ex}/S$  – плотность энергии накачки,  $d_s = W_s/S$  – плотность интегральной по времени энергии s-компоненты,  $D_s = W_{s-\Sigma}/S$  – плотность энергии s-излучения ( $W_{s-\Sigma}$  – интегральная по спектру и во времени энергия s-излучения,  $S = \pi D_{ex}^2/4$ ). На рис. 7 [27] символами и кривой 3 показан спектр коэффициента поглощения зондирующего импульса света  $\alpha(\hbar\omega)$ , включающий область усиления и измеренный при времени задержки  $\tau_d = -3$  пс.

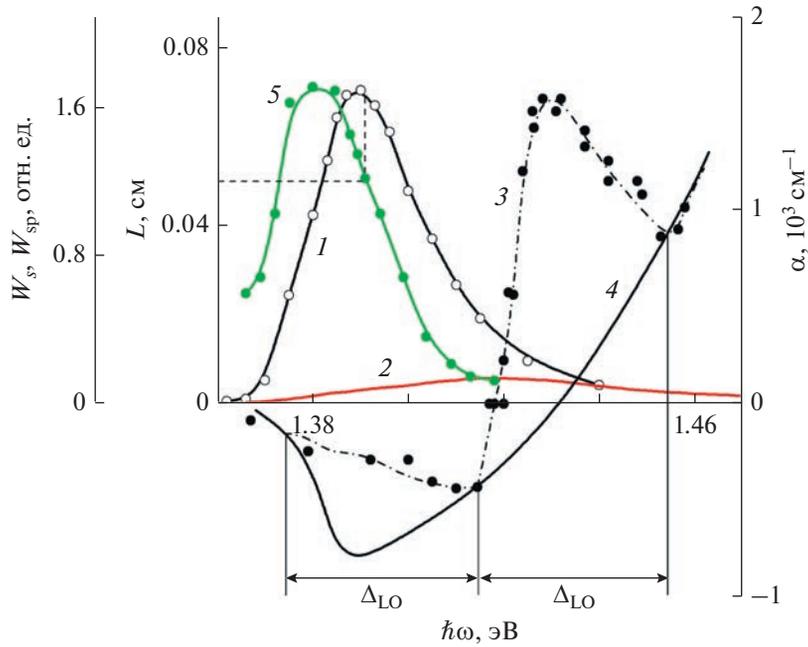
Из-за кулоновского взаимодействия носителей происходит перенормировка (сужение) запрещенной зоны [28]

$$\Delta E_g \sim n^{1/3}. \quad (7)$$

Перенормировка запрещенной зоны наблюдалась в ряде наших работ, в частности в [29]. С учетом перенормировки зависимость  $E_g(z)$  выглядит подобно кривой 3 на рис. 5. Замкнутая область, ограничиваемая кривыми 2 и 3, удовлетворяет условию (2) и позволяет представить, как меняется длина усиления  $L$  s-компоненты при изменении энергии ее фотона  $\hbar\omega$ . Соответствующую форму зависимости  $L(\hbar\omega)$  схематично иллюстрирует кривая на рис. 5б. Спектр длин усиления  $L(\hbar\omega)$  был определен в [27] и уточнен в [30] следующим образом.

На рис. 7 показаны интегральные по времени экспериментальные спектры: стимулированного излучения  $W_s(\hbar\omega)$ , кривая 1, и спонтанного излучения  $W_{sp}(\hbar\omega)$ , кривая 2. Была измерена часть спонтанного излучения, выходящего приблизительно ортогонально плоскости эпитаксиальных слоев настолько совершенной гетероструктуры, что рассеиваемая в том же направлении часть стимулированного излучения была много меньше. Указанный выше спектр  $W_s(\hbar\omega)$  в действительности является суммой спектров стимулированного и спонтанного излучений. В том спектральном диапазоне, где усиление излучения значительно, вкладом спонтанного излучения пренебрегалось из-за его малости по сравнению со стимулированным излучением. Но та коротковолновая часть спектра  $W_s(\hbar\omega)$ , где усиления нет, а есть поглощение света, представляет собой спонтанное излучение. То есть в этой “коротковолновой” спектральной области спектры  $W_s(\hbar\omega)$  и  $W_{sp}(\hbar\omega)$  должны быть одинаковы. Чтобы это выполнялось, спектр  $W_{sp}(\hbar\omega)$ , измеренный еще в 1996 г. в другой работе нежели спектр  $W_s(\hbar\omega)$ , был соответственно отнормирован. В том, что на рис. 7 коэффициент  $\alpha = 0$  при  $\hbar\omega = 1.42$  эВ, а спектры еще немного отличались, пока было  $\hbar\omega \leq 1.434$  эВ, нет противоречия. Дело в том, что вблизи последней энергии фотона была сначала расположена коротковолновая граница мгновенного спектра стимулированного излучения, которая со временем из-за перенормировки  $E_g$  сдвигалась вместе со спектром в длинноволновую сторону [20]. Спектр усиления 3 (при  $\alpha < 0$ ) был измерен, когда его коротковолновая граница уже сместились в длинноволновую сторону до  $\hbar\omega \approx 1.42$  эВ.

Экспериментальный спектр усиления отличается “выжженным” s-излучением провалом от того расчетного спектра, кривая 4 на рис. 7, какой бы был при фермиевском распределении носителей заряда. Наличие провала свидетельствует о насыщении усиления, в условиях которого излучение должно усиливаться, не экспоненциально, а линейно согласно [5, 6]. Этому отвечает и то, что, как описано далее в разд. 13, на фронте интенсивность s-излучения только в самом начале растет экспоненциально, а затем интенсивность



**Рис. 7.** Интегральные по времени спектры: кривая 1 – энергии симулированного излучения  $W_s(\hbar\omega)$ , кривая 2 – энергии спонтанного излучения  $W_{sp}(\hbar\omega)$ ; кривая 3 – спектр поглощения зондирующего импульса света, измеренного при  $\tau_d = -3$  пс,  $\alpha(\hbar\omega)$ ; кривая 4 – расчетный спектр поглощения при фермиевском распределении ЭДП; кривая 5 – спектр длины усиления  $L$ .

увеличивается со временем линейно. В согласии с этим и с рассмотрением провала в [3] очевидно, что насыщение усиления имеет место на протяжении большей части времени s-излучения, и поэтому можно принять, что приблизительно при  $\hbar\omega < 1.42$  эВ выполняется соотношение

$$W_s \approx -\alpha L W_{sp}. \quad (8)$$

Получаемый с помощью (8) спектр длины усиления

$$L \approx W_s / (-\alpha W_{sp}) = f(\hbar\omega) \quad (9)$$

представлен на рис. 7 (кривая 5). Установлено, что s-компонента, длина усиления которой равна диаметру  $D_{ex}$ , расположена в области максимума спектра s-излучения (разд. 12). Как показано на рис. 7 (штрихпунктир), подобное справедливо для полученного спектра длин усиления. Этим дополнительно подтверждается его реалистичность.

В работе [30] в выражение, связывающее  $W_s$ ,  $W_{sp}$ ,  $\alpha$  и  $L$ , был добавлен член, учитывающий коэффициент  $R_B$  отражения s-излучения, создаваемого РБО (см. разд. 3). Выражение, из которого стало определяться  $L$ , приобрело вид

$$W_s = -\alpha W_{sp}(1 + R_B)L. \quad (10)$$

Спектр длины усиления s-компоненты  $L(\hbar\omega)$  с поправкой на коэффициент  $R_B$  приведен далее.

Приемлемость сделанной поправки и включающего ее выражения (10) для оценки  $L$  была доказана еще и удовлетворительным совпадением в

[30] следующих трех зависимостей характерного времени релаксации:

1) s-излучения, интегрального по спектру, в функции от диаметра луча накачки  $D_{ex}$ , приравняемого к диаметру активной области;

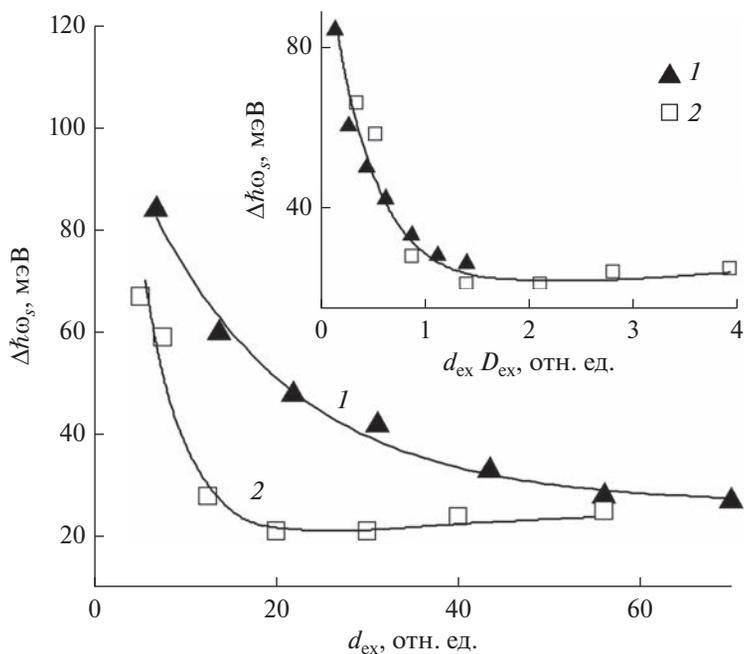
2) s-компоненты в функции от длины усиления  $L$  при  $R_B \approx 0.38$ ;

3) другой s-компоненты в функции  $L$  при  $R_B \approx 0.08$ .

Эти зависимости, подробно представляемые далее в разд. 12, к тому же в хорошем согласии с теорией определяют остаточное характерное время релаксации. Наконец, как будет видно далее, оцениваемые по (10) значения  $L$  позволяют представить экспериментальные зависимости различных параметров s-излучения и его компонент в достаточно простой и объяснимой аналитической форме. Вышеописанное к тому же эмпирически подтверждает реалистичность представления стимулированного излучения как усиленного спонтанного.

## 5. НАСЫЩАЮЩЕЕСЯ СУЖЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ GaAs

По мере увеличения плотности  $d_{ex}$  заселенность электронов на дне зоны проводимости становится инверсной. Когда созданное инверсией усиление спонтанного излучения превысит потери, тогда появится s-излучение. Сначала оно со-



**Рис. 8.** Зависимость ширины  $\Delta\hbar\omega_s$  спектра s-излучения от  $d_{ex}$  при  $\hbar\omega_{ex} = 1.485$  эВ и  $D_{ex} = 0.2$  (1) и 0.7 мм (2); на вставке – соответствующие зависимости  $\Delta\hbar\omega_s$  от произведения  $d_{ex}D_{ex}$ .

здает на длинноволновом склоне спектра спонтанного излучения узкий выступ, который становится максимумом спектра  $d_s(\hbar\omega_s)$ , при дальнейшем увеличении  $d_{ex}$  s-излучение, как и создаваемый им максимум, растет, составляя все большую часть спектра  $d_s(\hbar\omega_s)$  (см. [26], рис. 3б, 3а). Это сопровождается уменьшением ширины на полувысоте (FWHM)  $\Delta\hbar\omega_s$  указанного спектра. По мере увеличения  $d_{ex}$  уменьшение  $\Delta\hbar\omega_s$  замедляется и достигает насыщения (рис. 8).

Как видно из рис. 8, при изменении диаметра  $D_{ex}$  зависимость  $\Delta\hbar\omega_s(d_{ex})$  менялась. При большем диаметре  $D_{ex} = 0.7$  мм уменьшение  $\Delta\hbar\omega_s$  при увеличении  $d_{ex}$  происходило существенно быстрее, и насыщение зависимости  $\Delta\hbar\omega_s(d_{ex})$  наступало при меньшей  $d_{ex}$ , чем при  $D_{ex} = 0.2$  мм. Однако изменение диаметра  $D_{ex}$  не влияло на то значение  $\Delta\hbar\omega_s \approx 23$  мэВ, при котором уменьшение  $\Delta\hbar\omega_s$  насыщалось. С последним значением  $\Delta\hbar\omega_s$ , при котором s-излучение уже определенно доминирует над спонтанным излучением, удовлетворительно согласуется значение  $\Delta\hbar\omega_s = 24$  мэВ для спектра s-излучения [20, рис. 5, кривая 2]. Результаты измерений зависимостей  $\Delta\hbar\omega_s = f(d_{ex})$  при диаметрах  $D_{ex} = 0.2$  и 0.7 мм представлены рис. 8 (вставка) в виде функции  $\Delta\hbar\omega_s = f(d_{ex}D_{ex})$ . Обнаруживается, что при обоих диаметрах экспериментальные точки ложатся приблизительно на одну кривую. Каждую из трех зависимостей, представленных на рис. 8, грубо можно аппроксимировать экспонентой (на рисунке не показано).

Ширина  $\Delta\hbar\omega_{s-m}$  спектров s-излучения в разные моменты времени внутри интервала  $t = 6...32$  пс, тоже не превышала 24 мэВ в работе [20, рис. 3]. Уменьшение  $\Delta\hbar\omega_s$  при увеличении диаметра  $D_{ex}$  и фиксированной  $d_{ex}$ , представленное на рис. 9, наблюдалось в [16]. Видно, что зависимость  $\Delta\hbar\omega_s(d_{ex})$  не противоречит эмпирической зависимости  $\Delta\hbar\omega_s(d_{ex}D_{ex})$ .

О ширине  $\delta\hbar\omega_s$  основания (по уровню 0.1 амплитуды) спектра излучения, когда в нем доминирует s-излучение, получены следующие данные. В работе [20] ширина  $\delta\hbar\omega_{s-m}$  основания мгновенных спектров s-излучения, измеренных в реальном времени, не выходила за пределы 37...43 мэВ, хотя ширина  $\delta\hbar\omega_s$  основания спектра, интегрального по времени, составила 49 мэВ. Последнее, по-видимому, связано с перенормировкой  $E_g$  из-за кулоновского взаимодействия носителей, очевидной из экспериментальных графиков, приводимых ниже, из рис. 5 в [31] и др. В [31] при возрастании  $\hbar\omega_{ex}$  и фиксированной в каждой серии измерений плотности  $d_{ex}$  максимальная ширина  $\delta\hbar\omega_s$  спектров излучения была в пределах 45...39 мэВ. Значения  $d_{ex}$  для разных серий отличались в шесть раз или менее. В упомянутых работах диаметр луча накачки составлял  $D_{ex} = 0.6$  и 0.5 мм соответственно.

Объяснение приблизительного насыщения ширины спектра s-излучения гипотетически может быть следующим. По мере увеличения  $W_{ex}$  интенсивность s-излучения и вынужденная рекомбинация носителей (ВРН) растут. На каком-

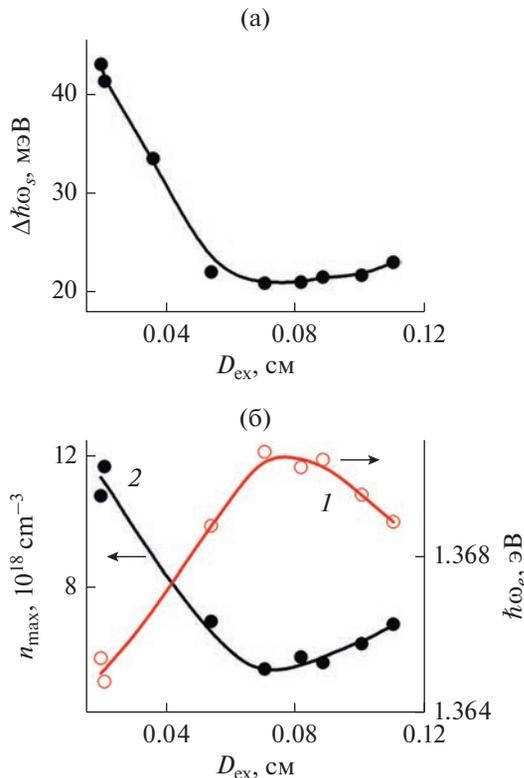


Рис. 9. Зависимость от диаметра  $D_{\text{ex}}$ : а – ширины спектра  $s$ -излучения  $\Delta\hbar\omega_s$ , б – энергии фотона  $\hbar\omega_e \approx E_g$  (1) и максимальной плотности носителей  $n_{\text{max}}$  (2).

то этапе этого роста начнется требуемое для баланса ВРН и ЭТН обеднение инверсной населенности электронов по сравнению с той, которая бы была при их фермиевском распределении на дне зоны проводимости. Иными словами, произойдет “выжигание дыры” в области усиления в спектре поглощения света. Образующееся обеднение, или провал, населенности транслируется с периодом  $\hbar\omega_{\text{LO}}$  вверх по зоне проводимости ( $\hbar\omega_{\text{LO}}$  – энергия продольного оптического (LO) фона). Когда ширина провала в инверсной населенности достигнет  $\hbar\omega_{\text{LO}}$ , то выше в зоне проводимости конец каждого провала совместится с началом следующего и дальнейшее уширение провалов прекратится (насытится) [32, рис. 1]. После этого инверсия населенности будет сконцентрирована в основном внутри области шириной  $\sim\hbar\omega_{\text{LO}}$ .

В итоге из-за трансляции обеднения инверсной населенности, требуемого для баланса ВРН и ЭТН, ширина спектра усиления и основания мгновенного спектра  $s$ -излучения не будет превышать  $\Delta_{\text{LO}} \approx 40$  мэВ, что не противоречит приведенным выше значениям  $\delta\hbar\omega_s$  в экспериментах,

$$\Delta_{\text{LO}} \approx \hbar\omega_{\text{LO}}(1 + m_e/m_h),$$

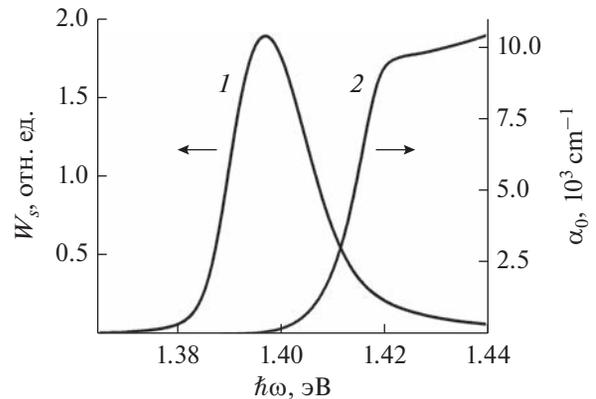


Рис. 10. Спектр  $s$ -излучения, интегральный по времени (1), и спектр поглощения света в невозбужденном GaAs (2).

где  $m_e$  и  $m_h$  – эффективные массы электрона и тяжелой дырки соответственно. Описанная гипотеза согласуется также с экспериментально наблюдавшейся “дырой” в области усиления и с ее трансляцией в спектре фундаментального поглощения света, ограничивающей полосу усиления шириной  $\Delta_{\text{LO}}$  (см. рис. 7). Согласуется гипотеза еще и с тем выводом анализа измеренных спектров просветления в работе [13] (см. разд. 1), что при  $s$ -излучении ширина спектральной области, где свет усиливается, ограничивалась величиной  $38$  мэВ  $\sim\Delta_{\text{LO}}$ . При поддерживаемой приблизительно фиксированной ширине основания  $\delta\hbar\omega_s \approx 40$  мэВ спектр  $s$ -излучения имеет квазигансову форму (рис. 10, кривая 1), в соответствии с которой ширина спектра на полувысоте и должна быть, как наблюдалось в эксперименте,  $\Delta\hbar\omega_s \approx 23$  мэВ.

Насыщающееся сужение ширины  $\Delta\hbar\omega_s$  спектра  $s$ -излучения при неизменной плотности  $d_{\text{ex}}$  энергии накачки и возрастании диаметра ее луча  $D_{\text{ex}}$  можно связать, тоже гипотетически, и со следующим. Интенсивность накачки была максимальной в центральной части накачиваемой области, и там она была приблизительно одинаковой при всех  $D_{\text{ex}}$ . Пусть  $s$ -излучение движется с каждого участка у наружной границы накаченной области по диаметру, при этом большую часть пути в режиме насыщения усиления. Все лучи, диаметрально пересекающие накаченную область, фокусируются в ее центре. Благодаря этому в центральной части накаченной области  $s$ -излучение имеет максимальную интенсивность. При увеличении  $D_{\text{ex}}$  в накаченной области будет возрастать разогрев носителей заряда  $s$ -излучением, замедляющий их остывание. Влияние этого замедления на скорость ВРН, среднюю по активной области, оказывается сильнее, чем насыщающегося усиления  $s$ -излучения (см. далее, разд. 9). Об этом свидетельствует уменьшение максимальной ин-

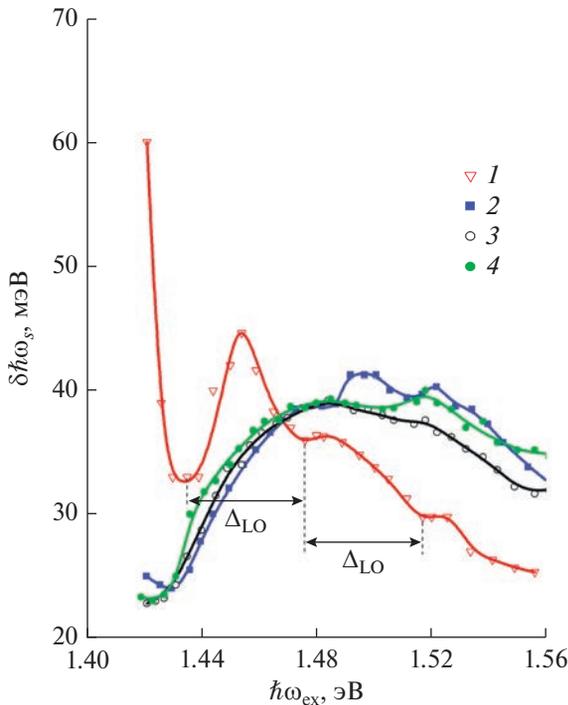


Рис. 11. Зависимость ширины спектра  $\delta\hbar\omega_s$  от энергии фотона  $\hbar\omega_{ex}$  при энергии накачки  $W_{ex} = 0.1$  (1), 0.2 (2), 0.4 (3), 0.6 отн.ед. (4).

тенсивности  $I_{\Sigma-\max}$  s-излучения, средней по активной области, при увеличении  $D_{ex}$  (см. далее разд. 11). Но в центральной области скорость ВРН будет расти пока  $D_{ex} < D_b \approx 0.7$  мм. Этот рост вызван тем, что от той добавки к площади активной области, которая создается при увеличении  $D_{ex}$ , возникает дополнительный вклад в интенсивность s-излучения в его фокусе. И пока  $D_{ex} < D_b$ , этот вклад преобладает над указанным выше ослаблением s-излучения из-за возрастания разогрева носителей. Происходящее таким образом при увеличении  $D_{ex}$  до  $D_b$  возрастание интенсивности s-излучения в центре области приводит к уменьшению ширины спектра s-излучения и насыщению при  $\delta\hbar\omega_s \approx \Delta_{LO}$ ,  $\Delta\hbar\omega_s \approx 23$  мэВ подобно тому, как описано выше для следствия увеличения  $W_{ex}$ . При  $D_{ex} > D_b$  указанное уменьшение интенсивности s-излучения из-за разогрева носителей становится доминирующим уже и в центре области. Из-за этого скорость ВРН чуть уменьшалась, а ширина спектра незначительно возрастала (рис. 9а). Отметим далее еще два подтверждения формирующемуся представлению.

Энергия фотона  $\hbar\omega_e$ , условно определяющая длинноволновый край спектра s-излучения, и оцениваемая из него (см. разд. 7), максимальная в активной среде (и расположенная в ее центре) плотность  $n_{\max}$  носителей менялись при увеличении

$D_{ex}$  (см. рис. 9б, кривые 1 и 2). На том же рисунке видно, что изменение  $n_{\max}$  с  $D_{ex}$  имеет сходство с изменением  $\Delta\hbar\omega_s$ . Это, в свою очередь, соответствует согласованности изменения  $n_{\max}$  и  $\Delta\hbar\omega_s$  согласно схеме на рис. 5.

На рис. 8 при  $d_{ex} \approx 56$  отн. ед. ширина  $\Delta\hbar\omega_s$  примерно одинакова при  $D_{ex}$  0.2 и 0.7 мм. Поэтому исходя из отмеченного подобия графиков  $n_{\max}(D_{ex})$  и  $\Delta\hbar\omega_s(D_{ex})$  на рис. 9 можно предположить, что при указанных  $D_{ex}$  и  $d_{ex}$  плотность  $n_{\max}$  будет приблизительно одинаковой. Этому соответствует приблизительное равенство как амплитуд просветления на зависимости  $\lg(T^1/T^0) = f(\tau_d)$  в [33, рис. 1] при  $d_{ex} \approx 56$  отн. ед., так и ширины  $\Delta\hbar\omega_s$  спектров s-излучения в [33, рис. 5] для двух указанных диаметров. Одновременно подтверждается определение  $n_{\max}$  на основании измеренной  $\hbar\omega_e$ .

Наблюдавшееся насыщающееся сужение ширины спектра s-излучения слоя GaAs, подвергнутого оптической пикосекундной пространственно неоднородной накачке, имеет некоторое сходство с сужением спектра в теории [5] излучения в лазерной среде без резонатора при стационарной пространственно однородной накачке. В работе [5] получалось, что увеличение интенсивности излучения при возрастании длины  $l_1$  его пути в одномерной активной среде приводит к пространственной неоднородности его усиления и изменению ширины его спектра. Согласно [5] ширина неоднородно суженной линии, что ближе к нашему случаю, по мере увеличения  $Z_h = g_h l_1$  до  $\sim 10$  ( $g_h$  – коэффициент ненасыщенного усиления) сужается и затем возрастает приблизительно до исходного уровня. В нашем же случае последующее возрастание ширины спектра было незначительным. Хотя, судя по обсуждаемым ниже графикам  $\delta\hbar\omega_s(\hbar\omega_{ex})$  (рис. 11), при увеличении  $\hbar\omega_{ex}$  зависимость  $\Delta\hbar\omega_s(d_{ex})$  может несколько измениться (минимум стать глубже) по сравнению с показанной на рис. 8. Так что пока нам не известна теория, точно объясняющая изменение  $\Delta\hbar\omega_s$  при увеличении  $d_{ex}$  или  $D_{ex}$ , экспериментально обнаруженное при пикосекундной накачке с пространственно неоднородной интенсивностью. Подчеркнем еще, что наблюдавшееся сужение спектра s-излучения при увеличении плотности энергии возбуждающего импульса противоположно тому, что происходило бы, если излучение было бы спонтанным. Спектр спонтанного излучения согласно расчетам [34] становится шире и распространяется в коротковолновую область при усилении накачки полупроводника.

Дополним уже сказанное выше о работе [31], где была измерена зависимость  $\delta\hbar\omega_s(\hbar\omega_{ex})$  (см. рис. 11). Изменение  $\delta\hbar\omega_s$  по мере возрастания  $\hbar\omega_{ex}$

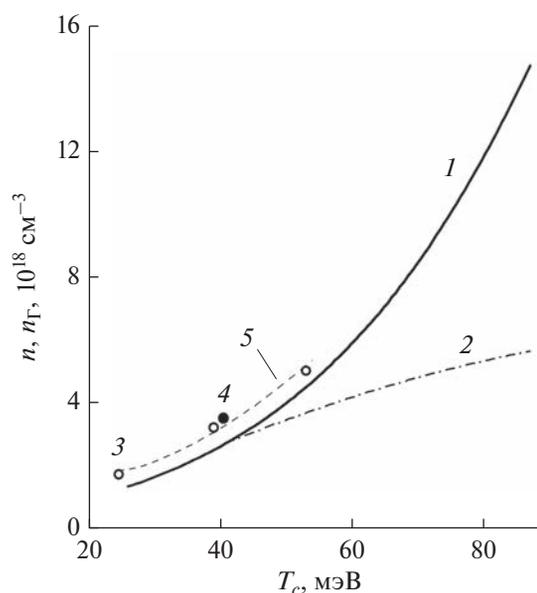
можно интерпретировать следующим образом. Сначала образование стимулированного излучения приводит к уменьшению  $\delta\hbar\omega_s$ . Малости  $\delta\hbar\omega_s$  способствует близость энергетического уровня, на который накачивались электроны, к краю зоны проводимости, ограничивающая ширину полосы инверсии населенности. Далее этот уровень отодвигается от края зоны, и ширина полосы инверсии растет. Ее росту способствует и возрастание плотности накачиваемых носителей при увеличении  $\hbar\omega_{ex}$ . Рост  $\delta\hbar\omega_s$  насыщался, достигнув значения  $\delta\hbar\omega_s \approx 40$  мэВ. При еще больших  $\hbar\omega_{ex}$ , по-видимому, возрастающий разогрев накачиваемых электронов приводит к сужению полосы инверсии и  $\delta\hbar\omega_s$ . При  $W_{ex} = 0.1$  отн. ед. зависимость  $\delta\hbar\omega_s(\hbar\omega_{ex})$  (рис. 11, кривая 1) была модулирована с периодом  $\Delta_{LO}$ , по-видимому, вследствие ВКР (вынужденного комбинационного рассеяния) света накачки, происходившего с участием LO-фононов. При увеличении  $W_{ex}$  от 0.1 до 0.2 отн. ед. и фиксированной  $\hbar\omega_{ex} > 1.47$  эВ ширина  $\delta\hbar\omega_s$  возрастала, видимо, из-за увеличения плотности носителей. При дальнейшем увеличении  $W_{ex} > 0.2$  отн. ед. зависимость  $\delta\hbar\omega_s(\hbar\omega_{ex})$  на рис. 11 почти не менялась. Отметим, что при  $\hbar\omega_{ex} = 1.485$  эВ возрастание  $\delta\hbar\omega_s$  при увеличении  $W_{ex}$  от 0.1 до 0.2 отн. ед. небольшое и с ним согласуется некоторое возрастание  $\Delta\hbar\omega_s$  при увеличении  $d_{ex} > 20$  отн. ед., наблюдавшееся при накачке с этой энергией фотона (см. рис. 8).

Таким образом, эмпирически установлено: а) следуя какой закономерности (ее можно грубо аппроксимировать экспонентой) и до какого предела уменьшение ширины спектра усиленного спонтанного излучения происходит при увеличении энергии и диаметра луча импульса накачки; б) роль изменения энергии и диаметра приблизительно эквивалентна; в) при фиксированной плотности энергии накачки и увеличении диаметра изменение ширины спектра и изменение плотности носителей происходят одно подобно другому; г) насыщенная ширина основания спектра излучения близка к  $\Delta_{LO}$ ; д) как на ширину спектра влияет энергия фотона накачки; видно, что до насыщения ширины спектра на нее влияет много факторов.

Интерпретация этих спектральных явлений s-излучения, согласующихся с другими эффектами s-излучения, пока только качественная, гипотетическая и неполная.

## 6. ПОРОГОВОЕ СОСТОЯНИЕ ЭДП, СВЯЗЫВАЮЩЕЕ ЕЕ ПЛОТНОСТЬ С ТЕМПЕРАТУРОЙ

Как показано в [1 и др.], s-излучение поддерживает ЭДП в состоянии, близком к пороговому,



**Рис. 12.** Расчетная (кривая 1) и экспериментальная (точки 3 [10] и 4 [13]) зависимости полной плотности электронов  $n$  от температуры  $T_c$ , кривая 2 – зависимость плотности электронов  $n_h$  в долине  $\Gamma_6$  от температуры  $T_c$ ; кривая 5 – аппроксимация экспериментальных данных 3, 4 зависимостью  $n \sim T_c^{3/2}$ .

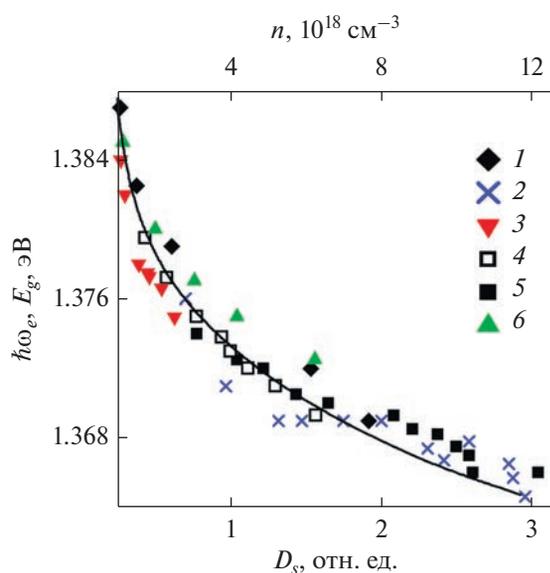
поскольку ограничивает плотность носителей. В пороговом состоянии расстояние между квазиуровнями Ферми электронов  $\mu_e$  и дырок  $\mu_h$  равно ширине запрещенной зоны  $E_g$ , и выполняется условие электронейтральности:

$$\mu_e - \mu_h \approx E_g, \quad n = n_h + n_L = p, \quad (11)$$

где  $p$  – суммарная плотность тяжелых и легких дырок;  $n$ ,  $n_h$  и  $n_L$  – плотность электронов соответственно полная и в долинах  $\Gamma_6$  и  $L_6$ . В приближении (11) возникает взаимосвязь между плотностью  $n$  и температурой  $T_c$  ЭДП [35] (рис. 12, кривая 1), там же представлена экспериментальная зависимость, близкая к расчетной (символы 3, 4). Последнее подтверждает допустимость приближения, что во время s-излучения можно считать ЭДП находящимся в пороговом состоянии. Экспериментальные значения  $n$  и  $T_c$  были получены в работах [10, 13] с помощью подгонки расчетных спектров просветления к экспериментальным. Расчетная и экспериментальная зависимости удовлетворительно аппроксимируются зависимостью [36]

$$n - n_{th} = k(T_c - T_R)^{3/2} \quad (12)$$

( $k = \text{const}$ ) с незначительно отличающимися  $n_{th}$  – пороговой для возникновения s-излучения плотностью ЭДП и  $T_R$ .



**Рис. 13.** Экспериментальные зависимости энергии фотона  $\hbar\omega_e$  (точки 1–6) от плотности энергии s-излучения  $D_s$  при различных параметрах возбуждающего импульса света (табл. 1); расчетная зависимость ширины запрещенной зоны  $E_g$  от плотности  $n$  при пороговом состоянии ЭДП (сплошная кривая).

Прямое подтверждение взаимосвязи плотности  $n$  с температурой  $T_c$  получено в работе [37]. Было измерено просветление  $\lg(T^1/T^0)$  в зависимости от времени задержки  $\tau_d$  при облучении GaAs наряду с возбуждающим импульсом одновременно дополнительным греющим импульсом с энергией фотона  $\hbar\omega < E_g$ . Обнаружено, что на зависимости

$$\lg(T^1/T^0) = f(\tau_d)$$

существенно увеличивался обратимый вклад (см. [37, рис. 2] или [1, рис. 15]). Этот результат показал, что обратимый вклад в просветление связан с обратимым разогревом ЭДП и соответствующим увеличением ее плотности, которое обеспечивает выполнение условия (11). Здесь можно упомянуть еще и следующее подтверждение. В [38] было обнаружено, что величина просветления в области

значительных обратимых изменений прозрачности GaAs определяется интенсивностью возбуждающего импульса и практически не зависит от предшествующего светового воздействия на образец [1, рис. 19, 20].

### 7. ЗАВИСИМОСТЬ ДЛИННОВОЛНОВОЙ ГРАНИЦЫ СПЕКТРА ОТ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ s-ИЗЛУЧЕНИЯ, ОТОБРАЖАЮЩАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКУ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ ИЗ-ЗА КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НОСИТЕЛЕЙ

В работе [35] была экспериментально обнаружена связь между длинноволновой границей  $\hbar\omega_e$  спектра и плотностью  $D_s$  энергии s-излучения. Зависимость  $\hbar\omega_e(D_s)$  представлена на рис. 13 при различных параметрах возбуждающего импульса света (табл. 1).

Изменение параметров возбуждающего импульса, естественно, сопровождалось изменением плотности и температуры ЭДП, тогда как разогревом кристаллической решетки можно пренебречь. Примеры интегральных по времени спектров s-излучения иллюстрирует в полулогарифмическом масштабе рис. 14 [35]. Видно, что длинноволновый склон спектра сдвигается в длинноволновую сторону при увеличении площади под спектральной кривой, т.е. при увеличении энергии  $W_{s-\Sigma}$ , а значит, и плотности  $D_s$ . Сдвиг длинноволнового края спектра характеризовался изменением условно определявшей этот край энергии фотона  $\hbar\omega_e$ . Она определялась из условия, что при энергии фотона  $\hbar\omega_e$  величина  $W_s/D_{ex}^2$  имеет фиксированное значение, немного превышающее нулевое (см. рис. 14). Аналогичный метод определения края спектра  $\hbar\omega_e$  использовался в работах [39, 40].

Предполагалось, что  $\hbar\omega_e \approx E_g$  и, соответственно, сдвиг длинноволнового края спектра отображает сужение  $\Delta E_g$  запрещенной зоны, происходящее из-за кулоновского взаимодействия между носителями заряда [40, 41]. Оценки, выполненные с помощью формул, приведенных в [42], по-

**Таблица 1.** Параметры возбуждающего импульса света (см. рис. 13)

Номер кривой на рис. 13	$D_{ex}$ , мм	$d_{ex}$ , отн. ед.	$\hbar\omega_{ex}$ , эВ
1	0.2	1...5.6	1.485
2	0.2	5.5	1.424...1.502
3	0.35	2.5	1.449...1.516
4	0.35	7.4	1.434...1.516
5	0.35	25	1.423...1.528
6	0.7	1...4.5	1.485

казали, что в сужение запрещенной зоны вклад корреляционной энергии мал. Тогда, с учетом только обменной энергии можно записать

$$\Delta E_g = 4/3(E_{ex}^e + E_{ex}^h), \quad (13)$$

где  $E_{ex}^e$  и  $E_{ex}^h$  – обменная энергия соответственно электрона и дырки:

$$\begin{aligned} E_{ex}^e &= -3e^2(3\pi^2 n_\Gamma)^{1/3}/4\pi\epsilon, \\ E_{ex}^h &= -3e^2\eta(3\pi^2 p)^{1/3}/4\pi\epsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

$e$  – заряд электрона,  $\epsilon = 12.85$  – статическая диэлектрическая проницаемость,  $\eta = 0.73$  – коэффициент, учитывающий “зацепление” легких и тяжелых дырок [43]. Зависимость  $E_g = E_{g0} + \Delta E_g(n)$  была рассчитана по формулам (13), (14) и с учетом незначительного вклада корреляционной энергии. Этот расчет сделан в приближении порогового состояния ЭДП, при котором плотность, температура и распределение неравновесных электронов по долинам однозначно взаимосвязаны (см. разд. 6). Обнаружилось, что график рассчитанной зависимости  $E_g(n)$  и график зависимости  $\hbar\omega_e(D_s)$  можно совместить так, что они будут представлены одной сплошной кривой (см. рис. 13). Для “привязки” расчетной зависимости  $E_g(n)$  к экспериментальной  $\hbar\omega_e(D_s)$  принималось, что  $E_g = \hbar\omega_e = 1.382$  эВ при  $n \approx 1.32 \times 10^{18}$  см<sup>-3</sup>. Тогда ширина запрещенной зоны невозбужденного GaAs будет равна  $E_{g0} = 1.407$  эВ, что примерно согласуется с энергией фотона длинноволнового края спектра излучения “невозбужденного” GaAs [44, 45]. Указанное совпадение расчетной и экспериментальной зависимостей получено, несмотря на то что в расчете не учитывалось изменение обменной энергии с температурой, как и в [40, 46]. Видимо, это не приводит к существенным погрешностям в наших условиях, когда электроны вырождены, а состояние дырок промежуточное между вырожденным и бальмовским. Зависимость  $E_g(n)$  оказалась слабой при больших плотностях  $n$ . Это связывается с тем, что при наличии s-излучения увеличение плотности  $n$  приводит к увеличению температуры ЭДП, так что все большая часть электронов оказывается в  $L_6$ -долине, тогда как сужение запрещенной зоны определяется в основном электронами  $\Gamma_6$ -долины (см. рис. 12). Удовлетворительное совпадение указанных экспериментальной и расчетной зависимостей свидетельствует в пользу правильности этого предположения.

Значение  $\hbar\omega_e$  соответствует максимально достигнутому во время s-излучения сужению  $E_g$ , происходившему, когда плотность фотогенерированных пар электронов и дырок становилась максимальной. Поэтому из описанного совпадения зависимостей  $\hbar\omega_e(D_s)$  и  $E_g(n)$  вытекает эмпирический вывод, что при  $D_{ex} = 0.2...0.35$  мм плот-

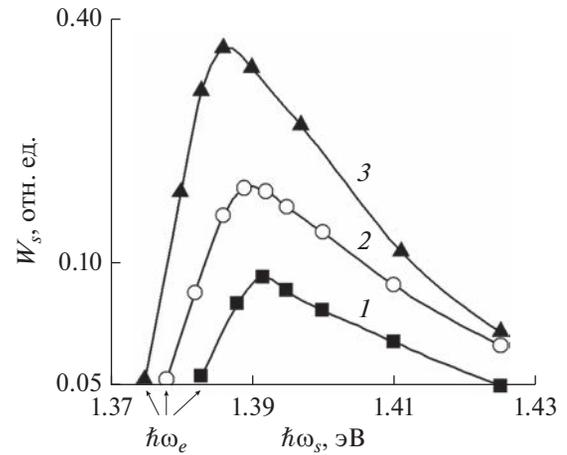


Рис. 14. Спектры s-излучения при  $D_{ex} = 0.35$  мм: кривая 1 –  $d_{ex} = 2.5$  отн. ед.,  $\hbar\omega_{ex} = 1.455$  эВ; 2 –  $d_{ex} = 2.5$  отн. ед.,  $\hbar\omega_{ex} = 1.485$  эВ; 3 –  $d_{ex} = 7.4$  отн. ед.,  $\hbar\omega_{ex} = 1.455$  эВ; стрелками отмечено положение длинноволнового края спектров  $\hbar\omega_e$ .

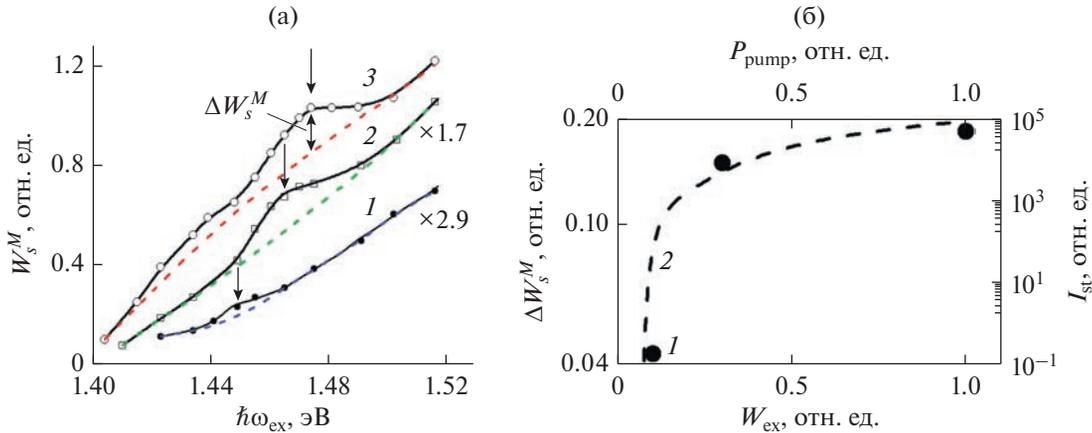
ность энергии s-излучения  $D_s$  приближенно пропорциональна плотности фотогенерированных пар электронов и дырок, максимально достигнутой во время импульса s-излучения:

$$D_s \sim p_{max} = n_{max} = n_{\Gamma-max} + n_{L-max}. \quad (15)$$

При  $D_{ex} = 0.7$  мм наблюдалось систематическое отклонение экспериментальных точек  $\hbar\omega_e(D_s)$  от расчетной зависимости  $E_g(n)$ . Отклонение возрастало при увеличении  $D_s$ . Правильность зависимости  $E_g(n)$  подтверждена в данном обзоре еще и разнообразными примерами согласования экспериментальных зависимостей с теми расчетными, которые были получены при использовании указанной  $E_g(n)$ . Отмеченное отклонение вызвано описанным в разд. 5 уменьшением максимальной плотности носителей  $n_{max}$  при увеличении  $D_{ex}$  (см. рис. 9, кривая 2). То есть отклонение указывает на то, что соотношение между  $D_s$  и  $n_{max}$  зависит еще и от диаметра  $D_{ex}$ .

Подобие зависимостей  $\hbar\omega_e(D_s)$  и  $E_g(n)$  подтверждает и демонстрирует перенормировку запрещенной зоны из-за кулоновского взаимодействия носителей, а также подтверждает правомочность приближения порогового состояния ЭДП.

Отметим, что изменение ширины запрещенной зоны  $E_g$  в GaAs исследовалось в заметном числе работ (см., например, [28, 39, 40, 46–49]). Во всех этих работах температура носителей заряда не поднималась выше 300 К, электроны зоны проводимости считались сосредоточенными в  $\Gamma_6$ -долине, и при этих условиях не должно быть интенсивного стимулированного излучения. Так что в указанных работах не рассматривали изме-



**Рис. 15.** Зависимость энергии  $W_s^M$  в максимуме спектра от энергии фотона  $\hbar\omega_{ex}$  (а) при  $D_{ex} = 0.35$  мм и плотности  $d_{ex} = 2.5$  (1), 7.4 (2), 25 отн. ед. (3), стрелками указаны максимумы усиления s-излучения в результате ВКР; б — зависимость  $\Delta W_s^M$  от  $W_{ex}$  (1) и типичная зависимость интенсивности  $I_{st}$  стоксовой гармоники (кривая 2), усиливаемой ВКР в кювете с нитробензолом длиной 10 см, от мощности лазерной накачки  $P_{pump}$  [51].

нение  $E_g$  в описанном выше аспекте (при s-излучении и пороговом состоянии ЭДП).

## 8. ВКР С УЧАСТИЕМ ОПТИЧЕСКИХ ПЛАЗМОНОВ

Допустимость использования приближения “порогового” состояния ЭДП подтвердилась и в обнаруженном ВКР света накачки и s-излучения, происшедшем при участии связанных колебаний оптического плазмона и ЛО-фона (далее — оптический плазмон). В работе [50] изучалось изменение спектра  $W_s(\hbar\omega_s)$  s-излучения при изменении энергии фотонов накачки  $\hbar\omega_{ex}$  и фиксированной плотности  $d_{ex}$  энергии возбуждающего импульса. На кривых зависимости энергии в максимуме спектра  $W_s^M$  от  $\hbar\omega_{ex}$  была обнаружена ступенеобразная особенность. При изменении плотности  $d_{ex}$  изменялась энергия фотона накачки, при которой располагалась на зависимости  $W_s^M(\hbar\omega_{ex})$  вершина особенности (рис. 15а). Вершиной считается та точка особенности (излома) на спектре, где располагается максимум отрицательной кривизны. Эти особенности были интерпретированы как следствие усиления s-излучения в результате названного выше ВКР. Из условия  $\hbar\omega_e \approx E_g(n)$  была определена по графику рис. 13 максимальная плотность  $n$  пар электронов и дырок при энергии возбуждающего фотона  $\hbar\omega_{ex}$ . На рис. 16 представлена экспериментальная зависимость разности  $\hbar\omega_{ex} - \hbar\omega_s^m$  от  $n$  при трех плотностях  $d_{ex}$  энергии возбуждающего импульса ( $\hbar\omega_s^m$  — энергия фотона, при которой располагается максимум спектра

s-излучения). На рис. 16 также представлена рассчитанная по формуле (16) зависимость энергии оптического плазмона  $\hbar\omega_{op}$  от плотности  $n$ . Отклонение выделенных экспериментальных точек от этой расчетной зависимости незначительно. Таким образом, для найденных значений  $n$  экспериментально определенные энергии оптического плазмона  $\hbar\omega_{op}$  не противоречили расчетной зависимости  $\hbar\omega_{op}(n)$ . ВКР представлялось как вертикальный переход электрона, происходящий при поглощении им фотона накачки, из максимума валентной зоны в виртуальное состояние зоны проводимости, затем переход этого электрона на дно зоны проводимости с излучением плазмона и переход электрона в валентную зону с излучением фотона. Переход (первый) электрона именно в виртуальное состояние объясняется требованием выполнения закона сохранения волновых векторов.

Напомним, что на начальном этапе спонтанного комбинационного рассеяния света накачки генерируется стоксова гармоника, и ее интенсивность растет линейно. Когда начинается ВКР, интенсивность стоксовой гармоники растет квазиэкспоненциально. На следующем этапе возрастание стоксовой гармоники стремится к насыщению. График, иллюстрирующий такое изменение стоксовой гармоники при ВКР, взятый из [51], представлен на рис. 15б. Дополнительный вклад в s-излучение, создаваемый ВКР, обозначен  $\Delta W_s^M$ , выделен на рис. 15а и отложен в функции  $W_{ex}$  на рис. 15б. Видно, что зависимость  $\Delta W_s^M(W_{ex})$  имеет вид, типичный для ВКР с насыщением.

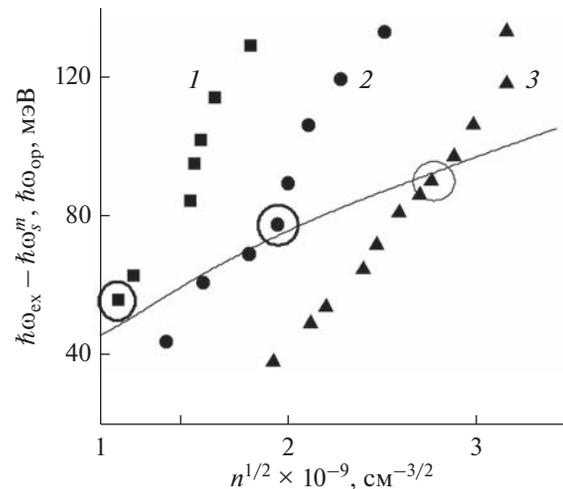
Для расчета частоты связанных колебаний оптического плазмона и LO-фонона  $\omega_{\text{оп}}$  использовались выражения (см., например, [52])

$$\omega_{\text{оп}}^2 = (\omega_{\text{LO}}^2 + \omega_p^2)/2 + [(\omega_{\text{LO}}^2 + \omega_p^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_{\text{TO}}^2]^{1/2}/2, \quad (16)$$

$$\omega_p^2 = 4\pi e^2(n_{\Gamma}/m_e^{\Gamma} + n_L/m_e^L + p_h/m_{hh} + p_l/m_{lh})/\epsilon,$$

где  $m_e^{\Gamma}$  (см. ниже),  $m_e^L = 0.4m_0$ ,  $m_{hh} = 0.62m_0$ ,  $m_{lh} = 0.075m_0$  – эффективные массы соответственно электронов в долине  $\Gamma_6$  и в долине  $L_6$ , тяжелых дырок и легких дырок,  $m_0$  – масса покоя электрона,  $\omega_{\text{LO}} = 292 \text{ см}^{-1}$  и  $\omega_{\text{TO}} = 269 \text{ см}^{-1}$  – частоты оптических соответственно продольного и поперечного фононов. Учитывалось изменение массы  $m_e^{\Gamma} = 0.074...0.088m_0$  при изменении  $n$  и  $T_c$  [53, Ф-ла (74)]. Приведенные значения эффективных масс электронов и дырок являются реалистичными, но их точное определение затруднительно по многим причинам: из-за разброса экспериментальных результатов, полученных в разных работах, из-за анизотропии масс (особенно в подзоне тяжелых дырок и в долине  $L_6$ ), из-за непараболичности и гофрирования энергетических зон, из-за изменения “кажушейся” массы в результате обменного взаимодействия [44, 54–56]. Анизотропию масс следовало бы учитывать в соответствии с анизотропией волнового вектора плазмона, излучавшегося при ВКР. Волновой вектор плазмона равен разности волнового вектора возбуждающего фотона, приблизительно ортогонального слою GaAs (т.е. плоскости (100)), и волнового вектора фотона s-излучения, преимущественно параллельного поверхности слоя GaAs (т.е. лежащего в плоскости (100)). Значение  $m_e^L$  для долины  $L_6$  было выбрано с приближенным учетом указанной анизотропии. При этом исходили из данных о циклотронной массе Ge [57], поскольку в GaAs и Ge эллипсоидальные изоэнергетические поверхности в  $L$ -долинах сходны.

Описанное исследование интегральных по времени спектров s-излучения, сконцентрированное на проявлении в них ВКР с участием плазмонов, еще раз экспериментально подтвердило следующее. При пикосекундном s-излучении в GaAs допустимо использование приближения порогового состояния многокомпонентной ЭДП. В этом приближении полная концентрация пар электронов и дырок, температура носителей и распределение электронов по долинам, сужение запрещенной зоны из-за кулоновского взаимодействия носителей становятся однозначно взаимосвязанными (см. разд. 6 и 7). Кроме того, это исследование обнаружило активность s-излучения по отношению к ВКР. В согласии с этим позднее проявилось ВКР

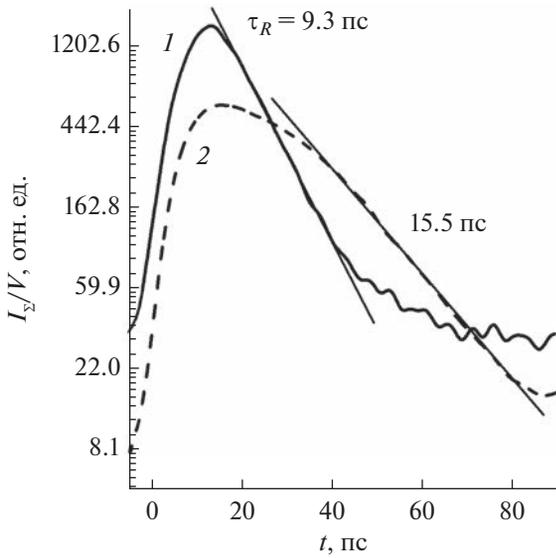


**Рис. 16.** Экспериментальная зависимость разности  $\hbar\omega_{\text{ex}} - \hbar\omega_s^m$  от полной плотности  $n$  пар электронов и дырок при  $D_{\text{ex}} = 0.35 \text{ мм}$  и  $d_{\text{ex}} = 2.5$  (1), 7.4 (2), 25 отн. ед. (3); обведены кружочками точки с максимальным значением усиления s-излучения, вызванного ВКР (соответствующие им точки на рис. 15а указаны стрелками); сплошная линия – расчетная зависимость кванта энергии  $\hbar\omega_{\text{оп}}$  связанных колебаний оптического плазмона и LO-фонона от  $n$ .

с участием света накачки, s-излучения и LO-фононов [3].

## 9. СВЯЗЬ ХАРАКТЕРНЫХ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ s-ИЗЛУЧЕНИЯ И ОСТЫВАНИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

В работе [33] исследовалась пикосекундная релаксация обратимого просветления слоя GaAs. Измеренная корреляционным методом накачки-зондирования она отображала релаксацию заселенности носителями заряда энергетических уровней, располагавшихся в зонах проводимости и валентной и связанных прямым оптическим переходом. Характерное время той релаксации  $\tau_b$  возрастало при увеличении диаметра луча накачки  $D_{\text{ex}}$ , производимого с сохранением плотности энергии накачки  $d_{\text{ex}}$ . Предположительное объяснение возрастания  $\tau_b$  с  $D_{\text{ex}}$  базировалось, во-первых, на взаимосвязи плотности и температуры ЭДП в пороговом состоянии, во-вторых, на функциональной зависимости характерного времени остывания ЭДП в присутствии стимулированного излучения, теоретически определенной в [7]. В работе [15] при одном диаметре  $D_{\text{ex}}$  было измерено в реальном времени s-излучение и обнаружено, что оно релаксирует с характерным временем около 12 пс, совпадающем с его оценкой, которая тоже базировалась на положениях, названных выше.

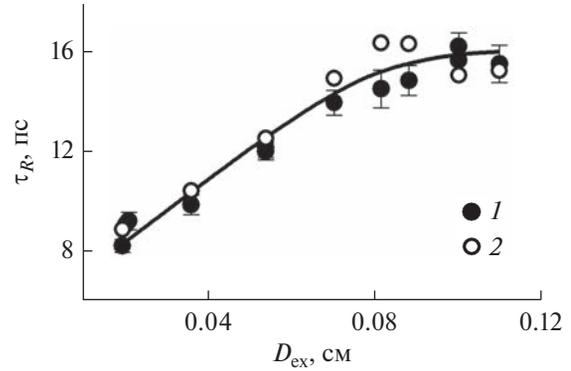


**Рис. 17.** Нормированные на объем  $V$  хронограммы s-излучения для  $D_{ex} = 0.21$  (1) и 1.1 мм (2), представленные в полулогарифмическом масштабе;  $\tau_R$  – характерное время релаксации s-излучения.

В [36] при фиксированной  $d_{ex}$  измерены зависимости от  $D_{ex}$ : 1) спектра s-излучения, интегрального по времени; 2) характерного времени  $\tau_R$  релаксации s-излучения. Зависимость 1) позволила определить ширину запрещенной зоны, плотность и температуру неравновесных носителей заряда в функции от диаметра  $D_{ex}$ . Данные зависимостей 1) и 2) позволили выявить связь релаксации s-излучения с характерным временем  $\tau_T$  остывания носителей заряда, экспериментально подтвердив аналитическое выражение характерного времени  $\tau_R$  релаксации интенсивности s-излучения и плотности носителей заряда, основанное на этой связи.

Диаметр  $D_{ex}$  последовательно изменяли от 0.2 до 1.1 мм при  $d_{ex} = \text{const}$ . Измерение диаметра  $D_{ex}$  предварительно проводилось с помощью веб-камеры. При каждом фиксированном  $D_{ex}$  измерялись хронограммы следующих импульсов: s-излучения (интегрального по спектру)  $I_\Sigma(t)$ , накачки  $I_{ex}(t)$  и опорного ( $p$ )  $I_p(t)$ . С помощью опорного импульса определялось взаимное распределение во времени импульсов накачки и s-излучения (подробнее см. в [29]).

На рис. 17 представлены хронограммы s-излучения при  $D_{ex} = 0.21$  и 1.1 мм. Хронограммы нормированы на эффективный объем активной зоны  $V = \pi D_{ex}^2 / 4$  (смысл нормировки пояснен далее). Релаксацию s-излучения в некотором интервале времени, в котором оно ослабевает более чем на порядок, можно аппроксимировать как экспоненциальную с характерным временем  $\tau_R$ . Обна-



**Рис. 18.** Экспериментальная (1) и расчетная (2) зависимости времени  $\tau_R$  от диаметра  $D_{ex}$ .

ружено возрастание  $\tau_R$  при увеличении  $D_{ex}$  в диапазоне от 0.2 до 1.1 мм, насыщающееся в конце этого диапазона (рис. 18).

Допустимо предполагать, что, во-первых, в каждый момент времени вытекающая ортогонально эпитаксиальным слоям часть s-излучения пропорциональна, как и все s-излучение, скорости стимулированной излучательной рекомбинации носителей заряда; во-вторых, что последняя намного больше скорости других типов рекомбинации, которые поэтому можно не учитывать. Тогда измеряющуюся в эксперименте хронограмму s-излучения  $I_\Sigma(t)$  связывает с плотностью ЭДП соотношение

$$\frac{I_\Sigma}{V} \propto \left| \frac{dn}{dt} \right|. \tag{17}$$

Отсюда следует, что графики  $I_\Sigma/V = f(t)$  на рис. 17 одновременно иллюстрируют относительное изменение со временем  $t$  скорости стимулированной рекомбинации для двух диаметров  $D_{ex}$

$$R_{st} = \left| \frac{dn}{dt} \right| = f(t).$$

В некотором интервале времени, с некоего момента, обозначим его  $t_0$ , наблюдается экспоненциальное уменьшение  $I_\Sigma$  со временем  $t$  (см. рис. 17). Это можно представить в виде

$$\frac{I_\Sigma}{V} = \left[ \frac{I_\Sigma}{V} \right]_{t=t_0} \exp(-(t - t_0)/\tau_R). \tag{18}$$

Соответственно, и скорость стимулированной рекомбинации в том же интервале времени, учитывая (17), уменьшается с тем же характерным временем  $\tau_R$

$$\frac{dn}{dt} = \left[ \frac{dn}{dt} \right]_{t=t_0} \exp(-(t - t_0)/\tau_R). \tag{19}$$

Решением уравнения (19) является следующее выражение для плотности носителей:

$$n = (n_{t=t_0} - n_{th}) \exp(-(t - t_0)/\tau_R) + n_{th}. \quad (20)$$

В (20) учтено, что, когда плотность носителей спадает до  $n_{th}$ , s-излучение прекращается и носители далее уже не рекомбинируют стимулировано.

Из (20) видно, что плотность ЭДП релаксирует с характерным временем  $\tau_R$ . Дифференцируя (20), получаем то же, по сути, выражение, что и (19), но в виде, общепринятом для рекомбинации:

$$\left| \frac{dn}{dt} \right| = \frac{n - n_{th}}{\tau_R}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что скорость стимулированной пикосекундной рекомбинации определяется отношением той надпороговой части плотности ЭДП  $\Delta n = n - n_{th}$ , которая стимулированно рекомбинирует, к характерному времени ее релаксации  $\tau_R$ . Напомним, что последнее определяется экспериментально как характерное время релаксации s-излучения. Объяснение, чему соответствует время  $t_0$ , дано далее в разд. II.

Для разных типов безызлучательной рекомбинации и спонтанной излучательной рекомбинации время  $\tau_R$  в формуле, подобной (21), отличается определяющим его выражением [58].

Изменение  $\tau_R$  с  $D_{ex}$  (см. рис. 18) можно интерпретировать с помощью следующего представления, использовавшегося в [15] и еще ранее при рассмотрении релаксации просветления фотонакачественного слоя GaAs [33]. Как объяснялось в разд. 6, s-излучение поддерживает ЭДП в состоянии, близком к пороговому, что позволяет использовать аппроксимацию (12).

Из соотношений (12) и (20) элементарно математически выводится, что температура  $T_c$  релаксирует экспоненциально с характерным временем  $\tau_T$ , которое связано с  $\tau_R$  соотношением

$$\tau_R \approx (2/3) \tau_T. \quad (22)$$

В теории [7], разработанной практически для тех же условий, что и в анализируемом эксперименте, было учтено следующее. Интенсивное стимулированное излучение приводит к дополнительному разогреву ЭДП, замедляющему ее охлаждение. В [7] было получено следующее аналитическое выражение для характерного времени релаксации температуры ЭДП в GaAs при наличии интенсивного собственного стимулированного излучения:

$$\tau_T \approx \left( A + B \tau_p T_c^{1/2} E_g \right) \tau_h. \quad (23)$$

Подставляя это выражение в (22), получаем аналитическое выражение для времени  $\tau_R$ , отличающееся от (23) только числовым коэффициентом:

$$\tau_R \approx (2/3) \left( A + B \tau_p T_c^{1/2} E_g \right) \tau_h, \quad (24)$$

здесь  $A = 6.3$ ,  $B = 0.36$ ;  $\tau_h \approx 0.8$  пс – время релаксации энергии ЭДП за счет эмиссии оптических фононов с учетом разогрева последних [59],  $\tau_R$ ,  $\tau_p$ ,  $\tau_h$  измеряются в пс,  $T_c$  – в К,  $E_g$  – в эВ. Для лучшего согласия с экспериментом значения  $A$  и  $B$  незначительно изменены по сравнению с полученными в [7]:  $A = 6.2$  и  $B = 0.34$ . Первое слагаемое в выражении (24) учитывает разогрев ЭДП, связанный с тем, что энергия носителей заряда, участвующих в стимулированной рекомбинации, меньше средней энергии носителей в ЭДП. Второе слагаемое учитывает разогрев ЭДП из-за внутризонного поглощения собственного излучения. Отметим, что совместное влияние на  $T_c$  и  $n$  обоих механизмов разогрева наблюдалось, например, в [38], а только внутризонного поглощения света – в [37]. Время  $\tau_p$  – это характерное время движения фотона излучения в активной среде, пока фотон не покинет эту среду или не будет поглощен:

$$\tau_p^{-1} \approx cn_0^{-1} (\gamma + D_{ex}^{-1}), \quad (25)$$

где  $\gamma = \sigma n$  – коэффициент внутризонного поглощения света,  $\sigma = 1.5 \times 10^{-17}$  см<sup>2</sup> [44].

Максимальную плотность ЭДП  $n_{max} = p_{max}$  при каждом  $D_{ex}$  определяли с помощью  $\hbar\omega_e$  и расчетной зависимости  $E_g = f(n)$ , предполагая, что при фиксированном  $D_{ex}$  предельно суженная ширина запрещенной зоны – это  $E_{g-min} \approx \hbar\omega_e$  (см. разд. 7). Полученные указанным путем из эксперимента значения  $\hbar\omega_e$  и  $n_{max}$  представлены в функции  $D_{ex}$  в работе [36, рис. 5]. Как и в [15, 33], в формулу (24) будем подставлять параметры, соответствующие средней плотности электронов за время релаксации излучения  $n_{av} = (n_{max} + n_{th})/2$ . Соответствующие  $n_{av}$  значения температуры  $T_c$ , определялись из проведенной через экспериментальные точки зависимости  $n(T_c)$  (см. рис. 12, штриховая линия). Подставляя полученные параметры в формулу (24), рассчитывали значения  $\tau_R$ , представленные на графике  $\tau_R(D_{ex})$  (рис. 18, светлые кружочки). Видно, что экспериментальные и расчетные значения  $\tau_R$  близки. Это согласие является доказательством связи времени остывания носителей заряда и релаксации s-излучения. Таким образом, используя формулу (24), удается получить правильную оценку времени  $\tau_R$  и его зависимости от диаметра  $D_{ex}$ . Отметим, что выше определялось приблизительно среднее экспериментальное и среднее оценочное характерное время релаксации s-излучения. Однако в течение релаксации s-излучения взаимосвязанные параметры  $E_g$ ,  $T_c$  и  $\tau_p$

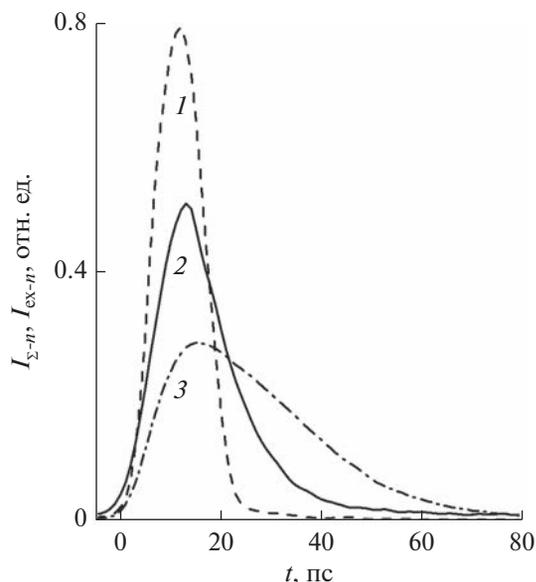


Рис. 19. Нормированные хронограммы накачки  $I_{ex-n}(t)$  (кривая 1), а также s-излучения  $I_{\Sigma-n}(t)$  при  $D_{ex} = 0.21$  (2) и 1.1 мм (3).

меняются, поэтому в соответствии с (24) может меняться и  $\tau_R$ . В первом приближении это не учитывалось. Добавим, что релаксация просветления, представленная в работе [36, рис. 6], тоже позволяет считать, что характерное время релаксации надпороговой части плотности ЭДП  $\Delta n = n - n_{th}$  не противоречит (24).

В итоге экспериментально обнаружено увеличение характерного пикосекундного времени  $\tau_R$  релаксации как s-излучения, так и плотности носителей  $n$ , происходившее при увеличении диаметра импульса накачки. Плотность энергии импульса накачки была фиксированной. Предложенное аналитическое выражение для  $\tau_R$  согласуется с экспериментальными результатами и является функцией характерного времени релаксации температуры  $\tau_T$  фотонакаченных носителей. Время  $\tau_T$  было определено в [7] с учетом нагрева носителей, вызванного излучением. Этот экспериментальный результат позволяет считать, что на спаде s-излучения его интенсивностью “управляет” ЭТН.

#### 10. АНТИКОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ МАКСИМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ s-ИЗЛУЧЕНИЯ И ХАРАКТЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОСТЫВАНИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

Изменение интенсивности стимулированного излучения при увеличении длины активной области до той степени, когда излучение уже влияет на

его собственное усиление, т.е. при насыщении усиления, анализировалось ранее, например, в работах [5, 24]. Однако это делалось для стационарной накачки и других отличий от экспериментов, рассматриваемых в обзоре, и в значительной степени математически. В описываемых ниже исследованиях был обнаружен иной, чем предполагалось ранее, характер зависимости интенсивности s-излучения от диаметра активной области [16]. Диаметр активной области в экспериментах меняли с помощью последовательного изменения диаметра луча накачки  $D_{ex}$ . Изменение интенсивности света по сечению луча накачки было приблизительно гауссовым. При всех  $D_{ex}$  плотность  $d_{ex}$  энергии накачки поддерживалась неизменной. Из измерений прозрачности образца для импульсов накачки диаметром  $D_{ex} = 0.2$  и 1.1 мм следовало, что плотность поглощаемой в образце энергии импульса накачки отличается на 2%, т.е. практически не зависит от  $D_{ex}$ . Скорость стимулированной рекомбинации по оценкам намного превышает скорость других типов рекомбинации. С учетом этого при всех  $D_{ex}$  плотность энергии s-излучения  $D_s$  можно принять одинаковой, пренебрегая некоторым различием плотности пороговой энергии накачки.

Сопоставим интенсивность s-излучения при разных  $D_{ex}$ . Такая интенсивность, обозначим ее  $I_{\Sigma-n}$ , связана с измеренными хронограммами соотношением  $I_{\Sigma-n} = I_s/kS$ , где  $k \approx \text{const}$  – характеризует долю s-излучения, которая рассеивалась (выходила из накаченной области слоя GaAs) ортогонально плоскости слоя. Воспользуемся тем, что площадь под графиком хронограммы излучения

$$S_{chr} = \int I_{\Sigma} dt$$

можно представить как  $S_{chr} = bSD_s$ , где коэффициент  $b$ , а также  $D_s$  – это константы в условиях нашего эксперимента. Тогда для сравнения интенсивность s-излучения можно представить в относительных единицах как  $I_{\Sigma-n} = I_s/S_{chr}$ . В качестве примера на рис. 19 представлены графики  $I_{\Sigma-n} = f(t)$  при  $D_{ex} = 0.21$  и 1.1 мм и аналогично нормированной хронограммы накачки

$$I_{ex-n} = I_{ex}/S_{ex} = f(t),$$

где  $S_{ex} = \int I_{ex} dt$  площадь под графиком хронограммы накачки. Видно, что амплитуда хронограммы  $I_{\Sigma-n}(t)$  (обозначим амплитуду –  $I_{\Sigma-\max}$ ) при  $D_{ex} = 0.21$  мм больше и релаксация s-излучения быстрее, чем при  $D_{ex} = 1.1$  мм. Обнаруженное уменьшение максимальной интенсивности s-излучения при возрастании диаметра накаченной области иллюстрирует график  $I_{\Sigma-\max}(D_{ex})$  на рис. 20. На спаде s-излучение релаксирует с характерным временем  $\tau_R$ , зависимость которого от

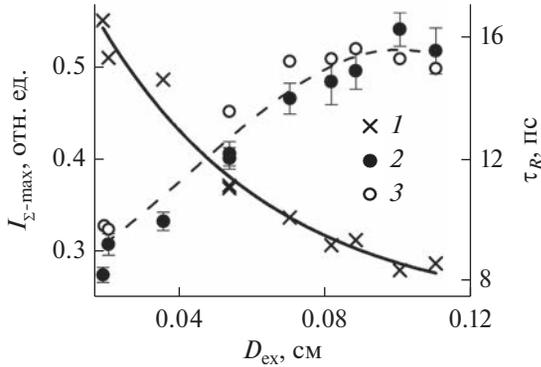


Рис. 20. Зависимость от диаметра  $D_{ex}$  максимальной интенсивности  $s$ -излучения  $I_{\Sigma-max}$  (1) и характерного времени релаксации  $s$ -излучения  $\tau_R$  (2 – эксперимент, 3 – расчет).

$D_{ex}$  выявлена в предыдущем параграфе и представлена на рис. 20 (темные точки). Обнаруживается антикорреляция между зависимостями  $I_{\Sigma-max}(D_{ex})$  и  $\tau_R(D_{ex})$ .

Из антикорреляции зависимостей  $I_{\Sigma-max}(D_{ex})$  и  $\tau_R(D_{ex})$  (см. рис. 20) следует, что максимальную интенсивность  $s$ -излучения и характерное время его релаксации связывает соотношение

$$I_{\Sigma-max} = b_1/\tau_R, \quad (26)$$

где  $b_1$  – коэффициент пропорциональности (рис. 21, нижняя ось абсцисс).

Для  $s$ -излучения время  $\tau_R$  связано с характерным временем релаксации температуры носителей  $\tau_T$  соотношением (22). При определении  $\tau_T$  исходя из измеренного  $\tau_R$  и выражения (22) следует из (26) обратно пропорциональная зависимость

$$I_{\Sigma-max} = 3b_1/2\tau_T \quad (27)$$

(см. рис. 21, верхняя ось абсцисс).

Как иллюстрирует рис. 20, измеренное  $\tau_R$  удовлетворительно согласуется с его оценкой по (24), аналогичной описанной в разд. 9. Только значение  $E_g$  определялось теперь по длинноволновому краю нормированного спектра

$$W_{s-n}(\hbar\omega) = W_s(\hbar\omega)/S_{\text{спец}},$$

где  $S_{\text{спец}} = \int W_s d(\hbar\omega)$ . Нормировка на  $S_{\text{спец}}$  (аналогичная описанной выше для хронограмм) приводит спектры к одинаковой энергии излучения.

Таким образом, обнаружено следующее:

1) максимальная интенсивность  $I_{\Sigma-max}$  собственного стимулированного пикосекундного излучения GaAs уменьшается при увеличении диаметра луча накачки  $D_{ex}$  (плотность энергии

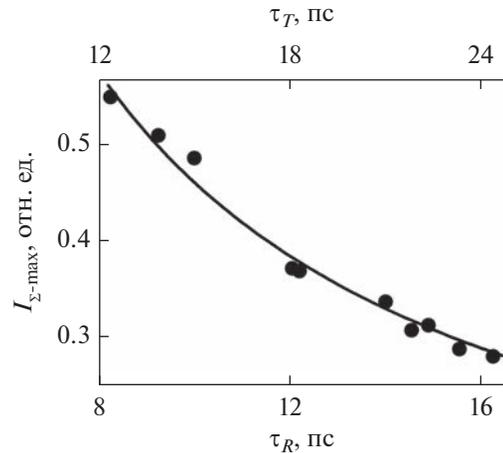


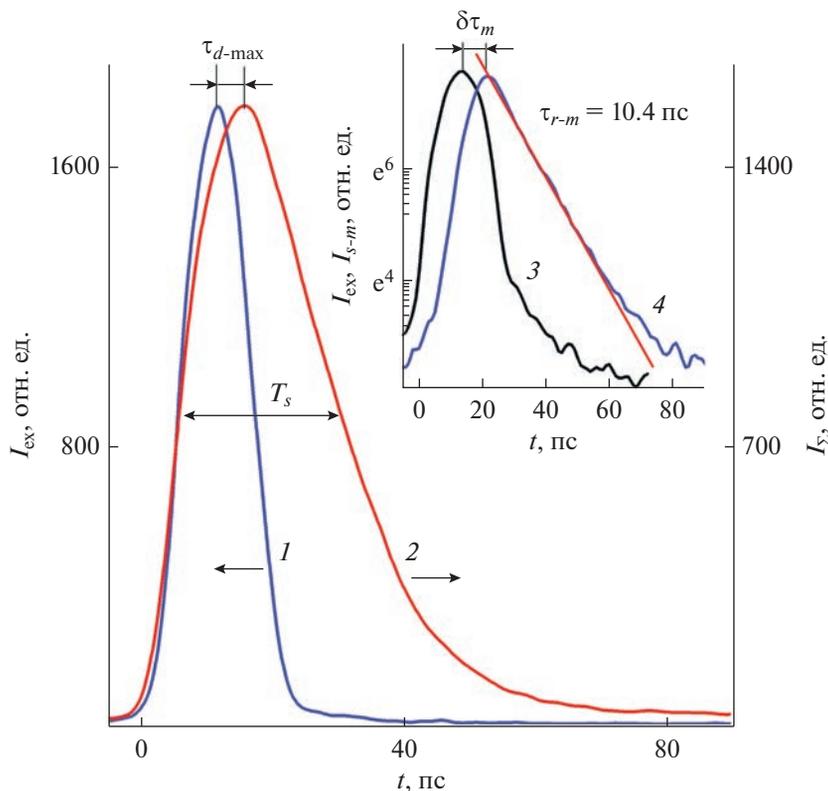
Рис. 21. Зависимость максимальной интенсивности  $s$ -излучения  $I_{\Sigma-max}$  от характерного времени релаксации:  $s$ -излучения  $\tau_R$  и температуры носителей заряда  $\tau_T$ . Сплошная линия – зависимость  $I_{\Sigma-max} = b_1/\tau_R$  ( $b_1 = \text{const}$ ).

накачки фиксирована), что противоположно закону Бугера в линейной оптике;

2) зависимость  $I_{\Sigma-max}(D_{ex})$  антикоррелирует с зависимостью от диаметра  $D_{ex}$  характерного времени  $\tau_R$  релаксации  $s$ -излучения;

3) время  $\tau_R$  пропорционально характерному времени  $\tau_T$  остывания носителей заряда, которое поэтому тоже антикоррелирует с максимальной интенсивностью  $s$ -излучения.

Эти экспериментальные результаты выявляют роль ЭТН для генерации  $s$ -излучения в режиме насыщения его усиления. Охлаждение носителей – это их внутризонные переходы (транспорт) на нижележащие энергетические уровни. Чем меньше  $\tau_T$ , тем интенсивнее (быстрее) ЭТН в область экстремумов зон проводимости и валентной, откуда носители рекомбинируют. Такой транспорт происходит и во время накачки носителей, и после нее, пока релаксируют неравновесные носители. ЭТН замедляется из-за разогрева носителей излучением, увеличивающего время их охлаждения  $\tau_T$ . Между скоростью ВРН и ЭТН баланс поддерживается автоматически  $s$ -излучением, путем регулирования обеднения инверсной заселенности электронами энергетических уровней зоны проводимости. Вызванный обеднением провал в области усиления в спектре поглощения света (см. рис. 7) наблюдался в [23]. При увеличении  $D_{ex}$  возрастает разогрев носителей  $s$ -излучением, замедляющий их остывание и, соответственно, ЭТН. При поддержании баланса между ВРН и ЭТН замедление ЭТН приводит к уменьшению ВРН и, значит, к уменьшению интенсивности  $s$ -излучения и к замедлению его релаксации, что соответствует эксперименту.



**Рис. 22.** Хронограммы импульса накачки  $I_{\text{ex}}(t)$  (1) и s-излучения  $I_{\Sigma}(t)$  (2) при диаметре луча накачки  $D_{\text{ex}} = 0.54$  мм; на вставке – в полулогарифмическом масштабе хронограммы накачки (3) и спектральной моды (4) с энергией фотона  $\hbar\omega_s = 1.401$  эВ [20] ( $\tau_{r-m}$  – характерное время ее релаксации).

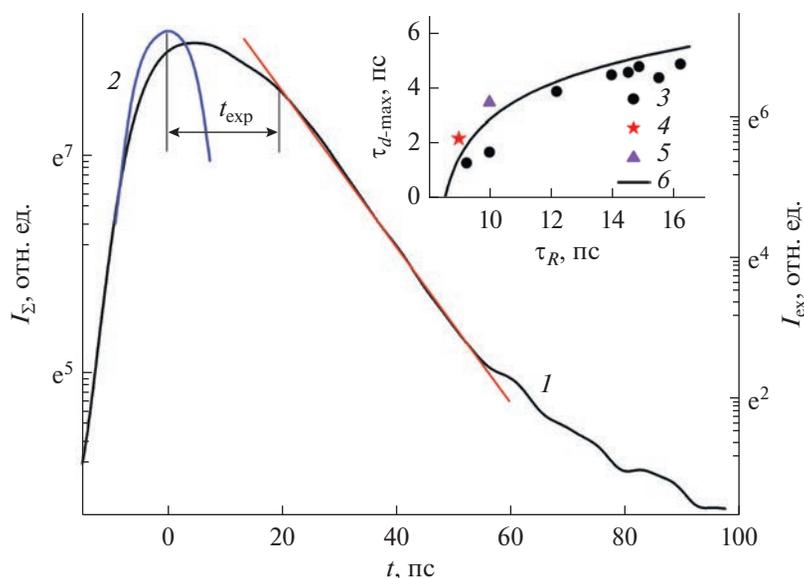
## 11. ВЛИЯНИЕ НА ОГИБАЮЩУЮ ИМПУЛЬСА s-ИЗЛУЧЕНИЯ, ИНТЕГРАЛЬНОГО ПО СПЕКТРУ, РАЗОГРЕВА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА ЭТИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Между временем  $\tau_T$  и интенсивностью  $I_{\Sigma-\text{max}}$  s-излучения в его максимуме существует, как выяснилось, антикорреляция. Следовательно, время  $\tau_T$  влияло не только на релаксацию, но и на возрастание s-излучения. Это соответствовало предположению, что ЭТН определяет интенсивность s-излучения при насыщении усиления, и время  $\tau_T$  характеризует ЭТН. В работе [60] было обнаружено: а) запаздывание максимума s-излучения от максимума накачки; б) еще большее запаздывание начала экспоненциальной релаксации s-излучения, существенно увеличивающее длительность s-излучения; в) итоговое превышение длительности s-излучения над длительностью накачки и т.д. Показано, что все это определяется временем  $\tau_T$  и, по сути, вызвано замедлением ЭТН из-за нагрева носителей заряда s-излучением.

Начнем с описания экспериментальных результатов. В эксперименте при  $d_{\text{ex}} = \text{const}$  изменение  $\tau_T$  создавали путем изменения  $D_{\text{ex}}$  в согласии с (23),

(25). На рис. 22 представлены хронограммы накачки и s-излучения, измеренные при  $D_{\text{ex}} = 0.54$  мм. Видно, что длительность s-излучения на полувысоте (FWHM)  $T_s$  существенно больше длительности накачки  $t_p$ , а максимум s-излучения достигается с задержкой  $\tau_{d-\text{max}}$  относительно максимума накачки. При увеличении диаметра  $D_{\text{ex}}$  возрастали и  $T_s$ , и  $\tau_{d-\text{max}}$ , а к концу исследуемого интервала  $D_{\text{ex}}$  они начинали слегка уменьшаться [60, рис. 2, 3]. В течение времени  $t_{\text{exp}}$  с того момента, как накачка достигнет максимума, и до того, когда s-излучение начинает экспоненциально релаксировать с характерным временем  $\tau_R$ , интенсивность s-излучения спадает относительно медленно (рис. 23). Время  $t_{\text{exp}}$  росло приблизительно пропорционально увеличению диаметра  $D_{\text{ex}}$  [60, рис. 2] и по величине  $t_{\text{exp}} \gg \tau_{d-\text{max}}$ .

Интенсивность s-излучения определяется ЭТН, который, следовательно, в значительной степени определяет, когда s-излучение достигнет максимума, когда и с какой скоростью будет происходить его релаксация. Полагая, что именно с ЭТН, а значит в значительной степени с  $\tau_T$ , преимущественно связано превышение длительности s-излучения над длительностью накачки, будем сопо-



**Рис. 23.** Хронограмма s-излучения  $I_{\Sigma}(t)$  (1) и вершина хронограммы накачки  $I_{ex}(t)$  (2) при  $D_{ex} = 0.82$  мм; касательной прямой отмечен участок экспоненциальной релаксации излучения,  $t_{exp}$  – интервал времени между моментом максимальной интенсивности накачки и началом экспоненциальной релаксации; на вставке – время  $\tau_{d-max}$  как функция  $\tau_R$ : 3 – при  $d_{ex} = const$ , 4 – данные [29], 5 – данные [20], кривая 6 – зависимость (28).

ставлять экспериментальные результаты далее со временем  $\tau_R$ , пользуясь его прямой связью с  $\tau_T$  (22). Это удобнее, поскольку  $\tau_R$  это реально измеряемое время. Как видно из нижеследующего, отличие длительности s-излучения от длительности накачки и особенности огибающей s-излучения можно охарактеризовать эмпирическими зависимостями от  $\tau_R$ . С учетом (22) это подтверждает, что в  $\tau_T$  заключены свойства ЭТН не только во время релаксации, но и в значительной степени во время возрастания s-излучения.

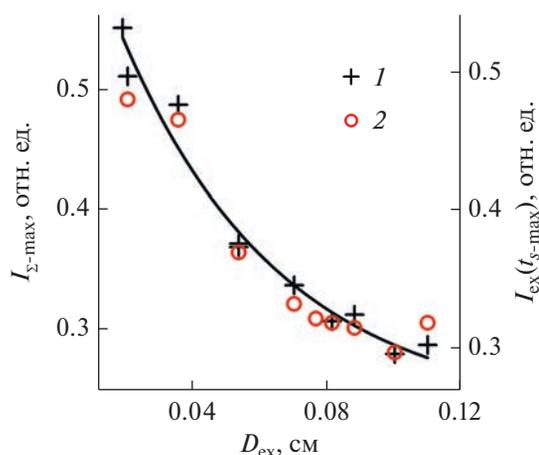
Энергетический транспорт носителей и интенсивность s-излучения растут во время накачки до того момента уже на ее спаде, когда скорость накачки носителей сравняется со скоростью ЭТН. В этот момент  $t_{s-max}$  интенсивность s-излучения достигает максимума. Это доказывается в первом приближении подобием зависимостей  $I_{ex}(t_{s-max}) = f(D_{ex})$  и  $I_{\Sigma-max} = f(D_{ex})$  (рис. 24). Если учесть описанную в разд. 10 антикорреляцию  $I_{\Sigma-max} \sim 1/\tau_R$ , то несложно вывести график зависимости  $\tau_{d-max} = f(\tau_R)$  (рис. 23). Он отображает логарифмическую зависимость (как и должно быть в свете сказанного выше при квазигассовом импульсе накачки)

$$\tau_{d-max} \approx 1.84 + 1.7 \ln(\tau_R - 8.2), \quad (28)$$

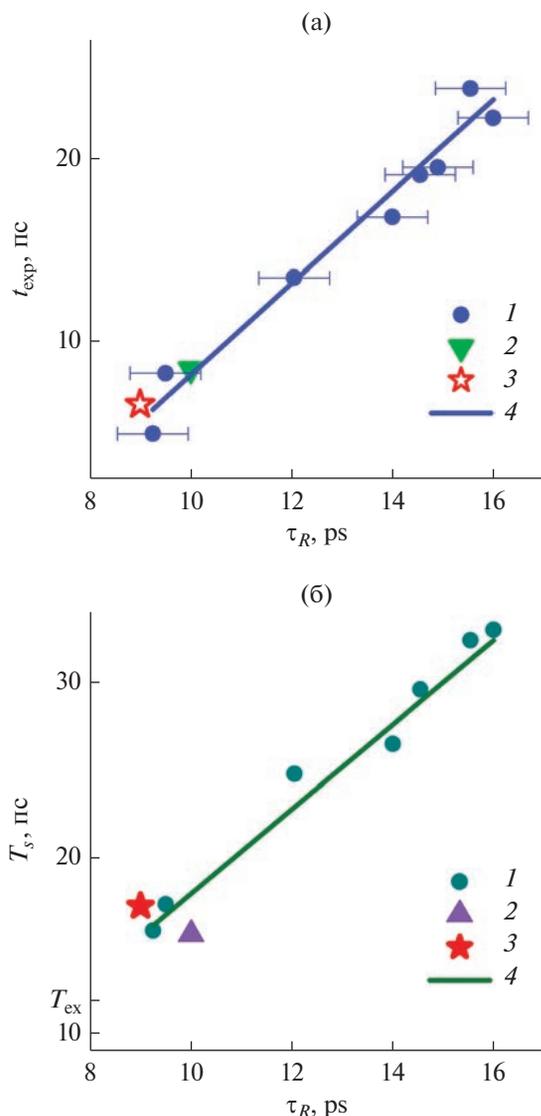
удовлетворительно согласующуюся с экспериментальными точками. Последние определяли из экспериментальных зависимостей  $\tau_R = f(D_{ex})$  и  $\tau_{d-max} = f(D_{ex})$  (см. [60, рис. 3]). Таким образом, задержка  $\tau_{d-max}$  растет приблизительно логарифмически

при увеличении  $\tau_R$ , как представлено выражением (28).

Спектральные моды s-излучения не одновременно, а последовательно достигли своего максимума интенсивности, а потом экспоненциально релаксировали [20]. Пока это продолжалось до момента начала экспоненциальной релаксации s-излучения, отделяемого от максимума излучения интервалом времени  $t_{exp}$ , интенсивность s-из-



**Рис. 24.** Зависимость от диаметра  $D_{ex}$  максимальной интенсивности s-излучения  $I_{\Sigma-max}$  (1) и интенсивности света накачки  $I_{ex}(t_{s-max})$  (2) в момент  $t_{s-max}$ , когда интенсивность s-излучения достигала максимума.



**Рис. 25.** Интервал времени  $t_{\text{exp}}$  (а) и длительность импульса s-излучения  $T_s$  (б) в функции от характерного времени релаксации s-излучения  $\tau_R$ : 1 – при  $d_{\text{ex}} = \text{const}$ ; 2 – данные [20], 3 – данные [29] при  $W_{\text{ex}} = 6.8$  отн. ед., 4 – аппроксимация функции (см. текст);  $T_{\text{ex}}$  – длительность импульса накачки (FWHM).

лучения уменьшалась “замедленно”. Как показывает график задержки  $t_{\text{exp}}$  в функции  $\tau_R$  (рис. 25а), полученный из экспериментальных графиков  $t_{\text{exp}}$ ,  $\tau_R = f(D_{\text{ex}})$ , эту функцию можно аппроксимировать выражением

$$t_{\text{exp}} = 2.5\tau_R - 16.8 \text{ пс} \quad (29)$$

(сплошная прямая 4). То есть время  $t_{\text{exp}}$  растет пропорционально  $\tau_R$  и, значит, определяется тоже нагревом носителей s-излучением.

В работе [20] задержка  $t_{\text{exp}} = 8.5$  пс для s-излучения была равна задержке  $\delta t_m = 8.5$  пс максимума спектральной моды с  $\hbar\omega_m = 1.401$  эВ относительно максимума накачки ( $\delta t_m$  см. на вставке к рис. 22). Характерные времена релаксации s-излучения  $\tau_R = 10$  пс и указанной моды  $\tau_{r-m} = 10.4$  пс практически совпадали. Эта мода относилась к числу самых интенсивных в спектре, и во время экспоненциальной релаксации s-излучения ее интенсивность значительно преобладала над интенсивностью других мод. Мода с  $\hbar\omega_m = 1.401$  эВ особенно еще и тем, что генерируется при рекомбинации электронов с одного из самых низкоэнергетических уровней из числа тех, которые существовали до перенормировки запрещенной зоны. Таким образом, такая мода и определяет преимущественно релаксацию s-излучения, интегрального по спектру.

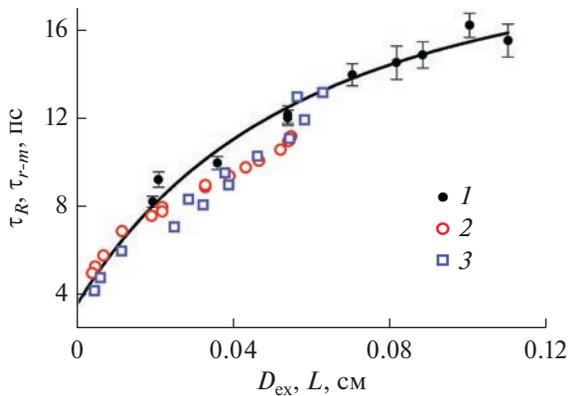
Превышение длительности s-излучения  $T_s$  над длительностью накачки  $t_p$  – это суммарный продукт задержки  $t_{\text{exp}}$  и релаксации со временем  $\tau_R$ , связанных с разогревом носителей. На рис. 25б (прямая 4) представлен график  $T_s$  в функции  $\tau_R$ , которая аппроксимируется выражением

$$T_s = 2.4\tau_R - 6 \text{ пс.} \quad (30)$$

Столь простая связь с  $\tau_R$  подтверждает, что  $T_s$ , как и рассмотренные выше  $t_{\text{exp}}$  и  $\tau_{d-\text{max}}$ , – все определяется разогревом носителей, создаваемым s-излучением и характеризуемым временем  $\tau_T$ , связанным с  $\tau_R$  соотношением (22). Для практического использования, по-видимому, существенно то, что превышение длительности s-излучения над длительностью накачки пропорционально  $\tau_R$ . Например, как видно из рис. 25б, путем уменьшения  $\tau_R$  время  $T_s$  уменьшалось вдвое. В прикладном аспекте это указывает на возможный способ сокращения длительности излучения.

## 12. ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРНОГО ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ s-КОМПОНЕНТЫ ОТ ДЛИНЫ ЕЕ УСИЛЕНИЯ И МИНИМАЛЬНОЕ ОСТАТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭТОГО ВРЕМЕНИ

При пространственно неоднородном, квази-гауссовом распределении интенсивности света накачки по сечению ее луча, длины  $L$  усиления различных s-компонент должны быть различны. В разд. 4 было описано определение спектра  $L(\hbar\omega_s)$ , позволяющее установить затем зависимость характерного времени релаксации s-компонент  $\tau_{r-m}$  от  $L$ . Аналогичная зависимость, но только характерного времени  $\tau_R$  релаксации s-излучения, интегрального по спектру, и в функции от диаметра луча накачки  $D_{\text{ex}}$  была эксперимен-



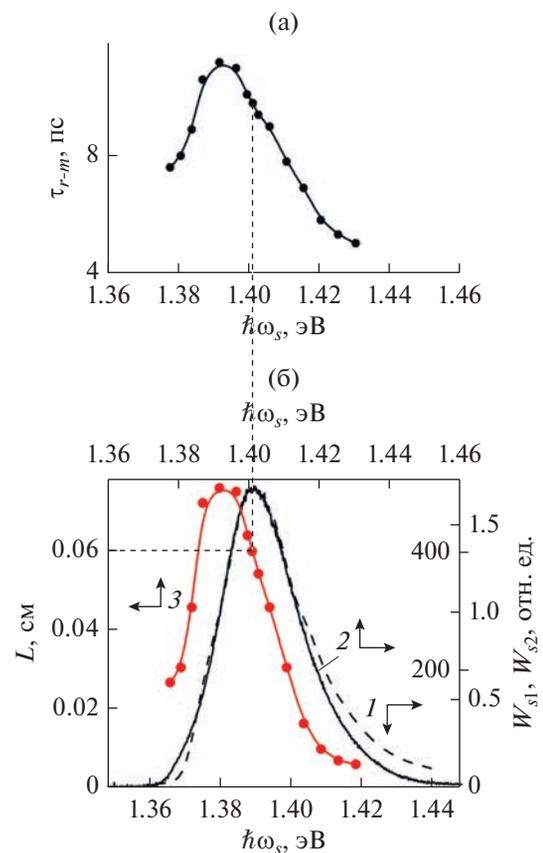
**Рис. 26.** Экспериментальные зависимости: 1 – характерного времени  $\tau_R$  релаксации интенсивности интегрального по спектру s-излучения от диаметра  $D_{ex}$  [36]; 2 – характерного времени  $\tau_{r-m}$  релаксации интенсивности s-компоненты, вышедшей из гетероструктуры, от длины  $L$  усиления s-компоненты, данные [27] уточнены по (10), 3 – то же, данные из [30].

тально получена, описана в разд. 9 и вновь представлена символами 1 на рис. 26.

В описываемых ниже оценках зависимости  $\tau_{r-m}(L)$  использовались результаты измерений в работах [15, 20]. Они не всегда проводились в абсолютно одинаковых условиях, но некоторое различие в накачке близких по структуре образцов, не влияло на очевидность основных выводов.

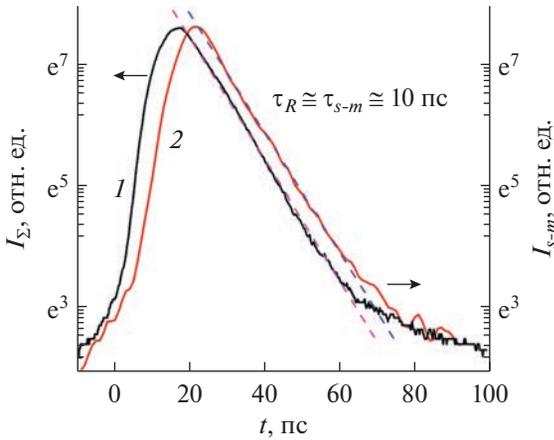
Для хронограмм s-компонент, измеренных в работе [20], были определены времена  $\tau_{r-m}$ , и получившийся спектр  $\tau_{r-m}(\hbar\omega_s)$  представлен на рис. 27а [27]. Спектр длин усиления s-компонент был получен следующим образом. Как подтверждается рис. 27б, формы спектров s-излучения  $W_{s1}(\hbar\omega_s)$  и  $W_{s2}(\hbar\omega_s)$ , измеренных в работах соответственно [23] и [20] (кривая 1 нижняя ось абсцисс и кривая 2 верхняя ось абсцисс), приблизительно совпадают, хотя они сдвинуты один относительно другого на 12 мэВ. Сдвиг вызван, видимо, различием ширины запрещенной зоны  $E_g$ , произошедшем, скорее всего, из-за разной напряженности кристаллов GaAs или др. Естественно предположить, что спектры длины усиления в этих работах, тоже имеют одинаковую форму и одинаково спектрально расположены по отношению к указанным спектрам s-излучения, имеющим одинаковую форму. В соответствии с этим получаем спектр  $L(\hbar\omega_s)$ , причисляемый к [20] и представленный на рис. 27б, кривая 3, относящимся к верхней оси абсцисс.

Выражение  $L$  в абсолютных единицах длины, как представлено на рис. 27б, было получено следующим путем. Вытекающая из (24) и (25) взаимосвязь времени  $\tau_R$  и диаметра  $D_{ex}$  удовлетворительно согласовалась с измеренной в эксперименте [36] за-



**Рис. 27.** Зависимость характерного времени  $\tau_{r-m}$  релаксации интенсивности s-компоненты от энергии ее фотона (а); интегральные по времени спектры s-излучения (б): кривая 1 –  $W_{s1}(\hbar\omega_s)$ , данные работы [23], кривая 2 –  $W_{s2}(\hbar\omega_s)$ , данные работы [20]; кривая 3 – спектр длины усиления  $L(\hbar\omega_s)$ .

висимостью  $\tau_R(D_{ex})$  (см. рис. 26, символы 1). Для этого графика диаметр активной области считался равным диаметру  $D_{ex}$ . На рис. 28 (кривая 1) в полулогарифмическом масштабе показана хронограмма  $I_{\Sigma}(t)$  интегрального по спектру s-излучения, и к ее спаду проведена касательная линия, показывающая, что релаксацию излучения можно аппроксимировать как экспоненциальную с характерным временем  $\tau_R$  указанным рядом с касательной. В разд. 11 отмечалось, что время  $\tau_R$  совпадало с характерным временем релаксации  $\tau_{r-m}$  той s-компоненты, интенсивность которой превышала на спаде излучения интенсивность остальных s-компонент. Для результатов работы [20] подобную роль выполняла s-компонента с  $\hbar\omega_s = 1.401$  эВ, хронограмма которой показана на рис. 28 (кривая 2). Для s-компоненты с  $\hbar\omega_s = 1.401$  эВ и s-излучения практически выполняется равенство  $\tau_{r-m} \approx \tau_R$ , что видно при сопоставлении кривых 2 и 1. Но при таком равенстве, как того требуют (24) и (25), длина усиления этой s-компоненты



**Рис. 28.** Хронограммы импульса s-излучения, интегрального по спектру  $I_{\Sigma}(t)$  (кривая 1) и s-компоненты  $I_{s-m}(t)$  (кривая 2) с  $\hbar\omega_s = 1.401$  эВ в полулогарифмическом масштабе [20]; на касательных указаны характерные времена релаксации интенсивности s-излучения и s-компоненты,  $\tau_R \approx \tau_{r-m}$ .

равна диаметру луча накачки, т.е. при  $\hbar\omega_s = 1.401$  эВ  $L \approx D_{\text{ex}} = 0.06$  см. Приравнивая этому значению  $L$  при  $\hbar\omega_s = 1.401$  эВ на спектре  $L(\hbar\omega_s)$  для [20], как иллюстрируется штриховой линией на рис. 27, отсюда выводят значения  $L$  (см) для всего спектра (см. рис. 27б, кривая 3).

Зависимость  $\tau_{r-m}(L)$  можно определить из сопоставления полученного графика  $L(\hbar\omega_s)$  с графиком экспериментальной зависимости  $\tau_{r-m}(\hbar\omega_s)$  на рис. 27. Символами 2 на рис. 26 представлена зависимость  $\tau_{r-m} = f(L)$ , получающаяся для результатов работы [20], уточненная согласно (10) при коэффициенте  $R_B \approx 0.38$ , определенном в [21]. Спектр  $\tau_{r-m}(\hbar\omega_s)$  для хронограмм s-компонент, измеренных в работе [15], и спектр  $L(\hbar\omega)$  были получены аналогичным образом. При этом для спектра  $L(\hbar\omega_s)$  в [30, рис. 2] коэффициент  $R_B \approx 0.08$  был оценен из интерференционной картины мгновенных спектров на фронте излучения. График  $\tau_{r-m}(L)$ , полученный в работе [30] из спектров  $\tau_{r-m}(\hbar\omega_s)$  и  $L(\hbar\omega_s)$ , представлен на рис. 26 (символы 3). Доступные для определения минимальные значения  $L$  составляли 41 и 46 мкм соответственно для двух названных зависимостей  $\tau_{r-m}(L)$ . Согласно графикам 2 и 3 на рис. 26 характерное время релаксации составляло:  $\tau_{r-m} = 5$  пс при  $L = 41$  мкм и  $\tau_r = 4.2$  пс при  $L = 46$  мкм. Это близко к остаточному значению времени релаксации  $\tau_R = 3.4$  пс при  $D_{\text{ex}} = 0$ , следующему из аналитического выражения (24). Экстраполяция к  $L = 0$  экспериментальных зависимостей 2 и 3, дает значение  $\tau_{r-m} \approx 3.5$  пс, близкое к указанному выше остаточному значению  $\tau_R = 3.4$  пс.

Полученная оценка зависимости характерного времени  $\tau_{r-m}$  релаксации s-компонент от длины  $L$  их усиления оказалась близка к зависимости характерного времени  $\tau_R$  релаксации интегрального по спектру излучения от диаметра  $D_{\text{ex}}$  луча накачки. Это, во-первых, подтвердило различие и определение длин усиления s-компонент. Во-вторых, позволяет предполагать, что при обнаружившемся различии времени  $\tau_{r-m}$  для различных s-компонент это время подчиняется тем же закономерностям (24), (25), что и время  $\tau_R$ . В дополнение, теоретическое значение остаточного характерного времени релаксации в формуле (24) подтвердилось экспериментом в пределах его возможностей. А это позволяет в настоящее время считать определенное выше остаточное время релаксации универсальным в том смысле, что никакая миниатюризация активной области предположительно не может сделать его меньше при горячей ЭДП.

### 13. ВЛИЯНИЕ РАЗОГРЕВА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА s-ИЗЛУЧЕНИЕМ НА ЛИНЕЙНОЕ ВОЗРАСТАНИЕ s-КОМПОНЕНТЫ И ЕЕ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ

Представим влияние нагрева носителей s-излучением на фронт и длительность s-компонент, экспериментально выявленное в работе [61]. Как видно из рис. 29, интенсивность s-компоненты растет со временем: (а) в начале фронта, пока она относительно мала, экспоненциально (аналогично закону Бугера для слабой бегущей волны) (кривая 2); (б) на основной части фронта, где интенсивность уже большая, — линейно (прямая 3).

Указанное экспоненциальное возрастание интенсивности s-компоненты аппроксимируется выражением

$$I_{s-m} = I_0 \exp(t/\tau_{i-m}), \quad (31)$$

где  $I_0$  — интенсивность собственного излучения при  $t \approx 0$ , когда в GaAs предположительно доминирует еще спонтанное излучение. Характерное время  $\tau_{i-m}$  экспоненциального возрастания интенсивности s-компоненты увеличивалось при уменьшении энергии ее фотона (рис. 30, кривая 1), характерное время  $\tau_{r-m}$  релаксации интенсивности  $I_{s-m}$  s-компоненты менялось с  $\hbar\omega_s$  (кривая 2, полученная в [15]). Спектр длительности на полувысоте (FWHM) s-компоненты  $T_m(\hbar\omega_s)$  также был получен в [15] (рис. 31, вставка). Сопоставляя его со спектрами  $\tau_{r-m}(\hbar\omega_s)$  и  $\tau_{i-m}(\hbar\omega_s)$ , обнаруживается приблизительно линейная зависимость

$$T_m \approx 6.2 + 0.57(\tau_{i-m} + \tau_{r-m}). \quad (32)$$

На основной части фронта интенсивность s-компоненты возрастала со временем линейно (см. рис. 29). Переход от экспоненциального к линей-

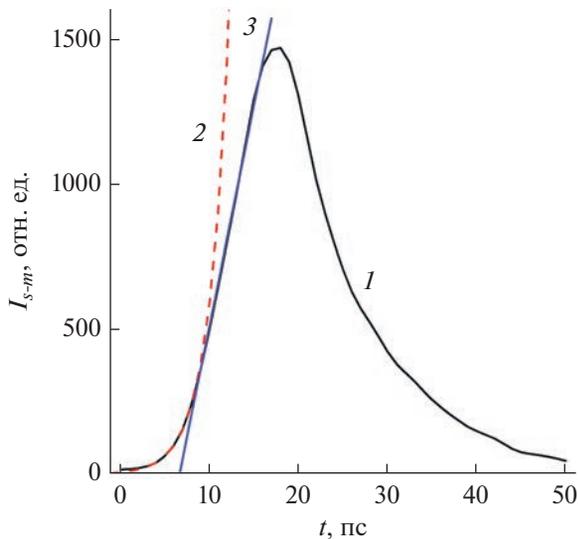


Рис. 29. Хронограмма  $I_{s-m}(t)$  s-компоненты при  $\hbar\omega_s = 1.403$  эВ (1); экспоненциальная (2) и прямая (3) касательные к графику указанной зависимости.

ному возрастанию происходит так, что существует интервал времени, где экспоненциальное и линейное усиление перекрываются. Линейное возрастание аппроксимируется формулой

$$I_{s-m} = I_1[1 + \gamma_L(t - t_1)], \quad (33)$$

где индекс 1 – начало линейного участка фронта, а  $\gamma_L$  – коэффициент линейного возрастания. Обнаруженный спектр  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$  представлен на рис. 32а, а к графику проведена штриховая касательная, чтобы нагляднее показать, что, во-первых, два излома на графике при  $\hbar\omega_s \approx 1.390$  и  $1.422$  эВ могут интерпретироваться, как модуляция, возникающая из-за интерференции; во-вторых, нивелированный спектр может рассматриваться как квазилинейный. Возникновение интерференции в волноводной гетероструктуре объяснено в [21] и кратко в разд. 3. Было установлено, что для гетероструктур, используемых в наших опытах, период интерференционной модуляции должен быть

$$P \approx m\xi_B, \quad (34)$$

где  $m$  – целое число,  $\xi_B \approx 10$  мЭВ. В [21]  $m = 1$  соответствовало более мощному, а  $m = 2$  более слабому s-излучению. Теперь мы получили проявление модуляции с  $m = 3$ , как свидетельствует интервал между изломами  $P \approx 32$  мЭВ  $\approx 3\xi_B$ , (рис. 32). Обнаруживается, как описано ниже, что коэффициент  $\gamma_L$  связан с характерными временами  $\tau_{i-m}$  и  $\tau_{r-m}$ .

На рис. 33 (кривая 1) представлен спектр коэффициента экспоненциального усиления в начале фронта  $\gamma_i = 1/\tau_{i-m} = f(\hbar\omega_s)$ , соответствующий спектру 1 на рис. 30. Экспериментальные точки

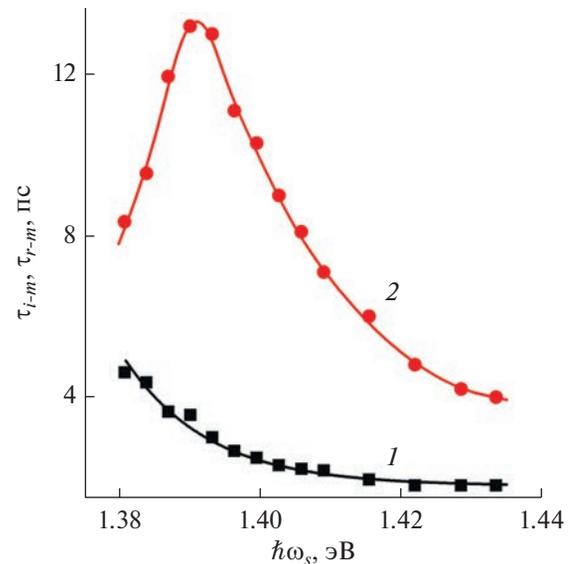


Рис. 30. Зависимости от энергии фотона  $\hbar\omega_s$  характерного времени  $\tau_{i-m}$  экспоненциального возрастания (1) и характерного времени  $\tau_{r-m}$  релаксации (2) интенсивности s-компоненты.

аппроксимируются гладкой кривой, являющейся графиком зависимости

$$\gamma_i = k(\hbar\omega_s - E_g)^{1/2} / \hbar\omega_s, \quad (35)$$

где  $k = \text{const}$ ,  $E_g = 1.376$  эВ – величина, следующая из подгонки кривой к точкам и представляющая реалистичной в качестве ширины перенормированной запрещенной зоны. Выражение (35) соответствует хорошо известной зависимости от  $\hbar\omega$  и  $E_g$  коэффициента ненасыщенного усиления “слабого” света.

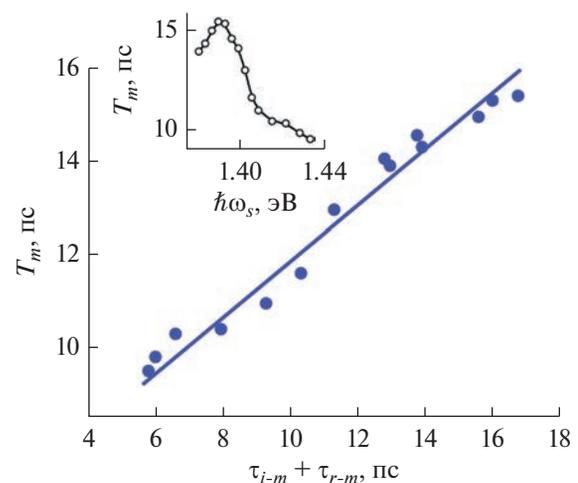
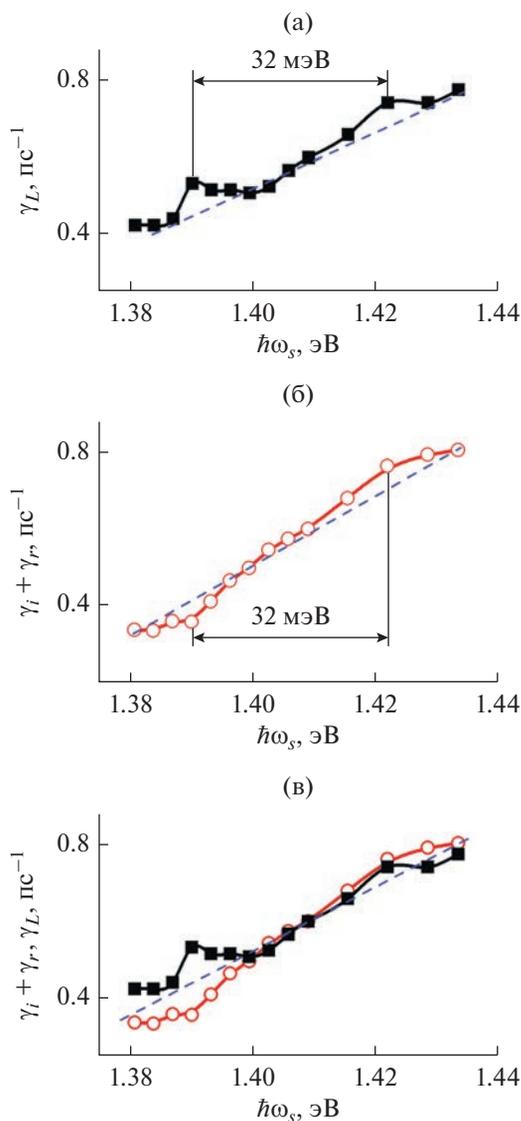


Рис. 31. Зависимость длительности  $T_m$  s-компоненты от суммы времен  $(\tau_{i-m} + \tau_{r-m})$ , на вставке – спектр этой длительности  $T_m(\hbar\omega_s)$ .

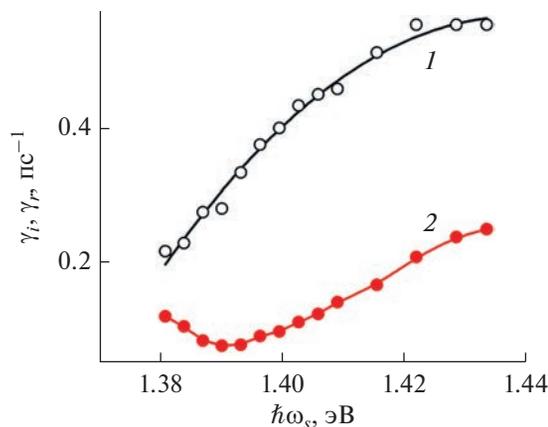


**Рис. 32.** Спектры коэффициента линейного усиления  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$  (а) и суммы  $(\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s))$  коэффициентов усиления (б), экспоненциального и обусловленного ЭТН, сопоставление представленных на рис. (а) и (б) спектров линейного усиления  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$  и суммы  $(\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s))$  (в).

Можно предположить, что скорость ЭТН на конкретный энергетический уровень обратно пропорциональна характерному времени релаксации на этот уровень остывающих носителей, а значит, учитывая (22), обратно пропорциональна  $\tau_{r-m}$ . Допустим, что вклад ЭТН в усиление на фронте s-компоненты характеризуется коэффициентом усиления

$$\gamma_r = 1/\tau_{r-m}. \quad (36)$$

Спектр  $\gamma_r(\hbar\omega_s)$  представлен на рис. 33 (кривая 2). Обнаруживается, что сумма спектров коэффициентов усиления, экспоненциального и обусловленно-



**Рис. 33.** Спектры коэффициента экспоненциального усиления  $\gamma_i(\hbar\omega_s)$  (1) и коэффициента усиления  $\gamma_r(\hbar\omega_s)$ , обусловленного ЭТН (2).

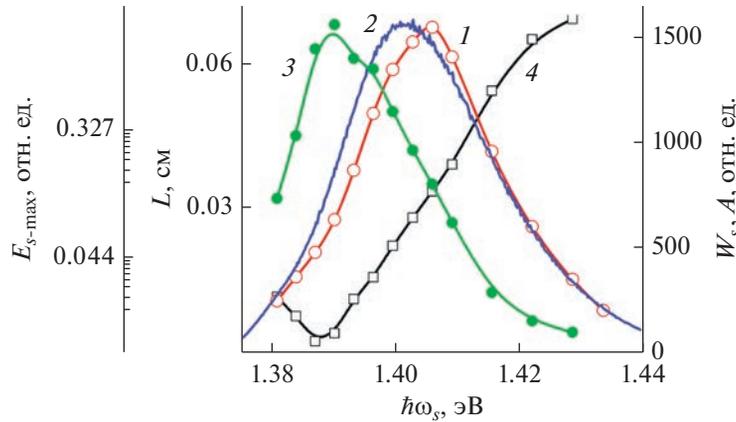
го ЭТН, представленная на рис. 32б, приблизительно равна спектру линейного усиления, т.е.

$$\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s) \approx \gamma_L(\hbar\omega_s). \quad (37)$$

Это приближенное равенство иллюстрирует рис. 32в. Отклонение от строгого равенства создается, во-первых, обсуждавшейся выше модуляцией спектра  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$ . Во-вторых, обнаруживающейся модуляцией суммарного спектра  $\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s)$ . Для того чтобы представить ее нагляднее, на рис. 32в проведена штриховая прямая через график спектра. Как видно из рис. 32в, при  $\hbar\omega_s \approx 1.422$  эВ локальные максимумы модуляции спектров  $\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s)$  и  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$  совпадают, а при  $\hbar\omega_s \approx 1.390$  эВ локальному минимуму модуляции суммарного спектра  $\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s)$  соответствует локальный максимум модуляции спектра  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$ , т.е. периоды сравниваемых двух модуляций отличаются в два раза. Модуляция спектра  $\gamma_i(\hbar\omega_s) + \gamma_r(\hbar\omega_s)$  во многом возникает благодаря немонотонности спектра  $\gamma_r(\hbar\omega_s)$ , которая, по-видимому, корректируется условием (34). На этом этапе можно сделать вывод, что равенство (37) приближенно выполняется с погрешностью, отображаемой отклонениями кривых на рис. 32в от проведенной через них штриховой прямой.

Определение коэффициента линейного возрастания выражением (37) было, по сути, получено эмпирически. Оно прояснило, каким должен быть коэффициент в режиме насыщения усиления. В (37) присутствует член  $\gamma_r$ , определяющий влияние ЭТН, замедленного из-за нагрева носителей s-излучением, на линейное возрастание. Тем самым доказывается, что нагрев s-излучением тормозит не только релаксацию, но и возрастание s-компоненты на фронте.

Таким образом, на фронте по мере увеличения интенсивности s-компоненты ее экспоненциаль-



**Рис. 34.** Спектры амплитуды хронограммы s-компоненты  $A(\hbar\omega_s)$  (кривая 1), интегральной по времени энергии s-излучения  $W_s(\hbar\omega_s)$  (2), длины усиления s-компоненты  $L(\hbar\omega_s)$  (3), максимальной плотности энергии s-компоненты в ее активной области  $E_{s-\max}(\hbar\omega_s)$  (4).

ное усиление сменяется линейным возрастанием во времени. Это нелинейное оптическое явление. Подобное изменение характера усиления излучения, но только в пространстве, было получено теоретически в работе [5]. Но там коэффициент ненасыщенного экспоненциального и коэффициент линейного усиления оказывались одинаковыми. В описанном же эксперименте аналогичные коэффициенты отличаются один от другого. Коэффициент  $\gamma_L$  линейного возрастания в эксперименте получается, если к коэффициенту  $\gamma_i$  ненасыщенного усиления добавить еще и коэффициент усиления  $\gamma_r$ , определяемый ЭТН. Поскольку ЭТН замедлен из-за нагрева носителей s-излучением, то тем самым выявляется замедление возрастания излучения на фронте, вызванное таким нагревом. Отличается и форма спектров названных коэффициентов. Вместо корневого спектра коэффициента  $\gamma_i$  возникает квазилинейный спектр коэффициента  $\gamma_L$ . В каждом из режимов (экспоненциального усиления и линейного возрастания) соответствующие им коэффициенты  $\gamma_i$  и  $\gamma_L$ , отличные один от другого, оставались неизменными. Длительность s-компоненты оказалась пропорциональна опять же двум параметрам режимов ненасыщенного усиления и релаксации: сумме характерных времен первого и второго.

#### 14. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ s-КОМПОНЕНТЫ

Динамика, тем более пикосекундная, спектральных компонент стимулированного излучения полупроводника изучена недостаточно. Восполнению этого пробела отчасти способствуют описываемые в обзоре эксперименты. Данный раздел посвящен выявлению зависимостей, связывающих максимальную плотность энергии

s-компоненты с другими параметрами s-компоненты. Очевидно, что интенсивность s-компоненты на приемной площадке фотоприемника имеет вид

$$I_{s-m}(t) \sim E_s(t - \delta t),$$

где  $E_s$  — энергия s-компоненты в активной среде в момент времени  $t$ ,  $\delta t$  — время движения света от образца до фотоприемника, не учитываемое далее. Возрастание со временем интенсивности  $I_{s-m}$  и, соответственно, энергии  $E_s$  происходит экспоненциально, согласно (31), в режиме ненасыщенного усиления, пока интенсивность относительно мала. Следом за экспоненциальным усилением далее на фронте s-компоненты интенсивность  $I_{s-m}$  и энергия  $E_s$  возрастают со временем линейно, в режиме насыщения усиления, (33). Естественно принять, что диаметр активной области s-компоненты равен длине усиления  $L$ . Тогда величина

$$E_{s-\max} \approx kA/L^2 \quad (38)$$

( $k = \text{const}$ ,  $A$  — амплитуда хронограммы s-компоненты) характеризует максимальное значение плотности энергии  $E_s$ , средней по активной области слоя GaAs. Определим спектр  $E_{s-\max}(\hbar\omega_s)$ . На рис. 34 (кривая 1) представлен спектр  $A(\hbar\omega_s)$ . От него незначительно отличается по форме спектр энергии измеряемого излучения, интегральной по времени (кривая 2). Этот спектр можно считать спектром интегральной по времени энергии s-излучения  $W_s(\hbar\omega_s)$ , если пренебречь незначительным вкладом спонтанного излучения. Спектр длины усиления  $L(\hbar\omega_s)$  (см. рис. 34, кривая 3) был определен так же, как в разд. 4 и 12, с использованием измеренного спектра  $W_s(\hbar\omega_s)$ . Также на рис. 34 представлен соответствующий (38) спектр  $E_{s-\max}(\hbar\omega_s)$  (кривая 4). Полулогарифмический масштаб из-

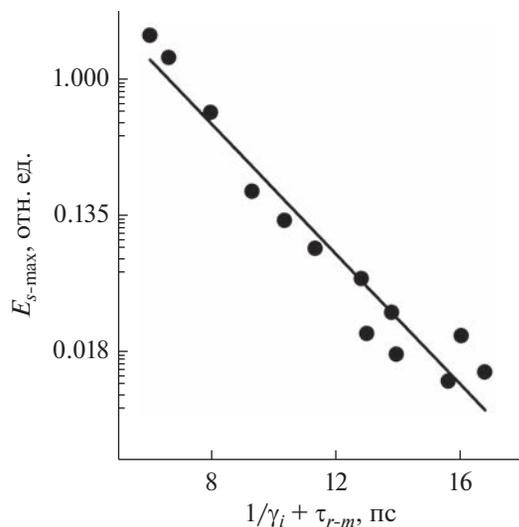


Рис. 35. Зависимость максимальной плотности энергии  $E_{s\text{-max}}$  от суммы  $1/\gamma_i + \tau_{r-m}$ .

бран, чтобы не скрадывалось различие малых значений  $E_{s\text{-max}}$  в длинноволновой области.

Как отмечалось выше, интенсивность  $I_{s-m}$  и пропорциональная ей энергия  $E_s$ , прежде чем достигнуть своего максимума, возрастают со време-

нем сначала экспоненциально, а затем линейно, поэтому, учитывая соотношения (31), (33), (37) и (36), можно предположить связь  $E_{s\text{-max}}$  с определяющими это возрастание параметрами  $\gamma_i$  и  $\tau_{r-m}$ . Действительно, эмпирически обнаруживается экспоненциально спадающая зависимость

$$E_{s\text{-max}} = 23 \exp(-(1/\gamma_i + \tau_{r-m})/2.1), \quad (39)$$

иллюстрированная в полулогарифмическом масштабе на рис. 35.

Максимальная плотность энергии  $E_{s\text{-max}}$  достигается, как и максимум  $I_{s-m}$ , с задержкой  $\delta t_m$  относительно максимума накачки (см. рис. 22, вставка). Спектр  $\delta t_m(\hbar\omega_s)$  измерен в [15] и представлен на рис. 36 (вставка). Выясняется, что этот спектр аппроксимируется экспоненциальной зависимостью

$$\delta t_m = \exp[74(1.42 - \hbar\omega_s)], \quad (40)$$

где  $1.42 \text{ эВ} \approx E_{g0}$ ,  $\hbar\omega_s$  – в эВ,  $\delta t_m$  – в пс. Из сопоставления спектра  $\delta t_m(\hbar\omega_s)$  и спектров  $1/\gamma_i = \tau_{i-m} = f(\hbar\omega_s)$  (см. рис. 30, кривая 1) и  $1/\gamma_L = f(\hbar\omega_s)$ , полученного из спектра  $\gamma_L(\hbar\omega_s)$  на рис. 32а, обнаруживается эмпирическая зависимость (см. рис. 36)

$$\delta t_m = 4(1/\gamma_i + 1/\gamma_L) - 12.3 \text{ пс}. \quad (41)$$

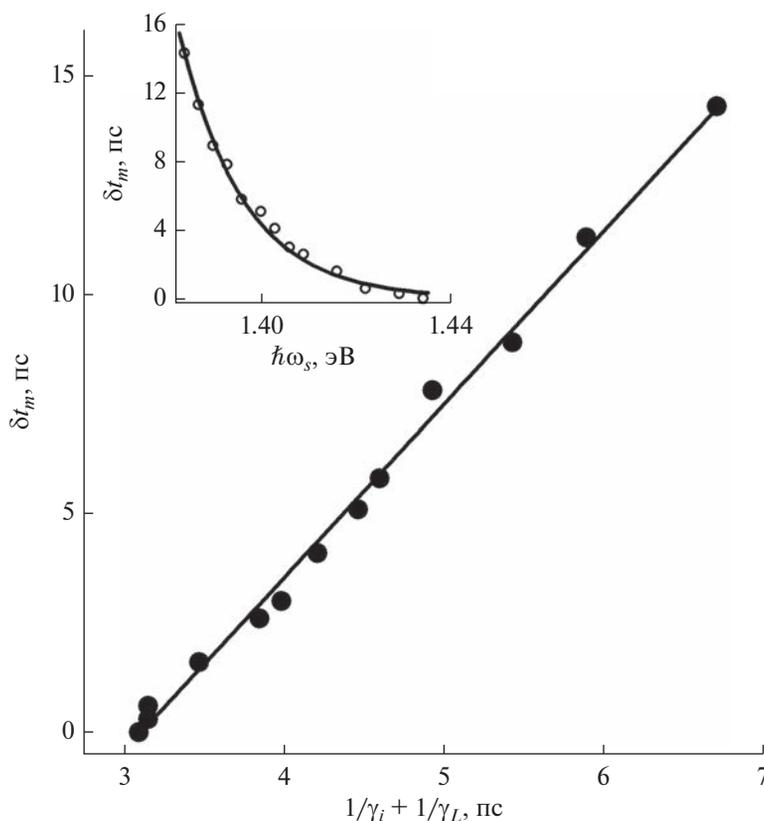


Рис. 36. Задержка  $\delta t_m$  максимума плотности энергии s-компоненты относительно максимума накачки, представленная как функция суммы  $1/\gamma_i + 1/\gamma_L$ ; на вставке – зависимость задержки  $\delta t_m$  от энергии фотона  $\hbar\omega_s$ .

Из изложенного выше следует, что максимальная плотность энергии s-компоненты  $E_{s-\max}$  тем меньше и достигается с тем большей задержкой  $\delta t_m$ , чем меньше коэффициент  $\gamma_i$  ненасыщенного усиления и больше время  $\tau_{r-m}$  релаксации этой s-компоненты, по сути же, чем меньше вероятность вынужденных межзонных переходов электронов, которые уменьшали бы инверсию населенности, и чем медленнее энергетический транспорт носителей, пополняющих инверсию населенности.

Таким образом, экспериментально были выявлены следующие функциональные зависимости максимальной плотности энергии s-компоненты: 1) спектр плотности  $E_{s-\max}(\hbar\omega_s)$ ; 2) экспоненциальная связь этой плотности с суммой обратного коэффициента ненасыщенного усиления и характерного времени релаксации s-компоненты; 3) экспоненциальная зависимость от  $\hbar\omega_s$  задержки максимума s-компоненты относительно максимума накачки; 4) линейная связь между указанной задержкой и суммой обратных коэффициентов ненасыщенного усиления и линейного возрастания s-компоненты.

Соответственно, для четырех установленных зависимостей представлены описывающие их эмпирические формулы. Используя ранее установленный факт, что время релаксации и коэффициент линейного возрастания s-компоненты в значительной степени определяются взаимодействием носителей с s-излучением, сделано следующее заключение. Это взаимодействие тормозит возрастание энергии s-компоненты внутри активной среды и способствует увеличению задержки ее максимума.

Следует отметить, что достижение своего максимума  $E_{s-\max}$  s-компонентами в разные моменты времени может свидетельствовать и об асинхронности энергетических микропотоков электронов (МТН) на разные уровни на дне зоны проводимости. В таком случае это было бы еще одним свидетельством в дополнение к указанным в [3], что электрон-электронное рассеяние замедляется в электромагнитном поле собственного излучения. Из-за этого замедления и становится возможным образование: 1) обеднения заселенности, приводящего к “провалу” в спектре усиления; 2) межзонных осцилляций электронов, не разрушаемых электрон-электронным рассеянием [3]. Причем замедляется и рассеяние дырок на дырках, или электрон-электронное рассеяние в валентной зоне. Если бы электро-электронное рассеяние доминировало, то все время поддерживалось бы фермиевское распределение носителей, отчего, казалось бы, МТН были бы синхронны (одновременно росли и спадали). Не исключено, что асинхронность МТН приводит и к замедлению перемещения длинноволнового склона спектра s-излучения в длинноволновую же сторону. Такую задержку

в [29] приняли (до обнаружения асинхронности) за признак замедления перенормировки ширины запрещенной зоны.

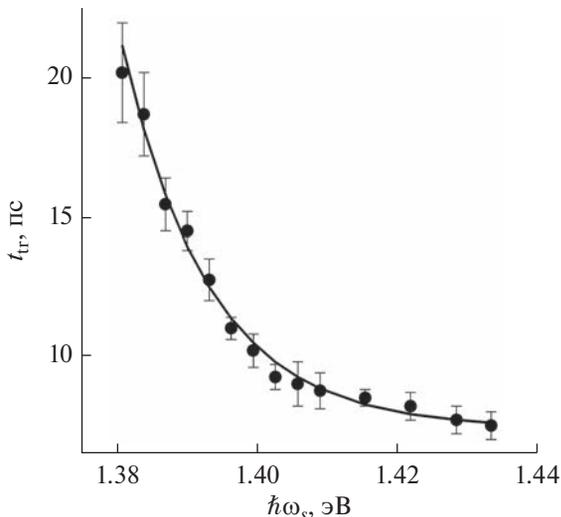
Можно было бы предположить, что замедление неупругого рассеяния носителей заряда друг на друге возникает по следующей причине (как некоторой аналогии предсказанного Дике [62] перехода системы двухуровневых атомов в когерентное состояние). Собственное переменное электромагнитное поле (s-излучение) прямозонного полупроводника связывает электрон с дыркой. Пара электрон-дырка образует микроосциллятор, или осциллирующий диполь. Эта связь делает электрон и дырку инерционнее по отношению к их рассеянию другими носителями заряда. Одинаковые осцилляторы, воздействуя друг на друга излучаемым полем, синхронизируются. Так связанные, синхронизирующиеся осцилляторы излучают когерентно. Отсюда могла бы происходить и когерентность s-компонент. Связь между осцилляторами, их когерентные колебания дополнительно делают электрон и дырку инерционнее по отношению к их рассеянию другими носителями заряда.

## 15. ПЕРЕХОД ОТ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО К ЛИНЕЙНОМУ ВОЗРАСТАНИЮ s-КОМПОНЕНТЫ

В работе [63] исследовались параметры и закономерности перехода от экспоненциального к линейному возрастанию s-компоненты. Место перекрытия кривых 2 и 3 на рис. 29 представляет собой область, где происходит переход от экспоненциального к линейному возрастанию интенсивности s-компоненты (далее – g-переход). Интервал времени, в которое происходит g-переход, и его середина представлены отрезком прямой и точкой соответственно на графике  $t_r(\hbar\omega_s)$  (рис. 37). Интервал интенсивности  $I_{s-m}$ , в котором происходит g-переход, и середина интервала представлены на графике  $I_r(\hbar\omega_s)$  (рис. 38). В работе [63] приводятся и другие экспериментальные спектры: спектр  $L(\hbar\omega_s)$  диаметра  $L$  активной области, в которой генерируется s-компонента (подобный спектр см. на рис. 7, кривая 5); спектр характерного времени релаксации интенсивности  $I_{s-m}$  на спаде s-компоненты  $\tau_{r-m}(\hbar\omega_s)$  (см. рис. 30, кривая 2); спектр обратного коэффициента ненасыщенного экспоненциального усиления  $1/\gamma_i = \tau_{i-m} = f(\hbar\omega_s)$  (см. рис. 30, кривая 1).

Обсудим, какие закономерности g-перехода следуют из перечисленных экспериментальных результатов. Обнаруженное возрастание времени  $t_r$  (в пс) при уменьшении  $\hbar\omega_s$  (в эВ) (см. рис. 37) имеет экспоненциальный характер и может быть аппроксимировано эмпирической формулой

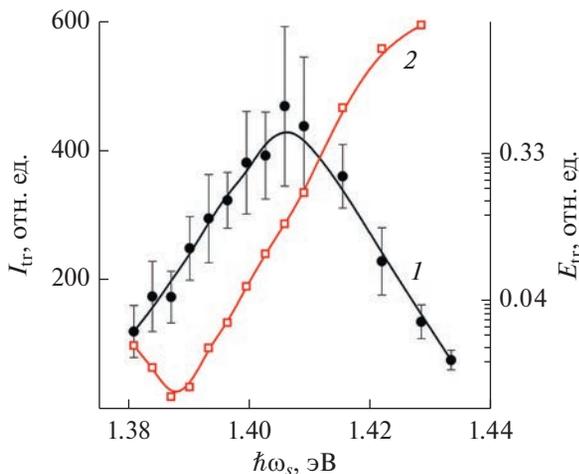
$$t_{tr} = 7.4 + 0.6 \exp(-80(\hbar\omega_s - 1.42)), \quad (42)$$



**Рис. 37.** Интервал времени от начала до конца *g*-перехода *s*-компоненты с энергией фотона  $\hbar\omega_s$  (вертикальные отрезки) и момент времени  $t_{tr}$ , на который приходится середина интервала (точки); сплошная кривая построена по формуле (42).

где  $1.42 \text{ эВ} \approx E_{g0}$ . Сопоставление форм спектров  $t_{tr}(\hbar\omega)$  и  $1/\gamma_i = f(\hbar\omega_s)$  позволяет предположить связь  $t_{tr}$  и  $1/\gamma_i$ . Действительно, как обнаруживается из графика на рис. 39, между этими параметрами существует линейная зависимость

$$t_{tr} = 4.2/\gamma_i. \tag{43}$$



**Рис. 38.** Интервал интенсивности *s*-компоненты от начала до конца *g*-перехода (вертикальные отрезки) и интенсивность  $I_{tr}$  в середине интервала (темные точки) в функции от энергии фотона  $\hbar\omega_s$  *s*-компоненты (сказанное относится к интенсивности, непосредственно измеренной фотоприемником) (условно кривая 1); средняя по активной среде плотность энергии  $E_{tr}$  *s*-компоненты во время *g*-перехода (светлые квадраты), тоже в функции от  $\hbar\omega_s$ . Кривые 1 и 2 проведены для наглядности.

Из нее следует, что *g*-переход происходит, когда будет выполнено универсальное условие

$$\gamma_i t_{tr} = 4.2. \tag{44}$$

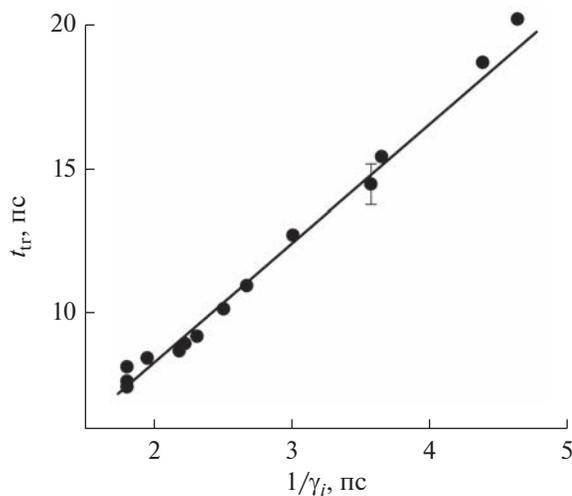
Подобное (44) по сути условие перехода от экспоненциального к линейному возрастанию, но только в одномерной, стационарно и однородно накачиваемой активной среде, было теоретически предсказано в работе [5] и уже приводилось в разд. 4:

$$g_h l_1 \sim 10. \tag{45}$$

Условие (45) – это один из результатов решения уравнений насыщения для беззеркальных лазерных усилителей в указанной работе. Корректно сравнить количественно условия (44) и (45) затруднительно, в частности, из-за следующего отличия. В нашем случае излучение генерируется в динамическом режиме, при пикосекундной пространственно неоднородной накачке, в активной среде волноводной гетероструктуры, где формируются почти стоячие волны [21], и пр. Как грубое приближение, только чтобы сравнить произведения (44) и (45) по порядку величины, можно принять соотношение

$$\gamma_i \approx g_h c / 2n_0, \tag{46}$$

где коэффициент 2 введен в предположении, что усиление происходит только в местоположении пучностей почти стоячей волны. Принимая также, что  $l_1 = ct_{tr}/n_0$ , а  $g_h$  определяется из выражения (46), учитывая (44), получаем  $g_h l_1 \approx 8.4$ . Такое значение  $g_h l_1$  не противоречит условию (45), указывающему только порядок величины этого произведения.



**Рис. 39.** Зависимость момента времени  $t_{tr}$  в середине *g*-перехода от обратной величины коэффициента насыщения  $1/\gamma_i$ ; сплошная прямая построена по формуле (43).

Таким образом, экспериментально получено универсальное условие (45) перехода от экспоненциального к линейному возрастанию во времени (или от режима ненасыщенного усиления к режиму насыщения усиления) стимулированного излучения, генерируемого в волноводной полупроводниковой гетероструктуре при ее пикосекундной накачке. И это условие не противоречит предсказанному ранее теоретически для усиления в пространстве в существенно иных условиях.

Учитывая, что в соответствии с круглым фокусным пятном луча накачки активная среда в волноводной гетероструктуре для каждой  $s$ -компоненты по форме похожа на диск, предположительно следующее. Спектральная компонента в активной области подобна цилиндрической волне, частично стоячей (можно сказать, и частично бегущей). При таком представлении излучения корректнее считать, как и в разд.14, что  $I_{s-m}(t) \sim E_s(t)$ . Тогда из спектра интенсивности  $I_{tr}(\hbar\omega_s)$  во время  $g$ -перехода и спектра диаметра активной области  $L(\hbar\omega_s)$   $s$ -компоненты получаем спектр средней по активной среде плотности энергии  $s$ -компоненты во время  $g$ -перехода

$$E_{tr} = kI_{tr}/L^2 = f(\hbar\omega_s),$$

где  $k = \text{const}$ . Обоснованность подобного рода процедуры очевидна еще и из пояснений в [30]. Спектр  $E_{tr}(\hbar\omega_s)$  представлен в полулогарифмическом масштабе (для большей ясности мелкомасштабных особенностей) на рис. 38. Обращает на себя внимание то, что такой график качественно антикоррелирует с графиком спектра характерного времени релаксации  $s$ -компоненты  $\tau_{r-m} = f(\hbar\omega_s)$  (см. рис. 30). Точнее, плотность энергии  $E_{tr}$  связана с суммой  $(1/\gamma_i + \tau_{r-m})$  зависимостью

$$E_{tr} = 0.045 + 250 \exp(-(1/\gamma_i + \tau_{r-m})/1.6), \quad (47)$$

график которой представлен на рис. 40 (сплошная кривая). Этот график и экспериментальные точки даны в полулогарифмическом масштабе опять же для большей ясности мелкомасштабных особенностей и их соответствия аппроксимации (47). Зависимость (47) подтверждается и тем, что экспериментальные точки  $E_{tr}$ , относящиеся к разным  $\hbar\omega_s$ ,  $\tau_{r-m}$  и  $\gamma_i$ , практически совпадают на графике  $E_{tr} = f(1/\gamma_i + \tau_{r-m})$  при одинаковом значении суммы  $(1/\gamma_i + \tau_{r-m})$ .

В области экстремумов зон проводимости и валентной ЭТН делится на части. Напомним, что МТН – это часть ЭТН, заполняющая носителями (электронами и дырками) пары одночастичных квантовых состояний, связанных прямым оптическим переходом с фиксированной  $\hbar\omega_s$ . Одно состояние из каждой пары находится на энергетическом уровне в зоне проводимости (с), другое на энергетическом уровне в валентной зоне (v).

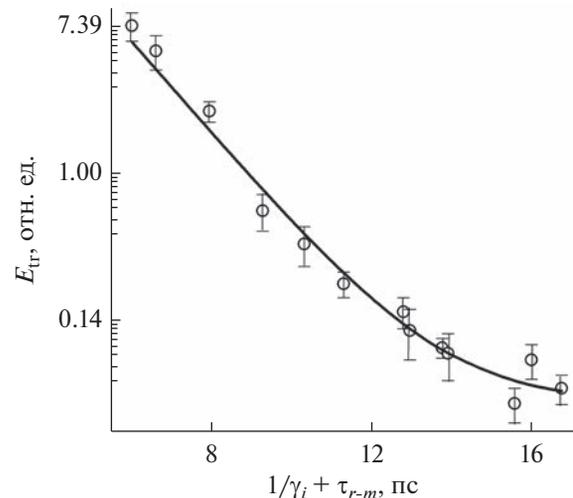


Рис. 40. Зависимость плотности энергии  $E_{tr}$   $s$ -компоненты во время  $g$ -перехода, средней по активной среде, от суммы  $(1/\gamma_i + \tau_{r-m})$ .

До наступления  $g$ -перехода спектр коэффициента усиления неизменен,  $\gamma_i = \text{const}$  при фиксированной  $\hbar\omega_s$  [61]. Поэтому в первом приближении можно представить, что скорость вынужденной рекомбинации носителей с каждой пары оптически связанных  $sv$ -уровней и МТН на эту пару уровней находятся в динамическом равновесии, возрастая экспоненциально со временем. Это режим ненасыщенного усиления. Наступает момент, когда скорость рекомбинации возрастет настолько, что МТН не сможет далее компенсировать рекомбинацию носителей, доставленных им на пару  $sv$ -уровней. Начинается обеднение инверсной населенности. Возникает провал в спектре усиления (см. рис. 7). Начинается режим насыщения усиления. Далее на фронте энергия  $s$ -компоненты в активной среде растет уже линейно со временем

$$E_s = E_{tr}[1 + \gamma_L(t - t_{tr})]. \quad (48)$$

Это вытекает из пропорциональности  $I_{s-m}(t) \sim E_s(t)$  и (33). Формулу (37) представим в несколько ином виде

$$\gamma_L(\hbar\omega) \approx \gamma_i(\hbar\omega_s) + 1/\tau_{r-m}(\hbar\omega_s). \quad (49)$$

В наших условиях изменение  $\gamma_i$  с  $\hbar\omega_s$  обусловлено, в частности, изменением комбинированной, или объединенной, плотности состояний  $\rho \sim (\hbar\omega_s - E_g)^{1/2}$ , т.е. плотности указанных пар одночастичных квантовых состояний в паре  $sv$ -уровней [4, 25]. Естественно, что, во-первых, МТН тем больше, чем больше плотность  $\rho$ , которой пропорционален  $\gamma_i$ . Отсюда следует, что МТН тем больше, чем больше  $\gamma_i$ . Во-вторых, чтобы началось насыщение усиления, нужна рекомбинация с превышающей МТН скоростью. Эта скорость

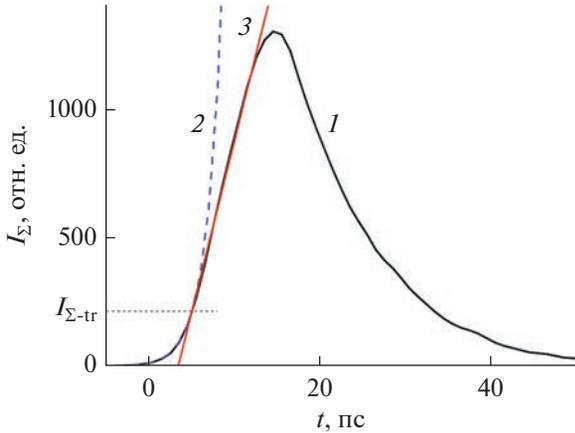


Рис. 41. Хронограмма интегрального по спектру s-излучения при энергии импульса накачки  $W_{\text{ex}} = 3.3$  отн. ед. (1) из [29] и касательные к хронограмме: экспоненциальная (2) и линейная (3).

пропорциональна  $E_s$  (в согласии с [36]), и во время g-перехода она пропорциональна  $E_{tr}$ . Вкупе из первого и второго следует, что увеличение  $\gamma_i$  должно вызывать увеличение  $E_{tr}$ . Это качественно поясняет зависимость  $E_{tr}$  от  $\gamma_i$  в (47).

Аналитическое выражение времени  $\tau_T$  (23) было получено в теории [7] для случая, когда излучение одномодовое. Но в работе [36] подтвердилось предположение, что это выражение можно распространить и на случай, когда излучение является световым континуумом, как в GaAs. Подтверждением было то, что выражениям (22) и (24) удовлетворяла экспериментальная зависимость  $\tau_R(D_{\text{ex}})$ . К последней зависимости впоследствии оказались близки зависимости  $\tau_{r-m}(L)$ . Это позволяет предположить следующее. Поскольку время  $\tau_T$ , а значит и время  $\tau_R$ , характеризует ЭТН, то время  $\tau_{r-m}$  характеризует МТН. Тогда той s-компоненте, у которой  $\tau_{r-m}$  меньше, соответствует больший МТН, а значит, большая  $E_{tr}$ . Это соответствует зависимости (47). В целом присутствие  $\gamma_i$  и  $\tau_{r-m}$  в (47) означает, что плотность энергии  $E_{tr}$  тем больше, чем: а) больше плотность состояний, на которые МТН доставляет носители; б) интенсивнее доставляющий эти носители МТН.

Данное исследование позволило установить экспериментально условия перехода от режима ненасыщенного усиления к режиму насыщения усиления, иначе говоря, функциональные зависимости параметров s-компоненты при переходе. Тем самым было восполнено не достававшее звено, чтобы вместе с предшествовавшими исследованиями можно было представить, в первом приближении, эволюцию “каждой” s-компоненты на всех ее этапах.

## 16. АНОМАЛЬНО БЫСТРОЕ ВОЗНИКНОВЕНИЕ s-ИЗЛУЧЕНИЯ И ВОЗМОЖНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЕГО ИНТЕНСИВНОСТИ ОТ ПЛОТНОСТИ ЭДП

Приведем оценку, позволяющую понять возникновение стимулированного излучения уже в начале мощной пикосекундной накачки. Воспользуемся при оценке данными из [29]. В единице объема максимальная скорость стимулированной рекомбинации равна

$$R_{\text{st-max}} = (n_{\text{max}} - n_{\text{max}}/e)/\tau_R = 3.6 \times 10^{29} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad (50)$$

где  $n_{\text{max}} = 7 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $\tau_R = 12.2 \text{ пс}$  при  $D_{\text{ex}} = 0.05 \text{ см}$ . Скорость стимулированной рекомбинации во время перехода (tr) от экспоненциального к линейному возрастанию s-излучения со временем составляет

$$R_{\text{st-tr}} = R_{\text{st-max}}(I_{\Sigma\text{-tr}}/I_{\Sigma\text{-max}}) \approx 5.97 \times 10^{28} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}, \quad (51)$$

где  $I_{\Sigma\text{-max}} \approx 1301$  отн. ед.,  $I_{\Sigma\text{-tr}} \approx 214$  отн. ед. — интенсивность s-излучения, интегрального по спектру, во время указанного перехода (рис. 41).

Величина ненасыщенного коэффициента усиления, полученная из графика  $I_{\Sigma}(t)$  (см. рис. 41), равна  $\gamma_i = 0.55 \text{ пс}^{-1}$ . Переход от экспоненциального к линейному возрастанию s-излучения происходил приблизительно в момент времени  $t_{tr} \approx 7.1 \text{ пс}$ . Произведение  $\gamma_i t_{tr} = 3.91$ , что близко к условию g-перехода (44), полученному для s-компонент. Скорость пороговой спонтанной рекомбинации, генерировавшей спонтанное излучение, с усиления которого начиналось стимулированное излучение, равнялась

$$R_{\text{sp-e}} = R_{\text{st-tr}}/\exp(\gamma_i t_{tr}) = 1.2 \times 10^{27} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (52)$$

Так как спектральная полоса усиления света несколько уже (максимум, вдвое, см. рис. 7) ширины спектра спонтанного излучения, то скорость полной спонтанной рекомбинации  $R_{\text{sp}}$  при пороге образования стимулированного излучения, по-видимому, находится в диапазоне  $1.2 \times 10^{27} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1} < R_{\text{sp}} < 2.4 \times 10^{27} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Скорость спонтанной рекомбинации определяется выражением

$$R_{\text{sp}} = Bnp, \quad (53)$$

где  $B = 7.2 \times 10^{-10} \text{ см}^3/\text{с}$  при комнатной температуре  $T_R = 294 \text{ К}$ . Получаем оценку пороговой плотности носителей  $n_{\text{th}} \approx (1.3...1.8) \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , близкую к оценкам из [10, 13, 35], при которой уже должна существовать инверсия населенности согласно расчетам [45, 64].

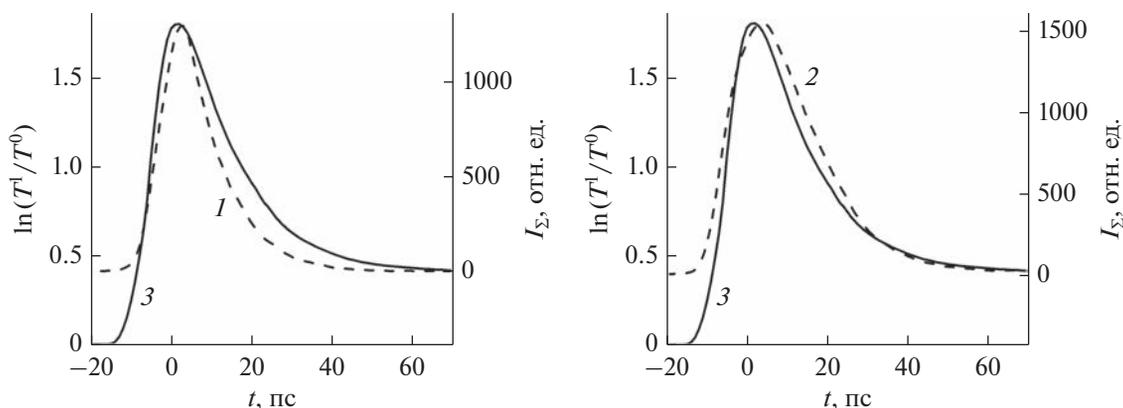


Рис. 42. Хронограммы  $I_{\Sigma}(t)$  s-излучения при несколько отличных  $W_{\text{ex}}$  и диаметре  $D_{\text{ex}} = 0.5$  [29] (1) и  $0.54$  мм [36] (2); график просветления в реальном времени (3).

Таким образом, оценки, основанные на экспериментальных данных, подтверждают предложенное в [63] объяснение аномально быстрого возникновения стимулированного излучения. Такое возникновение вызвано тем, что скорость спонтанной рекомбинации приобретает значение, соответствующее пороговой плотности  $n_{\text{th}}$  накаченных носителей, с инерционностью, не превышающей нескольких пикосекунд. Увеличение времени возникновения стимулированного излучения по отношению к началу накачки, наблюдавшееся, например, при уменьшении  $W_{\text{ex}}$  в [29], объясняется просто. Чем меньше  $W_{\text{ex}}$ , тем позднее плотность накачиваемых носителей достигнет пороговой плотности  $n_{\text{th}}$  и начнется усиление спонтанного излучения.

Отметим вытекающую из изложенного в разд. 9 и далее небезынтесную перспективу. Из выражений (17) и (21) следует

$$I_{\Sigma} \sim \left| \frac{dn}{dt} \right| = \frac{n - n_{\text{th}}}{\tau_R}. \quad (54)$$

То есть при релаксации интенсивность s-излучения, интегрального по спектру, пропорциональна надпороговой плотности носителей. Релаксацией плотности носителей “управляет”, как следует из (22), их охлаждение или, иначе говоря, ЭТН. Поскольку эксперименты выявили влияние ЭТН и на фронте, и в максимуме s-излучения, то естественно предположить, что, хотя бы в первом приближении ЭТН определяет интенсивность s-излучения на всем его протяжении, где тогда справедливо и соотношение (54). В этом случае в течение s-излучения его интенсивность пропорциональна превышению плотности носителей над пороговым уровнем, точнее, величине  $(n - n_{\text{th}})/\tau_R$ . Как проиллюстрировано в [1, рис. 11], при пороговом состоянии ЭДП на изменение просветления в большей степени влияет изменение плотности неравновесных носителей, чем их

температуры. Поэтому изменение надпороговой плотности  $(n - n_{\text{th}})$  со временем приблизительно отображает обратимое просветление. Из-за необходимости минимизировать энергию зондирующего импульса обычно измеряют просветление корреляционным методом, в функции от времени задержки  $\tau_d$  зондирующего импульса относительно накачки. Д.Н. Забегаевым была создана программа математического получения из изменения просветления с  $\tau_d$  его обратимого изменения в реальном времени  $\ln(T^1/T^0) = f(t)$ . Не располагая результатами измерений просветления и s-излучения в строго одинаковых условиях, были взяты для примера измеренные в разное время хронограммы s-излучения на рис. 42 (кривые 1 и 2) и зависимость  $\ln(T^1/T^0) = f(t)$  (кривая 3). Одна из хронограмм оказалась несколько уже, другая немного шире кривой обратимого просветления. Активный рост s-излучения, представляемого кривой 1, начинается примерно, когда просветление достигает порогового уровня, равного величине остаточного просветления при  $t > 50$  пс, которому соответствует плотность  $n_{\text{th}}$ . Это предполагалось выше в этом параграфе и согласуется со сделанной там оценкой. На графике 2 s-излучение возникает несколько раньше того, когда просветление на графике 3 достигает порогового уровня. Это, видимо, свидетельствует о том, что такое s-излучение генерировалось при большей  $W_{\text{ex}}$ , чем просветление на графике 3, отчего пороговый уровень достигался раньше.

При сопоставлении хронограмм s-излучения и графика обратимого просветления обнаружено, что они достаточно близки. Это позволяет считать реалистичным как исходное предположение, что интенсивность s-излучения пропорциональна превышению плотности носителей над пороговым уровнем, так и его предпосылку, что в первом приближении ЭТН определяет интенсивность s-излучения на всем его протяжении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально получено следующее представление о собственном стимулированном (усиленном спонтанном) пикосекундном излучении (s-излучении) в режиме насыщения усиления в гетероструктуре из полупроводников  $A_3B_5$ . Мощная оптическая накачка создает в GaAs пороговую для образования s-излучения плотность носителей за несколько пикосекунд. Скорость спонтанной рекомбинации достигает расчетного для этой плотности значения с инерционностью  $\sim 1$  пс. Отсюда аномально быстрое возникновение s-излучения. Внутри гетероструктуры s-излучение наводит брэгговскую решетку населенности. Интерференционная картина спектра излучения, вызванная отражением решетки спектральных компонент излучения (s-компонент), свидетельствует о существенной когерентности s-излучения, ранее предполагавшейся низкой для стимулированного излучения. Когда произведение коэффициента  $\gamma_i$  ненасыщенного усиления s-компоненты на время  $t_{tr}$ , отсчитываемое от начала s-компоненты, достигает экспериментально установленной константы  $\gamma_i t_{tr} = 4.2$ , возрастание плотности энергии моды в активной среде меняется с экспоненциального на линейное. Во время достижения этого условия происходит переход от режима ненасыщенного усиления к режиму насыщения усиления, в котором обнаружены перечисляемые ниже явления.

Для того чтобы энергетический транспорт накаченных носителей в область экстремумов зон проводимости и валентной, откуда носители рекомбинируют, был сбалансирован с их вынужденной рекомбинацией, происходит обеднение инверсной населенности электронов (“выжигание” провала в спектре усиления). Электрон-электронное рассеяние оказывается не способным залечивать подобное отклонение от фермиевского распределения носителей, образуемое s-излучением. При условии достаточного совершенства кристаллической решетки возникает периодическая трансляция провала по спектру фундаментального поглощения света, требуемая для детального равновесия переходов электронов с излучением и поглощением LO-фононов. Благодаря этой трансляции ширина  $\sim \Delta_{LO}$  спектра усиления и основания мгновенного спектра s-излучения лишь ненамного превышает энергию LO-фонона. При такой “узкой” полосе усиления ею можно пренебречь в некоторых случаях, и соответствующее состояние электронно-дырочной плазмы считать пороговым. В таком приближении температура и плотность ЭДП становятся взаимосвязаны. Из-за этого, во-первых, с плотностью электронов становятся однозначно связаны: перенормировка запрещенной зоны из-за их кулоновского взаимодействия, их распределение между долинами, частота плазмонов и др.

Во-вторых, возникает связь характерного пикосекундного времени  $\tau_R$  релаксации как плотности ЭДП, так и интенсивности s-излучения (интегрального по спектру) с характерным временем  $\tau_T$  остывания носителей заряда. Взаимодействие носителей с s-излучением замедляет время  $\tau_T$ , и, значит, замедляет ЭТН. При балансе ЭТН и ВНР образуется связь времени  $\tau_R$  с теми параметрами ЭДП, s-излучения и GaAs, от которых зависит время  $\tau_T$ . Возникает антикорреляция между максимальной интенсивностью s-излучения и временами  $\tau_T$  и  $\tau_R$ . Превышение длительности s-излучения, интегрального по спектру, над длительностью пикосекундной накачки и особенности формы огибающей s-излучения определяются тоже временем  $\tau_R$  или  $\tau_T$ , а фактически замедлением ЭТН. Из-за пространственно неоднородной накачки длина  $L$  усиления (диаметр активной области) s-компоненты оказывается разной для разных s-компонент. Возникает зависимость характерного пикосекундного времени  $\tau_{r-m}$  релаксации s-компоненты от  $L$ . Обнаруживается остаточное характерное время релаксации, универсальное в том смысле, что никакая миниатюризация активной области предположительно не может сделать его меньше при горячей ЭДП. Коэффициент линейного возрастания на фронте, максимальная плотность энергии s-компоненты в ее активной среде, время достижения этого максимума, длительность s-компоненты, плотность ее энергии во время перехода от экспоненциального к линейному возрастанию, — все оказывается зависящим от коэффициента  $\gamma_i$  и времени  $\tau_{r-m}$  s-компоненты. Названные параметры различаются для разных s-компонент и закономерно меняются при изменении энергии фотона s-компоненты. То, что изменения со временем интенсивности s-компонент протекают в итоге асинхронно, дает, видимо, новое свидетельство замедления рассеяния носителей друг на друге, когда они находятся в поле собственного электромагнитного излучения.

На основании полученных экспериментальных результатов квинтэссенцию генерации интенсивного излучения при насыщении его усиления можно предположить следующей. ЭТН представляет собой релаксацию накаченных носителей в энергетическом пространстве на нижерасположенные энергетические уровни. Он доставляет накаченные носители к экстремумам зон проводимости и валентной. Оттуда носители вынужденно рекомбинируют при ширине спектра усиления  $\sim \Delta_{LO}$ . ВНР находится в динамическом равновесии (сбалансирована) с ЭТН. Генерируемое при ВНР излучение, взаимодействуя с носителями, подогревает их, замедляя их охлаждение и ЭТН. Последнее замедляет ВНР, что влияет на интенсивность излучения. Подобная отрицательная обратная связь (ООС) предложена в [7]. Изменения ЭТН и

ВРН, в том числе и в процессе ООС, идут так, чтобы соотношение плотности носителей и их температуры соответствовало пороговому состоянию ЭДП. Образующаяся в таких условиях ВРН определяет интенсивность излучения.

В таком представлении интенсивность s-излучения определяется без необходимости измерения или расчета спектра коэффициента усиления с учетом всех влияющих на него факторов в реальных условиях эксперимента. Во-первых, достаточно знать превышение плотности носителей заряда над тем её остаточным значением, когда s-излучение заканчивается и температура GaAs комнатная. Во-вторых, надо знать характерное время охлаждения накаченных носителей заряда, которое связано простым соотношением с измеряемым в реальном времени характерным временем релаксации интенсивности s-излучения.

Экспериментально полученное и суммированное в обзоре представление о стимулированном излучении в режиме насыщения усиления существенно пополнено и конкретизировано по сравнению с предполагавшимся ранее. К тому же, наконец, экспериментально прямо доказана связь стимулированного и спонтанного излучения. Большинство закономерностей в перечисленных выше явлениях аппроксимируются эмпирическими формулами, доказывающими определяющую роль: (а) энергетического транспорта носителей, замедленного из-за их взаимодействия с излучением, (б) порогового состояния ЭДП. Эти закономерности уже можно учитывать, решая и чисто научные, и прикладные задачи.

Можно надеяться, что обзор представляет также необходимую экспериментальную базу для развития теоретического и дальнейшего экспериментального исследования режима насыщения усиления, одного из разделов еще недостаточно исследованной нелинейной динамики генерации интенсивного стимулированного излучения в гетероструктурах прямозонных полупроводников. Теория нужна, в частности, чтобы объяснить предполагавшееся и в [3] снижение эффективности неупругого рассеяния носителей друг на друге, когда они находятся в поле собственного излучения. Здесь оно делает возможной асинхронность микропотоков носителей на энергетические уровни, с которых они рекомбинируют. Различие микропотоков тоже представляет интерес для теоретических и экспериментальных исследований.

Отметим также, что развитие экспериментальных и теоретических исследований в представленной актуальной области отвечало бы и интересам совершенствования сверхбыстродействующей полупроводниковой оптоэлектроники.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Считаем важным подчеркнуть, что фундамент исследования пикосекундного интенсивного стимулированного излучения и вызываемых им нелинейных оптоэлектронных эффектов в гетероструктуре, описанного в настоящем обзоре и обзорах [1–3], был создан при существенном участии В.И. Переля в наших совместных работах, о чем мы всегда помним и за что безмерно ему благодарны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Kumeikov S.E. et al. // Proc. SPIE. 1992. V. 1842. P. 70.
2. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Kriwonosov A.N. и др. // Известия РАН. Сер. Физическая. 1994. Т. 58. № 7. С. 89.
3. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Kriwonosov A.N. // ЖЭТФ. 2022. Т. 162. № 6. С. 1018.
4. Звелто О. Принципы лазеров. СПб.: Лань, 2008.
5. Casperson L.W. // J. Appl. Phys. 1977. V. 48. № 1. P. 256.
6. Соловьев В.Д. Физика лазеров. Текст лекций (4-й курс). СПб.: СПб гос. политех. ун-т, 2012. <http://elibrary.spbstu.ru/dl/2313.pdf/download/2313.pdf>.
7. Калафати Ю.Д., Кокин В.А. // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. № 6. С. 1793.
8. Bronevoi I.L., Gadonas P.A., Krasauskas V.V. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. № 8. С. 322.
9. Грибковский В.П. Теория поглощения и испускания света в полупроводниках. Минск: Наука и техника, 1975.
10. Bronevoi I.L., Kumeikov S.E., Перель В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43. № 8. С. 368.
11. Hulin D., Joffre M., Migus A. et al. // J. de Physique Colloques. 1987. V. 48. № C5. P. 267.
12. Fox A.M., Manning R.J., Miller A. // J. Appl. Phys. 1989. V. 65. № 11. P. 4287.
13. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Dyadyushkin E.G. et al. // Sol. Stat. Commun. 1989. V. 72. № 7. P. 625.
14. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Дядюшкин Е.Г., Явич Б.С. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48. № 5. С. 252.
15. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Забегаев Д.Н., Кривонос А.Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 143. № 4. С. 634.
16. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Забегаев Д.Н., Кривонос А.Н. // ФТП. 2020. Т. 54. № 1. С. 25.
17. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Физматлит, 2003.
18. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Забегаев Д.Н. и др. // ПТЭ. 2011. № 4. С. 108.
19. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Забегаев Д.Н., Кривонос А.Н. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov18/13/text.pdf>.
20. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Забегаев Д.Н., Кривонос А.Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 144. № 2. С. 227.

21. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2020. Т. 54. № 10. С. 1018.
22. Семенов Н.А. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973.
23. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Кривоносов А.Н. и др. // ФТП. 2002. Т. 36. № 2. С. 144.
24. Goebel E.O., Hildebrand O., Lohnert K. // IEEE J. Quantum Electron. 1977. V. 13. № 10. P. 848.
25. Бонч-Бруевич В.Л., Калашиников С.Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1981.
26. Бронево́й И.Л., Кривоносов А.Н. // ФТП. 1998. Т. 32. № 5. С. 537.
27. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2021. Т. 55. № 2. С. 121.
28. Shah J., Leheny R.F., Lin C. // Sol. Stat. Commun. 1976. V. 18. № 8. P. 1035.
29. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2017. Т. 51. № 5. С. 594.
30. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2022. Т. 56. № 3. С. 307.
31. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2012. Т. 46. № 7. С. 944.
32. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Кривоносов А.Н. и др. // ФТП. 2007. Т. 41. № 12. С. 1418.
33. Бронево́й И.Л., Кривоносов А.Н. // ФТП. 1998. Т. 32. № 5. С. 542.
34. Stern F. // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. № 12. P. 5382.
35. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2001. Т. 35. № 1. С. 65.
36. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2019. Т. 53. № 11. С. 1471.
37. Ageeva N.N., Borisov V.B., Bronevoi I.L. et al. // Sol. Stat. Commun. 1990. V. 75. № 3. P. 167.
38. Ageeva N.N., Bronevoi I.L., Mironov V.A. et al. // Sol. Stat. Commun. 1992. V. 81. № 12. P. 969.
39. Olego D., Cardona M. // Phys. Rev. B. 1980. V. 22. № 2. P. 886.
40. Tarucha S., Kobayashi H., Horikoshi Y., Okamoto H. // Japan J. Appl. Phys. 1984. V. 23. № 7R. P. 874.
41. Райс Т., Хенсел Дж., Филлипс Т., Томас Г. Электронно-дырочная жидкость в полупроводниках. М.: Мир, 1980.
42. Теория неоднородного электронного газа / Под ред. С. Лундквиста и Н. Марча. М.: Мир, 1995.
43. Combescot M., Noziers P. // J. Phys. C. 1972. V. 5. № 17. P. 2369.
44. Blakemore J.S. // J. Appl. Phys. 1982. V. 53. № 10. P. R123.
45. Кейси Х., Паниш М. Лазеры на гетероструктурах. М.: Мир, 1981.
46. Casey Jr. H.C., Stern F. // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. № 2. P. 631.
47. Sernelius B.E. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. № 12. P. 8582.
48. Camassel J., Auvergne D., Mathieu H. // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. № 6. P. 2683.
49. Tomita A., Suzuki A. // IEEE J. Quantum Electron. 1987. V. 23. № 7. P. 1155.
50. Bronevoi I.L., Krivonosov A.N., Perel' V.I. // Sol. Stat. Commun. 1995. V. 94. № 5. P. 363.
51. Бломберген Н. // Успехи физ. наук. 1969. Т. 97. № 2. С. 307.
52. Платцман Ф., Вольф П. // Волны и взаимодействия в плазме твердого тела. М.: Мир, 1975.
53. Skerdin G., Stiens J., Vouckcx R. // J. Appl. Phys. 1999. V. 85 № 7. P. 3792.
54. Brinkman W.F., Rice T.M. // Phys. Rev. B. 1973. V. 7. № 4. P. 1508.
55. Маделунг О. // Теория твердого тела. М.: Наука, 1980.
56. Adachi S. // J. Appl. Phys. 1985. V. 58. № 3. P. R1.
57. Dreselhaus G., Kip A.F., Kittel C. // Phys. Rev. 1955. V. 98. № 2. P. 368.
58. Грундман М. // Основы физики полупроводников. М.: Физматлит, 2012.
59. Кумеков С.Е., Перель В.И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 1. С. 346.
60. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2021. Т. 55. № 2. С. 113.
61. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2021. Т. 55. № 5. С. 434.
62. Dicke R.H. // Phys. Rev. 1954. V. 93. № 1. P. 99.
63. Агеева Н.Н., Бронево́й И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2022. Т. 56. № 4. С. 394.
64. Физика полупроводниковых лазеров / Под ред. Х. Такумы. М.: Мир, 1989.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.876

### ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ДОСТИЖЕНИЯ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ В РАДИОЛОКАЦИИ И ДИСТАНЦИОННОМ ЗОНДИРОВАНИИ

© 2023 г. Б. А. Лаговский<sup>а</sup>, \*, А. Б. Самохин<sup>а</sup>

<sup>а</sup>МИРЭА – Российский технологический университет,  
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

\*E-mail: robertlag@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.

После доработки 26.05.2022 г.

Принята к публикации 02.06.2022 г.

Предложена методика обработки сигналов, позволяющая восстанавливать двумерные радиоизображения объектов с угловым сверхразрешением. Обоснован метод двойной ортогонализации, позволяющий повысить уровень достигаемого сверхразрешения. Показаны предельные возможности получения адекватных решений обратных задач при наличии априорной информации о решении.

DOI: 10.31857/S0033849423030117, EDN: IDJYGA

#### ВВЕДЕНИЕ

Повышение разрешающей способности угловых систем – современное направление их развития и совершенствования. В силу важности задачи во многих странах разрабатываются методы достижения углового сверхразрешения. Наиболее известны: метод MUSIC, ESPRIT, методы сверхвысокого разрешения, обратной свертки сигналов, фазовых взвешивающих коэффициентов, методы углового взвешивания, максимальной энтропии Берга, “теплого шума”, Борджотти–Лагунаса [1–6].

Большинство известных методов предназначено только для решения одномерных задач. Их обобщение на двумерные задачи существенно усложняет алгоритмы, повышает степень неустойчивости решений, резко повышается время обработки сигналов.

От перечисленных выше недостатков во многом свободны рассматриваемые в работе методы, названные алгебраическими. Они заключаются в том, что в области расположения источника задаются системы ортогональных функций  $\{h\}$  и представляется приближенное решение в виде конечного разложения по этим функциям [8–12].

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставим задачу получения радиоизображений исследуемых объектов  $I(\alpha, \varphi)$  с возможно большим разрешением на основе анализа полученного при сканировании сигнала  $U(\alpha, \varphi)$ . Заданной считается диаграмма направленности (ДН) антенной системы  $f(\alpha, \varphi)$  и принятый сиг-

нал  $U(\alpha, \varphi)$ . Обозначим как  $I(\alpha, \varphi)$  подлежащее определению угловое распределение амплитуды отраженного объектом сигнала в задачах активной локации или же излучаемого сигнала в задачах пассивной локации.

Тогда принятый сигнал представляет собой двумерную свертку:

$$U(\alpha, \varphi) = \int_{\Omega} f(\alpha - \alpha', \varphi - \varphi') I(\alpha', \varphi') d\alpha' d\varphi', \quad (1)$$

где  $\Omega$  – телесный угол, в котором расположен источник излучения.

Максимальное разрешение, обеспечиваемое по каждому из углов, определяется, как известно, критерием Рэлея:

$$\delta\alpha \cong \lambda/D_\alpha, \quad \delta\varphi \cong \lambda/D_\varphi, \quad (2)$$

где  $D_{\alpha, \varphi}$  – линейные размеры антенной системы по соответствующим направлениям,  $\lambda$  – используемая длина волны.

Таким образом, при прямых измерениях распределение  $I(\alpha, \varphi)$  находится с разрешением не лучше  $\delta\alpha$  и  $\delta\varphi$ . Возникает задача цифровой обработки сигнала вида (1), которая позволила бы повысить качество двумерного изображения объекта за счет превышения критерия Рэлея.

Математически задача состоит в поиске приближенного решения интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода типа двумерной свертки (1) относительно  $I(\alpha, \varphi)$  со сверхразрешением.

Поставленная задача является обратной и некорректной по Адамару, что часто приводит к получению неустойчивых и неадекватных решений.

## 2. МЕТОД ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

При решении алгебраическими методами приближенное решение представляется в виде разложения по конечной системе ортонормированных в области  $\Omega$  функций  $h_m(\alpha, \varphi)$  с неизвестными коэффициентами  $a_m$ :

$$I(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{m=1}^N a_m h_m(\alpha, \varphi), \quad (3)$$

$$U(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{m=1}^N a_m H_m(\alpha, \varphi), \quad (4)$$

$$H_m(\alpha, \varphi) = \int_{\Psi} f(\alpha - \alpha', \varphi - \varphi') h_m(\alpha', \varphi') d\alpha' d\varphi.$$

Проведенная параметризация позволила свести решение обратной задачи к определению коэффициентов  $a_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ . В подобных задачах коэффициенты обычно определяются из условий минимума среднеквадратичного отклонения — в данном случае (4) от  $U(\alpha, \varphi)$ . Тогда приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{F}\mathbf{A}, \\ \mathbf{V}_j &\equiv \int_{\Psi} U(\alpha, \varphi) H_j(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi, \\ \mathbf{F}_{j,m} &= \int_{\Psi} H_m(\alpha, \varphi) H_j(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегрирование в (5) проводится по области  $\Psi > \Omega$ , где  $\Psi$  — телесный угол, в пределах которого отношение сигнал/шум (ОСШ) в сигнале  $U(\alpha, \varphi)$  еще позволяет получать устойчивые решения.

Решение (5) дает возможность найти матрицу-столбец  $\mathbf{A}$  коэффициентов  $a_m$ , т.е. приближенное решение обратной задачи (3).

Получаемые СЛАУ (5) обычно плохо обусловлены, т.к. решается обратная некорректная задача. С увеличением  $N$ , т.е. при попытках повысить разрешение, устойчивость решений резко падает, что подтверждается экспоненциальным ростом чисел обусловленности матриц  $\mathbf{F}$  [13...15].

Существенное повышение устойчивости может быть достигнуто, если функции  $H_j(\alpha, \varphi)$  из (4) оказываются ортогональными в области  $\Psi$ . Тогда

матрица  $\mathbf{F}$  становится диагональной, и коэффициенты  $a_j$  легко найти из соотношений

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} U(\alpha, \varphi) H_j(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi = \\ &= a_j \int_{\Omega} H_j^2(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Возникает задача нахождения ортогональной системы функций  $\{H\}$  в области  $\Psi$ , которая является образом ортогональной в области расположения источника  $\Omega$  системы функций  $\{h\}$ , т.е. требуется одновременная ортогонализация двух связанных между собой систем функций.

Этому требованию удовлетворяют собственные функции ИУ. Численные исследования показали, что задача поиска собственных функций ИУ менее устойчива, чем решение основной задачи в виде (5), что делает бессмысленным использование собственных функций ИУ в (5), (6) [17, 18].

Покажем, что не только собственные функции ИУ могут удовлетворять требованию двойной ортогональности. Используем вначале какую-либо ортонормированную в области  $\Omega$  конечную систему функций  $\{h\}$ . На ее основе в соответствии с (4) получаем систему неортогональных в области  $\Psi$  функций  $\{H\}$ . Далее, составляем матрицу Грама, т.е. матрицу скалярных произведений двумерных функций  $\mathbf{S}$  со следующими элементами:

$$S_{i,j} = (H_i, H_j) = \int_{\Psi} H_i(\alpha, \varphi) H_j(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi. \quad (7)$$

Матрица  $\mathbf{S}$  симметричная, положительно определена, поэтому существует преобразование  $\mathbf{T}$ , приводящее ее к диагональному виду

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}^T \mathbf{S} \mathbf{T}, \quad (8)$$

где столбцы матрицы  $\mathbf{T}$  — собственные векторы матрицы  $\mathbf{S}$ , а  $\mathbf{T}^T$  — транспонированная матрица.

Используя найденную матрицу  $\mathbf{T}$ , введем новую систему функций  $\{G\}$ :

$$\bar{G}_j(\alpha, \varphi) = \sum_{n=1}^N T_{j,n} H_n(\alpha, \varphi), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Полученная система (9) оказывается ортогональной в области  $\Psi$ , так как скалярные произведения образуют диагональную матрицу:

$$\begin{aligned} (G_i, G_j) &= \sum_{m,n=1}^N T_{j,m} T_{i,n} \int_{\Phi} H_m(\alpha, \varphi) H_n(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi = \\ &= \sum_{m,n=1}^N T_{j,m} T_{i,n} S_{j,i} = \bar{S}_{i,j}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\bar{S}_{i,j}$  — элементы матрицы (8).

Найдем теперь систему функций  $\{g\}$ , которая порождает полученную ортогональную в области  $\Psi$  систему  $\{G\}$  (9):

$$G_j(\alpha, \varphi) = \int_{\Psi} f(\alpha - \gamma, \varphi - \chi) g_j(\gamma, \chi) d\gamma d\chi, \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Из (9) следует:

$$G_j(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1}^N T_{j,m} \int_{\Psi} f(\alpha - \gamma, \varphi - \chi) h_m(\gamma, \chi) d\gamma d\psi =$$

$$= \int_{\Psi} f(\alpha - \gamma, \varphi - \chi) \left( \sum_{m=1}^N T_{j,m} h_m(\gamma, \chi) \right) d\gamma d\chi. \quad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), получим

$$g_j(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1}^N T_{m,j} h_m(\alpha, \varphi). \quad (13)$$

Найденная система (13) оказывается ортогональной в области расположения источника  $\Omega$ , так как в силу ортогональности функций  $h_m(\alpha, \varphi)$  и ортогональности собственных векторов матрицы  $S$ , образующих матрицу  $T$ , получим:

$$\int_{\Psi} g_i(\gamma, \Phi) g_j(\Phi) d\gamma d\Phi = \sum_{m,n=1}^N T_{j,m} T_{i,n} \times$$

$$\times \int_{\Psi} h_m(\gamma, \Phi) h_n(\gamma, \Phi) d\gamma d\Phi =$$

$$= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \mu_m, & i = j, \end{cases} \quad \mu_j = \sum_{m=1}^N T_{j,m}^2. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что искомая система функций  $\{g\}$  определяется тем же линейным преобразованием (9), что и  $\{G\}$ .

В итоге построена новая система из  $N$  функций  $g_m(\alpha, \varphi)$ , ортогональная в области  $\Omega$ , которая порождает ортогональную систему функций  $G_m(\alpha, \varphi)$  в области  $\Psi$ .

Используя полученную систему  $G_m(\alpha, \varphi)$ , находим принятый сигнал

$$U(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{m=1}^N C_m G_m(\alpha, \varphi) \quad (15)$$

и коэффициенты разложения

$$C_m = \frac{1}{Q_m} \int_{\Psi} U(\alpha, \varphi) G_m(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi, \quad (16)$$

$$Q_m = \int_{\Psi} G_m(\alpha, \varphi)^2 d\alpha d\varphi.$$

Принятый сигнал (15), используя (1), (12), (14), можно также представить и в несколько ином виде, основанном на первоначальной системе  $\{h\}$ :

$$U(\alpha, \varphi) = \int_{\Psi} f(\alpha - \gamma, \varphi - \Phi) I(\gamma, \Phi) d\gamma d\Phi,$$

$$U(\alpha, \varphi) = \sum_{m=1}^N C_m G_m(\alpha, \varphi) =$$

$$= \int_{\Psi} f(\alpha - \gamma, \varphi - \Phi) \left( \sum_{j=1}^N C_j h_j(\gamma, \Phi) \right) d\gamma d\Phi. \quad (17)$$

Приравнивая подынтегральные выражения в (17), получим приближенное решение рассматриваемой обратной задачи в виде разложения и по введенной новой системе функций, и по исходной системе:

$$I(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{j=1}^N C_j g_j(\alpha, \varphi), \quad (18)$$

$$I(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{j=1}^N r_j h_j(\alpha, \varphi), \quad r_j = \sum_{m=1}^N C_m T_{m,j}.$$

В итоге новые системы функций (9) и (13) позволяют одновременно представить искомое решение (3) и исследуемый сигнал  $U(\alpha, \varphi)$  в виде разложений по ортогональным функциям, что упрощает анализ задачи, повышает устойчивость численных решений и, в конечном счете, позволяет повысить достигаемую степень сверхразрешения.

В качестве систем двумерных функций удобно использовать разделимые системы, т.е. системы функций, для которых возможно представление

$$h(\alpha, \varphi) = h^\alpha(\alpha) h^\varphi(\varphi),$$

так как быстродействие алгоритмов в этом случае заметно выше. Тогда получаем

$$U(\alpha, \varphi) = \sum_{m,n=1}^N a_{m,n} \Phi_{n,m}(\alpha, \varphi), \quad (19)$$

$$\Phi_{n,m}(\alpha, \varphi) = \int_{\Omega} f(\alpha - \alpha', \varphi - \varphi') h_n^\alpha(\alpha') h_m^\varphi(\varphi) d\alpha' d\varphi',$$

и, обозначив

$$L_{j,k} = \int_{\Psi} U(\alpha, \varphi) \Phi_{j,k}(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi,$$

$$R_{n,m,j,k} = \int_{\Omega} \Phi_{n,m}(\alpha, \varphi) \Phi_{j,k}(\alpha, \varphi) d\alpha d\varphi,$$

приходим к матричному уравнению

$$L_{j,k} = \sum_{m,n=1}^N a_{m,n} R_{n,m,j,k} \quad (20)$$

относительно матрицы коэффициентов  $a_{m,n}$ , решение которого обеспечивает решение всей обратной задачи:

$$I(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{m,n=1}^N a_{m,n} h_n^\alpha(\alpha) h_m^\varphi(\varphi). \quad (21)$$

Разделимые системы удобно использовать при анализе сигналов, получаемых АР. Для плоской АР ДН  $f(\alpha, \varphi)$  может быть представлена как  $f(\alpha, \varphi) = f^\alpha(\alpha) f^\varphi(\varphi)$ , и формулы (19)–(21) упрощаются, в частности

$$\Phi_{n,m}(\alpha, \varphi) = \Phi_n^\alpha(\alpha) \Phi_m^\varphi(\varphi), \quad (22)$$

тогда процедуру двойной ортогонализации можно проводить отдельно для каждой из систем функций  $\Phi_n^\alpha(\alpha)$  и  $\Phi_m^\varphi(\varphi)$  по описанной выше схеме.

Для этого следует представить область  $\Psi$  в виде некоторой новой прямоугольной области углов

$$\Psi(\alpha, \varphi) = \Psi_\alpha(\alpha, \varphi) \Psi_\varphi(\alpha, \varphi),$$

что всегда возможно, например, за счет расширения или же некоторого сужения первоначальной области используемых при представлении сигнала  $U(\alpha, \varphi)$  углов  $\Psi$ .

Найденная ортогональная система  $G_m(\alpha)G_n(\varphi)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  позволяет выразить принятый сигнал в виде

$$U(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{m,n} G_m(\alpha) G_n(\varphi), \quad (23)$$

и найти коэффициенты разложения без решения матричного уравнения (20):

$$\begin{aligned} C_{m,n} &= \frac{1}{Q_{m,n}} \int_{\Psi_\varphi} G_n(\varphi) \int_{\Psi_\alpha} U(\alpha, \varphi) G_m(\alpha) d\alpha d\varphi, \\ Q_{m,n} &= \int_{\Psi_\alpha} G_m(\alpha)^2 d\alpha \int_{\Psi_\varphi} G_n(\varphi)^2 d\varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда решение обратной задачи будет иметь вид

$$I(\alpha, \varphi) \equiv \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{m,n} g_m(\alpha) g_n(\varphi), \quad (25)$$

где  $g_m(\alpha)g_n(\varphi)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  – система, порождающая  $G_m(\alpha)G_n(\varphi)$ . Функции  $g_m(\alpha)$  и  $g_n(\varphi)$  находятся так же, как и в одномерном случае.

Алгебраические методы предполагают итерационный процесс решения при последовательном увеличении числа используемых функций  $N$ . На каждом шаге итерационного процесса системы  $\{g\}$  и  $\{G\}$  изменяются в соответствии с (7)–(9) и (13), хотя исходная система  $\{h\}$  остается неизменной. Эта особенность алгоритма незначительно сказывается на времени работы программы, так как основные расчеты, касающиеся СЛАУ, выполня-

ются с помощью стандартных быстродействующих и хорошо отработанных алгоритмов.

Решение каждой из рассматриваемых задач начинается с выбора первоначальной системы функций  $\{h\}$  для представления решения. Выбор следует основывать либо на априорной информации об источнике сигналов, либо на разумных предположениях о его характеристиках. Использование априорной информации об источнике сигналов позволяет, кроме того, ввести в задачу дополнительные условия в виде уравнений и неравенств, а также уменьшить прогнозируемые размеры области расположения источника  $\Omega$ , что повышает устойчивость решений [16–18].

В процессе проведения итераций возникает дополнительная интересная и полезная возможность: выявляется новая, не заданная ранее, т.е. “скрытая” информация об источнике сигналов. На каждом шаге итерационного процесса полученная “скрытая” информация позволяет дополнять решаемые системы (5) или (7)–(10) новыми условиями и ограничениями. Более того, выявленная новая информация может показать, что для лучшего описания источника следует изменить и первоначально выбранную систему ортогональных функций  $\{h\}$ .

Таким образом, предложенные алгебраические методы позволяют учитывать предварительную информацию о решении и, последовательно увеличивая число используемых функций, приближаться к предельной для каждой задачи степени углового сверхразрешения [19, 20].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассмотрим ряд примеров применения описанных методов при решении обратных задач. В качестве антенной системы была выбрана плоская антенная решетка из  $21 \times 21$  элементов с заданной ДН  $f(\alpha, \varphi)$ . Источник сигналов в виде различных двумерных функций  $I(\alpha, \varphi)$  был задан в прямоугольной области

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha, \varphi) &= \Omega_\alpha(\alpha) \Omega_\varphi(\varphi), \\ \alpha &\in (-\theta_{0,5}, \theta_{0,5}) \text{ и } \varphi \in (-\theta_{0,5}, \theta_{0,5}), \end{aligned}$$

где  $\theta_{0,5}$  – ширина ДН по половинной мощности. Границы области  $\Psi$  для используемых при обработке значений  $U(\alpha, \varphi)$  определялись величинами углов  $(\alpha, \varphi)$ , при которых мощность принимаемого сигнала снижалась в два раза по сравнению с максимальным значением.

Далее решалась обратная задача – восстановление  $I(\alpha, \varphi)$  посредством решения СЛАУ (5) или (7)–(10).

*Задача 1.* Априори было известно, что источник сигнала описывается гладкой функцией  $I(\alpha, \varphi)$  с относительно небольшими значениями

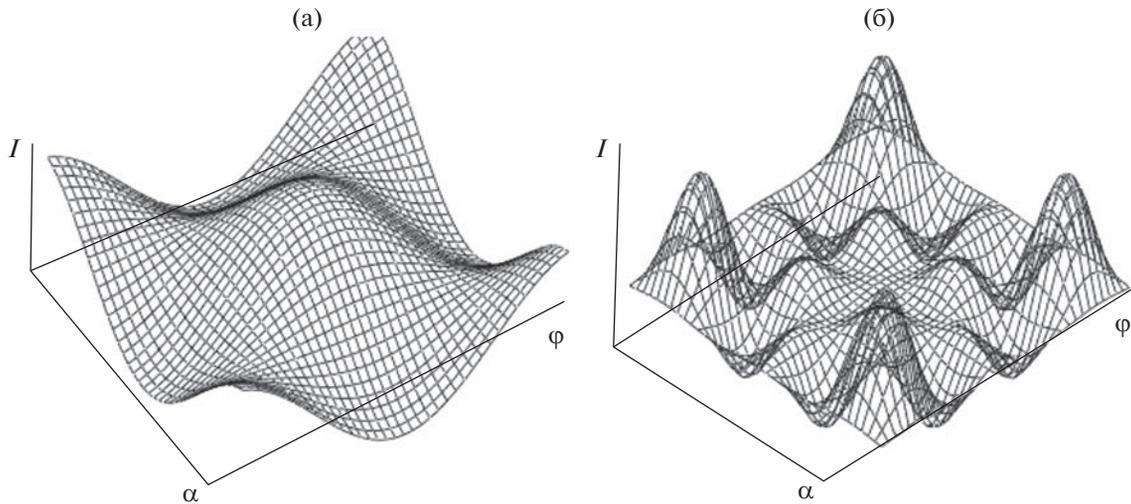


Рис. 1.

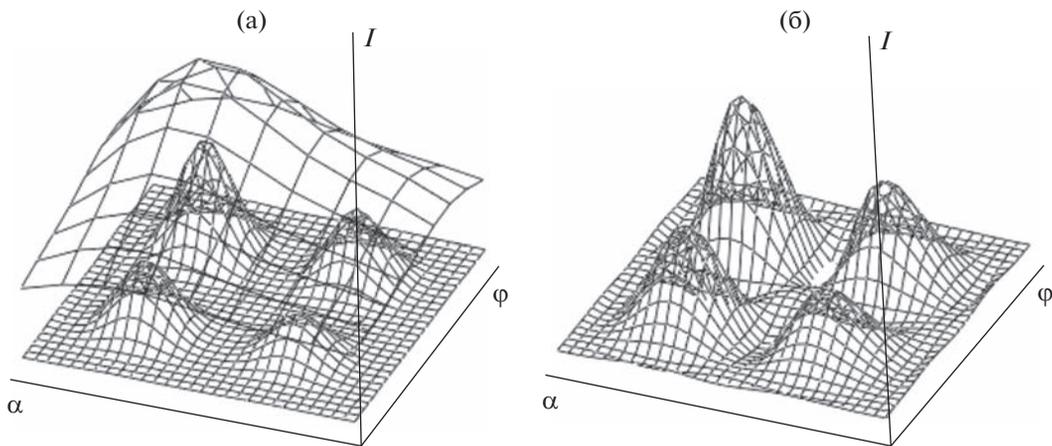


Рис. 2.

градиента. Это предопределило использование тригонометрических функций в качестве начальной системы функций  $\{h\}$ .

На рис. 1а приведена одна из функций системы  $\{h\}$ :

$$h_{1,1}(\alpha, \varphi) = \cos(2\pi\alpha/\Omega_\alpha) \cos(2\pi\varphi/\Omega_\varphi),$$

а на рис. 1б ее модификация – функция  $g_{1,1}(\alpha, \varphi)$  из системы  $\{g\}$ , полученная в результате выполнения процедуры двойной ортогонализации (13) для системы функций вида (22).

На всех рисунках в горизонтальной плоскости по осям отложены углы  $\alpha, \varphi \in (-\theta_{0,5}, \theta_{0,5})$ . За нулевое принято направление нормали к плоскости АР.

На рис. 2а в виде редкой сетки показаны значения принятого сигнала  $U(\alpha, \varphi)$ . На рис. 2б приведено решение обратной задачи при использовании метода двойной ортогонализации. Решение в целом хорошо передало распределение  $I(\alpha, \varphi)$ , хотя и с небольшими неточностями в виде расши-

ренных по сравнению с истинными областями с повышенными значениями амплитуды излучаемого сигнала.

Решение той же задачи, полученное на основе (5), т.е. без двойной ортогонализации, заметно больше расширило упомянутые выше области. Кроме того, появились ложные источники сигнала, и истинный источник с минимальной амплитудой на их фоне стал неотличим от ложных.

**Задача 2.** На рис. 3а показан заданный в области  $\Psi$  принимаемый сигнал – сетчатая поверхность, и искомый истинный источник сигнала  $I(\alpha, \varphi)$  в виде совокупности четырех малоразмерных отдельных источников в области  $\Omega \in \Psi, \alpha, \varphi \in (-\theta_0, \theta_0), \theta_0 = \theta_{0,5}/2$ .

Поиск  $I(\alpha, \varphi)$  строился без использования какой-либо априорной информации. Вначале были применены системы тригонометрических функций. Решение на их основе в области  $\Psi$  с максимально достигнутым разрешением не намного изменило

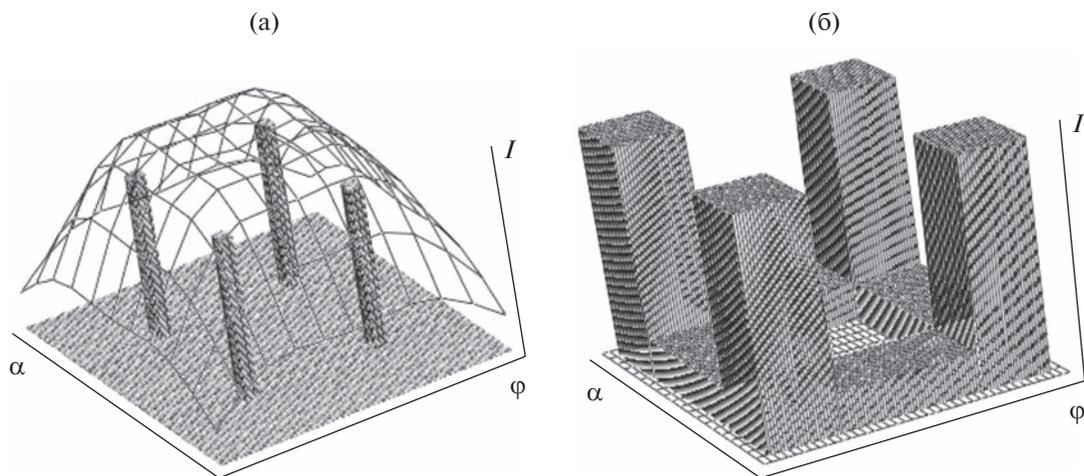


Рис. 3.

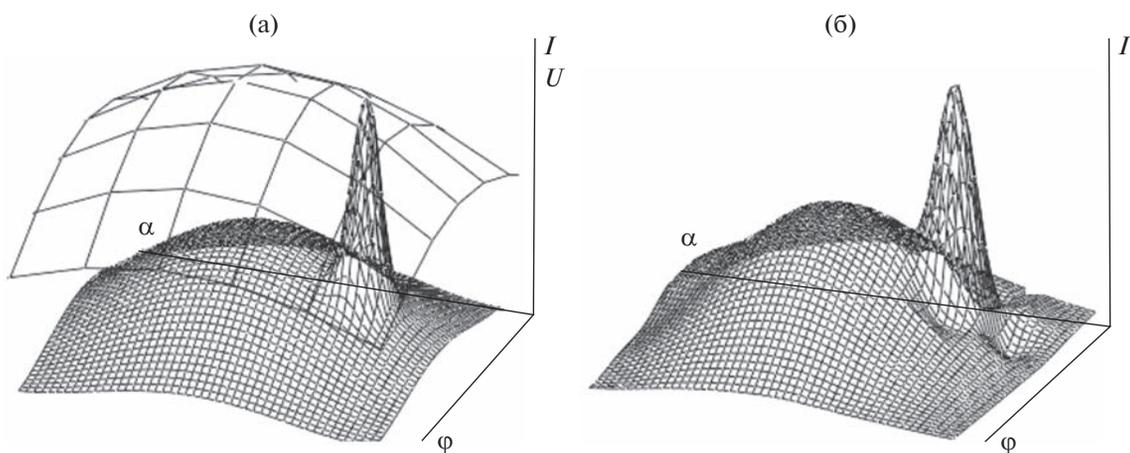


Рис. 4.

вид решения по сравнению с исходным  $U(\alpha, \varphi)$ . Это означало, что либо искомая функция  $I(\alpha, \varphi)$  действительно имеет плавный вид, близкий к полученному, либо имеется ряд близко расположенных малоразмерных источников со значительными значениями амплитуд отражаемого сигнала.

Для уточнения ситуации была использована система ступенчатых функций. Ее применение позволило ограничить область расположения источника до области  $\Omega$ , где  $\alpha \in (-\theta_1, \theta_1)$  и  $\varphi \in (-\theta_1, \theta_1)$ ,  $\theta_1 = \theta_0/2$ , т.е. в два раза уменьшить оценку ее размеров и далее получить решение, показанное на рис. 3б. Решение правильно локализовало четыре области с большими значениями  $I(\alpha, \varphi)$ . При этом появились ложные цели с небольшой амплитудой. Достигнутое угловое разрешение оказалось равным  $1/4\theta_{0.5}$ , т.е. в четыре раза превысило критерий Рэлея.

Решение без двойной ортогонализации также позволило локализовать четыре области, но ампли-

туды ложных источников оказались существенно больше — около 0.5 от амплитуд истинных, что при использовании порогового напряжения при регистрации сигналов значительно снижает вероятность правильного обнаружения целей в условиях шумов и помех. Кроме того, подобный уровень ошибок не позволяет восстанавливать радиоизображения групповых целей, состоящих из малоразмерных объектов с заметно различающимися амплитудами отраженного сигнала.

**Задача 3.** Заранее было известно, что источник сигнала описывается гладкой функцией  $I(\alpha, \varphi)$  с небольшими значениями градиента и, возможно, имеется небольшой участок с резко выделяющимся значением  $I(\alpha, \varphi)$ .

На рис. 4а приведено истинное искомое распределение  $I(\alpha, \varphi)$  в виде мелкоячеистой поверхности и заданные значения принятого сигнала  $U(\alpha, \varphi)$  в виде редкой сетки. Предварительная информация предопределила использование систем  $\{h\}$  на основе вейвлетов. Применение двумерных

вейвлетов за счет их масштабирования и сдвига по осям дает возможность описать и общий вид распределения  $I(\alpha, \varphi)$ , и его локальные характеристики.

При построении итерационного решения обратной задачи применялись МНАТ-вейвлеты. На рис. 4б приведены результаты восстановления изображения источника. Сравнение истинного и восстановленного изображения показывает высокое качество полученного решения. Некоторые искажения проявились в виде расширенной на 5...10% области с большими значениями  $I(\alpha, \varphi)$  и в виде небольших плавных осцилляций вокруг истинного значения  $I(\alpha, \varphi)$  в остальной области.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные методы обработки двумерных сигналов на основе двойной ортогонализации систем функций обеспечивают превышение критерия Рэлея в три—семь раз, а иногда и более, и локализацию источников сигналов с точностью  $\theta_{0,5}/4 \dots \theta_{0,5}/8$ . Выбор системы функций для представления решения следует осуществлять на основе априорной информации о характеристиках источника сигналов. Эффективным оказывается использование новой информации об источнике, выявляемой по ходу итерационного процесса поиска решения.

Представленные методы интеллектуальной обработки сигналов могут быть использованы системами в оптическом и инфракрасном диапазонах длин волн, в астрономии и радиоастрономии, в гидролокации, при решении задач распознавания образов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 23-29-00074).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stoica P., Sharman K.C.* // IEEE Trans. 1990. V. ASSP-38. № 7. P. 1132.
2. *Zeng Z., Dang X., Li Y. et al.* // IEEE/RSJ Intern. Conf. Intelligent Robots and Systems (IROS). Prague, Czech Republic. September 2021. P. 5456.
3. *Herman M.A., Strohmer T.* // IEEE Trans. 2009. V. SP-57. № 6. P. 2275.
4. *Waweru N.P., Konditi D.B., Langat P.K.* // Intern. J. Electrical Computer Energetic Electronic and Communication Engineering, 2014. V. 8. № 1. P. 209.
5. *Yuebo Zha, Yulin Huang, Jianyu Yang* // Progress in Electromagnetics Research B. 2016. V. 65. P. 35.
6. *Ting Yang, Hongyin Shi, Jianwen Guo* // Intern. J. Remote Sensing. 2021. V. 42. Iss. 21. P. 8185.
7. *Морс Ф.М., Феубах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
8. *Lagovsky B., Samokhin A., Samokhina A.* // Proc. Electromagnetics in Adv. Appl. (ICEAA), Torino, Italy, 2015. P. 363.
9. *Лаговский Б.А.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 9. С. 853.
10. *Lagovsky B.* // Prog. Electromagnetics Research Symp. PIERS Proc. Moscow, 2012. P. 993.
11. *Lagovsky B.* // Prog. Electromagnetics Research Symp. PIERS Proc. Moscow, 2012. P. 989.
12. *Lagovsky B.* // 24th Int. Crimean Conf. Microwave and Telecommunication Technology, Conf. Proc., Sevastopol, 2014. P. 1193.
13. *Lagovsky B.* // Prog. Electromagnetics Research Symp., PIERS Proc., Moscow, 2009. P. 1637.
14. *Куликов Г.В., Нгуен Ван Зунг* // Рос. технол. журн. 2018. Т. 6. № 6. С. 5.
15. *Lagovsky B.A., Samokhin A.B., Shestopalov Y.V.* // IEEE Asia-Pacific Conf. Antennas and Propagation (APCAP), India, Delhi, 5–8 Aug. P. 114.
16. *Лаговский Б.А., Самохин А.Б.* // Физические основы приборостроения. 2019. Т. 8. № 4. С. 16.
17. *Лаговский Б.А., Чикина А.Г.* // Успехи совр. радиоэлектроники. 2020. № 1. С. 69.
18. *Лаговский Б.А., Самохин А.Б., Самохина А.С.* // Успехи совр. радиоэлектроники. 2014. № 8. С. 23.
19. *Лаговский Б.А., Рубинович Е.Я.* // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22. № 7. С. 349.
20. *Lagovsky B., Rubinovich E.* // Advances in Systems Sci. Appl. 2021. V. 21. № 2. P. 104.

## ПАРАМЕТРЫ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ФЛУКТУАЦИЙ КАЖУЩЕГОСЯ ЦЕНТРА ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ВТУЛКИ ВИНТА ВЕРТОЛЕТА ПРИ ЕЕ РАДИОЛОКАЦИОННОМ НАБЛЮДЕНИИ

© 2023 г. М. А. Степанов\*

*Новосибирский государственный технический университет,  
просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073 Российская Федерация*

*\*E-mail: m.stepanov@corp.nstu.ru*

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

После доработки 02.06.2022 г.

Принята к публикации 13.06.2022 г.

Рассмотрены свойства угловых шумов радиолокационных отражений от втулки винта. На основе многоточечной геометрической модели втулки винта получены аналитические выражения, позволяющие рассчитать параметры плотности распределения вероятности угловых шумов для плоскостей азимут и угол места для втулки однолопастного винта при произвольном угле поворота втулки. Соотношения, полученные для втулки с одной лопастью, обобщены на случай втулки винта с произвольным количеством лопастей. Показано, что угловой шум втулки представляет собой случайный процесс с периодически изменяющимися параметрами. Теоретические результаты подтверждены математическим моделированием.

DOI: 10.31857/S0033849423030154, EDN: IDSVEA

### ВВЕДЕНИЕ

Современные радиолокационные станции (РЛС) измеряют и оценивают большое количество параметров электромагнитного поля, рассеянного радиолокационным объектом. По результатам их оценки определяются такие параметры, как дальность до объекта, скорость сближения, угловое положение объекта, размер и форма объекта.

На различных этапах разработки РЛС, а также при выполнении их модернизации широко используется моделирование [1, 2]. Полнота и достоверность моделирования во многом определяются номенклатурой и проработанностью математических моделей радиолокационных объектов [3]. Таким образом, актуальна задача разработки новых и уточнения существующих моделей радиолокационных объектов.

Одним из классов радиолокационных объектов, представляющим существенный интерес при моделировании, является летательный аппарат с вращающимися лопастями. К этому классу объектов можно отнести вертолеты, беспилотные летательные аппараты (например, quadro- и октакоптеры).

Известно, что эхосигнал от таких объектов формируется за счет отражений от фюзеляжа, лопастей и втулки винта и является нестационарным [4]. При моделировании отражений от них

широко используются геометрические модели, представляющие собой совокупность независимых точек, имеющих геометрическую конфигурацию, совпадающую с реальным объектом, каждая из которых излучает сигналы, эквивалентные отражениям от замещаемого фрагмента объекта [5]. Например, при моделировании отражений от вертолета для РЛС X-диапазона фюзеляж составляется из десятков точек [6], втулка и каждая из лопастей требуют сотен точек [7]. Это существенно ограничивает применимость таких моделей при формировании эхосигнала в реальном масштабе времени.

Кроме того, реальным радиолокационным объектам присуще явление углового шума – флуктуации фазового фронта отраженной электромагнитной волны, вызванные многоточечной структурой радиолокационного объекта. Угловой шум – важная характеристика, позволяющая определить угловое положение и угловые размеры отражающего объекта [8, 9]. Как правило, он характеризуется плотностью распределения вероятности (ПРВ) и спектральной плотностью мощности [10, 11].

Плотность распределения вероятности характеризует угловые размеры объекта, и для

каждой угловой координаты определяется выражением [10]

$$W(\xi) = \frac{\mu}{2(1 + \mu^2(\xi - m)^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где  $\xi$  – обобщенная координата (азимут или угол места);  $m$  – математическое ожидание угловых шумов по рассматриваемой обобщенной координате  $\xi$ ;  $\mu$  – величина, характеризующая ширину распределения по рассматриваемой обобщенной координате  $\xi$ .

Спектральные свойства угловых шумов характеризуют скорость флуктуаций кажущегося центра излучения и определяются параметрами взаимного движения объекта и РЛС.

Анализ статистических свойств угловых шумов объектов, отражающих нестационарный эхосигнал, не проводился.

В то же время в литературе отмечается, что нестационарность отражений от вертолетов приводит к ошибкам измерения их координат и сопровождения [7]. Это свидетельствует о том, что формирование углового шума (по сути, воспроизведение пространственной конфигурации радиолокационного объекта и ее изменение во времени) при проведении моделирования таких объектов является значимым.

Традиционным подходом к анализу отражений от сложных радиолокационных объектов является декомпозиция этого объекта на составные части, раздельный анализ отражений для каждой из этих частей и последующее обобщение полученных результатов [6, 12, 13]. Как отмечалось ранее, декомпозиция вертолета производится на три элемента: фюзеляж, лопасти и втулка.

Объектом исследования данной работы являются параметры угловых шумов втулки вертолета. Таким образом, цель работы – определить зависимость параметров плотности распределения вероятности угловых шумов втулки винта вертолета от угла поворота втулки.

## 1. МНОГОТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ВТУЛКИ ВИНТА

Втулка винта представляет собой геометрически сложный объект. В ряде источников предлагается для моделирования не воспроизводить полностью конфигурацию втулки, а использовать геометрическую модель, составленную из набора отражателей, распределенных в пространстве с заданной плотностью вероятности по координатам

там радиус ( $f_r(r)$ ), азимут ( $f_\theta(\theta)$ ) и высота ( $f_z(z)$ ) [7, 14, 15]:

$$\begin{cases} f_r(r) = \frac{2}{r_{\text{втул}}} \exp(-2r/r_{\text{втул}}); \\ f_\theta(\theta) = A \text{Unif}\left[\theta_{\text{лоп}} - \frac{\pi}{N}; \theta_{\text{лоп}} + \frac{\pi}{N}\right] + \\ + B \text{Norm}[\theta_{\text{лоп}} + \beta; \Delta\theta]; \\ f_z(z) = \text{Unif}\left[-\frac{h_{\text{втул}}}{2}; \frac{h_{\text{втул}}}{2}\right], \end{cases} \quad (2)$$

где  $r_{\text{втул}}$ ,  $h_{\text{втул}}$  – радиус и высота втулки;  $\theta_{\text{лоп}}$  – угловое положение лопасти в начальный момент времени;  $\beta$  – угол поворота лопасти относительно начального момента времени;  $\Delta\theta$  – угловая ширина порядка 1 град;  $N$  – количество лопастей винта;  $\text{Unif}[a, b]$  – равномерное распределение в диапазоне от  $a$  до  $b$ ;  $\text{Norm}[m, \sigma]$  – нормальное распределение с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ ;  $A$  и  $B$  – весовые коэффициенты, определяющие распределение отражателей во втулке (их сумма должна быть равна единице).

Параметры  $A$  и  $B$  могут изменяться для моделирования втулок различных летательных аппаратов и различных видов (шарнирные, упругие, жесткие) [7]. Во втулке выделяют две группы отражающих элементов. Во-первых, элементы, имеющие цилиндрическую симметрию (шайба, крышка ступицы, вал ротора). Во-вторых, элементы, сосредоточенные вокруг азимутального положения лопасти несущего винта (управляющие стержни, основания лопастей). Например, из (2) видно, что увеличение параметра  $B$  приведет к концентрации отражателей втулки в области крепления лопастей.

Начало цилиндрической системы координат совмещено с геометрическим центром втулки. Ось  $Oz$  сонаправлена с осью втулки. Как уже отмечалось, для моделирования втулки необходимо не менее ста точек на каждую область крепления лопасти винта [7].

Каждая из точек втулки отражает сигнал с доплеровским сдвигом, пропорциональным скорости сближения точки и РЛС. Амплитуда отраженного сигнала для всех точек геометрической модели втулки полагается одинаковой. Начальные фазы случайны и распределены равномерно в интервале  $0 \dots 360$  град. В [7, 14, 15] отмечается, что временная и спектральная реализации эхосигнала от такой геометрической модели соответствует характеристикам реальной втулки. В данной работе применим эту модель для расчета параметров ПРВ углового шума отражений от втулки винта.

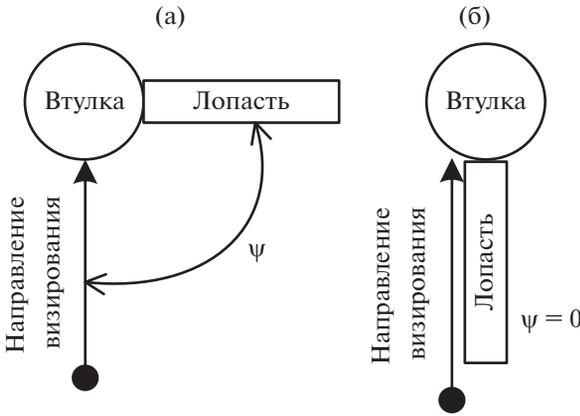


Рис. 1. Варианты визирования втулки и лопастей винта [16]: а – визирование по нормали к лопасти; б – визирование вдоль лопасти.

2. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ПРВ ВТУЛКИ ВИНТА

Зная многоточечную модель втулки, можно рассчитать параметры ПРВ угловых шумов для угловых координат азимут и угол места. Для этого перейдем в нормированные координаты. По оси  $Oz$  проведем нормировку к половине высоты втулки  $h_{втул}/2$ . По оси  $Or$  проведем нормировку к радиусу втулки  $r_{втул}$ . Таким образом, в плоскостях азимут и угол места координаты отражателей будут принимать значения в диапазоне  $[-1; 1]$ .

Как видно из (2), для плоскости угол места наблюдается равномерное распределение отражателей в пространстве. Параметры ПРВ угловых шумов для радиолокационного объекта с таким распределением отражающей способности в пространстве определены в [10]:  $m_\theta = 0, \mu_\theta = \sqrt{3}$ .

Рассчитаем параметры ПРВ угловых шумов втулки винта для плоскости азимута по приведенным в [10] соотношениям:

$$m = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi F_R(\xi) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} F_R(\xi) d\xi}; \tag{3}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} F_R(\xi) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} (\xi - m)^2 F_R(\xi) d\xi}}, \tag{4}$$

где  $F(\xi)$  – функция, определяющая распределение плотности интенсивности отражения вдоль рассматриваемой обобщенной координаты  $\xi$  (азимут или угол места).

Для горизонтальной плоскости функция  $F_R(\theta)$  определяется направлением визирования втулки винта и количеством лопастей винта. Рассмотрим

изменение функции  $F_R(\theta)$  на примере винта с одной лопастью. При визировании втулки по нормали к лопасти винта (рис. 1а [16]) функция распределения отражателей геометрической модели определяется первым выражением системы (2).

Функция  $F_\alpha(r)$ , определяющая плотность распределения интенсивности отражения в азимутальной плоскости, как видно из второго выражения системы (2), состоит из двух компонент (слагаемых). Первое слагаемое определяется отражателями, равномерно распределенными по всем углам вокруг оси втулки. Оно не зависит от угла поворота втулки. По радиальной компоненте отражатели распределены по экспоненциальному закону, симметрично относительно оси втулки. Второе слагаемое определяет концентрацию отражающих точек вблизи лопасти. При вращении втулки винта происходит изменение конфигурации отражающих точек в пространстве. При направлении визирования, нормальном к линии расположения лопастей, угловой размер максимален. Визирование втулки по направлению, параллельном лопасти (рис. 1б [16]), приводит к концентрации отражателей втулки в центре двухточечной модели – угловой размер минимален.

Таким образом, функция, характеризующая плотность распределения отражающей способности по радиальной координате при произвольном угле поворота втулки винта, определяется выражением

$$F_\alpha(r) = \frac{2B}{L} \exp\left(\frac{-2|r|}{L}\right) + \begin{cases} \frac{2A}{L} \exp\left(\frac{-2r}{L \sin(\psi)}\right), & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}, \tag{5}$$

где  $\psi$  – угол между лопастью и направлением визирования (см. рис. 1).

Расчет математического ожидания углового шума в плоскости азимута по (3), с учетом нормировки геометрической модели к радиусу втулки дает:

$$m_\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} 2rB \exp(-2|r|) dr + \int_0^{\infty} 2rA \exp\left(\frac{-2r}{\sin(\psi)}\right) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} 2B \exp(-2|r|) dr + \int_0^{\infty} 2A \exp\left(\frac{-2r}{\sin(\psi)}\right) dr} = \tag{6}$$

$$= \frac{A \sin^2(\psi)}{2A \sin(\psi) + 2B}.$$

Второй интеграл в числителе (6) имеет пределы  $[0; \infty]$ . Эти пределы соответствуют  $\psi \in [0; \pi]$  (лопасть располагается справа относительно точки наблюдения). При  $\psi \in (-\pi; 0)$  (лопасть располага-

ется слева от точки наблюдения) пределы интегрирования сменяются на  $[-\infty; 0]$ . В этом случае при вычислении (6) перед переменной  $A$  появится знак минус. Выражение для определения математического ожидания угловых шумов втулки однолопастного винта можно записать в общем виде:

$$m_\alpha = \frac{\text{sign}(\psi) A \sin^2(\psi)}{2\text{sign}(\psi) A \sin(\psi) + 2B}, \quad (7)$$

где

$$\text{sign}(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \in [0; \pi]; \\ -1, & \psi \in (-\pi; 0). \end{cases}$$

Рассмотрим выражение (4) для втулки однолопастного винта. С учетом нормировки координат точек геометрической модели подставим  $F_\alpha(r)$  в (4):

$$\mu_\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(r) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} (r - m_\alpha)^2 F_\alpha(r) dr} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} 2B \exp(-2|r|) dr + \int_0^{\infty} 2A \exp\left(\frac{-2r}{\sin(\psi)}\right) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} 2(r - m_\alpha)^2 B \exp(-2|r|) dr + \int_0^{\infty} 2A (r - m_\alpha)^2 \exp\left(\frac{-2r}{\sin(\psi)}\right) dr}.$$

Вычислив все интегралы, получим выражение, определяющее параметр  $\mu_\alpha(\psi)$  [16]:

$$\mu_\alpha(\psi) = \sqrt{\frac{2B + 2A \sin(\psi)}{B + 2Bm_\alpha^2 + 0.5A \sin^3(\psi) - m_\alpha A \sin^2(\psi) + m_\alpha^2 A \sin(\psi)}}. \quad (8)$$

Соотношения (7) и (8), определяющие параметры ПРВ угловых шумов в плоскости азимута для втулки винта с одной лопастью не сложно обобщить на случай винта с произвольным числом лопастей. Для этого запишем выражение, определяющее плотность распределения интенсивности отражения втулки такого винта, обозначив  $\psi_i$  – угол визирования  $i$ -й лопасти:

$$F_\alpha(r) = \frac{2B}{L} \exp\left(\frac{-2|r|}{L}\right) + \sum_{i=1}^N \begin{cases} \frac{2A}{L} \exp\left(\frac{-2r}{L \sin(\psi_i)}\right), & r \geq 0; \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

С учетом этого параметры ПРВ угловых шумов в плоскости азимута для втулки многолопастного винта определяются выражениями

$$m_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N (\text{sign}(\psi_i) A \sin^2(\psi_i))}{\sum_{i=1}^N (2 \text{sign}(\psi_i) A \sin(\psi_i)) + 2B}, \quad (9)$$

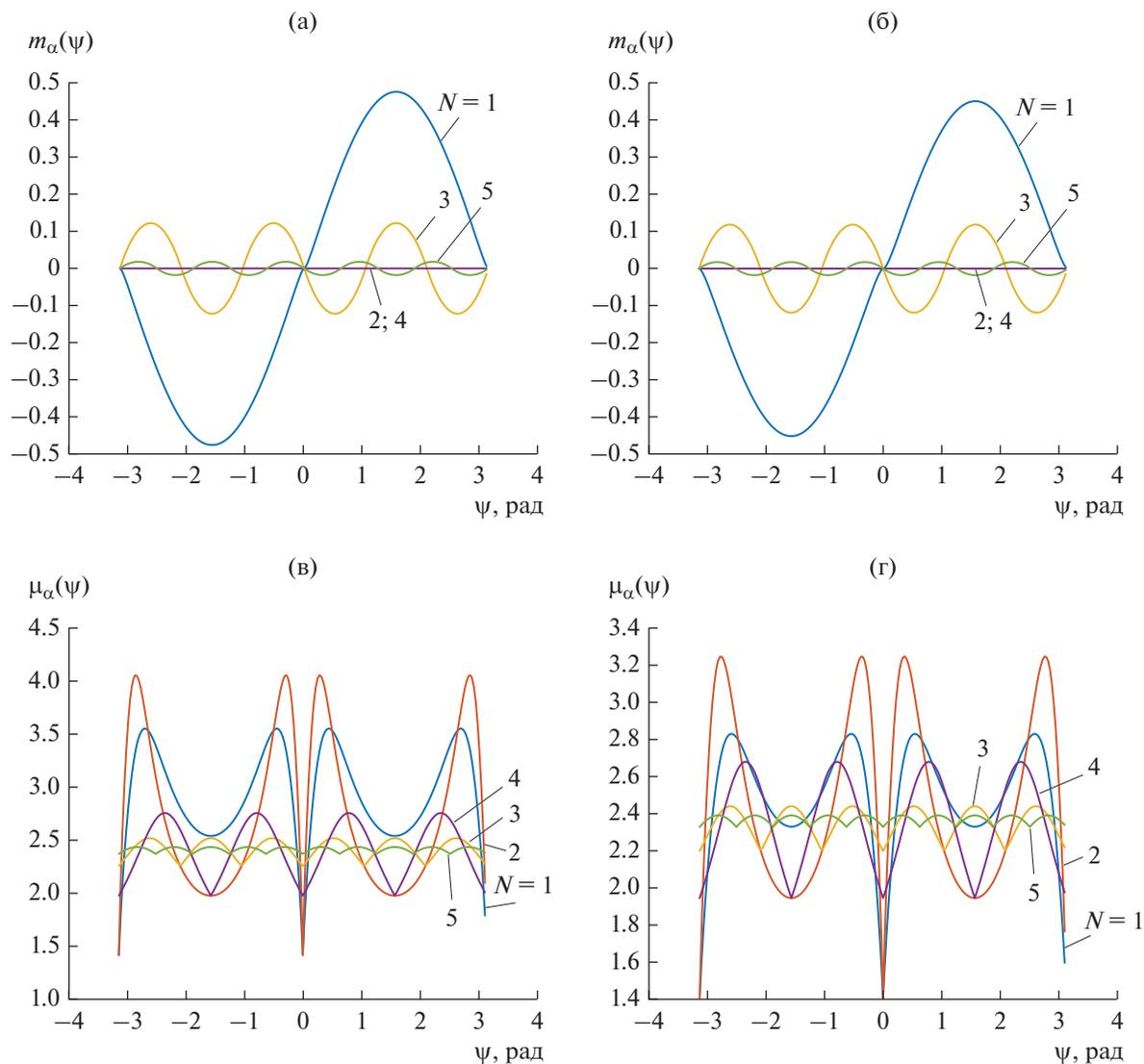
$$\mu_\alpha(\psi) = \sqrt{\frac{2B + \text{sign}(\psi_i) \sum_{i=1}^N 2A \sin(\psi_i)}{B + 2Bm_\alpha^2 + \text{sign}(\psi_i) \sum_{i=1}^N (0.5A \sin^3(\psi_i) - m_\alpha A \sin^2(\psi_i) + m_\alpha^2 A \sin(\psi_i))}}. \quad (10)$$

### 3. АПРОБАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

По выражениям (9) и (10) произведем расчет параметров ПРВ угловых шумов в плоскости азимута в зависимости от угла визирования. Расчет произведен для втулок с количеством лопастей от 1 до 5. Для всех втулок полагалось, что лопасти расположены эквидистантно по углу с шагом  $2\pi/N$ . Расчет проведен для двух втулок, различающихся значениями параметров  $A$  и  $B$ . Результа-

ты расчета зависимости параметров ПРВ угловых шумов от угла визирования приведены на рис. 2а, 2в для значений  $A = 0.75$ ,  $B = 0.25$  и на рис. 2б, 2г для  $A = 0.9$ ,  $B = 0.1$ .

Результаты расчетов подтверждены математическим моделированием. При этом была сформирована многоточечная геометрическая модель втулки. Точки модели распределены в пространстве согласно (2). В модели втулки для каждой из областей крепления лопасти использовалось



**Рис. 2.** Зависимость параметров ПРВ угловых шумов в плоскости азимута втулки винта от угла визирования: а, б – математическое ожидание; в, г – параметр  $\mu_\alpha(\psi)$  для  $A = 0.75$ ,  $B = 0.25$  (а, в) и  $A = 0.9$ ,  $B = 0.1$  (б, г).

100 отражающих точек. В процессе моделирования для определенного угла поворота втулки формировались отраженные сигналы от каждой из точек многоточечной модели. Их амплитуды полагались одинаковыми, начальные фазы равномерно распределены в интервале  $[0; 360^\circ]$ , доплеровская частота определялась исходя из скорости сближения точки втулки и точки наблюдения. В плоскости азимута и угла места осуществлялась моноимпульсная пеленгация совокупности отраженных сигналов с использованием пеленгационного соотношения [17, 18]:

$$\xi(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{F_\Delta(\xi_i) \dot{s}_i(t)}{F_\Sigma(\xi_i) \dot{s}_i(t)} \right),$$

где  $\dot{s}_i(t)$  – комплексная огибающая сигнала, отраженного от  $i$ -й точки;  $F_\Delta$  – разностная диаграмма направленности;  $F_\Sigma$  – суммарная диаграмма направленности;  $\xi_i$  – обобщенная (азимут или угол места) координата  $i$ -й точки.

По полученной реализации пеленга из 32768 отсчетов была построена гистограмма. Гистограммы усредняли по 20 реализациям, различающимся начальными случайными фазами сигналов, отраженных от точек модели. По усредненной гистограмме определяли параметры ПРВ угловых шумов ( $m$  и  $\mu$ ) для заданного угла поворота втулки. В результате моделирования для плоскости азимута получены зависимости, аналогичные изображенным на рис. 2. Среднеквадратическое отклонение

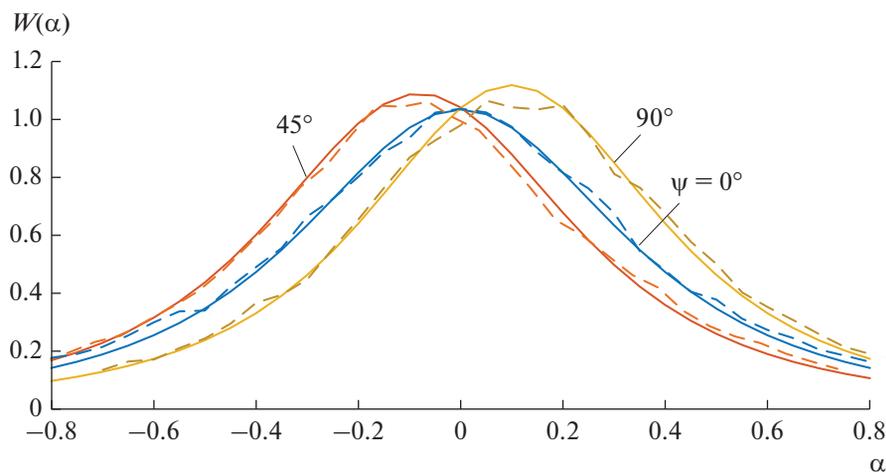


Рис. 3. ПРВ угловых шумов, полученных теоретическим расчетом (сплошные кривые) и с помощью математического моделирования (штриховые кривые).

рассчитанных зависимостей параметров ПРВ угловых шумов от моделированных не превышает 3%. В плоскости угла места, как и ожидалось, параметры ПРВ угловых шумов не зависят от угла поворота втулки и совпадают с теоретическим значением ( $m_\theta = 0$ ,  $\mu_\theta = \sqrt{3}$ ).

Примеры ПРВ угловых шумов в плоскости азимута, рассчитанные по выражению (1) с подстановкой в него  $m$  и  $\mu$ , для втулки трехлопастного винта с параметрами  $A = 0.75$  и  $B = 0.25$  для углов поворота втулки, равных 0, 45 и 90 град (см. рис. 2а, 2в) приведены на рис. 3. На этом же рисунке представлены ПРВ, полученные в результате моделирования втулки винта с использованием многоточечной геометрической модели, при тех же условиях. Видно хорошее совпадение результатов моделирования и теоретического расчета.

По результатам расчетов можно сделать следующие выводы. В плоскости угла места флуктуации кажущегося центра излучения стационарны. В плоскости азимута параметры ПРВ угловых шумов являются периодическими функциями от угла поворота втулки. Период повторения равен  $2\pi/N$ . Нестационарность проявляется тем сильнее, чем больший вклад в отражение вносят фрагменты втулки, к которым крепятся лопасти (это проявляется в увеличении параметра  $A$ ). С учетом этого можно ожидать широкого диапазона изменения параметров ПРВ угловых шумов от лопастей винта. При четном количестве лопастей винта при любом угле поворота втулки имеем  $m_\alpha \equiv 0$ . Это объясняется симметричным расположением отражающих точек относительно оси втулки при любом ее угле поворота.

Параметр  $\mu_\alpha$  зависит от угла поворота втулки при любом количестве лопастей винта. По мере увеличения числа лопастей диапазон изменения

параметров ПРВ сужается. Так, при пяти лопастях диапазон изменения параметров ПРВ угловых шумов не превышает 5% от среднего значения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в плоскости азимута флуктуации кажущегося центра отражения втулки винта представляют собой нестационарный случайный процесс. Получены соотношения, позволяющие определить параметры ПРВ угловых шумов при заданном угле поворота втулки. Результирующие выражения (9) и (10), определяющие параметры ПРВ углового шума втулки вертолета, являются функциями параметров  $A$  и  $B$ . То есть, подставляя разные значения этих параметров (для разных видов втулок), можно получить параметры ПРВ угловых шумов. Теоретические расчеты подтверждены математическим моделированием с использованием многоточечной модели втулки винта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sisle M.E., McCarthy E.D. // Simulation. 1982. V. 39. № 5. P. 159.
2. Sabitov T., Kiselev A., Stepanov M., Oreshkina M. // Remote Sensing Lett. 2021. V. 12. № 11. P. 1082.
3. Sayama H. Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems. Ceneseo: Open SUNY Textbooks, 2015.
4. Zuo L., Li M., Zhang X-W., Wuet Y. // IET Radar, Sonar and Navigation. 2013. V. 7. № 3. P. 312.
5. Stepanov M.A., Kiselev A.V. // J. Computer and Systems Sciences Int. 2019. V. 58. № 4. P. 595.
6. Jenn D.C. Radar and Laser Cross Section Engineering. Reston: AIAA, 2005.
7. Point G., Jean-François Degurse J.-F., Savy L. et al. // IET Radar, Sonar and Navigation. 2021. V. 15. № 8. P. 867.

8. *Wu W.-R.* // IEEE Trans. 1993. V. AES- 29. № 1. P. 174.
9. *Sui M., Xu X.* // J. Systems Engineering and Electronics. 2014. V. 25. № 3. P. 411.
10. *Островитянов Р.В., Басалов Ф.А.* Статистическая теория радиолока-ционных протяженных целей. М.: Сов. радио, 1982.
11. *Huang P.K., Yin H.C.* // Chinese J. Systems Engineering and Electronics. Chinese Ed. 1990. V. 12. P. 1.
12. *Kulemin G.P.* Millimeter-Wave Radar Targets and Clutter. Boston—London: Artech House, 2003.
13. *Knott E.F., Schaeffer J.F., Tuley M.T.* Radar Cross Section. N.Y.: Artech House, 1985.
14. *Point G., Savy L.* // Proc. 2017 Int. Conf. on Radar Systems (Radar 2017) Belfast. 25–27 Oct. N.Y.: IEEE, 2017. Article No. 0425
15. *Point G., Degurse J.-F., Savy L. et al.* // Proc. 2019 Int. Radar Conf. (RADAR) Toulon. 23–27 Oct. N.Y.: IEEE, 2019. Article No. 171395.
16. *Stepanov M.A.* // Progress In Electromagnetics Research (PIER) Lett. 2022. V. 106. P. 103.
17. Radar Handbook / Ed. by M.I. Skolnik. N.Y.: McGraw-Hill, 2008.
18. *Mahafza B.R.* Radar Systems Analysis and Design Using Matlab. Boca Raton: CRC Press, 2018.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

ОПТИМИЗАЦИЯ ГАРАНТИРОВАННОЙ СКОРОСТИ  
ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫМИ  
СИГНАЛАМИ С РАНДОМИЗИРОВАННОЙ БАЗОЙ  
В УСЛОВИЯХ ПРЕДНАМЕРЕННЫХ ПОМЕХ

© 2023 г. А. М. Чуднов<sup>а</sup>, \*, Я. В. Кичко<sup>а</sup>, Л. П. Сапунова<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Военная академия связи,  
Тихорецкий просп., 3, Санкт-Петербург, 194064 Российская Федерация

\*E-mail: chudnow@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.08.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принята к публикации 26.10.2022 г.

Рассмотрены принципы анализа и оптимизации параметров и режима обработки сигналов в системе передачи информации с обратным каналом, функционирующей в условиях воздействия преднамеренных помех, структура которых может подбираться с позиции нарушения (ухудшения) работы системы. Предложен алгоритм формирования и обработки псевдослучайных сигналов с рандомизированной базой, который обеспечивает повышение скорости передачи информации системой в классе помех с ограниченной средней мощностью при обеспечении исходных показателей достоверности. Представлена методика, приведены примеры расчета и показаны графики зависимостей гарантированной скорости передачи информации в системе с рандомизированным двухступенчатым переключением базы сигналов от средней мощности оптимизированной помехи.

DOI: 10.31857/S0033849423030051, EDN: ICRRVO

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает исследования методов анализа и оптимизации параметров и режима обработки сигналов в системе передачи информации (СПИ), функционирующей в условиях воздействия преднамеренных помех, структура которых может подбираться с позиции нарушения (ухудшения) работы системы [1–4].

Вопросам обеспечения гарантированных показателей СПИ, в частности функционирующей в условиях преднамеренных помех, в литературе уделяется значительное внимание (см., например, работы [1–23] и библиографию в них). На основе теоретических исследований разработаны, внедрены и широко используются в различных сферах линии связи с псевдослучайными сигналами (ПСС) [1–13]. Вместе с тем задачи построения и исследования эффективности оптимальных алгоритмов работы СПИ на различных уровнях функциональной архитектуры изучены весьма в малой степени. В этом отношении к решенным вопросам в области передачи дискретных сообщений можно отнести лишь вопросы построения и анализа помехоустойчивости алгоритмов формирования и приема двоичных сигналов, являющихся  $\epsilon$ -оптимальными с позиции обеспечения минимальной вероятности ошибочного приема бита

информации в соответствующих классах помех. А именно, в [5–7] для класса помех с ограничениями на среднюю и пиковую мощность построены оптимальные приемники псевдослучайных сигналов, модулированных по фазе псевдослучайной  $\{-1,1\}$ -последовательностью (ФМ ПСС). В [1–3] построены  $\epsilon$ -оптимальные алгоритмы формирования и приема амплитудно-фазоманипулированных сигналов при ограничениях на энергию, а также на среднюю мощность помехи и установлена их асимптотическая оптимальность для сигналов с большой базой. Существенное расхождение оценок показателей СПИ, использующих двоичные сигналы, с полученными верхними границами (расхождение составляет около 6 дБ [2]) дает основания для поиска более эффективных алгоритмов передачи информации в условиях преднамеренных помех.

Цель данной работы – разработка методики и получение оценок выигрыша в гарантированной скорости передачи сообщений за счет рандомизированного переключения базы ПСС при воздействии наихудшей по структуре помехи в классе помех с ограничением на среднюю мощность. Такой тип ограничений представляет наибольший практический интерес с учетом следующих обстоятельств:

– существующие и проектируемые комплексы радиоэлектронного противодействия способны формировать помехи с весьма большими значениями пикфактора, и степень их воздействия на СПИ в основном определяется средним значением мощности источника [14, 15];

– источники помех (ИП), как правило, ориентированы на подавление группы радиолиний, что позволяет перераспределять энергию между этими линиями с обеспечением наихудшего воздействия на подавляемые линии в рамках ограничений на общую среднюю мощность источника;

– класс помех с ограничениями на среднюю мощность является наиболее широким: оценки гарантированной помехоустойчивости для этого случая представляют собой соответствующие оценки и для других классов помех.

Исследуемые в работе задачи в общем плане соответствуют постановкам, рассмотренным в [1–4] и направленным на оптимизацию СПИ с обратной связью, в которых канальный блок формируется в виде слов избыточного кода, работающего в режиме исправления и обнаружения ошибок с использованием ФМ ПСС для передачи битов на физическом уровне. Вместе с тем для упрощения представления основного результата, а именно влияния рандомизации базы ПСС на гарантированный показатель скорости передачи данных, параметры кода и режима декодирования канального блока полагаются фиксированными. Ясно, что при согласованном переключении других параметров СПИ совместно с параметрами базы можно получить дополнительный эффект, который также может быть оценен в рамках предложенной методики.

## 1. МОДЕЛЬ СПИ В УСЛОВИЯХ ПРЕДНАМЕРЕННЫХ ПОМЕХ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Теоретико-игровая модель взаимодействия СПИ и ИП

Опишем задачу в терминах теории игр следующим образом. Имеется класс  $\mathcal{U}$  допустимых вариантов построения СПИ (в данном случае с двухуровневой базой ПСС, далее – СПИ-2) и класс  $\mathcal{V}$  вариантов постановки помех (с ограниченной средней мощностью). Для каждой системы  $U \in \mathcal{U}$  и заданных условий  $V \in \mathcal{V}$  в соответствии с формализованной моделью далее определим показатель эффективности функционирования СПИ  $Q(U, V)$ , характеризующий среднюю скорость передачи информации, как функцию  $Q: \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$ . Тогда в классе условий  $\mathcal{V}$  критерий оптимальности системы оценивается величиной

$$Q_-(U) = \inf_{V \in \mathcal{V}} Q(U, V),$$

интерпретируемой как *гарантировано обеспечиваемая эффективность функционирования системы*  $U$  в классе условий  $\mathcal{V}$ . Задача синтеза системы состоит в максимизации этого показателя выбором (определением) допустимого в определенном классе  $\mathcal{U}$  варианта построения системы  $U \in \mathcal{U}$  и представляется выражением

$$Q_*(U) = \inf_{V \in \mathcal{V}} Q(U, V) \rightarrow \max_{U \in \mathcal{U}}. \quad (1)$$

Задача (1) является составной частью теоретико-игровой задачи, представленной игрой  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(Q, \mathcal{U}, \mathcal{V})$  [13, 16, 24] с множествами  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  стратегий игроков (СПИ и источника помехи) и функцией выигрыша первого игрока (СПИ)  $Q(\cdot, \cdot)$ . Пара  $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$  называется ситуацией игры  $\mathcal{G}$ , для заданной СПИ  $U'$  величины  $Q_-(U')$  и  $Q_* = \sup_{U \in \mathcal{U}} Q_-(U)$  – гарантированным значением показателя эффективности, обеспечиваемым при использовании варианта системы  $U'$  и нижним значением (нижней ценой) игры соответственно.

Формализация задачи (1) проводится на основе конкретизации конструкций  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, Q$ , представленных ниже моделями СПИ и ИП. При этом расширение множества  $\mathcal{U}$  допустимых вариантов СПИ относительно исходного множества  $\mathcal{U}_1$  систем с нерандомизированной базой ПСС (далее – СПИ-1) позволяет получить дополнительный выигрыш.

### 1.2. Формирование, передача и обработка данных в СПИ

Процессы формирования, обработки и передачи данных на физическом и канальном уровнях СПИ-2 иллюстрируются функциональной схемой, представленной на рис. 1.

Поступающие от источника данных информационные символы  $a_i \in \{0, 1\}$  подаются в кодирующее устройство (КУ), которое формирует канальные блоки  $(a_1, \dots, a_n)$ , представляющие собой кодовые слова  $(n, k)$ -кода ( $n$  – длина блока,  $k$  – число содержащихся в нем информационных элементов), и подает их в модуль рандомизации базы (МРБ). МРБ преобразует символы кодовых слов в псевдослучайную  $\{-1, 1\}$ -последовательность, длина  $\beta$  которой (база ПСС) выбирается псевдослучайным образом:  $\beta_1$  с вероятностью  $\Pr\{\beta = \beta_1\} = P_\beta$  или  $\beta_2$  с вероятностью  $\Pr\{\beta = \beta_2\} = 1 - P_\beta$ , после чего передает ее в перемежающий модуль (ПМ). В перемежающем модуле из определенного числа  $L$  канальных блоков формируется макроблок, состоящий из  $nL$  символов, которые перемеживаются по псевдослучайному закону, известному как на передающем, так и принимающем концах СПИ, и затем подаются в модулятор (М), где осуществляется их фазовая модуляция. Сформиро-

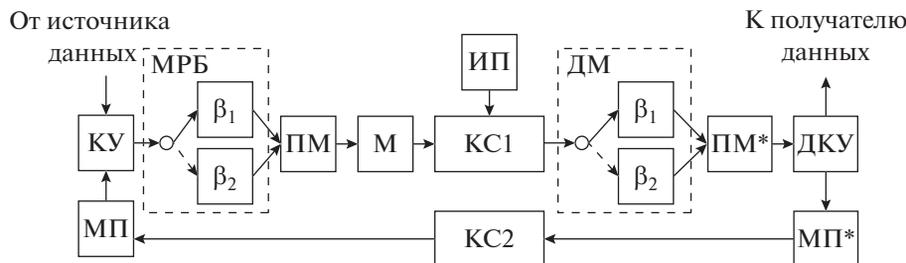


Рис. 1.

ванные таким образом на передающем конце сигналы  $s(t)$  поступают в канал связи (КС1), в котором они смешиваются с преднамеренной помехой  $v(t)$ , генерируемой источником противодействующей системы и совокупностью случайных помех (шумов)  $\xi(t)$ . При этом принимаемый из КС1 сигнал имеет вид

$$u(t) = s(t) + v(t) + \xi(t).$$

Поступающие из КС1 сигналы  $u_1(t), u_2(t)$ , подаются на вход демодулятора (ДМ), который обрабатывает их в соответствии с величиной базы и подает зарегистрированные данные в перемежающий модуль (ПМ\*), осуществляющий обратное перемежение (восстановление исходного порядка следования) символов макроблока и выдачу сформированных канальных блоков ( $c_1, \dots, c_n$ ) в декодирующее устройство (ДКУ).

Декодирующее устройство работает в режиме исправления ошибок кратности менее или равной  $r$ , причем  $r \leq t$ , где  $t$  – максимальная кратность гарантированно исправляемых заданным кодом ошибок [25]. Так что не исправленные кодом ошибки либо переспрашиваются по обратному каналу связи (КС2) модулем переспроса (МП\*) и повторяются на передаче модулем повторения (МП), либо декодируются неправильно и выдаются получателю с ошибкой.

Отметим, что приведенная модель СПИ при  $P_\beta = 1$  и/или  $\beta_1 = \beta_2$  описывает систему с нерандомизированной базой.

### 1.3. Воздействие на СПИ преднамеренной помехи

Рассматривается модель источника помех с “сильной инерционностью” контура управления [16], в соответствии с которой невозможна постановка так называемой “помехи вслед сигналу”, т.е. помехи, воздействующей на символ канального блока  $a_i$  с использованием информации о ранее принятой части этого же символа. Вместе с тем источнику помех известны все параметры, характеризующие СПИ.

Для описания показателей, характеризующих воздействие помехи на процесс передачи данных,

введем дополнительно обозначения:  $E_s, E_v$  – соответственно энергия реализации сигнала и преднамеренной помехи на длительности сигнала,  $E_\xi$  – спектральная плотность мощности шума;  $\delta_v = E_v/E_s, \delta_\xi = E_\xi/2E_s$ . На физическом уровне вероятность ошибки на бит будем оценивать на основе интеграла вероятностей Гаусса  $\Phi(\cdot)$  выражением

$$p = p\left(\frac{\delta_v}{\beta} + \delta_\xi\right) \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{\beta/\delta}\right), \quad (2)$$

где  $\delta = \delta_v + \beta\delta_\xi$ , являющимся асимптотически (при  $\beta \rightarrow \infty$ ) точным и дающим хорошее приближение уже при  $\beta \geq 10$  [2, 3, 5].

С учетом псевдослучайного перемежения символов в макроблоке суммарная помеха  $v(t) + \xi(t)$ , действующая на канальный блок, задается распределением  $F(x) = \Pr\{\delta \leq x\}$  случайной величины  $\delta$ , порожденной реализацией  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  на символах канального блока  $(a_1, \dots, a_n)$ , при этом ограничение на величину средней мощности преднамеренной помехи  $M[\delta_v]$  описывается неравенством

$$M[\delta_v] = \int_0^\infty x dF_v(x) \leq \delta^-. \quad (3)$$

Множество распределений, удовлетворяющих неравенству (3), обозначается  $\mathcal{F}(\delta^-)$ .

### 1.4. Постановка задачи анализа и оптимизации СПИ

При оценке выигрыша, обеспечиваемого рандомизацией базы ПСС, будем фиксировать параметры  $n, k$  кода и параметр  $r$ , характеризующий режим его декодирования. Принимая во внимание, что информационная скорость кода, равная  $k/n$ , одинакова для всех рассматриваемых случаев, анализ эффективности СПИ при текущих значениях базы  $\beta$  и величины  $\delta_v$  будем проводить без учета коэффициента  $k/n$  по формуле

$$R(\delta, \beta) = \frac{1}{\beta} G(\delta/\beta), \quad (4)$$

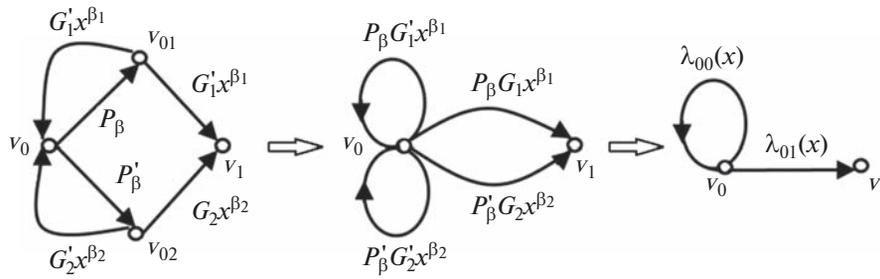


Рис. 2.

где  $G(\delta/\beta)$  – вероятность выдачи получателю поступившего из КС1 канального блока, которая оценивается выражением [4, 25]

$$G(\delta/\beta) = \sum_{j=0}^r \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \quad (5)$$

Оптимальное значения базы ПСС для СПИ-1 определяется выражением

$$\beta^* = \arg \max_{\beta \in [0, \infty]} R(\delta, \beta). \quad (6)$$

Скорость передачи информации, гарантированная в классе помех с ограниченной средней мощностью  $\delta^-$  и параметрами ПСС  $\beta_1, \beta_2, P_\beta$ , определяется условием

$$R(\delta^-, \beta_1, \beta_2, P_\beta) = \inf_{F_i \in \mathcal{F}(\delta^-)} M[R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta)], \quad (7)$$

где  $R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta)$  – величина скорости для СПИ с заданным параметром  $\delta$ . Задача оптимизации ПСС с двухуровневой рандомизированной базой принимает вид

$$R(\delta^-, \beta_1, \beta_2, P_\beta) \rightarrow \max_{\beta_1, \beta_2, P_\beta}$$

при  $\beta_1, \beta_2 \in [0, \infty), P_\beta \in [0, 1]$ .

## 2. МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СПИ С РАНДОМИЗИРОВАННОЙ БАЗОЙ ПСС

Теперь получим расчетные соотношения для величин, определяющих введенные показатели (3)–(7). Отдельные положения формулируются в виде утверждений, для которых оговаривается ход доказательства.

Для заданных значений  $\beta_1, \beta_2, P_\beta, \delta_1, \delta_2 (\beta_1 \leq \beta_2, \delta_1 \leq \delta_2)$  введем обозначения:

$$\begin{aligned} p_i &= p(\delta/\beta_i), \quad G_i = G(\delta/\beta_i), \\ P_\beta &= \Pr\{\beta = \beta_i\}, \quad i \in \{1, 2\}, \\ \beta^- &= P_\beta \beta_1 + (1 - P_\beta) \beta_2, \\ G^- &= P_\beta G_1 + (1 - P_\beta) G_2. \end{aligned}$$

*Предложение 1.* Зависимость  $R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta)$  определяется выражением

$$R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta) = G^- / \beta^-. \quad (8)$$

Формула (8) может быть обоснована исходя из принципов усреднения производительности при выполнении различных типов работ с различной производительностью. Более строго ее можно получить на основе представления процесса передачи канальных блоков цепью Маркова и вычисления производящей функции вероятностей времени передачи канального блока. Выражение для среднего времени перехода марковской цепи из одного состояния в другое удобно выводить с использованием преобразований графа переходов, сохраняющих вероятностно-временные характеристики процесса передачи информации (см., например, [16]). Процедура преобразования графа переходов, приводящая к соотношению (8), иллюстрируется рис. 2: вершины соответствуют состояниям, возникающим при передаче канального блока:  $v_0$  – исходное состояние,  $v_{01}$  – блоку назначен ПСС с  $\beta_1$ ,  $v_{02}$  – с  $\beta_2$ ,  $v_1$  – блок выдан получателю, а дуги отображают переходы между состояниями с указанными производящими функциями вероятностей перехода, где

$$G_i = G(\delta/\beta_i)G'_i = 1 - G_i,$$

$$i \in \{1, 2\}, \quad P'_\beta = 1 - P_\beta.$$

Графы, показанные на рис. 2б, 2в, где

$$\lambda_{01}(x) = P_\beta G_1 x^{\beta_1} + (1 - P_\beta) G_2 x^{\beta_2},$$

$$\lambda_{00}(x) = P_\beta (1 - G_1) x^{\beta_1} + (1 - P_\beta) (1 - G_2) x^{\beta_2},$$

получены в результате преобразований исходного графа, сохраняющих финальное распределение времени перехода из  $v_0$  в  $v_1$ . Известно [16], что для графа с петлями (см. рис. 2в) производящая функция вероятностей времени перехода из  $v_0$  в  $v_1$  определяется выражением

$$\Lambda_{01}(x) = \frac{\lambda_{01}(x)}{1 - \lambda_{00}(x)},$$

с учетом которого, а также представления математического ожидания времени перехода через производящую функцию

$$T_{01} = \left. \frac{d\Lambda_{01}(x)}{dx} \right|_{x=1}$$

и соотношения  $R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta) = 1/T$  нетрудно получить выражение для среднего времени задержки в СПИ-2 переданного канального блока  $T = \beta^-/G^-$  и формулу (8) для скорости передачи информации СПИ-2.

Следующее утверждение позволяет редуцировать область  $\mathcal{F}(\delta^-)$  поиска оптимальной ( $\epsilon$ -оптимальной) точки в выражении (7) и получить расчетное соотношение для величины  $R_-(\delta^-, \beta_1, \beta_2, P_\beta)$ .

Для его формулировки в множестве распределений  $\mathcal{F}(\delta^-)$  выделим подмножество  $\mathcal{F}(\delta', \delta^-, \delta'')$  так называемых [16, 26] *двухточечных* (или *двухатомных*) распределений, для которых функция распределения вероятностей имеет не более двух точек роста  $\delta', \delta''$  и, таким образом, может быть задана значениями  $\delta', \delta^-, \delta''$ , где  $\delta' \leq \delta^- \leq \delta''$ , причем

$$P_\delta = \Pr\{\delta = \delta'\} = \frac{\delta^- - \delta'}{\delta'' - \delta'},$$

$$\Pr\{\delta = \delta''\} = \frac{\delta'' - \delta^-}{\delta'' - \delta'} = 1 - P_\delta.$$

При этом аналогично [1–4] используем следующее утверждение, представляющее собой простое следствие теоремы Каратеодори с интерпретацией Рисса к распределениям вероятностных мер [26].

*Предложение 2.* Функция  $R_-(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta)$  является выпуклой оболочкой зависимости  $R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta)$  по аргументу  $\delta$ , при этом наихудшая помеха в классе  $\mathcal{F}(\delta^-)$  имеет двухточечное распределение, определенное параметрами  $\delta', \delta^-, \delta''$ .

С учетом данного утверждения можно записать

$$R_-(\delta^-, \beta_1, \beta_2, P_\beta) = \min_{\delta' \leq \delta^- \leq \delta''} \left[ \frac{\delta^- - \delta'}{\delta'' - \delta'} R(\delta', \beta_1, \beta_2, P_\beta) + \frac{\delta'' - \delta^-}{\delta'' - \delta'} R(\delta'', \beta_1, \beta_2, P_\beta) \right],$$

откуда видно, что задача поиска наихудшего распределения из  $\mathcal{F}(\delta^-)$  сводится к задаче двухпараметрической оптимизации, состоящей в вычислении выпуклой оболочки функции  $R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta)$  по аргументу  $\delta$ .

Для выпуклой оболочки некоторой функции  $f(\cdot)$  по аргументу  $\delta$  будем использовать обозна-

чение  $f^v(\cdot)$ , с учетом которого предложение 2 можно записать в виде соотношения

$$R_-(\delta^-, \beta_1, \beta_2, P_\beta) = R^v(\delta^-, \beta_1, \beta_2, P_\beta).$$

Оценку выигрыша за счет использования ПСС с рандомизированной базой проведем для случая  $n\delta_\xi \ll \delta$ , что, как правило, обеспечивается на практике заданием требуемой для этого длительности сигнала  $T_s \gg E_\xi/\mathcal{P}_s$  при известной его мощности  $\mathcal{P}_s$ . Кроме того, условие  $\delta_\xi = 0$  может использоваться для получения гарантированных показателей СПИ в классе помех с неизвестной структурой, если параметром  $\delta$ , учитываются как преднамеренные, так и случайные помехи.

Для удобства выполнения и представления результатов расчетов величины  $\delta, \delta^-, \delta', \beta_1, \beta_2$  нормируются относительно параметра  $\beta^*$  (формула (6)), значение которого для рассматриваемых параметров СПИ при  $\delta_\xi = 0$  составляет величину  $\beta^* \approx 4.71\delta^-$ . Соответствующие перечисленным показателям нормированные величины обозначаются как  $z = \delta^-/\beta^*, z_v = \delta_v/\beta^*, b_1 = \beta_1/\beta^*, b_2 = \beta_2/\beta^*$ . Выигрыш в скорости передачи информации СПИ-2 по отношению к СПИ-1 оценивается на основе сравнения нормированных показателей скорости  $R_1(z)$  и  $R_2(z)$ , определяемых соответственно соотношениями:

$$R_1(z) = \beta^* R(\delta, \beta) = \beta^* G(\delta/\beta)/\beta = G(z)/b,$$

$$R_2(z) = \beta^* R(\delta, \beta_1, \beta_2, P_\beta) = \beta^* G^-(\delta/\beta)/\beta^- = G^-(z)/b^-.$$

### 3. ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА, ОПТИМИЗАЦИИ СПИ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

#### 3.1. Анализ и оптимизация ПСС с нерандомизированной базой

Пример зависимости  $R_1^v(z) = \beta^* R^v(z, 1, 1, 1)$ , образованной в виде выпуклой оболочки функции  $R_1(z) = \beta^* R(z, 1, 1, 1)$  для СПИ-1 с нерандомизированной базой ПСС  $\beta_1 = \beta_2 = \beta^*$  и параметрами  $n = 127, r = 3, \delta_\xi \ll \delta_v/\beta$ , показан на рис. 3, где представлены зависимости  $R_1(z)$  (сплошная кривая) и  $R_1^v(z)$  (штриховая). Как видно, в данном случае задача построения выпуклой оболочки функции  $R_1(z)$  сводится к задаче однопараметрической оптимизации нахождения точки касания прямой

$$z' = \arg \min_{z \in (z^-, \infty)} \frac{1}{z} (R_1(0) - R_1(z)),$$

проходящей через  $(0, R_1(0))$  к линии  $R_1(z)$  (в примере  $z' \approx 0.364$ ). При этом значение  $z'$  определяет стратегию постановки помехи, а именно:

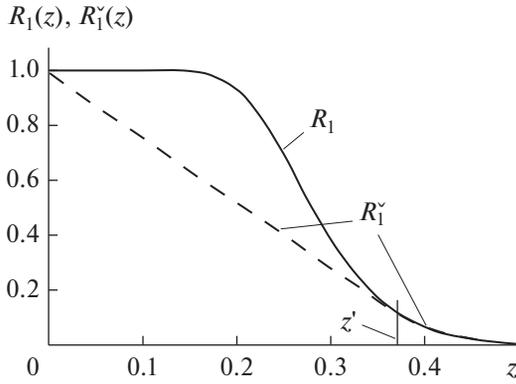


Рис. 3.

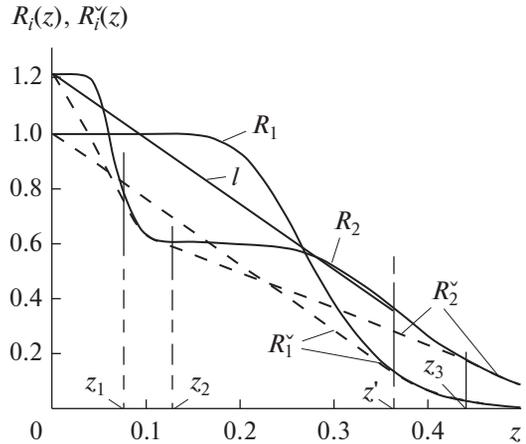


Рис. 4.

- 1) при  $z^- \leq z'$  оптимальная помеха формируется в импульсном режиме с мощностью импульса  $\delta' = z'\beta^*$  и его вероятностью  $P_\delta = \delta^-/\delta'$ ;
- 2) при  $z^- > z'$  ИП формирует помеху с постоянной мощностью  $\delta^-$ . С учетом структуры зависимости  $R_1(z)$  значение  $z'$  легко находится методом сечений.

Таким образом, СПИ-1 в классе помех  $\mathcal{F}(z^-)$  гарантированно обеспечивает скорость передачи информации, определяемую выражением

$$R_1^v(z) = \begin{cases} 1 - z(1 - R_1(z'))/z', & z \leq z'; \\ R_1(z), & z > z'. \end{cases}$$

3.2. Анализ и оптимизация ПСС с рандомизированной базой

По приведенной методике оценим гарантированную скорость передачи информации СПИ-2

$$R_2^v(z) = \beta^* R^v(z, b_1, b_2, P_\beta).$$

Для этого сначала в соответствии с формулами (2), (4)–(6), (8) получим соотношение для функции  $R(z, b_1, b_2, P_\beta)$  с заданными значениями  $b_1, b_2, P_\beta$ , а затем, выполнив операцию выпуклого замыкания этой функции по аргументу  $z$ , построим зависимость

$$R_2^v(z) = \beta^* R^v(z, b_1, b_2, P_\beta).$$

На рис. 4 представлены графики функций  $R_2(z), R_2^v(z)$  для  $\beta_1 = 0.25, \beta_2 = 1.4, P_\beta = 0.5$ , причем график  $R_2^v(z)$  составлен из четырех линий:

- 1) отрезок (пунктирная линия), соединяющий точки  $(0, R_2(0)), (z_1, R_2(z_1))$ , где  $z_1 \approx 0.087$  – первая точка касания прямой, к графику  $R_2(z)$ ;
- 2) часть кривой  $R_2(z)$  (сплошная линия) в интервале  $(z_2, z_3)$ , где  $z_2 \approx 0.094, z_3 \approx 0.0492$  – точки касания прямой к графику  $R_2(z)$  такой, что  $z_1 \leq z_2$ ;

- 3) отрезок (пунктирная линия), соединяющий точки  $(z_2, R_2(z_2)), (z_3, R_2(z_3))$ ; 4) часть кривой  $R_2(z)$  (сплошная линия) в интервале  $(z_3, \infty)$ .

Значение  $z_1$  найдено методом сечений в предварительно определенной области, поиск значений  $z_2, z_3$  осуществлялся путем поочередной оптимизации величин  $z_2, z_3$  методом сечений до перехода в  $\epsilon$ -оптимальную точку.

Как видно, наихудшая в классе  $\mathcal{F}(z^-)$  для СПИ-2 помеха действует следующим образом:

- 1) при  $z^- \leq z_1$  в импульсном режиме, определенном параметрами  $z_0 = 0, z^-, z_1$ ;
- 2) при  $z_1 \leq z^- \leq z_2$  – с постоянной мощностью  $\delta^-$ ;
- 3) при  $z_2 \leq z^- \leq z_3$  – с переключением двух уровней мощности, соответствующих значениям  $z_2, z_3$ ;
- 4) при  $z_3 \leq z^-$  – с постоянной мощностью  $\delta^-$ .

Кроме того, на рис. 4 для сравнения приведены графики функций  $R_1(z), R_1^v(z)$ , из анализа которых нетрудно определить область значений величины  $z^-$ , в которой СПИ-2 выигрывает у СПИ-1 по гарантированной скорости передачи информации. Можно отметить, что если ИП не использует информацию о параметрах СПИ-2 и воздействует оптимальной для СПИ-1 помехой, то в области  $z^- \in [0, z']$  значения скорости передачи информации СПИ-2 лежат на отрезке  $\ell$  (см. рис. 4) и, как видно, СПИ-2 существенно (20...100%) выигрывает в скорости передачи информации у СПИ-1 в этой области.

Для проработки вопроса о существовании алгоритма передачи информации с рандомизированным переключением базы ПСС, который выигрывал бы по гарантированной скорости передачи информации у СПИ-1 при всех значениях  $z^- \in [0, \infty]$ , в работе решалась задача оптимизации соответствующей величины выигрыша. На рис. 5, 6 приведены

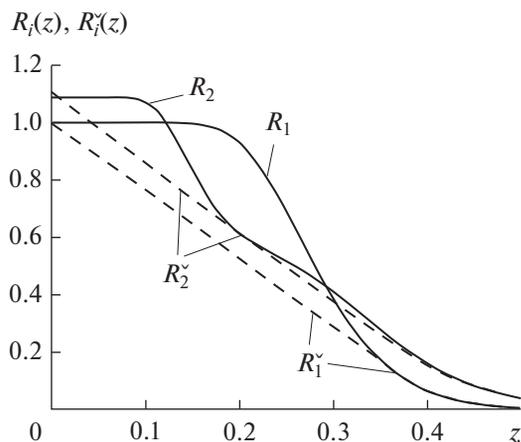


Рис. 5.

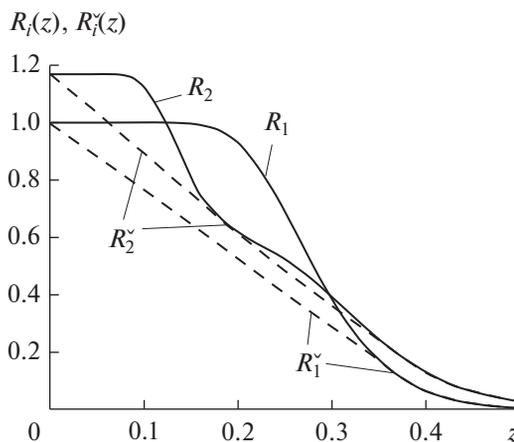


Рис. 6.

зависимости  $R_1(z)$ ,  $R_1^v(z)$ ,  $R_2(z)$ ,  $R_2^v(z)$ , полученные в результате такой оптимизации для абсолютной и относительной величин выигрыша соответственно:

$$\Delta = \min_{z \in [0, z']} (R_2^v(z) - R_1^v(z)).$$

$$\eta = \min_{z \in [0, z']} (R_2^v(z) / R_1^v(z)).$$

Так, для СПИ-2 с параметрами  $b_1 = 0.56$ ,  $b_2 = 1.28$ ,  $P_\beta = 0.5$ , как видно из графиков  $R_1^v(z)$ ,  $R_2^v(z)$ , приведенных на рис. 5, абсолютный выигрыш в скорости в области значений  $z^- \in [0, z']$  не менее 0.04, а для СПИ-2 с параметрами  $b_1 = 0.51$ ,  $b_2 = 1.21$ ,  $P_\beta = 0.5$  графики  $R_1^v(z)$ ,  $R_2^v(z)$ , приведенные на рис. 6, представляют пример рандомизации базы ПСС, обеспечивающей относительный выигрыш в скорости передачи информации не менее 16.6% при всех возможных значениях  $\delta^-$ .

### 3.3. Оценка достоверности передачи данных в СПИ-1 и СПИ-2

Корректная постановка задачи оптимизации скорости передачи информации параметрами СПИ, естественно, предполагает учет и обеспечение требований по показателям достоверности передачи информации. Приведем соотношения для оценки вероятности выдачи системой блока с необнаруженной ошибкой и покажем, что вероятность ошибки  $P_{\text{но}2}$  в СПИ-2 не превышает соответствующую величину  $P_{\text{но}1}$  в СПИ-1. Так, величины  $P_{\text{но}1}$ ,  $P_{\text{но}2}$  можно оценить на основе выражения для вероятности необнаруженной ошибки  $P_{\text{но}}(z, b)$ , справедливого для фиксированных значений  $z, b$ :

$$P_{\text{но}}(z, b) = \chi \Pr\{N_{\text{ош}} > r\},$$

где  $\chi = \chi(n, k, r)$  — функция, характеризующая условную вероятность необнаружения ошибки в кодовом блоке, принятом с числом ошибок более  $r$ , определяемая параметрами и структурой кода [4, 25, 27],  $\Pr\{N_{\text{ош}} > r\} = 1 - G(z)$  — вероятность искажения в блоке длины  $n$  более  $r$  символов. Для СПИ-1 и СПИ-2 средняя вероятность необнаруженной ошибки в принятом блоке определяется выражениями

$$P_{\text{но}1} = \chi \frac{z^-}{z'} (1 - G(z')), \quad P_{\text{но}2} = \chi \frac{z^-}{z''} (1 - G(z'')), \quad (9)$$

причем при полученных оптимальных параметрах  $b^*, b_1, b_2$  СПИ и  $z', z''$  ИП имеем  $z' < z''$ ,  $G(z') < G(z'')$  и, следовательно,  $P_{\text{но}2} < P_{\text{но}1}$ .

Соотношения (9) могут использоваться для задания ограничений на область поиска в рассмотренной оптимизационной задаче.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что алгоритм рандомизированного управления базой ПСС позволяет повысить скорость передачи информации в условиях воздействия преднамеренных помех при обеспечении исходных показателей достоверности. Так, уже при использовании сигналов с двухуровневой базой выигрыш в гарантированной скорости передачи информации может достигать 10...20%. Предложенная методика и общие заключения могут быть применимы для СПИ с другими зависимостями  $p(\delta/b)$  вероятности ошибки на символ, учитывающими специфику обработки сигналов на физическом уровне.

Полученные результаты предполагают дальнейшую проработку затронутых вопросов в направлениях поиска оптимального распределения базы ПСС на  $(0, \infty)$ , рандомизированного управ-

ления базой ПСС совместно с параметрами кода и режимами декодирования канальных блоков, а также получения оценок эффективности рандомизированного управления сигнально-кодowymi конструкциям с учетом способов использования и свойств обратного канала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуднов А.М. // Проблемы передачи информации. 1986. Т. 22. № 4. С. 49.
2. Чуднов А.М. // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27. № 3. С. 57.
3. Чуднов А.М. // РЭ. 1987. Т. 32. № 1. С. 62.
4. Чуднов А.М., Кирик Д.И., Ермакова Е.М. // Труды учеб. заведений связи. 2019. Т. 5. № 4. С. 79. <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2019-5-4-79-86>
5. Путилин А.Н., Чуднов А.М. // РЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1646.
6. Жодзишский Ю.И. // Радиотехника. 1986. № 10. С. 56.
7. Жодзишский М.И. // Радиотехника. 1982. № 11. С. 77.
8. Kullstam P.A. // IEEE Trans. 1977. V. COM-25. № 8. P. 848. <https://doi.org/10.1109/TCOM.1977.1093906>
9. Yue G., Wang X. // IEEE Trans. 2009. V. WC-8. № 12. P. 5996. <https://doi.org/10.1109/TWC.2009.12.081627>
10. Чуднов А.М. // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 4. С. 1. <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/3/text.pdf>
11. Bashar T., Wu D.Y.-W. // IEEE Trans. 1985. V. IT-31. № 4. P. 482. <https://doi.org/10.1109/TIT.1985.1057076>
12. Bhattacharya S., Gupta A., Bashar T. // Numerical Algebra. 2013. V. 3. № 1. P. 1. <https://doi.org/10.3934/naco.2013.3.1>
13. Чуднов А. М. Помехоустойчивость линий и сетей связи в условиях оптимизированных помех. Л.: ВАС, 1986.
14. Макаренко С.И. Модели системы связи в условиях преднамеренных дестабилизирующих воздействий и ведения разведки. СПб.: Научное издание, 2020.
15. Poisel R.A. Modern Communication Jamming Principles and Techniques. Artech, Massachusetts, 2004.
16. Чуднов А.М. Математические основы моделирования, анализа и синтеза систем. СПб: ВАС, 2021.
17. Firouzbakht K., Noubir G., Salehi M. // IEEE Trans. 2014. V. WC-13. № 7. P. 3481. <https://doi.org/10.1109/TWC.2014.2314105>
18. Feng Z., Ren G., Chen J. et al. // Appl. Sci. 2019. V. 9. № 16. P. 3348. <https://doi.org/10.3390/app9163348>
19. Wang B., Wu Y., Liu K.J.R., Clancy T.C. // IEEE J. Selected Areas in Comm. 2011. V. 29. № 4. P. 877. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2011.110418>
20. Han Z., Niyato D., Saad W. et al. Game Theory in Wireless and Communication Networks. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. <https://doi.org/10.3390/s120709055>
21. Zhou S., Giannakis G., Swami A. // IEEE Trans. 2002. V. COM-50. № 4. P. 643. <https://doi.org/10.1109/26.996079>
22. Jia L., Xu Y., Sun Y. et al. // IEEE Wireless Comm. 2018. V. 25. № 6. P. 120. <https://doi.org/10.1109/MWC.2017.1700363>
23. Wang Y., Niu Y., Chen J. et al. // 11th Intern. Conf. Wireless Communications and Signal Proc. (WCSP-2019), Xi'an, China, 2019. P. 1. <https://doi.org/10.1109/WCSP.2019.8927884>
24. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
25. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
26. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
27. Коржик В.И., Осмоловский С.А., Финк Л.М. // Проблемы передачи информации. 1974. Т. 10. № 4. С. 25.

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.391.2

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ  
ТРАНСФОРМИРУЮЩЕГО ТИПА СО СТИРАНИЕМ**

© 2023 г. В. В. Климов\*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

\*E-mail: klimov47@list.ru

Поступила в редакцию 03.04.2022 г.

После доработки 03.04.2022 г.

Принята к публикации 18.04.2022 г.

Рассмотрена задача идентификации двух источников бинарных сигналов на фоне помех трансформирующего типа со стиранием в условиях противодействия. Ситуация описывается антагонистической игрой, аналитическое решение которой дает оптимальные стратегии игроков и цену игры как функцию априорной вероятности появления одного из источников. Рассмотрены частные случаи.

DOI: 10.31857/S0033849423020092, EDN: LCIWOI

**ВВЕДЕНИЕ**

Исследование окружающей среды дистанционными методами требует разработки математических моделей и методов принятия оптимальных решений в условиях априорной неопределенности [1–4]. В таких ситуациях для получения гарантированного результата приходится рассматривать внешнюю среду как активного игрока, настроенного антагонистически. Данная работа и посвящена исследованию такой ситуации. Подобная постановка задачи актуальна, например, в мониторинге воздушного пространства.

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Пусть имеется два источника  $S_1$  и  $S_2$  бинарных сигналов. Каждый из источников может посылать два различных сигнала  $m_1$  и  $m_2$ , причем на каждом следующем один за другим интервале времени происходит включение источников в канал связи случайным образом.

Вероятность включения источника  $S_1$  равна  $P$ , а источника  $S_2$  —  $(1-P)$ . Сигналы поступают в систему наблюдения по каналу без памяти при действии нейтральных помех трансформирующего типа и помех стирания, где под помехой стирания понимается появление сигнала  $m_3$ , отличного от  $m_1$  и  $m_2$ . Вероятность трансформации сигнала  $m_1$  в  $m_2$  или сигнала  $m_2$  в  $m_1$  равна  $P_0$ , а вероятность стирания —  $S$ . При этом предполагается, что вероятность искажения сигнала не превосходит  $1/2$ , т.е. выполняется неравенство

$$P_0 + S \leq 1/2. \quad (1)$$

На выходе канала связи имеется система наблюдения, в задачу которой входит обработка поступающих сигналов по определенному правилу и вынесение решения о наличии в данном дискретном интервале времени источника либо  $S_1$ , либо  $S_2$ . По условию задачи система наблюдения знает, какой из сигналов ( $m_1$  или  $m_2$ ) на данном интервале времени источник  $S_1$  должен посылать. Тем не менее это не исключает ошибок при вынесении решений. Действительно, система наблюдения не знает, какой из источников был включен в канал связи; второй причиной ошибок является наличие помех трансформирующего типа и помех стирания.

Показателем качества работы системы наблюдения принимается средний выигрыш. Предполагается, что система наблюдения не имеет информации о том, какой из сигналов посылает источник  $S_2$ , более того, источник  $S_2$  ведет себя наихудшим образом с точки зрения системы наблюдения. Таким образом, данную ситуацию можно описать антагонистической игрой, в которой первым игроком является система наблюдения в коалиции с источником  $S_1$ , вторым игроком является источник  $S_2$ .

Пусть  $a$  — выигрыш системы наблюдения за правильное решение,  $b$  — за неверное решение, причем  $a \geq b \geq 0$ .

Первый игрок стремится увеличить свой средний выигрыш; второй игрок стремится уменьшить средний выигрыш. Схема взаимодействия источников сигналов и системы наблюдения представлена на рис. 2.

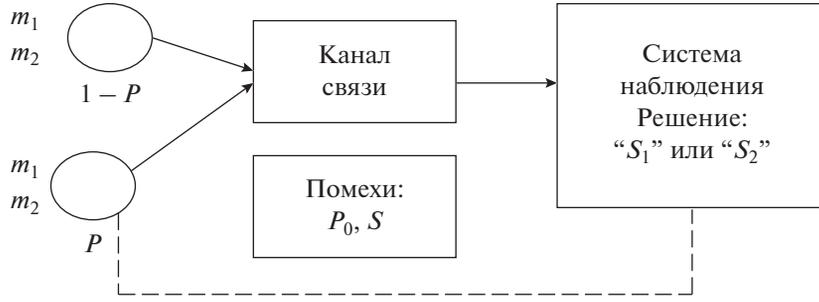


Рис. 1. Взаимодействие источников сигналов и системы наблюдения.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА

Опишем теперь множество чистых стратегий игроков. Источник  $S_2$  может посылать один из двух сигналом  $m_1$  или  $m_2$ . Таким образом, у второго игрока имеется только две чистых стратегий. Чистыми стратегиями первого игрока являются решающие функции. Выпишем все чистые стратегии:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_1 &= [m_1 : m_2 m_3 / m_1], \\
 \mathbf{I}_2 &= [m_2 : m_1 m_3 / m_1], \\
 \mathbf{I}_3 &= [m_2 m_3 : m_1 / m_1], \\
 \mathbf{I}_4 &= [m_1 m_3 : m_2 / m_1], \\
 \mathbf{I}_5 &= [m_1 : m_2 m_3 / m_2], \\
 \mathbf{I}_6 &= [m_2 : m_1 m_3 / m_2], \\
 \mathbf{I}_7 &= [m_2 m_3 : m_1 / m_2], \\
 \mathbf{I}_8 &= [m_1 m_3 : m_2 / m_2], \\
 \mathbf{I}_9 &= [m_3 : m_1 m_2 / m_1], \\
 \mathbf{I}_{10} &= [m_1 m_2 : m_3 / m_1], \\
 \mathbf{I}_{11} &= [S_1], \\
 \mathbf{I}_{12} &= [S_2], \\
 \mathbf{I}_{13} &= [m_3 : m_1 m_2 / m_2], \\
 \mathbf{I}_{14} &= [m_1 m_2 : m_3 / m_2], \\
 \mathbf{I} &= \{I_i^j\}, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 14, \tag{3}
 \end{aligned}$$

где элементы  $I_i^j$  матрицы  $\mathbf{I}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 I_1^1 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
 &\quad + b[P(P_0 + S)(1 - P)P_0], \\
 I_2^1 &= a[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
 &\quad + b[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)], \\
 I_3^1 &= a[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0] + \\
 &\quad + b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4^1 &= a[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
 &\quad + b[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)], \\
 I_5^1 &= a[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
 &\quad + b[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0], \\
 I_6^1 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
 &\quad + b[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)], \\
 I_7^1 &= a[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0] + \\
 &\quad + b[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)], \\
 I_8^1 &= a[P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
 &\quad + b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)], \\
 I_9^1 &= a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
 &\quad + b[P(1 - S) + (1 - P)S], \tag{4} \\
 I_{10}^1 &= a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
 &\quad + b[PS + (1 - P)(1 - S)], \\
 I_{11}^1 &= aP + b(1 - P), \\
 I_{12}^1 &= a(1 - P) + bP, \\
 I_{13}^1 &= a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
 &\quad + b[P(1 - S) + (1 - P)S], \\
 I_{14}^1 &= a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
 &\quad + b[PS + (1 - P)(1 - S)].
 \end{aligned}$$

Отметим, что

$$I_{13}^1 = I_9^1, \quad I_{14}^1 = I_{10}^1.$$

Элементы  $I_i^2$  матрицы  $\mathbf{I}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 I_1^2 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
 &\quad + b[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)], \\
 I_2^2 &= a[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
 &\quad + b[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3^2 &= a[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
 &+ b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)], \\
 I_4^2 &= a[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0] + \\
 &+ b[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)], \\
 I_5^2 &= a[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
 &+ b[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)], \\
 I_6^2 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
 &+ b[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0], \\
 I_7^2 &= a[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
 &+ b[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)], \\
 I_8^2 &= a[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0] + \\
 &+ b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)], \\
 I_9^2 &= a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
 &+ b[P(1 - S) + (1 - P)S], \\
 I_{10}^2 &= a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
 &+ b[PS + (1 - P)(1 - S)], \\
 I_{11}^2 &= aP + b(1 - P), \\
 I_{12}^2 &= a(1 - P) + bP, \\
 I_{13}^2 &= a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
 &+ b[P(1 - S) + (1 - P)S], \\
 I_{14}^2 &= a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
 &+ b[PS + (1 - P)(1 - S)].
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Отметим, что, как и в случае  $I_i^1$ , выполняется

$$I_{13}^2 = I_9^2, \quad I_{14}^2 = I_{10}^2.$$

Таким образом, стратегии  $I_{13}$  и  $I_{14}$  можно опустить.

Рассмотрим случай, когда включение источника  $S_1$  в канал связи достаточно маловероятно, т.е. пусть  $P \leq 1/2$ .

Исследуем матрицу с элементами  $I_i^j$  на наличие в ней доминируемых стратегий, учитывая соотношение

$$P_0 + S \leq 1/2. \tag{6}$$

Сравнивая строки матрицы  $I_i^j$ , получим

$$\begin{aligned}
 I_1^j &\geq I_4^j \text{ при } j = 1, 2, \\
 I_2^j &\geq I_3^j \text{ при } j = 1, 2, \\
 I_5^j &\geq I_8^j \text{ при } j = 1, 2; \\
 I_6^j &\geq I_7^j \text{ при } j = 1, 2,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 I_9^j &\geq I_{10}^j \text{ при } j = 1, 2, \\
 I_{12}^j &\geq I_{11}^j \text{ при } j = 1, 2, \\
 I_1^j &\geq I_5^j \text{ при } j = 1, 2, \\
 I_6^j &\geq I_2^j \text{ при } j = 1, 2, \\
 I_{12}^j &\geq I_9^j \text{ при } j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Вычеркивая четвертую, третью, восьмую, седьмую, десятую, одиннадцатую, пятую, вторую, девятую стратегии (строку), получим в итоге три стратегии,  $I_1, I_6, I_{12}$ .

Таким образом, задача сводится к решению игры  $I$  размером  $(3 \times 2)$ , где матрица  $I$  имеет вид

$$I = \begin{matrix} I_1 \\ I_6 \\ I_{12} \end{matrix} \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ A & B \\ B & A \\ E & E \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= a(1 - P_0 - PS) + b(P_0 + PS), \\
 B &= a(P + P_0 + S - 2PP_0 - 2PS) + \\
 &+ b(1 - P_0 - P - S + 2PP_0 + 2PS), \\
 E &= a(1 - P) + bP.
 \end{aligned}$$

Будем решать полученную игру графическим методом.

Пусть  $y$  – вероятность выбора вторым игроком первой стратегии,  $(1 - y)$  – вероятность выбора вторым игроком второй стратегии, а  $Z_i$  – выигрыш первого игрока при выборе им  $i$ -й чистой стратегии.

Очевидно,

- $i = 1$ , когда выбрана стратегия  $I_1$ ;
- $i = 2$ , когда выбрана стратегия  $I_6$ ;
- $i = 3$ , когда выбрана стратегия  $I_{12}$ .

Имеем

$$\begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} y & 1 - y \\ A & B \\ B & A \\ E & E \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= Ay + B(1 - y), \\
 Z_2 &= By + A(1 - y), \\
 Z_3 &= E.
 \end{aligned}$$

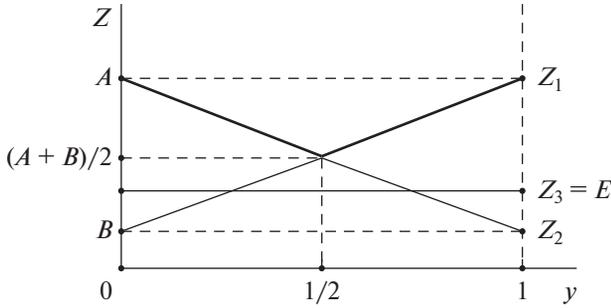


Рис. 2. Выигрыш первого игрока при  $P \geq P_1$ .

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} Z_1 &= (A - B)y + B, \\ Z_2 &= (B - A)y + A, \\ Z_3 &= E. \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} A - B &= (a - b)(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq \\ &\geq (a - b)(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, получили соотношение  $A \geq B$ , которое понадобится нам в графическом методе. Рассмотрим два случая, которые соответствуют разным частям диапазона изменения параметра  $P \in [0, 1/2]$ .

*I случай:*

$$\begin{aligned} E &\leq (A + B)/2, \text{ т.е.} \\ P &\geq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \end{aligned}$$

Выигрыш первого игрока при  $P \geq P_1$  представлен на рис. 2.

Из курса по теории игр [5] известно, что

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y). \tag{12}$$

На рис. 2 жирной линией представлен график функции

$$Z = \max_{i=1,3} Z_i(y), \tag{13}$$

Как следует из рис. 2, минимальное значение этой функции достигается при  $y = 1/2$  и равно  $(A + B)/2$ .

Таким образом, цена игры равна

$$v = (A + B)/2. \tag{14}$$

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$\begin{aligned} y_1^* &= 1/2, \\ y_2^* &= 1/2. \end{aligned} \tag{15}$$

Оптимальная стратегия первого игрока находится в результате решения уравнения

$$xA + (1 - x)B = xB + (1 - x)A. \tag{16}$$

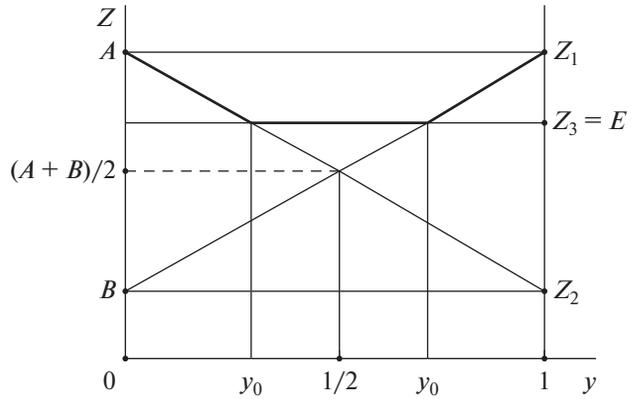


Рис. 3. Выигрыш первого игрока при  $P \leq P_1$ .

Итак, решая это уравнение относительно  $x$ , получим

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1/2, \\ x_6^* &= 1/2, \\ x_{12}^* &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

По определению переменных имеем

$$A - E = (a - b)(P - P_0 - PS), \tag{18}$$

$$B - E = (a - b)(2P + P_0 + S - 2PP_0 - 2PS - 1). \tag{19}$$

По предположению случая I имеем

$$E \leq (A + B)/2. \tag{20}$$

Это неравенство эквивалентно другому неравенству

$$A - E \geq E - B, \tag{21}$$

из которого следует

$$P \geq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \tag{22}$$

Цена игры как функция входящих параметров имеет вид

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P + S - 2PP_0 - 3PS)/2. \tag{23}$$

Перейдем к оставшейся части диапазона параметра  $P$ .

*II случай:*

$$\begin{aligned} E &\geq (A + B)/2, \text{ т.е.} \\ P &\leq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \end{aligned}$$

Выигрыш первого игрока при  $P \leq P_1$  представлен на рис. 3.

Как это следует из теории игр [5], цена игры

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 3 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y), \tag{24}$$

Очевидно, минимум этой функции достигается на  $[y_0, y^0]$ .

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$y_1^* \in [y_0, y^0], \quad (25)$$

$$y_2^* = 1 - y_1^*. \quad (26)$$

Из требования  $E \leq A$  следует, что

$$P \geq P_0 / (1 - S) = P_{0S}. \quad (27)$$

Границы диапазона находятся решением уравнений

$$y_0 = (E - A) / (B - A) = (A - E) / (A - B) = (P - P_0 - PS) / (1 - P)(1 - 2P_0 - S). \quad (28)$$

$$y^0 = (E - B) / (A - B) = (1 - 2P - P_0 - S + 2PP_0 + 2PS) / (1 - P)(1 - 2P_0 - S) = (1 - 2P)(1 - S - P_0) / (1 - P)(1 - 2P_0 - S). \quad (29)$$

Сравнивая значения  $y_0$  и  $y^0$ , легко заметить, что эти значения симметричны относительно точки  $y = 1/2$ , т.е.

$$y^0 = 1 - y_0. \quad (30)$$

Из предложения случая II следует, что

$$E \geq (A + B) / 2, \quad (31)$$

из которого следует, что

$$A - E \leq E - B \quad (32)$$

и это приводит к неравенству

$$P \leq P_1 = (1 - S) / (3 - 3S - 2P_0). \quad (33)$$

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \\ x_6^* &= 0, \\ x_{12}^* &= 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Цена игры в этом случае равна

$$v = E = a(1 - P) + bP. \quad (35)$$

Итак, оптимальная стратегия системы наблюдения при условии

$$x^* = I_{12} = [S_2]. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь случай, когда включение источника  $S_1$  в канал связи достаточно вероятно, т.е. пусть выполняется соотношение

$$P \geq 1/2.$$

Исследуем матрицу  $\mathbf{I}$  на наличие в ней доминируемых стратегий, учитывая соотношение

$$P_0 + S \leq 1/2. \quad (37)$$

Сравнивая элементы строк матрицы  $\mathbf{I}$ , получим

$$I_1^j \geq I_3^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_6^j \geq I_8^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_4^j \geq I_2^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_7^j \geq I_5^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_{11}^j \geq I_{12}^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_{10}^j \geq I_9^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_4^j \geq I_1^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_7^j \geq I_6^j \text{ при } j = 1, 2;$$

$$I_{11}^j \geq I_{10}^j \text{ при } j = 1, 2. \quad (38)$$

Вычеркивая третью, восьмую, вторую, пятую, двенадцатую, девятую, первую, шестую, десятую стратегию (строку), получим в итоге три стратегии:  $\mathbf{I}_4, \mathbf{I}_7, \mathbf{I}_{11}$ .

Таким образом, задача сводится к решению игры с платежной матрицей  $\mathbf{I}$  размером  $(3 \times 2)$ , где элементы матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_7 \\ \mathbf{I}_{11} \end{matrix} \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ C & D \\ D & C \\ F & F \end{vmatrix}, \quad (39)$$

где

$$C = a(1 - P_0 - S + PS) + b(P_0 + S - PS),$$

$$D = a(P + P_0 - 2PP_0) + b(1 - P - P_0 + 2PP_0),$$

$$F = aP + b(1 - P).$$

Будем решать полученную игру графическим методом. Пусть  $y$  – вероятность выбора вторым игроком первой стратегии,  $(1 - y)$  – вероятность выбора вторым игроком второй стратегии, а  $Z_i$  – выигрыш первого игрока при выборе им  $i$ -й чистой стратегии.

Очевидно, случаю

$$i = 1, \text{ соответствует стратегия } \mathbf{I}_4,$$

$$i = 2, \text{ соответствует стратегия } \mathbf{I}_7,$$

$$i = 3, \text{ соответствует стратегия } \mathbf{I}_{12}.$$

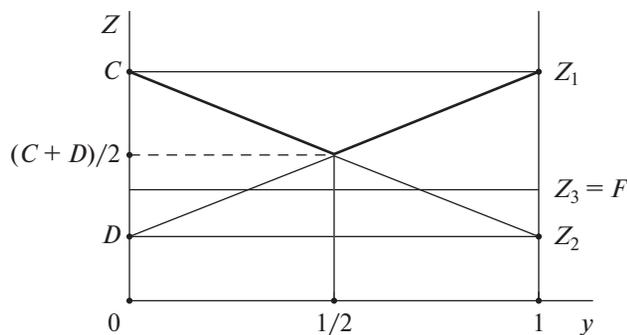


Рис. 4. Выигрыш первого игрока при  $P \leq P_2$ .

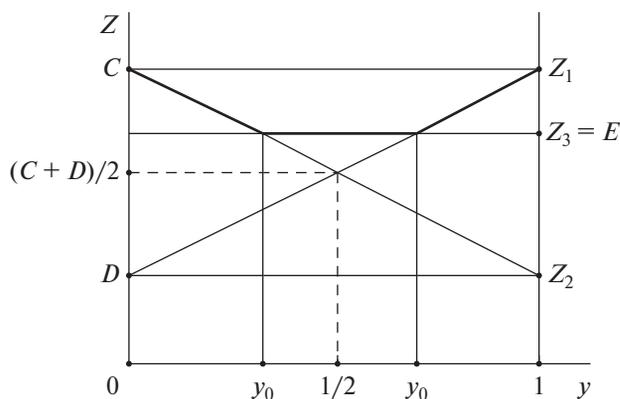


Рис. 5. Выигрыш первого игрока при  $P \geq P_2$ .

Итак, имеем

$$\begin{matrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} y & 1-y \\ C & D \\ D & C \\ F & F \end{matrix} \right\|, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= Cy + D(1 - y), \\ Z_2 &= Dy + C(1 - y), \\ Z_3 &= F. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} Z_1 &= (C - D)y + D, \\ Z_2 &= (D - C)y + C, \\ Z_3 &= F. \end{aligned} \quad (41)$$

Сравнивая между собой значения  $C$  и  $D$ , получим

$$\begin{aligned} C - D &= a(1 - P - 2P_0(1 - P) - S + PS) + \\ &+ b(2P_0 + S - PS - 1 + P - 2PP_0) = \\ &= (a - b)(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq \\ &\geq (a - b)(1 - P)(1 - 2P_0 - 2S) \geq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

I случай:  $F \leq (C + D)/2$ , или  $P \leq (1 - S)/(1 - S) + 2P_0 = P_2$ .

Выигрыш первого игрока при  $P \leq P_2$  представлен на рис. 4:

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 4 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

Как следует из графика, минимальное значение функции  $Z(y)$  достигается при  $y = 1/2$  и равно  $(C + D)/2$ . Значит, цена игры

$$v = (C + D)/2. \quad (43)$$

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$\begin{aligned} y_1^* &= 1/2, \\ y_2^* &= 1/2. \end{aligned} \quad (44)$$

Оптимальная стратегия первого игрока находится в виде решения относительно  $x$  уравнения

$$xC + (1 - x)D = xD + (1 - x)C. \quad (45)$$

Итак, решение этого уравнения дает

$$\begin{aligned} x_4^* &= 1/2, \\ x_7^* &= 1/2, \\ x_{11}^* &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Очевидно, неравенство  $F \leq (C + D)/2$  равносильно неравенству

$$(C - F) + (D - F) \geq 0, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} C - F &= a(1 - P_0 - S + PS - P) + \\ &+ b(-1 + P + P_0 + S - PS) = \\ &= (a - b)(1 - P - P_0 - S + P), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} D - F &= a(P_0 - 2PP_0) + \\ &+ b(-P_0 + 2PP_0) = (a - b)P_0(1 - 2P). \end{aligned} \quad (49)$$

Отсюда следует

$$P \leq (1 - S)/(1 - S + 2P_0) = P_2. \quad (50)$$

Цена игры в этом случае

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P - S - 2PP_0 + PS)/2. \quad (51)$$

Перейдем к оставшейся части диапазона параметра  $P$ .

$$F \geq (C + D)/2, \text{ или } P \geq (1 - S)/(1 - S + 2P_0) = P_2.$$

Выигрыш первого игрока при  $P \geq P_2$  представлен на рис. 5.

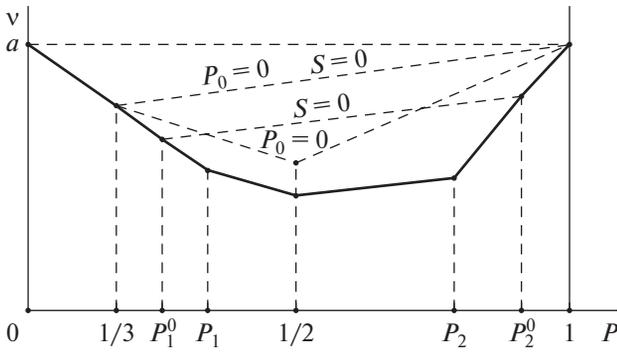


Рис. 6. Зависимость цены игры от априорной вероятности.

Из теории игр известно [5], что цена игры равна

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 5 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

Минимум ее достигается на отрезке  $[y_0, y^0]$ .

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$y_1^* \in [y_0, y^0],$$

$$y_2^* = 1 - y_1^*.$$

Границы данного диапазона имеют вид

$$y_0 = (F - C)/(D - C) = (C - F)/(C - D) = (1 - P - P_0 - S + PS)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S), \quad (52)$$

$$y^0 = (F - D)/(C - D) = (2PP_0 - P_0)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S). \quad (53)$$

Легко видеть, что  $y_0$  и  $y^0$  симметричны относительно  $y = 1/2$ , т.е.

$$y_0 = 1 - y^0.$$

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$x_4^* = 0,$$

$$x_7^* = 0, \quad (54)$$

$$x_{11}^* = 1.$$

Цена игры на этой части диапазона равна

$$v = aP + b(1 - P). \quad (55)$$

Итак, получим четыре интервала параметра  $P$ :

$$[0, P_1], [P_1, 1/2], [1/2, P_2], [P_2, 1].$$

Зависимость цены игры от априорной вероятности представлена на рис. 6.

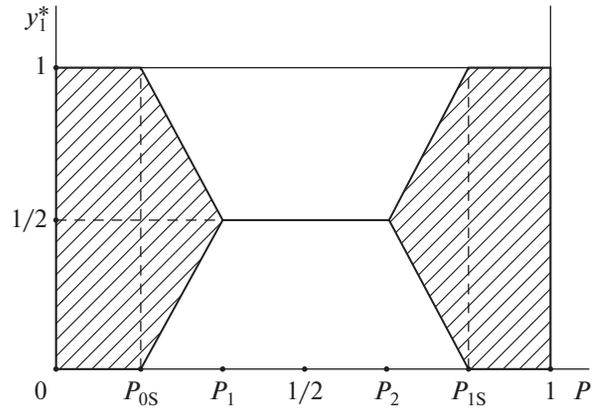


Рис. 7. Оптимальная стратегия второго игрока.

На графике приведены также и частные случаи задачи: полное отсутствие помех ( $P_0 = 0, S = 0$ ), случай отсутствия стирания ( $S = 0$ ), случай отсутствия помех трансформации ( $P_0 = 0$ ).

Значения параметров, отмеченных на графике, имеют вид

$$P_1 = (1 - S)/(1 - 3S - 2P_0), \quad (56)$$

$$P_2 = (1 - S)/(1 - S + 2P_0), \quad (57)$$

$$P_1^0 = 1/(3 - 2P_0), \quad (58)$$

$$P_2^0 = 1/(1 + 2P_0). \quad (59)$$

Итак, при  $P \leq P_1$  цена игры равна

$$v = a(1 - P) + bP, \quad (60)$$

при  $P_1 \leq P \leq 1/2$  цена игры –

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P + S - 2PP_0 - 3PS)/2, \quad (61)$$

при  $1/2 \leq P \leq P_2$  цена игры –

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P - S - 2PP_0 + PS)/2, \quad (62)$$

при  $P_2 \leq P$  цена игры –

$$v = aP + b(1 - P). \quad (63)$$

Оптимальная стратегия второго игрока представлена на рис. 7.

Значения параметров имеют вид

$$P_{0S} = P_0/(1 - S), \quad (64)$$

$$P_{1S} = (1 - P_0 - S)/(1 - S). \quad (65)$$

Очевидно, что  $P_{0S}$  и  $P_{1S}$  симметричны относительно  $P = 1/2$ ,

$$P_{0S} = 1 - P_{1S}. \quad (66)$$

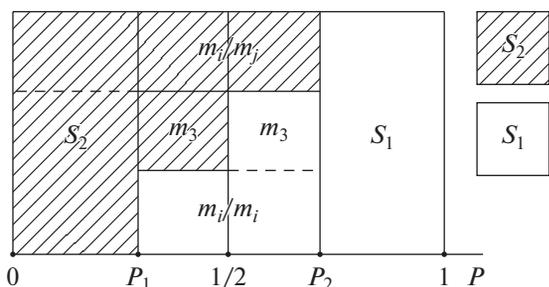


Рис. 8. Оптимальная стратегия системы наблюдения.

### 3. ИТОГОВОЕ ПРАВИЛО

Решающее правило системы имеет вид:  
на отрезке  $[0, P_1]$  принимается решение “ $S_2$ ”

$$m_1 : m_2 m_3 / m_1 \} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (67)$$

на отрезке  $[P_1, 1/2]$  – решение

$$m_2 : m_1 m_3 / m_2 \} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (68)$$

или решение

$$m_1 m_3 : m_2 / m_1 \} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (69)$$

на отрезке  $[1/2, P_2]$  – решение

$$m_2 m_3 : m_1 / m_2 \} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (70)$$

на отрезке  $[P_2, 1]$  принимается решение “ $S_1$ ”.

Оптимальное решение можно представить при  $(i \neq j)$  на рис. 8.

Решающее правило системы наблюдения можно представить и в другой форме. Итоговое решающее правило системы наблюдения представлено на рис. 9.



Рис. 9. Итоговое решающее правило системы наблюдения.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов В.В. // Вопросы математического моделирования. М. ИРЭ АН СССР, 1979. С.25.
2. Крапивин В.Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. М.: Сов. радио, 1972.
3. Климов В.В. // Экологические системы и приборы. 2000. № 5. С. 2.
4. Венцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
5. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Сов. радио, 1964.

ВОЗДЕЙСТВИЕ МОЩНОГО ИМПУЛЬСА СВЕТА  
НА ТРАЕКТОРИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН  
В ЛИНЕЙНО НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ© 2023 г. В. С. Власов<sup>а</sup>, В. Г. Шавров<sup>б, \*</sup>, В. И. Щеглов<sup>б</sup><sup>а</sup>Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина,  
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: shavrov@cplire.ru

Поступила в редакцию 17.05.2022 г.

После доработки 17.05.2022 г.

Принята к публикации 27.05.2022 г.

Рассмотрена трансформация траекторий поверхностных магнитостатических волн, распространяющихся в ферритовой пленке, намагниченной линейно неоднородным полем, вызванная воздействием мощного импульса света от фемтосекундного лазера. В качестве механизма действия света на распространение волн отмечено уменьшение намагниченности пленки за счет повышения ее температуры. Выявлен ступенчатый характер трансформации траекторий распространяющихся волн, синхронный с временными параметрами фемтосекундного импульса. Трансформация траекторий интерпретирована на основе методов изочастотных кривых и Гамильтона–Аулда.

DOI: 10.31857/S003384942303018X, EDN: IDWRJK

## ВВЕДЕНИЕ

Магнитостатические волны, распространяющиеся в пленках железо-иттриевого граната (ЖИГ), являются основой для широкого класса устройств обработки информации в СВЧ-диапазоне [1–6]. В последнее время значительное развитие получило исследование волновых процессов в магнитных средах, подверженных воздействию мощных импульсов света от фемтосекундного лазера [7–17]. Порождаемые при этом интенсивные упругие волны за счет магнитоупругости дают начало магнитоупругим и чисто магнитным – магнитостатическим волнам, что находит свое отражение в развитии широкого направления, именуемого “сверхбыстрой магнитоакустикой” [18].

В большинстве известных работ описаны магнитостатические волны, распространяющиеся в однородном поле, так что их пучок является прямолинейным. Дополнительные весьма широкие функциональные возможности открывает распространение магнитостатических волн в неоднородных полях [19–21], где траектория волнового пучка изгибается в соответствии с характером неоднородности поля. При неизменном направлении поля наиболее простыми конфигурациями неоднородности является “линейно неоднородное поле”, а также поля в виде “долины” и “вала” [21, с. 165].

Характерным свойством воздействия на магнитную среду импульсом света от фемтосекундного лазера является резкое, происходящее в фемтосекундном временном масштабе уменьшение намагниченности среды за счет повышения ее температуры [8, 22, 23]. При распространении магнитостатической волны в неоднородном поле изменение намагниченности среды должно приводить к изменению конфигурации траектории волнового пучка.

Цель данной работы – рассмотреть трансформацию траекторий поверхностных магнитостатических волн в линейно неоднородном поле, происходящую в результате резкого изменения намагниченности среды под действием мощного импульса света от фемтосекундного лазера.

## 1. ОБЩАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Общая геометрия задачи показана на рис. 1. В ее основе лежит ферритовая пленка (пластина) толщиной  $d$ , намагниченная постоянным полем  $H_0$  в ее плоскости. Декартова система координат  $Oxyz$  выбрана таким образом, что плоскость  $Oyz$  совпадает с плоскостью пленки, ось  $Ox$  ей перпендикулярна, а ось  $Oz$  ориентирована вдоль направления поля  $H_0$ . Направление этого поля по

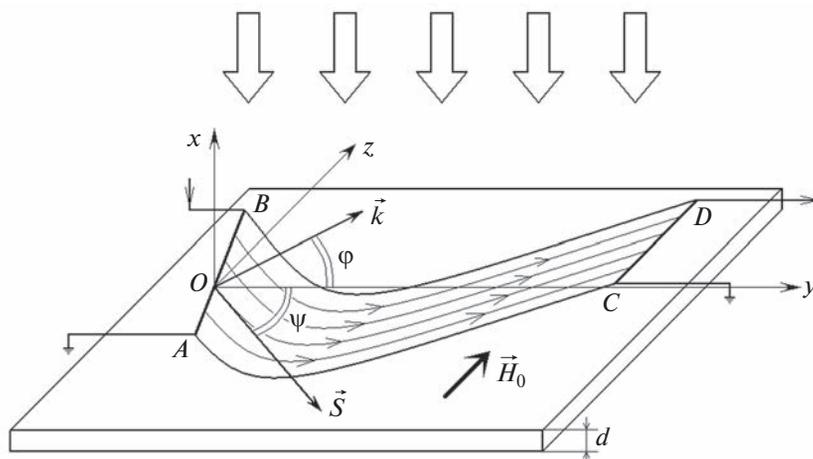


Рис. 1. Общая геометрия задачи.

всей плоскости пленки сохраняется постоянным, а его величина меняется. В рамках данной работы предполагается, что компонента поля  $H_z$  по мере увеличения координаты  $z$  возрастает по линейному закону.

Для возбуждения и приема магнитостатических волн используются два преобразователя –  $AB$  и  $CD$ , в простейшем случае выполненные в виде прямолинейных антенн, наложенных на поверхность пленки.

Начало системы координат  $O$  приходится на середину возбуждающего преобразователя  $AB$ . Преобразователь  $AB$  возбуждает пучок магнитостатических волн, показанный на рис. 1 в виде параллельных изогнутых линий. Стрелки указывают направление распространения пучка. Благодаря неоднородности поля  $H_0$  траектория пучка изгибается, приводя его к приемному преобразователю  $CD$ .

Волна, возбуждаемая преобразователем  $AB$ , имеет волновой вектор  $\vec{k}$ , перпендикулярный длине преобразователя. Азимутальный угол между волновым вектором и осью  $Oy$  обозначен через  $\varphi$ . Вследствие гиротропии материала пленки вектор групповой скорости  $\vec{s}$  той же волны направлен в противоположную сторону относительно оси  $Oy$ , составляя с этой осью азимутальный угол  $\psi$ . В процессе распространения волны вектор групповой скорости  $\vec{s}$  всегда ориентирован вдоль траектории распространения, а проекция волнового вектора  $\vec{k}$  на ось  $Oy$  сохраняется. Таким образом, в процессе распространения волны углы  $\varphi$  и  $\psi$  могут изменяться.

При положительном значении угла  $\varphi$  в точке исхода волны от излучающего преобразователя  $AB$ , а также при линейном возрастании поля вдоль координаты  $z$ , траектория имеет  $V$ -образный

вид, т.е. сначала волна идет в сторону меньшего поля, после чего, пройдя минимум, устремляется к большему значению поля, вплоть до достижения верхней полевой границы существования магнитостатических волн [21, с. 166, рис. 4.2, кривая  $L_3$ ].

Основная задача данной работы – рассмотреть трансформацию траекторий под действием мощного импульса света. В данной геометрии лучи света падают на всю рабочую поверхность пленки в целом (см. рис. 1, широкие стрелки сверху), однако время падения света определяется началом и продолжительностью импульса фемтосекундного лазера и может быть согласовано со временем распространения магнитостатической волны вдоль траектории.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ

Распространение поверхностных магнитостатических волн в приведенной геометрии описывается в рамках задачи Дэймона–Эшбаха [21, с. 50–76]. Дисперсионное соотношение, используемое далее, имеет вид [21, с. 67, ф-лы (2.299)–(2.305)]:

$$\beta - 1 - 2\mu\alpha [\text{th}(kd\alpha)]^{-1} = 0, \quad (1)$$

где

$$\beta = (v^2 - \mu^2 + \mu) \cos^2 \varphi - \mu; \quad (2)$$

$$\mu = 1 + \Omega_H / (\Omega_H^2 - \Omega^2); \quad (3)$$

$$v = \Omega / (\Omega_H^2 - \Omega^2); \quad (4)$$

$$\Omega = \omega / 4\pi\gamma M_0; \quad (5)$$

$$\Omega_H = H_0 / 4\pi M_0. \quad (6)$$

Здесь  $M_0$  – намагниченность насыщения материала пленки,  $\omega$  – частота волны,  $\gamma$  – гиромагнит-

ная постоянная (2.8 МГц Э<sup>-1</sup>), параметр α определяется соотношением [21, с. 66, ф-ла (2.289)]:

$$\alpha = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi / \mu}. \quad (7)$$

Предельные значения дисперсионного соотношения (1) при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$  позволяют определить область существования поверхностных магнитостатических волн по частоте, заключенную в следующих пределах:

$$\omega^{(1)} = \gamma \sqrt{H_0 (H_0 + 4\pi M_0)}; \quad (8)$$

$$\omega^{(2)} = \gamma (H_0 + 2\pi M_0), \quad (9)$$

где  $\omega^{(1)} < \omega^{(2)}$ .

Формулы (8), (9) дают допустимый интервал существования тех же волн по полю:

$$H_0^{(1)} = -2\pi M_0 + \sqrt{(2\pi M_0)^2 + (\omega^{(1)}/\gamma)^2}; \quad (10)$$

$$H_0^{(2)} = \omega^{(2)}/\gamma - 2\pi M_0, \quad (11)$$

где  $H_0^{(1)} > H_0^{(2)}$ .

Дисперсионное соотношение (1) позволяет на плоскости  $O k_y k_z$  построить систему вложенных друг в друга изочастотных кривых, близких по виду к гиперболом, симметричным относительно оси  $O k_y$ . В каждой точке изочастотной кривой заканчивается волновой вектор  $\vec{k}$  и начинается соответствующий вектор групповой скорости  $\vec{s}$ , причем вектор групповой скорости  $\vec{s}$  всегда перпендикулярен касательной к изочастотной кривой [21, с. 96, рис. 2.9].

Для расчета траекторий магнитостатических волн в неоднородном поле далее будем использовать метод Гамильтона–Аулда [21, с. 99–106], состоящий в решении системы уравнений [21, с. 106, ф-лы (2.649)–(2.651)]:

$$\frac{dk}{dy} = k \left( \frac{\partial k}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial z} \sin \varphi \right) \times \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}; \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = - \left( \frac{\partial k}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial z} \cos \varphi \right) \times \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}; \quad (13)$$

$$\frac{dz}{dy} = \left( k \sin \varphi - \frac{\partial k}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \left( k \cos \varphi + \frac{\partial k}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)^{-1}. \quad (14)$$

В рамках данной работы эта система решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка [24, с. 702, табл. 20.8-1, вариант “с”].

### 3. ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

Используем параметры, характерные для задач о распространении поверхностных магнитостатических волн в пленках ЖИГ [21].

Намагниченность насыщения пленки: начальная  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, уменьшенная в результате действия импульса света 1400...1600 Гс. Толщина пленки  $d = 15$  мкм. Частота СВЧ 3000 МГц, т.е.  $\omega = 1.855 \times 10^{10}$  с<sup>-1</sup>. Начальный угол (при  $y = 0$ ) между волновым вектором  $\vec{k}$  и осью  $Oy$ :  $\varphi_0 = 30^\circ$ .

Постоянное поле полагаем линейно возрастающим вдоль оси  $Oz$  в виде

$$H_{0z} = H_{00} + 4\pi M_0 g_h z, \quad (15)$$

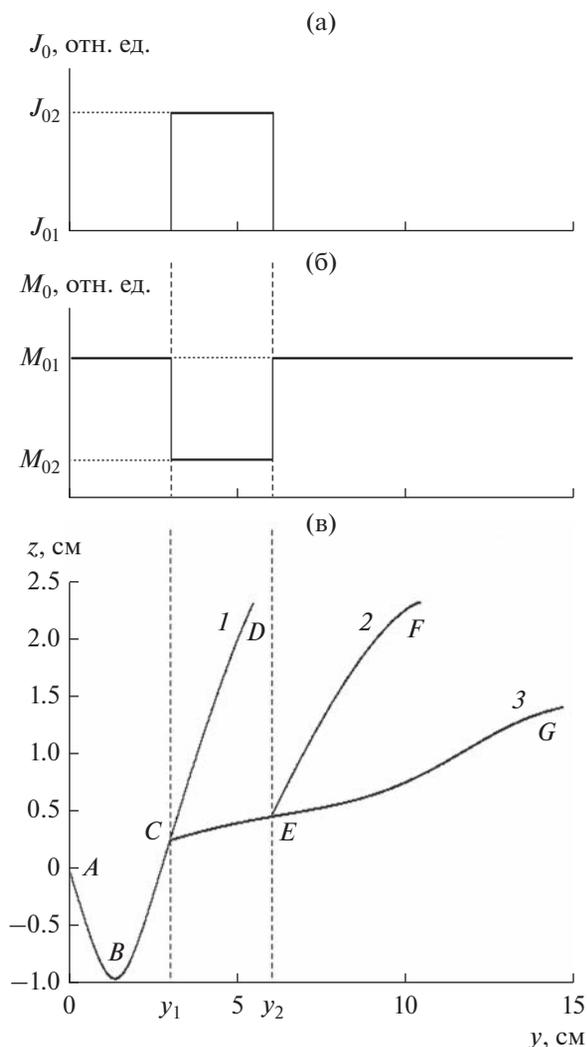
где  $H_{00} = 437.5$  Э,  $g_h = 0.03125$  Э см<sup>-1</sup>,  $H_{0z}$  измеряется в Э, а  $z$  – в см.

### 4. СКАЧОК ТРАЕКТОРИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА СВЕТА

Качественная картина трансформации траектории поверхностной магнитостатической волны под действием импульса света представлена на рис. 2.

Траектория строится в координатах  $y$  и  $z$  путем прохождения по шагам  $\Delta y$  системы уравнений (12)–(14). В общем случае эта система не содержит явной зависимости от времени, так что описывает конфигурацию траектории волнового пучка в стационарном режиме. Однако если возбуждающий СВЧ-сигнал не является непрерывным во времени, а представляет собой достаточно короткий импульс, то возбуждение магнитной среды, создаваемое этим импульсом, будет распространяться по той же траектории, что и волна в стационарном режиме. Полагая, что длительность импульса возбуждающего СВЧ-сигнала значительно меньше полного времени прохождения магнитного импульса по всей траектории, получаем, что развертка по времени движения импульса эквивалентна развертке траектории по координате  $y$ . Таким образом, далее будем рассматривать развитие процесса распространения магнитного импульса не по времени, а по координате  $y$ .

Согласно рис. 2а, будем полагать, что свет характеризуется двумя уровнями интенсивности:  $J_{01}$ , когда он отсутствует, и  $J_{02}$ , когда он максимален. При этом до момента времени, когда магнитный импульс достигает координаты  $y_1$ , интенсивность света  $J_{01}$  равна нулю, после чего резко возрастает до уровня  $J_{02}$ , а в момент времени, когда магнитный импульс достигает координаты  $y_2$ , снова падает до нуля, оставаясь такой до окончания прохождения магнитного импульса по всей траектории.



**Рис. 2.** Иллюстрация скачка магнитной траектории под действием импульса света. а – импульс света; б – намагниченность; в – траектория магнитного импульса.

Согласно рис. 2б, скачкообразное увеличение интенсивности света при координате  $y_1$  приводит к резкому падению намагниченности пленки с начального значения  $M_{01}$  до значительно более низкого уровня  $M_{02}$ . Окончание действия импульса света при координате  $y_2$  возвращает намагниченность к прежнему значению  $M_{01}$ .

Траектория движения магнитного импульса по плоскости пленки показана на рис. 2в. В отсутствие светового импульса траектория проходит через точки  $A-B-C-D$  (кривая 1), соответствующие намагниченности  $M_{01}$ , представляя собой классический вид траектории “плюс-типа”, характерный для намагничивания пленки линейно возрастающим полем [21, с. 166, рис. 4.2, кривая  $L_3$ ].

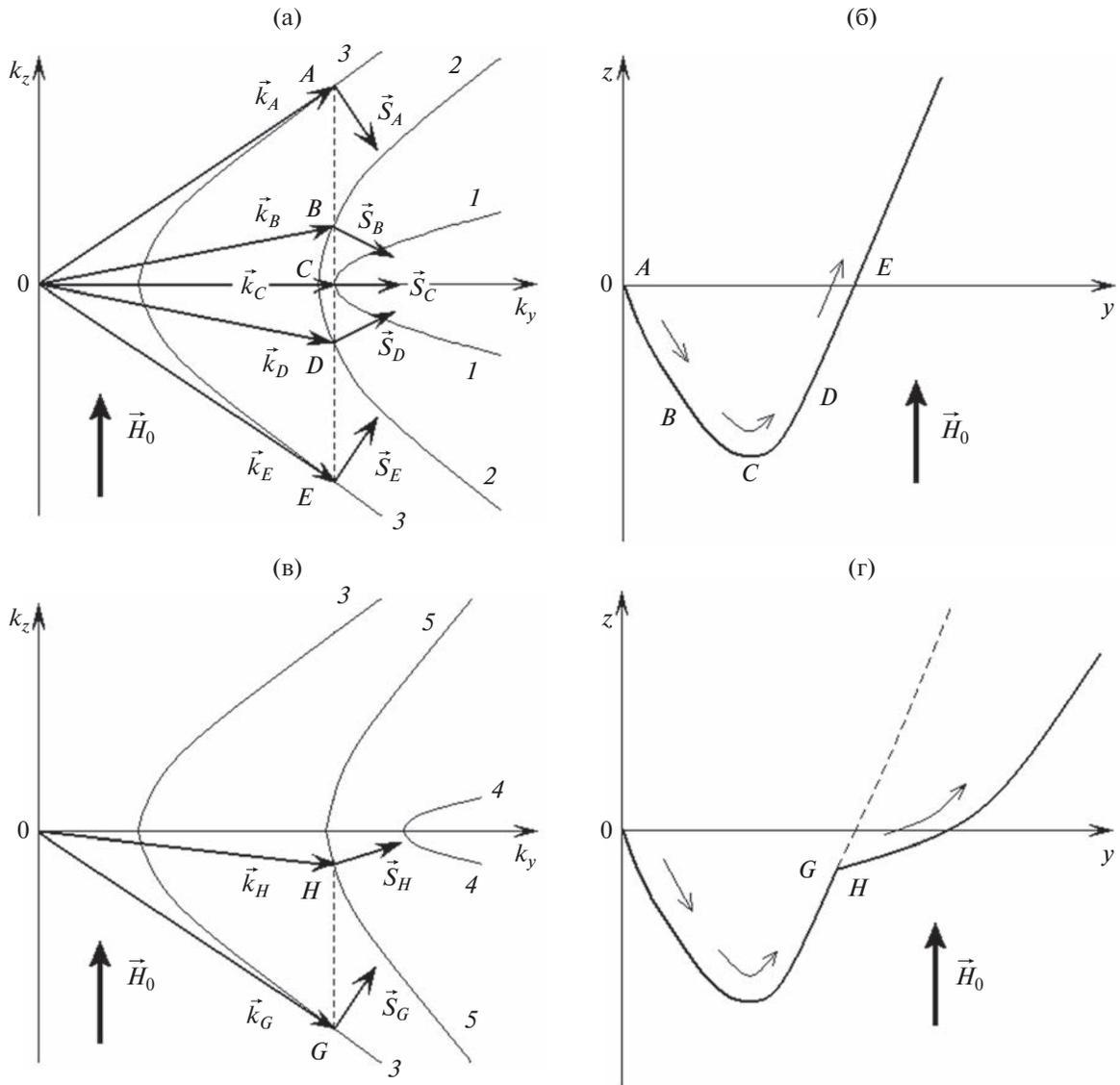
Световой импульс при координате  $y_1$  достигает траекторию в точке  $C$ , где намагниченность резко падает, так что далее  $y_1$  магнитный импульс движется по значительно более пологой траектории  $C-E-G$  (кривая 3), имеющей тот же “плюс-тип”, но соответствующий меньшему значению намагниченности  $M_{02}$  (см. рис. 2б).

Однако продолжительность светового импульса ограничена, так что он заканчивается при координате  $y_2$ , в результате чего намагниченность возвращается к прежнему значению  $M_{01}$  (см. рис. 2б). Траектория магнитного импульса в точке  $E$ , соответствующей координате  $y_2$ , возвращается к прежнему виду “плюс-типа” с тем отличием, что здесь она начинается в другой точке и соответствующий ее участок принимает вид  $E-F$  (кривая 2). Таким образом, полная траектория движения магнитного импульса, подверженная действию импульса света, имеет вид  $A-B-C-E-F$ .

*Замечание.* Проведенное рассмотрение предполагает, что изменение намагниченности следует за изменением интенсивности света полностью синхронно, т.е. мгновенным образом. Однако в реальном случае намагниченность при изменении температуры пленки меняется по экспоненциальному закону [17]. Влияние магнитоупругости вносит дополнительные особенности [16]. Учет таких особенностей может составить предмет для отдельного исследования.

## 5. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СКАЧКА ТРАЕКТОРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ИЗОЧАСТОТНЫХ КРИВЫХ

Рассмотрим теперь интерпретацию скачка траектории на основе метода изочастотных кривых. Будем считать, что скачок траектории обусловлен скачкообразным уменьшением намагниченности. Для подробного рассмотрения обратимся к рис. 3. В соответствии с геометрией, представленной на рис. 1, постоянное поле  $H_0$  направлено вдоль оси  $Oz$ , причем величина поля вдоль этой координаты линейно увеличивается в соответствии с формулой (15). Для построения изочастотных кривых используется система  $O k_y k_z$ , оси которой параллельны осям системы  $O u z$ . Все изочастотные кривые 1–3 на рис. 3а и кривые 4, 5 на рис. 3в построены при одной и той же частоте, которая остается постоянной на всей траектории волнового пучка. Верхние части изочастотных кривых 1–3 на рис. 3а (выше горизонтальной оси при  $k_z = 0$ ) соответствуют последовательному прохождению волнового пучка из области большего поля к области меньшего поля. Нижние части тех же кривых соответствуют движению волнового пучка в обратном направлении. Изочастотная кривая 3 на рис. 3а соответствует такой же кривой 3 на



**Рис. 3.** Схема интерпретации скачка траектории на основе метода изочастотных кривых. а – изочастотные кривые до скачка; б – траектория до скачка; в – изочастотные кривые после скачка; г – траектория после скачка. Масштаб по осям изменен для повышения наглядности.

рис. 3в. Все кривые 1–3 на рис. 3а и 3 на рис. 3в соответствуют начальному значению намагниченности до скачка. Кривые 4 и 5 на рис. 3в соответствуют значению намагниченности, уменьшенному в результате скачка. Видно, что эти кривые, оставаясь подобными кривым 1–3, как бы “выдвинуты” из них в сторону больших значений  $k_y$  (так, кривая 4 расположена правее кривой 1, а кривая 5 – правее кривой 3).

На рис. 3а показаны изочастотные кривые до скачка намагниченности. Волновой пучок возбуждается в точке А, где ему соответствует волновой вектор  $\vec{k}_A$  и вектор групповой скорости  $\vec{s}_A$ , перпендикулярный касательной к изочастотной кривой 3 в точке конца вектора  $\vec{k}_A$ . Траектория,

исходящая из точки А на рис. 3б, в соответствии с направлением вектора  $\vec{s}_A$  устремляется вниз по рисунку в область, соответствующую меньшему значению поля  $\vec{H}_0$ . В результате такого движения, волновой пучок переходит в область меньшего значения поля, чем в точке А, так что изочастотная кривая 2 имеет меньший раскрыв, чем кривая 3. Поскольку поле на всем протяжении траектории всегда остается направленным вдоль оси  $Oz$ , то компонента волнового вектора, перпендикулярная направлению поля, т.е.  $k_y$ , всегда остается постоянной (см. рис. 3а, пунктир проведен через точки А–В–С–D–Е, а также рис. 3в, пунктир через точки G–H).

Таким образом, в точке  $B$  изочастотной кривой 2 волновой вектор принимает значение  $\vec{k}_B$ , а вектор групповой скорости – значение  $\vec{s}_B$ . Вектор  $\vec{s}_B$  наклонен относительно оси  $Ok_y$  меньше, чем вектор  $\vec{s}_A$ , так что падение траектории вниз замедляется.

При переходе волнового пучка к еще меньшему значению поля наступает момент, когда волновой вектор  $\vec{k}_C$  ориентируется точно вдоль оси  $Ok_y$ , что соответствует точке  $C$  и изочастотной кривой 1. При этом вектор групповой скорости  $\vec{s}_C$  также выстраивается вдоль оси  $Ok_y$ , так что свое падение прекращает и дальше переходит на ветвь, стремящуюся вверх.

Волновой пучок переходит в область большего поля, что соответствует расширению изочастотной кривой, принимающей вид кривой 2 (см. рис. 3а). Волновой вектор в точке  $D$  принимает значение  $\vec{k}_D$ , а вектор групповой скорости – значение  $\vec{s}_D$ , отклоненное от горизонтальной оси вверх, в результате чего траектория, пройдя точку  $C$ , переходит к точке  $D$ , расположенной выше точки  $C$ . Таким образом, траектория, минув минимум в точке  $C$ , устремляется вверх в сторону большего поля.

Дальнейшее распространение волнового пучка происходит с переходом от точки  $D$  к точке  $E$ , с изочастотной кривой 2 на кривую 3, где волновой вектор принимает значение  $\vec{k}_E$ , а вектор групповой скорости – значение  $\vec{s}_E$ , так что траектория проходит от точки  $D$  к точке  $E$ , принимая в целом  $V$ -образный характер [21, стр. 166, рис. 4.2, кривая  $L_3$ ].

Такой вид траектории и распространение волнового пучка происходит при сохранении постоянного значения намагниченности. Если же намагниченность где-то между точками  $D$  и  $E$  скачкообразно уменьшается, то переход по изочастотным кривым происходит на систему кривых 4, 5, “выдвинутых” из системы 1–3, как это показано на рис. 3в. При этом при условии сохранения компоненты волнового вектора  $k_y$  (см. рис. 3в, штриховая линия) происходит переход от точки  $G$  к точке  $H$ , где волновой вектор принимает значение  $\vec{k}_H$ , а вектор групповой скорости – значение  $\vec{s}_H$ . Как видим, отклонение вектора  $\vec{s}_H$  от горизонтальной оси значительно меньше, чем отклонение вектора  $\vec{s}_D$ , так что траектория претерпевает излом, соответствующий скачку в изменении ориентации вектора  $\vec{s}_C$  на ориентацию вектора  $\vec{s}_H$ , в результате чего ее движение вверх замедляется. На рис. 3в такой излом траектории соответствует скачку по изочастотным кривым от точки  $G$  на точку  $H$ , так что на траектории эти точки сливаются воедино.

Дальнейший ход траектории подобен таковому до скачка намагниченности (выше точки  $E$  на рис. 3б), так что она идет вверх, как и ранее, в сторону увеличения поля, т.е. уже без каких-либо особенностей.

Трансформацию траектории при втором скачке намагниченности, в том числе при восстановлении ее до начального значения, можно рассмотреть подобным же способом, используя вместо системы изочастотных кривых на рис. 3в первоначальную систему кривых, приведенную на рис. 3а. При этом траектория на рис. 3г получит продолжение далее точки  $H$  с точки, где произойдет второй скачок намагниченности, соответствующий возвращению намагниченности к начальному значению, т.е. пойдет далее вверх более круто, подобно продолжению участка  $D$ – $E$  на рис. 3б.

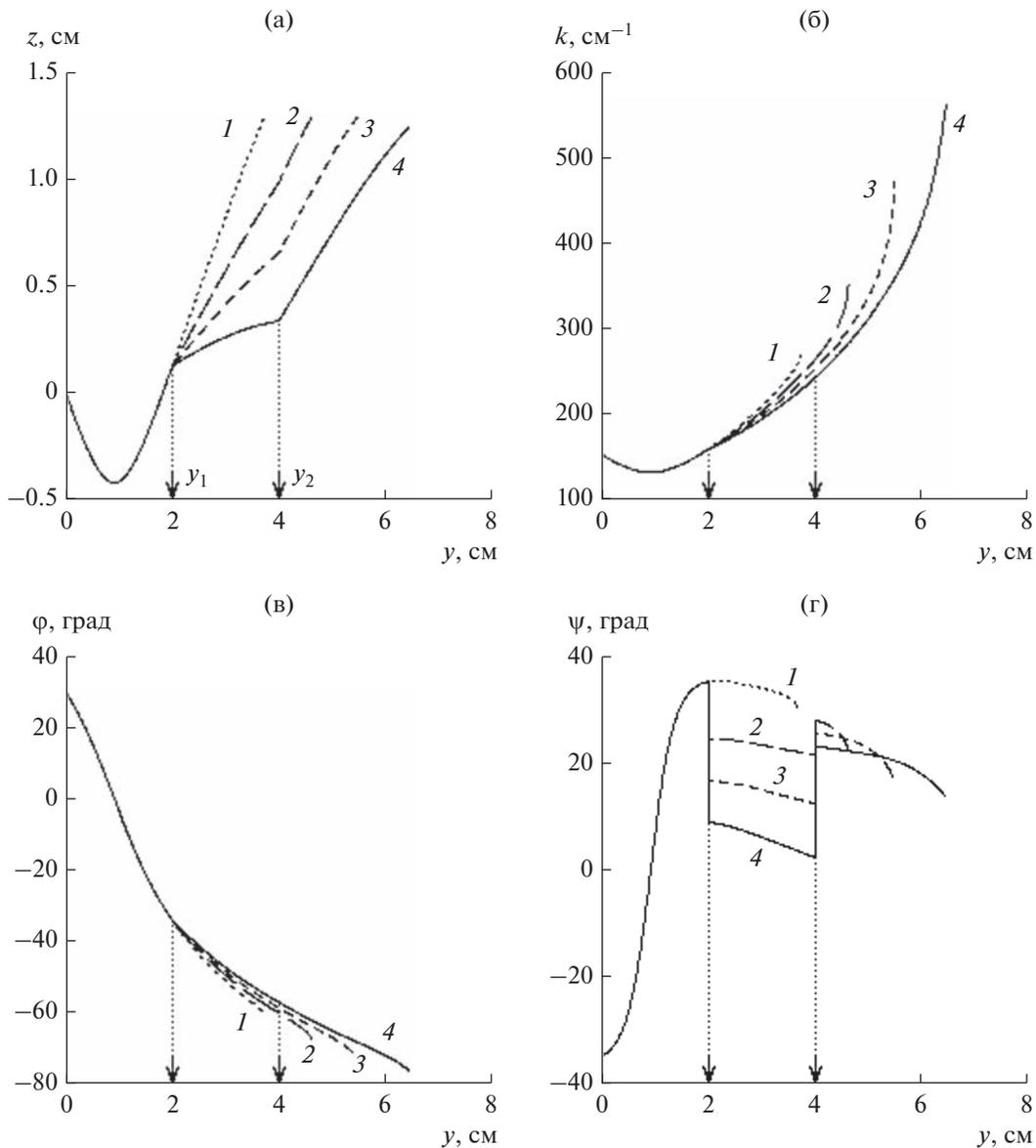
Таким образом, качественно можно полагать, что изначально траектория стремится к большему значению поля, а действие импульса, уменьшающего намагниченность, этому стремлению мешает, так что движение траектории вверх по полю замедляется, однако после окончания импульса, когда намагниченность восстанавливается до прежнего значения, стремление траектории к большему значению поля возобновляется с прежней силой.

## 6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СКАЧКА ТРАЕКТОРИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА–АУЛДА

Рассмотрим теперь обусловленное импульсом света скачкообразное изменение траектории методом Гамильтона–Аулда.

На рис. 4 показаны траектории и соответствующие им зависимости от координаты  $y$  волнового числа  $k$ , азимутальных углов волнового вектора  $\varphi$  и вектора групповой скорости  $\psi$  при различных значениях скачка намагниченности.

Из рис. 4а видно, что все траектории имеют вид “плюс-типа”, подобный показанной на рис. 3в кривой  $A$ – $B$ – $C$ – $E$ – $F$ . При этом излом, соответствующий действию импульса света, по мере увеличения скачка намагниченности, от кривой 1 до кривой 4, также увеличивается. При  $4\pi M_0 = 1750$  Гс, т.е. до начала импульса света и после его окончания, границы интервала существования поверхностных магнитостатических волн в соответствии с формулами (11) и (10) равны:  $H_0^{(2)} = 196.43$  Э и  $H_0^{(1)} = 508.32$  Э. Эти поля соответствуют интервалу координаты  $z$  от  $-4.41$  до  $1.29$  см. Из рис. 4а можно видеть, что все траектории заканчиваются при координате  $z = 1.29$  см, соответствующей верхнему пределу поля  $H_0^{(1)}$ . Нижний предел поля  $H_0^{(2)}$ , соответствующий координате  $z = -4.41$  см не достигается, так как тра-



**Рис. 4.** Траектории волнового пучка (а) и соответствующие им зависимости от координаты  $y$  волнового числа  $k$  (б), азимутальных углов волнового вектора  $\varphi$  (в) и вектора групповой скорости  $\psi$  (г) при различных значениях скачка намагниченности:  $M_{01} = 1750$  Гс (кривые 1–4) и  $M_{02} = 1750$  (1), 1600 (2), 1500 (3), 1400 Гс (4); координаты  $y_1 = 2$  см и  $y_2 = 4$  см (пунктирные стрелки) соответствуют началу и концу импульса света; поле  $H_{0z}$  определяется формулой (15).

ектория поворачивает в сторону большего поля значительно раньше.

Из рис. 4б видно, что кривые 1–4 для волновых чисел до начала действия импульса света полностью совпадают, после чего расходятся тем сильнее, чем скачок намагниченности больше. Все кривые заканчиваются при значениях  $y$ , соответствующих окончанию траекторий на рис. 4а. При этом излом кривых заметен только при  $y_1$ , причем является незначительным, а при  $y_2$  видимый излом вообще отсутствует.

Из рис. 4в видно, что азимутальные углы волнового вектора  $\varphi$  также расщепляются, начиная с  $y_1$ , причем отщепление тем заметнее, чем скачок намагниченности больше. Излом кривых также заметен только при  $y = y_1$ , а при  $y_2$  уже отсутствует. Кривые заканчиваются при значениях  $y$ , соответствующих окончанию траекторий на рис. 4а, а предельные достигаемые значения углов  $\varphi$  определяются углами отсечки [21, с. 72–74].

Из рис. 4г видно, что азимутальные углы вектора групповой скорости  $\psi$  в интервале действия импульса света имеют резко выраженный провал,

тем более глубокий, чем скачок намагниченности больше. Скачкообразное изменение угла  $\psi$  имеет место как при начале действия импульса света, т.е. при  $u_1$ , так и при его окончании, т.е. при  $u_2$ . Окончание кривых 1–4 по  $u$  также соответствует окончаниям траекторий на рис. 4а. Резкое уменьшение угла  $\psi$  при  $u = u_1$  соответствует переходу с изочастотной кривой 5 на изочастотную кривую 3, как это показано на рис. 3в. Увеличение того же угла при  $u = u_2$  соответствует возвращению вектора групповой скорости с кривой 3 обратно на кривую 5.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрена трансформация траекторий поверхностных магнитоэлектронных волн, распространяющихся в ферритовой пленке, намагниченной линейно неоднородным полем, вызванная воздействием мощного импульса света от фемтосекундного лазера. Отмечено, что действие света приводит к резкому уменьшению намагниченности пленки за счет повышения ее температуры. В случае, когда длительность импульса значительно меньше времени прохождения волны по всей траектории, часть своего пути волна проходит в среде с меньшей намагниченностью, что приводит к появлению на траектории излома ступенчатого вида. Ступенчатая трансформация траектории качественно интерпретирована с помощью метода изочастотных кривых. Количественная интерпретация явления выполнена на основе метода Гамильтона–Аулда. Получены конфигурации траекторий при различных значениях скачка намагниченности. Отмечено, что увеличение скачка приводит к усилению трансформации траектории. Получены зависимости волнового числа, а также азимутальных углов волнового вектора и вектора групповой скорости от координаты по ходу траектории. Наиболее заметный скачок выявлен для азимутального угла вектора групповой скорости. Характер и величина этого скачка интерпретированы на основе изочастотных кривых.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-55-53019 ГФЕН\_а), Российского научного фонда (проекты № 21-72-20048 и

21-47-00019) и Правительства Республики Коми и РФФИ (проект № 20-42-110004, р\_а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adam J.D., Davis L.E., Dionne G.F. et al. // IEEE Trans. 2002. V. MTT-50. № 3. P. 721.
2. Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. V. 43. № 26. Article No. 264001.
3. Serga A.A., Chumak A.V., Hillebrands B. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. V. 43. № 26. Article No. 264002.
4. Kim S.-K. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. V. 43. № 26. Article No. 264004.
5. Khitun A., Bao M., Wang K.L. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. V. 43. № 26. Article No. 264005.
6. Au Y., Ahmad E., Dmytriiev O. et al. // Appl. Phys. Lett. 2012. V. 100. № 18. P. 182404.
7. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. № 3. P. 2731.
8. Bigot J.V., Vomir M. // Ann. Phys. (Berlin). 2013. V. 525. № 1–2. P. 2.
9. Walowski J., Münzenberg M. // J. Appl. Phys. 2016. V. 120. № 14. P. 140901.
10. Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M. et al. // Phys. Rev. B. 2012. V. 86. № 13. P. 134415.
11. Thevenard L., Gourdon C., Prieur J.Y. et al. // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. № 9. P. 094401.
12. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T. et al. // Phys. Rev. B. 2016. V. 94. № 2. P. 024415.
13. Chang C.L., Lomonosov A.M., Janusonis J. et al. // Phys. Rev. B. 2017. V. 95. № 6. P. 060409.
14. Чернов А.И., Кожяев М.А., Ветошко П.М. и др. // ФТТ. 2016. Т. 58. № 6. С. 1093.
15. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
16. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
17. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>.
18. Власов В.С., Голов А.В., Котов Л.Н. и др. // Акустич. журн. 2022. Т. 68. № 1. С. 22.
19. Auld B.A. // Bell Syst. Tech. J. 1965. V. 44. № 3. P. 495.
20. Беснятых Ю.И., Зубков В.И., Тарасенко В.В. // ЖТФ. 1980. Т. 50. № 1. С. 140.
21. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитоэлектронные волны в неоднородных полях. М.: Физматлит, 2016.
22. Beaurepaire E., Merle J.C., Daunois A., Bigot J.Y. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 22. P. 4250.
23. Koopmans B., Malinowski G., Dalla Longa F. et al. // Nature Mater. 2010. V. 9. № 3. P. 259.
24. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.

## ПРИМЕНЕНИЕ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

УДК 534.21

### АКУСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРА ДЫХАНИЯ ПРИ УМСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА

© 2023 г. А. В. Герус<sup>а</sup>, \*, В. В. Герасимов<sup>а</sup>, В. И. Миргородский<sup>а</sup>, Е. М. Кораблев<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

\*E-mail: agierus@fryazino.net

Поступила в редакцию 08.07.2022 г.

После доработки 08.07.2022 г.

Принята к публикации 25.07.2022 г.

Проведены экспериментальные исследования акустических сигналов, поступающих из головы человека при умственной деятельности. Обнаружены акустические сигналы, отличающиеся от сигналов при релаксации. В качестве умственной деятельности использовался счет таблицы умножения в уме. Показано, что эти отличия обусловлены изменением паттерна дыхания. Показано также, что наиболее информативные сигналы, связанные с дыханием, наблюдаются из области макушки (в точке, близкой к Cz, используемой в энцефалографии), а сигналы, связанные с пульсовой деятельностью – из области висков (в точке T<sub>3</sub>).

DOI: 10.31857/S0033849423030075, EDN: IDBOAT

#### ВВЕДЕНИЕ

Исследованию влияния умственной деятельности человека на различные параметры других видов жизнедеятельности был посвящен значительный объем как экспериментальных, так и теоретических исследований. Наиболее интересной оказалась связь умственной деятельности с параметрами дыхания. Основными способами исследовать параметры дыхания являются спирометрия – измерение объема воздуха, проходящего через легкие, тензометрия – измерение изменения охвата грудной клетки и живота при дыхании, применение акустического микрофона, устанавливаемого около носа или рта испытуемых, а также ряд других.

Исследованию зависимости параметров дыхания от когнитивной деятельности был посвящен целый ряд работ, например, [1–7]. Наиболее подробный анализ выполнен в работе [8], в которой довольно детально было изучено влияние амплитуды дыхания, его периода и других параметров при различных видах умственной деятельности для различных групп людей. Часть работ была посвящена исследованию акустических сигналов из головы человека [9–13]. Так, в [9] показана перспективность применения акустических датчиков в области от 0 до 10 кГц для регистрации различного рода сигналов. В [10] показано, что такие датчики позволяют регистрировать не только сигналы пульса и дыхания, но и акустикомиографические сигналы из височной области. В работах [11, 12] приведены результаты исследования аку-

стических сигналов с теменных областей головы с помощью как пьезодатчиков, так и индукционных вибродатчиков в диапазоне низких частот (до 27 Гц). В работе [13] впервые было показано, что при изменении когнитивной деятельности при специальной обработке сигналов выявляются низкочастотные особенности в сигналах в области 0.2...0.6 Гц, которые связаны с дыханием.

Во всех проведенных исследованиях остался невыясненным целый ряд вопросов, в частности, какие именно особенности дыхания наблюдаются при когнитивной деятельности. Кроме того, изучение характера дыхания человека акустическими методами обладает целым рядом преимуществ перед остальными: более высокой чувствительностью, позволяющей наблюдать крайне слабое дыхание; более четкое выявление начала вдоха и выдоха; более стабильные сигналы; независимость интенсивности сигналов от направления движения воздуха, присущее регистрации сигналов дыхания микрофоном. Кроме того, очень важным преимуществом исследования дыхания акустическими методами из головы человека перед другими методами является отсутствие влияния измерительных датчиков на сам процесс дыхания, чего нет при спирометрии и тензометрии.

#### 1. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Измерения проводили на группе испытуемых в возрасте от 29 до 83 лет как мужского, так и женского пола. В испытаниях приняло участие 15 че-

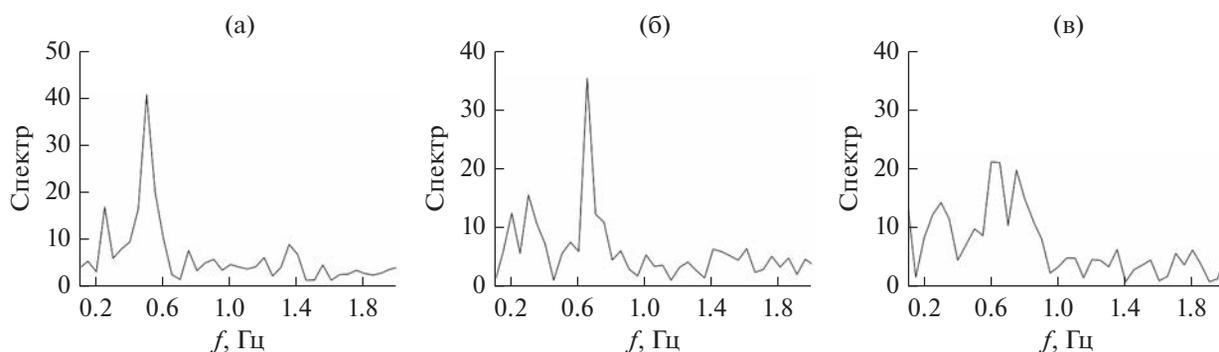


Рис. 1. Характерные спектры обработанных сигналов: а – релаксация, б, в – счет.

людей. Все испытуемые дали письменное согласие на проведение опытов. В работе использовались акустические датчики из пьезокерамики, собранные в одном корпусе с усилителем сигналов, детально описанные в [9]. Эти приемники располагались на висках (в точке  $T_3$ ) и в районе макушки (в точке  $Cz$ ) испытуемых. Приемники закрепляли на голове с помощью резинового бинта. Макушкой мы здесь и далее называем участок в теменной части головы в районе точки  $Cz$ , используемой при энцефалографии, а виском – точку  $T_3$ . При измерениях сигналов в области макушки оптимальное положение датчика подбиралось перемещением, ориентируясь на максимальную амплитуду сигналов дыхания. В экспериментах контролировалось отсутствие касания проводами частей головы и посторонних предметов. Связующие гели в опытах не использовались, поскольку в экспериментах исследовалась низкочастотная часть спектра возможных сигналов. Испытуемые сидели в кресле в расслабленной позе. Сигналы от акустических приемников через anti-aliasing-фильтры поступали на вход аналого-цифрового преобразователя со времени выборки 20 мкс. Эти сигналы одновременно с двух каналов регистрировались, записывались, а затем обрабатывались. Испытуемые по команде экспериментатора должны были в течение 1 мин в уме считать таблицу умножения, затем в течение 1 мин релаксировать. Такие циклы повторялись пять раз. Таким образом, время измерений занимало 10 мин. После приема сигналов производилась их обработка.

Сигналы, принятые с виска, обрабатывали для получения информации о сердечной деятельности, а сигналы с макушки – для получения информации о дыхании. Оказалось, что в области макушки интенсивность сигналов дыхания очень велика. Она примерно на порядок превышает интенсивность сигналов дыхания, полученных с висков. Даже крайне слабое дыхание, практически не слышимое экспериментатору, было хорошо видно и без обработки. У большинства испы-

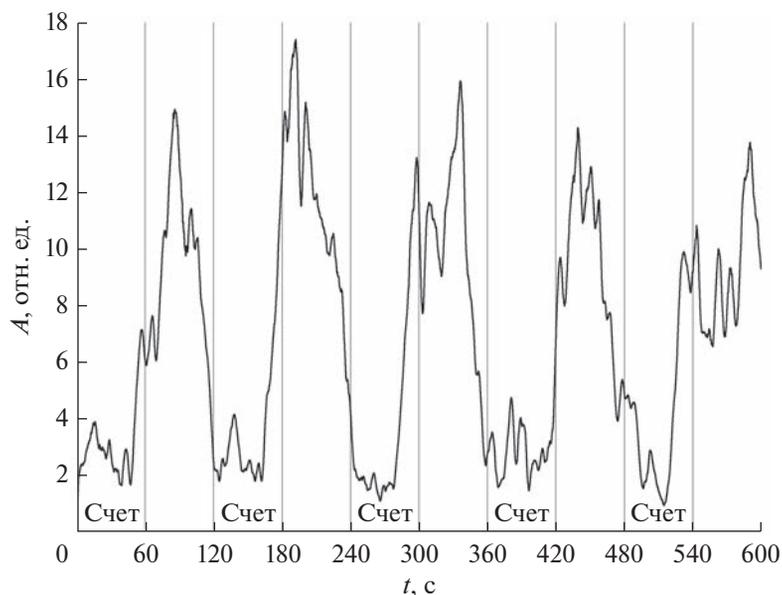
туемых гораздо лучше были видны пульсовые сигналы, поступающие из височной области.

## 2. РЕГИСТРАЦИЯ КОГНИТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО АКУСТИЧЕСКИМ СИГНАЛАМ

На первом этапе работы принятые сигналы с висков и макушки обрабатывались следующим образом. Сначала производилось скользящее усреднение по 400 точкам исходных сигналов как во время счета, так и релаксации. Это усреднение отвечало времени усреднения 8 мс. Затем этот сглаженный сигнал вычитался из исходного сигнала. После этого производилось скользящее вычисление среднеквадратичного сигнала в этом же окне (8 мс). А затем производилось скользящее дискретное преобразование Фурье в окне 20 с. Такая процедура позволяла выявлять наличие периодических сигналов неизвестной частоты. Анализ полученных спектров показал, что практически у всех испытуемых наблюдаются отчетливые различия в низкочастотной части спектров в области от 0 до 1 Гц в зависимости от того, заняты ли испытуемые умственной деятельностью или находятся в состоянии релаксации. На рис. 1а приведены характерные, обработанные таким способом спектры во время релаксации для одного из испытуемых. На рис. 1б и 1в – два типа таких же спектров, отвечающих разным временам, во время устного счета. Время на оси абсцисс здесь и далее отвечало началу каждого временного окна длительностью 20 с.

На рис. 1а во время релаксации наблюдаются отчетливые пики на частотах 0.25 и 0.5 Гц. Во время счета эти пики либо сдвигаются на 0.3 и 0.65 Гц (см. рис. 1б), либо размываются (см. рис. 1в). У части испытуемых более характерным был сдвиг пиков, а у части – размывание. При дальнейшей обработке сигналов мы использовали две методики.

По первой методике для первого временного окна длительностью 20 с, производили дискретное преобразование Фурье для принятых сигналов в



**Рис. 2.** Зависимость от времени величины  $A$  – отношения максимальной спектральной компоненты в диапазоне 0.55...0.65 Гц к среднему значению компоненты в диапазоне 1.4...2 Гц.

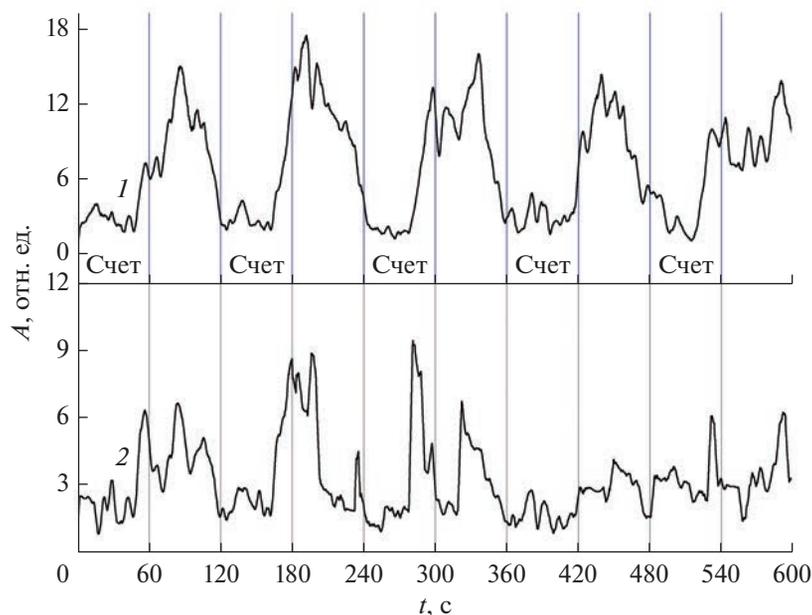
диапазоне 0.45...0.55 Гц, находили максимальное значение амплитуды спектральной компоненты. Затем проводили аналогичную процедуру для диапазона 0.6...0.7 Гц. После этого делили одну величину на другую, сдвигали окно на 8 мс и процедуру продолжали, просматривая весь диапазон сигналов.

По второй методике мы также вычисляли амплитуды спектральных компонент для диапазона 0.45...0.55 Гц, а также диапазона 1.4...2 Гц – диапазона, где спектры меняются относительно плавно. После чего определяли отношение максимума в первом диапазоне к среднему значению второго диапазона. У одних испытуемых, у которых более отчетливо наблюдался сдвиг пиков, более четкая картина получалась при использовании первой методики, у других – при второй. Можно было отслеживать изменение положения более низкочастотного пика, отвечающего частоте  $\sim 0.25$  Гц, но для более высокочастотного пика картина, как правило, получалась более контрастной.

На рис. 2 приведена зависимость от времени величины  $A$  – отношения максимального значения спектральной компоненты основного пика к среднему значению величины спектральной компоненты в диапазоне, где нет резких пиков для одного из испытуемых. Регистрировали сигналы, поступавшие из области макушки. Вертикальными прямыми на этом графике здесь и далее отмечены смены счета на релаксацию (через 1 мин). Видно, что наблюдается отчетливая периодичность кривой: при счете значение величины  $A$  заметно меньше, чем при релаксации во все время эксперимента. То, что на кривых перепады вели-

чины  $A$  происходят не точно в момент смены когнитивной деятельности, связано с особенностью обработки. В первые 40 с в каждой фазе имеется чистый сигнал, а в последние 20 с (каждой фазы) сигнал представляет собой смесь обеих фаз. Это связано с тем, что в точках на графиках, отвечающих временам более 40 с в каждой минуте, во временное окно (20 с) попадали точки как из области счета, так и релаксации. То есть при скользящем сдвиге происходило перемешивание этих фаз. При рассмотрении “укороченных” фаз длиной 40 с, где регистрировались чистые спектры, у этого испытуемого имеет место практически полное соответствие величины  $A$  типу когнитивной деятельности. Следует отметить, что подобные зависимости наблюдались практически для всех испытуемых вне зависимости от пола и возраста. Не у всех испытуемых отмеченное соответствие было полным, иногда наблюдались незначительные сбои, особенно ближе к концу эксперимента, что, возможно, связано с усталостью, потерей концентрации во время счета или недостаточной степенью релаксации.

Интересным оказалось то, что у некоторых испытуемых наблюдался обратный эффект – более сильный и характерный пик наблюдался на низкой частоте – 0.35 Гц во время счета. При релаксации этот пик сдвигался в более низкочастотную сторону до 0.25...0.3 Гц и становился менее выраженным. На рис. 3 изображены зависимости величины  $A$  от времени у другого испытуемого. Сигналы были зарегистрированы как с левого виска, так и с макушки. Видно, что кривые похожи между собой. У большинства испытуемых сиг-



**Рис. 3.** Зависимость от времени величины  $A$  – отношения максимальной спектральной компоненты в диапазоне 0.25...0.3 Гц к значению компоненты на частоте 0.35 Гц; 1 – макушка, 2 – висок.

налы, снятые с макушки, носят более контрастный характер, чем от сигналов с виска.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСА ПРИ СМЕНЕ КОГНИТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Результаты предыдущего раздела показали связь когнитивной деятельности с акустическими сигналами, полученными с головы человека. Далее мы покажем связь этих сигналов с различными аспектами жизнедеятельности человека. Сначала мы обрабатывали пульсовые сигналы, снятые с височных областей. Для улучшения отношения сигнал/шум производилась частотная фильтрация с целью отсекания высокочастотных компонент. После этого фиксировались наиболее сильные (первые) пульсовые удары в каждой из пульсовых серий. Затем записывался интервал между соседними импульсами и их амплитуда. На рис. 4 приведены усредненные скользящие по 10 измерениям зависимости от времени амплитуды и периода для одного из испытуемого. Из графиков видно, что когнитивная деятельность данного испытуемого не коррелирует с периодом пульса, но наблюдается не очень сильное соответствие амплитуде пульса. У ряда других испытуемых наоборот наблюдалась не очень сильная связь когнитивной деятельности с периодом пульса. У испытуемого со значительной сердечной аритмией не было корреляции ни с амплитудой пульса, ни с его периодом.

### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАТТЕРНА ДЫХАНИЯ

Регистрация акустических сигналов от головы человека, как указывалось, позволяет детально изучать довольно слабые дыхательные сигналы. Наиболее сильные сигналы, связанные с дыханием, регистрировались из области макушки. В этих опытах принятые сигналы затем проходили частотную цифровую обработку с помощью полосового фильтра 180...280 Гц. На рис. 5 изображена часть таким образом обработанных сигналов, снятая во время счета у одного из испытуемых. Видно, что как вдох, так и выдох начинаются с довольно резкого перепада, позволяющего с этих перепадов фиксировать начало дыхания. В этой части работы мы анализировали, как в процессе экспериментов меняются периоды дыхания, средние времена вдоха и выдоха, интенсивность дыхания, соотношение между интенсивностями вдоха и выдоха при смене умственной деятельности на релаксацию. Интенсивность дыхания определяли путем вычисления среднеквадратичного сигнала в первые полсекунды после начала соответствующей фазы дыхания.

На рис. 6 приведены усредненные периоды дыхания, длительности вдоха, выдоха, отношение длительности выдоха к длительности вдоха и величины  $A$ , описанной в разд. 2. Проводилось скользящее усреднение по 5 периодам дыхания (около 20 с). Из рисунка видно, что как период дыхания, так времена вдоха и выдоха очень хорошо соответствуют ходу величины  $A$  (верхняя кривая). Более плавный ход периода дыхания по сравне-

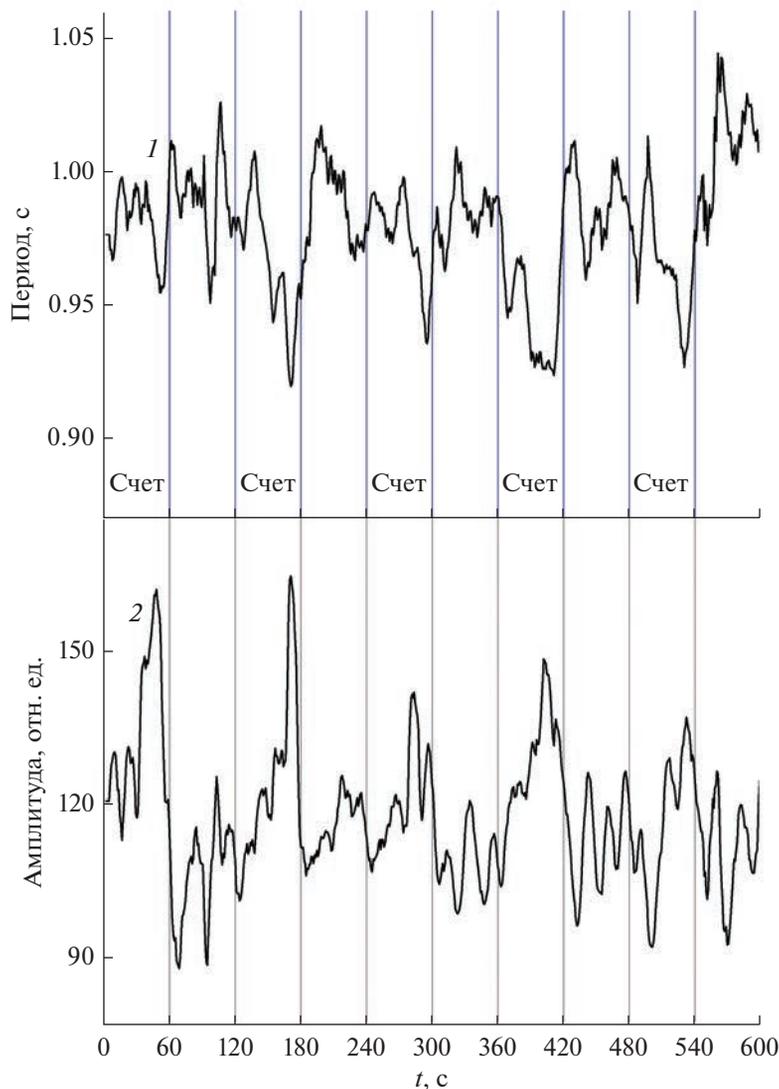


Рис. 4. Зависимость периода пульса (1) и его амплитуды (2) от времени.

нию с ходом величины  $A$  объясняется процедурой сглаживания. Без этого сглаживания кривые периода дыхания и времен остальных фаз оказываются более резкими, но сильно зашумленными. Видно также, что в процессе эксперимента у этого испытуемого, начиная с 4-й минуты, меняется отношение времени выдоха к времени вдоха при смене деятельности. Такие зависимости наблюдались не у всех испытуемых, а менее чем у половины.

На рис. 7 приведен ход интенсивности вдоха, выдоха и их отношение для одного из испытуемых. Здесь также производилось скользящее усреднение по 5 периодам. Видно, что наблюдается соответствие между типом умственной деятельности и измеренными зависимостями. Но эта связь заметно хуже, чем для периода дыхания. Кроме того, такая связь также наблюдалась не у всех испытуемых. У большинства испытуемых интенсивность

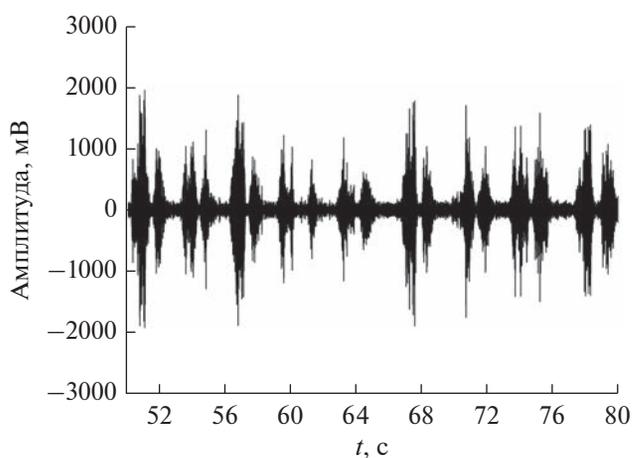
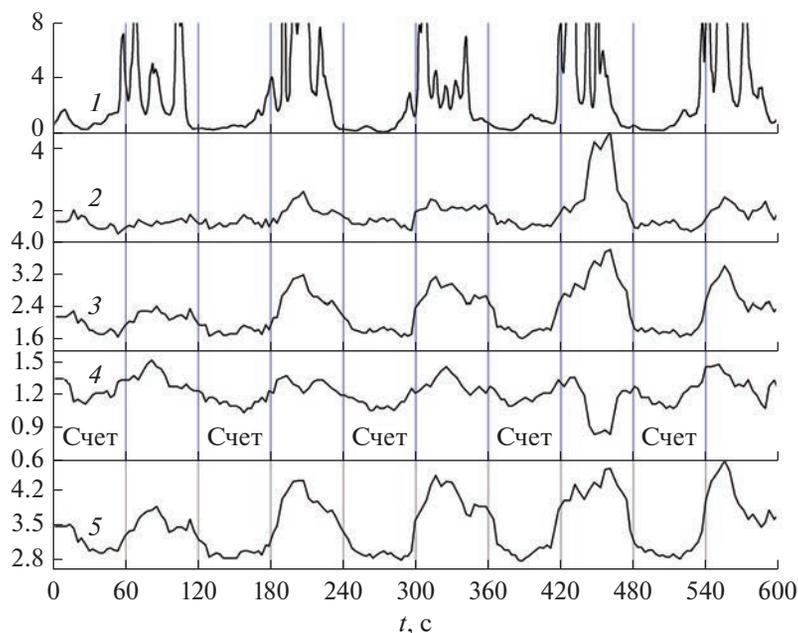
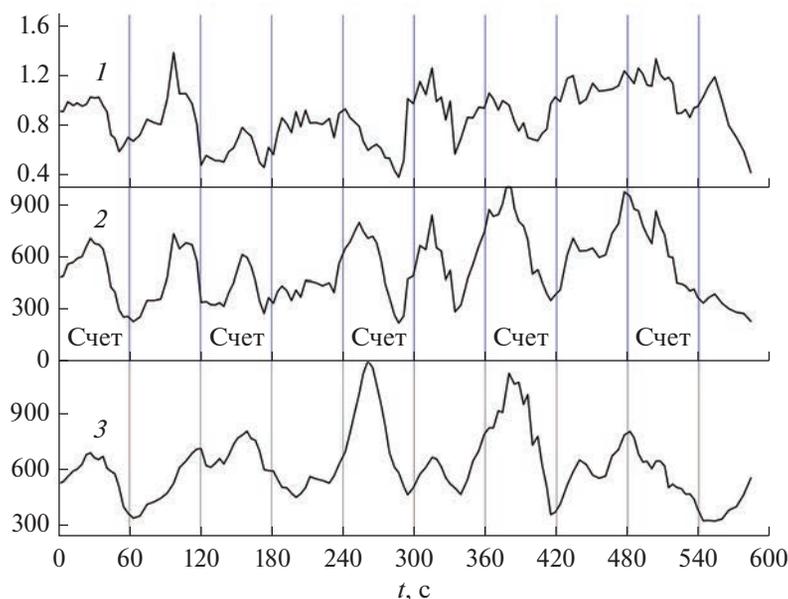


Рис. 5. Сигналы дыхания.



**Рис. 6.** Зависимость от времени величины  $A$  и параметров дыхания: 1 – величина  $A$ ; 2 – отношение усредненного времени выдоха ко времени вдоха; 3 – среднее время выдоха, с; 4 – среднее время вдоха, с; 5 – период дыхания, с.



**Рис. 7.** Зависимость от времени параметров интенсивности дыхания: 1 – отношение интенсивности выдоха к интенсивности вдоха; 2 – интенсивность выдоха, отн. ед.; 3 – интенсивность вдоха, отн. ед.

вдоха во время счета, как правило, превышала интенсивность выдоха. Во время релаксации ситуация становилась обратной. Но такие зависимости наблюдались менее чем у 20% испытуемых.

## 5. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В результате проведенных исследований было установлено, что ход зависимости величины  $A$  от

времени не объясняется модуляцией пульса. Как видно из рис. 4, временной ход и амплитуды, и периода пульса имеется, но не совпадает с ходом величины  $A$  и плохо коррелирует с ней. Такая картина наблюдалась у всех испытуемых. Кроме того, у одного из испытуемых со значительной аритмией, у которого наблюдается очень хорошая модуляция величины  $A$  при смене умственной деятельности, вообще нет какой-либо видимой модуляции дыхания.

Исследования паттерна дыхания наоборот показали очень хорошую связь модуляции величины  $A$  с изменением периода дыхания. При счете у практически всех испытуемых период дыхания уменьшался. У одного из испытуемых, у которого имеется серьезное заболевание легких, вообще не наблюдалась модуляция, как величины  $A$ , так и периода дыхания, а также параметров пульса. Но у него наблюдалось неплохое соответствие соотношения интенсивностей дыхания со сменой когнитивной деятельности. У большинства испытуемых не отмечено каких-либо особенностей, связанных с изменением средних времен вдоха и выдоха — они менялись синхронно с изменением периода дыхания. Но у ряда испытуемых наблюдались небольшие особенности хода отношения  $T_{\text{выдох}}/T_{\text{вдох}}$  во времени, отмеченные на рис. 6. У некоторых испытуемых наблюдалась отчетливая модуляция интенсивности дыхания при смене когнитивной деятельности — при счете она заметно возрастала. Следует отметить, что, поскольку частота дыхания у разных людей бывает разной, то “красивые” зависимости величины  $A$  от времени у разных испытуемых могут наблюдаться немного на разных частотах.

Положение пиков на частотах 0.25...0.3 и 0.5...0.6 Гц (см. рис. 1) связано с тем, что первый пик отвечает полному периоду дыхания, а второй — различию амплитуд и времен вдоха и выдоха. Интересной и полезной особенностью временного хода параметра  $A$  является то, что для определения когнитивной деятельности не требуется сравнения этой величины в разных фазах деятельности, что является необходимым при других типах измерений. То есть такой способ является в определенном смысле абсолютным. Следует отметить также, что выявление когнитивной деятельности по прямому измерению периода дыхания является довольно трудоемкой задачей, поскольку само дыхание имеет достаточно сложный временной характер. Иногда человек может глубоко вздохнуть, иногда, наоборот, делать очень слабые вдох и выдох. Автоматизировать регистрацию начала вдоха и выдоха не удастся и ее приходится делать вручную. В отличие от этого измерять величину  $A$  очень просто. Такой метод регистрации когнитивной деятельности, которая, главным образом, связана с изменением периода дыхания, является очень чувствительным. Сигналы, у целого ряда испытуемых, снятые с виска и показанные на рис. 3, даже после частотной фильтрации, вообще не проявляют никакого видимого дыхания. Тем не менее величина  $A$  очень хорошо модулируется при смене умственной деятельности. Математическое моделирование показало, что амплитудная модуляция шумовых сигналов, снятых с наших акустических датчиков, с глубиной модуляцией 0.5% от величины среднеквадратичного шума позволяет уверенно выявить ее наличие. Такой способ

обработки сигналов содержит известные методики, но их сочетание позволило выявить незначительные изменения периодических сигналов, связанные со сменой умственной деятельности. Наши исследования носят предварительный характер. Мы исследовали только один тип умственной деятельности. Возможно, при других типах проявятся другие особенности. Кроме того, периодичность смены деятельности в 1 мин не является единственно возможной. И мы практически не исследовали испытуемых с достаточно тяжелыми заболеваниями, которые возможно дали бы другие результаты. Такие исследования, представляющие практический и научный интерес, в дальнейшем было бы целесообразно проводить совместно с медиками.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что прием и обработка акустических сигналов из различных областей головы человека позволяют оперативно и уверенно отличать когнитивную деятельность от релаксации. Установлено, что описанная в работе методика обработки сигналов является безотносительной, то есть, не требует (сравнения результатов с) измерения в другой фазе когнитивной деятельности. Кроме того, такой способ регистрации эффектов, связанных с дыханием, не оказывает воздействия на сам процесс дыхания, что может позволить обнаруживать более тонкие, ранее не наблюдаемые закономерности. Показано, что такой способ обработки сигналов позволяет определять когнитивную деятельность практически у всех испытуемых. Только у одного из испытуемых с заболеванием легких не удалось выявить когнитивной деятельности таким образом. Установлено, что такой ход величины  $A$  при смене умственной деятельности обусловлен, главным образом, сменой периода дыхания. Другой причиной такого поведения величины  $A$  у значительной части испытуемых является изменение соотношения между интенсивностями вдоха и выдоха. Показано, что наилучшим участком головы для регистрации дыхания и определения умственной деятельности является макушка человека. Показано также, что изменение периода дыхания и смены когнитивной деятельности по величине  $A$  обладает очень высокой чувствительностью — их удастся установить даже в случаях, когда сигналы дыхания, даже при частотной фильтрации совсем не идентифицируются.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

## СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

Все пациенты приняли участие в исследовании добровольно в соответствии с современными этическими нормами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pernice R., Zanetti M., Nollo G., De Cecco M., Busacca A., Flaes L.* // Annual Int. Conf. IEEE Eng. Med. Biol. Soc. 2019 Jul. P. 6176.
2. *Zhang J., Yu X., Xie D.* // Respir Physiol Neurobiol. 2010 Jan 31. 170(1). 91-5.
3. *Павленко С.И., Ведясова О.А., Кретова И.Г.* // Физиология человека. 2021. Т. 47. № 2. С. 45.
4. *Gaillard A.W.K.* // Ergonomics. 1993. V. 36. № 9. P. 991.
5. *Wientjes C.J.E., Grossman P., Gaillard A.W.K.* // Biological Psychology. 1998. V. 49. № 1. P. 53.
6. *Vlemincx E., Taelman J., De Peuter S. et al.* // Psychophysiology. 2010. V. 9. P. 74.
7. *Bernardi L., Wdowczyk-Szulc J., Valenti C. et al.* // J. American College of Cardiology. 2000. V. 35. № 6. P. 1462.
8. *Grassmann M., Vlemincx E., Leupold A. et al.* // Neural Plast. 2016. V. 2016. Article ID 8146809. <https://doi.org/10.1155/2016/8146809>
9. *Миргородский В.И., Герус А.В., Герасимов В.В., Пешин С.В.* // Успехи совр. радиоэлектроники. 2015. Т. 12. С. 3.
10. *Миргородский В.И., Герасимов В.В., Пешин С.В.* // Акустич. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 437.
11. *Миргородский В.И., Герасимов В.В., Герус А.В. и др.* // Акустич. журн. 2021. Т. 67. № 4. С. 1.
12. *Шабанов Г.А., Рыбченко А.А., Лебедев Ю.А. и др.* // Научное приборостроение. 2019. Т. 29. № 1. С. 82.
13. *Герус А.В., Герасимов В.В., Миргородский В.И., Кораблев Е.М.* // XXXIV Сессия РАО. г. Москва, 14–18 февраля 2021. С. 960.

УДК 621.377.6

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ МЕМРИСТОРА С ДРУГИМИ ДИСКРЕТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ: РЕЗИСТОРОМ, ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ ДИОДОМ, КАТУШКОЙ ИНДУКТИВНОСТИ И ЕМКОСТЬЮ

© 2023 г. А. Е. Китаев<sup>а</sup>, \*, А. И. Белов<sup>б</sup>, Д. В. Гусейнов<sup>б</sup>, А. Н. Михайлов<sup>б</sup><sup>а</sup> Нижегородское научно-производственное объединение им. М.В. Фрунзе,  
просп. Гагарина, 174, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация<sup>б</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
просп. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603022 Российская Федерация

\*E-mail: kitaev\_a\_e@mail.ru

Поступила в редакцию 31.03.2022 г.

После доработки 03.08.2022 г.

Принята к публикации 25.08.2022 г.

Сделан переход от кусочно-непрерывных функций модели мемристора с переключением порогового типа к дифференцируемым функциям, описываемым единой формулой. Получены и численно решены системы уравнений для участков цепи, в которых мемристивное устройство включено последовательно с другими дискретными элементами — обычным резистором, диодом, катушкой индуктивности и конденсатором. Для случая последовательного соединения мемристора и резистора проведено сравнение расчетных данных с экспериментом. Подробно исследован случай последовательного соединения мемристора и полупроводникового диода. Изложены предположения, касающиеся математического описания и физической интерпретации влияния процесса формовки на мемристивную систему.

DOI: 10.31857/S0033849423020080, EDN: LCIACU

### ВВЕДЕНИЕ

Мемристор — новый дискретный радиотехнический элемент (резистор с памятью), теоретически предсказанный в 70-е годы XX в. [1, 2] и впервые реализованный на практике в 2008 г. в форме устройства с резистивным переключением (мемристивного устройства) [3]. Многообещающие применения мемристивных устройств и их интеграция с КМОП-схемами [4, 5] делают весьма актуальным изучение электрических цепей, в состав которых мемристоры входят наряду с обычными дискретными элементами. Последовательное подключение мемристора и резистора может быть полезным при проведении измерений (именно такое соединение реализовано в экспериментальной части работы). Соединение мемристора с реактивными элементами использовалось для построения моделей работы нервной системы: в 2009 г. в статье [6], посвященной моделированию памяти амёбы, были найдены численные решения уравнений последовательного колебательного контура, в котором параллельно с емкостью подключен мемристор (описываемый моделью с переключением порогового типа, введенной там же). В работах [7, 8] изучалось последовательное соединение мемри-

стора с емкостью (“МС-цепь”) и с индуктивностью (“ML-цепь”), причем была применена “модель с дрейфом примеси”. Статьи, в которых использовались уравнения, описывающие последовательное соединение мемристора и полупроводникового диода, авторам неизвестны, за исключением работы [9], в которой SPICE-модель мемристора [10] комбинировалась с упрощенной идеализированной моделью диода Зенера (схемы с мемристорно-диодными ячейками предлагается использовать в биоморфных нейропроцессорах [11]). Отметим, что даже если какие-то комбинации в настоящее время и не имеют практического применения (например, комбинация мемристора и индуктивности), все равно представляет интерес теоретическое исследование этих случаев, так как реальные дискретные элементы могут иметь заметные “паразитные” свойства других элементов (например, паразитную индуктивность).

Цель работы — получение и исследование уравнений, описывающих участки радиотехнических цепей, в состав которых входят мемристоры, последовательно соединенные с традиционными дискретными элементами: резистором, диодом, индуктивностью и емкостью. Рассмотрены мемри-

сторы, управляемые напряжением и подчиняющиеся уравнениям модели с переключением порогового типа. Предложены новые математические выражения для описания динамики внутреннего параметра мемристора с переключением порогового типа, которые использованы для численного моделирования последовательного соединения мемристора с упомянутыми элементами (в традиционной модели используются кусочно-непрерывные функции, не всегда удобные для численного счета).

Калибровка модели проведена на основе экспериментальных данных, полученных для мемристового устройства на основе структуры “металл–оксид–металл”, последовательно соединенного с резистором. В качестве рабочего оксида в данной структуре использован стабилизированный иттрием диоксид циркония – известный твердотельный электролит с высокой подвижностью ионов кислорода, хорошо показавший себя при создании мемристовых устройств [12, 13]. Важной особенностью этого оксидного материала является то, что степень легирования иттрием обеспечивает заданную концентрацию кислородных вакансий, необходимую для формирования в оксидном слое проводящих каналов (филаментов) [14]. Воспроизводимое разрушение и восстановление филаментов при приложении к структуре напряжений разной полярности обеспечивает биполярное резистивное переключение порогового типа (с характерными порогами по напряжению). Именно такое переключение моделируется в данной работе для случаев соединения мемристора с резистором и конденсатором.

## 1. МЕТОДИКА

### 1.1. Моделирование мемристора

Получили известность следующие общие уравнения [2] для мемристовых систем, управляемых напряжением:

$$I(t) = \frac{V(t)}{R(x, V)}, \quad \frac{dx}{dt} = f(x, V). \quad (1)$$

Здесь  $I(t)$  – ток, протекающий через мемристор,  $V(t)$  – напряжение, приложенное к мемристор,  $x$  – внутренний параметр мемристора (или вектор-столбец внутренних параметров, если их несколько). Внутренний параметр  $x$  может, в частности, быть долей длины мемристора, обладающей уменьшенным сопротивлением  $R_{\text{он}}$  (при этом  $(1-x)$  – доля длины резистора, обладающая увеличенным сопротивлением  $R_{\text{офф}}$ ). Полное сопротивление мемристора  $R$  в этом случае можно выразить так:

$$R = R_{\text{офф}} + (R_{\text{он}} - R_{\text{офф}})x.$$

В правой части второго уравнения (1) стоит  $f$  – некоторая функция напряжения и внутреннего параметра (или же вектора внутренних параметров).

В качестве примера функции состояния  $f$  в статье [15] приведена следующая разрывная функция:

$$f(V, x) = \begin{cases} \alpha(V - V_{t+})(1 - x), & V > V_{t+}, \\ \beta(V - V_{t-})x, & V < V_{t-}, \\ 0, & V_{t-} < V < V_{t+}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  – скорости переключения,  $V_{t+}$  и  $V_{t-}$  – пороги переключения (предполагается, что первый порог имеет положительное значение, а второй – отрицательное).

В данной работе исследуется поведение электрических цепей с мемристором в том случае, когда пороги переключения “сглажены”, а заданное внешнее напряжение  $V$  является последовательностью треугольных импульсов, соответствующей часто применяющейся в эксперименте линейной развертке по напряжению. Внутренний параметр  $x$  будет считаться долей длины элемента с уменьшенным сопротивлением.

### 1.2. Использование пороговых и оконных функций

Функцию (2) можно представить с помощью единой формулы, используя ступенчатую функцию Хевисайда  $h(y)$ , равную 1, если  $y > 0$ , и 0, если  $y < 0$  (при нулевом значении  $y$  можно считать ее равной 0.5):

$$f(V, x) = h(V - V_{t+})\alpha(V - V_{t+})(1 - x) + h(-(V - V_{t-}))\beta(V - V_{t-})x. \quad (3)$$

Такая замена в некоторых случаях приводит к упрощению программ для численных расчетов (например, в системе “Wolfram Mathematica”). Более того, такая запись позволяет легко перейти от функции Хевисайда к сглаженным пороговым функциям, что также может оказаться полезным (в приложении “Wolfram Mathematica” это примерно в два раза повышает скорость счета).

При проведении численных расчетов возможна ситуация, когда решение  $x(t)$  выходит за границы  $[0, 1]$  (это границы допустимых значений для  $x$ , поскольку, как уже говорилось,  $x$  – это доля “низкоомной” длины мемристора). Чтобы избежать возникновения такой ситуации, функцию (3) можно умножить на “оконную” функцию. Пример степенной оконной функции [16]:

$$W(x) = 1 - (2x - 1)^{2p}. \quad (4)$$

Целое число  $p$  достаточно велико (например,  $p = 10$  (см. [16])).

В качестве подобной функции можно использовать и функцию, которая экспоненциально спадает до нуля на границах допустимого отрезка значений  $x$  (рис. 1). Ее особенность состоит в том,

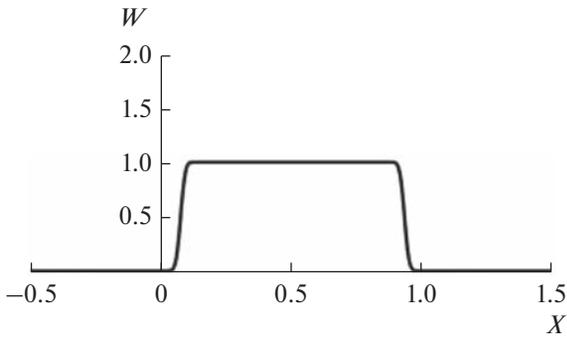


Рис. 1. Оконная функция.

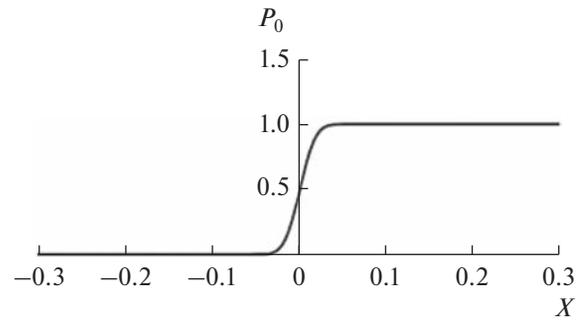


Рис. 2. Пороговая функция (вычислена по формуле (6)).

что она почти равна нулю не только в малой окрестности точек 0 и 1, но и во всей внешней части оси  $x$  (за пределами промежутка  $[0, 1]$ ):

$$W(x) = P_0(x - \delta)P_0(-(x - (1 - \delta))). \quad (5)$$

Здесь  $\delta$  – некоторое малое по сравнению с единицей число (“отступ” оконной функции от границ промежутка),  $P_0(x)$  – пороговая функция, в качестве которой можно взять, например, следующую:

$$P_0(x) = 0.5\operatorname{erf}(v_0x) + 0.5 \quad (6)$$

или же [10] –

$$P_0(x) = \frac{1}{1 + \exp(-v_0x)}.$$

Пороговая функция в формуле (6) выражается через “функцию ошибок”. Параметр  $v_0$  определяет быстроту спада пороговых функций. Чем большее значение имеет этот параметр, тем резче перепад. Данные функции стремятся к нулю в “минус-бесконечности” и к единице в “плюс-бесконечности” (рис. 2).

Мы заменим обобщенные функции Хевисайда в выражении (3) на аналогичные пороговые функции, зависящие от напряжения:

$$\begin{aligned} f(V, x) &= P_1(V - V_{t+})\alpha(V - V_{t+})(1 - x) + \\ &+ P_1(-(V - V_{t-}))\beta(V - V_{t-})x, \quad (7) \\ P_1(V) &= 0.5\operatorname{erf}(v_1V) + 0.5. \end{aligned}$$

Здесь параметр  $v_1$  также определяет быстроту спада пороговой функции.

При больших значениях “параметра крутизны”  $v_1$  функция состояния (7) почти не отличается от функции (2) и ее аналога (3). Если сравнить вариант (2) с функциями состояния классических моделей мемристора, которые представлены, например, в [17], то вариант (2) несколько проще, чем выражения в моделях, которые авторами работы [17] охарактеризованы как достаточно точные (модель Якопича [18] и модель ТЕАМ). Этот вариант, тем не менее, сохраняет основные их черты – деление области изменения управляю-

щего параметра на три части. Внутренний же параметр  $x$  по своей сути тот же самый, что и в простых моделях с дрейфом примеси. Отметим, что предложенные в данной работе подходы могут быть применены для развития этих и других моделей.

Оказывается, что при использовании выражения (7) с достаточно резким перепадом пороговой функции можно отказаться от умножения правой части этого выражения на дополнительную оконную функцию вида (4) или (5). Именно так мы и поступим в дальнейшем.

### 1.3. Формирование и измерение параметров мемристора

Для сравнения результатов расчета с экспериментом в работе использовались экспериментальные данные, полученные для мемристивных устройств в интегральном исполнении со структурой “металл–оксид–металл” [19]. Использовалась мемристивная структура Au (20 нм) /ZrO<sub>2</sub> (Y) (20 нм) /Ta (20 нм) /Pt (50 нм) (рис. 3а), сформированная на окисленной подложке кремния. Пленку ZrO<sub>2</sub>(Y) наносили при температуре 300°C методом ВЧ-магнетронного распыления мишени из смеси порошков ZrO<sub>2</sub> (88 мол. %) и Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (12 мол. %). Металлические электроды наносили методом магнетронного распыления на постоянном токе при температуре 200°C. Площадь мемристивного устройства составляла 20 × 20 мкм.

Вольт-амперную характеристику (ВАХ) измеряли путем подачи внешнего напряжения на цепь “мемристор-резистор”, в которой резистор служит одновременно для физического ограничения тока, протекающего через мемристор, и в качестве датчика тока для его измерения. В качестве источника внешнего напряжения и для измерения падения напряжения на резисторе (и, соответственно, тока) было использовано многофункциональное устройство ввода/вывода National Instruments USB-6341 ADC/DAC. Схема измерения приведена на рис. 3б. Сигнал подавался на нижний (Pt)

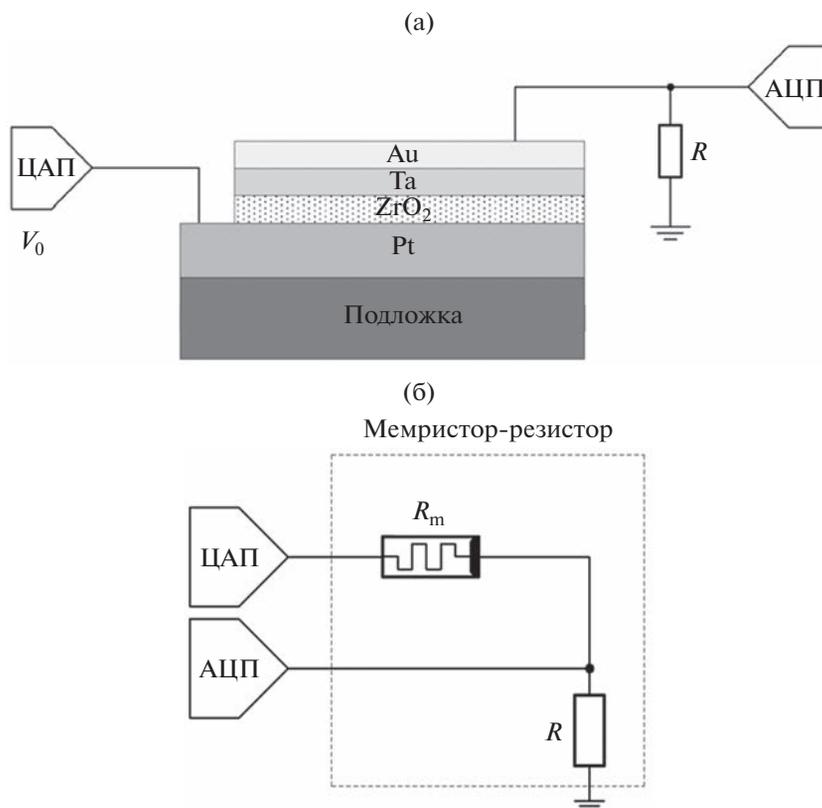


Рис. 3. Схематическое изображение структуры мемритивного устройства (а) и схема измерения (б).

электрод мемритивного устройства. Последовательно к верхнему (Au/Ta) электроду был подключен резистор номиналом 1000 Ом.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 2.1. Одиночный мемристор

Вначале мы исследовали самый простой случай, когда управляющее напряжение приложено

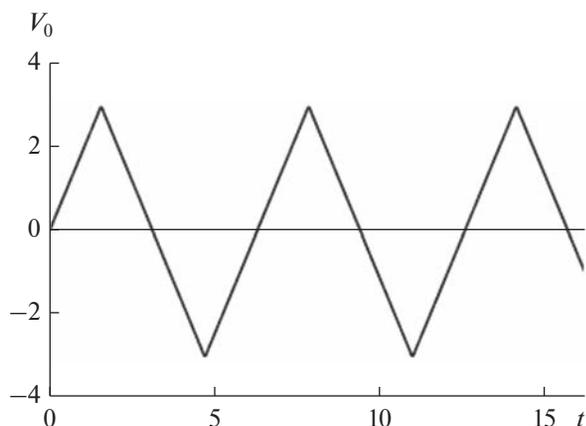


Рис. 4. Внешнее напряжение на мемристор (задано в виде ряда Фурье с 20-ю слагаемыми).

непосредственно к мемристор. При этом решали второе из уравнений (1) – уравнение состояния (причем функция состояния  $f$  определяется соотношением (7)). Затем с помощью первого уравнения (1) определяли ток. Результаты численных расчетов в приложении “Wolfram Mathematica 9.0” приведены на рис. 4–8. Пороги переключения симметричны относительно нуля и равны 0.7, –0.7. Сопротивления  $R_{\text{off}}$  и  $R_{\text{on}}$  равны 10 и 1. Скорости переключения равны 10. В качестве внешнего заданного напряжения  $V = V_0(t)$  взята последовательность треугольных импульсов (см. рис. 4). Ее удобно выразить через конечный ряд Фурье (в этом случае имеем дело с функцией, которая обладает непрерывной производной).

### 2.2. Последовательное соединение мемристора и резистора

Следующий вариант (тоже достаточно простой) – последовательное соединение мемристора и резистора. Пусть напряжение приложено к участку цепи, содержащему оба элемента. В этом случае мы должны решать комбинацию трех уравнений. Первое – это уравнение для участка цепи, связывающее ток (общий для обоих дискретных элементов) и приложенное к участку цепи внешнее напряжение. Фактически это уравнение является

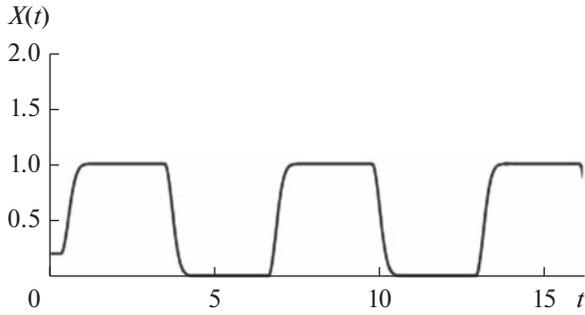


Рис. 5. Зависимость внутреннего параметра мемристора от времени.

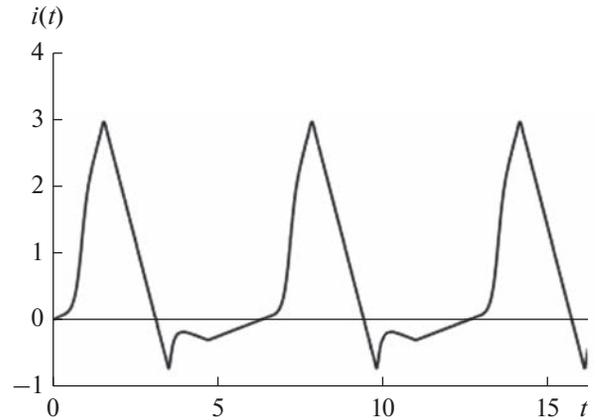


Рис. 6. Зависимость тока, протекающего через мемристор, от времени.

следствием второго закона Кирхгофа. Следующее уравнение выражает сопротивление мемристора через другие величины (внутренние параметры). Третье уравнение — это дифференциальное уравнение состояния мемристора, причем в него входит напряжение, действующее именно на мемристор (а не на весь участок цепи). Запишем эту систему уравнений, первое и второе из которых в этом случае — конечные (алгебраические или трансцендентные), третье же — дифференциальное.

$$\begin{cases} i = \frac{V_0}{R_m + R}, \\ R_m = R_m(x), \\ \frac{dx}{dt} = f(x, iR_m). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $V_0$  — приложенное к участку цепи напряжение,  $R_m$  — сопротивление мемристора,  $R$  — сопротивление резистора. Вместо величины  $V$  (как было в формуле (1)) здесь в качестве одного из аргументов функции  $f$  подставлено произведение  $iR_m$  (падение напряжения на мемристоре).

Подставляя ток  $i$  из первого уравнения системы (8) в третье и учитывая второе уравнение для  $R_m$ , записанное в форме

$$R_m(x) = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x, \quad (9)$$

получим дифференциальное уравнение, связывающее внешнее напряжение  $V_0$  и внутренний параметр  $x$ :

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, \frac{V_0(R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x)}{R + R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x}\right). \quad (10)$$

Решив это уравнение численно (и найдя  $x(t)$ ), мы, используя первое уравнение системы (8), далее можем найти ток на участке цепи и напряжение на мемристоре.

Для последовательной комбинации “мемристор-резистор” было проведено сравнение результатов численного расчета с экспериментом (см. далее разд. 3).

### 2.3. Последовательное соединение мемристора и диода

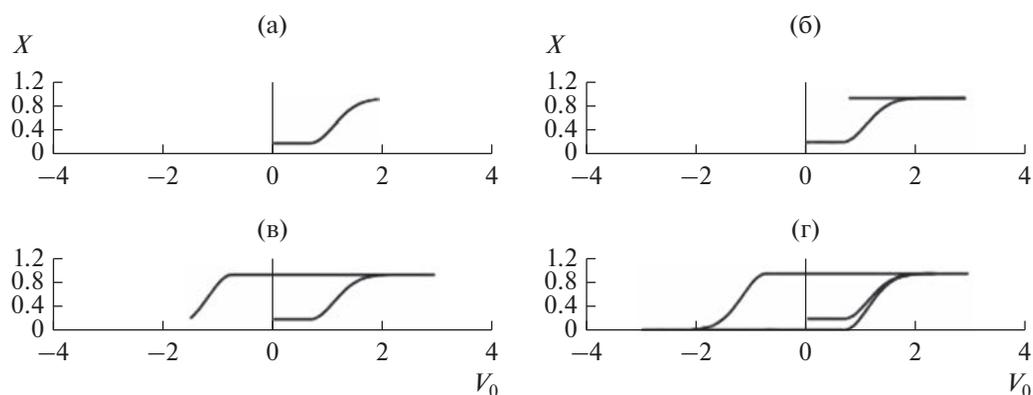
Рассмотрим ситуацию, когда последовательно с мемристором включен не резистор, а полупроводниковый диод. В этом случае первое токовое уравнение будет более сложным — мы используем формулу для тока, проходящего через идеальный диод и резистор, соединенные последовательно [20]:

$$I = -I_s + \frac{V_T}{R} W\left(\frac{I_s R}{V_T} \exp\left(\frac{U + I_s R}{V_T}\right)\right). \quad (11)$$

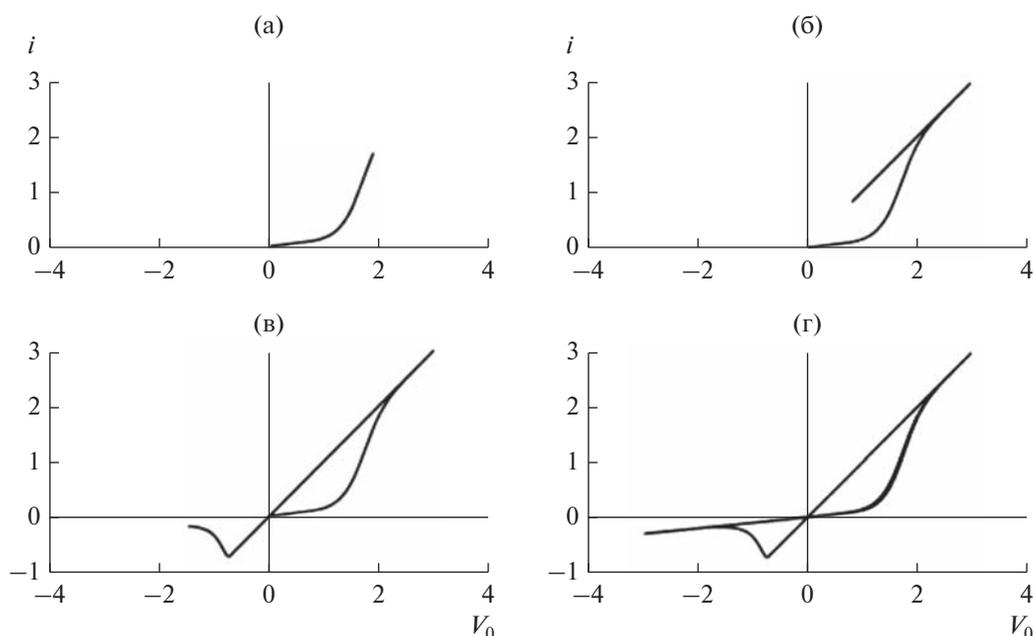
Здесь  $U$  — внешнее напряжение, приложенное к участку цепи с диодом и резистором,  $V_T$  — температурный потенциал,  $R$  — сопротивление резистора, подключенного последовательно с идеальным диодом,  $I_s$  — ток насыщения,  $W(x)$  — специальная функция Ламберта [21]. В нашем случае роль резистора будет играть мемристор с сопротивлением  $R_m$ , зависящим от внутреннего параметра  $x$ . Система уравнений будет следующая:

$$\begin{cases} i = -I_s + \frac{V_T}{R_m} W\left(\frac{I_s R_m}{V_T} \exp\left(\frac{V_0 + I_s R_m}{V_T}\right)\right), \\ R_m = R_{\text{off}} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})x, \\ \frac{dx}{dt} = f(x, iR_m). \end{cases} \quad (12)$$

Для того чтобы наблюдать переключение сопротивления в данной цепи, мемристор должен быть униполярным (с положительными порогами переключения). В качестве модельного иллюстрирующего примера рассмотрена система, по возможности близкая к описанной в п. 2.1, но функция  $f$ , взятая из выражения (7), умножена на квадрат функции ошибок от величины, пропорциональной напряжению на мемристоре ( $\text{erf}^2(50iR_m)$ ) — чтобы исключить изменение внутреннего параметра мемристора при нулевом напряжении. Пороги



**Рис. 7.** Зависимость внутреннего параметра от внешнего напряжения (наблюдается гистерезис): графики заканчиваются в моменты времени  $t = 1$  (а), 2.7 (б), 3.9 (в), 7.5 (г).



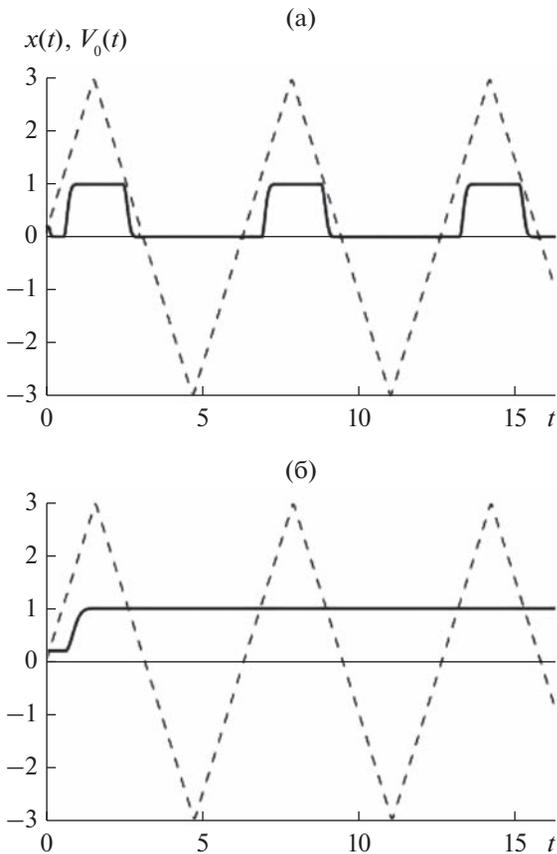
**Рис. 8.** Зависимость тока, протекающего через мемристор, от напряжения: графики заканчиваются в моменты времени  $t = 1$  (а), 2.7 (б), 3.9 (в), 7.5 (г).

переключения следующие:  $V_{t-} = 0.65$ ,  $V_{t+} = 0.7$ , скорости переключения равны 50,  $I_s = 0.00000172$ ,  $V_T = 0.044$ . Результаты расчета представлены на рис. 9а. В случае же прежних значений параметров мемристора (как в п. 2.1, когда пороги переключения симметричны относительно нуля) система просто переходит в верхнее состояние ( $x \rightarrow 1$ , рис. 9б). На рис. 10 показан ток, протекающий через мемристор при симметричных пороговых напряжениях (“закругленность” решения наблюдается лишь на первом периоде, когда система еще не переключилась окончательно в верхнее состояние).

На рис. 11 представлена ВАХ участка цепи с униполярным мемристором и диодом. На рис. 12

пороговые напряжения симметричны, но ВАХ вычисляется начиная с  $t = 5$ , т.е. со второго периода, когда переключение в верхнее состояние уже произошло. Видно, что мы имеем обычную характеристику полупроводникового диода (при учете внутреннего омического сопротивления).

Если увеличить ток насыщения диода на несколько порядков, то неидеальный диод с внутренним сопротивлением почти не будет отличаться от резистора (то же самое можно сказать и о последовательной комбинации диода и “внешнего” резистора). На рис. 13 показана ВАХ для этого случая (ток насыщения увеличен в миллион раз, мемристор биполярный) — она не отличается от графика рис. 8.



**Рис. 9.** Внутренний параметр мемристора при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода; пороговые напряжения несимметричны (а) и симметричны (б); штриховая линия — внешнее напряжение, приложенное к участку цепи с мемристором и диодом.

2.4. Последовательное соединение мемристора с индуктивностью и конденсатором

Рассмотрим случай последовательного соединения мемристора и индуктивности. В этом случае первое уравнение будет дифференциальным.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_0, \quad R_m = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \quad (13)$$

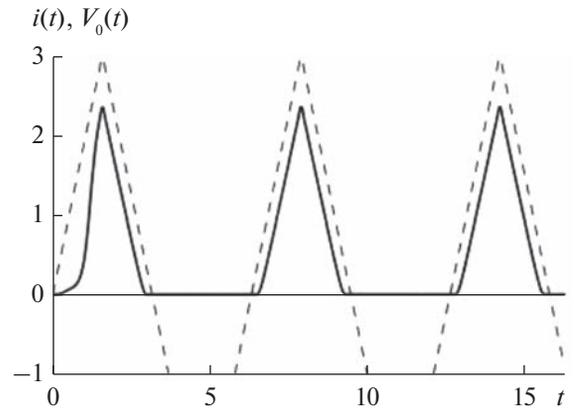
$$\frac{dx}{dt} = f(x, iR_m).$$

Также можно записать уравнения для последовательного соединения мемристора и емкости. При этом в первое уравнение войдет интеграл тока.

$$\frac{1}{C} \int idt + R_m i = V_0, \quad R_m = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, iR_m).$$

Продифференцировав первое уравнение по времени (и помня о том, что сопротивление мемри-



**Рис. 10.** Ток, протекающий через мемристор, при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода; пороговые напряжения симметричны.

стора зависит от параметра  $x$ , который сам является функцией времени), получим

$$\frac{i}{C} + \frac{d}{dt} (R_m(x)i) = \frac{dV_0}{dt},$$

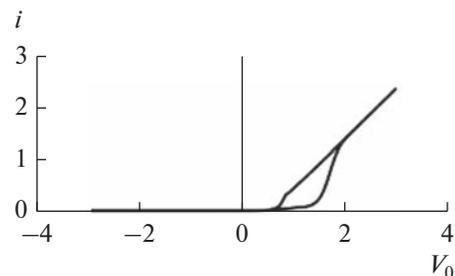
$$R_m(x) = R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, iR_m(x)).$$

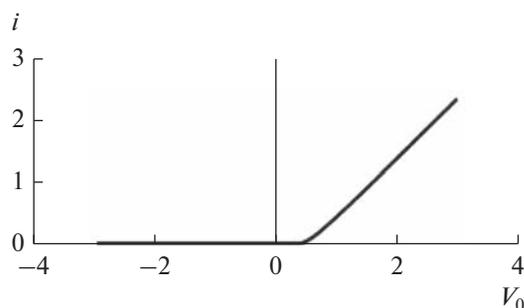
Приведем результаты расчета внутреннего параметра для случая, когда последовательно с мемристором (биполярным, как в п. 2.1) подключена емкость (рис. 14). Выбран вариант начальных условий, когда явно просматривается длительный (по сравнению с периодом внешнего воздействия) переходный процесс. На рис. 15 изображена осциллограмма тока.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

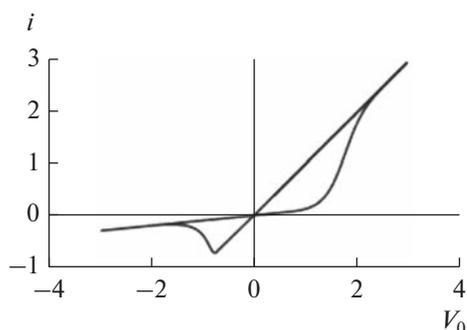
Для случая последовательного соединения мемристора и резистора было проведено сравнение численного решения уравнений (8)–(10) с



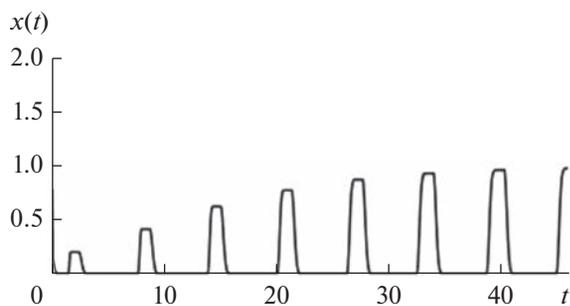
**Рис. 11.** ВАХ участка цепи при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода; пороговые напряжения несимметричны.



**Рис. 12.** ВАХ участка цепи при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода (время отсчитывается с  $t = 5$ ); пороговые напряжения симметричны.

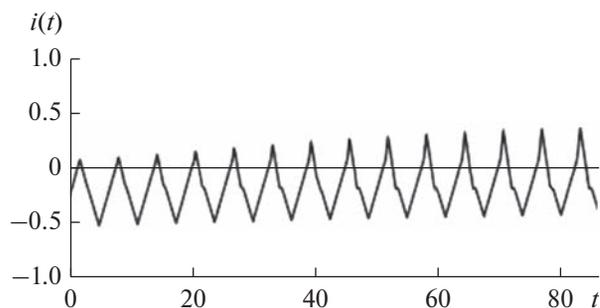


**Рис. 13.** ВАХ участка цепи при последовательном соединении мемристора и полупроводникового диода при увеличенном токе насыщения; пороговые напряжения симметричны.

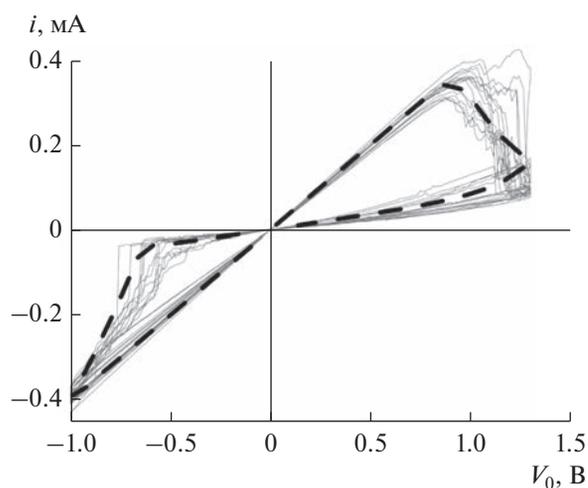


**Рис. 14.** Внутренний параметр мемристора при последовательном соединении мемристора и конденсатора.

экспериментом. При расчете принималось, что на участок цепи с этими элементами подается напряжение, соответствующее данным рис. 4, сдвинутым влево на полпериода и смещенным на 0.15 В (амплитуда данного пилообразного напряжения составляла 1.15 В, таким образом, внешнее напряжение изменялось от  $-1$  до 1.3 В, период равен 18 с). Для соответствия полярности переключения той, что была реализована в эксперименте при заземлении верхнего электрода мемристив-



**Рис. 15.** Ток, протекающий через мемристор, при последовательном соединении мемристора и конденсатора.



**Рис. 16.** ВАХ цепи “мемристор–резистор”: штриховая кривая – расчет, сплошные кривые – эксперимент.

ной структуры, полярность напряжения в модели также была изменена на противоположную.

Параметры в выражениях (7) и (9) были выбраны следующие:  $\alpha = 173.95$ ,  $\beta = 0.7$  (скорости переключения),  $V_{t-} = -0.48$ ,  $V_{t+} = 0.57$  (пороги переключения),  $v_1 = 30$  (параметр крутизны пороговой функции  $P_1$  – см. формулу (7)),  $R_{\text{он}} = 1400$  Ом,  $R_{\text{офф}} = 17700$  Ом,  $R = 1000$  Ом (сопротивление последовательно подключенного резистора). Начальное значение (при  $t = 0$ ) внутреннего параметра  $x$  было взято равным 0.2.

На рис. 16 изображена расчетная ВАХ последовательной цепи “мемристор-резистор”, а также результаты измерений для 15 циклов переключения.

Следует отметить, что представленная на рис. 16 ВАХ цепи “мемристор–резистор” может быть описана с применением меньшего числа параметров. Результат, например, почти не зависит от “параметра крутизны” пороговой функции (главное,

чтобы он был достаточно большим – тогда пороговая функция будет практически неотличима от идеальной функции Хевисайда). Однако этот и другие параметры необходимы для сохранения универсальности модели с точки зрения дальнейших исследований. Кроме того, формально следовало уточнить их значения, использованные в расчетах.

Экспериментальные ВАХ и количество требуемых для их описания параметров модели сильно зависят от структуры и материалов мемристивных устройств, а именно от механизма переключения и механизмов транспорта заряда в разных состояниях устройства. Выбор оптимальных параметров в каждом конкретном случае представляет собой актуальную задачу для отдельного исследования (см., например, [22–24]).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из сравнения расчетных и экспериментальных данных на рис. 16 видно, что, несмотря на естественный разброс экспериментальных ВАХ от цикла к циклу переключения, модель адекватно воспроизводит основные характеристики системы “мемристор–резистор”, такие как напряжения переключения и резистивные состояния (в том числе  $R_{on}$  и  $R_{off}$ ).

Вернемся к последовательному соединению мемристора и диода. Известно, что тонкопленочные структуры, обладающие эффектом резистивного переключения, могут в начальном состоянии (до процесса электроформовки) иметь ВАХ, похожую на характеристику полупроводникового диода (см., например, [25]). Приведенные выше данные наводят на мысль, что один из результатов электроформовки математически эквивалентен резкому повышению тока насыщения во “встроенном” в структуру диоде, благодаря чему диодные свойства образца исчезают. “Выживают” лишь резистивные свойства (осложненные присутствием мемристорного эффекта). Предположим, что ток насыщения является переменной величиной и его изменение с течением времени определяется дифференциальным уравнением. Например, таким:

$$\frac{dI_s}{dt} = \lambda V_0(t), \quad (16)$$

где  $\lambda$  – некоторый коэффициент. Тогда динамика мемристора (вместе со “встроенным” диодом) будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} i &= -I_s + \frac{V_T}{R_m} W \left( \frac{I_s R_m}{V_T} \exp \left( \frac{V_0 + I_s R_m}{V_T} \right) \right), \\ R_m &= R_{off} + (R_{on} - R_{off})x, \\ \frac{dI_s}{dt} &= \lambda V_0, \quad \frac{dx}{dt} = f(x, i, R_m). \end{aligned} \quad (17)$$

Также в процессе формовки по аналогичному закону может увеличиваться параметр  $v_1$ , определяющий крутизну (быстроту спада) пороговых функций  $P_1$ .

С точки зрения внутренней структуры мемристивного устройства повышение тока насыщения диода соответствует уменьшению энергетического барьера для транспорта носителей тока (например, на границе металл–диэлектрик). В устройствах на основе оксидных материалов модуляция барьера может быть связана с миграцией кислородных вакансий под действием электрического поля и джоулева разогрева [26].

Альтернативное объяснение выявленной закономерности может базироваться на модели, согласно которой мемристор представляется как параллельное соединение двух участков цепи: “мемристор–диод” и “мемристор–резистор”. Причем до электроформовки сопротивление резистора бесконечно велико, а в ходе электроформовки оно снижается и шунтирует диод. Такое объяснение хорошо согласуется с представлением о формировании проводящих каналов (филаментов) по границам зерен в поликристаллической (столбчатой) пленке оксида [27].

Применимость данных моделей к описанию электроформовки реальных мемристоров будет объектом дополнительного исследования и сильно зависит от технологии создания и конкретной структуры мемристивного устройства. Однако обе эти модели соответствуют общепринятым механизмам резистивного переключения и могут быть реализованы с помощью математического представления уравнений мемристора, предложенного в данной работе.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках обобщенной модели мемристивной системы Чуа предложены математические выражения для описания динамики мемристора с биполярным резистивным переключением порогового типа, которые позволяют избежать использования кусочно-непрерывных пороговых и оконных функций и удобны для численного счета. Получены численные решения уравнений модели мемристора при действии на него треугольной последовательности импульсов. Выведены уравнения, описывающие последовательное соединение мемристора с дискретными радиотехническими элементами – резистором, диодом, конденсатором и индуктивностью. Приведены численные решения для резистора и конденсатора. Отмечено, что при последовательном соединении мемристора и диода режим переключений реализуется лишь при замене биполярного мемристора на униполярный (с положительными порогами переключения).

Приведен модельный пример расчетов для этого случая.

Для варианта последовательного соединения “мемристор–резистор” проведено сравнение результатов расчета с экспериментом. Подобраны параметры математической модели, при использовании которых результаты численного расчета адекватно описывают экспериментальные вольт-амперные характеристики и параметры резистивного переключения.

Показано, что в случае соединения с конденсатором возможно существование переходных процессов, по длительности значительно превышающих период внешнего воздействия. Уравнения, описывающие последовательное соединение мемристора и диода, могут быть полезны для моделирования реальных мемристивных систем, где наблюдаются вольт-амперные характеристики диодного типа. Для таких систем предложены физические интерпретации обнаруженных закономерностей в рамках общепринятых механизмов резистивного переключения (интерфейсного с модуляцией барьера по всей площади структуры и филаментного с формированием локальных проводящих каналов).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят И.Н. Антонова за помощь в создании мемристивных структур.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках научной программы Национального центра физики и математики (направление “Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах”).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chua L.O.* // IEEE Trans. 1971. V. CT-18. № 5. P. 507.
2. *Chua L.O., Kang S.* // Proc. IEEE. 1976. V. 64. № 2. P. 209.
3. *Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S.* // Nature. 2008. V. 453. P. 80.
4. *Mikhaylov A., Pimashkin A., Pigareva Y. et al.* // Frontiers in Neuroscience. 2020. V. 14. P. 358.
5. *Xu W., Wang J., Yan X.* // Frontiers in Nanotechnology. 2021. V. 3. P. 1.
6. *Pershin Y.P., La Fontaine S., Di Ventra M.* // Phys Rev. E. 2009. V. 80. P. 021926.
7. *Joglekar Y.N., Wolf S.J.* // Eur. J. Phys. 2009. V. 30. P. 661.
8. *Mutlu R.* // Turk. J. Elec. Eng. Comp. Sci. 2015. V. 23. P. 1219.
9. *Pisarev A., Busygin A., Udovichenko S., Maevsky O.* // Microelectronic Engineering. 2018. V. 198. P. 1.
10. *Biolek Z., Di Ventra M., Pershin Y.V.* // Radioengineering. 2013. V. 22. P. 945.
11. *Удовиченко С.Ю., Писарев А.Д., Бусыгин А.Н., Бобылев А.Н.* // Наноиндустрия. 2020. Т. 13. № 7–8. С. 466.
12. *Emelyanov A.V., Nikiruy K.E., Demin V.A. et al.* // Microelectronic Engineering. 2019. V. 215. P. 110988.
13. *Upadhyay N.K., Sun W., Lin P. et al.* // Adv. Electron. Mater. 2020. V. 6. № 5. P. 1901411.
14. *Guseinov D.V., Tetelbaum D.I., Mikhaylov A.N. et al.* // Intern. J. Nanotechnology. 2017. V. 14. № 7/8. P. 604.
15. *Guseinov D.V., Mikhaylov A.N., Pershin Y.P.* // IEEE Trans. 2022. V. CS-II-69. №3. P. 1802.
16. *Biolek Z., Biolek D., Biolkova V.* // Radioengineering. 2009. V. 18. P. 210.
17. *Kvatinsky S., Friedman E. G., Kolodny A. et al.* // IEEE Trans. 2013. V. CS-I-60. № 1. P. 211.
18. *Yakopcic C., Taha T. M., Subramanyam G. et al.* // IEEE Electron Device Lett. 2011. V. 32. № 10. P. 1436.
19. *Filatov D.O., Koryazhkina M.N., Novikov A.S. et al.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2022. V. 156. P. 111810.
20. *Banwell T.C., Jayakumar A.* // Electronics Lett. 2000. V. 36. № 4. P. 291.
21. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006.
22. *Zhevnenko D., Meshchaninov F., Kozhevnikov V. et al.* // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. V. 142. P. 110382.
23. *Meshchaninov F.P., Zhevnenko D.A., Kozhevnikov V.S. et al.* // Micromachines. 2021. V. 12. № 10. P. 1201.
24. *Zhevnenko D.A., Meshchaninov F.P., Kozhevnikov V.S. et al.* // Micromachines. 2021. V. 12. № 10. P. 1220.
25. *Ярмаркин В.К., Шульман С.Г., Леманов В.В.* // ФТТ. 2008. Т. 50. № 10. С. 1767.
26. *Ryu J.H., Hussain F., Mahata C. et al.* // Appl. Surf. Sci. 2020. V. 529. P. 147167.
27. *Guseinov D.V., Korolev D.S., Belov A.I. et al.* // Model. Simul. Mater. Sci. Eng. 2020. V. 28. P. 015007.

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.3.08:621.3.089.2:621.311.6

### БЕЗДРОССЕЛЬНЫЙ ПОВЫШАЮЩИЙ DC/DC-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ

© 2023 г. В. П. Бабенко<sup>а</sup>, В. К. Битюков<sup>а, \*</sup>, А. И. Лавренов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>МИРЭА – Российский технологический университет,  
просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

\*E-mail: bitukov@mirea.ru

Поступила в редакцию 31.08.2021 г.

После доработки 21.10.2021 г.

Принята к публикации 10.10.2022 г.

Представлены результаты анализа особенностей процесса накачки заряда в устройствах с коммутируемыми конденсаторами, а также особенностей коммутационных процессов в переходных режимах работы. Рассмотрены способы, которыми достигается высокая эффективность накачки заряда. Схемотехническое моделирование позволило уточнить характеристики процессов, минимизировать потери преобразования, сформулировать рекомендации по выбору параметров элементов преобразователей и формированию сигналов управления.

DOI: 10.31857/S0033849423030026, EDN: ICLVJV

#### ВВЕДЕНИЕ

Наиболее важной особенностью современных мобильных устройств являются их массогабаритные характеристики, возможность транспортировки и обеспечение работоспособности приборов независимо от физического местоположения пользователя. Мобильность прибора требует малогабаритных и надежных источников питания, которые могли бы работать от общего первичного источника питания – аккумулятора, батареи, а иногда от единственного низковольтного элемента питания, от которого необходимо обеспечить более высокое напряжение питания или напряжение иной полярности. Традиционно для источников питания батарейных устройств используются дроссельные DC/DC-преобразователи. Для преодоления некоторых ограничений, присущих встраиваемым дроссельным DC/DC-преобразователям, в малопотребляющих и высокоинтегрированных электронных системах стали применять микросхемы DC/DC-преобразователей без использования индуктивных элементов. Функционально они могут выполнять те же преобразования напряжения, что и дроссельные, но при этом имеют превосходные массогабаритные характеристики, высокий КПД, совместимы с интегральной технологией, не используют дорогие катушки индуктивности, обеспечивают гальваническую развязку входной и выходной цепи. Кроме того, прекрасно работают в слаботочных портативных устройствах с батарейным питанием, требующих нескольких напряжений, где первостепенное значение имеет комбинация малых габаритов, микропотребления, высокого КПД, не предъявляется жестких

требований к качеству стабилизации напряжения даже при невысоких (до 100 мА) токах нагрузки [1].

#### 1. СХЕМОТЕХНИКА

Топология базовых DC/DC-преобразователей рассмотрена в [2]. Представлены схемотехнические особенности преобразователей с единственным “летающим” конденсатором и инвертирующего повторителя (инвертора напряжения), обладающих гальванической развязкой входной и выходной цепей, и удвоителем напряжения, но без гальванической развязки входной и выходной цепей.

Однако на практике зачастую удвоения напряжения недостаточно (<https://pdfserv.maximintegrated.com/en/an/AN725.pdf>). Например, в мобильном приборе с питанием цифровых интегральных схем (ИС) от единственного гальванического элемента, имеющего напряжение порядка 1.5 В, удвоения напряжения недостаточно, а каскадно соединять удвоители недопустимо, так как у них нет гальванической развязки. Для подобных задач производитель ИС Maxim Inc. выпустил семейство микросхем для построения повышающих DC/DC-преобразователей с коммутацией двух “летающих” конденсаторов, например MAX619, позволяющих утроить выходное напряжение (<http://www.gaw.ru/html.cgi/txt/ic/Maxim/power/pwm/max619.htm>).

На рис. 1а представлена схемотехника фазы параллельного заряда “летающих” конденсаторов  $C1$  и  $C2$  до напряжения  $U_{вх}$ , а на рис. 1б – схемотехника фазы разряда последовательно соединенных “летающих” конденсаторов с входным напряжением. Схема коммутации усложнилась,

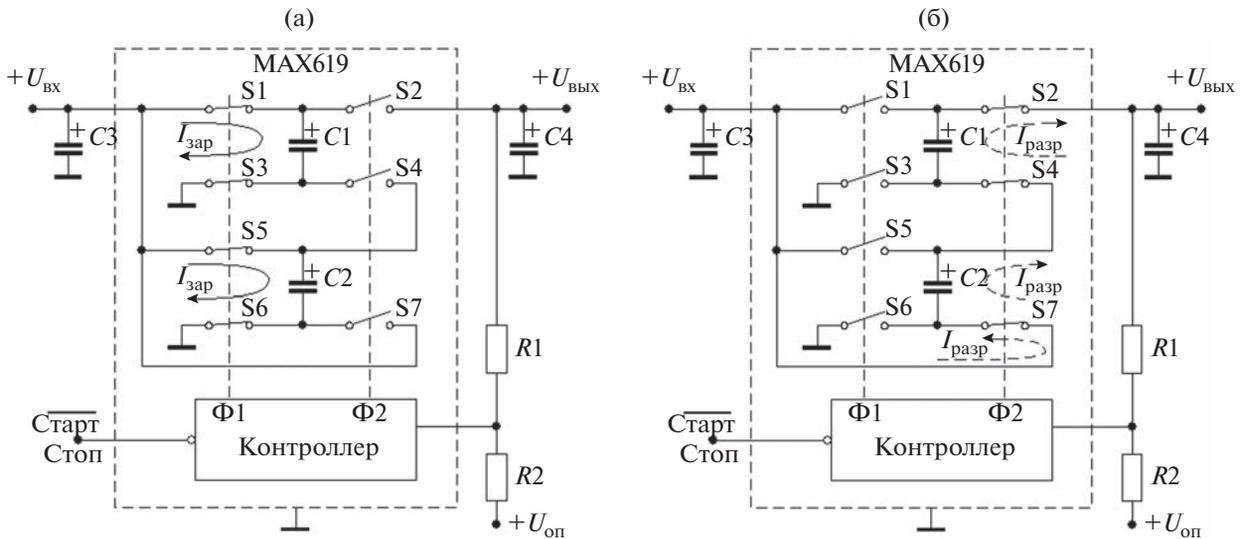


Рис. 1. Утроитель напряжения с двумя “летающими” конденсаторами: а – фаза заряда; б – фаза разряда; сплошные линии со стрелкой – направление протекания тока при заряде “летающих” конденсаторов, штриховые – ток перезаряда.

требуется семь ключей  $S1...S7$ , с помощью которых реализуется утроитель напряжения

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} + U_{C1} + U_{C2} \approx 3U_{\text{вх}}.$$

Сплошной линией со стрелкой на рисунке показано направление протекания тока при заряде “летающих” конденсаторов, а пунктирной линией – тока перезаряда последовательно соединенных конденсаторов  $C1, C2$  на накопительный конденсатор  $C4 = C_{\text{вых}}$ . Часть выходного напряжения, регистрируемого делителем  $R1R2$ , используется как отрицательная обратная связь для стабилизации выходного напряжения.

Согласно технической документации ИС MAX619 DC/DC-преобразователь с подкачкой заряда предназначен для использования в малогабаритных портативных системах с автономным питанием. Рекомендуемая величина внешних “летающих” конденсаторов  $C1$  и  $C2$  составляет  $0.22 \text{ мкФ}$ . Электролитические конденсаторы  $C_{\text{вх}} = C3 = C_{\text{вых}} = C4 = 10 \text{ мкФ}$  сглаживают броски тока на входе и выходе. ИС MAX619 обеспечивает стабилизированное выходное напряжение  $5 \text{ В}$  (с допустимым диапазоном отклонения  $\pm 4\%$ ) при нагрузке  $50 \text{ мА}$  во всем диапазоне рабочих температур. Диапазон входных напряжений составляет от  $2.0$  до  $3.6 \text{ В}$  (два элемента питания) при КПД преобразования не хуже  $82\%$ . Встроенный генератор обеспечивает работу на частоте  $500 \text{ кГц}$ . Вход Старт/Стоп позволяет с помощью логического сигнала управлять работой преобразователя.

В тех случаях, когда возникает необходимость не только повысить, но и инвертировать выходное

напряжение, целесообразно использовать ИС MAX868 (рис. 2а), где два летающих конденсатора  $C1$  и  $C2$  коммутируются шестью ключами  $S1...S6$ .

Контроллер формирует два противофазных сигнала  $\Phi 1, \Phi 2$  с частотой  $450 \text{ кГц}$  и контролируемой временной задержкой, получившей название Dead Time (DT) – “мертвое время”.

Во время фазы заряда “летающие” конденсаторы  $C1$  и  $C2$  соединены параллельно и заряжаются от входного источника до напряжения  $U_{\text{вх}}$ . При фазе разряда конденсаторы  $C1$  и  $C2$  включены последовательно, формируя на выходе удвоенное напряжение  $2U_{\text{вх}}$ . С учетом гальванического разделения входной и выходной цепей, к общему выводу был подключен положительный вывод выходной цепи, а отрицательный вывод является потенциальным выходом преобразователя с выходным напряжением  $U_{\text{вых}} \approx -2U_{\text{вх}}$ .

При входном положительном напряжении  $U_{\text{вх}} = +1.0...+5.5 \text{ В}$  напряжение на выходе может регулироваться делителем  $R1R2$  до  $-2U_{\text{вх}}$  при выходном токе до  $35 \text{ мА}$ .

В ИС MAX868 применена архитектура управления с частотно-импульсной модуляцией на принципе разрешения/запрета работы встроенного генератора  $450 \text{ кГц}$  при стабилизации выходного напряжения. КПД в значительной степени зависит от величины и соотношения входного и выходного напряжений и достигает  $80\%$ .

На рис. 2б показана схема включения инвертора с подкачкой заряда MAX868. Согласно техни-

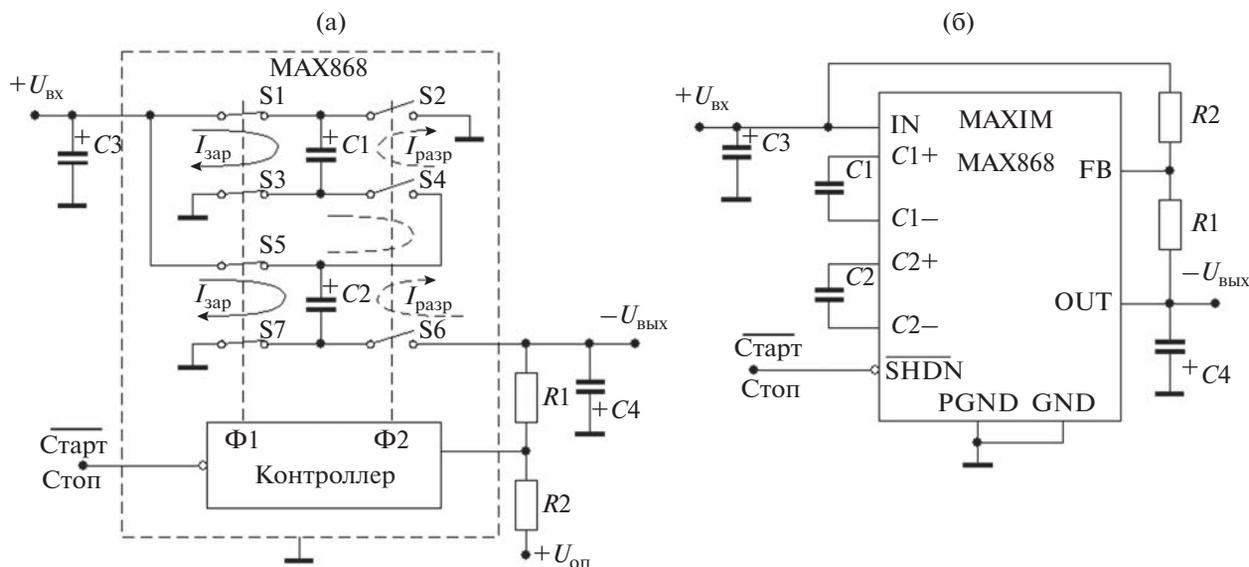


Рис. 2. Инвертирующий удвоитель напряжения с двумя “летающими” конденсаторами: а – функциональная схема; б – схема включения MAX868; сплошная линия со стрелкой – ток заряда  $I_{зар}$ , штриховая – ток разряда  $I_{разр}$ .

ческой документации рекомендуется в качестве “летающих” использовать керамические конденсаторы  $C1 = C2 = 0.22$  мкФ, а для снижения влияния импульсных помех на входе и выходе устанавливать электролитические конденсаторы  $C_{вх} = 1$  мкФ, а  $C_{вых} = 10$  мкФ.

## 2. СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для схемотехнического моделирования преобразователей была использована программа Electronics Workbench (EWB), а само моделирование выполнено по методу, реализованному в [3].

Для моделирования DC/DC-преобразователя с накачкой заряда был использован  $n$ -канальный MOSFET-транзистор IRFZ44N из библиотеки Intrnl с параметрами по технической документации:

- напряжение сток-исток  $U_{си}$  до 60 В,
- сопротивление канала в открытом состоянии  $r_{си} = 28$  мОм,
- пороговое напряжение на затворе 4 В,
- время задержки включения 12 нс,
- время нарастания 60 нс,
- время задержки выключения 44 нс,
- время спада 45 нс.

Однако необходимо было уточнить параметры библиотечной модели IRFZ44N транзистора при совместной работе с драйвером и сопоставить с параметрами технической документации. Схема

для исследования ключевых свойств транзистора приведена на рис. 3.

Исследуемый транзистор Q1 коммутирует ток источника питания  $V1 = 10$  В и сопротивления нагрузки  $R1 = 10$  Ом. В качестве драйвера ключа использован библиотечный компонент V4 – Voltage-Controlled Voltage Source, обеспечивающий преобразование логического сигнала управления в такое же напряжение (коэффициент преобразования 1 V/V) между затвором и истоком транзистора Q1, но с гальваническим разделением цепей управления и коммутации.

Переключатель S1 позволяет изменять функциональные возможности схемы. При положении “2” кнопочного переключателя S1 (см. рис. 3) схема конфигурирована для исследования статических характеристик ключа. С узла V3 (Pull-up resistor) на вход драйвера V4 подается высокий логический уровень, обеспечивающий полное открытие транзистора Q1. Падение напряжения на канале открытого транзистора контролируется вольтметром M1.

При переключении S1 в положение “1” прямоугольные импульсы с генератора V2 амплитудой 5 В и частотой 1 МГц поступают на драйвер V4, который формирует гальванически независимое напряжение, подаваемое на вход затвор-исток ключа Q1. Аналогичный драйвер V5, подключенный параллельно выводам сток-исток транзистора Q1, гальванически развязывает и преобразует напряжение на канале транзистора в такое же напряжение, но относительно общей шины, позволяя

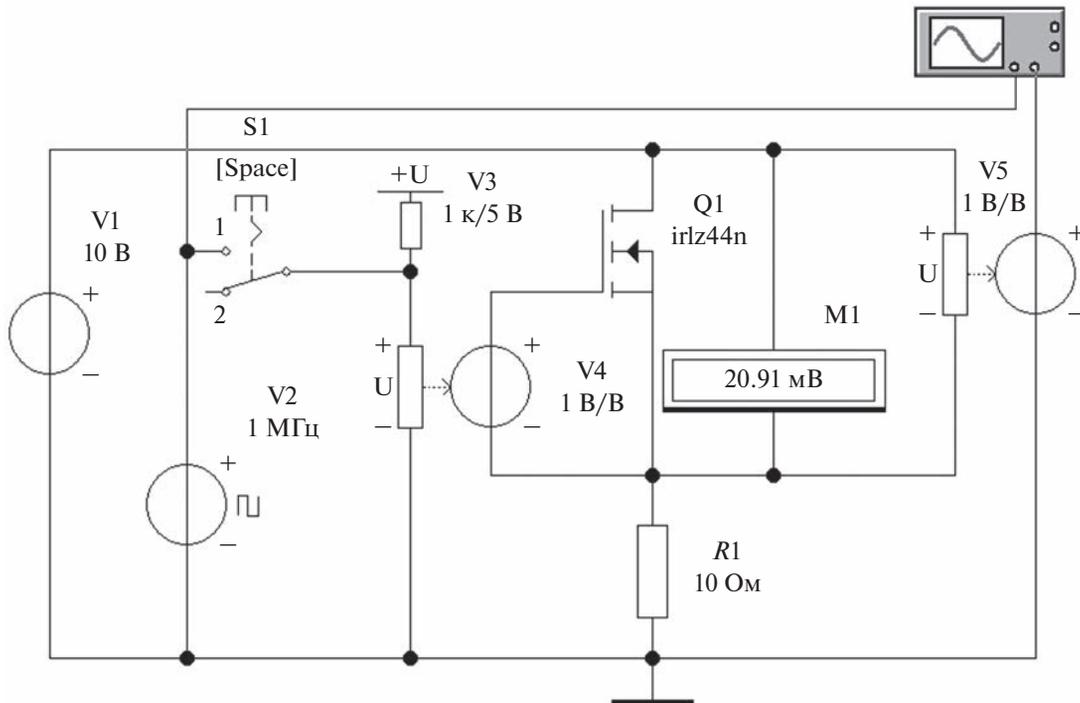


Рис. 3. Схема для исследования ключевых свойств MOSFET.

контролировать это напряжение с помощью осциллографа.

Осциллограмма, приведенная на рис. 4, позволяет оценить время задержки и длительность фронтов при переключении транзисторного ключа. По цифровой шкале реперов осциллографа измеренное время включения  $t_{вкл} = 10$  нс и выключения  $t_{выкл} = 30$  нс, что согласуется с параметрами технической документации транзистора с учетом особенностей используемого драйвера.

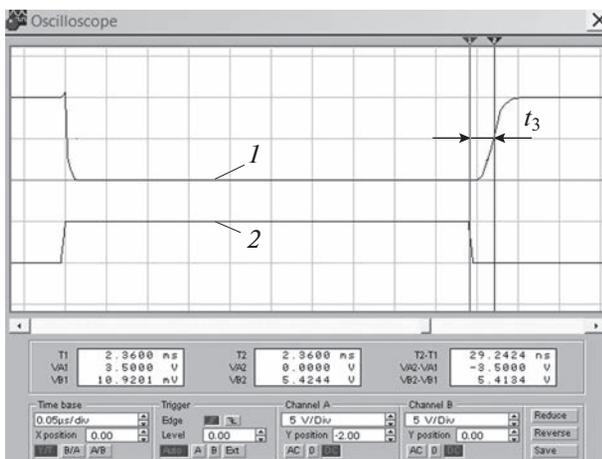


Рис. 4. Скриншот осциллограммы напряжения на стоке: 1 – форма напряжения сток-исток транзистора Q1; 2 – сигнал генератора импульсов V2.

При измерениях в статическом режиме, когда между затвором и истоком подается постоянное напряжение  $U_{зи} = +5$  В, падение напряжения на открытом транзисторе (вольтметр M1) составляет  $U_{си} \approx 21$  мВ, что при токе в нагрузке  $I_H = U_{вх}/R_H = 1$  А соответствует сопротивлению канала открытого транзистора  $r_{си} = U_{си}/I_H = 0.021$  Ом. Такое значение достаточно хорошо соответствует параметру  $r_{си} = 28$  мОм из технической документации и подтверждает целесообразность выбора транзистора IRLZ44N в качестве ключа.

Для исследования выбрана схема преобразователя с удвоением выходного напряжения, в которой условные ключи заменены на MOSFET [2]. Результирующая схема моделирования, приведенная на рис. 5, обеспечивает коммутацию токов заряда/разряда “летающего” конденсатора C1 ключевыми транзисторами Q1...Q4, управляемыми драйверами V4...V7. Схема дополнена соответствующим электронным обрамлением и необходимыми элементами контроля. Источником входного напряжения является библиотечный компонент Battery V1 с напряжением  $U_{вх} = 10$  В. Выход преобразователя нагружен на резистор нагрузки R3 и накопительный конденсатор C2.

Прямоугольные импульсы с генератора V2 поступают на формирователь импульсов управления ключами – логические элементы U1, U2 и элемент временной задержки R1C3. На выходе логических элементов U1, U2 формируются им-

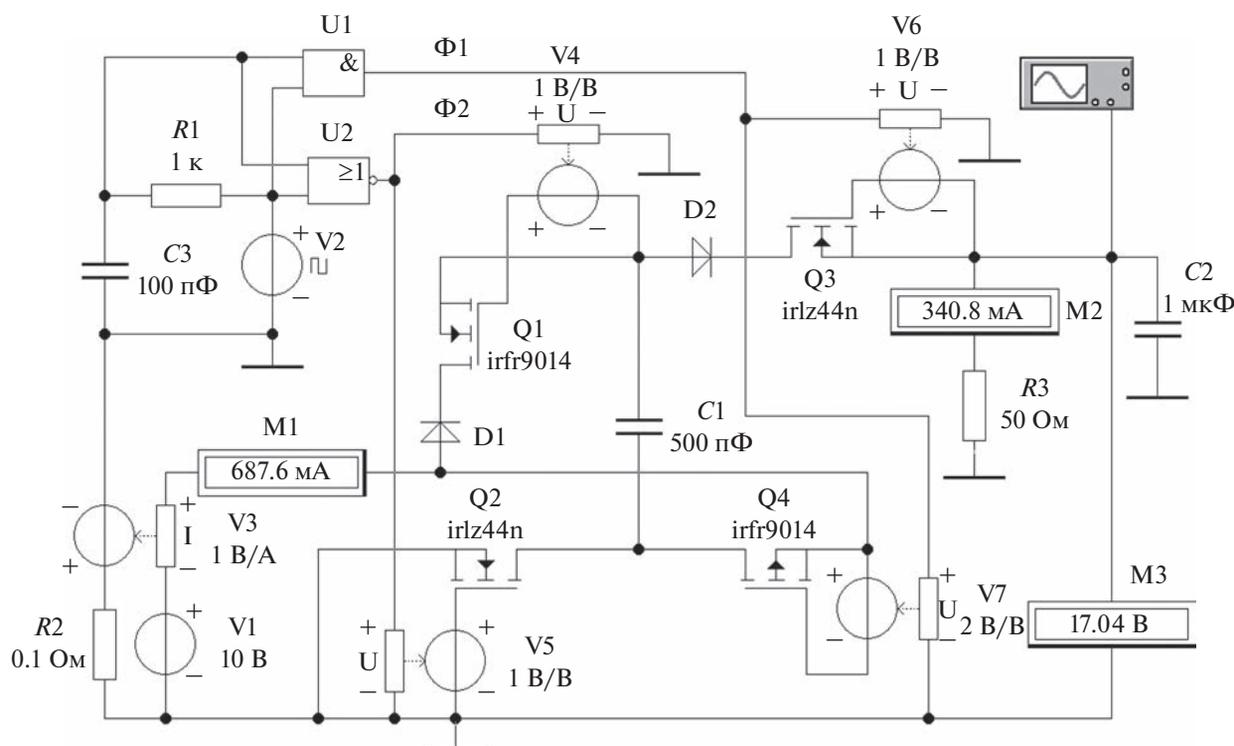


Рис. 5. Схема для исследования преобразователя с накачкой заряда в режиме удвоителя напряжения.

пульсы управления ключами  $\Phi 1$ ,  $\Phi 2$ , сдвинутые по фазе на  $180^\circ$  и имеющие блокирующий временной интервал  $DT$  для защиты от сквозных токов. Необходимое время задержки  $DT$  обеспечивается регулировкой постоянной времени цепи  $R1C3$ . Сигналы  $\Phi 1$ ,  $\Phi 2$  поступают на потенциальные входы драйверов  $V4...V6$ , которые преобразуют логический сигнал управления в гальванически независимое напряжение, подаваемое между затвором и истоком MOSFET ключей.

Ключи  $Q1$ ,  $Q2$ ,  $Q3$  функционируют при положительном напряжении на стоке, поэтому в качестве ключей  $Q1$ ,  $Q2$ ,  $Q3$  целесообразно использовать MOSFET с  $n$ -каналом типа IRFZ44N, для управления которыми используются драйверы  $V4...V6$  с единичным коэффициентом преобразования. Транзисторные ключи отпираются при подаче между затвором и истоком отпирающего напряжения ( $U_{зи} = +5$  В), и запираются при подаче выключающего напряжения ( $U_{зи} = 0$  В).

А ключ  $Q4$  в данной схеме выполняет коммутацию отрицательного напряжения, что потребовало использовать комплементарный MOSFET с  $p$ -каналом. Однако для надежного отпирающего транзистора  $Q4$  типа IRFZ44N требуется напряжение  $U_{зи}$ , превышающее  $-5$  В, что потребовало не только изменить полярность подключения драйвера  $V7$ , но и увеличить его коэффициент преобразования  $k_u = U_{вых}/U_{вх} = 2/1$ .

При моделировании следует учитывать наличие у MOSFET технологического диода, существующего всегда как “паразитный” элемент, который шунтирует канал транзистора и ответственен за низкое сопротивление ключа при смене полярности напряжения между стоком и истоком. Однако для исследуемой схемы обратная проводимость ключа недопустима, что приводит к необходимости подключения последовательно с ключами  $Q1$ ,  $Q4$  дополнительных диодных ключей  $D1$ ,  $D2$ , блокирующих MOSFET при смене полярности. Чтобы диодные ключи не слишком увеличивали коммутационные потери, необходимо использовать диоды с малыми потерями (диоды Шоттки). На ключах  $Q2$ ,  $Q3$  при работе не происходит смены полярности напряжения и они не требуют блокировки диодами.

Постоянную составляющую выходного напряжения и тока входного источника контролировали с помощью вольтметра  $M3$  и амперметра  $M2$ . Контроль переменной составляющей выполняли с помощью осциллографа. Но осциллограф может регистрировать только напряжение относительно общего вывода, поэтому для наблюдения входного тока в токовую цепь источника  $V1$  был включен преобразователь ток-напряжение  $V3$  (Current Controlled Voltage Source), преобразующий ток в соответствующее гальванически развя-

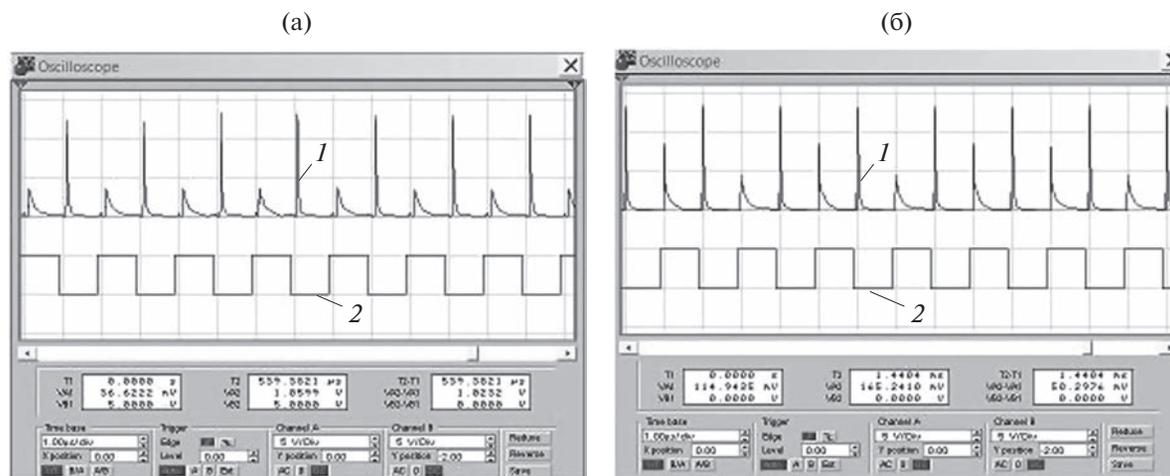


Рис. 6. Скриншот осциллограммы входного тока при интервале задержки  $DT t_3 = 100$  (а) и  $10$  нс (б):  $I$  – входной ток;  $2$  – импульсы тактового генератора.

занное напряжение с коэффициентом преобразования  $k = U_{\text{вых}}/I_{\text{вх}} = 1 \text{ В/А} = 1 \text{ Ом}$ .

Данные измерительных приборов (см. рис. 5) соответствуют режиму с достаточно большим током нагрузки  $I_{\text{н}} = 341 \text{ мА}$  при  $R3 = 50 \text{ Ом}$ . Выходное напряжение при этом составляло  $U_{\text{вых}} = 17.0 \text{ В}$ . При уменьшении тока нагрузки до  $I_{\text{н}} = 1...3 \text{ мА}$  выходное напряжение достигало  $U_{\text{вых}} = 20 \text{ В}$  при входном напряжении  $U_{\text{вх}} = 10 \text{ В}$ , т.е. удваивалось.

Регулировка схемы заключалась в первую очередь в выборе интервала задержки  $DT$ , при котором импульсы сквозного тока через ключи в момент коммутации отсутствуют и выполняется гальваническая изоляция входных и выходных цепей преобразователя. Этот процесс иллюстрируется осциллограммами входного тока, приведенными на рис. 6. Для временной привязки приведены и импульсы тактового генератора  $V2$ .

По логическому перепаду  $1 \rightarrow 0$  тактового генератора замыкаются ключи  $Q1$  и  $Q2$  и происходит заряд “летающего” конденсатора  $C1$  от источника входного напряжения  $V1$ . На осциллограмме “1” (см. рис. 6а) виден короткий ( $t_{\text{н}} = 53 \text{ нс}$ ) импульс входного тока, амплитуда которого  $I_{\text{вх max}} = 12 \text{ А}$ .

По логическому перепаду  $0 \rightarrow 1$  тактового генератора замыкаются ключи  $Q3$  и  $Q4$ , а “летающий” конденсатор  $C1$  подключается последовательно к входному источнику напряжения  $V1$ . На осциллограмме входного тока формируется дополнительный импульс тока (осциллограмма “1” на рис. 6б), с меньшей амплитудой  $I_{\text{вх}} = 4 \text{ А}$  и с большей длительностью  $t_{\text{н}} = 150 \text{ нс}$ .

При недостаточном времени задержки  $DT$  ( $t_3 = 10 \text{ нс}$ ) на этот дополнительный импульс входного тока накладывается нерегулярный импульс

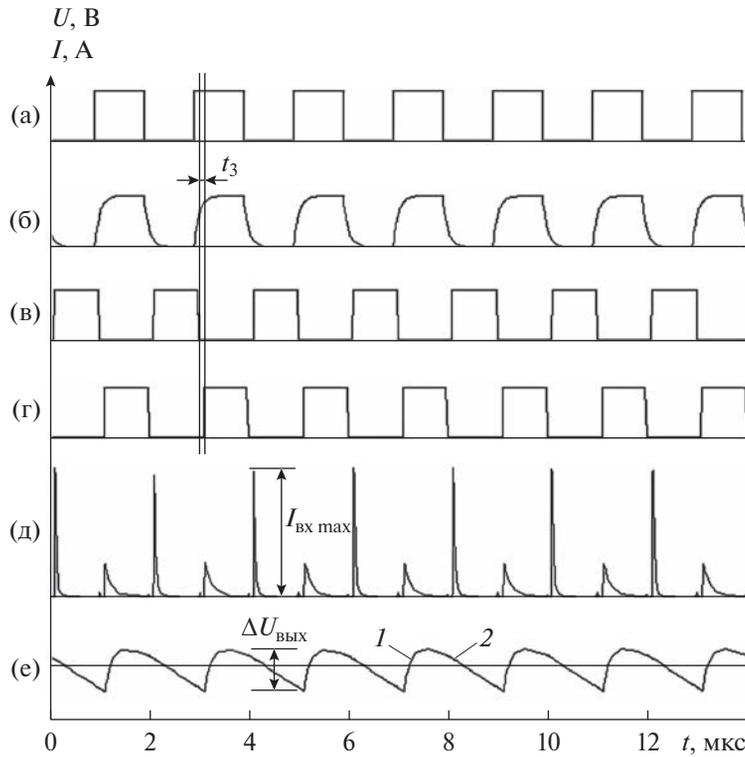
сквозного тока, вызывающий флуктуации амплитуды (см. рис. 6б). При увеличении времени задержки до  $t_3 = 100 \text{ нс}$  сквозной нестабильный ток исчезает и остается стабильный импульс тока перезарядки конденсаторов (см. рис. 6а).

Временные диаграммы работы преобразователя приведены на рис. 7. Время задержки импульсов  $t_3$  в схеме управления коммутаторами связано с искажением фронтов интегрирующей  $RC$ -цепочкой  $R1C3$  (рис. 7б).

Логическое комбинирование на элементах  $U1$ ,  $U2$  входного импульса (рис. 7а) и импульса, задержанного после  $RC$ -цепи (рис. 7б), позволило получить импульсы управления  $\Phi1$ ,  $\Phi2$  с временной задержкой  $DT$  (рис. 7в, 7г). Время задержки коммутирующих импульсов составляло около  $t_3 = 80 \text{ нс}$ , что достаточно для блокирования сквозных токов через ключи.

Форма входного тока преобразователя, представленная на рис. 7д, содержит короткие импульсы тока, возникающие в момент заряда “летающего” конденсатора. Пиковое значение входного тока составляет  $I_{\text{вх max}} \approx 80 \text{ А}$ . Постоянная составляющая входного тока  $I_{\text{вх}} = 0.687 \text{ А}$ , измеряемая амперметром  $M1$ , существенно меньше бросков тока и на диаграмме практически не заметна.

Пульсации выходного напряжения  $\Delta U_{\text{вых}} \approx 200 \text{ мВ}$  (рис. 7е) складываются из участка “1” экспоненциально нарастающего напряжения, связанного с зарядом конденсатора  $C2$  в момент подключения “летающего” конденсатора  $C1$  к источнику входного напряжения  $V1$ , и участка “2” – разряда конденсатора  $C2$  на сопротивление нагрузки  $R3$ .



**Рис. 7.** Временные диаграммы: а – тактовые импульсы генератора V2; б – напряжение на конденсаторе C1; в, г – напряжение задержанного импульса на выходе ЛЭ U1 и U2 соответственно; д – входной ток преобразователя; е – напряжение пульсаций на выходе преобразователя (“1” участок экспоненциально нарастающего напряжения, “2” участок разряда конденсатора C2).

При наладке схемы важно было обеспечить достаточное время задержки ДТ для блокирования сквозных токов через ключи.

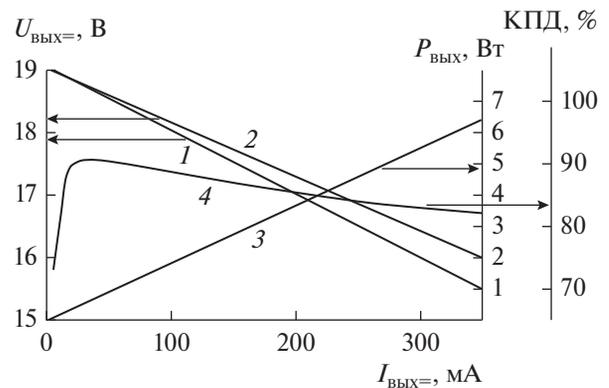
### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании постоянные составляющие выходного тока  $I_{\text{вых}}$  и напряжения  $U_{\text{вых}}$  контролировались приборами М3, М4, а форма пульсаций выходного напряжения фиксировалась осциллографом, вход которого был включен в режиме Alternative Current (без постоянной составляющей). Ток нагрузки варьировался выбором соответствующего сопротивления нагрузки R3.

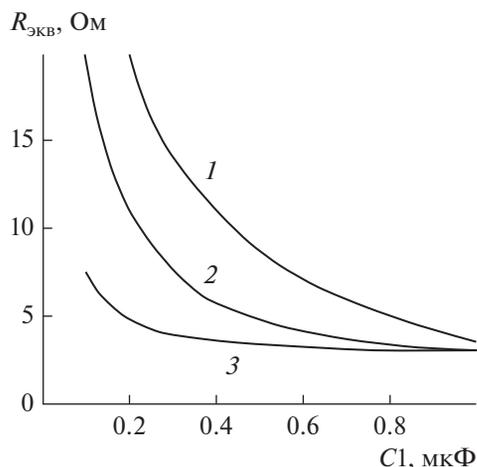
Графики зависимости выходного напряжения  $U_{\text{вых}}$  от тока нагрузки  $I_{\text{вых}}$  (нагрузочная характеристика) приведены на рис. 8 (кривые 1 и 2). В исследуемом диапазоне выходных напряжений  $U_{\text{вых}}$  графики имеют линейно падающий характер, который удобно описывать выходным эквивалентным сопротивлением  $R_{\text{экв}}$ , часто называемым динамическим сопротивлением

$$R_i = \left| \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta I_{\text{н}}} \right| \text{ при } U_{\text{вх}} = \text{const} [4],$$

зависящим от емкости “летающего” конденсатора C1 и частоты преобразования  $f$ . При частоте  $f = 500 \text{ кГц}$  и  $C1 = 0.5 \text{ мкФ}$  величина  $R_{\text{экв}} = 11.2 \text{ Ом}$ , а при  $C1 = 1 \text{ мкФ}$  получают  $R_{\text{экв}} = 9.0 \text{ Ом}$ . При малых выходных токах, характерных для ре-



**Рис. 8.** Зависимость энергетических характеристик преобразователя от выходного тока  $I_{\text{вых}}$ :  $U_{\text{вых}}$  – постоянная составляющая выходного напряжения “1” для  $C1 = 0.5 \text{ мкФ}$  и “2” – для  $C1 = 1.0 \text{ мкФ}$ ; 3 – выходная мощность  $P_{\text{вых}}$ ; 4 – КПД.



**Рис. 9.** Зависимость выходного эквивалентного сопротивления  $R_{\text{экв}}$  от емкости конденсатора  $C1$  при  $f = 200$  (1), 500 (2) и 1000 кГц (3).

жима холостого хода, выходное напряжение достигает величины 19.8 В, т.е. практически удвоенного входного напряжения.

При увеличении выходного тока линейно растет и выходная мощность (см. рис. 8, кривая 3). КПД достигает максимума (свыше 90%) при выходном токе  $I_{\text{вых}} = 25 \dots 30$  мА и падает до 80% при токах 350...400 мА (рис. 8, кривая 4).

Зависимости выходного эквивалентного сопротивления  $R_{\text{экв}}$  от емкости “летающего” конденсатора и частоты коммутации приведены на рис. 9. Величина  $R_{\text{экв}}$  снижается при увеличении

емкости конденсатора  $C1$  и частоты коммутации  $f$ , и при достаточно большой емкости конденсатора  $C1$  экспоненциально стремится к величине  $R_{\text{экв}} = 2 \dots 3$  Ом, обусловленной потерями в ключах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена топология базовых узлов DC/DC-преобразователей с накачкой заряда. Выполнено схемотехническое моделирование с ключами на MOSFET. Проведено исследование основных энергетических характеристик. Максимальный КПД достигается при сравнительно небольших выходных токах  $\sim 30 \dots 50$  мА. Выходное эквивалентное сопротивление, характеризующее нагрузочную характеристику преобразователя, уменьшается при увеличении емкости “летающего” конденсатора и частоты преобразования и при емкости 0.5...1.0 мкФ снижается до 2...3 Ом, ограниченной потерями в MOSFET ключах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблоков Д. // Компоненты и технологии. 2005. № 2. С. 96.
2. Бабенко В.П., Битюков В.К. // Рос. технол. журн. 2021. Т. 9. № 2. С. 66.
3. Бабенко В.П., Битюков В.К. // РЭ. 2019. Т. 64. № 2. С. 199.
4. Битюков В.К., Симачков Д.С., Бабенко В.П. Источники вторичного электропитания. М.: Инфра-Инженерия, 2020.