

ISSN 0033-8494

Том 69, Номер 2

Февраль 2024



# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА



НАУКА

— 1727 —

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 69, номер 2, 2024

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

- Численное исследование дисперсионных характеристик  
цилиндрических спиральных линий и периодических решеток на их основе  
*С. Е. Банков, В. И. Калинин* 103
- Радиопоглощение в структурах типа искусственных магнитных проводников  
при больших углах падения волн ТМ-поляризации  
*Ю. Н. Казанцев, Г. А. Крафтмахер, В. П. Мальцев, В. С. Солосин* 115
- 

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

- Синхронизация М-последовательностей на основе быстрого преобразования Адамара  
*С. Ф. Горгадзе, Д. Ву Ши, А. В. Ермакова* 122
- Синхронизация последовательностей голда на основе быстрого преобразования  
в усеченном базисе функций Уолша–Адамара  
*С. Ф. Горгадзе, Д. Ву Ши, А. В. Ермакова* 137
- Исследование эффективности весовых функций Кравченко  
и комбинаций на их основе в задаче режекции узкополосных помех  
*Е. В. Кузьмин* 146
- Возможность диагностики слоистых сред интерферометрическим  
гидролокатором бокового обзора  
*В. И. Каевицер, А. П. Кривцов, И. В. Смольянинов, А. В. Элбакидзе* 157
- Исследование спектральной структуры сигнала методом конечных разностей  
*В. В. Климов* 162
- 

## ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

- Анализ диодных смесителей методом узловых потенциалов  
в обобщенном матричном виде в частотной области.  
Часть 2. Развязка между портами, эффект рассогласования, уровень шума  
*А. С. Коротков, О. А. Головань* 167
- 

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

- Фоновая спектроскопия и особенности низкотемпературной теплоемкости  
твердых растворов электролитов  
*Е. И. Саламатов, А. В. Таранов, Е. Н. Хазанов* 180
-

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

Размерный резонанс собственного стимулированного  
пикосекундного излучения при наведении им фотонного кристалла  
и осцилляций населенности электронов  
в гетероструктуре  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$

*Н. Н. Агеева, И. Л. Броневой, А. Н. Кривоносов*

187

Применение средств трассировки для анализа сбоев микроконтроллера,  
возникающих при воздействии нейтронов с энергией 14 МэВ

*А. С. Пилипенко, М. И. Тихонов*

199

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СПИРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕТОК НА ИХ ОСНОВЕ

© 2024 г. С. Е. Банков\*, В. И. Калинин

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

*\*E-mail: sbankov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.

После доработки 08.02.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

Проведены численные исследования дисперсионных характеристик цилиндрических спиральных линий. Рассмотрены также одномерные и двумерные периодические решетки, образованные такими линиями. Использован метод собственных значений в сочетании с периодическими граничными условиями. Рассчитаны дисперсионные характеристики в области параметров, для которых условия применимости известных приближенных численно-аналитических методов анализа спиральных линий не выполняются. Получены дисперсионные характеристики первых двух собственных волн в одномерной и двумерной периодических решетках спиралей для разных величин фазовых сдвигов между периодами решетки. Показано, что основной тип волны в них является замедленной относительно осей линий волной с направлением вращения вектора поля, определяемым направлением намотки спирали.

*Ключевые слова:* дисперсионные характеристики, цилиндрические спиральные линии, диаграммообразующие схемы, секторные диаграммы направленности, граничные условия периодического типа.

DOI: 10.31857/S0033849424020016, EDN: KNBODU

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучению спиральных линий и антенн на их основе посвящено множество работ, и в настоящее время имеется значительная библиография на эту тему (см., например, [1, 2]). Большинство предыдущих исследований разных конструктивных вариантов таких линий основаны на приближенных аналитических и численно-аналитических методах. С помощью этих методов при определенных предположениях и ограничениях на параметры линий были получены дисперсионные уравнения для собственных волн регулярной бесконечно протяженной линии, численное решение которых позволило определить дисперсионные характеристики волн в линии в принятом при анализе приближении.

Среди использованных методов решения соответствующих граничных задач отметим применение анизотропных граничных условий, которые позволяют записать в аналитической форме дисперсионное уравнение для собствен-

ных волн спиралей с углами намотки, близкими к  $90^\circ$  [1]. Применение указанного подхода в случае малых и средних углов намотки невозможно.

Большой гибкостью обладает приближенный подход, позволяющий описывать собственные волны спиральных линий, выполненных из проводников с малым поперечным сечением [3]. Если речь идет о проводниках с круглым сечением, то условием малости являются неравенства  $\rho \ll P, R$ , где  $\rho$  – радиус проводника,  $P$  – период спирали,  $R$  – ее радиус. Применение данного подхода приводит к дисперсионному уравнению в виде бесконечного ряда по цилиндрическим функциям и может использоваться независимо от угла намотки спирали.

В работе [4] анализируются волны в ленточной спирали. Граничная задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая решается аналитически. Данный метод приводит к относительно простому дисперсионному уравнению, корректно описывающему

собственные волны в широком диапазоне изменения параметров.

Таким образом, из опубликованных работ следует, что известные аналитические и численно-аналитические методы решения граничных задач на собственные волны спиральных линий имеют существенные ограничения или на их параметры, или на структуру.

Отметим, что если построению математических моделей одиночных спиральных линий было посвящено достаточно большое число работ, многие из которых стали классическими, то связанные спирали исследованы значительно менее детально, что неудивительно, поскольку их геометрическая структура намного сложнее геометрии одиночной линии и с трудом допускает аналитическое описание поля.

Наш интерес к связанным линиям передачи разных типов обусловлен перспективами их применения в диаграммообразующих схемах (ДОС), формирующих систему лучей с секторными диаграммами направленности (ДН). Некоторые результаты в этом направлении были получены и опубликованы нами ранее, в 2009–2014 гг. В них впервые предложены и рассмотрены одномерные решетки одинаковых связанных линий, содержащие систему фиксированных фазосдвигателей. В развитие этой темы была также предложена другая схема для построения ДОС на основе связанных линий передачи с разными параметрами, которая не требует применения фазосдвигателей. В качестве линий передачи исследовались системы связанных двухсторонних щелевых волноводов, связанных диэлектрических волноводов, связанных ЕВГ (electromagnetic bandgap)-волноводов, связанных металлических волноводов. В недавней работе из этой серии рассматривается система микрополосковых линий со шлейфной связью [5]. Также в наших более ранних работах результаты для одномерных ДОС были обобщены для случая двумерной схемы с прямоугольной и гексагональной сетками.

С точки зрения построения ДОС спиральные линии обладают рядом несомненных достоинств, к которым можно отнести:

- технологичность и простоту изготовления;
- простоту создания распределенной связи, которая достигается простым сближением спиралей;

– простоту возбуждения широко распространенными коаксиальными линиями.

При проектировании ДОС связанные линии должны удовлетворять ряду технических требований, которые часто не позволяют использовать упомянутые выше приближенные методы. Поэтому построение универсальных моделей одиночных и связанных спиралей и исследование с их помощью электродинамических характеристик этих структур представляется нам актуальной научной задачей.

В данной работе при исследовании дисперсионных свойств спиральных линий и периодических решеток таких линий будем использовать строгий численный метод, основанный на программе электромагнитного моделирования HFSS (<https://ansys.com>). Для численного исследования дисперсионных характеристик периодических структур, к которым относится и спиральная линия, наиболее подходящим является метод собственных значений в сочетании с граничными условиями периодического типа. С их помощью удается исследовать характеристики бесконечно протяженных спиралей в широкой области параметров.

## 2. ОДИНОЧНАЯ СПИРАЛЬНАЯ ЛИНИЯ

Рассмотрим уединенную бесконечно протяженную вдоль оси  $z$  спиральную линию (рис. 1), которая представляет собой однозаходную цилиндрическую спираль с постоянным шагом намотки  $p$ , изготовленную из металлического проводника с поперечным размером  $D_w$ . Средний и внешний диаметры спирали равны соответственно  $D_s$  и  $D_s + D_w$ . Для исследования ее дисперсии будем использовать программу численного моделирования HFSS (<https://ansys.com>)

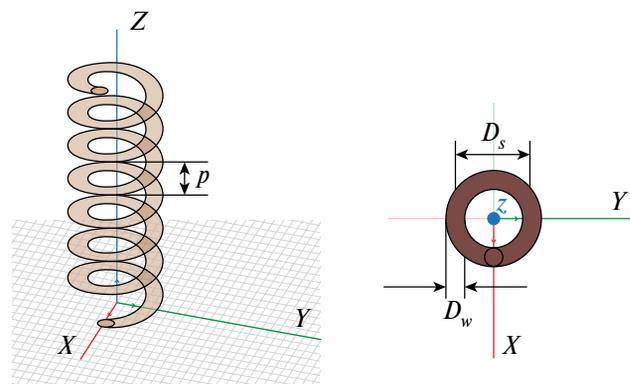


Рис. 1. Модель трехмерной цилиндрической спиральной линии.

в режиме вычислений собственных значений. Этот подход предполагает построение модели единичной ячейки исследуемой линии и использование граничных условий периодичности. В данном случае такая ячейка представляет собой один виток спирали, расположенный внутри воздушного бокса с достаточно большим поперечным сечением (рис. 2). На гранях бокса в направлении оси  $z$  используем условия периодичности, связывающие поля в двух сечениях линии, расстояние между которыми равно периоду спирали. На границах бокса вдоль осей  $x$  и  $y$  используем поглощающие слои, описываемые граничными условиями типа PML (Perfect Matched Layers). PML-слои (на рис. 2 не показаны) расположены на некотором удалении от оси линии, ограничивая область решения задачи в поперечной плоскости  $xOy$ . Использование периодических и граничных PML-условий позволяет получать численное решение в задачах на собственные значения для открытых периодических структур, в частности для спиральной линии. Поле замедленной собственной волны спиральной линии спадает при удалении от нее, поэтому поглощающие слои, расположенные на достаточном удалении от спирали, практически не влияют на постоянную распространения волны и дисперсионную характеристику линии.

Обозначим через  $\delta\varphi_z$  величину фазового сдвига между плоскостями, ограничивающими единичную ячейку вдоль оси  $z$ , при этом фазовая постоянная распространения волны равна  $\beta_z = \delta\varphi_z/p$ . Для заданного значения  $\delta\varphi_z$  рассчитываем соответствующую ему первую (минимальную) собственную частоту эквивалентного резонатора, объем которого равен объему единичной ячейки линии. Эта частота соответствует основному типу волны в линии. Будем изменять  $\delta\varphi_z$  от нуля до  $180^\circ$ . В результате можем определить частотную зависимость коэффициента замедления собственной волны вдоль оси линии  $U = \beta_z/k$ , где  $k$  – волновое число свободного

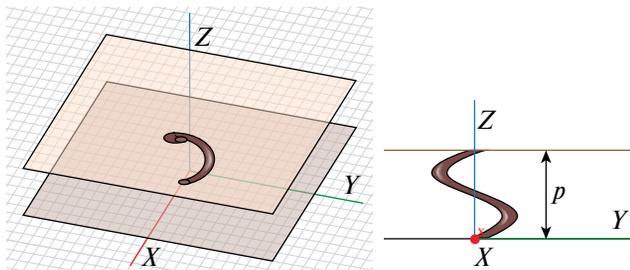


Рис. 2. Модель единичной ячейки линии (PML-слои не показаны).

пространства, соответствующее собственной частоте при заданном  $\delta\varphi_z$ .

На рис. 3–5 представлены рассчитанные этим методом дисперсионные характеристики спиральной линии при разных значениях периода  $p$  (рис. 3), среднего диаметра  $D_s$  (рис. 4) и поперечного размера проводника  $D_w$  (рис. 5).

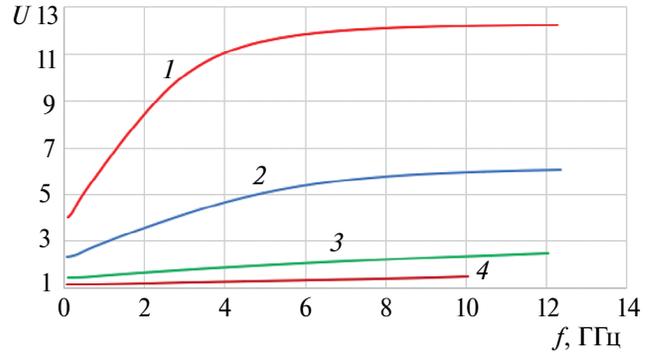


Рис. 3. Дисперсионные характеристики спиральной линии при  $D_s = 4$  мм,  $D_w = 1$  мм,  $p = 1$  (1), 2 (2), 5 (3), 10 мм (4).

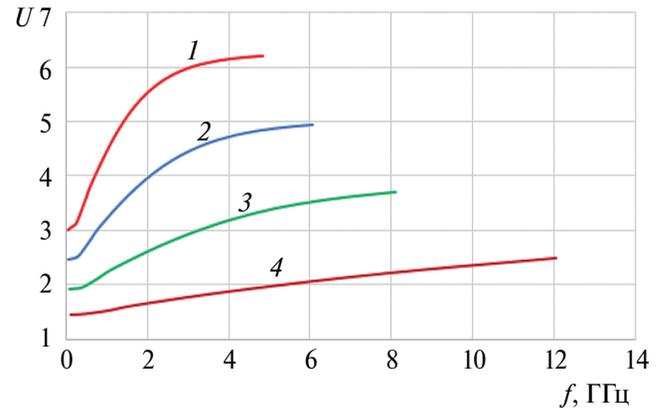


Рис. 4. Дисперсионные характеристики спиральной линии при  $p = 5$  мм,  $D_w = 1$  мм,  $D_s = 10$  (1), 8 (2), 6 (3), 4 мм (4).

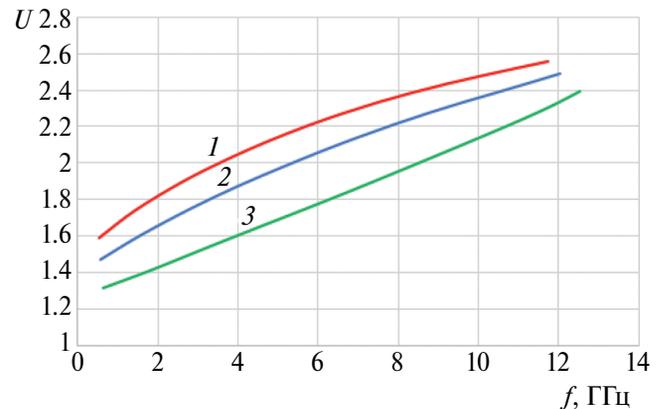


Рис. 5. Дисперсионные характеристики спиральной линии при  $p = 5$  мм,  $D_s = 4$  мм,  $D_w = 0.5$  (1), 1 (2), 2 мм (3).

Как видно из рис. 3, 4, с ростом частоты в исследуемом частотном диапазоне значения замедления стремятся к некоторой величине, которая следует из физического представления о волне тока, огибающей витки спирали. Это предельное значение замедления относительно оси  $z$  определяется отношением длины витка к периоду спирали  $L/p$ , где  $L = [(\pi D_s)^2 + p^2]^{1/2}$  – длина витка,  $p$  – период. Нетрудно убедиться, что кривые на рис. 3, 4 с ростом частоты стремятся к соответствующим значениям этого отношения. При увеличении частоты быстрее всего замедляются меньшие значения  $p$  и большие значения  $D_s$ , т.е. с увеличением отношения  $L/p$ . Длина витка спирали в первом приближении может быть определена по средней линии проводника, которая определяет размер  $D_s$ , поэтому при постоянной величине  $D_s$  и изменении ширины проводника  $D_w$  замедление волны в том же диапазоне частот изменяется сравнительно слабо (см. рис. 5).

На низких частотах механизм распространения волны в спиральной линии изменяется за счет увеличения взаимной связи соседних витков. Как видно на рис. 3, с уменьшением частоты коэффициент замедления волны уменьшается и стремится к определенному значению, которое в пределе нулевой частоты определяется замедлением провода с анизотропными граничными условиями на поверхности.

Для иллюстрации структуры поля в линии на рис. 6 показано мгновенное распределение ам-

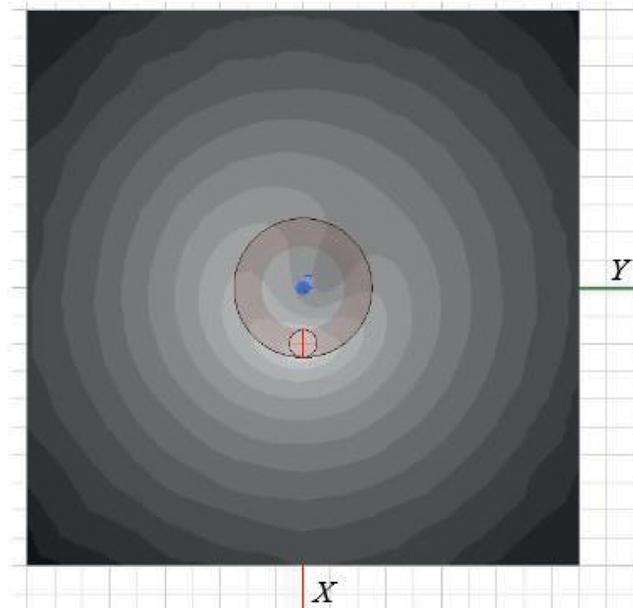


Рис. 6. Мгновенное распределение амплитуды напряженности электрического поля поверхностной волны спирали в поперечной плоскости  $XOY$  на частоте 9.633 ГГц.

плитуды напряженности электрического поля поверхностной волны в спиральной линии в плоскости  $XOY$  на частоте 9.633 ГГц, соответствующей набегу фазы на длине периода спирали  $135^\circ$ . Анимация этого распределения по фазе в пределах периода колебаний в распространяющейся волне показывает, что направление вращения вектора поля происходит против часовой стрелки, в соответствии с направлением намотки спирали в принятой модели на рис. 1.

Как отмечалось выше, дисперсионные кривые на рис. 3 рассчитаны в интервале частот, верхняя граница которого определяется условием  $\delta\varphi_z = 180^\circ$ . Эта частота определяет нижнюю границу первой запрещенной зоны спиральной линии. Интересно рассмотреть, как ведет себя дисперсия в окрестности этой зоны, включая частоты, которые лежат выше ее верхней границы. На рис. 7 приведена рассчитанная дисперси-

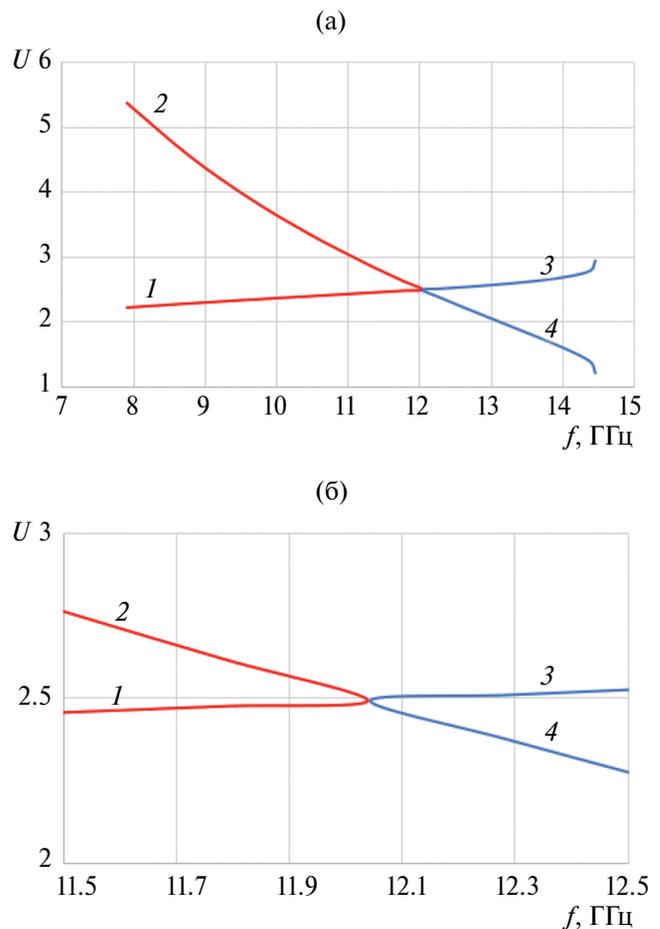


Рис. 7. Дисперсионная характеристика спиральной линии в широком диапазоне частот (а) и в узкой окрестности запрещенной зоны (б) при  $p = 5$  мм,  $D_s = 4$  мм,  $D_w = 1$  мм: прямая (1) и обратная волны (3) и соответствующие им встречные волны (2) и (4).

онная характеристика линии в интервале частот примерно от 8 до 14.5 ГГц, в который попадает запрещенная зона и ее окрестности. Соответствие ветвей характеристики и типов волн следующее: 1 и 3 – прямая и обратная волна [5, 6] (распространение вдоль оси  $+z$ ), 2 и 4 – соответствующие им встречные волны (распространение вдоль оси  $-z$ ). При обозначенных параметрах линии ширина запрещенной зоны равна примерно 5.5 МГц.

Анимация поля волны в поперечном сечении линии на частотах ниже запрещенной зоны (кривые 1, 2) показывает, что вращение вектора  $E$  в прямой волне (кривая 1) происходит против часовой стрелки, а в соответствующей встречной волне (кривая 2) – по часовой стрелке, так как эти волны распространяются в противоположных направлениях. Аналогичная картина наблюдается и на частотах выше запрещенной зоны: вращение вектора  $E$  в обратной волне (кривая 3) происходит против часовой стрелки, а в соответствующей встречной волне (кривая 4) – по часовой стрелке.

### 3. ЛИНЕЙНАЯ РЕШЕТКА СПИРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Используем теперь тот же метод для исследования дисперсионных характеристик собственных волн в более сложных структурах, которые представляют бесконечную решетку спиралей, электромагнитно связанных через внешние поля. Рассмотрим одномерную периодическую решетку спиральных линий с шагом намотки  $p$ , ориентированных вдоль оси  $z$  и расположенных вдоль оси  $y$  с периодом  $P_y$  (рис. 8). Эта структура является бесконечно протяженной вдоль осей  $y$  и  $z$ .

Пусть величина  $\delta\varphi_y$  обозначает фазовый сдвиг между соседними линиями. Для расчета дисперсионных характеристик собственных волн в решетке при разных значениях  $\delta\varphi_y$  используем метод, аналогичный описанному выше для одиночной линии. Так как в данной структуре имеются два направления периодичности, выделяем одну ячейку структуры вдоль оси  $y$  и один виток спирали вдоль оси  $z$  и окружаем выделенную ячейку прямоугольным воздушным боксом (рис. 9), который определяет область решения в данной модели. Размеры бокса вдоль осей  $y$  и  $z$  равны соответственно  $P_y$  и  $p$ , а размер в направлении оси  $x$  ограничен PML-слоями, расположенными на границах бокса вдоль этой оси. Так как структура не является периодической вдоль оси  $x$ , то размер ячейки вдоль нее не опре-

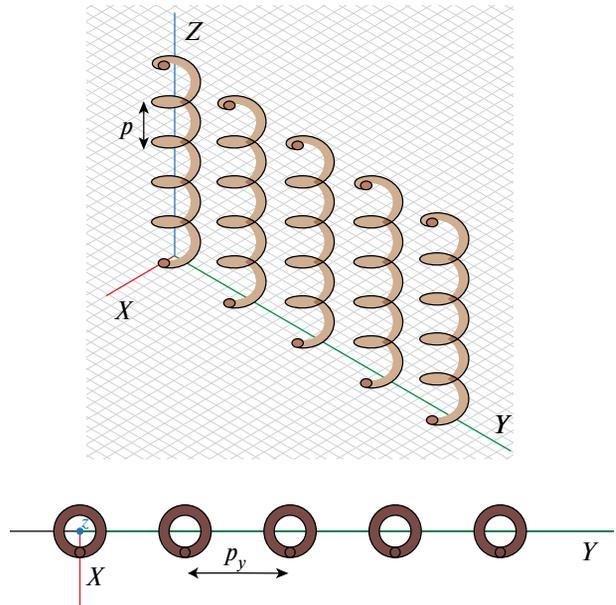


Рис. 8. Фрагмент линейной периодической решетки спиральных линий.

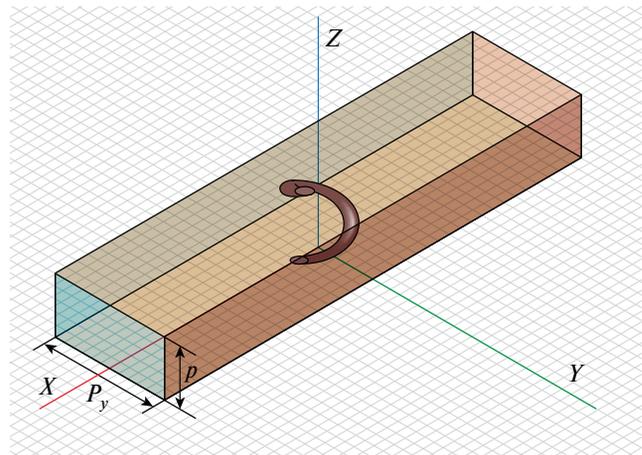


Рис. 9. Модель единичной ячейки для линейной периодической решетки спиральных линий.

деляется однозначно параметрами структуры, и имеется определенная свобода выбора.

При определении данного размера ячейки будем исходить из следующих соображений. Предполагаем, что исследуемые волны решетки являются замедленными относительно плоской волны в свободном пространстве и их поля сосредоточены в основном в окрестности плоскости решетки. Амплитуда замедленных волн спадает при удалении от решетки вдоль  $x$  с градиентом, определяемым величиной замедления. Поэтому размер бокса следует выбирать достаточно большим, чтобы влиянием поглощающих слоев, расположенных на границах области решения вдоль оси  $x$ , на дисперсию исследу-

емых волн решетки можно было бы пренебречь. Вместе с тем этот размер не должен быть слишком большим, чтобы не увеличивать чрезмерно область решения в задаче на собственные значения и время расчетов. В качестве компромиссного значения размер вдоль оси  $x$  был выбран равным  $3P_y$ .

На гранях бокса вдоль оси  $z$  с расстоянием между ними, равным периоду спирали  $p$ , используем граничные условия периодического типа со сдвигом фазы  $\delta\varphi_z$ , аналогично тому, как это было описано выше. На другой паре граней вдоль оси  $y$  с расстоянием между ними, равном периоду  $P_y$ , также используем граничные условия периодичности, в которых набег фазы на длине периода  $P_y$  равен  $\delta\varphi_y$ . Будем изменять величину  $\delta\varphi_z$  в пределах от нуля до  $180^\circ$  и рассчитывать соответствующие значения собственных частот, при этом величина  $\delta\varphi_y$  служит параметром. В данном исследовании ограничимся поиском первых двух собственных частот, которые соответствуют первым двум типам собственных волн решетки. При расчете дисперсионных характеристик будем искать фазовые постоянные распространения этих волн вдоль осей  $z$  и  $y$  по заданным фазовым сдвигам  $\delta\varphi_z$  и  $\delta\varphi_y$ . Это позволит определить полную постоянную распространения волны в плоскости решетки  $U_0z$ . Как отмечалось выше при выборе модели единичной ячейки, мы предполагаем, что эта величина для исследуемых волн больше постоянной распространения плоской волны в свободном пространстве. Поэтому для них постоянная распространения вдоль оси  $x$  является мнимой величиной, а амплитуда поля спадает при удалении от плоскости решетки.

Сначала приведем результаты расчетов дисперсии для основной волны, которой соответствует первая собственная частота. В расчетах заданы следующие параметры структуры:  $P_y = 10$  мм,  $p = 5$  мм,  $D_s = 4$  мм,  $D_w = 1$  мм, для  $\delta\varphi_y = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ . На рис. 10а, 10б представлены рассчитанные значения замедления этой волны вдоль осей линий  $z$  ( $U_{1z}$ ) и полного замедления  $U_1 = (U_{1z}^2 + U_{1y}^2)^{1/2}$ , где  $U_{1y}$  – замедление волны вдоль оси решетки (зависимость  $U_{1y}$  от частоты здесь не показана). Нижний индекс 1 в обозначениях показывает, что соответствующие величины относятся к первой (основной) волне решетки. При  $\delta\varphi_y = 0^\circ$  (синфазная решетка) величина  $U_{1y} = 0$ , поэтому имеется только одна компонента волнового вектора волны, направленная вдоль оси  $z$ . При ненулевых значениях  $\delta\varphi_y$  (фазированная решетка) волна имеет обе компоненты постоянной распространения вдоль осей  $z$  и  $y$ .

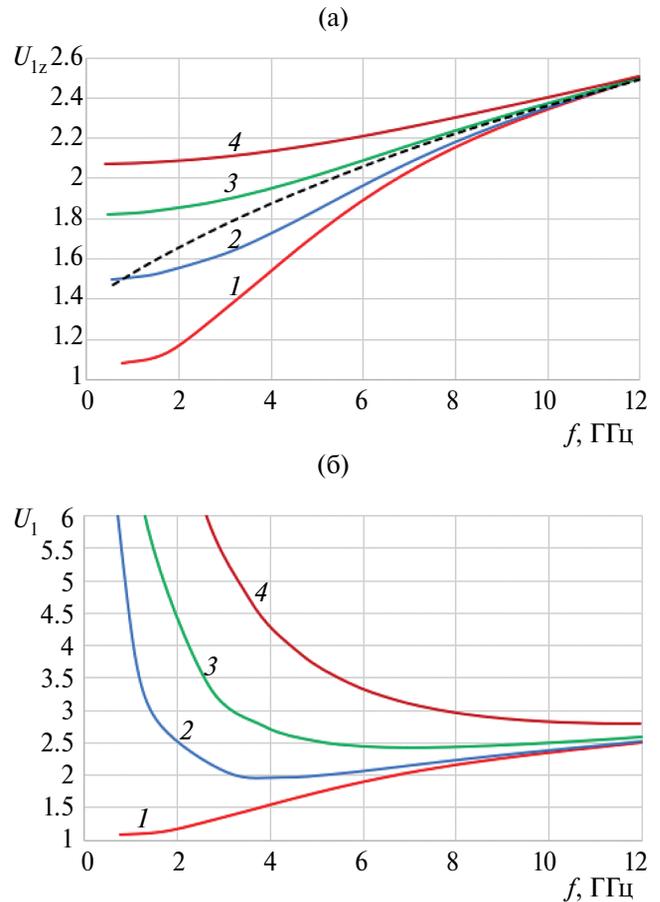
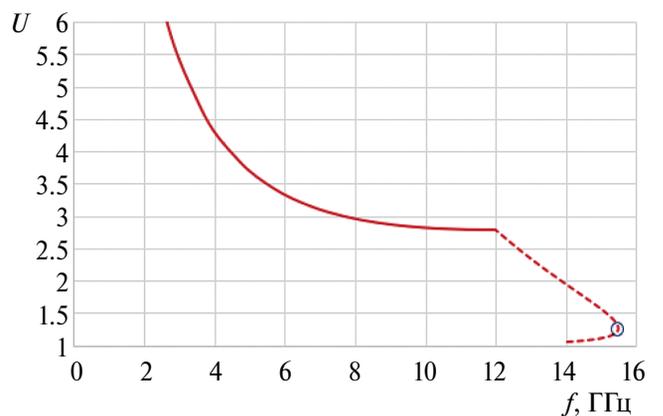
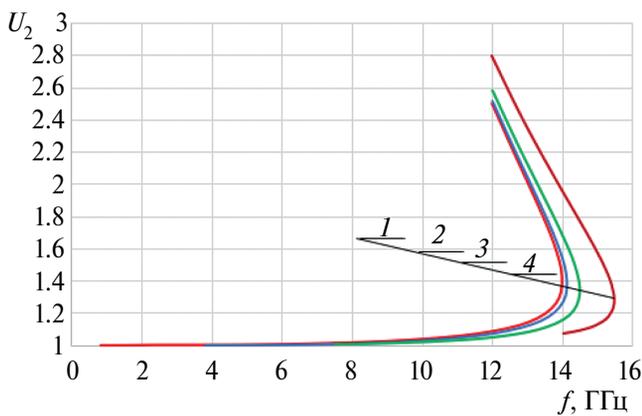
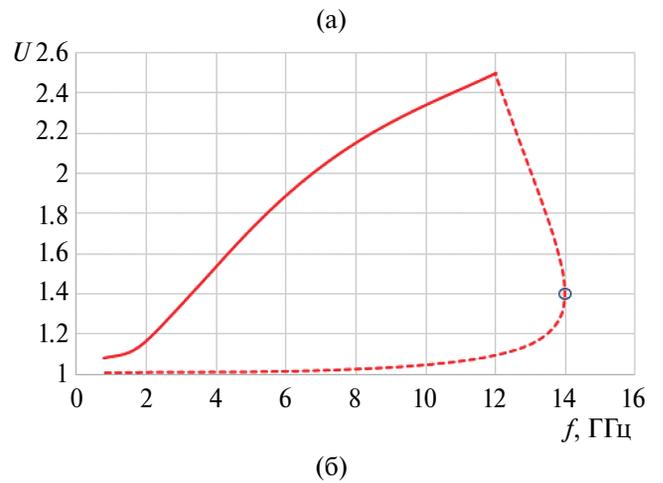
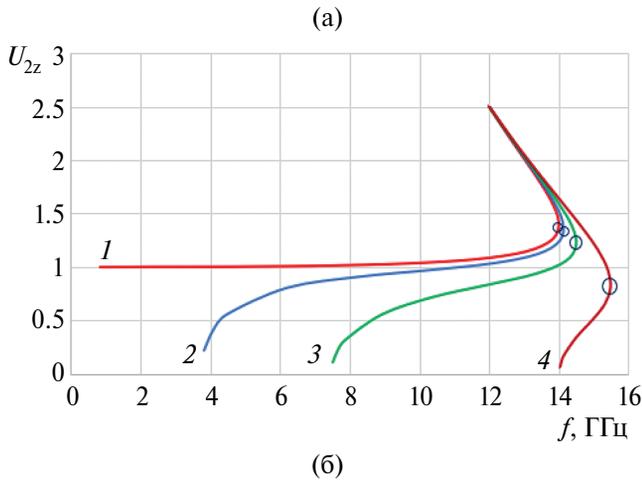


Рис. 10. Дисперсионные кривые для первой собственной волны в линейной решетке спиральных линий при  $\delta\varphi_y = 0^\circ$  (1),  $45^\circ$  (2),  $90^\circ$  (3) и  $180^\circ$  (4): а – замедление относительно осей линий, б – полное замедление; штриховая кривая – дисперсия одиночной линии.

Для основной волны величина  $U_{1z}$  больше 1 и монотонно растет при увеличении частоты. В соответствии с расчетами величина  $U_{1y}$  монотонно спадает с ростом частоты при тех же значениях  $\delta\varphi_y$  и может быть как больше, так и меньше 1 в зависимости от частоты. При этом полное замедление  $U_1$  больше 1. Противоположный характер частотных зависимостей  $U_{1z}$  и  $U_{1y}$  приводит к тому, что для некоторых значений  $\delta\varphi_y$  имеется минимум в частотной зависимости величины  $U_1$ , в окрестности которого она остается почти постоянной (см. рис. 10б, кривые 2,3).

Вторая собственная частота соответствует второму (высшему) типу волны решетки. На рис. 11а, 11б приведены частотные зависимости составляющих замедления этой волны вдоль осей  $z$  и полного замедления  $U_2 = (U_{2z}^2 + U_{2y}^2)^{1/2}$ , где  $U_{2y}$  – замедление волны вдоль оси решетки. Нижний индекс 2 показывает, что величины относятся ко второму типу волны.



**Рис. 11.** Дисперсионные кривые для второй собственной волны в линейной решетке спиральных линий при  $\delta\varphi_y = 0^\circ$  (1),  $45^\circ$  (2),  $90^\circ$  (3),  $180^\circ$  (4): а – замедление относительно осей линий, б – полное замедление; светлые кружки на рис. (а) – точки перегиба.

**Рис. 12.** Зависимости полного замедления первой (сплошные кривые) и второй (штриховые линии) собственных волн линейной решетки от частоты при  $\delta\varphi_y = 0^\circ$  (а) и  $180^\circ$  (б). Светлые кружки на рис. (а) и (б) – точки перегиба.

На рис. 11а обозначены границы двух областей в соответствующих дисперсионных характеристиках с разным знаком производной по частоте (точки). В самой точке производная по частоте обращается в бесконечность. Это означает, что на данной частоте волна второго типа в решетке не распространяется. В некоторой области частот, расположенной ниже частоты точки перегиба, в решетке могут распространяться прямая и встречная волны этого типа. Выше точки перегиба имеется область частот, в которой распространяющиеся волны отсутствуют, т.е. имеет место типичная для периодических структур полоса запираания, обусловленная периодичностью решетки по оси  $y$ . Как и следовало ожидать, эта полоса запираания расположена в окрестности частоты 15 ГГц, на которой период  $P_y$  равен половине длины волны.

Как видим, дисперсионные кривые на рис. 11а и 11б качественно отличаются от соот-

ветствующих кривых для основной волны на рис. 10а и 10б. При ненулевом фазовом сдвиге замедление второй волны вдоль осей линий  $U_{2z}$  может принимать значения как меньше, так и больше единицы. При этом (см. рис. 11б) величина полного замедления второй волны  $U_2$  во всем исследованном диапазоне частот так же больше единицы, как и у основной волны. Однако дисперсионные характеристики этих волн разные вследствие разной структуры их полей. Для более наглядного сравнения характера частотной дисперсии и величины замедления обоих типов волн они приведены на рис. 12 на общем графике при  $\delta\varphi_y = 0^\circ$  и  $180^\circ$ . Аналогичные зависимости имеют место и для промежуточных значений  $\delta\varphi_y$  (на рисунке не показаны).

Отметим, что при заданных параметрах спиральных линий и периода решетки дисперсионные кривые на рис. 10–12 лежат в области частот ниже 16 ГГц. Как было уже отмечено, максимальная частота рассчитанных характеристик

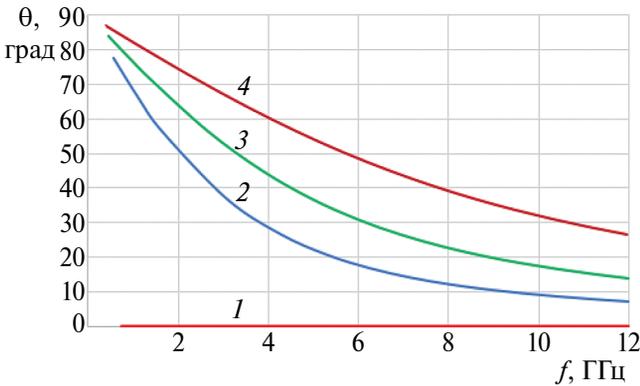


Рис. 13. Зависимость угла распространения основной волны относительно осей линий в линейной решетке от частоты при  $\delta\varphi_y = 0^\circ$  (1),  $45^\circ$  (2),  $90^\circ$  (3),  $180^\circ$  (4).

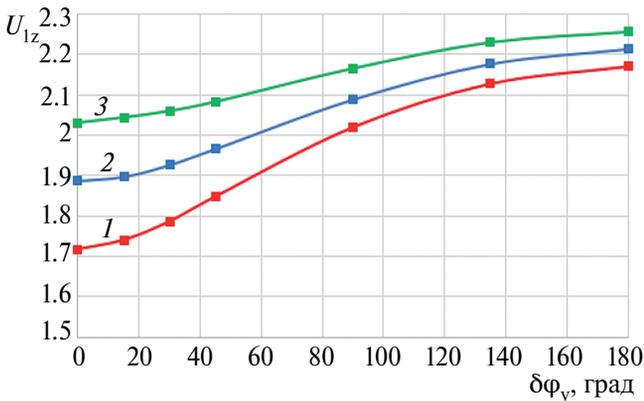


Рис. 14. Зависимости замедления основной волны линейной решетки вдоль осей линий от сдвига фазы между ними при  $f = 5$  (1), 6 (2) и 7 ГГц (3); точками на кривых отмечены значения замедления при  $\delta\varphi_y = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  и  $180^\circ$  (слева направо).

первых двух типов волн определялась при сдвиге фазы  $\delta\varphi_z = 180^\circ$  для каждой из них на длине периода спиральной линии. Исследование дисперсии волн линейной решетки в более широком частотном диапазоне в данной работе не проводилось.

Полученные значения замедления вдоль осей  $z$  и  $y$  позволяют определить направление распространения собственных волн в плоскости решетки  $yo_z$ . На рис. 13 приведены частотные зависимости угла распространения относительно осей линий (ось  $z$ ) для основной волны, рассчитанные по формуле  $\theta = \arctg(U_{1y}/U_{1z})$ . В синфазной решетке направление распространения волны совпадает с осью  $z$  ( $\theta = 0$ ) и не зависит от частоты. При сдвиге фазы между линиями с ростом частоты направление распространения волны приближается к оси  $z$  тем быстрее, чем меньше величина фазового сдвига.

Угол распространения волны в решетке представляет интерес в первую очередь для основного типа волны, поэтому для второго типа волны эта характеристика не представлена.

Как отмечалось выше, с точки зрения исследования возможности применения решетки спиральных линий в облучателях кластерного типа интерес представляют зависимости величины замедления вдоль осей линий  $U_{1z}$  от разности фаз между линиями при заданной частоте (рис. 14). На рисунке отмечены значения замедления при  $\delta\varphi_y = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  и  $180^\circ$  (темные квадраты), а кривые построены как сплайн-аппроксимации по этим семи значениям. Расчеты показывают, что зависимости  $U_{1z}$  ( $\delta\varphi_y$ ) на рис. 14 являются четными относительно значения  $\delta\varphi_y = 0^\circ$ . Из рисунка следует, что на заданной частоте величина замедления основной волны вдоль осей спиральных линий монотонно растет с ростом фазового сдвига между ними. Скорость возрастания зависит от частоты: чем выше частота, тем зависимость становится более полой.

#### 4. ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА СПИРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Исследуем теперь дисперсию собственных волн в двумерно-периодической решетке спиральных линий с шагом намотки  $p$ , ориентированных вдоль оси  $z$  (рис. 15). В общем случае периоды решетки вдоль осей  $x$  и  $y$  могут быть разными. Рассмотрим случай квадратной решетки с одинаковыми периодами  $P_x = P_y$ .

Для исследования дисперсии ее собственных волн используем тот же метод, что и выше. Для

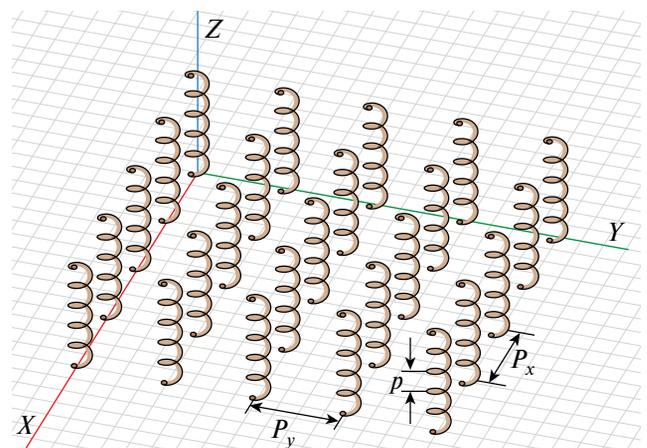


Рис. 15. Фрагмент двумерно-периодической решетки спиральных линий.

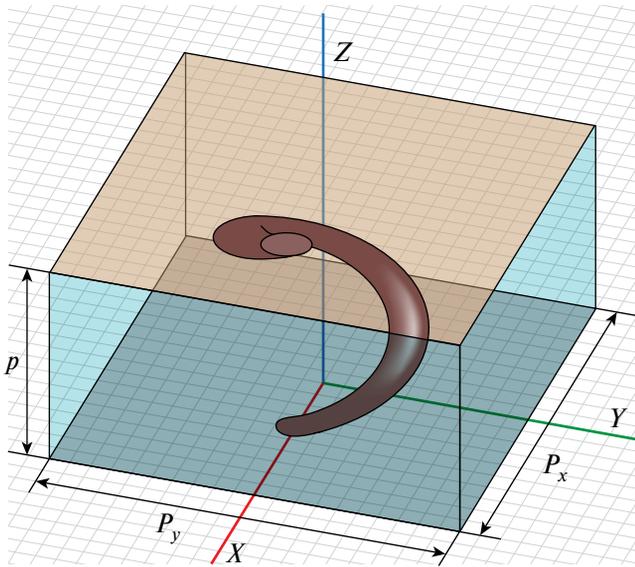


Рис. 16. Модель единичной ячейки двумерно-периодической решетки спиральных линий.

такой периодической структуры размеры единичной ячейки однозначно определяются величинами периодов вдоль каждой из осей (рис. 16). В этом случае граничные условия периодического типа надо задавать на трех парах граней ячейки вдоль осей  $z$ ,  $y$  и  $x$  с соответствующими сдвигами фазы  $\delta\varphi_z$ ,  $\delta\varphi_y$  и  $\delta\varphi_x$ . Будем изменять величину фазового сдвига  $\delta\varphi_z$  в интервале от 0 до  $180^\circ$  и определять собственные частоты для каждого значения этой переменной. При этом значения  $\delta\varphi_x$  и  $\delta\varphi_y$ , описывающие сдвиги фазы между соседними элементами решетки соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ , служат двумя независимыми параметрами.

Исследуем вариант решетки с одинаковыми значениями  $\delta\varphi_x = \delta\varphi_y = \delta\varphi$ . Для расчета дисперсии волн в такой решетке задаем значения периодов  $p = 5$  мм,  $P_x = P_y = 10$  мм, параметры линий  $D_s = 4$  мм,  $D_w = 1$  мм. Как и в случае линейной решетки, будем рассчитывать первые две собственные частоты и дисперсионные характеристики соответствующих им волн решетки. На рис. 17а, 17б представлены результаты расчета замедления основного типа волны, соответствующего первой собственной частоте. Для ряда значений параметра  $\delta\varphi$  приведены значения замедления вдоль осей линий  $z$  ( $U_{1z}$ ), а также полного замедления  $U_1 = (U_{1z}^2 + U_{1xy}^2)^{1/2}$ , где  $U_{1xy}$  – замедление волны в поперечной плоскости; нижний индекс 1 означает, что соответствующие величины относятся к первому (основному) типу волны.

Как и в линейной решетке, замедление основной волны  $U_{1z}$  вдоль осей линий монотонно растет с ростом частоты, а величина замедления в перпендикулярной плоскости  $U_{1xy}$  при ненулевых значениях  $\delta\varphi$  монотонно убывает в том же частотном диапазоне (частотные зависимости  $U_{1xy}$  не приводим). При этом полное замедление при некоторых значениях  $\delta\varphi$  может иметь пологий минимум по частоте и оставаться почти постоянным в его окрестности (см. рис. 17б, кривые 2, 3). Сравнивая эти результаты с представленными на рис. 10а, 10б для линейной решетки, видим, что дисперсионные кривые для основной волны в решетках обоих типов по форме соответствуют друг другу. Дисперсия основной волны в этих решетках определяется как дисперсией самих линий, так и их взаимной связью.

Также были рассчитаны дисперсионные характеристики второго типа волны двумерной решетки, которому соответствует вторая собственная частота. Для этой волны частотные

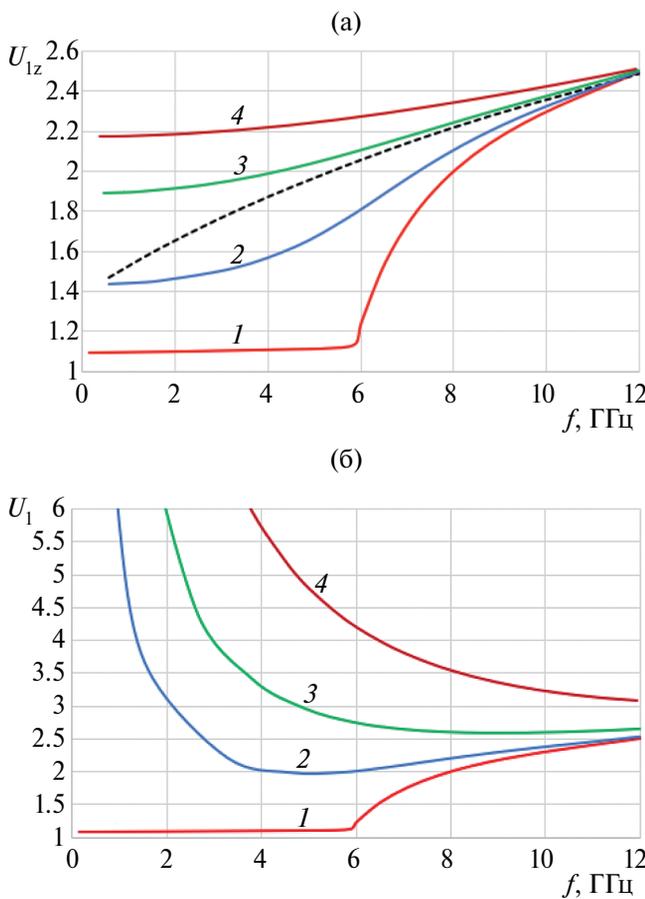
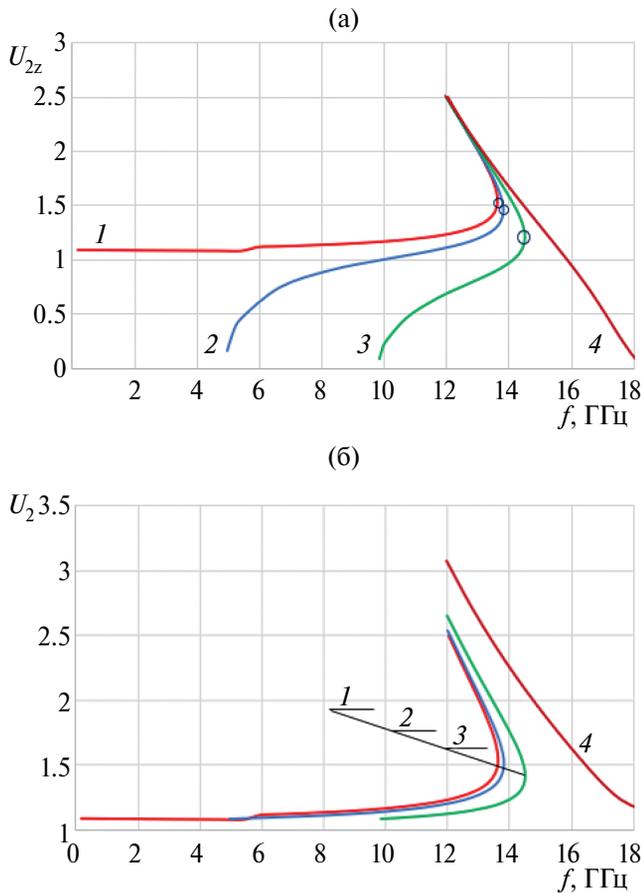


Рис. 17. Дисперсионные кривые первой собственной волны в двумерной решетке при  $\delta\varphi = 0^\circ$  (1),  $45^\circ$  (2),  $90^\circ$  (3) и  $180^\circ$  (4): а – замедление относительно осей линий, б – полное замедление; пунктирная кривая – дисперсия одиночной линии.

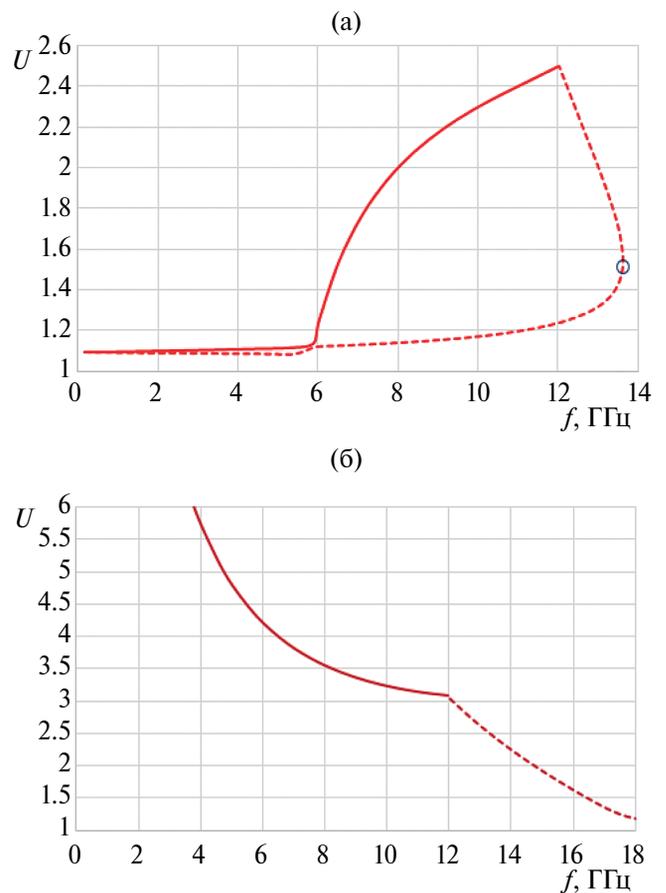


**Рис. 18.** Дисперсионные характеристики второй собственной волны в двумерной решетке спиральных линий при  $\delta\varphi = 0^\circ$  (1),  $45^\circ$  (2),  $90^\circ$  (3),  $180^\circ$  (4): а – замедление относительно осей линий, б – полное замедление; светлые кружки на рис. (а) – точки перегиба.

зависимости  $U_{2z}$ ,  $U_{2xy}$  ( $U_{2xy}$  – замедление волны в поперечной плоскости) и полного замедления  $U_2 = (U_{2z}^2 + U_{2xy}^2)^{1/2}$  приведены на рис. 18а, 18б. Как и в случае линейной решетки, нижний индекс 2 показывает, что физические величины относятся ко второму типу волны. Характер частотных зависимостей  $U_{2xy}$  аналогичен характеру частотных зависимостей  $U_{2y}$  в линейной решетке.

На рис. 18а также обозначены границы двух областей в дисперсионных характеристиках с разным знаком производной по частоте (точки). Такой характер частотных зависимостей свидетельствует о том, что в некоторой области частот ниже точки перегиба в дисперсионной кривой в двумерной решетке также могут распространяться две волны, аналогично тому, как это имеет место в линейной решетке.

Частотные зависимости на рис. 18а, 18б при изменении фазового сдвига между линиями качественно аналогичны соответствующим зависимостям для второй собственной волны в ли-



**Рис. 19.** Зависимости полного замедления первой (сплошные кривые) и второй (штриховые) собственных волн двумерной решетки от частоты при  $\delta\varphi = 0^\circ$  (а) и  $180^\circ$  (б); светлый кружок на рис. (а) – точка перегиба.

нейной решетке (см. рис. 11). Для решеток обоих типов есть области частот, в которых замедление второй собственной волны вдоль осей линий меньше единицы. При этом с учетом составляющей замедления в перпендикулярной плоскости полное замедление второй волны остается больше единицы во всем исследованном частотном диапазоне. На рис. 19 приведены частотные зависимости замедления для двух собственных волн двумерной решетки в случае  $\delta\varphi = 0^\circ$  и  $180^\circ$ . Интересно сравнить эти графики с соответствующими графиками на рис. 12 для линейной решетки.

На рис. 20 показаны рассчитанные по формуле  $\theta = \arctg(U_{1xy}/U_{1z})$  углы распространения относительно осей линий (ось  $z$ ) в зависимости от частоты для основной волны при изменении величины фазового сдвига между линиями. В этом случае волновой вектор собственной волны фазированной решетки лежит в диагональной плоскости, расположенной под углом  $45^\circ$  относительно осей  $x$  и  $y$ , что следует из условия оди-

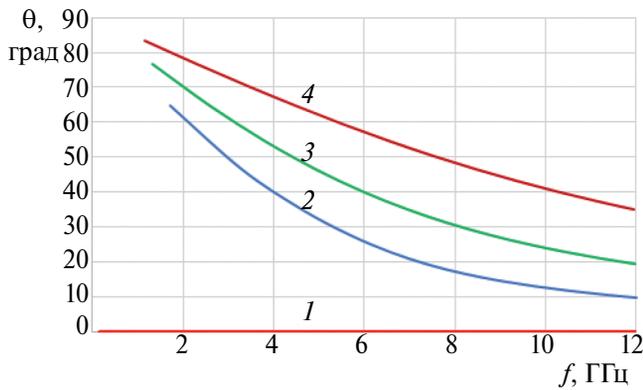


Рис. 20. Угол распространения основной волны относительно осей линий в зависимости от частоты в двумерной решетке при  $\delta\varphi = 0^\circ$  (1),  $45^\circ$  (2),  $90^\circ$  (3) и  $180^\circ$  (4).

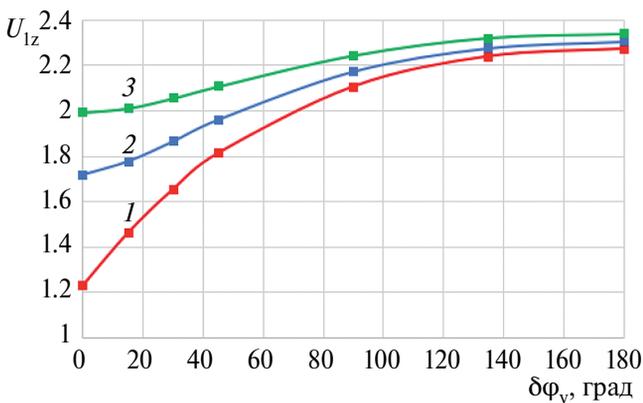


Рис. 21. Зависимости замедления основной волны двумерной решетки вдоль осей линий от сдвига фазы между ними при  $f = 6$  (1),  $7$  (2) и  $8$  ГГц (3); точками на кривых отмечены значения замедления при  $\delta\varphi_y = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  и  $180^\circ$  (слева направо).

наковой фазировки вдоль этих осей. Как и в линейной решетке, с ростом частоты направление распространения волны в двумерной решетке приближается к оси  $z$  тем быстрее, чем меньше фазовый сдвиг между линиями. В случае синфазной решетки волна распространяется вдоль осей линий ( $\theta = 0$ ).

На рис. 21 приведены зависимости замедления основной волны вдоль осей линий от разности фаз  $\delta\varphi$  для трех частот. Точки на кривых обозначают значения замедления при  $\delta\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$  и  $180^\circ$ , а кривые для каждой из частот представляют сплайн-аппроксимацию. Как видим, эти зависимости подобны соответствующим зависимостям для линейной решетки (см. рис. 14). Как и в том случае, данные зависимости являются четными относительно значения  $\delta\varphi = 0$ . Для решеток обоих типов величина замедления основной волны вдоль осей линий монотонно растет с ростом фазового сдвига между ними.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные численные исследования позволили получить дисперсионные характеристики цилиндрических однозаходных спиральных линий в широкой области параметров, включая такие, для которых условия применимости известных приближенных аналитических методов, описанных в более ранних работах, не выполняются. Для одиночных линий исследовалась дисперсия основной замедленной волны в полосе пропускания, ограниченной сверху нижней частотой запрещенной зоны. В этой полосе частот коэффициент замедления волны может изменяться в широких пределах и достигать достаточно больших значений.

Для одномерной и двумерной периодических решеток спиральных линий были исследованы дисперсионные характеристики первых двух типов волн для разных величин фазовых сдвигов между линиями. Первый тип волны представляет основную, замедленную вдоль осей линий волну, коэффициент замедления которой увеличивается как с ростом частоты, так и величины фазового сдвига между линиями. Направление вращения вектора поля в нем соответствует направлению намотки спирали. Второй тип волны в фазированной решетке на нижних частотах имеет коэффициент замедления меньше единицы, а на более высоких частотах он трансформируется в замедленную волну. Дисперсионная характеристика этого типа волны определяется наличием запрещенной зоны, обусловленной периодичностью структуры вдоль оси решетки.

Дальнейшее исследование в этом направлении может включать, в частности, решение задачи возбуждения спиральных линий и их решеток.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силин Р.А., Сазонов В.П. Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966.
2. Юрцев О.А., Рунов А.В., Казарин А.Н. Спиральные антенны. М.: Сов. радио, 1974.
3. Силин Р.А. Периодические волноводы. М.: Фазис, 2002.
4. Bankov S.E., Bugrova T.I. // Microwave Optical Technol. Lett. 1993. V. 6. № 13. P. 782.
5. Банков С.Е., Фролова Е.В. // РЭ. 2023. Т. 68. № 9. С. 835.
6. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь. 1988.

# NUMERICAL STUDY OF DISPERSION CHARACTERISTICS OF CYLINDRICAL SPIRAL LINES AND PERIODIC GRATINGS BASED ON THEM

**S. E. Bankov\*, V. I. Kalinichev**

*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009 Russia*

*\*E-mail: sbankov@yandex.ru*

Received October 3, 2022; revised February 8, 2023; accepted February 15, 2023

Numerical studies of the dispersion characteristics of cylindrical spiral lines have been carried out. One-dimensional and two-dimensional periodic lattices formed by such lines are also considered. The eigenvalue method was used in combination with periodic boundary conditions. The dispersion characteristics are calculated in the range of parameters for which the conditions of applicability of the known approximate numerical-analytical methods for analyzing spiral lines are not met. The dispersion characteristics of the first two eigen-waves in one-dimensional and two-dimensional periodic lattices of spirals are obtained for different values of phase shifts between lattice periods. It is shown that the main type of wave in them is a wave slowed down relative to the axes of the lines with the direction of rotation of the field vector determined by the direction of winding of the spiral.

*Keywords:* dispersion characteristics, cylindrical spiral lines, beamforming patterns, sector radiation patterns, periodic boundary conditions.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874;621.396

РАДИОПОГЛОЩЕНИЕ В СТРУКТУРАХ ТИПА ИСКУССТВЕННЫХ  
МАГНИТНЫХ ПРОВОДНИКОВ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ  
ПАДЕНИЯ ВОЛН *ТМ*-ПОЛЯРИЗАЦИИ

© 2024 г. Ю. Н. Казанцев<sup>а, \*</sup>, Г. А. Крафтмахер<sup>а</sup>, В. П. Мальцев<sup>а</sup>, В. С. Солосин<sup>а, б</sup>

<sup>а</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>б</sup>Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН,  
ул. Ижорская, 13, Москва, 125412 Российская Федерация

\*E-mail: yukazantsev@mail.ru

Поступила в редакцию 12.01.2023 г.

После доработки 14.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Представлены частотно-угловые характеристики отражения волн *ТМ*-поляризации от тонких (толщиной до  $1/200$  длины волны) искусственного магнитного проводника (ИМП) и радиопоглотителя (РП) на основе полосно-отражающих и полосно-пропускающих решеток. Показано, что полосы рабочих частот ИМП и РП расширяются в десятки раз при изменении угла падения от  $0^\circ$  до  $89^\circ$ . При этом значение отношения  $\Delta\lambda/D$  ( $\Delta\lambda$  – разность длин волн на краях полосы поглощения и  $D$  – толщина РП) увеличивается до 30.

*Ключевые слова:* искусственные магнитные проводники, радиопоглотитель, частотно-селективных полосно-отражающих и полосно-пропускающих решетки, волновод прямоугольного сечения

DOI: 10.31857/S0033849424020029, EDN: KMYZVJ

## ВВЕДЕНИЕ

Искусственные магнитные проводники (ИМП) обычно относят к классу так называемых метаматериалов, т.е. материалов с необычными электромагнитными характеристиками. Особенностью ИМП является то, что коэффициент отражения от него равен  $+1$ , а не  $-1$ , как от металлической поверхности. Типичная конструкция ИМП включает в свой состав емкостную [1–5], либо частотно-селективную [6–9] решетку, помещенную на слой диэлектрика, металлизированный с противоположной стороны.

В последнее время был опубликован ряд работ, посвященных различным применениям ИМП в радиоэлектронике и, в частности, в технике радиопоглощения [10–12]. Поглощающим элементом в РП такого типа является либо слой диэлектрика с потерями [11], либо резистивная пленка на поверхности ИМП [10, 12]. Известные

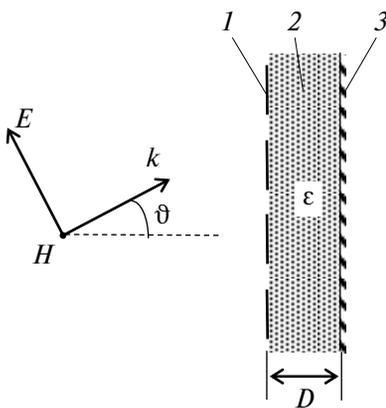
РП на основе ИМП обладают хорошими частотно-угловыми характеристиками в ограниченном интервале углов падения ( $\vartheta = 0\dots45^\circ$ ) при малых (по сравнению с длиной волны) толщинах конструкций. При больших углах падения ( $\vartheta \rightarrow 90^\circ$ ) эффективность поглощения волн *ТЕ*- и *ТМ*-поляризации падает. В то же время проблема поглощения электромагнитных волн и, в частности, волн *ТМ*-поляризации при больших углах падения остается актуальной, поскольку они являются источником, возбуждающим так называемые ползущие (creeping) волны и поверхностные бегущие (surface travelling) волны на токопроводящих поверхностях [13, 14].

В настоящей статье предложен тонкий РП со структурой ИМП на основе полосно-отражающих и полосно-пропускающих решеток и изучены его частотно-угловые характеристики отражения при больших углах падения волн *ТМ*-поляризации.

## 1. ИМП НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНО-СЕЛЕКТИВНЫХ ПОЛОСНО-ОТРАЖАЮЩИХ И ПОЛОСНО-ПРОПУСКАЮЩИХ РЕШЕТОК

На рис. 1 представлена схема ИМП, в состав которого входят: полосно-отражающая или полосно-пропускающая частотно-селективная решетка *1*, слой диэлектрика *2* и металлический экран *3*. Полосно-отражающая решетка состоит из металлических элементов, расположенных, например, на тонкой диэлектрической пленке, а полосно-пропускающая решетка – из отверстий в тонком металлическом экране.

В работе [9] были исследованы функциональные связи между характеристиками решетки (резонансная частота и *Q*-фактор) и характеристиками ИМП на ее основе (положение и ширина полосы рабочих частот). При этом было показано, что при диэлектрической проницаемости



**Рис. 1.** Схема ИМП: *1* – частотно-селективная решетка, *2* – слой диэлектрика толщиной *D*, *3* – металлический экран,  $\vartheta$  – угол падения электромагнитной волны.

слоя  $\epsilon = 1$  полоса рабочих частот ИМП лежит ниже резонансной частоты полосно-отражающей решетки и выше резонансной частоты полосно-пропускающей. Ширина полосы рабочих частот ИМП зависит в основном от *Q*-фактора решетки, а также от электрической толщины слоя диэлектрика.

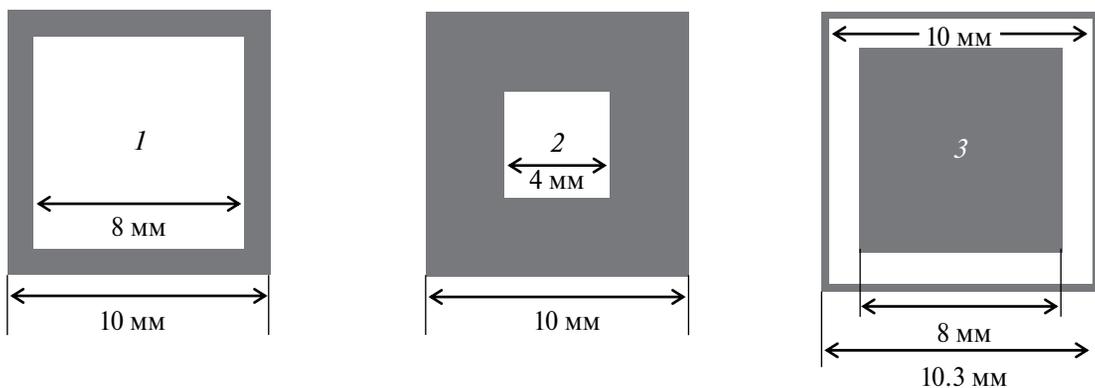
Предварительные численные расчеты угловых зависимостей фазы коэффициента отражения от ИМП показали, что при увеличении угла падения смещение резонансной частоты для волн *TE*-поляризации существенно больше, чем для *TM*-поляризации, а также имеет место расширение полосы рабочих частот ИМП для волн *TM*-поляризации и сужение для волн *TE*-поляризации.

Эффективным способом повышения угловой стабильности резонансной частоты является увеличение диэлектрической проницаемости слоя между решеткой и экраном, хотя при этом сужается полоса рабочих частот ИМП.

## 2. ЧАСТОТНО-УГЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ФАЗЫ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ВОЛН *TM*-ПОЛЯРИЗАЦИИ ОТ ИМП НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНО-СЕЛЕКТИВНОЙ РЕШЕТКИ

В данном разделе подтверждена целесообразность применения в слое материала с высокой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon \gg 1$  и уменьшения толщины слоя до значения меньше 1 мм, поскольку даже при таких условиях полоса ИМП при больших углах падения волн *TM*-поляризации составляет десятки процентов. Размеры элементов на рисунках указаны в мм.

На рис. 2 представлены два типа элементов частотно-селективных решеток: полосно-отра-



**Рис. 2.** Три типа элементов частотно-селективных решеток: полосно-отражающих *1* и *2* и полосно-пропускающих *3*.

**Рис. 3.** Частотно-угловые зависимости фазы коэффициента отражения от ИМП на основе решеток с элементами трех типоразмеров 1 (а), 2 (б) и 3 (в). Углы падения  $\vartheta$  равны  $89^\circ$  (1),  $88^\circ$  (2),  $87^\circ$  (3),  $85^\circ$  (4),  $83^\circ$  (5),  $80^\circ$  (6),  $60^\circ$  (7) и  $0^\circ$  (8).

жающих 1, 2 и полосно-пропускающих 3. Элементы полосно-отражающих решеток — это квадратные металлические петли, а элементы полосно-пропускающих решеток — квадратные щели в металлическом экране, период решеток  $P = 10.3$  мм. Толщина слоя диэлектрика между решеткой и экраном  $D = 0.5$  мм, а его диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 10.2$ . Характеристики решеток, состоящих из элементов 1–3, в условиях свободного пространства (резонансная частота  $f_p$  и Q-фактор) приведены в табл. 1. В дальнейшем нумерацию ИМП и РП будем использовать ту же, что и для элементов решеток.

**Таблица 1.** Характеристики решеток из элементов 1, 2, 3 в условиях свободного пространства

Номер типа решетки	$f_p$ , ГГц	Q-фактор
1	7.72	0.81
2	17.68	0.8
3	7.65	0.73

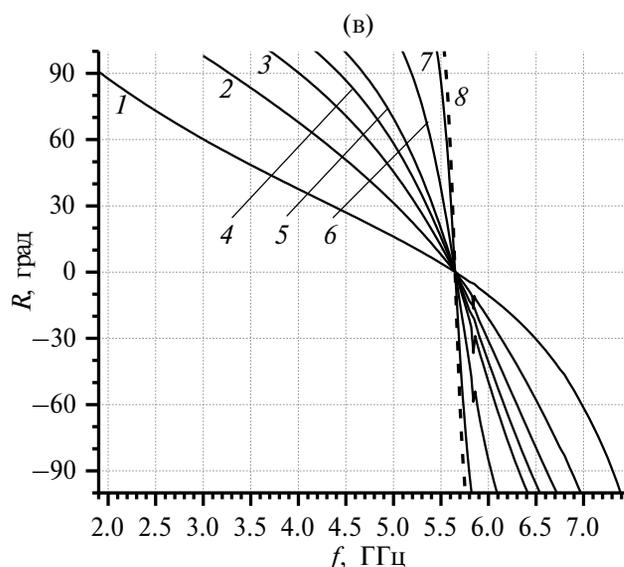
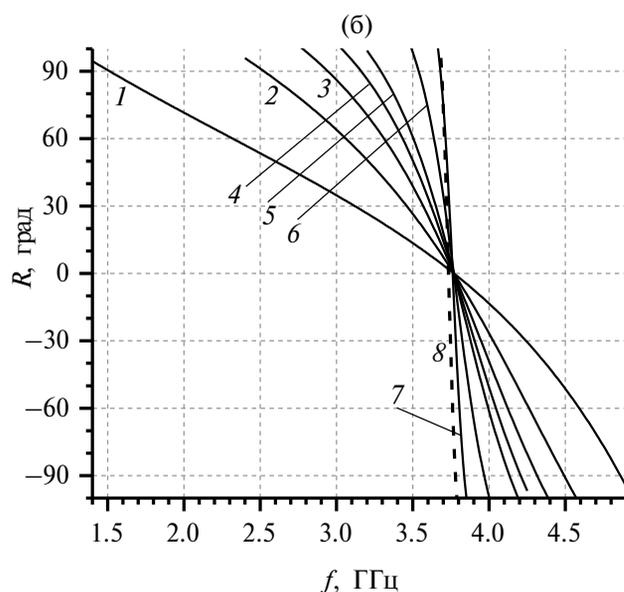
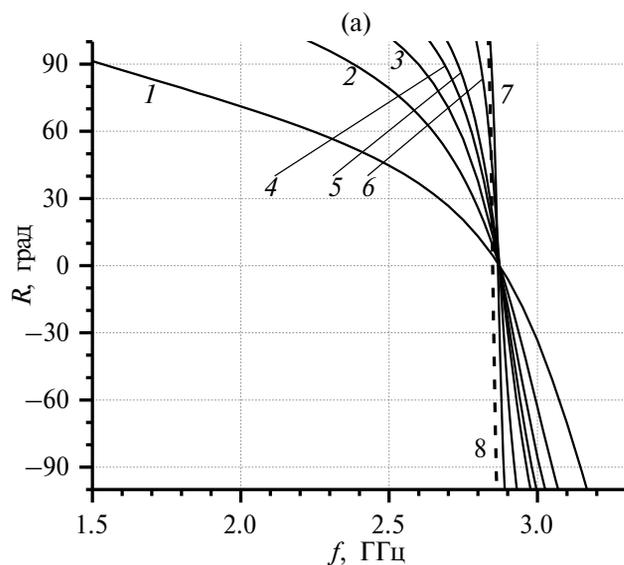
На рис. 3а–3в представлены частотно-угловые зависимости фазы коэффициента отражения от ИМП на основе решеток с элементами всех трех типоразмеров.

В табл. 2 для различных углов падения  $\vartheta$  указаны резонансные частоты  $f_p$ , на которых фаза коэффициента отражения равна нулю, и относительные полосы частот  $\Delta f/f_p$ , в которых фаза меняется в интервале  $\pm 90^\circ$ .

Из рис. 3 и табл. 2 следует, что при увеличении угла падения  $\vartheta$  резонансные частоты практически не меняются, а полосы частот  $\Delta f/f_p$  увеличиваются в десятки раз.

### 3. ЧАСТОТНО-УГЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ОТ РАДИОПОГЛОТИТЕЛЯ НА ОСНОВЕ ИМП

В научной литературе рассмотрены два способа реализации радиопоглотителя на основе ИМП. Первый способ — использование слоя диэлектрика с потерями между решеткой и экраном [10, 12], а второй — помещение на поверх-



**Таблица 2.** Резонансные частоты и ширины полосы частот ИМП, в которых фаза меняется в интервале  $\pm 90^\circ$  при различных углах падения

$\vartheta$ , град	ИМП 1		ИМП 2		ИМП 3	
	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %
0	2.85	0.8	3.734	2.4	5.648	3.3
60	2.867	1.4	3.762	4.2	5.649	5.5
80	2.87	4.0	3.77	11.4	5.65	14.9
85	2.87	8.1	3.77	22.5	5.65	29.0
86	2.87	10.2	3.77	24.4	5.65	35.9
87	2.87	14.3	3.77	36.7	5.65	46.1
88	2.87	23.1	3.77	52.1	5.65	63.7
89	2.87	56.4	3.77	89.0	5.65	95.5

**Таблица 3.** Резонансные частоты, ширины полосы частот ИМП РП и тангенсы угла потерь  $\text{tg } \delta$  слоя диэлектрика при различных углах падения

$\vartheta$ , град	ИМП РП 1			ИМП РП 2			ИМП РП 3		
	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %	$\text{tg } \delta$	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %	$\text{tg } \delta$	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %	$\text{tg } \delta$
0	2.85	0.56	0.008	3.735	1.61	0.026	5.65	2.23	0.034
80	2.878	2.56	0.04	3.784	7.66	0.114	5.694	9.82	0.15
83	2.885	3.50	0.056	3.802	9.71	0.160	5.736	13.81	0.208
85	2.896	4.77	0.075	3.834	14.53	0.218	5.822	18.72	0.277
86	2.908	5.71	0.09	3.870	17.62	0.263	5.920	22.62	0.33
87	2.93	7.06	0.112	3.944	21.73	0.327	6.120	27.73	0.391
88	2.979	8.26	0.137	4.126	26.66	0.407	6.610	30.32	0.421
89	3.07	7.46	0.158	4.560	22.62	0.437	7.414	22.52	0.304

ность решетки резистивной пленки с сопротивлением, равным волновому сопротивлению свободного пространства  $120 \pi$  Ом [11]. Нами рассмотрены частотно-угловые характеристики ИМП-радиопоглотителя (ИМП РП) на основе частотно-селективных решеток, реализованного по первому способу.

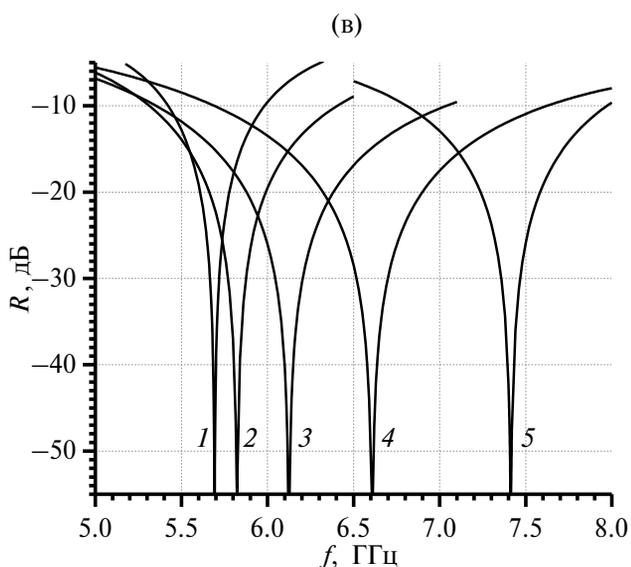
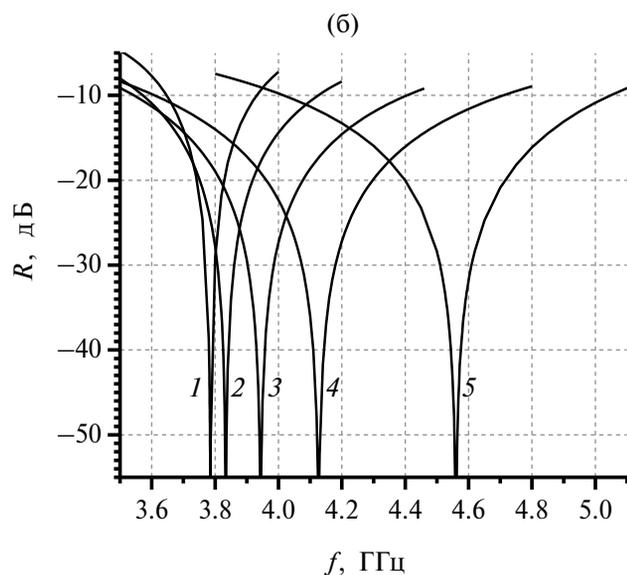
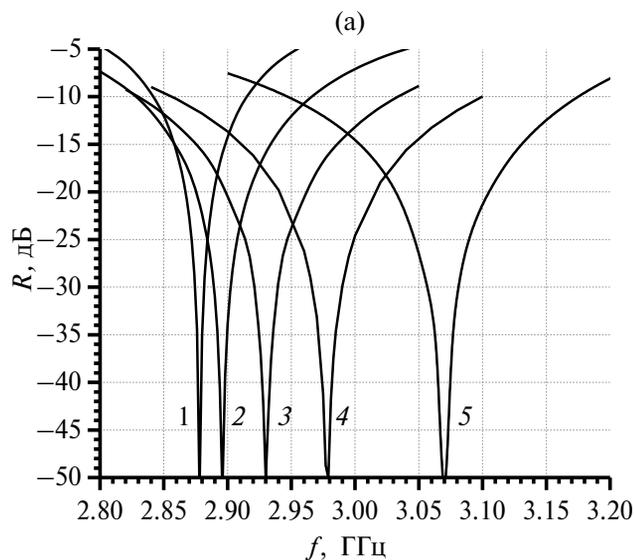
Структура и размеры расчетной модели ИМП РП такие же, как и в модели, рассмотренной в разд. 1. Для каждого угла падения  $\vartheta$  подбирались оптимальная величина тангенса угла потерь  $\text{tg } \delta$  диэлектрического слоя, обеспечивающая минимальный уровень отражения ( $< -25$  дБ) на резонансной частоте. На рис. 4а–4в представлены частотно-угловые зависимости коэффициента отражения от ИМП РП на основе частотно-селективных решеток трех типоразмеров.

В табл. 3 приведены резонансные частоты  $f_p$ , полосы поглощения  $\Delta f/f_p$  по уровню коэффициента отражения  $-10$  дБ и оптимальные тангенсы угла потерь  $\text{tg } \delta$  слоя диэлектрика.

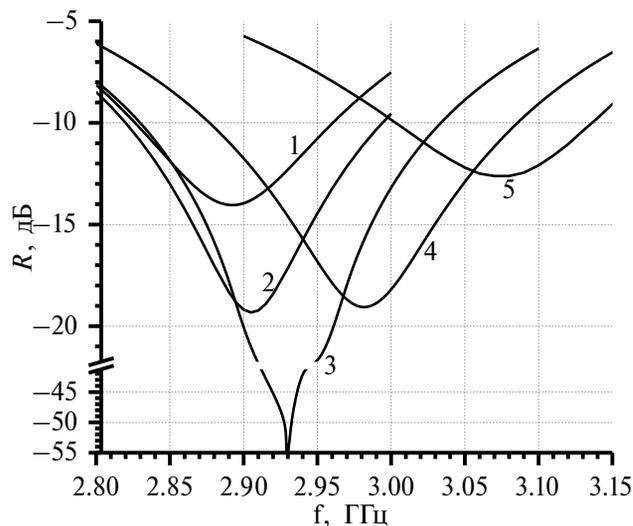
Из рис. 4 и табл. 3 следует, что с увеличением угла падения  $\vartheta$  полосы поглощения быстро расширяются, но при этом резонансные частоты несколько растут. При увеличении угла падения растет и такая характеристика РП, как отношение  $\Delta \lambda/D$ , где  $\Delta \lambda$  – разность длин волн на краях полосы поглощения, а  $D$  – толщина РП (диэлектрического слоя). Так, при угле падения  $87^\circ$  это отношение равно 14, 33 и 30 для ИМП РП 1, 2 и 3 соответственно.

На рис. 5 приведены частотно-угловые зависимости коэффициента отражения от ИМП РП 1 при фиксированном значении угла потерь  $\text{tg } \delta = 0.112$ , которое является оптимальным для угла падения  $\vartheta = 87^\circ$ .

Определенный интерес представляет собой случай поглощения волн  $TM$ -поляризации при угле падения  $\vartheta$ , стремящегося к  $90^\circ$ . Моделью такого случая может служить волна  $H_{10}$  в волноводе прямоугольного сечения, поскольку эта волна представляет собой суперпозицию двух



**Рис. 4.** Частотно-угловые зависимости коэффициента отражения от ИМП РП на основе решеток с элементами трех типоразмеров 1 (а), 2 (б) и 3 при оптимальном значении  $\text{tg}\delta$  диэлектрического слоя и  $\vartheta = 80^\circ$  (1),  $85^\circ$  (2),  $87^\circ$  (3),  $88^\circ$  (4) и  $89^\circ$  (5).



**Рис. 5.** Частотно-угловые зависимости коэффициента отражения от ИМП РП на основе решетки с элементами 1 при фиксированном значении  $\text{tg}\delta = 0.112$  диэлектрического слоя и  $\vartheta = 85^\circ$  (1),  $86^\circ$  (2),  $87^\circ$  (3),  $88^\circ$  (4) и  $89^\circ$  (5).

плоских волн, распространяющихся под углом падения  $90^\circ$  по отношению к широким стенкам волновода.

#### 4. ВОЛНОВОД ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ИМП РП НА ШИРОКИХ СТЕНКАХ

На рис. 6 представлен волновод прямоугольного сечения  $72.1 \times 34$  мм длиной 120 мм, на широкие стенки которого помещен ИМП РП на основе полосно-отражающих решеток первого типоразмера. Толщина диэлектрического слоя между решеткой и стенкой волновода 0.5 мм, его диэлектрическая проницаемость – 10.2, тангенс угла потерь – 0.112. Число элементов решетки на каждой стенке  $7 \times 10 = 70$  (размер решетки  $72.1 \times 103$  мм<sup>2</sup>).

На рис. 7 представлена частотная зависимость коэффициента прохождения  $S_{1,2}$  и коэффициента отражения  $S_{1,1}$  в таком волноводе.

При сравнении рис. 7 и 4а видно, что частота минимума  $S_{1,2}$ , равная 2.9 ГГц, находится в интервале частот поглощения ИМП РП при больших углах падения.

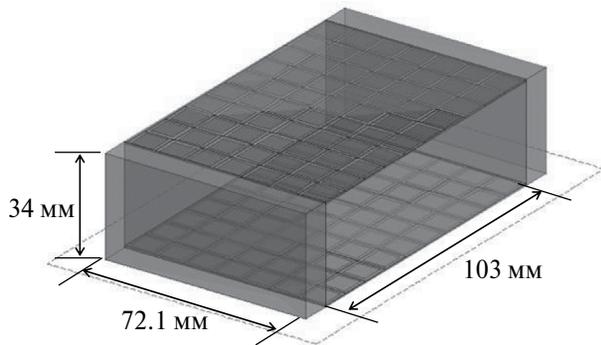


Рис. 6. Волновод прямоугольного сечения, на широкие стенки которого помещен ИМП РП на основе полосно-отражающих решеток с элементами  $I$ .

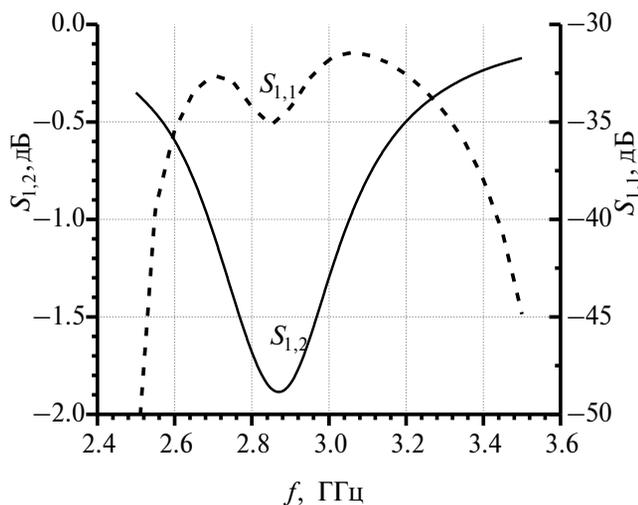


Рис. 7. Частотная зависимость коэффициентов прохождения  $S_{1,2}$  и отражения  $S_{1,1}$  волновода с ИМП РП на основе полосно-отражающих решеток с элементами  $I$ .

Все численные расчеты проведены методом моментов в программе FEKO.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен тонкий РП со структурой ИМП на основе полосно-отражающей и полосно-пропускающей решеток.

Путем численного расчета получены частотно-угловые зависимости фазы и модуля коэффициента отражения волн  $TM$ -поляризации от тонких (до  $1/200$  длины волны) ИМП и ИМП РП на основе полосно-отражающих и полосно-пропускающих решеток. Показано, что при увеличении угла падения частотные полосы ИМП и ИМП РП расширяются до нескольких десятков процентов. При этом, как положитель-

ный фактор, увеличивается и отношение  $\Delta\lambda/D$  ( $\Delta\lambda$  – разность длин волн на краях полосы поглощения по уровню отражения  $-10$  дБ, а  $D$  – толщина РП). Так, при угле падения  $87^\circ$  это отношение достигает 30.

На модели волновода прямоугольного сечения с волной  $H_{10}$  показана возможность поглощения энергии плоской волны при ее распространении вдоль поверхности ИМП РП.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sievenpiper D., Zhang L., Broas R.F. J. et al. // IEEE Trans. 1999. V. MTT-47. № 11. P. 2059.*
2. *Broas R.F.J., Sievenpiper D.F., Yablonovitch E. // IEEE Trans. 2005. V. AP-53. № 4. P. 1377.*
3. *Feresidis A.P., Goussetis G., Shenhong Wang, Vardaxoglou J.C. // IEEE Trans. 2003. V. AP-51. № 1. P. 209.*
4. *Fan Yang, Rahmat-Samii Y. // IEEE Trans. 2003. V. AP-51. № 10. P. 2691.*
5. *Казанцев Ю.Н., Анлеталин В.Н. // РЭ. 2007. Т. 52. № 4. С. 415.*
6. *Kern D.J., Werner D.H., Monorchio A. et al. // IEEE Trans. 2005. V. AP-53. № 1. P. 8.*
7. *Sohn J.R., Kim K.Y., Tae H.-S., Lee H.J. // Progress in Electromagnetics Research. 2006. V. 61. P. 27.*
8. *Fei-Ran Yang, Kuang-Ping Ma, Yongxi Qian, Itoh T. // IEEE Trans. 1999. V. MTT-47. № 11. P. 2092.*
9. *Казанцев Ю.Н., Крафтмахер Г.А., Мальцев В.П. // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 874.*
10. *Engheta N. // IEEE Antennas and Propagation Soc. Int. Symp. San Antonio 16–21 Jun. 2002. N.Y.: IEEE, 2002. V. 2. P. 392.*
11. *Tretyakov S., Maslovski S. // Proc. 33rd Europ. Microwave Conf. Munich. 07 Oct. 2003. N.Y.: IEEE, 2003. P. 1107.*
12. *Казанцев Ю.Н., Крафтмахер Г.А., Мальцев В.П. // РЭ. 2022. Т. 67. № 4. С. 339.*
13. *Skolnik M. Radar Handbook. 3rd ed. N.Y.: Mc-Graw-Hill Education, 2000.*
14. *Zheng L., Yang H., Gong W. et al. // J. Appl. Phys. 2021. V. 130. № 10. P. 105304.*

# RADIO ABSORPTION IN STRUCTURES LIKE ARTIFICIAL MAGNETIC CONDUCTORS AT LARGE ANGLES OF INCIDENCE OF TM-POLARIZED WAVES

**Yu. N. Kazantsev<sup>a, \*</sup>, G. A. Kraftmakher<sup>a</sup>, V. P. Mal'tsev<sup>a</sup>, V. S. Solosin<sup>a, b</sup>**

*<sup>a</sup>Fryazino branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics*

*Russian Academy of Sciences, Fryazino Moscow oblast, 141190 Russia*

*<sup>b</sup>Institute of Theoretical and Applied Electrodynamics, Moscow, 125412 Russia*

*\*E-mail: yukazantsev@mail.ru*

Received January 12, 2023; revised February 14, 2023; accepted February 25, 2023

The frequency-angular characteristics of the reflection of TM-polarized waves from thin (thickness up to  $1/200$  wavelength) artificial magnetic conductor (AMC) and radio absorber (RA) based on band-reflecting and band-passing gratings are presented. It is shown that the operating frequency bands of the AMC and RA expand tens of times when the angle of incidence changes from 0 to 89 degrees. In this case, the value of the ratio (is the difference in wavelengths at the edges of the absorption band and is the thickness of the RA) increases to 30.

*Keywords:* artificial magnetic conductors, radio absorber, frequency-selective band-reflective and band-pass gratings, rectangular waveguide

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.396;621.59; 519.725

### СИНХРОНИЗАЦИЯ М-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АДАМАРА

© 2024 г. С. Ф. Горгадзе\*, Д. Ву Ши, А. В. Ермакова

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),  
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация

\*E-mail: s.f.gorgadze@mtuci.ru

Поступила в редакцию 19.10.2022 г.

После доработки 18.07.2023 г.

Принята к публикации 27.07.2023 г.

Разработаны варианты построения матриц-циркулянтов любой М-последовательности (МП) на основе автоморфных мультипликативных групп расширенного поля Галуа, построенного при помощи неприводимого примитивного полинома, на основе которого сформирована исходная МП. Результатом данного подхода являются выявленные новые способы преобразования матриц-циркулянтов МП к матрице функций Уолша, упорядоченной по степеням первообразного элемента поля. Впервые показано, что в зависимости от начальных условий преобразования совокупность любого числа любых циклических сдвигов МП, сдвинутых друг относительно друга на один символ, может быть преобразована к любым строкам упорядоченной матрицы функций Уолша, следующим друг за другом. Данное обстоятельство позволяет упростить алгоритм синхронизации МП при известном диапазоне ее циклических сдвигов, особенно в случае больших периодов ее повторения, а также снизить вычислительную сложность алгоритма обработки при работе в усеченном базисе функций Уолша–Адамара.

*Ключевые слова.* М-последовательности, матрица-циркулянт, матрица функций Уолша, шумоподобные сложные сигналы, мультипликативные группы поля Галуа, быстрое преобразование Адамара.

DOI: 10.31857/S0033849424020031, EDN: KMХKJN

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время М-последовательности (МП) используются для формирования периодических шумоподобных сложных сигналов (СлС), применяемых в различных наземных и спутниковых радиосистемах [1–10]. На основе обработки таких СлС могут решаться задачи синхронизации по времени и частоте в каналах передачи информации [1, 11–13], позиционирования в системах радионавигации [3–5, 14], суммирования сигналов при их многолучевом распространении или излучении разнесенными ретрансляторами, включая спутниковые [1, 2, 5, 12, 15], выявления всех наземных станций, использующих спутниковую группировку, с целью контроля частотного ресурса [6, 7] и т.д. Во всех вышеперечисленных случаях ключевым этапом обработки СлС является синхронизация МП на основе многократного выполнения операции ее дискретной свертки на длительности времени одного, многих периодов ее повторения, либо ее

сегмента значительной длины, порядка  $2^9 \dots 2^{17}$  и более [1, 3, 6, 16–18]. Это объясняется как требованиями к разрешающей способности при обнаружении-различении совокупности шумоподобных СлС, рассогласованных по частоте и временной задержке [7, 15], так и, как правило, низким отношением сигнал/помеха на входе приемника, когда помеха может превосходить полезный сигнал по мощности в сотни, тысячи, или десятки тысяч раз [6]. При этом ограничение по длительности времени обработки СлС в настоящее время связано только с высокой вычислительной сложностью алгоритма дискретной свертки соответствующих псевдослучайных последовательностей (ПСП), поскольку проблема нестабильности тактовых генераторов последних решается при повторной дискретизации входного СлС со сдвигом по времени на половину длительности его элементарного импульса [13, 19, 20], а нестабильность его несущей частоты приводит лишь к необходимости многократ-

ных повторных вычислений дискретной свертки ПСП [8, 19].

Значительные успехи в области использования быстрых спектральных преобразований в базе функций Виленкина–Крестенсона и, в частности, Уолша–Адамара, при обработке дискретных сигналов были достигнуты в работах [4, 14, 21–28]. В [21] впервые предложены групповые дискретные мультипликативные сигналы, выявлена их связь с групповыми кодами и показано, что в основе оптимального правила их распознавания лежит спектральный анализ, при реализации которого можно использовать быстрые спектральные преобразования. В работах [22–27] развиты методы использования этих преобразований в теории помехоустойчивого кодирования. Применительно к задаче декодирования  $p$ -ичных кодов максимальной длины использование быстрых спектральных преобразований в дискретном базисе функций Виленкина–Крестенсона рассматривалось в работе [28], а непосредственно для синхронизации псевдослучайных кодов, в том числе и МП, в работах [4, 6, 14].

Также в [4] указывается на взаимосвязь задач поиска (синхронизации) СлС при их обработке в приемнике и декодирования блоковых кодов, построенных на основе циклических сдвигов их слов. В данной работе рассматривается задача синхронизации МП, чтобы подчеркнуть взаимосвязь решаемой задачи с синхронизацией периодического СлС при его обработке в приемнике. Под синхронизацией МП понимается определение ее циклического сдвига, начиная с момента начала наблюдения СлС, на основе которой он сформирован. Вопросы, связанные с выделением МП из этого СлС, не рассматриваются.

При быстром декодировании кода на основе быстрых спектральных преобразований необходимо знать способ преобразования его слов к дискретным функциям Виленкина–Крестенсона или, при использовании двоичных кодов, – к функциям Уолша [21]. В случае решения задачи синхронизации кода любой его циклический сдвиг должен преобразовываться к этим функциям [4, 14]. Но в [4, 6, 14, 28] не выявлено многообразие вариантов преобразования циклических сдвигов МП к дискретным функциями Уолша, вызванное как разнообразием мультипликативных групп расширенного поля Галуа, так и использованием их циклических сдвигов при таком приведении. Знание о таком многообразии делает алгоритм синхронизации МП

более гибким и позволяет снизить его вычислительную сложность в определенных ситуациях, на которые указывается в данной статье. Кроме того, при решении задачи синхронизации МП с большими периодами повторения важное значение приобретает способ выявления соответствия номеров строк матрицы Уолша–Адамара и начальных блоков циклических сдвигов МП, т.е. в матричной интерпретации данной задачи – строкам матрицы-циркулянта МП, которая может быть построена разными способами, что не рассматривается в этих работах.

Цель данной работы – исследование вариантов построения матриц-циркулянтов МП на основе мультипликативных групп расширенного поля Галуа по модулю неприводимого примитивного полинома, а также вариантов приведения этих матриц к полной или усеченной матрице Адамара для разработки ускоренных алгоритмов синхронизации МП при обработке шумоподобных сложных сигналов.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ-ЦИРКУЛЯНТОВ МП НА ОСНОВЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ГРУПП ПОЛЯ ГАЛУА

Представим любую МП с элементами (0,1), сформированную на основе неприводимого примитивного полинома  $f_m(x)$ , в виде вектора-строки

$${}^n\mathfrak{J}_i = [x_{i,k}, k = 0, \dots, N - 1],$$

где  $i = 0, \dots, m - 1$  – номер циклического сдвига МП на  $l_i \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$  символов относительно МП  ${}^n\mathfrak{J}_0$  с условно нулевым циклическим сдвигом,  $N = 2^m - 1$  – длина (период) МП,  $m$  – порядок  $f_m(x)$ ,  $n$  – номер выбранного способа упорядочения МП по их циклическим сдвигам [1, 29–32].

Как известно, можно выбрать такой способ упорядочения любых  $m$  МП, описанных выше, при котором столбцы

$$\alpha^k = [x_{i,k}, i = 0, \dots, m - 1]^T, k = 0, \dots, N - 1,$$

образуют мультипликативную группу расширенного поля Галуа  $GF(2^m)$  построенного по модулю  $f_m(x)$ , где  $k$  – номер элемента группы,  $[\cdot]^T$  – обозначение транспонированной матрицы [21, 29, 30]. Такая группа имеет циклическую структуру и состоит из максимально возможного числа  $N$  несовпадающих ненулевых элементов,

являющихся степенями первообразного элемента  $\alpha^0$  поля, причем  $\alpha^k = \mathbf{H}_n \alpha^{k-1}$ , где  $\mathbf{H}_n$  – сопровождающая матрица  $f_m(x)$  [30]. Обычно рассматривают четыре типа таких матриц [28]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{H}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} a_{m-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{m-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{H}_4 &= \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}$  – коэффициенты полинома  $f_m(x)$ , принадлежащие множеству  $\{0, 1\}$ ; таким образом, размерность этих матриц будет  $m \times m$ . Важным является свойство цикличности группы, т.е.  $\alpha^0 = \alpha^N$ ,  $\alpha^1 = \alpha^{N+1}, \dots$ . Кроме того, в качестве  $\alpha^0$  можно выбрать любой ее элемент. Таким образом,  $m$  циклических сдвигов МП на  $l_i$  ее символов относительно  ${}^n_0\mathfrak{J}_0$  с некоторым сдвигом, условно считающимся нулевым ( $l_0 = 0$ ), можно представить в виде матрицы:

$$\mathfrak{J}_{m,n} = \begin{bmatrix} {}^n_0\mathfrak{J}_0 \\ {}^n_{l_1}\mathfrak{J}_1 \\ \dots \\ {}^n_{l_{m-1}}\mathfrak{J}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^1 & \dots & \alpha^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\alpha^k = \mathbf{H}_n \alpha^{k-1}.$$

где столбцы  $\alpha^k$  могут быть получены любым из возможных способов, т.е. при выборе матрицы  $\mathbf{H}_n$ , что определяет значения циклических

сдвигов МП  $l_i$  ( $i = 0, \dots, m-1$ ) относительно МП  ${}^n_0\mathfrak{J}_0$  при выбранном  $\alpha^0$ . В качестве примера в табл. 1 приведены значения элементов четырех максимальных мультипликативных групп поля Галуа, полученных на основе полинома  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$  и представленных в десятичной системе счисления. Такое их представление в дальнейшем обозначаем как  $[\alpha^k]_{10}$ . Был выбран первообразный элемент  $\alpha^0 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^m$ , так что во всех случаях  $[\alpha^0]_{10} = 16$ .

**Таблица 1.** Максимальные мультипликативные группы поля Галуа по модулю полинома  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$

$k$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$
0	16	16	16	16
1	8	1	1	8
2	4	2	18	20
3	2	5	13	10
4	1	10	26	21
5	18	21	29	26
6	9	11	19	29
7	22	23	15	14
8	11	14	30	23
9	23	29	21	27
10	25	27	3	13
11	30	22	6	6
12	15	24	12	3
13	21	17	24	17
14	24	3	25	24
15	12	7	27	28
16	6	6	31	30
17	3	15	23	31
18	19	31	7	15
19	27	30	14	7
20	31	28	28	19
21	29	25	17	25
22	28	19	11	12
23	14	6	22	22
24	7	13	5	11
25	17	26	10	5
26	26	20	20	18
27	13	9	1	9
28	20	18	2	4
29	10	4	4	2
30	5	8	8	1

Таким образом, например, для матрицы  $\mathbf{H}_1$  элементы мультипликативной группы поля Га-луа можно вычислить по формуле

$$\alpha^{k+1} = \begin{bmatrix} x_{0,k+1} \\ x_{1,k+1} \\ \dots \\ x_{m-1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,k} \\ x_{1,k} \\ \dots \\ x_{m-2} \\ x_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$k = 0, \dots, N - 1,$

причем  $m$  циклических сдвигов порождаемой МП (т.е. на  $l_0, l_1, \dots, l_{m-1}$  символов относительно  ${}_0^1\mathfrak{J}_0$ ) располагаются в строках матрицы  $\mathfrak{J}_{m,1}$  [30], соответствующей  $\mathbf{H}_1$ :

$$\mathfrak{J}_{m,1} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \dots & x_{0,N-1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \dots & x_{1,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m-1,0} & x_{m-1,1} & \dots & x_{m-1,N-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Ее столбцы представляют собой элементы мультипликативной группы поля Гаула по модулю  $f_m(x)$  с коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}$ .

В качестве примера в табл. 2 приводятся элементы матрицы  $\mathfrak{J}_{5,1}$  для полинома  $f_5(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ , а в табл. 3 – для двойственного полинома  $f_5(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$ .

Матрицу-циркулянт МП  $\mathfrak{J}_{m,n,u}$  с элементами  $(0,1)$ , содержащую ее циклические сдвиги на  $l_0, l_1, \dots, l_{m-1}$  символов, а также все остальные сдвиги, не совпадающие с ними, сформируем в соответствии с правилом

$$\mathfrak{J}_{m,n,u} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{m,n} \\ \mathbf{H}_n^m \mathfrak{J}_{m,n} \\ \mathbf{H}_n^{2m} \mathfrak{J}_{m,n} \\ \dots \\ \mathbf{H}_n^{C(N)m} \mathfrak{J}_{m,n} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $C(N) = \left(\frac{A(N)}{m}\right) - 1$ ,  $A(N)$  – число, максимально близкое к  $N$ , делящееся нацело на  $m$  и удовлетворяющее неравенству  $A(N) > N$ . Таким образом,  $\frac{A(N)}{m}$  – это общее число бло-

**Таблица 2.** Элементы мультипликативной группы поля Гаула на основе сопровождающей матрицы  $\mathbf{H}_1$  полинома  $f_5(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

Элементы группы	$k$																														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	$[\alpha^k]_{10}$																														
$x_{0,k}$	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
$x_{1,k}$	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
$x_{2,k}$	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
$x_{3,k}$	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
$x_{4,k}$	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1

**Таблица 3.** Элементы мультипликативной группы поля Гаула на основе сопровождающей матрицы  $\mathbf{H}_1$  полинома  $f_5(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$

Элементы группы	$k$																														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	$[\alpha^k]_{10}$																														
$x_{0,k}$	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
$x_{1,k}$	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
$x_{2,k}$	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
$x_{3,k}$	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
$x_{4,k}$	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1

ков в матрице  $\mathfrak{J}_{m,n,u}$ , содержащих матрицу  $\mathfrak{J}_{m,n}$  или ее преобразование вида  $\mathbf{H}_n^x \mathfrak{J}_{m,n}$ . Размерность каждого блока составит  $m \times (N-1)$ . Таким образом, размерность матрицы  $\mathfrak{J}_{m,n,u}$  будет  $A(N) \times (N-1)$ , в результате чего последний блок  $\mathfrak{J}_{m,n,u}$  в своих  $A(N) - N$  строках будет содержать МП, циклические сдвиги которых совпадают со сдвигами МП первого блока.

В качестве примера элементы  $\mathfrak{J}_{5,1,u}$ , сформированной на основе  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$  и  $\mathbf{H}_1$ , приведены в табл. 4. Из анализа данных табл. 4 следует, что последовательность  $l_0, l_1, \dots, l_{34}$ , расположенная в последнем столбце, выглядит случайной, хотя второй блок  $\mathfrak{J}_{5,1,u}$  из  $m = 5$  ее строк сдвинут относительно первого блока из такого же количества строк на пять символов МП, третий блок сдвинут относительно него на десять символов и т.д. Кроме того, столбцы  $\mathfrak{J}_{5,1,u}$  не являются МП.

Совершенно другую структуру имеет  $\mathfrak{J}_{5,2,u}$ , сформированная на основе того же полинома  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$  и  $\mathbf{H}_2$  и приведенная в табл. 5, поскольку в ее строках располагаются циклические сдвиги МП, смещенные вправо на один символ друг относительно друга. Кроме того, в ее столбцах содержатся циклические сдвиги той же МП, причем в каждом последующем столбце МП сдвинута циклически на один символ, по сравнению с предыдущим столбцом. Очевидно, что данное свойство характерно для всех  $\mathfrak{J}_{m,2,u}$ , построенных на основе  $\mathbf{H}_2$ , и оно не свойственно  $\mathfrak{J}_{m,1,u}$ ,  $\mathfrak{J}_{m,3,u}$ ,  $\mathfrak{J}_{m,4,u}$ , сформированным на основе  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_3$  и  $\mathbf{H}_4$  соответственно. Будем называть все матрицы-циркулянты  $\mathbf{H}_2$ , упорядоченными по циклическим сдвигам или просто упорядоченными.

Важнейшим свойством упорядоченных матриц-циркулянтов является очевидная и простая взаимосвязь между номером их строки  $i$  и абсолютным циклическим сдвигом МП в этой

строке, который определяется набором  $m$  ее символов:

$$\mathbf{H}_2^i \alpha^0 = \mathbf{b}_i, \quad (6)$$

где  $\mathbf{b}_i = [x_{i,k}, k = 0, \dots, m-1]$  – начальный блок МП, находящейся в  $i$ -й строке матрицы-циркулянта.

Другим важным свойством упорядоченной матрицы-циркулянта является циклический сдвиг последовательности элементов мультипликативных групп  $\mathbf{H}_2^x \mathfrak{J}_{m,n}$  ( $x = 0, m, 2m, \dots$ ) на один элемент вправо при выборе каждого следующего элемента группы в качестве первообразного, в результате чего существует  $N$ -вариантов этой матрицы. В любом из них в строках от  $i$ -й до  $(i+m-1)$ -й будут располагаться элементы мультипликативной группы поля Галуа, циклически сдвинутые на  $i$  символов относительно  $\mathfrak{J}_{m,2}$ , где  $i$  может принимать любое значение от 1 до  $(N-1)$ .

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ-ЦИРКУЛЯНТА МП К МАТРИЦЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ФУНКЦИЙ УОЛША

Переставим столбцы матрицы  $\mathfrak{J}_{m,2,u}$  при любом значении  $\alpha^0$  по возрастанию значений элементов мультипликативной группы поля Галуа  $[\alpha^k]_{10}$ , сформированной на основе  $\mathbf{H}_2$  при таком же значении  $\alpha^0$  [4, 14]. В результате  $\mathfrak{J}_{m,2}$  будет преобразована в матрицу  $\mathbf{R}_{ma}$ , столбцы которой образуют так называемый простой двоичный код, а строки являются аналогами функций Радемахера [31] без нулевого символа при нумерации символов с нуля:  $\mathbf{r}_{0a}, \mathbf{r}_{1a}, \dots, \mathbf{r}_{(m-1)a}$ . Матрица  $\mathbf{R}_{ma} = [\mathbf{r}_{0a} \mathbf{r}_{1a} \dots \mathbf{r}_{(m-1)a}]^T$  при  $m = 5$  показана в табл. 6.

Тогда  $\mathfrak{J}_{m,2,u}$  преобразуется в матрицу

$$\mathbf{W}_{m,p(1,0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ma} \\ \mathbf{H}_2^m \mathbf{R}_{ma} \\ \mathbf{H}_2^{2m} \mathbf{R}_{ma} \\ \dots \\ \mathbf{H}_2^{C(N)m} \mathbf{R}_{ma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \mathbf{R}_{ma} \\ \mathbf{H}_2^m \mathbf{R}_{ma} \\ \mathbf{H}_2^{2m} \mathbf{R}_{ma} \\ \dots \\ \mathbf{H}_2^{C(N)m} \mathbf{R}_{ma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{H}_2^m \\ \mathbf{H}_2^{2m} \\ \dots \\ \mathbf{H}_2^{C(N)m} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{ma}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{W}_{m,p(1,0)}$  – расширенная матрица функций Уолша без нулевого символа с элементами  $(0,1)$ , содержащая некоторое количество повторяющихся строк;  $\mathbf{I}_m$  – единичная матрица размером

$m \times m$ . Строки матриц  $\mathbf{H}_2^x \mathbf{R}_{ma}$  ( $x = m, 2m, \dots$ ) представляют собой комбинации сумм строк матрицы  $\mathbf{R}_{ma}$  при сложении символов по модулю 2. Как известно, такие суммы образуют функции

Таблица 4. Матрица  $\mathfrak{J}_{5,1,u}$ , сформированная на основе  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$

Циклические сдвиги МП	$k$																														$i$	$l_i$	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29			30
	$[\alpha^k]_{10}$																																
	16	8	4	2	1	18	9	22	11	23	25	30	15	21	24	12	6	3	19	27	31	29	28	14	7	17	26	13	20	10			5
$x_{0,k}$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	<b>0</b>	<b>0</b>
$x_{1,k}$	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	<b>1</b>	<b>30</b>
$x_{2,k}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	<b>2</b>	<b>29</b>	
$x_{3,k}$	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	<b>3</b>	<b>2</b>	
$x_{4,k}$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	<b>4</b>	<b>1</b>	
$x_{5,k}$	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	<b>5</b>	<b>5</b>	
$x_{6,k}$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	<b>6</b>	<b>4</b>	
$x_{7,k}$	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	<b>7</b>	<b>3</b>	
$x_{8,k}$	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	<b>8</b>	<b>7</b>	
$x_{9,k}$	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	<b>9</b>	<b>6</b>	
$x_{10,k}$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	<b>10</b>	<b>10</b>	
$x_{11,k}$	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	<b>11</b>	<b>9</b>	
$x_{12,k}$	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	<b>12</b>	<b>8</b>	
$x_{13,k}$	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	<b>13</b>	<b>12</b>	
$x_{14,k}$	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	<b>14</b>	<b>11</b>	
$x_{15,k}$	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	<b>15</b>	<b>15</b>	
$x_{16,k}$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	<b>16</b>	<b>14</b>	
$x_{17,k}$	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	<b>17</b>	<b>13</b>	
$x_{18,k}$	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	<b>18</b>	<b>17</b>	
$x_{19,k}$	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	<b>19</b>	<b>16</b>	
$x_{20,k}$	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	<b>20</b>	<b>20</b>	
$x_{21,k}$	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	<b>21</b>	<b>19</b>	
$x_{22,k}$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	<b>22</b>	<b>18</b>	
$x_{23,k}$	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	<b>23</b>	<b>22</b>	
$x_{24,k}$	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	<b>24</b>	<b>21</b>	
$x_{25,k}$	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	<b>25</b>	<b>25</b>	
$x_{26,k}$	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	<b>26</b>	<b>24</b>	
$x_{27,k}$	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	<b>27</b>	<b>23</b>	
$x_{28,k}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	<b>28</b>	<b>27</b>	
$x_{29,k}$	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	<b>29</b>	<b>26</b>	
$x_{30,k}$	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	<b>30</b>	<b>30</b>	
$x_{31,k}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	<b>31</b>	<b>29</b>	
$x_{32,k}$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	<b>32</b>	<b>28</b>	
$x_{33,k}$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	<b>33</b>	<b>1</b>	
$x_{34,k}$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	<b>34</b>	<b>0</b>	

Таблица 5. Матрица  $\mathfrak{J}_{5,2,u}$ , сформированная на основе  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$

Циклические сдвиги МП	$k$																														$i$	$l_i$	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29			30
	$[\alpha^k]_{10}$																																
	16	1	2	5	10	21	11	23	14	29	27	22	12	24	17	3	7	15	31	30	28	25	19	6	13	26	20	9	18	4			8
$x_{0,k}$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	<b>0</b>	<b>0</b>
$x_{1,k}$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	<b>1</b>	<b>1</b>
$x_{2,k}$	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	<b>2</b>	<b>2</b>	
$x_{3,k}$	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	<b>3</b>	<b>3</b>	
$x_{4,k}$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	<b>4</b>	<b>4</b>	
$x_{5,k}$	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	<b>5</b>	<b>5</b>	
$x_{6,k}$	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	<b>6</b>	<b>6</b>	
$x_{7,k}$	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	<b>7</b>	<b>7</b>
$x_{8,k}$	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	<b>8</b>	<b>8</b>	
$x_{9,k}$	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	<b>9</b>	<b>9</b>	
$x_{10,k}$	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	<b>10</b>	<b>10</b>	
$x_{11,k}$	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	<b>11</b>	<b>11</b>	
$x_{12,k}$	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	<b>12</b>	<b>12</b>	
$x_{13,k}$	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	<b>13</b>	<b>13</b>	
$x_{14,k}$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	<b>14</b>	<b>14</b>	
$x_{15,k}$	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	<b>15</b>	<b>15</b>	
$x_{16,k}$	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	<b>16</b>	<b>16</b>	
$x_{17,k}$	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	<b>17</b>	<b>17</b>	
$x_{18,k}$	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	<b>18</b>	<b>18</b>	
$x_{19,k}$	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	<b>19</b>	<b>19</b>	
$x_{20,k}$	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	<b>20</b>	<b>20</b>	
$x_{21,k}$	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	<b>21</b>	<b>21</b>	
$x_{22,k}$	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	<b>22</b>	<b>22</b>	
$x_{23,k}$	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	<b>23</b>	<b>23</b>	
$x_{24,k}$	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	<b>24</b>	<b>24</b>	
$x_{25,k}$	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	<b>25</b>	<b>25</b>	
$x_{26,k}$	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	<b>26</b>	<b>26</b>	
$x_{27,k}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	<b>27</b>	<b>27</b>	
$x_{28,k}$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	<b>28</b>	<b>28</b>	
$x_{29,k}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	<b>29</b>	<b>29</b>	
$x_{30,k}$	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	<b>30</b>	<b>30</b>	
$x_{31,k}$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	<b>31</b>	<b>0</b>	
$x_{32,k}$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	<b>32</b>	<b>1</b>	
$x_{33,k}$	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	<b>33</b>	<b>2</b>	
$x_{34,k}$	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	<b>34</b>	<b>3</b>	

Таблица 6. Аналоги функций Радемахера при  $m = 5$

Аналоги функций Радемахера	$k$																														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$r_{0a}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$r_{1a}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$r_{2a}$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$r_{3a}$	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$r_{4a}$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Уолша без нулевых символов при нумерации символов с нуля. С целью выявления способа их упорядочения в (7) рассмотрим матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^m \\ \mathbf{H}_2^{2m} \\ \dots \\ \mathbf{H}_2^{C(N)m} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Покажем, что ее строки образуют мультипликативную группу поля Галуа, сформированную на основе  $\mathbf{H}_1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (\mathbf{H}^T)^T = \\ &= \left[ \left( (\mathbf{H}_2^T)^T \right)^m \quad \left( (\mathbf{H}_2^T)^T \right)^{2m} \quad \dots \quad \left( (\mathbf{H}_2^T)^T \right)^{C(N)m} \right]^T = \\ &= \left[ (\mathbf{H}_1^T)^m \quad (\mathbf{H}_1^T)^{2m} \quad \dots \quad (\mathbf{H}_1^T)^{C(N)m} \right]^T = \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{H}_1^m)^T \\ (\mathbf{H}_1^{2m})^T \\ \dots \\ (\mathbf{H}_1^{C(N)m})^T \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

поскольку  $\mathbf{H}_2^T = \mathbf{H}_1$ . Кроме того, учтем, что

$$(\mathbf{H}_1)^m = (\mathbf{H}_1)^{m-1} \mathbf{H}_1 = (\mathbf{H}_1)^{m-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Далее, полагая, что первообразный элемент группы совпадает с первым столбцом  $\mathbf{H}_1$ , т.е.  $\alpha^0 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^m$ , заметим, что  $\mathbf{H}_1 \alpha^0 = \alpha^1 = [0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T$  и совпадает со вторым столбцом  $\mathbf{H}_1$ , и т.д. Последний элемент  $\alpha^{m-1} = \mathbf{H}_1 \alpha^{m-2} = \mathbf{H}_1 [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{m-1}]^T$  совпадает с последним столбцом  $\mathbf{H}_1$ . Таким образом,  $\mathbf{H}_1 = [\alpha^0 \ \alpha^1 \ \dots \ \alpha^{m-1}]$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_1)^m &= \\ &= [(\mathbf{H}_1)^{m-1} \alpha^0 \quad (\mathbf{H}_1)^{m-1} \alpha^1 \quad \dots \quad (\mathbf{H}_1)^{m-1} \alpha^{m-1}] = (11) \\ &= [\alpha^{m-1} \quad \alpha^m \quad \dots \quad \alpha^{2m-2}]. \end{aligned}$$

Аналогично получим  $(\mathbf{H}_1)^{2m} = (\mathbf{H}_1)^{2m-1} \mathbf{H}_1 = [\alpha^{2m-1} \quad \alpha^{2m} \quad \dots \quad \alpha^{3m-2}]$  и т.д. В результате

$$\mathbf{H} = \left[ \alpha^{(m-1)T} \quad \alpha^{mT} \quad \dots \quad \alpha^{(2m-2)T} \quad \alpha^{(C(N)m-1)T} \quad \alpha^{C(N)mT} \quad \dots \quad \alpha^{((C(N)+1)m-2)T} \right]^T, \quad (12)$$

где  $\alpha^0 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$ , причем  $\mathbf{H}$  в своих строках содержит элементы мультипликативной группы, построенной на основе сопровождающей матрицы  $\mathbf{H}_1$  – от  $(m-1)$ -го до  $((C(N)+1)m-2)$ -го (при  $m = 5$  от 4-го до 33-го, всего 30), т.е. груп-

па, представленная в этой матрице, будет усеченной. Первообразным элементом усеченной группы будет

$$\alpha^{(m-1)} = \mathbf{H}_1^{m-1} \alpha^0 = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{m-1}]^T.$$

Из формул (7), (8), (12) следует:

$$\mathbf{W}_{m,p(1,0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{ma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{H}_p & & \end{bmatrix} \mathbf{R}_{ma}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{H}_p$  – расширенная матрица  $\mathbf{H}$ , содержащая в своих строках элементы мультипликативной группы, построенной на основе  $\mathbf{H}_1$  – от эле-

мента  $\alpha^0 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$  до  $((C(N) + 1)m - 2)$ -го элемента, всего  $(C(N) + 1)m - 1 > N$  элементов. Далее отметим, что  $\mathbf{H}_1 [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^m = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^m$ . То есть, сохранив в матрице  $\mathbf{W}_{m,p(1,0)}$  лишь  $N$  первых строк, можно записать матрицу, состоящую из функций Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля в следующем виде:

$$\mathbf{W}_{m(1,0)} = \mathfrak{J}_{m,1}^T \mathbf{R}_{ma} = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{1,0} & \dots & x_{m-1,0} \\ x_{0,1} & x_{1,1} & \dots & x_{m-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{0,N-1} & x_{1,N-1} & \dots & x_{m-1,N-1} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{ma}, \quad (14)$$

причем все строки матрицы  $\mathfrak{J}_{m,1}^T$  – это элементы мультипликативной группы поля Галуа, построенной на основе матрицы  $\mathbf{H}_1$  с первообразным элементом

$$\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [x_{0,0} \ x_{1,0} \ \dots \ x_{m-1,0}]^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T.$$

Соответственно, для преобразования любого циклического сдвига МП в функцию Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля надо переставить ее элементарные символы по возрастанию значений элементов мультипликативной группы поля Галуа, построенной на основе сопровождающей матрицы полинома вида  $\mathbf{H}_2$ .

При этом важное значение имеет выбор первообразного элемента группы  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ , в зависимости от которого данный циклический сдвиг может быть преобразован к любой строке матрицы  $\mathbf{W}_{m(1,0)}$ . Но при заданном  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$  соответствие между циклическими сдвигами преобразуемой МП и строками матрицы  $\mathbf{W}_{m(1,0)}$  будет взаимно однозначным, т.е. МП с абсолютным циклическим сдвигом  $\mathbf{b}$  будет преобразована в последовательность Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля, находящуюся в  $i$ -й строке матрицы  $\mathbf{W}_{m(1,0)}$ , где  $i$  можно найти, решив уравнение  $\mathbf{H}_2^i \alpha^0_{\mathbf{H}_2} = \mathbf{b}$ . При этом в строках матрицы

$$\mathbf{W}_{m(1,0)} = \begin{bmatrix} x_{0,0}\mathbf{r}_{0a} \oplus x_{1,0}\mathbf{r}_{1a} \oplus \dots \oplus x_{m-1,0}\mathbf{r}_{(m-1)a} \\ x_{0,1}\mathbf{r}_{0a} \oplus x_{1,1}\mathbf{r}_{1a} \oplus \dots \oplus x_{m-1,1}\mathbf{r}_{(m-1)a} \\ \dots \\ x_{0,N-1}\mathbf{r}_{0a} \oplus x_{1,N-1}\mathbf{r}_{1a} \oplus \dots \oplus x_{m-1,N-1}\mathbf{r}_{(m-1)a} \end{bmatrix} \quad (15)$$

аналоги функций Радемахера складываются по модулю 2 с весовыми коэффициентами, представляющими собой символы элементов мультипликативной группы поля, построенной на основе сопровождающей матрицы полинома  $\mathbf{H}_1$  с первообразным элементом  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$ . (В (15)  $\oplus$  – обозначение операции суммирования по модулю 2.) Соответственно, в  $i$ -й строке матрицы  $\mathbf{W}_{m(1,0)}$  будет находиться функция Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля, полученная путем суммирования аналогов функций Радемахера с весовыми коэффициентами, равными значениям символов вектора  $\mathbf{x} = \mathbf{H}_1^i \alpha^0_{\mathbf{H}_1}$ . Таким образом, любая  $i$ -я строка матрицы (15)

$$\mathbf{w}_{i(1,0)} = x_{0,i}\mathbf{r}_{0a} \oplus x_{1,i}\mathbf{r}_{1a} \oplus \dots \oplus x_{m-1,i}\mathbf{r}_{(m-1)a} \quad (16)$$

является функцией Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля, где

$$\begin{bmatrix} x_{0,i} \\ x_{1,i} \\ \dots \\ x_{m-1,i} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_1^i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Произведя замену символов МП в  $\mathfrak{J}_{m,n,u}$  по правилу  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow -1$ , получим

$$\mathbf{W}_{m(1,-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0^{x_{0,0}} \cdot \mathbf{r}_1^{x_{1,0}} \cdot \dots \cdot \mathbf{r}_{(m-1)}^{x_{m-1,0}} \\ \mathbf{r}_0^{x_{0,1}} \cdot \mathbf{r}_1^{x_{1,1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{r}_{(m-1)}^{x_{m-1,1}} \\ \dots \\ \mathbf{r}_0^{x_{0,N-1}} \cdot \mathbf{r}_1^{x_{1,N-1}} \cdot \dots \cdot \mathbf{r}_{(m-1)}^{x_{m-1,N-1}} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{(m-1)}$  – функции Радемахера с элементами  $(1, -1)$  без нулевого символа при их нумерации с нуля. При этом  $i$ -я строка матрицы  $\mathbf{W}_{m(1,-1)}$  задается как

$$w_{i(1,-1)} = \mathbf{r}_0^{x_{0,i}} \cdot \mathbf{r}_1^{x_{1,i}} \cdot \dots \cdot \mathbf{r}_{(m-1)}^{x_{m-1,i}}, i = 0, \dots, N - 1, \quad (19)$$

где степени функций Радемахера по-прежнему рассчитываются по формуле (17).

Дополнив матрицу функций Уолша (18) нулевой строкой при их нумерации с нуля и крайним левым столбцом, состоящими из единиц, получим полный набор ортогональных базисных функций Уолша, способ упорядочения которых в этой матрице (кроме нулевой строки, состоящей лишь из единиц) определяется последовательностью элементов мультипликативной группы поля Галуа по модулю неприводимого примитивного полинома  $f_m(x)$  с коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}$  и его сопровождающей матрицей вида  $\mathbf{H}_1$  при первообразном элементе  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1\ 0 \dots 0\ 0]^T$ .

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{W}_{m(1,-1)}^T$ . Она состоит из строк, в которых циклические сдвиги МП упорядочены по номеру строки, т.е. каждая МП начинается с блока из  $m$  символов, соответствующих двоичному представлению номера строки, в которой она находится в матрице  $\mathbf{W}_{m(1,-1)}^T$ , а по столбцам этой матрицы располагаются функции Уолша, упорядоченные по элементам мультипликативной группы поля Галуа, соответствующей матрице  $\mathbf{H}_1$ . Поэтому перестановка столбцов этой матрицы по возрастанию значений элементов мультипликативной группы поля Галуа, построенной на основе сопровождающей матрицы ее полинома вида  $\mathbf{H}_1$  при первообразном элементе  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1\ 0 \dots 0\ 0]^T$ , приводит эту матрицу к матрице Адамара без нулевых столбца и строки при их нумерации с нуля. В каждой  $i$ -й строке этой матрицы находится функция Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля

$$w_{i(1,-1)Ад} = \mathbf{r}_0^{h_{0,i}} \cdot \mathbf{r}_1^{h_{1,i}} \cdot \dots \cdot \mathbf{r}_{(m-1)}^{h_{m-1,i}}, \quad (20)$$

$$i = 0, \dots, N - 1,$$

где  $h_{0,i}, h_{1,i}, \dots, h_{m-1,i}$  – значения разрядов двоичного представления номера строки  $j$  ( $h_{m-1,i}$  – младший разряд).

### 3. СИНХРОНИЗАЦИЯ МП

Первый способ синхронизации МП предполагает следующую последовательность действий:

1) значения дискретного сигнала  $\mathbf{X}_N$ , полученные с выхода синфазного или квадратурного канала приемника, переставляются по возрастанию значений элементов мультипликативной группы  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}, \alpha^1_{\mathbf{H}_2}, \dots, \alpha^{N-1}_{\mathbf{H}_2}$  при любом выбранном  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ ; т.е. значения  $\mathbf{X}_N$  записываются в запоминающее устройство, причем нулевое значение при их нумерации с нуля – в ячейку памяти с адресом  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ , первое – в ячейку с адресом  $\alpha^1_{\mathbf{H}_2}$  и т.д. при нумерации ячеек памяти от 0 до  $N$ ; при этом нулевая ячейка памяти останется свободной, так как у мультипликативной группы поля Галуа отсутствует элемент  $0\ 0 \dots 0$ ;

2) в ячейку памяти с номером 0 записывается единица, и производится быстрое преобразование Адамара (БПА) полученного вектора;

3) считывается номер ячейки  $i$ , в которой оказалось наибольшее значение результата БПА (нулевая ячейка игнорируется); таким образом, идентифицируется строка матрицы Адамара, к которой преобразован циклический сдвиг исходной МП;

4) обратное двоичное представление  $i$ , т.е.  $h_{m-1,i}, h_{m-2,i}, \dots, h_{0,i}$  рассматривается как элемент мультипликативной группы поля Галуа, построенного на основе сопровождающей матрицы  $\mathbf{H}_1$  используемого полинома при первообразном элементе  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2} = [1\ 0 \dots 0\ 0]^T$ ;

5) определяется номер строки, в которой находится полученная функция Уолша в  $\mathbf{W}_{m(1,-1)}$ , упорядоченной по значениям элементов мультипликативной группы поля Галуа, построенной на основе  $\mathbf{H}_1$  (далее – группы 1), при решении уравнения  $\mathbf{H}_1^i \alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [h_{m-1,j}, h_{m-2,j}, \dots, h_{0,j}]^m$  относительно  $i$ ;

6) искомый начальный блок МП вычисляется по формуле  $\mathbf{b} = \mathbf{H}_2^i \alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ .

На практике решение матричного уравнения п. 5 и вычисления п. 6 можно реализовать с помощью генераторов мультипликативных групп поля Галуа, формируемых на основе сопровождающих матриц исходного полинома  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  (далее – группы 1 и 2). Для первого из них  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1\ 0 \dots 0\ 0]^T$ , а для второго первообразный

элемент совпадает с  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ , с которого началась перестановка значений  $\mathbf{X}_N$ . Когда числа на выходе этих генераторов совпадут, на выходе генератора группы 2 будет искомым начальный блок МП.

Другой вариант этого алгоритма предполагает перестановку содержимого ячеек памяти запоминающего устройства после выполнения БПА в соответствии с последовательностью элементов группы 1. То есть после выполнения п. 2 надо запустить генератор этой группы с первообразным элементом  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1\ 0 \dots 0\ 0]^T$  и переставить содержимое 1-й ячейки по адресу  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1}$ , 2-й – по адресу  $\alpha^1_{\mathbf{H}_1}$  и т.д. Затем необходимо определить номер ячейки с максимальным содержимым. Этот номер будет соответствовать искомому начальному блоку МП, содержащейся в значения дискретного сигнала  $\mathbf{X}_N$ . Найденный начальный блок надо записать в генератор группы 2, с выхода которого будет формироваться опорная МП.

Таким образом, ключевыми элементами устройства синхронизации МП на основе БПА являются генераторы мультипликативных групп поля Галуа. Нетрудно показать, что генераторы групп 1 и 2 представляют собой варианты устройства формирования МП [1]. Действительно, учитывая структуры матриц  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ , можно получить рекуррентные соотношения для элементов соответствующих мультипликативных групп:

для элементов группы 1 –

$$\begin{cases} x_{0,i} = a_0 x_{m-1,i-1}, (a_0 = 1), \\ x_{1,i} = x_{0,i-1} \oplus a_1 x_{m-1,i-1}, \\ \dots \\ x_{m-1,i} = x_{m-2,i-1} \oplus a_{m-1} x_{m-1,i-1}; \end{cases} \quad (21)$$

для элементов группы 2 –

$$\begin{cases} x_{0,i} = x_{1,i-1}, \\ x_{1,i} = x_{2,i-1}, \\ \dots \\ x_{m-1,i} = a_0 x_{0,i-1} \oplus a_1 x_{1,i-1} \oplus \dots \oplus a_{m-1} x_{m-1,i-1}. \end{cases} \quad (22)$$

Следуя традиции рассматривать преобразования в полях Галуа, а также формователи МП в виде сдвиговых регистров на  $D$ -триггерах [1, 21], представим функциональные схемы генераторов мультипликативных групп 1 и 2 так, как

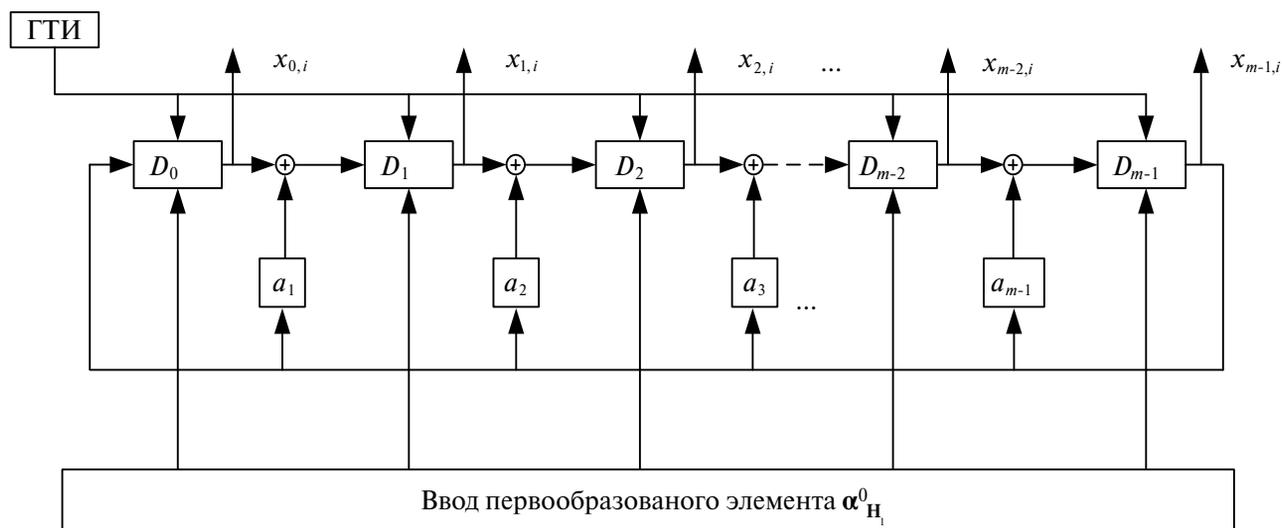
это показано на рис. 1а и 1б. Как видно, значения элементов групп считываются параллельно с выходов всех триггеров (ячеек памяти) сдвиговых регистров, а с каждого триггера последовательно – МП со сдвигами, соответствующими структуре матрицы  $\mathbf{H}_1$  или  $\mathbf{H}_2$ .

В момент, в который в ячейках памяти генератора группы 2 окажется искомым начальный блок входной МП, последовательность  $x_{0,i}, x_{0,i+1}, x_{0,i+2} \dots$  с выхода его триггера  $D_0$  будет формироваться синхронно с ней, если этот генератор, как и генератор группы 1, работает с тактовой частотой входной МП. Кроме того, необходимо, чтобы длительность времени всех преобразований и операций, описанных выше, была равно нулю, что невозможно. В действительности работа цифрового устройства синхронизации, разработанного с использованием современных микропроцессорных технологий, может осуществляться с максимально достижимой для него скоростью и своей тактовой частотой, и, подчеркнем еще раз, представление в этой работе генераторов мультипликативных групп в виде сдвиговых регистров на  $D$ -триггерах – лишь дань традиции.

Таким образом, необходимо, во-первых, фиксировать суммарную длительность времени всех выполненных операций, выражая ее в единицах длительности элементарного импульса входной МП, во-вторых, сдвинуть формируемую опорную МП с выхода триггера  $D_0$  генератора группы 2 на соответствующее число элементарных символов; в-третьих, понизить тактовую частоту формируемой опорной МП до частоты входной МП. Таким образом, генератор группы 2 удобно использовать в качестве формователя опорной МП, синхронной с входной МП, поскольку значения любых  $m$  элементарных символов формируемой МП, следующих с триггера  $D_0$ , совпадают с символами мультипликативной группы 2, оказавшихся записанными в ячейках памяти его сдвигового регистра в момент появления первого символа из этих  $m$  символов.

Второй, более простой алгоритм синхронизации МП, соответствует матрице  $\mathbf{W}_{m(1,-1)}^T$ : значения  $\mathbf{X}_N$  надо переставить по возрастанию элементов мультипликативной группы поля Галуа, построенной на основе сопровождающей матрицы полинома вида  $\mathbf{H}_1$ , но только лишь при первообразном элементе  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1\ 0 \dots 0\ 0]^T$ . После выполнения БПА номер ячейки памяти запоминающего устройства, в которой оказа-

(а)



(б)

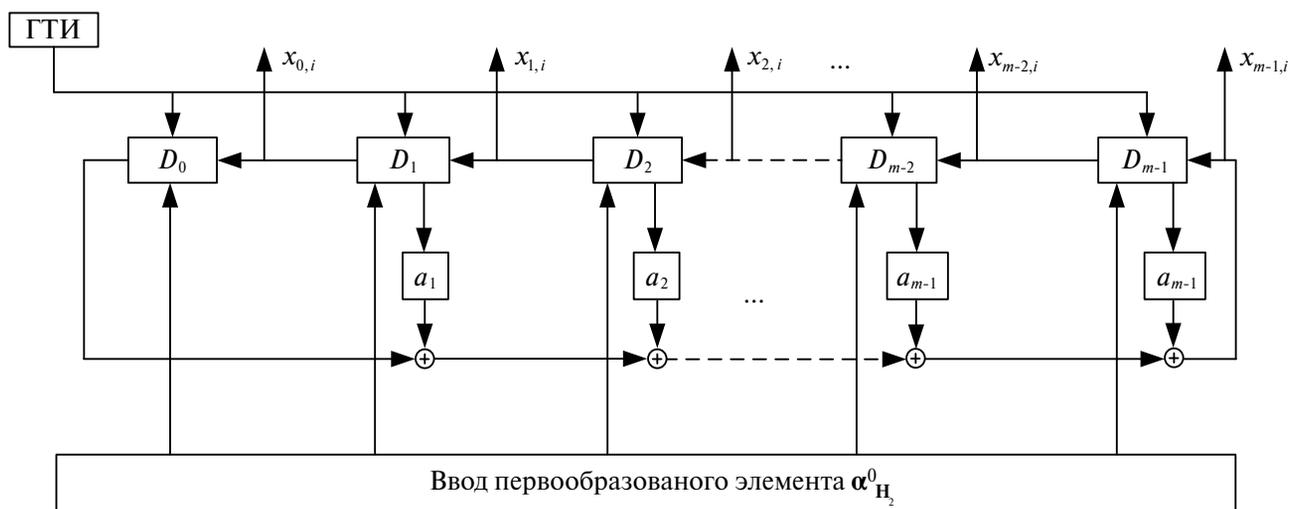


Рис. 1. Генераторы мультипликативных групп 1 (а) и 2 (б) поля Галуа по модулю неприводимого примитивного полинома с коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}$ ; ГТИ – генератор тактовых импульсов.

лось максимальное значение, представленное в двоичной системе счисления, и будет начальным блоком МП, содержащейся в  $X_N$ . Этот начальный блок следует записать в ячейки памяти генератора группы 2, в результате чего опорная МП будет формироваться именно с этого начального блока. Таким образом, в данном случае необходимо использовать как генератор группы 1, так и генератор группы 2.

Подчеркнем, что способ синхронизации МП, основанный на перестановке символов вход-

ной МП в соответствии с мультипликативной группой, формируемой на основе матрицы  $H_1$  (более простой алгоритм), предполагает единственный вариант перестановки такого рода, и мультипликативная группа, на основе которой она производится, всегда должна начинаться с  $\alpha^0_{H_1} = [1 0 \dots 0 0]^T$ . Перестановка в соответствии с той же мультипликативной группой, но с другим первообразным элементом не позволит преобразовать МП к виду функции Уолша. Кроме того, данный подход предполагает, что соответ-

стве между циклическим сдвигом МП и функцией Уолша в матрице Адамара является единственно возможным.

Напротив, перестановка символов МП в соответствии с мультипликативной группой, формируемой на основе матрицы  $\mathbf{H}_2$  (более сложный алгоритм), может производиться с любого первообразного элемента  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ , в результате чего любой циклический сдвиг входной МП можно привести к любой функции Уолша, но при выбранном  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$  — только к одной такой функции. Кроме того, если заранее известен диапазон циклических сдвигов, в пределах которого может находиться сдвиг входной МП, либо несколько ее циклических сдвигов при многолучевом распространении сигнала, то перестановка символов МП в соответствии с мультипликативной группой 2 преобразует их в последовательности Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля, следующие непосредственно друг за другом в матрице из этих функций, упорядоченной в соответствии с мультипликативной группой 1. Тогда, учитывая, что в матрице Адамара сохраняются только эти функции, можно оптимизировать алгоритм БПА, снизив его вычислительную сложность. Другие циклические сдвиги входной МП могут быть приведены к тем же функциям Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля при выборе  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$  группы 2, в соответствии с которой производится перестановка символов.

Таким образом, если известен диапазон возможных циклических сдвигов принимаемой МП, то можно выбрать соответствующее значение  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$  и преобразовать ее к одной из нескольких функций Уолша, следующих друг за другом в матрице Адамара. Любой другой циклический сдвиг МП с той же шириной области неопределенности по времени может быть приведен к какой-то функции Уолша из того же их набора при выборе  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ . Таким образом, для обнаружения любого циклического сдвига МП можно использовать БПА в одном и том же усеченном базисе функций Уолша—Адамара. Если этот усеченный базис содержит относительно небольшое число функций Уолша, то вычисления в соответствии с п. 5 и 6 могут не потребоваться.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Алгоритм перестановки значений дискретного сигнала при его преобразовании к строке матрицы функций Уолша, а также способ идентификации циклического сдвига соответствующей

ПСП после выполнения БПА, зависят от выбора структуры матрицы-циркулянта этой ПСП.

2. Матрица-циркулянт МП, строки которой начинаются с блоков двоичных символов, соответствующих десятичным номерам этих строк при их двоично-десятичном кодировании, может быть приведена к матрице Адамара без нулевых строки и столбца при их нумерации от нуля путем перестановки столбцов матрицы в соответствии со значениями единственной мультипликативной группы расширенного поля Галуа. Способ формирования этой группы соответствует рис. 1а и виду  $\mathbf{H}_1$  сопровождающей матрицы исходного неприводимого примитивного полинома, и только при значении первообразного элемента этой группы  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1 0 \dots 0 0]^T$ .

3. Любая из  $N$  упорядоченных матриц-циркулянтов МП может быть приведена к матрице из функций Уолша, упорядоченной по степеням мультипликативной группы расширенного поля Галуа, где  $N$  — длина МП. В этом случае перестановка столбцов матрицы-циркулянта должна производиться по возрастанию значений элементов мультипликативной группы поля Галуа, соответствующей виду матрицы  $\mathbf{H}_2$ . При этом любой циклический сдвиг МП может быть приведен к любой функции Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля в зависимости от выбора первообразного элемента  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$  данной группы, который и определяет структуру матрицы-циркулянта. Но при данном значении  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$  соответствие между преобразуемым циклическим сдвигом МП и функцией Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля является взаимно однозначным. Таким образом, все возможные матрицы-циркулянты МП, каждая последующая строка которой сдвинута циклически относительно предыдущей строки на один символ, приводятся к одной и той же матрице функций Уолша без нулевых символов при их нумерации от нуля. Получаемая матрица функций Уолша упорядочена по степеням элементов мультипликативной группы поля Галуа с первообразным элементом  $\alpha^0_{\mathbf{H}_1} = [1 0 \dots 0 0]^m$  и соответствует сопровождающей матрице полинома вида  $\mathbf{H}_1$ . Отметим также важное свойство данного преобразования матриц: если при выбранном  $\alpha^0_{\mathbf{H}_2}$ , определяющем структуру матрицы-циркулянта со строками, упорядоченными по циклическим сдвигам МП, некоторая ее  $i$ -я строка приводится к  $u$ -й строке матрицы функций Уолша без нулевого символа при их

нумерации от нуля, то при выборе в качестве первообразного элемента  $\alpha^{0+l}$   $H_2$  эта же строка матрицы-циркулянта приводится к  $(u+l)$ -й строке матрицы функций Уолша.

4. Матрица Адамара может быть получена из матрицы функций Уолша, упорядоченной по степеням максимальной мультипликативной группы поля Галуа, путем перестановки ее строк по возрастанию значений элементов этой группы и добавлением нулевой строки и нулевого столбца при их нумерации от нуля.

5. Любой из способов преобразования МП в соответствии с правилами, описанными в п. 2 и 3, позволяет привести ее к функции Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля, а последующее добавление к ней этого символа и преобразование полученного вектора с помощью БПА – быстро вычислить периодическую автокорреляционную функцию МП с поправкой на разницу в длинах МП и последовательностей Уолша; выигрыш по вычислительной сложности будет в  $N/m$  раз по сравнению с традиционным алгоритмом вычисления дискретной свертки МП.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Инатов В.П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. М: Мир связи, 2007.
2. *Beard C., Stallings W.* Wireless Communication Networks and Systems. L.: Pearson, 2016.
3. *Middlestead R.W.* Digital Communications with Emphasis on Data Modems. Theory, Analysis, Design, Simulation, Testing and Applications. Lesly (USA): Wiley, 2017.
4. *Лосев В.В., Бродская Е.Б., Коржик В.И.* Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов. М.: Радио и связь, 1988.
5. *Maral G., Bousquet M., Sun Z.* Satellite Communications Systems. United Kingdom: Wiley, 2020.
6. *Волков Р.В., Саяпин В.Н., Севидов В.В.* // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Т. 10. № 9. С. 14.
7. *Кулакова В.И.* // Системы управления, связи и безопасности. 2020. № 1. С. 33.
8. *Музыченко Н.Ю.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 44.
9. *Gold R.* // IEEE Trans. 1967. V. IT-13. № 4. P. 619. <https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054048>
10. *Зубарев В.Ю., Пономаренко Б.В., Шанин Е.Г., Вострецов А.Г.* // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2020. Т. 23. № 2. С. 26.
11. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
12. *Смирнов Н.И., Горгадзе С.Ф.* // Зарубеж. радиоэлектроника. 1997. № 5. С. 41.
13. *Горгадзе С.Ф., Ву Ши Д.* // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2023. Т. 10. № 8. С. 4.
14. *Лосев В.В., Дворников В.Д.* // РЭ. 1983. Т. 28. № 8. С. 1540.
15. *Горгадзе С.Ф.* Синхронизация в инфокоммуникационных системах. М.: Медиа Паблишер, 2022.
16. *Шахтарин Б.И., Черныш А.В.* // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2009. № 3. С. 114.
17. *Горгадзе С.Ф.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 3. С. 302.
18. *Горгадзе С.Ф.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 4. С. 428.
19. *Ву Ши.Д., Горгадзе С.Ф.* // DPSA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2023. Т. 13. № 1. С. 31.
20. *Ву Ши.Д., Горгадзе С.Ф.* // Телекоммуникации и информ. технологии. 2022. Т. 9. № 2. С. 1207.
21. *Смолянинов В.М.* // РЭ. 1985. Т. 30. № 12. С. 2391.
22. *Be'ery Y., Snyders J.* // IEEE Trans. 1986. V. IT-32. № 3. P. 355.
23. *Be'ery Y., Snyders J.* // J. Algebraic Discrete Methods. 1987. V. 8. № 4. P. 778.
24. *Смолянинов В.М., Назаров Л.Е.* // РЭ. 1987. Т. 32. № 11. С. 2341.
25. *Смолянинов В.М., Назаров Л.Е.* // РЭ. 1989. Т. 34. № 12. С. 2651.
26. *Смолянинов В.М., Назаров Л.Е., Прокофьев И.В.* // РЭ. 1989. Т. 34. № 8. С. 1686.
27. *Li Ping W.K., Leung K.Y.* // IEEE Trans. 2003. V. IT-49. № 12. P. 3213.
28. *Канатова Л.В., Литвинов В.Л., Финк Л.М.* // Проблемы передачи информации. 1986. Т. 22. Вып. 2. С. 98.
29. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
30. *Свердлик М.Б.* Оптимальные дискретные сигналы. М.: Сов. радио, 1975.
31. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.
32. *Ву Ши.Д., Горгадзе С.Ф.* // Технологии информационного общества: Сб. трудов XVI Междунар. отраслевой науч.-технич. конф. М., 2022. С. 88.

## SYNCHRONIZATION OF M-SEQUENCES BASED ON FAST HADAMARD TRANSFORM

S. F. Gorgadze\*, Dao Vu Shi, A. V. Ermakova

*Moscow Technical University of Communication and Information, Moscow 111024 Russia*

*\*E-mail: s.f.gorgadze@mtuci.ru*

Received October 19, 2022; revised July 18, 2023; accepted July 27, 2023

Options have been developed for constructing circulant matrices of any M-sequence (MS) based on automorphic multiplicative groups of the extended Galois field, constructed using an irreducible primitive polynomial, on the basis of which the original MS is formed. The result of this approach is the identification of new methods for transforming MS circulant matrices to a matrix of Walsh functions, ordered by the powers of the antiderivative element of the field. It is shown for the first time that, depending on the initial conditions of the transformation, a set of any number of any cyclic shifts of the MP, shifted relative to each other by one symbol, can be transformed to any rows of the ordered matrix of Walsh functions, following one another. This circumstance makes it possible to simplify the MS synchronization algorithm for a known range of its cyclic shifts, especially in the case of large periods of its repetition, and also to reduce the computational complexity of the processing algorithm when working in a truncated basis of Walsh–Hadamard functions.

*Keywords:* M-sequences, circulant matrix, Walsh function matrix, noise-like complex signals, multiplicative Galois field groups, fast Hadamard transform.

---

---

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

---

---

УДК 621.396.621.59; 519.725

**СИНХРОНИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГОЛДА  
НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В УСЕЧЕННОМ БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ УОЛША–АДАМАРА**

© 2024 г. С. Ф. Горгадзе\*, Д. Ву Ши, А. В. Ермакова

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),  
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024 Российская Федерация

\*E-mail: s.f.gorgadze@mtuci.ru

Поступила в редакцию 19.10.2022 г.

После доработки 18.07.2023 г.

Принята к публикации 27.07.2023 г.

На основе анализа структур изоморфных мультипликативных групп расширенных полей Галуа установлено, что любой циклический сдвиг псевдослучайной последовательности Голда может быть преобразован к функции, принадлежащей к полному набору аналогов функций Радемахера соответствующей размерности. Это позволило разработать новый алгоритм быстрой синхронизации последовательностей Голда на основе вычисления их дискретной свертки с использованием быстрого спектрального преобразования в усеченном базисе функций Уолша–Адамара. Выигрыш разработанного алгоритма по числу арифметических операций по сравнению с традиционным способом вычисления дискретной свертки увеличивается с ростом длины последовательности  $N$  и при  $N = 511 \cdot 1023$  составляет приблизительно 3.4 раза.

*Ключевые слова:* изоморфные мультипликативные группы расширенных полей Галуа, псевдослучайная последовательность Голда, функции Радемахера, усеченный базис функций Уолша–Адамара

**DOI:** 10.31857/S0033849424020045, **EDN:** KMVICC

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема быстрой синхронизации шумоподобных сложных сигналов (СлС), формируемых на основе псевдослучайных последовательностей (ПСП) Голда [1–6], используемых в настоящее время во многих радиосистемах, включая спутниковые радионавигационные [1], не решена. В последних работах, посвященных данной проблеме [5, 6], рассматриваются ПСП Голда, формируемые при помощи двоичного подкласса последовательностей Гордона–Милса–Велча (ГМВ-последовательности) [7], которые не существуют при  $N = 2^m - 1$  где  $m = 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ . Учитывая, что отсутствуют ПСП Голда для  $m = 8, 12, 16$ , можно сделать вывод, что метод синхронизации ПСП Голда, предложенный в этих работах, может быть применим к ПСП лишь четырех длин, используемым в практических приложениях в настоящее время – 511, 1023, 16283, 32567. Основной проблемой данного подхода, используемого также и в более ранних работах [7, 8], но лишь применительно

к ГМВ-последовательностям, является увеличение боковых пиков периодических автокорреляционных функций (ПАКФ) [9] коротких ПСП, к которым преобразуется исходная более длинная ПСП, по отношению к неизменному по величине центральному пику ПАКФ.

В работах [7, 8], посвященных разработке методов поиска (синхронизации) дискретных сигналов на основе быстрых методов декодирования кодов, рассматриваются не отдельные ПСП Голда, а коды Голда, образованные на основе двух предпочтительных М-последовательностей (МП), когда слова кода представляют собой разные по структуре ПСП [2, 3]. Очевидно, что решенная задача не имеет прямого отношения к проблеме синхронизации СлС по времени, поскольку необходимо рассматривать блоковый код, образованный циклическими сдвигами одной и той же ПСП Голда. Но, очевидно, в этих работах не удалось установить взаимосвязь между структурой матрицы-циркулянта ПСП Голда и изоморфными мультипликативными группа-

ми полей Галуа [10, 11], на основе которых построены предпочтительные МП, образующие его. Это объясняется тем, что в работах [7, 8], а также [12], указывается лишь на одну структуру исходных матриц-циркулянтов МП, не позволяющую выявить такую взаимосвязь. Строки таких матриц начинаются с блоков двоичных символов, соответствующих десятичным номерам этих строк при их двоично-десятичном кодировании. Указывается лишь на очевидную возможность преобразования такого рода матриц-циркулянтов МП к матрице Уолша–Адамара при перестановке ее столбцов по возрастанию значений элементов мультипликативной группы поля Галуа, построенного на основе исходного неприводимого примитивного полинома. Но, как показано в [13], в одном и том же поле Галуа существуют по меньшей мере четыре разные по структуре мультипликативные группы и показано, как на основе любой такой группы построить матрицу-циркулянт МП, соответствующую ей. Таким образом, тип мультипликативной группы, соответствующий матрице-циркулянту МП, рассмотренной в [7, 8, 12], не выявлен. И лишь в [13] показано, что преобразование матрицы-циркулянта МП, описанной выше,  $H_1$  (см. [13]), и только для первообразного элемента группы  $\alpha^0_{H_1} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$  ( $[\cdot]^T$  – обозначение операции транспонирования матрицы). Также показано, что в случае перестановки отсчетов входного СлС начиная с любого другого первообразного элемента этой группы или использования любой другой мультипликативной группы того же поля, указанная матрица не приводится к матрице Уолша–Адамара, т.е. при такой перестановке никакой циклический МП не приводится ни к какой функции Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля. Кроме того, очевидно, что, суммируя матрицы-циркулянты предпочтительных МП структуры, описанной выше, невозможно получить матрицу-циркулянт ПСП Голда, а лишь разные по структуре ПСП этого типа.

В [13] впервые рассматриваются упорядоченные матрицы-циркулянты МП любой размерности  $N$ , в которых каждая последующая строка матрицы сдвинута циклически на один символ, по сравнению с предыдущей строкой. В этом случае перестановка столбцов матрицы-циркулянта производится по возрастанию значений элементов мультипликативной группы поля Галуа, соответствующей виду сопровождающей матрицы полинома  $H_2$  (см. [13]). При этом лю-

бой циклический сдвиг МП может быть приведен к любой функции Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля в зависимости от выбора первообразного элемента  $\alpha^0_{H_2}$  данной группы, который и определяет структуру матрицы-циркулянта и циклический сдвиг ее первой строки. Но при данном значении  $\alpha^0_{H_2}$  соответствие между преобразуемым циклическим сдвигом МП и функцией Уолша без нулевого символа при их нумерации от нуля является взаимно однозначным. Таким образом, все возможные матрицы-циркулянты МП, каждая последующая строка которой сдвинута циклически относительно предыдущей строки на один символ, приводятся к одной и той же матрице функций Уолша без нулевых символов при их нумерации от нуля. Строки этой матрицы упорядочены по степеням элементов мультипликативной группы поля Галуа с первообразным элементом  $\alpha^0_{H_1} = [1\ 0\ \dots\ 0\ 0]^T$  при сопровождающей матрице исходного полинома вида  $H_1$  [см. [13)].

Цель данной работы<sup>1</sup> – исследование способа построения матриц-циркулянтов ПСП Голда и взаимосвязи их структуры с изоморфными мультипликативными группами полей Галуа, а также способов приведения матриц-циркулянтов этих

ПСП к функциям Уолша с целью разработки быстрого способа синхронизации ПСП Голда при обработке шумоподобных СлС.

## 1. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ-ЦИРКУЛЯНТА ПСП ГОЛДА

Матрицы-циркулянты последовательностей Голда получим путем суммирования по модулю 2 ( $\text{mod } 2$ ) матриц  $\mathfrak{J}_{m,2,u}$  (см. [13]) двух так называемых предпочтительных МП [3, 4, 9]. Пусть на основе сопровождающей матрицы  $H_2$  первого предпочтительного полинома и первообразного элемента  $\alpha^0_{1H_2}$  построена матрица-циркулянт МП  $\alpha^0_{1H_2} \mathfrak{J}_{m,2,u}$ , а на основе матрицы  $H_2$ , но второго предпочтительного полинома и первообразного элемента  $\alpha^{0+z}_{2H_2}$  – матрица  $\alpha^{0+z}_{2H_2} \mathfrak{J}_{m,2,u}$ . Тогда матрицы-циркулянты всего набора последовательностей Голда, соответствующих этим двум предпочтительным МП, кроме них самих, можно описать как:

$$\mathfrak{J}_{m,2,u,g}(z) = \alpha^0_{1H_2} \mathfrak{J}_{m,2,u} \oplus \alpha^{0+z}_{2H_2} \mathfrak{J}_{m,2,u}, \quad (1)$$

$$z = 0, \dots, N-1,$$

<sup>1</sup> Данная статья является продолжением [13], поэтому в дальнейшем используются обозначения, введенные в ней.

где  $\oplus$  – обозначение операции суммирования по модулю 2.

В качестве примера матрица-циркулянт кода Голда, построенного на основе полиномов  $f_5(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$  и  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$  при  $\alpha^0_{1H_2} = \alpha^0_{2H_2} = [10000]^T$  и  $z = 0$  приведена в табл. 1. Как видно, она является упорядоченной, т.е. каждая ее последующая строка циклически сдвинута на один символ, по сравнению с предыдущей (см. [16]).

На рис. 1 представлена периодическая взаимно корреляционная функция (ПВКФ) [2]  $\chi_{ПВКФ}(i)$  этой ПСП Голда и МП, сформированной на основе второго из двух указанных выше полиномов. Значения ПВКФ при отрицательных  $i$  получены при зеркальном отображении графика относительно оси ординат. Таким образом, матрица, приведенная в табл.1, соответствует последовательности Голда, поскольку получена трехуровневая ПВКФ.

**Таблица 1.** Матрица-циркулянт кода Голда, соответствующая предпочтительным полиномам  $f_5(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$  и  $f_5(x) = x^5 + x^3 + 1$  при  $\alpha^0_{1H_2} = \alpha^0_{2H_2} = [10000]^T$  и  $z = 0$

Суммы по mod 2 циклических сдвигов МП	k																														i		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		30	
	[ $\alpha^k_{1H_2} + \alpha_{2H_2}$ ] <sub>10</sub>																																
$x_{1,0,k} \oplus x_{2,0,k}$	0	0	1	2	4	8	16	1	2	5	11	23	15	30	29	27	23	15	30	28	24	16	0	1	2	4	9	18	4	8	16	<b>0</b>	
$x_{1,1,k} \oplus x_{2,1,k}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	<b>1</b>	
$x_{1,2,k} \oplus x_{2,2,k}$	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	<b>2</b>	
$x_{1,3,k} \oplus x_{2,3,k}$	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	<b>3</b>	
$x_{1,4,k} \oplus x_{2,4,k}$	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	<b>4</b>	
$x_{1,5,k} \oplus x_{2,5,k}$	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	<b>5</b>	
$x_{1,6,k} \oplus x_{2,6,k}$	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	<b>6</b>	
$x_{1,7,k} \oplus x_{2,7,k}$	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	<b>7</b>	
$x_{1,8,k} \oplus x_{2,8,k}$	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	<b>8</b>
$x_{1,9,k} \oplus x_{2,9,k}$	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	<b>9</b>
$x_{1,10,k} \oplus x_{2,10,k}$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	<b>10</b>
$x_{1,11,k} \oplus x_{2,11,k}$	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	<b>11</b>
$x_{1,12,k} \oplus x_{2,12,k}$	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	<b>12</b>
$x_{1,13,k} \oplus x_{2,13,k}$	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	<b>13</b>
$x_{1,14,k} \oplus x_{2,14,k}$	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	<b>14</b>
$x_{1,15,k} \oplus x_{2,15,k}$	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	<b>15</b>	
$x_{1,16,k} \oplus x_{2,16,k}$	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	<b>16</b>	
$x_{1,17,k} \oplus x_{2,17,k}$	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	<b>17</b>	
$x_{1,18,k} \oplus x_{2,18,k}$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	<b>18</b>	
$x_{1,19,k} \oplus x_{2,19,k}$	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	<b>19</b>	
$x_{1,20,k} \oplus x_{2,20,k}$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	<b>20</b>	
$x_{1,21,k} \oplus x_{2,21,k}$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	<b>21</b>	
$x_{1,22,k} \oplus x_{2,22,k}$	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	<b>22</b>	
$x_{1,23,k} \oplus x_{2,23,k}$	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	<b>23</b>	
$x_{1,24,k} \oplus x_{2,24,k}$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	<b>24</b>	
$x_{1,25,k} \oplus x_{2,25,k}$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	<b>25</b>	
$x_{1,26,k} \oplus x_{2,26,k}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	<b>26</b>	
$x_{1,27,k} \oplus x_{2,27,k}$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	<b>27</b>	
$x_{1,28,k} \oplus x_{2,28,k}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	<b>28</b>	
$x_{1,29,k} \oplus x_{2,29,k}$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	<b>29</b>	
$x_{1,30,k} \oplus x_{2,30,k}$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	<b>30</b>	
$x_{1,31,k} \oplus x_{2,31,k}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	<b>0</b>	
$x_{1,32,k} \oplus x_{2,32,k}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	<b>1</b>		

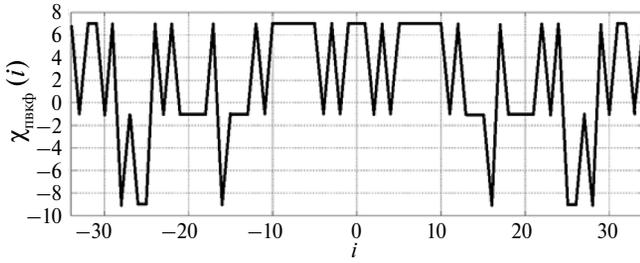


Рис. 1. Периодическая взаимно корреляционная функция кодов Голда.

Упорядоченная матрица-циркулянт кода Голда при выбранных значениях  $\alpha_{1H_2}^0$ ,  $\alpha_{2H_2}^0$  и  $z$  имеет следующий вид:

$$\mathfrak{J}_{m,2,u,g}(z) = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{m,2}^1 \oplus \mathfrak{J}_{m,2}^2 \\ \mathbf{H}_{21}^m \mathfrak{J}_{m,2}^1 \oplus \mathbf{H}_{22}^m \mathfrak{J}_{m,2}^2 \\ \mathbf{H}_{21}^{2m} \mathfrak{J}_{m,2}^1 \oplus \mathbf{H}_{22}^{2m} \mathfrak{J}_{m,2}^2 \\ \dots \\ \mathbf{H}_{21}^{C(N)m} \mathfrak{J}_{m,2}^1 \oplus \mathbf{H}_{22}^{C(N)m} \mathfrak{J}_{m,2}^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathfrak{J}_{m,2}^1$  — матрица из  $m$  циклических сдвигов первой предпочтительной МП, построенная на основе сопровождающей матрицы  $\mathbf{H}_{21}$  ее неприводимого примитивного полинома,  $\mathfrak{J}_{m,2}^2$  — соответствующая матрица для второй предпочтительной МП, построенная на основе сопровождающей матрицы  $\mathbf{H}_{22}$  ее неприводимого примитивного полинома. В индексах обозначений сопровождающих матриц  $\mathbf{H}_{21}$  и  $\mathbf{H}_{22}$  первый символ 2 указывает на то, что рассматриваются матрицы вида  $\mathbf{H}_2$ , а второй символ 1 или 2 — на отношение матрицы к первому или второму предпочтительному полиному.

Очевидно, что столбцы первых  $m$  строк матрицы (2) представляют собой суммы степеней первообразных элементов двух мультипликативных групп, т.е.

$$\mathfrak{J}_{m,2}^1 \oplus \mathfrak{J}_{m,2}^2 = \alpha_{1H_2}^k + \alpha_{2H_2}^k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (3)$$

и значения  $[\alpha_{1H_2}^k + \alpha_{2H_2}^k]_{10}$  могут совпадать для разных  $k$ . Кроме того, в (2) возможно появление элементов, состоящих лишь из нулей, т.е. сумма изоморфных максимальных мультипликативных групп двух разных полей Галуа не образует мультипликативную группу.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ-ЦИРКУЛЯНТА ПСП ГОЛДА К АНАЛОГАМ ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА

Преобразовав символы  $\alpha_{1H_2}^k + \alpha_{2H_2}^k$  по правилу  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow -1$  и переставив столбцы (2) по возрастанию  $[\alpha_{1H_2}^k + \alpha_{2H_2}^k]_{10}$ , одновременно суммируя одинаковые их значения и заменяя отсутствующие элементы нулями, получим функции, у которых имеются символы, отличные от 1 или  $-1$ , а также символы с нулевыми значениями. Так, переставляя в соответствии с данным правилом столбцы матрицы, приведенной в табл. 1, получим матрицу, записанную в строках табл. 2.

Как видно, половина символов преобразованной матрицы, записанных в ее второй строке, положительные или нули, половина отрицательные или нули, в третьей строке первые восемь символов положительные или нули, потом следуют восемь отрицательных или нулевых символов, потом опять восемь положительных, потом восемь отрицательных и т.д. То есть первые  $m$  строк матрицы-циркулянта последовательности Голда, преобразованные по описанному правилу, являются аналогами функций Радемахера [13] (обозначим их как  $r'_{ia}$ , где  $i = 0, \dots, (m-1)$  — номер функции), но остальные строки исходной матрицы-циркулянта не приводятся к аналогам функций Уолша без нулевого символа при их нумерации с нуля. Обозначим их как  $r'_i$ , где  $i = m, \dots, ((C(N)+1)m-1)$ ,  $C(N) = \binom{A(N)}{m} - 1$ ,  $A(N)$  —

число, максимально близкое к  $N$ , делящееся нацело на  $m$  и удовлетворяющее неравенству  $A(N) > N$  [16]. Но функции  $r'_i$  могут быть приведены к аналогам функций Радемахера при выборе соответствующих первообразных элементов мультипликативных групп. То есть выбрав  $\alpha_{1H_2}^0$  и  $\alpha_{2H_2}^0$  и переставив столбцы матрицы-циркулянта кода Голда по возрастанию  $[\alpha_{1H_2}^k + \alpha_{2H_2}^k]_{10}$ , преобразуем первые ее  $m$  строк к матрице аналогов функций Радемахера. Но если столбцы этой матрицы переставлять начиная с элемента  $\alpha_{1H_2}^m + \alpha_{2H_2}^m$ , то к аналогам функций Радемахера преобразуются вторые  $m$  строк матрицы-циркулянта кода Голда. При перестановке начиная с  $\alpha_{1H_2}^{2m} + \alpha_{2H_2}^{2m}$  преобразуем следующие  $m$  строк и т.д. Данный подход к приведению циклических сдвигов кода Голда к аналогам функций Радемахера имеет смысл только в том случае, если существует ускоренный алгоритм умножения матрицы функций Радемахера на вектор, вычислительная сложность которого соответствует числу элементарных математических операций, значимо меньшему  $mN$ ,

Таблица 2. Результат преобразования матрицы-циркулянта кода Голда по возрастанию значений суммы мультипликативных групп

Преобразованные циклические сдвиги ПСП Голда	<i>k</i>																														<i>i</i>	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		30
$r_{0a}$	3	3	3	0	3	1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	2	-3	0	-1	0	0	0	0	-2	-1	0	0	-1	-1	-1	-2	<b>0</b>
$r_{1a}$	3	3	3	0	3	1	0	0	-2	-1	0	-1	0	0	0	-2	3	0	1	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	-1	-1	-2	<b>1</b>
$r_{2a}$	3	3	3	0	-3	-1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	-2	3	0	1	0	0	0	0	-2	1	0	0	1	-1	-1	-2	<b>2</b>
$r_{3a}$	3	3	-3	0	3	1	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	-2	3	0	-1	0	0	0	0	-2	1	0	0	-1	1	1	-2	<b>3</b>
$r_{4a}$	3	-3	3	0	3	-1	0	0	2	-1	0	-1	0	0	0	-2	3	0	1	0	0	0	0	-2	1	0	0	-1	1	-1	2	<b>4</b>
$r'_5$	-1	3	1	0	1	-1	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	-2	1	0	0	-1	1	-1	0	<b>5</b>
$r'_6$	1	1	-1	0	3	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	-1	1	-1	0	<b>6</b>
$r'_7$	3	-1	1	0	1	-1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	-1	0	<b>7</b>
$r'_8$	1	1	-1	0	3	1	0	0	-2	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	1	0	<b>8</b>
$r'_9$	3	-1	3	0	-1	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	<b>9</b>
$r'_{10}$	1	3	-1	0	1	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	2	<b>10</b>
$r'_{11}$	1	-1	-1	0	1	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	2	3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	1	2	<b>11</b>
$r'_{12}$	1	-1	-1	0	-1	-1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	2	-1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	-1	1	1	0	<b>12</b>
$r'_{13}$	-1	-1	-3	0	3	1	0	0	-2	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	1	-1	2	<b>13</b>
$r'_{14}$	-1	-3	3	0	-1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	<b>14</b>
$r'_{15}$	-3	3	1	0	1	1	0	0	-2	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	2	1	0	0	-1	1	1	2	<b>15</b>
$r'_{16}$	1	1	1	0	-1	1	0	0	-2	-1	0	1	0	0	0	2	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	-1	2	<b>16</b>
$r'_{17}$	1	1	1	0	-3	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	0	2	-1	0	0	1	1	1	0	<b>17</b>
$r'_{18}$	-1	1	-1	0	1	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	3	0	-1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	-1	1	2	<b>18</b>
$r'_{19}$	-1	-1	1	0	-1	1	0	0	2	-1	0	1	0	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	<b>19</b>
$r'_{20}$	-3	1	1	0	1	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	1	1	2	<b>20</b>
$r'_{21}$	1	1	1	0	-1	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	2	-3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	2	<b>21</b>
$r'_{22}$	1	1	-1	0	-1	1	0	0	-2	1	0	1	0	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	1	1	2	<b>22</b>
$r'_{23}$	1	-1	1	0	-1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	0	2	1	0	0	1	-1	-1	2	<b>23</b>
$r'_{24}$	1	1	1	0	-1	1	0	0	2	-1	0	1	0	0	0	2	-1	0	-1	0	0	0	0	2	-1	0	0	1	1	1	-2	<b>24</b>
$r'_{25}$	1	1	1	0	1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-2	1	0	-1	0	0	0	0	2	-1	0	0	1	-1	1	2	<b>25</b>
$r'_{26}$	1	1	1	0	-1	1	0	0	2	-1	0	1	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	-2	-1	0	0	1	-1	1	0	<b>26</b>
$r'_{27}$	-1	1	-1	0	1	1	0	0	2	1	0	-1	0	0	0	0	3	0	1	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	-1	1	0	<b>27</b>
$r'_{28}$	1	-1	1	0	3	-1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	-1	0	<b>28</b>
$r'_{29}$	-1	1	1	0	3	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1	1	-2	<b>29</b>
$r'_{30}$	-1	1	3	0	1	1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	-2	1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1	2	<b>30</b>
$r_{0a}$	3	3	3	0	3	1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	2	-3	0	-1	0	0	0	0	-2	-1	0	0	-1	-1	-1	-2	<b>0</b>
$r_{1a}$	3	3	3	0	3	1	0	0	-2	-1	0	-1	0	0	0	-2	3	0	1	0	0	0	0	2	-1	0	0	-1	-1	-1	-2	<b>1</b>
$r_{2a}$	3	3	3	0	-3	-1	0	0	2	1	0	1	0	0	0	-2	3	0	1	0	0	0	0	-2	1	0	0	1	-1	-1	-2	<b>2</b>

поскольку именно такая сложность соответствует умножению матрицы размером  $m \times N$  на столбец.

### 3. БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ СИНХРОНИЗАЦИИ ПСП ГОЛДА

Функции Радемахера располагаются в строках матрицы Адамара  $A_m$  порядка  $2^m$  с номерами

$y = 2^v, v = 0, 1, 2, 3 \dots 2^{m-1}$  (например, при  $m = 5$  – в строках с номерами 1, 2, 4, 8, 16, при  $m = 9$  – в строках с номерами 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, при  $m = 10$  – в строках с номерами 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и т.д.). Матрица  $A_m$  может быть представлена в виде простого произведения слабо заполненных матриц  $B_1, B_2, \dots, B_m$ .

В наиболее простом варианте такого представления  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \dots = \mathbf{V}_m = \mathbf{V}$ , где

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

т.е.  $\mathbf{A}_m = \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \dots \mathbf{V}_m = \mathbf{V}^m$ . Размерность матрицы  $\mathbf{A}_m$  равняется  $2^m$ , а нумерация ее строк начинается с нуля [14].

Сохраняя в матрице  $\mathbf{A}_m$  только  $m$  строк с номерами  $y$  из общего их числа, равного  $2^m$ , получим усеченную матрицу Адамара, алгоритм факторизации которой описан в [15, 16]. Так, в матрице  $\mathbf{V}_1$  сохраняются только  $m$  строк с теми же номерами  $y = 2^v, v = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^{m-1}$ , которые были сохранены в матрице  $\mathbf{A}_m$ , т.е. при умножении полученной усеченной матрицы  $\mathbf{V}_{1y}$  на результат умножения  $\mathbf{V}_{2y} \dots \mathbf{V}_{my}$  на входной вектор  $\mathbf{X}$  потребуется лишь  $m$  операций суммирования. Матрицу  $\mathbf{V}_{2y}$  получим, учитывая, что  $(N - 2m)$  столбцов матрицы  $\mathbf{V}_{1y}$  состоят только из нулевых элементов. Эти столбцы тоже надо исключить из  $\mathbf{V}_{1y}$ , одновременно исключая строки матрицы  $\mathbf{V}_2$ , номера которых совпадают с номерами столбцов, исключенных в  $\mathbf{V}_{1y}$ , поэтому матрица  $\mathbf{V}_{2y}$  содержит  $2m$  строк, и при умножении ее на  $\mathbf{V}_3 \dots \mathbf{V}_m \mathbf{X}$  потребуется лишь  $2m$  операций суммирования, в последней матрице  $\mathbf{V}_{my}$  всегда сохраняется  $2^m$  строк, т.е.  $\mathbf{V}_{my} = \mathbf{V}$ .

Таким образом, число строк, сохраняемых в матрицах  $\mathbf{V}_{sy}, s = 1, \dots, m$  и совпадающее с числом элементарных операций суммирования, которое надо произвести для перемножения вектора с каждой матрицей, описывается как  $m + 2m + (2 \cdot 2m - 4) + (2 \cdot (2 \cdot 2m - 4) - 8) + (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2m - 4) - 8) - 16) + \dots$

Можно вывести рекуррентную формулу для расчета числа ненулевых строк матриц  $\mathbf{V}_{sy}$ :

$$B(s) = \begin{cases} m, & \text{если } s = 1, \\ 2m, & \text{если } s = 2, \\ 2B(s-1) - 2^{s-1}, & \text{если } s = 3, 4, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

где  $B(s)$  – число строк, сохраняемых в матрице  $\mathbf{V}_{sy}$ . Тогда число арифметических операций суммирования при ускоренном умножении матрицы из функций Радемахера на вектор:

$$S = B(1) + B(2) + \sum_{s=3}^m 2B(s-1) - 2^{s-1}, \quad (6)$$

а выигрыш в числе таких операций, по сравнению с простым перемножением матрицы такой же размерности на вектор, составит  $I(m) = m2^m / S$ . Оценить значимость этого выигрыша можно, анализируя рис. 2.

Как видно, при  $m = 5$  он составляет примерно 1.84, но при типичных длинах ПСП, используемых при построении, например, навигационных кодов, он более существенный – при  $N = 511 (m = 9)$  выигрыш составляет 3 раза, а при  $N = 1023 (m = 10)$  – 3.4 раза. Подчеркнем, что на рис. 2 приводится выигрыш в числе арифметических операций при ускоренном перемножении матрицы функций Радемахера и вектора, по сравнению с простым перемножением. Для того чтобы не разрывать график, показаны значения выигрыша при  $m = 8, 12$  и 16, хотя ПСП Голда при таких значениях  $m$  не существует [8].

Таким образом, предлагаемый алгоритм синхронизации последовательностей Голда на основе быстрого преобразования Адамара (БПА) при заданном циклическом сдвиге предпочтительных МП  $z$  состоит в следующем:

1) с целью обеспечения возможности синхронизации всего набора последовательностей Голда, для формирования которых используется данная пара предпочтительных МП, выбрать  $\alpha^0_{1N_2}$  и  $\alpha^0_{2N_2}$  мультипликативных групп их полей Галуа и найти суммы  $\alpha^k_{1N_2} + \alpha^{k(z)}_{2N_2}$ , где

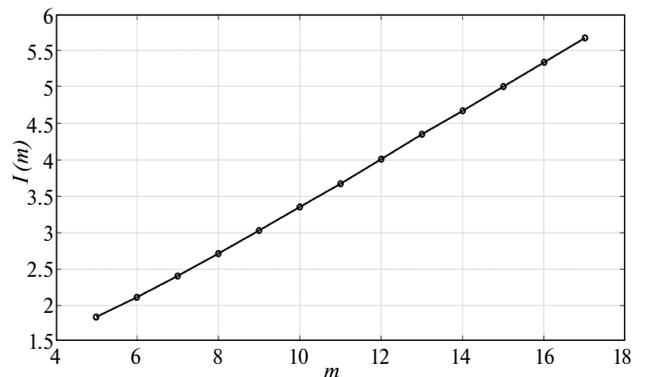


Рис. 2. Выигрыш в числе элементарных математических операций при ускоренном перемножении матрицы функций Радемахера и вектора по сравнению с простым перемножением.

$k(z) = k + z$  при  $k + z \leq N$  и  $k(z) = k + z - N$  при  $k + z > N, k = 0, \dots, N - 1$ ;

2) переставить значения входного дискретного сигнала  $X_N$ , содержащего последовательность Голда с неизвестным циклическим сдвигом, по возрастанию значений  $[\alpha^k_{1H_2} + \alpha^{k(z)}_{2H_2}]_{10}$ , записывая эти символы в ячейки памяти с соответствующими номерами; если адреса записи разных символов совпадают, то они записываются в одну и ту же ячейку и суммируются; элементы  $[\alpha^k_{1H_2} + \alpha^{k(z)}_{2H_2}]_{10}$ , состоящие лишь из нулей, определяют запись символа входного кода в нулевую ячейку и суммирование с ранее записанными в нее символами; содержимое ячеек, оставшихся пустыми, обнуляется;

3) полученный вектор, значения символов которого записаны в запоминающее устройство, ускоренно перемножается с матрицей функций Радемахера; полученные  $m$  значений результата перемножения соответствуют  $m$  значениям ПАКФ последовательности Голда;

4) для идентификации основного пика ПАКФ в данном случае целесообразно использовать пороговый алгоритм; если этот пик оказался среди полученных значений ПАКФ – процедура синхронизации завершается; если нет – выполняется следующий пункт;

5) значения  $X_N$  вновь переставляются по правилу, описанному выше, но уже по возрастанию значений  $[\alpha^{k+m}_{1H_2} + \alpha^{k(z)+m}_{2H_2}]_{10}$ ; после перемножения полученного вектора с матрицей функций Радемахера, получаем следующие  $m$  значений ПАКФ последовательности Голда и т.д.;

6) для синхронизации другой последовательности Голда надо изменить значение  $z = 0, \dots, N - 1$ .

В соответствии с описанным алгоритмом была вычислена ПАКФ ПСП Голда, матрица-циркулянт которого приведена в табл. 1. Соответствующий график приведен на рис. 3, а на рис. 4 показана ПАКФ этой ПСП Голда, полученная при простом перемножении ее матрицы-цир-

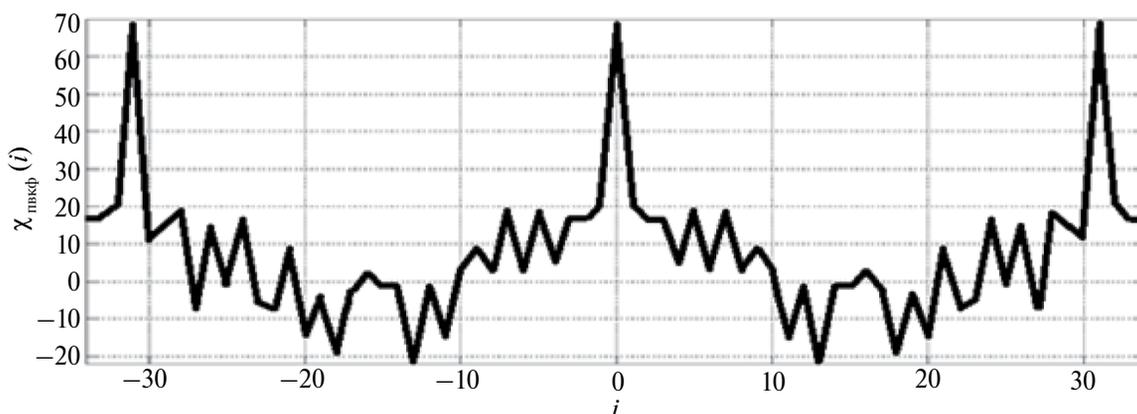


Рис. 3. Результат ускоренного вычисления ПАКФ кода Голда ( $m = 5$ ).

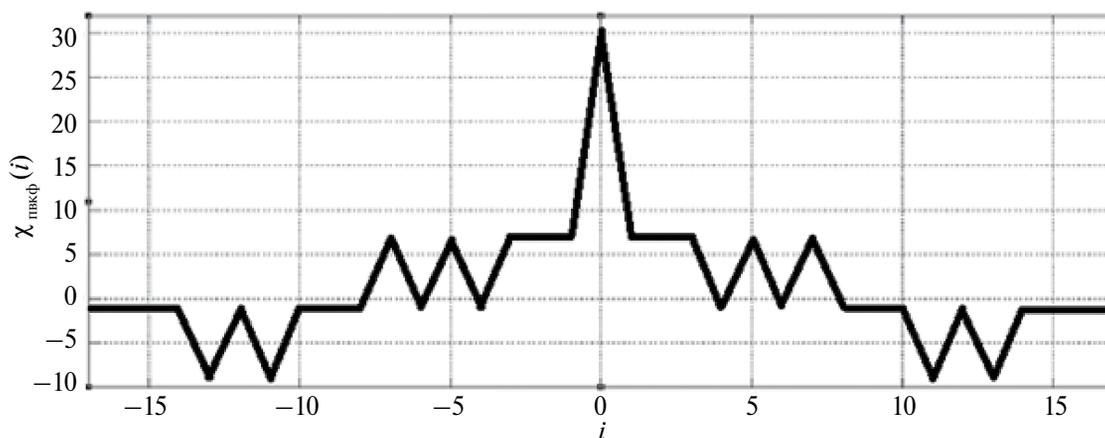


Рис. 4. Периодическая взаимно корреляционная функция кода Голда ( $m = 5$ ).

кулянта с ее первой строкой, транспонированной в столбец. Незначительное отличие ПАКФ одной и той же последовательности, вычисленных разными способами, объясняется разными значениями длины ПСП Голда и функции Радемахера—Уолша. Появление дополнительных основных пиков на рис. 2 по бокам основного пика объясняется отличием размерности матрицы-циркулянта ПСП Голда и матрицы Адамара.

Таким образом, при традиционном способе вычисления ПАКФ необходимо последовательно сдвигать опорную ПСП относительно значений принимаемого дискретного сигнала на один символ с последующим вычислением одного значения ПАКФ, для чего потребуется  $N$  операций перемножения с накоплением. В результате вычисление всей ПАКФ потребует  $N$  сдвигов опорной ПСП относительно принимаемого сигнала и  $N^2$  операций перемножения с накоплением. В предлагаемом алгоритме число перестановок символов последовательности равно  $\frac{A(N)}{m}$ , и после каждой из них вычисляется сразу  $m$  значений ПАКФ с существенно меньшим числом элементарных операций суммирования, чем при вычислении  $m$  значений ПАКФ традиционным способом. Выигрыш в числе арифметических операций предлагаемого алгоритма, по сравнению с традиционным, в зависимости от значения  $m$  соответствует графику, приведенному на рис. 2. Отметим, что правило перестановки символов входного дискретного сигнала задается тем же генератором последовательности Голда, который используется и при формировании опорного сигнала в традиционном алгоритме вычисления ПАКФ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первые  $m$  строк любой упорядоченной матрицы-циркулянта последовательности Голда могут быть приведены к аналогам функций Радемахера путем перестановки ее столбцов по возрастанию значений суммы максимальных мультипликативных групп двух предпочтительных неприводимых примитивных полиномов, на основании которых построен данный код. При этом структура групп определяется сопровождающими матрицами предпочтительных полиномов вида  $H_2$ . При сдвиге первообразных элементов суммируемых мультипликативных групп на  $m$  элементов следующие  $m$  строк исходной матрицы приводятся к функциям Раде-

махера, при сдвиге на  $2m$  элементов — следующие и т.д.

Преобразование последовательности Голда в соответствии с п. 1 Заключения позволяет быстро вычислить его ПАКФ с помощью БПА в усеченном базисе функций Уолша—Адамара, причем выигрыш по числу элементарных операций в зависимости от длины ПСП  $N = 2^m - 1$ , по сравнению с корреляционным алгоритмом, соответствует рис. 2.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maral G., Bousquet M., Sun Z.* Satellite Communications Systems. United Kingdom: Wiley, 2020.
2. *Gold R.* // IEEE Trans. 1967. V. IT-13. № 4. P. 619. <https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054048>
3. *Кузнецов В.С., Шевченко И.В., Волков А.С., Солодков А.В.* // Труды МАИ. 2017. Вып. 96. [https://trudymai.ru/upload/iblock/f64/Kuznetsov\\_Nevchenko\\_Volkov\\_Solodkov\\_rus.ru&issue=96](https://trudymai.ru/upload/iblock/f64/Kuznetsov_Nevchenko_Volkov_Solodkov_rus.ru&issue=96)
4. *Кузнецов В.С., Мордасов К.А.* // Изв. вузов. Электроника. 2010. № 1. С. 57.
5. *Михайлов В.Ю., Мазена Р.Б.* // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2018. Т. 12. № 4. С. 4.
6. *Michaylov V. Yu., Mazepa R.B.* // Systems of Signal Generating and Processing in the Field of on Board Communications: Conf. Proc. 2021. P. 9416089.
7. *Лосев В.В., Бродская Е.Б., Коржик В.И.* Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов. М.: Радио и связь, 1988.
8. *Лосев В.В., Дворников В.Д.* // РЭ. 1983. Т. 28. № 8. С. 1540.
9. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
10. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
11. *Свердлик М.Б.* Оптимальные дискретные сигналы. М.: Сов. радио, 1975.
12. *Канатова Л.В., Литвинов В.Л., Финк Л.М.* // Проблемы передачи информации. 1986. Т. 22. Вып. 2. С. 98.
13. *Горгадзе С.Ф., Ву Ши Д., Ермакова А.В.* // РЭ. 2024. Т. 69. № 2. С.
14. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.
15. *Горгадзе С.Ф.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 3. С. 302.
16. *Горгадзе С.Ф.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 4. С. 428.

# SYNCHRONIZATION OF GOLD SEQUENCES BASED ON FAST TRANSFORM IN A TRUNCATED BASIS OF WALSH–HADAMARD FUNCTIONS

**S. F. Gorgadze\*, Dao Vu Shi, A. V. Ermakova**

*Moscow Technical University of Communication and Information, Moscow 111024 Russia*

*\*E-mail: s.f.gorgadze@mtuci.ru*

Received October 19, 2022; revised July 18, 2023; accepted July 27, 2023

Based on the analysis of the structures of isomorphic multiplicative groups of extended Galois fields, it is established that any cyclic shift of a pseudo-random Gold sequence can be transformed into a function belonging to the complete set of analogues of Rademacher functions of the corresponding dimension. This made it possible to develop a new algorithm for fast synchronization of Gold sequences based on the calculation of their discrete convolution using fast spectral transformation in a truncated basis of Walsh–Hadamard functions. The gain of the developed algorithm in terms of the number of arithmetic operations compared to the traditional method of calculating discrete convolution increases with increasing sequence length  $N$  and for  $N=511.1023$  is approximately 3.4 times.

*Keywords:* isomorphic multiplicative groups of extended Galois fields, pseudo-random Gold sequence, Rademacher functions, truncated basis of Walsh–Hadamard functions

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.396

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ  
КРАВЧЕНКО И КОМБИНАЦИЙ НА ИХ ОСНОВЕ  
В ЗАДАЧЕ РЕЖЕКЦИИ УЗКОПОЛОСНЫХ ПОМЕХ

© 2024 г. Е. В. Кузьмин\*

Сибирский федеральный университет,  
Свободный просп., 79, Красноярск, 660041 Российская Федерация

\*E-mail: ekuzmin@sfu-kras.ru

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.

После доработки 02.06.2023 г.

Принята к публикации 24.06.2023 г.

Исследовано влияние весовых функций (ВФ) предварительного взвешивания на качество режекции узкополосных помех на основе прямого и обратного дискретного преобразования Фурье. Рассмотрены классические и современные ВФ: Кравченко, Кравченко–Дольфа–Чебышева, Кравченко–Гаусса, Кравченко–Бернштейна–Рогозинского. Получены количественные оценки эффективности – коэффициенты подавления помехи и прохождения сигнала, а также их произведение – суммарный коэффициент эффективности. Показаны графические примеры поведения суммарного коэффициента эффективности в зависимости от частоты помехи. Представлены оценки указанных показателей качества при удалении из спектра фиксированного числа частотных выборок. Представлены семейства зависимостей вероятностей правильного выполнения поиска сигнала с расширенным спектром от отношения “помеха/сигнал” при применении современных ВФ для взвешивания реализаций аддитивной смеси сигнала, помехи и шума. Продемонстрировано и подтверждено существенное преимущество современных ВФ, формируемых за счет комбинаций с функциями Кравченко, в задаче режекции помех.

*Ключевые слова:* узкополосные помехи, сигналы с расширенным спектром, весовые функции Кравченко, режекция помех, коэффициент подавления помехи, коэффициент прохождения сигнала, вероятность правильного выполнения поиска

DOI: 10.31857/S0033849424020058, EDN: KMPFSU

ВВЕДЕНИЕ

Обработка сигналов с расширенным спектром (СРС) на фоне узкополосных помех (УП) неизменно продолжает вызывать интерес исследователей, о чем свидетельствует постоянное появление новых публикаций [1–7]. Борьба с УП при обработке СРС, как известно, осуществляется различными методами, среди которых следует выделить субканальную обработку [8, 9], адаптивную фильтрацию [10], а также частотную режекцию (ЧР) на основе прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ, ОДПФ) [1, 2, 10–14], которая при практической реализации оказывается наиболее эффективной [10]. Реализация ЧР на основе цифровых методов и средств с использованием ДПФ-ОДПФ включает важный и неотъемлемый процесс – предварительное взвешивание обрабатываемой реализации – умножение аддитивной смеси сиг-

нала, помехи и шума на весовую функцию, что необходимо для снижения возникающих отрицательных эффектов, а именно: сужения спектрального пьедестала и подавления “краевых” осцилляций (так называемого эффекта Гиббса) [13, 14]. Таким образом, обоснованный выбор ВФ является чрезвычайно важным, поскольку во многом определяет эффективность борьбы с узкополосными помехами за счет выполнения ЧР на основе ДПФ [1, 4, 7, 14].

В известных публикациях вопрос влияния и рационального выбора ВФ для ЧР на основе ДПФ-ОДПФ неоднократно рассматривался (см., например, [1, 2, 4, 7, 13, 14]). В статье [14] для подавления УП за счет ЧР сделан выбор путем перебора различных вариантов и обоснована целесообразность применения ВФ Парзена. В статье [4] справедливость этого выбора подтверждена, а дополнительные исследования

показали целесообразность применения кубической вариации ВФ Хеннинга. В [7] задача рассмотрена с наиболее общих позиций, подтверждено преимущество применения ВФ Хеннинга перед ВФ Парзена. Таким образом, для задачи обработки фазоманипулированного (ФМ) СРС на фоне УП, *вопрос о выборе ВФ среди подавляющего большинства классических ВФ*, решен. Вместе с тем, учитывая общую тенденцию развития технических систем, заключающуюся в постоянном возрастании предъявляемых к ним требований, часто опережающих алгоритмические и аппаратные возможности для их реализации, а также учитывая наличие значительного числа современных ВФ [15–17], представляется актуальной задача их выбора и апробации для ЧР. Среди недавних публикаций в данной области следует отметить труды [1–3], в которых изучается применение ВФ Кравченко [1, 2] и Кайзера [3] при нейтрализации УП. Результаты, достигнутые в [1–3] и ориентированные на повышение эффективности систем передачи информации при действии УП, однозначно сравнить с результатами, полученными в [4, 7, 13, 14], затруднительно. Однако направление исследований [1, 2] показывает потенциальную возможность повышения эффективности обработки СРС на фоне УП за счет *выбора* для взвешивания *современных весовых функций* – относящихся к семейству функций Кравченко (К) и комбинированных ВФ на их основе, получаемых произведением на ВФ Дольфа–Чебышева (ДЧ), Гаусса (Г), Бернштейна–Рогозинского (БР) [1, 2, 15, 16].

Цель данной статьи – исследовать возможность повышения эффективности частотной режекции узкополосных помех за счет применения современных ВФ предварительного взвешивания, основанных на комбинациях с функциями Кравченко (К, КДЧ, КГ, КБР).

## 1. АЛГОРИТМ РЕЖЕКЦИИ УЗКОПОЛОСНОЙ ПОМЕХИ И ЕГО ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

### 1.1. Алгоритм режекции УП

Рассматриваемый алгоритм режекции УП на основе ДПФ–ОДПФ предполагает выполнение следующих шагов обработки (см., например, [10–14]). Сначала вычисляется ДПФ  $\mathcal{F}[\bullet]$  от вектора отсчетов  $y_n = s_n + m_n + v_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ) аддитивной смеси сигнала<sup>1</sup>  $s_n$ , узкополосной по-

мехи<sup>2</sup>  $m_n = A_n \cos(\omega_n nT + \varphi_n)$  и дискретизированного белого шума  $v_n$  ( $T$  – шаг дискретизации), взвешенного умножением  $y_n w_n$  на отсчеты (коэффициенты) весовой функции<sup>3</sup>  $w_n$  [10, 18]:

$$\dot{Y}_k = \mathcal{F}[y_n w_n] = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n \exp(-j2\pi nk/N), \quad (1)$$

где  $N$  – объем выборки на интервале наблюдения  $T_y$ ,  $n \in [0, N - 1]$  и  $k \in [0, N - 1]$  – номера временных и частотных выборок (ЧВ), соответственно. Далее осуществляется обработка частотных выборок  $\dot{Y}_k$  (1), предполагающая их удаление (обнуление) или ограничение, на основе сравнения с пороговым уровнем<sup>4</sup> [10]:

$$\tilde{Y}_k = \begin{cases} \dot{Y}_k, & |\dot{Y}_k| < p, \\ \dot{Y}_c, & |\dot{Y}_k| \geq p; \end{cases} \quad (2)$$

где  $\dot{Y}_c = \text{const}$  – значения, записываемые в массив комплексного спектра вместо превышающих пороговый уровень  $p = \text{const}$  (в частности, возможно  $\dot{Y}_c = 0$ ). Возможным является и другой подход к обработке (1), заключающийся в удалении (обнулении, ограничении) фиксированного числа  $N_{\text{уд}}$  ЧВ за счет анализа максимальных значений и определения номеров соответствующих ЧВ. Заключительным шагом алгоритма режекции УП является вычисление ОДПФ  $\mathcal{F}^{-1}[\bullet]$  от вектора обработанных частотных выборок  $\tilde{Y}_k$  (2), что приводит к отсчетам временной реализации  $\tilde{y}_n$  с существенно ослабленной помеховой компонентой [10, 18]:

$$\tilde{y}_n = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{Y}_k] = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}_k \exp(j2\pi nk/N). \quad (3)$$

### 1.2. Показатели качества алгоритма режекции УП

Количественную характеристику эффективности алгоритма режекции УП (1)–(3) с общих методических позиций представляется целесообразным дать на основе коэффициента подавления УП, являющегося отношением  $P_{\text{п}}^{\text{вх}}/P_{\text{п}}^{\text{вых}}$  мощности  $P_{\text{п}}^{\text{вх}}$  УП  $m_n$ , подаваемой на вход ре-

<sup>2</sup> Полагается доминирующей компонентой смеси.

<sup>3</sup> Описание ВФ Кравченко  $K_a^b(t) \equiv \text{fup}_a^b(t)$  – атомарных функций, а также других ВФ (и соответствующих им коэффициентов  $w_n$ ), используемых в (1), опубликовано в [15, 16].

<sup>4</sup> Знак “тильда” здесь и далее указывает на временной процесс, прошедший через режектор, а также на спектр, ему соответствующий.

<sup>1</sup> С расширенным спектром (шумоподобного, широкополосного).

жектора (1)–(3), к мощности  $P_{\Pi}^{\text{ВЫХ}}$  подавленной помехи  $\tilde{m}_n$ , образующейся на его выходе [19]. В рассматриваемом случае дискретных наблюдений оценка коэффициента подавления, очевидно, записывается так

$$K_{\Pi} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} m_n^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{m}_n^2}. \quad (4)$$

Применение в (1) предварительного взвешивания реализации аддитивной смеси, содержащей полезный сигнал  $s_n$ , неизбежно приводит к энергетическим потерям последнего ( $s_n w_n$ ). Кроме того, реализация режекции (2), приводящая к вынужденной обработке сигнальной компоненты  $\tilde{s}_n$  по аналогии с УП, дополнительно увеличивает данные потери в зависимости от количества  $N_{\text{уд}}$  удаляемых ЧВ. Таким образом, помимо глубины подавления УП, оцениваемой по (4), характеризацию качества режектора целесообразно дополнить коэффициентом прохождения сигнала – отношением его мощностей на выходе и входе режектора  $P_c^{\text{ВЫХ}}/P_c^{\text{ВХ}}$  [19]. По аналогии с (4) для коэффициента прохождения сигнала запишем

$$K_c = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}_n^2}{\sum_{n=0}^{N-1} s_n^2}. \quad (5)$$

Суммарный коэффициент эффективности режектора (в радиолокационных приложениях – коэффициент подпомеховой видимости [19]), учитывающий как подавление помехи (4), так и энергетические потери полезного сигнала (5), определяется произведением [19]

$$K_{\text{сум}} = K_c K_{\Pi}. \quad (6)$$

Далее на основе (4)–(6) изучим поведение показателей качества обработки (1)–(3) при режекции УП в условиях применения в (1) различных ВФ, с обязательным учетом возможных энергетических потерь полезного СРС.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО И СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЖЕКТОРА ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ВФ КРАВЧЕНКО

Рассмотрим современные весовые функции – основанные на комбинациях с функциями Кравченко (К, КДЧ, КГ, КБР), а также некоторые классические ВФ для визуального и количественного сравнения.

### 2.1. Результаты вычислительного моделирования режектора

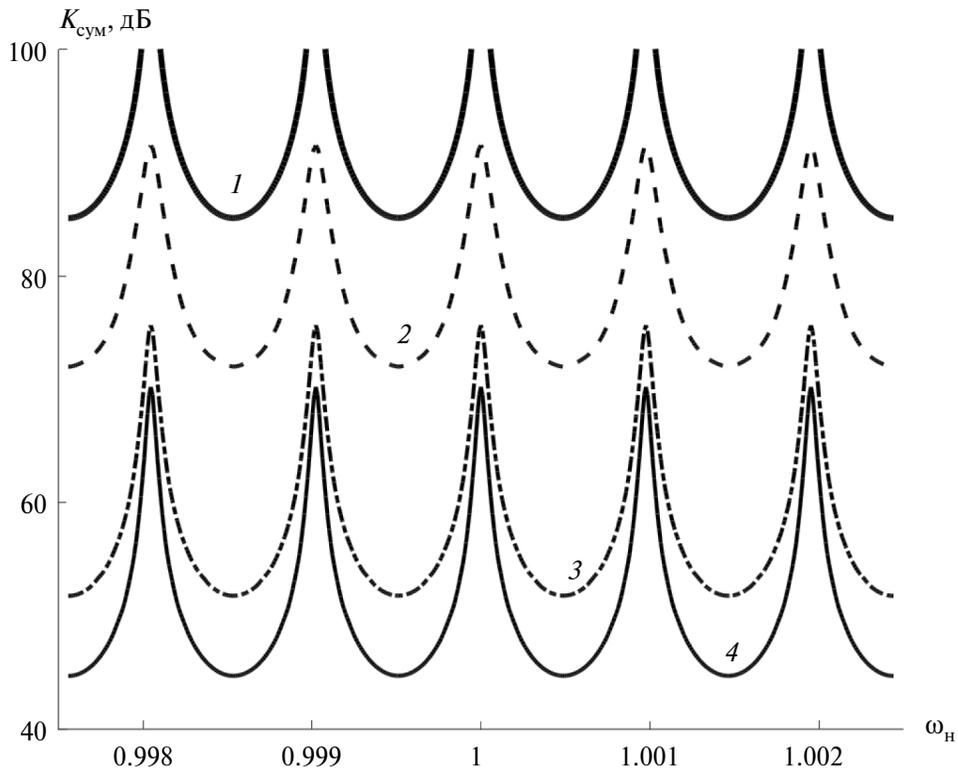
Для изучения достигаемого качества режекции УП при взвешивании различными ВФ, а также для определения сопутствующих энергетических потерь СРС, обусловленных взвешиванием и режекцией, проведена серия вычислительных экспериментов. Сначала рассмотрено раздельное прохождение УП и СРС через режектор. Получены количественные оценки коэффициентов подавления УП (4), коэффициентов прохождения сигнала (5), а также коэффициентов суммарной эффективности (6). На рис. 1–5 представлены фрагменты зависимостей суммарного коэффициента эффективности  $K_{\text{сум}}(\omega_n)$  режекции УП от ее нормированной частоты  $\omega_n = \omega_n/\omega_0$ . Варьирование частотой УП обеспечивалось в окрестности центральной частоты  $\omega_0$  спектра СРС в сравнительно узких интервалах для наглядности графического отображения зависимостей  $K_{\text{сум}}(\omega_n)$ . Объем выборки УП на интервале наблюдения  $N = T_y/T = 4096$ . Отношение частоты дискретизации к центральной частоте СРС  $\gamma = 2\pi/\omega_0 T = 4$ .

Рисунок 1 получен при взвешивании помехи и сигнала весовыми функциями Кравченко ( $K_2^2$ ,  $K_2^4$ ,  $K_4^4$ ) и Ханна при удалении в (2)  $N_{\text{уд}} = 50$  максимальных частотных выборок.

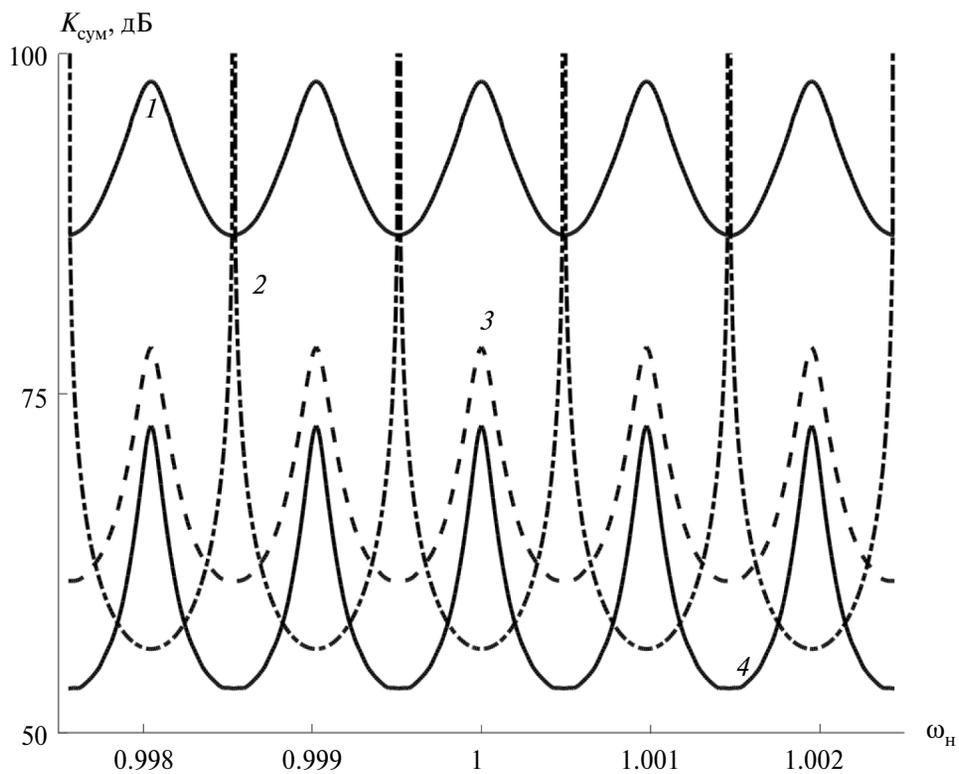
Здесь и далее верхние индексы  $b$  в сокращенных названиях ВФ Кравченко  $K_a^b(t)$ , являющихся атомарной функцией  $\text{fup}_a^b(t)$ , и названиях других ВФ, в соответствии с [15, 16], означают показатель степени, в которую возводится функция. Нижние индексы  $a$  являются “параметрическими” и определяют подвид ВФ в конкретном семействе [15, 16]. Рисунок 2 получен при  $N_{\text{уд}} = 50$  ЧВ и выполнении предварительного взвешивания вариациями ВФ Дольфа–Чебышева ( $\text{ДЧ}_3$ ,  $\text{ДЧ}_{3,5}$ ,  $\text{ДЧ}_5$ ), а также синус-окном.

Здесь нижние индексы 3, 3.5 и 5 даны согласно [15, 16] и, соответственно, означают уровень боковых лепестков спектра данной ВФ: 60, 70 и 100 дБ. Рисунок 3 соответствует применению ВФ Кайзера и удалению  $N_{\text{уд}} = 10$  и 50 ЧВ. Коэффициенты этой ВФ, в соответствии с ее известным описанием [16], вычислялись как отношение модифицированных функций Бесселя первого рода нулевого порядка, содержащих в своих аргументах фиксированный параметр  $\beta = 5$  и 6.

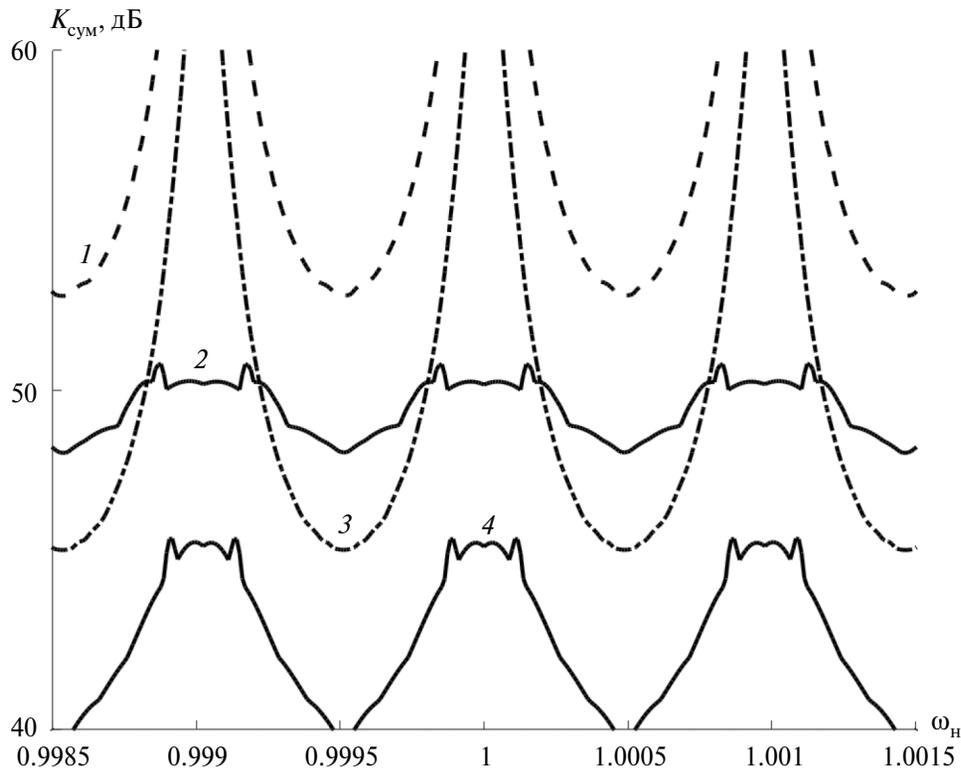
Рисунок 4 получен при удалении  $N_{\text{уд}} = 50$  частотных выборок и предварительном взвешивании



**Рис. 1.** Зависимости суммарного коэффициента эффективности режекции УП от нормированной частоты при удалении  $N_{уд} = 50$  частотных выборок; взвешивание реализации ВФ Ханна (1) и ВФ Кравченко:  $K_2^4$  (2),  $K_4^4$  (3),  $K_2^2$  (4).



**Рис. 2.** Зависимости суммарного коэффициента эффективности режекции УП от нормированной частоты при удалении  $N_{уд} = 50$  частотных выборок; взвешивание реализации ВФ Дольфа–Чебышева и синус-окном:  $ДЧ_5$  (1), синус-окно (2),  $ДЧ_{3,5}$  (3),  $ДЧ_3$  (4).



**Рис. 3.** Зависимости суммарного коэффициента эффективности режекции УП от нормированной частоты; взвешивание реализации ВФ Кайзера:  $\beta = 6$ ,  $N_{уд} = 50$  (1) и 10 (2);  $\beta = 5$ ,  $N_{уд} = 50$  (3) и 10 (4).

вании реализаций ВФ Кравченко–Бернштейна–Рогозинского, Парзена, Кравченко–Дольфа–Чебышева, Кравченко–Гаусса.

Рисунок 5 соответствует  $N_{уд} = 50$  и применению в (1) вариаций “высоких порядков” ВФ Кравченко–Бернштейна–Рогозинского ( $K_9^5 BR^3$ ,  $K_9^5 BR^5$ ,  $K_{10}^4 BR^3$ ,  $K_{10}^5 BR^5$ ), а также кубической вариации ВФ Хеннинга.

На рис. 6, 7 представлены фрагменты зависимостей коэффициента прохождения сигнала  $K_c(\omega_n)$  от нормированной частоты УП. Рассмотрен ФМ-СРС, порождаемый бинарной псевдослучайной последовательностью длины  $N_{псп} = 511$ .

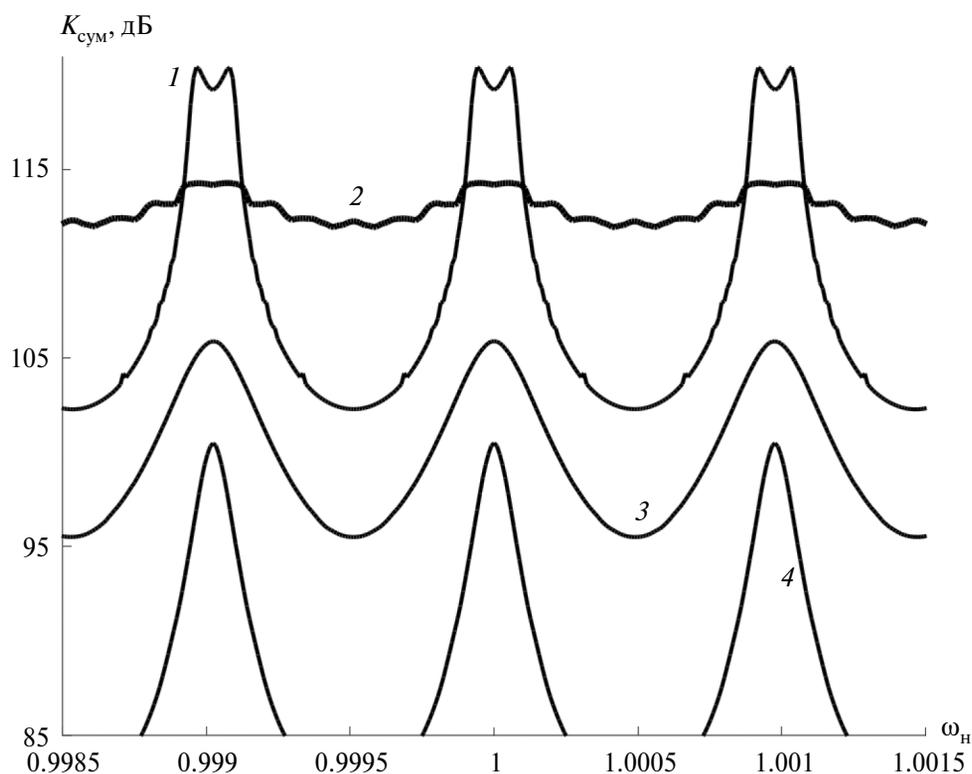
Объем выборки за период СРС, а также отношение частоты дискретизации к частоте СРС прежние. Оба рисунка соответствуют случаям удаления  $N_{уд} = 50$  частотных выборок из спектра СРС. Зависимости на рис. 6 получены при применении взвешивания сигнала ВФ Дольфа–Чебышева и Кравченко. Зависимости на рис. 7 получены при некоторых вариациях “высоких порядков” ВФ Кравченко–Бернштейна–Рогозинского.

В табл. 1 представлены усредненные значения суммарных коэффициентов эффективности

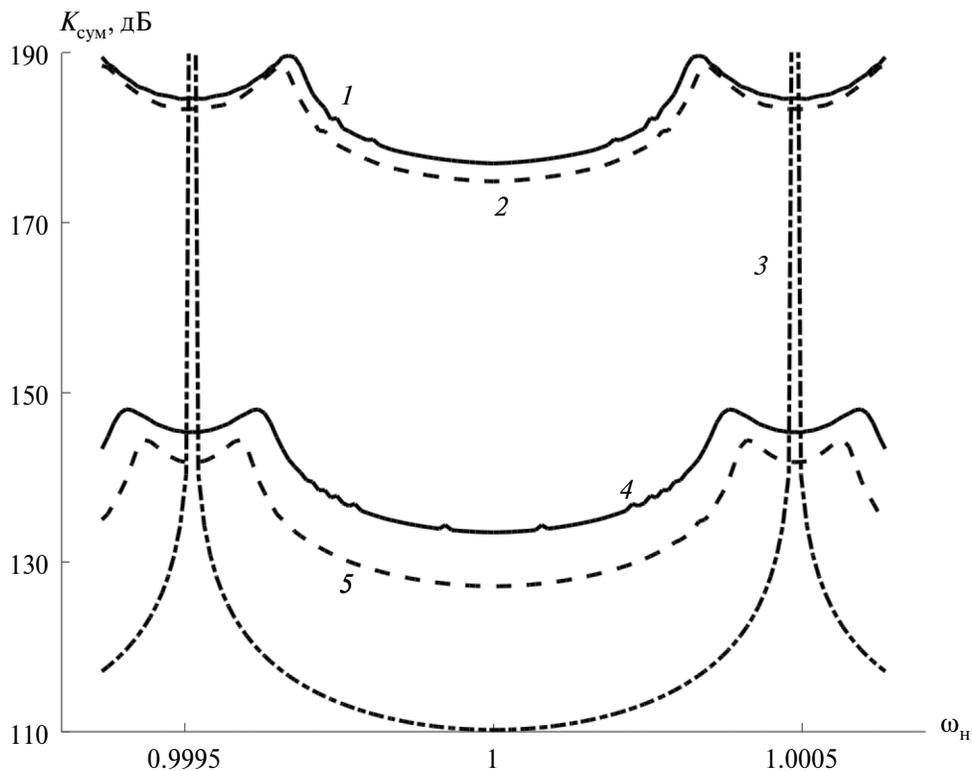
$\overline{K_{сум}}$  подавления УП, полученные по фрагментам зависимостей  $K_{сум}(\omega_n)$  на рис. 1–5, а также усредненные коэффициенты прохождения СРС  $\overline{K_c}$ , полученные аналогичным образом. Кроме того, в таблице представлены значения энергетических потерь сигнала, возникающих из-за умножения на ВФ. Значения коэффициентов прохождения сигнала, выраженные в логарифмических единицах, представлены без указания отрицательного знака. Для таблицы отобраны значения показателей качества обработки, полученные при тех ВФ, которые среди рассмотренных семейств весовых функций демонстрируют лучшие характеристики.

## 2.2. Результаты статистического моделирования процедуры поиска фазоманипулированного СРС на фоне УП с предварительной режекцией

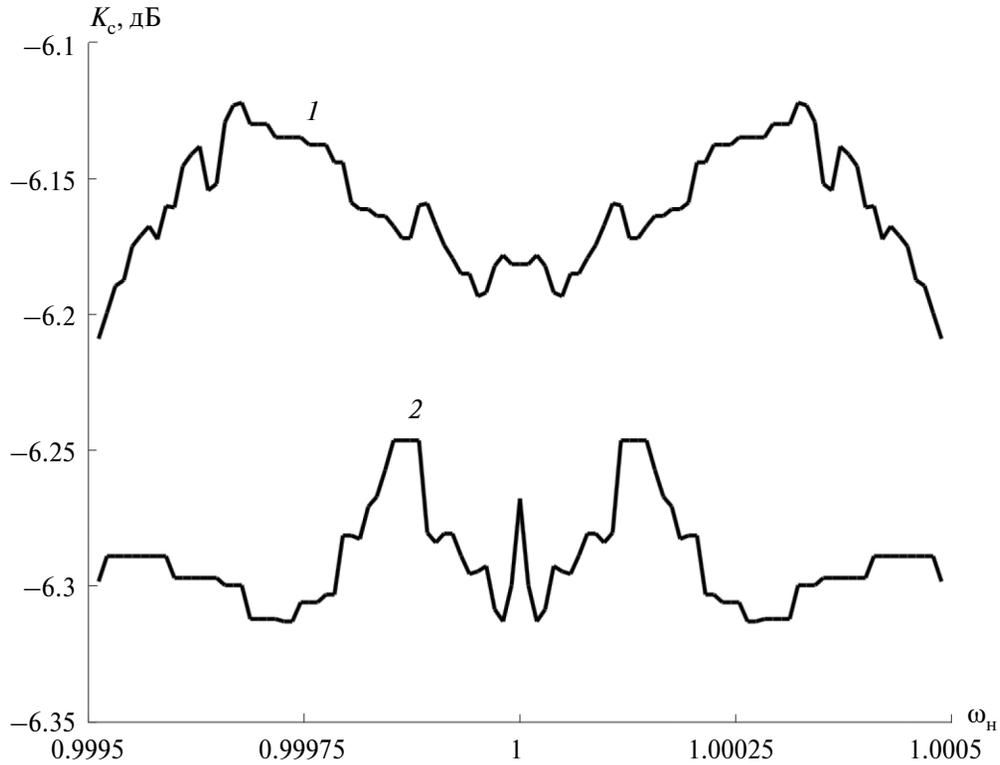
Рассмотрено применение частотного режектора в составе процедуры поиска СРС по задержке, наблюдаемого на фоне узкополосной помехи и шума. То есть рассмотрено прохождение аддитивной смеси  $y_n$  полезного ФМ-СРС  $s_n$ , УП  $m_n$  и шума  $v_n$  через режектор (1)–(3) с последующим выполнением беспорогового поиска СРС по отсчетам реализаций  $\tilde{y}_n$ ,



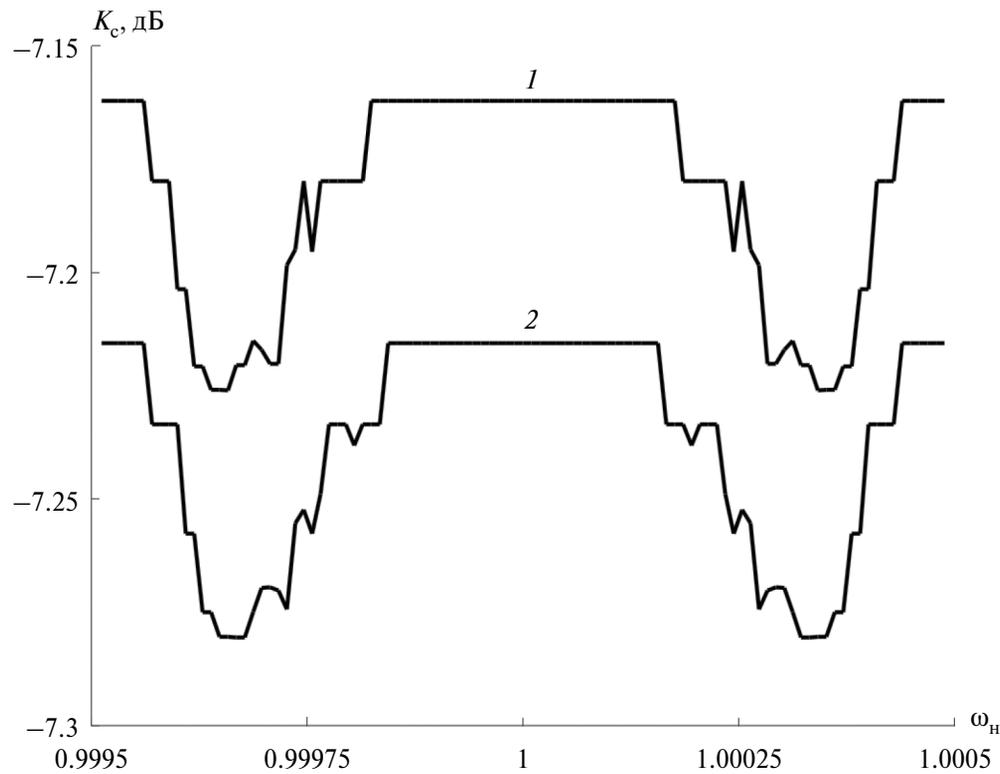
**Рис. 4.** Зависимости суммарного коэффициента эффективности режекции УП от нормированной частоты при удалении  $N_{уд} = 50$  частотных выборок; взвешивание реализации ВФ  $K_4^2 BR^2$  (1), Парзена (2),  $K_4 DC_5$  (3) и  $K_2^2 \Gamma_3$  (4).



**Рис. 5.** Зависимости суммарного коэффициента эффективности режекции УП от нормированной частоты при удалении  $N_{уд} = 50$  частотных выборок; взвешивание реализации ВФ  $K_3^5 BR^5$  (1),  $K_{10}^5 BR^5$  (2), Хеннинга (3),  $K_9^5 BR^3$  (4),  $K_{10}^4 BR^3$  (5).



**Рис. 6.** Зависимости коэффициента прохождения ФМ-СРС от нормированной частоты при удалении  $N_{уд} = 50$  частотных выборок; взвешивание ВФ ДЧ<sub>5</sub> (1) и К<sub>2</sub><sup>4</sup> (2).



**Рис. 7.** Зависимости коэффициента прохождения ФМ-СРС от нормированной частоты при удалении  $N_{уд} = 50$  частотных выборок; взвешивание ВФ К<sub>10</sub><sup>5</sup>БР<sup>5</sup> (1) и К<sub>9</sub><sup>5</sup>БР<sup>5</sup> (2).

**Таблица 1.** Усредненные коэффициенты суммарной эффективности  $\overline{K_{\text{сум}}}$  подавления узкополосной помехи, полученные путем соответствующей обработки зависимостей  $K_{\text{сум}}(\omega_n)$ , а также усредненные коэффициенты прохождения сигнала  $K_c$ .

Весовая функция	$K_c$ , дБ	$\overline{K_{\text{сум}}}$ , дБ ( $K_c$ , дБ)	
	$N_{\text{уд}} = 0$	$N_{\text{уд}} = 10$	$N_{\text{уд}} = 50$
Кайзера ( $\beta = 6$ )	4.36	<b>49.5</b> (4.43)	<b>58.4</b> (4.79)
Ханна	4.26	<b>57.9</b> (4.34)	<b>92.4</b> (4.70)
Кравченко ( $K_2^4$ )	5.87	<b>63.9</b> (5.92)	<b>77.7</b> (6.29)
Дольфа–Чебышева (ДЧ <sub>5</sub> )	5.77	<b>85.1</b> (5.80)	<b>91.3</b> (6.16)
Кравченко–Дольфа–Чебышева ( $K_4$ ДЧ <sub>5</sub> )	6.10	<b>93.8</b> (6.15)	<b>99.9</b> (6.52)
Кравченко–Гаусса ( $K_2^2\Gamma_3$ )	6.38	<b>71.2</b> (6.42)	<b>87.6</b> (6.79)
Кравченко–Бернштейна–Рогозинского ( $K_4^2\text{БР}^2$ )	5.38	<b>72.5</b> (5.43)	<b>108.1</b> (5.80)
Кравченко–Бернштейна–Рогозинского ( $K_9^5\text{БР}^3$ )	6.14	<b>88.2</b> (6.19)	<b>140.8</b> (6.55)
Кравченко–Бернштейна–Рогозинского ( $K_9^5\text{БР}^5$ )	6.83	<b>89.2</b> (6.87)	<b>183.1</b> (7.24)
Кравченко–Бернштейна–Рогозинского ( $K_{10}^4\text{БР}^3$ )	5.89	<b>82.6</b> (5.94)	<b>134.8</b> (6.30)
Кравченко–Бернштейна–Рогозинского ( $K_{10}^5\text{БР}^5$ )	6.78	<b>92.4</b> (6.82)	<b>181.4</b> (7.18)
Хеннинга (кубическая вариация)	5.05	<b>68.9</b> (5.12)	<b>117.5</b> (5.46)
Блэкмана–Хэрриса (четырёхчленная вариация)	5.89	<b>93.4</b> (5.94)	<b>107.5</b> (6.21)
Бомана	5.33	<b>65.4</b> (5.39)	<b>115.0</b> (5.76)
Натгалла	5.83	<b>88.3</b> (5.88)	<b>90.5</b> (6.30)

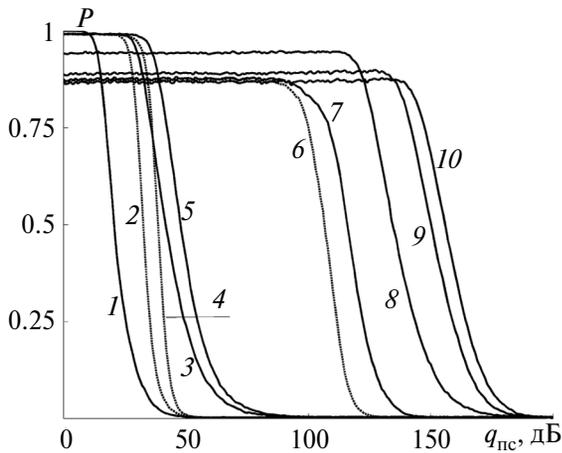
*Примечание.* Случаи удаления  $N_{\text{уд}} = 10$  и 50 частотных выборок из спектра помехи. При  $N_{\text{уд}} = 0$  показаны энергетические потери сигнала  $K_c$ , обусловленные взвешиванием реализации. Полужирным шрифтом выделены значения  $\overline{K_{\text{сум}}}$ .

в которых помеха существенно подавлена. Процедура поиска СРС по задержке реализована аналогично [5]. Для аттестации качества ее функционирования критерием выбрана вероятность  $P$  правильного выполнения поиска, получаемая по методике [5] методом статистического моделирования при выполнении 20 000 испытаний. Основные параметры модели прежние:  $\gamma = 4$ ,  $N_{\text{псп}} = 511$ . Случай обработки  $N = 4096$  отсчетов соответствует накоплению в корреляторах за один период ФМ-СРС ( $M = 1$ ). Кроме того, осуществлялось выполнение пяти когерентных накоплений  $M = 5$ , при этом за интервал наблюдения ФМ-СРС обрабатывалось  $T_y/T = 5N = 20480$  отсчетов. Задержка ФМ-СРС и начальная фаза УП в каждом испытании устанавливались случайными величинами с равномерным распределением. Реализации центрированного шума  $v_n$  с постоянной дисперсией  $\sigma_v^2 = \text{const}$  обновлялись в каждом испытании. Амплитуду ФМ-СРС  $A_c$  устанавливали исходя из требуемого отношения “сигнал/шум”, зада-

ваемого значением энергетического потенциала  $q_{\text{эп}} = 10\lg(A_c^2/4T\sigma_v^2)$ , выраженного в логарифмических единицах. Режектор настраивали для удаления  $N_{\text{уд}} = 10$  и 50 максимальных ЧВ. Рассмотрено два сценария действия УП в пределах главного лепестка спектра ФМ-СРС, предполагающих в одном случае фиксированное частотное положение помехи, а в другом – случайное.

На рис. 8, 9 представлены зависимости вероятности  $P$  правильного выполнения беспорогового поиска ФМ-СРС от отношения “помеха/сигнал”  $q_{\text{пс}} = 20\lg(A_{\text{п}}/A_c)$ , представленного в логарифмическом масштабе. Шаг изменения отношения  $q_{\text{пс}}$  равен 1 дБ. Рисунок 8 соответствует обработке аддитивной смеси за интервал одного периода ФМ-СРС ( $M = 1$ ,  $N = 4096$ ) при энергетическом потенциале  $q_{\text{эп}} = 45$  дБГц.

Рисунок 9 получен для менее благоприятных входных условий с точки зрения интенсивности СРС, характеризуемых  $q_{\text{эп}} = 40$  дБГц, но при выполнении пяти  $M = 5$  когерентных накоплений ( $N = 20480$ ).



**Рис. 8.** Зависимости вероятности правильного выполнения поиска по задержке ФМ-СРС, наблюдаемого на фоне УП и шума, от отношения “помеха/сигнал” при  $q_{\text{ЭП}} = 45$  дБГц,  $M = 1$ : поиск ФМ-СРС без ЧР (кривая 1); единичная ВФ при  $N_{\text{уд}} = 10$  (2, 3) и 50 (4, 5); ВФ  $K_4ДЧ_5$  (6, 7), ВФ Хеннинга (8),  $K_{10}^4БР^3$  (9),  $K_9^5БР^3$  (10) при  $N_{\text{уд}} = 50$ ; фиксированная частота помехи – 1, 2, 4, 6, случайная – 3, 5, 7 и 8–10.

**Таблица 2.** Значения\* отношений “помеха/сигнал”  $q_{\text{пс}}$ , при которых совместное применение ЧР и поиска ФМ-СРС по задержке обеспечивает вероятность не хуже  $P = 0.9, 0.985$ .

Весовая функция	$q_{\text{пс}}, \text{дБ}$	
	$P = 0.9$	$P = 0.985$
$K_4ДЧ_5$	116.6	107.5
Хеннинга	133.8	127.0
$K_{10}^4БР^3$	149.5	140.7
$K_9^5БР^3$	155.4	146.3

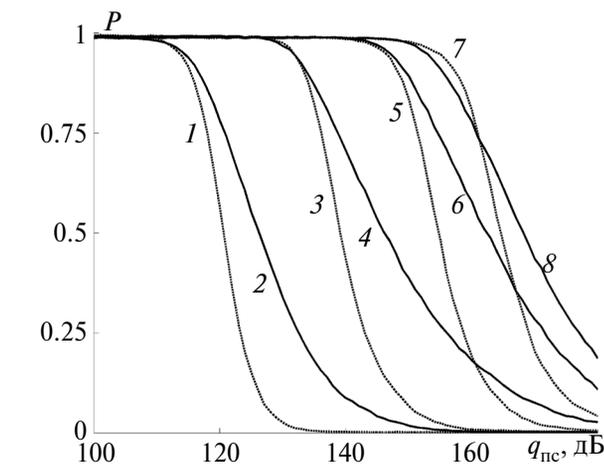
\*Обработка зависимостей 2, 4, 6 и 8 на рис. 9.

мо при мощном помеховом фоне. При требовании  $P = 0.99$  не удастся сравнить все полученные зависимости, поэтому выбрано ближайшее значение, при котором сравнение является корректным.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как видно из рис. 1–5, зависимости суммарного коэффициента эффективности режекции узкополосной помехи  $K_{\text{сум}}(\omega_{\text{п}})$  от частоты обладают периодическим характером. Форма каждой из зависимостей индивидуальна, однако некоторые тенденции поведения, помимо их периодичности, устойчиво проявляются. Например, из рис. 1 и 2 видно, что зависимости  $K_{\text{сум}}(\omega_{\text{п}})$ , полученные при взвешивании реализаций помехи ВФ Кравченко и ВФ Дольфа–Чебышева, обладают “квазиколебательным” поведением. Обращают на себя внимание зависимости  $K_{\text{сум}}(\omega_{\text{п}})$ , полученные при взвешивании реализаций помехи ВФ Кайзера. В этих случаях имеют место умеренные значения  $K_{\text{сум}}$ , а поведение зависимостей характеризуется “причудливыми” формами (см. рис. 3, кривые 2, 4). Заметно отличающимися особенностями поведения характерны зависимости  $K_{\text{сум}}(\omega_{\text{п}})$ , полученные при взвешивании помехи ВФ Кравченко–Бернштейна–Рогозинского (см. рис. 4, кривая 1, рис. 5, кривые 1, 2, 4, 5).

Из рис. 6 и 7 следует, что зависимость коэффициента прохождения сигнала с расширенным спектром от частоты  $K_c(\omega_{\text{п}})$  является достаточно равномерной, поскольку разброс значений  $K_c$  не превышает 0.1 дБ. Из рис. 7 видно, что зависимости  $K_c(\omega_{\text{п}})$  для весовых функций  $K_{10}^5БР^5$  и  $K_9^5БР^5$  обладают практически полностью рав-



**Рис. 9.** Зависимости вероятности правильного выполнения поиска по задержке ФМ-СРС, наблюдаемого на фоне УП и шума, от отношения “помеха/сигнал” при  $q_{\text{ЭП}} = 40$  дБГц,  $M = 5$ ,  $N_{\text{уд}} = 50$ : ВФ  $K_4ДЧ_5$  (1, 2); Хеннинга (3, 4);  $K_{10}^4БР^3$  (5, 6);  $K_9^5БР^3$  (7, 8); нечетные кривые соответствуют фиксированной частоте помехи, четные – случайной.

В табл. 2 представлены результаты сравнительно анализа эффективности применения некоторых из рассмотренных ВФ в составе частотного режектора, применяемого перед процедурой поиска ФМ-СРС при случайной частоте помехи, удалении  $N_{\text{уд}} = 50$  ЧВ, энергетическом потенциале  $q_{\text{ЭП}} = 40$  дБГц и пяти когерентных накоплениях  $M = 5$ . Сравнение приведено для вероятностей  $P = 0.9$  и  $P = 0.985$ , что приемле-

номерным центральным участком. Из данных, представленных в табл. 1, следует, что энергетические потери СРС определяются главным образом взвешиванием, а вынужденная режекция части спектра СРС при рассмотренных значениях  $N_{уд} \leq 50$  не приводит к существенному дополнительному ухудшению коэффициента  $K_c$  — дополнительные энергетические потери сигнала из-за режекции не превышают 0.5 дБ.

Рис. 8 и 9 иллюстрируют преимущества ВФ Кравченко—Бернштейна—Рогозинского ( $K_{10}^4 BR^3$ ,  $K_9^5 BR^3$ ) перед другими рассмотренными при режекции УП и последующем выполнении процедуры поиска ФМ-СРС по времени запаздывания. Из рис. 8 видно, что равномерный (“рабочий”) участок существенно расширяется. Вместе с тем уровень вероятности правильного поиска на данном участке оказывается несколько сниженным, что объясняется энергетическими потерями сигнала. Введение режима когерентного накопления (см. рис. 9), характерного для современных радиоэлектронных систем [10], даже при более слабом полезном сигнале (в сравнении с условиями рис. 8) позволяет естественным путем практически исключить данный естественный отрицательный эффект. Следует дополнительно отметить, что опробованное применение вариаций ВФ  $K_{10}^5 BR^5$  и  $K_9^5 BR^5$  потенциально способно дополнительно расширять равномерный участок вероятностных зависимостей, однако при  $M = 1$  достигаемые значения вероятности оказываются не столь привлекательными, как при ВФ Хеннинга и других классических ВФ. Поэтому применение вариаций ВФ КБР “высоких порядков” следует сочетать с когерентным накоплением сигнала при  $M \geq 5$ . Как видно из рис. 9 и данных табл. 2, применение весовых функций КБР для взвешивания реализаций аддитивной смеси ФМ-СРС, шума и УП позволяет достичь существенного повышения алгоритмических возможностей режекции помехи на основе ДПФ. Как видно из табл. 2, для принятых условий статистических экспериментов, выигрыш совокупной обработки ФМ-СРС на фоне УП в расширении “рабочего” диапазона отношений  $q_{пс}$ , при применении ВФ  $K_9^5 BR^3$ , в сравнении с применением обоснованной ранее кубической вариацией ВФ Хеннинга [4, 7], в зависимости от требований к вероятности  $P$  составляет порядка 20 дБ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследована возможность повышения эффективности обработки сигналов

с расширенным спектром на фоне УП при применении для взвешивания реализаций современных ВФ, основанных на атомарных функциях  $\sup_a^b(t)$  — функциях Кравченко. Установлено, что среди рассмотренных ВФ рекордные характеристики подавления УП обеспечиваются при применении в (1) вариаций “высоких порядков” ВФ Кравченко—Бернштейна—Рогозинского. Также установлено, что при сравнительно малом числе удаляемых ЧВ ( $N_{уд} = 10$ ) лидирует ВФ Кравченко—Дольфа—Чебышева (табл. 1). При повышении числа удаляемых ЧВ ( $N_{уд} = 50$ ) рекордные характеристики отмечены для ВФ  $K_9^5 BR^5$ . Несколько повышенные значения энергетических потерь полезного сигнала, зарегистрированные при применении ВФ КБР (в сравнении с классическими ВФ, табл. 1), в значительной мере нивелируются при использовании режима когерентного накопления в целевой процедуре корреляционной обработки СРС, выполняемой после режекции УП. Таким образом, проведенное исследование установило возможность повышения эффективности частотной режекции узкополосных помех за счет применения ВФ Кравченко—Дольфа—Чебышева ( $K_4 DЧ_3$ ) и Кравченко—Бернштейна—Рогозинского ( $K_9^5 BR^3$ ,  $K_9^5 BR^5$ ,  $K_{10}^4 BR^3$ ,  $K_{10}^5 BR^5$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф., Назаров Л.Е., Пустовойт В.И. // РЭ. 2019. Т. 64. № 10. С. 976.
2. Кравченко В.Ф., Назаров Л.Е., Пустовойт В.И. // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 95.
3. Назаров Л.Е. // Журн. радиоэлектроники. 2021. № 12. <http://jre.cplire.ru/jre/dec21/2/text.pdf> <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.2>
4. Кузьмин Е.В. // Цифровая обработка сигналов. 2021. № 4. С. 16.
5. Кузьмин Е.В., Зограф Ф.Г. // РЭ. 2022. Т. 67. № 8. С. 774.
6. Назаров Л.Е. // Журн. радиоэлектроники. 2022. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug22/1/text.pdf> <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.1>
7. Кузьмин Е.В. // Цифровая обработка сигналов. 2023. № 1. С. 48.
8. Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
9. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. М.: Радио и связь, 1993.
10. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехника, 2010.

11. *Davidovici S., Kanterakis E.G.* // IEEE Trans. 1989. V. Com-37. № 7. P. 713.
12. *Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е.* и др. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью. М.: Радио и связь, 2003.
13. *Шилов А.И., Бакитько Р.В., Польщиков В.П., Хацкелевич Я.Д.* // Радиотехника. 2005. № 7. С. 31.
14. *Бакитько Р.В., Польщиков В.П., Шилов А.И., Хацкелевич Я.Д., Болденков Е.Н.* // Радиотехника. 2006. № 6. С. 13.
15. *Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И.* // ДАН. 2002. Т. 386. № 1. С. 38.
16. *Дворкович В.П., Дворкович А.В.* Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
17. *Будунова К.А., Кравченко В.Ф.* // Физические основы приборостроения. 2022. Т. 11. № 1(43). С. 2.
18. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
19. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.

## RESEARCH OF THE EFFICIENCY OF KRAVCHENKO WEIGHTING FUNCTIONS AND COMBINATIONS BASED ON THEM IN THE PROBLEM OF NARROW BAND INTERFERENCE REJECTION

**E. V. Kuzmin\***

*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russia*

*\*E-mail: ekuzmin@sfu-kras.ru*

Received June 2, 2023; revised June 2, 2023; accepted June 24, 2023

The influence of weight functions (WFs) of preliminary weighting on the quality of narrowband interference rejection based on direct and inverse discrete Fourier transforms has been studied. Classical and modern WFs are considered: Kravchenko, Kravchenko–Dolph–Chebyshev, Kravchenko–Gauss, Kravchenko–Bernstein–Rogozinsky. Quantitative estimates of efficiency were obtained – the coefficients of interference suppression and signal transmission, as well as their product – the total efficiency coefficient. Graphic examples of the behavior of the total efficiency coefficient depending on the interference frequency are shown. Estimates of the indicated quality indicators are presented when a fixed number of frequency samples are removed from the spectrum. The families of dependences of the probabilities of correctly performing a search for a spread spectrum signal on the “interference/signal” ratio when using modern WFs to weigh the implementations of an additive mixture of signal, interference and noise are presented. The significant advantage of modern WFs formed through combinations with Kravchenko functions in the problem of interference rejection has been demonstrated and confirmed.

*Keywords:* Narrowband interference, spread spectrum signals, Kravchenko weighting functions, interference rejection, interference suppression coefficient, signal transmission coefficient, correct searching probability

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 551.463.621.391

### ВОЗМОЖНОСТЬ ДИАГНОСТИКИ СЛОИСТЫХ СРЕД ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИМ ГИДРОЛОКАТОРОМ БОКОВОГО ОБЗОРА

© 2024 г. В. И. Каевичер, А. П. Кривцов, И. В. Смольянинов\*, А. В. Элбакидзе

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация*

*\*E-mail: ilia159@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.

После доработки 27.11.2023 г.

Принята к публикации 27.11.2023 г.

Рассмотрен метод и разработан алгоритм, позволяющий выявить слоистую структуру среды распространения зондирующего сигнала по данным полосовой съемки интерферометрического гидролокатора бокового обзора (ИГБО) с расположением антенн в вертикальной плоскости. На примере математического моделирования фазоразностных измерений ИГБО для многослойных рассеивающих плоскостей продемонстрированы возможности предлагаемого алгоритма определять их пространственное положение в среде распространения волны. Выполнен анализ точности вычисления положения рассеивающих слоев по высотам (глубинам) и с различным уклоном. Подтверждена эффективность метода и алгоритма для диагностики структуры слоистых сред. Проверена эффективность метода на экспериментальных данных, полученных с помощью ИГБО.

*Ключевые слова:* зондирующий сигнал, интерферометрический гидролокатор бокового обзора, фазоразностные измерения, диагностика структуры слоистых сред

DOI: 10.31857/S0033849424020065, EDN: КМОВЖС

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Радиофизические методы зондирования находят широкое применение при определении структуры и параметров различных сред [1–5]. Одним из важных направлений таких исследований является изучение слоистых сред [6]. Это относится к исследованиям ионосферы, тропосферы, а также водной среды и дна морей и океанов. Для исследований слоистости сред разработаны многочисленные методы и измерительные системы, в том числе интерферометрический гидролокатор бокового обзора (ИГБО), предназначенные для изучения рельефа подстилающей поверхности на основе измерения наклонной дальности до рассеивающих элементов поверхности и углов прихода эхо-сигналов [7–9]. На рис. 1 приведена геометрия съемки подстилающей поверхности интерферометром бокового обзора. Для излучения зондирующей посылки используется антенна  $A_0$ , а для приема сигналов, рассеянных подстилающими поверхностями, антенны  $A_1$  и  $A_2$ .

Цель данного исследования – разработать методику обнаружения слоев в среде распро-

странения волн и вычисления их расположения по высотам (глубинам).

На основе методики, приведенной в работе [9], проанализируем возможность обнаружения в морской среде горизонтальных звукорассеивающих слоев (ЗРС) и вычисления их пространственного положения с помощью ИГБО (см. рис. 1). Вычисления интерферометрической разности фаз проведем для вертикального расположения излучающей и приемных антенн  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  и двух слоев рассеивающих плоскостей (для примера на глубине 20 и 100 м). Для обоснования эффективности предлагаемой методики для диагностики слоистых сред проведем моделирование алгоритма для водной среды с обоими слоями. В процессе модельных расчетов рассмотрим параметры, влияющие на точность диагностики, и проверим их на экспериментальных результатах, полученных ИГБО при исследованиях участка дна с выровненным рельефом, и слабых ЗРС в водной среде на глубине около 100 м (рис. 2).

Обоснуем возможность диагностики слоистых сред ИГБО.

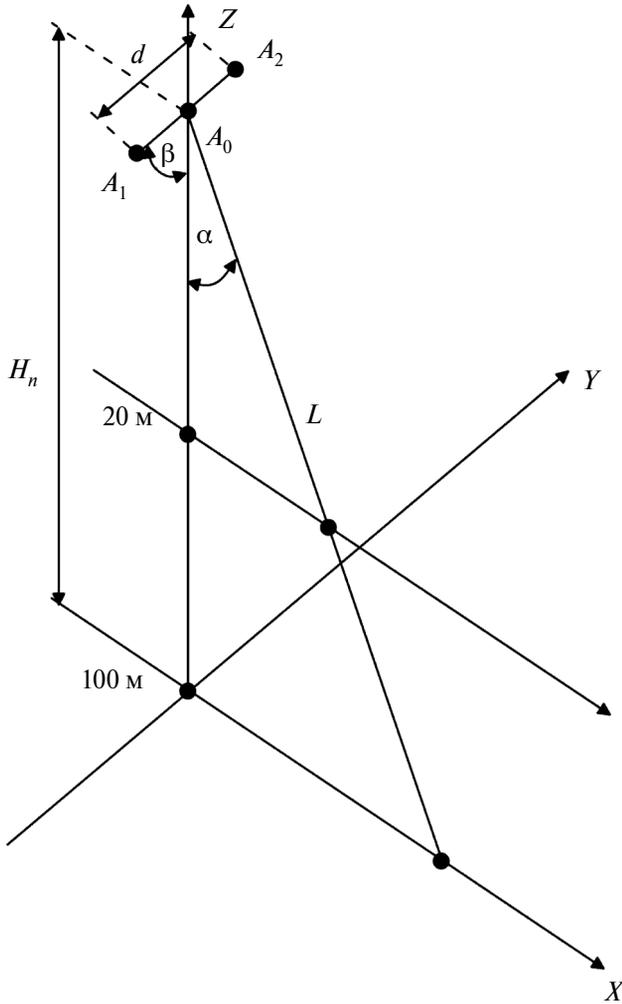


Рис. 1. Геометрия съемки подстилающей поверхности интерферометром бокового обзора.

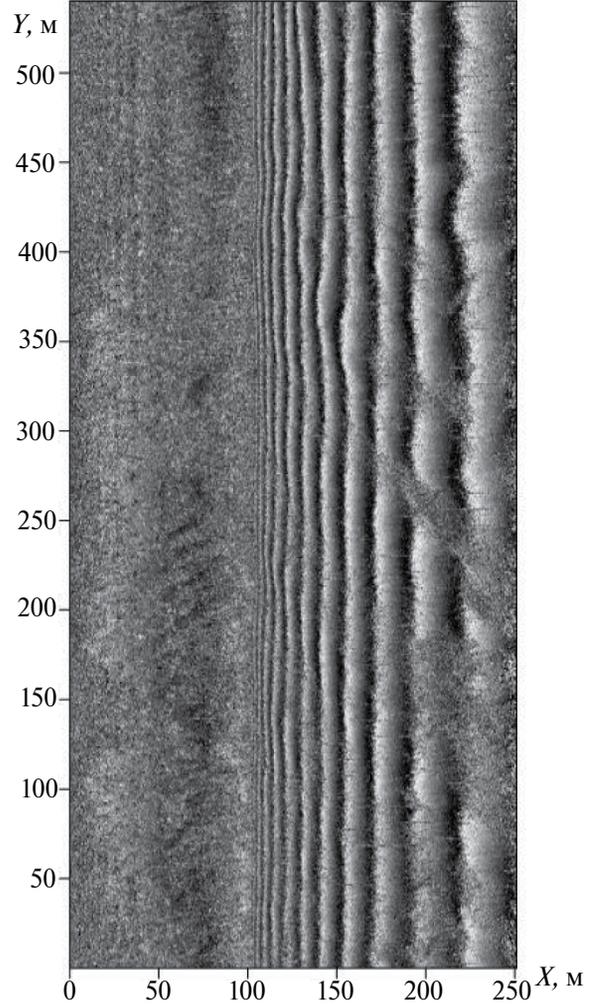


Рис. 2. Пример разности фаз, полученной ИГБО.

## 2. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ РАССЕИВАЮЩИХ СЛОЕВ

Полученные при съемке данные для интерферометрической разности фаз при плоской отражающей поверхности, соответствующие одному циклу излучения и приема сигнала, можно записать в следующем виде:

$$\varphi_n(t) = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos(\alpha_n(t) + \beta), \quad (1)$$

где

$$\alpha_n(t) = \arccos\left(\frac{2H_n}{ct}\right).$$

Здесь  $H_n$  – расстояние до слоя  $n$ ,  $c$  – скорость распространения зондирующего сигнала,  $t$  – время прихода эхо-сигнала,  $d$  – расстояние между приемными антеннами интерферометра,  $\lambda$  – длина волны,  $\beta$  – угол наклона базы интер-

ферометра. На рис. 3 приведены зависимости вычисленной интерферометрической разности фаз от наклонной дальности  $L$  до рассеивающего элемента поверхности дна при вертикальной ориентации базы интерферометра ( $\beta = 0$ ,  $d/\lambda = 20$ ) для ЗРС на глубинах 20 и 100 м.

Как видно из рисунка, интерферометрическая разность фаз имеет вид сигнала с частотной модуляцией. Если рассматривать интерферометрическую разность фаз  $\varphi(t)$  в качестве сигнала, зависящего от глубины  $H$ , как от параметра, то корреляционная функция (КФ) сигнала  $\varphi_n(t)$  при определенном  $H_n$  и КФ моделей  $\varphi(t)$  по всем глубинам может быть записана в следующем виде:

$$\rho_n(H_n, H) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(H_n, t) \varphi(H, t) dt, \quad (2)$$

где  $T$  – время приема отраженного сигнала ИГБО.

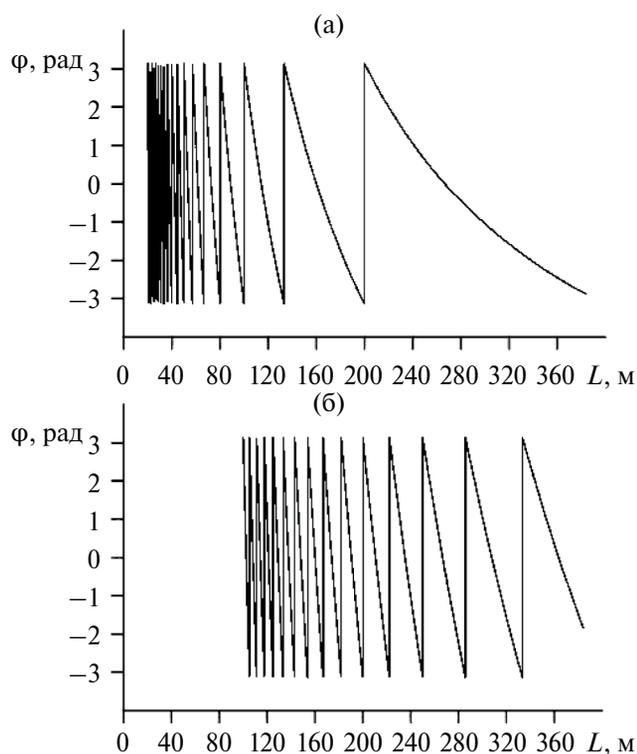


Рис. 3. Зависимость интерферометрической разности фаз от наклонной дальности для ЗРС на глубинах 20 (а) и 100 м (б).

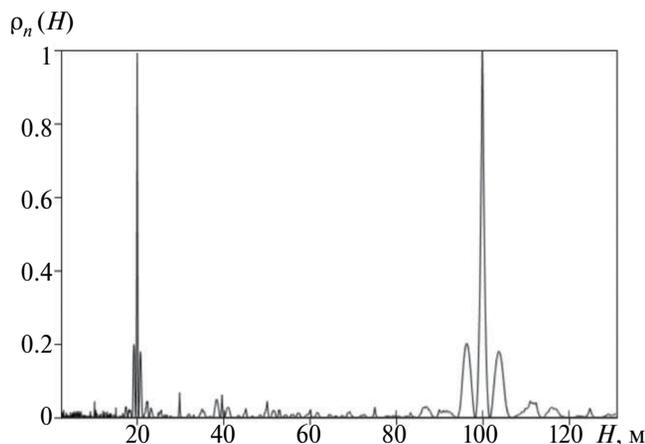


Рис. 4. Результат моделирования корреляционной обработки для плоских, горизонтальных ЗРС на глубинах 20 и 100 м.

Для заданного значения  $H_n$  нормированная КФ является функцией, зависящей только от глубины  $H$  :

$$\rho_n(H) = \frac{\int_0^T \varphi(H_n, t) \varphi(H, t) dt}{\int_0^T \varphi^2(H_n, t) dt}$$

На рис. 4 представлен модуль этой функции, рассчитанный для двух ЗРС на глубинах 20 и

100 м соответственно. Для вычислений шаг по глубине взят равным 5 см. Как видно по результатам модельных расчетов, КФ имеет основной максимум и существенный уровень боковых лепестков, что приводит к проявлению собственных шумов сигнала при картировании протяженных ЗРС. При этом если калибровочное значение базы интерферометра известно с высокой точностью, то максимумы функций расположены на глубинах, заложенных в модель, а пики имеют высокое соотношение сигнал/шум и достаточно узкие, что подтверждает возможность разрешения слоев по глубинам их расположения.

Отметим, что разрешающая способность алгоритма и соотношение сигнал/шум увеличивается при увеличении базы интерферометра.

Для оценки разрешения рассмотренного алгоритма вернемся к рис. 3. Видно, что период разности фаз меняется от некоторого начального значения до бесконечности в предельном случае. То есть полосу частот такого сигнала можно оценочно считать равной максимальной частоте, соответствующей первому периоду. Для  $d/\lambda \gg 1$  оценка длительности первого периода вычисляется по формуле

$$\tau \approx (2H_n \lambda) / cd,$$

соответственно, разрешение по высоте (глубине) составит

$$\Delta H \approx 2H_n \frac{\lambda}{d}.$$

Для базы интерферометра  $d/\lambda = 20$  разрешение по глубине составит  $\Delta H \approx 0.1H_n$ .

При реальной работе ИГБО угол  $\beta$  может отличаться от нуля либо слои, рассеивающие зондирующий сигнал, расположены не горизонтально, поэтому в модель следует внести зависимость  $\varphi(t)$  в формуле (1) от угла  $\beta$  и рассматривать как функцию, зависящую от двух параметров —  $H$  и  $\beta$ . Двумерная корреляционная функция такого сигнала определяется соотношением

$$\rho(\Delta H, \Delta\beta) = \int_0^{t_{\max}} \varphi(H_0, \beta_0, t) \varphi(H_0 + \Delta H, \beta_0 + \Delta\beta, t) dt. \quad (3)$$

где  $t_{\max}$  — время приема сигнала.

На рис. 5 представлен результат моделирования нормированной двумерной корреляционной функции в зависимости от глубины  $H$  и угла  $\beta$  для плоского слоя на глубине 100 м. База интерферометра  $d/\lambda = 20$ . Профиль разреза КФ

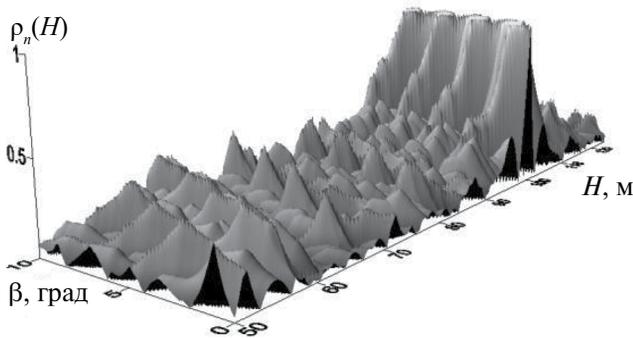


Рис. 5. Результат моделирования нормированной двумерной корреляционной функции в зависимости от глубины  $H$  и угла  $\beta$ ; глубина слоя модели 100 м, база интерферометра  $d/\lambda = 20$ .

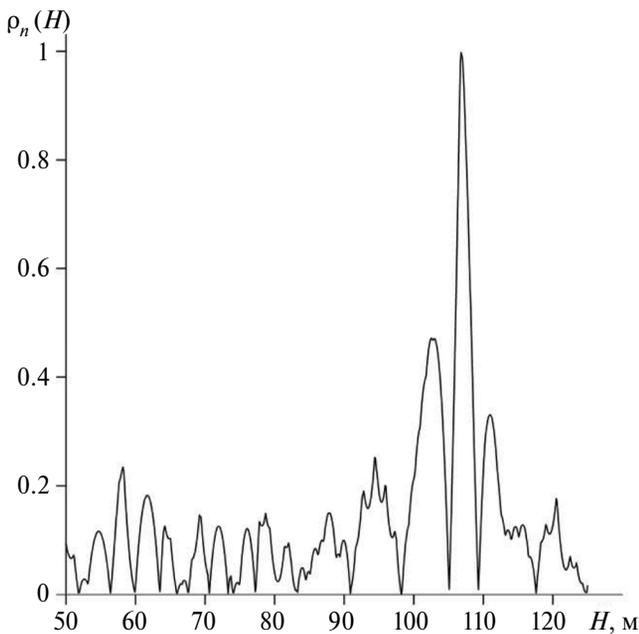


Рис. 6. Результат моделирования корреляционной обработки для плоского ЗРС на глубине 100 м (разрез по углу  $\beta = 5^\circ$ ).

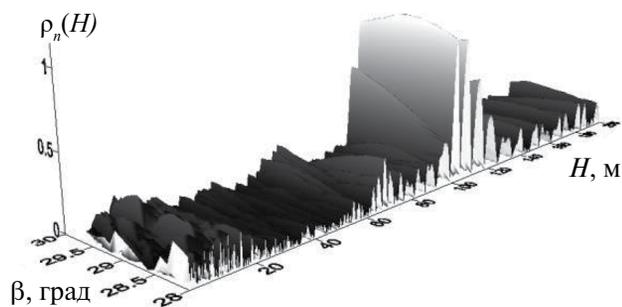


Рис. 7. Результат двумерной корреляционной обработки экспериментальных измерений ИГБО в зависимости от глубины  $H$  и угла наклона  $\beta$ .

по  $\beta = 0^\circ$ , соответствующий горизонтальному положению слоя, совпадает с результатом моделирования, приведенным на рис. 4, что же касается разреза при  $\beta = 5^\circ$  (рис. 6), то наклон слоя существенно влияет на результаты оценки его глубины. Если по разрезу  $\beta = 0^\circ$  слой определяется на глубине 100 м, как это и закладывалось при моделировании, то при  $\beta = 5^\circ$  вычисления дают смещенную оценку примерно на 7 м.

Полученные результаты моделирования показывают возможность применения предложенного алгоритма для обнаружения в морской среде ЗРС и измерения расстояния до них с точностью, зависящей от калибровки интерферометра и отклонения ЗРС от горизонтальной плоскости.

### 3. ПРОВЕРКА РАБОТЫ АЛГОРИТМА НА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим возможности разработанного алгоритма по обнаружению и оценке положения ЗРС в морской среде. С этой целью используем результаты работы интерферометра бокового обзора, приведенные на рис. 2. Как следует из рисунка, хорошо просматривается интерферометрическая разность фаз сигналов, рассеянных поверхностью дна. Кроме того, в толще воды слабо просматривается интерферометрическая разность фаз, обусловленная наличием ЗРС. Съемка проводилась при  $d/\lambda = 13$  и наклоне антенн интерферометра  $30^\circ$ .

Применим разработанный алгоритм к имеющимся экспериментальным данным. На рис. 7 представлены результаты расчета двумерной корреляционной функции с применением разработанного алгоритма к экспериментальным измерениям ИГБО в зависимости от глубины  $H$  и угла  $\beta$ .

На рисунке хорошо выделяется слой, обусловленный донным рассеянием на глубине около 100 м. Как видно, максимум, соответствующий глубине этого слоя, смещен по углу  $\beta$  примерно на  $\Delta\beta = -1^\circ$ . Если проанализировать более слабые максимумы в водной толще, то можно отметить слабые ЗРС в районе глубины 70 м в разрезе  $\beta = 28^\circ$  и глубины 50 м в разрезе  $\beta = 30^\circ$ .

Отметим, что в соответствии с условиями экспериментальной съемки эффективная вертикальная база ИГБО составляла около  $11\lambda$ , что почти в два раза меньше, чем при проведенном моделировании. Однако принципиальная возможность разработанной методики для диагностики слоистых сред подтверждена экспериментально.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснован способ и разработан алгоритм диагностики слоистых сред, основанный на обнаружении и вычислении положения рассеивающих слоев с помощью интерферометра бокового обзора. Проведено опробование алгоритма на математических моделях, подтвердившее его эффективность для решения поставленной задачи. Алгоритм проверен на примере обработки экспериментальных данных, полученных ИГБО при съемке рельефа на участке со сравнительно плоским дном. Обоснована возможность применения разработанного алгоритма для обнаружения звукорассеивающих слоев при исследовании морей и океанов.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (тема № 075-01133-22-00).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров А.И., Яковлев О.И., Смирнов В.М.* Спутниковый мониторинг земли: Радиолокационное зондирование поверхности. М.: Либрокон, 2013.
2. *Арманд Н.А.* // РЭ. 1995. Т. 40. № 3. С. 357.
3. *Armand N.A., Polyakov V.M.* Radio propagation and remote sensing of the environment. N.Y.: CRC Press, 2005.
4. *Андреева И.Б.* // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 437.
5. *Морозов А.Н., Лемешко Е.М., Федоров С.В.* // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 5. С. 513.
6. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957.
7. *Kaevitser V.I., Razmanov V.M.* // Physics-Uspekhi (Advances in Phys. Sci.). 2009. V. 179. № 2. P. 218.
8. *Кривцов А.П., Смольянинов И.В., Элбакидзе А.В., Степанов А.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr17/2/text.pdf>
9. *Каевитсер В.И., Кривцов А.П., Смольянинов И.В., Элбакидзе А.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2022. № 10. <http://jre.cplire.ru/jre/oct22/7/text.pdf>

## POSSIBILITY OF DIAGNOSTICS OF LAYERED MEDIA WITH INTERFEROMETRIC SIDE-VIEW SONAR

V. I. Kaevitser, A. P. Krivtsov, I. V. Smolyaninov\*, A. V. Elbakidze

*Fryazino branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics Russian Academy of Sciences, Fryazino Moscow oblast, 141190 Russia*

*\*E-mail: ilia159@mail.ru*

Received December 15, 2022; revised November 27, 2023; accepted November 27, 2023

A method is considered and an algorithm is developed that makes it possible to identify the layered structure of the propagation medium of a probing signal based on strip survey data from an interferometric side-scan sonar (ISSS) with antennas located in a vertical plane. Using the example of mathematical modeling of phase-difference measurements of ISSS for multilayer scattering planes, the capabilities of the proposed algorithm to determine their spatial position are demonstrated in the wave propagation medium. An analysis of the accuracy of calculating the position of scattering layers at heights (depths) and with different slopes was performed. The effectiveness of the method and algorithm for diagnosing the structure of layered media has been confirmed. The effectiveness of the method was tested on experimental data obtained using ISSS.

*Keywords:* probe signal, interferometric side-scan sonar, phase difference measurements, diagnostics of the layered media structure

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

УДК 621.391.2

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СИГНАЛА  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

© 2024 г. В. В. Климов\*

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190, Российская Федерация*

\*E-mail: klimov47@list.ru

Поступила в редакцию 24.04.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята в печать 18.01.2023 г.

Рассмотрен метод оценивания спектральных параметров полигармонического процесса методом центральных конечных разностей чётного порядка для случая, когда ряд числовых наблюдений достаточно большой, а количество гармонических компонент в исследуемом процессе априори неизвестно.

*Ключевые слова:* оценивание спектральных параметров, метод конечных разностей, гармонические компоненты, метод наименьших квадратов, матрица Грама

DOI: 10.31857/S0033849424020072, EDN: KMLVKC

Рассмотрим модифицированный метод оценивания параметров применительно к случаю, когда ряд числовых наблюдений  $y_1, y_2, \dots, y_m$  достаточно большой и, соответственно, допускает возможность формирования центральных конечных разностей высокого порядка (много больше, чем это необходимо для метода, описанного в [1]). Положим на начальном этапе рассмотрения, что число  $N$  синусоидальных компонент нам известно. Пусть для максимального порядка центральной конечной разности  $2l$ , которую можно оформить согласно алгоритму [1] на основе имеющегося ряда  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , выполняется условие  $2l \gg 4N$ .

Пусть рассматриваемый процесс можно представить в следующем виде:

$$y_s = y_{cp} + \sum_{i=1}^N r_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s g + \alpha_i\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_i = 4 \sin^2 \frac{\pi g}{T_i}; \quad A_i^{(k)} = r_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}\right),$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

$$B_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^j = \begin{cases} y_{sj}^{(j)} - y_{cp}, & \text{при } t = 0 \\ (-1)^t \Delta^{2t} y_{sk}^{(k)}, & \text{при } t = 1, 2, \dots, N, \dots \\ k = 1, 2, \dots, l. \end{cases}$$

Рассмотрим  $l + 1$  ( $l \gg 2N$ ) уравнений системы

$$B_k = \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, l. \quad (1)$$

Положим, что величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  – корни уравнения

$$\lambda^N + C_{N-1} \lambda^{N-1} + C_{N-2} \lambda^{N-2} + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0. \quad (2)$$

Возьмем в системе (1) какую-нибудь группу из  $N+1$  последовательных уравнений, например группу

$$\begin{aligned} B_t &= A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_N \lambda_N^t, \\ B_{t+1} &= A_1 \lambda_1^{t+1} + A_2 \lambda_2^{t+1} + \dots + A_N \lambda_N^{t+1}, \\ &\vdots \\ B_{t+N} &= A_1 \lambda_1^{t+N} + A_2 \lambda_2^{t+N} + \dots + A_N \lambda_N^{t+N}. \end{aligned} \quad (3)$$

Умножим первое уравнение на  $C_0$ , второе – на  $C_1, \dots, N$ -е – на  $C_{N-1}$ , тогда, складывая их и добавляя  $N+1$  уравнений системы (3), получим

$$\begin{aligned} C_0 B_t + C_1 B_{t+1} + \dots + C_{N-1} B_{t+N-1} + B_{t+N} &= \\ = A_1 \lambda_1^t (C_0 + C_1 \lambda_1 + \dots + C_{N-1} \lambda_1^{N-1} + \lambda_1^N) + & \\ + A_2 \lambda_2^t (C_0 + C_1 \lambda_2 + \dots + C_{N-1} \lambda_2^{N-1} + \lambda_2^N) + \dots & \\ + A_N \lambda_N^t (C_0 + C_1 \lambda_N + \dots + C_{N-1} \lambda_N^{N-1} + \lambda_N^N). & \end{aligned} \quad (4)$$

Так как по предположению  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  — где корни уравнения (2), то

$$C_0 + C_1\lambda_i + \dots + C_{N-1}\lambda_i^{N-1} + \lambda_i^N = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

и, значит,

$$C_0B_i + C_1B_{i+1} + \dots + C_{N-1}B_{i+N-1} + B_{i+N} = 0. \quad (6)$$

Таким же образом, полагая последовательно  $t$  равным  $0, 1, 2, \dots, l-N$  получим систему линейных уравнений с неизвестными  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ :

$$\left. \begin{aligned} B_0C_0 + B_1C_1 + \dots + B_{N-1}C_{N-1} + B_N &= 0, \\ B_1C_0 + B_2C_1 + \dots + B_NC_{N-1} + B_{N+1} &= 0, \\ \dots & \\ B_{l-N}C_0 + B_{l-N+1}C_1 + \dots + B_{l-1}C_{N-1} + B_l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решаем эту линейную относительно параметров  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$  систему по методу наименьших квадратов. При этом учтем, что число уравнений  $l-N+1$  много больше числа неизвестных ( $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ ). Положим, что мы взяли какую-нибудь систему значений ( $C_0^*, C_1^*, \dots, C_{N-1}^*$ ), подставили в уравнение (7) и составили разности

$$\left. \begin{aligned} B_0C_0^* + B_1C_1^* + \dots + B_{N-1}C_{N-1}^* + B_N &= \varepsilon_1, \\ B_1C_0^* + B_2C_1^* + \dots + B_NC_{N-1}^* + B_{N+1} &= \varepsilon_2, \\ \dots & \\ B_{l-N}C_0^* + B_{l-N+1}C_1^* + \dots + B_{l-1}C_{N-1}^* + B_l &= \varepsilon_{l-N+1}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Эти разности представляют те ошибки, которые имеют место в наблюдаемых величинах  $B_N, B_{N+1}, \dots, B_l$  при системе значений ( $C_0^*, C_1^*, \dots, C_{N-1}^*$ ). Составим сумму квадратов разностей

$$F(C_0^*, C_1^*, \dots, C_{N-1}^*) = \sum_{i=1}^{l-N+1} \varepsilon_i^2 = \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}, \quad (9)$$

где  $\bar{\varepsilon}^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{l-N+1})$ .

Оценки по методу наименьших квадратов получают при минимизации функции (9). Минимум функций (9) получим, приравняв к нулю частные производные

$$\frac{\partial F(C_0^*, C_1^*, \dots, C_{N-1}^*)}{\partial C_i^*} = 0; \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в систему уравнений (10), получим нормальную систему уравнений, которую запишем в матричном виде [2]

$$\mathbf{V}_{(l-N+1, N)}^T \mathbf{V}_{l-N+1, N} \bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{V}_{(l-N+1, N)}^T \bar{\mathbf{H}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{V}_{l-N+1, N} = \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{N-1} \\ B_1 & B_2 & \dots & B_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{l-N} & B_{l-N+1} & \dots & B_{l-1} \end{vmatrix}; \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_{N-1} \end{vmatrix}; \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} B_N \\ B_{N+1} \\ \dots \\ B_l \end{vmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{V}_{(l-N+1, N)}^T \mathbf{V}_{l-N+1, N} = \mathbf{K}(N \times N)$  представляет собой таблицу коэффициентов при неизвестных  $\bar{\mathbf{C}}^T = (C_0, C_1, \dots, C_{N-1})$  в системе нормальных уравнений и является матрицей Грама для системы векторов [2]

$$\bar{\mathbf{Z}}_K = \begin{vmatrix} B_K \\ B_{K+1} \\ \dots \\ B_{l-N+K} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

т.е.

$$\mathbf{K}(N \times N) = \mathbf{V}_{(l-N+1, N)}^T \mathbf{V}_{l-N+1, N} = \begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{Z}}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0) & (\bar{\mathbf{Z}}_0, \bar{\mathbf{Z}}_1) & \dots & (\bar{\mathbf{Z}}_0, \bar{\mathbf{Z}}_{N-1}) \\ (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_0) & (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_1) & \dots & (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_{N-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{\mathbf{Z}}_{N-1}, \bar{\mathbf{Z}}_0) & (\bar{\mathbf{Z}}_{N-1}, \bar{\mathbf{Z}}_1) & \dots & (\bar{\mathbf{Z}}_{N-1}, \bar{\mathbf{Z}}_{N-1}) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Для нахождения неизвестных  $\bar{\mathbf{C}}^T = (C_0, C_1, \dots, C_{N-1})$  умножим обе части матричного уравнения (11) слева на  $\mathbf{K}^{-1}(N \times N)$ . Получим

$$\bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{K}^{-1}(N \times N) \mathbf{V}_{(l-N+1, N)}^T \bar{\mathbf{H}}. \quad (15)$$

Решение системы нормальных уравнений (15) определяет те значения  $\bar{\mathbf{C}}^*$ , при которых достигается точка минимума функции  $F(\bar{\mathbf{C}})$  (9) в  $N$ -мерном пространстве. Функция  $F(\bar{\mathbf{C}})$  является неотрицательной квадратичной относительно  $\bar{\mathbf{C}}$ . Поэтому минимум функции  $F(\bar{\mathbf{C}})$  всегда существует, а так как точка минимума обязательно удовлетворяет нормальной системе, то последняя является совместной, т.е. всегда имеет решение. Однако нормальная система может иметь и несколько решений в тех случаях, когда матрица  $\mathbf{K}$  является особенной. Для однозначного определения вектора  $\bar{\mathbf{C}}^*$  из (15) необходимо, чтобы

матрица  $\mathbf{K}$  (матрица Грама) была неособенной, т.е. система векторов  $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K = 0, 1, \dots, N - 1\}$  была линейно независимой. Только в этом случае существует обратная матрица  $\mathbf{K}^{-1}$  и однозначное решение (15).

Рассмотрим, что представляет собой матрица Грама  $\mathbf{K} (N \times N)$ .

Так как  $\mathbf{K} (N \times N) = \mathbf{B}_{(l-N+1, N)}^T \mathbf{B}_{l-N+1, N}$ , то распишем матрицу  $\mathbf{B}_{l-N+1, N}$

$$\mathbf{B}_{l-N+1, N} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N A_i & \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i & \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^{N-1} \\ \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i & \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^N \\ \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^{l-N} & \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^{l-N+1} & \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^{l-1} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ ,

$$\mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{l-N} & \lambda_2^{l-N} & \dots & \lambda_N^{l-N} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{(N \times N)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тогда матрица  $\mathbf{K} (N \times N)$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K} (N \times N) &= \mathbf{B}_{(l-N+1, N)}^T \mathbf{B}_{l-N+1, N} = \\ &= \left[ \mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)} \mathbf{A} \mathbf{L}_{(N \times N)}^T \right]^T \times \left[ \mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)} \mathbf{A} \mathbf{L}_{(N \times N)} \right] = (18) \\ &= \mathbf{L}_{(N \times N)} \mathbf{A} \mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)}^T \mathbf{L}_{l-N+1 \times N} \mathbf{A} \mathbf{L}_{(N \times N)}^T. \end{aligned}$$

Определитель матрицы  $\mathbf{K} (N \times N)$ . Учитывая, что определитель матрицы

$\mathbf{L} (N \times N)$  – определитель Вандермонда

$$\det \mathbf{L} (N \times N) = \prod_{1 \leq j < i \leq N} (\lambda_i - \lambda_j),$$

а определитель матрицы  $\mathbf{A} - \det \mathbf{A} = A_1 A_2 \dots A_N$ , тогда можно записать в виде

$$\det \mathbf{K} (N \times N) = A_1^2 A_2^2 \dots A_N^2 \prod_{1 \leq j < i \leq N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-N} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{l-N} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Для вычисления определителя, стоящего в правой части выражения (19), воспользуемся формулой Бине-Коши [2]

$$\begin{aligned} \det \mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)}^T \mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)} &= \\ &= \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N \leq l-N+1} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ m_1 & m_2 & \dots & m_N \end{pmatrix}, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ m_1 & m_2 & \dots & m_N \end{pmatrix}$  – минор порядка  $N$  матрицы  $\mathbf{L}_{(l-N+1 \times N)}$ .

Таким образом, определитель матрицы Грама  $\det \mathbf{K} (N \times N)$  можно записать в виде

$$\det \mathbf{K} (N \times N) = A_1^2 A_2^2 \dots A_N^2 \prod_{1 \leq j < i \leq N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \det \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N \leq l-N+1} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ m_1 & m_2 & \dots & m_N \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В предположении  $A_i \neq 0, \lambda_i \neq \lambda_j; i, j = 1, N$ ,  $\det \mathbf{K} (N \times N) \neq 0$  так как среди миноров порядка  $N$  матрицы  $\mathbf{L} (l - N + 1 \times N)$  обязательно имеются ненулевые, таким образом получим, что при числе гармоник  $N$  определитель матрицы Грама положителен ( $\det \mathbf{K} (N \times N) > 0$ ) и нормальная

система уравнений (11) имеет единственное решение (15).

Покажем, что последовательность определителей матрицы Грама  $\{\det \mathbf{K} (t \times t), t = 1, 2, 3, \dots\}$  позволяет определить число гармоник. Пусть

неизвестное число компонент равно  $N$ . По наблюдаемому отрезку временного ряда  $y_1, y_2, \dots, y_l$  определяется последовательность центральных конечных разностей четного порядка и на их основе формируется последовательность  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_l$ . Из последовательности  $\{\det \mathbf{B}_i, i = 0, 1, 2, \dots, l\}$  строятся векторы

$\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  (13), причем их размерность  $(l-p+1)$  выбирается больше предполагаемого максимально возможного числа  $P$  синусоидальных составляющих ( $l-p+1 > P_{\max}$ ). На основе векторов  $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  формируем последовательность матриц Грама  $\{\det \mathbf{K}(t \times t), t = 1, 2, 3, \dots\}$ , где

$$\mathbf{K}(t \times t) = \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{Z}}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0) & (\bar{\mathbf{Z}}_0, \bar{\mathbf{Z}}_1) & \dots & (\bar{\mathbf{Z}}_0, \bar{\mathbf{Z}}_{t-1}) \\ (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_0) & (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_1) & \dots & (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_{t-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{\mathbf{Z}}_{t-1}, \bar{\mathbf{Z}}_0) & (\bar{\mathbf{Z}}_{t-1}, \bar{\mathbf{Z}}_1) & \dots & (\bar{\mathbf{Z}}_{t-1}, \bar{\mathbf{Z}}_{t-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{l-p} \\ B_1 & B_2 & \dots & B_{l-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{t-1} & B_t & \dots & B_{l-p+t-1} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{t-1} \\ B_1 & B_2 & \dots & B_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{l-p} & B_{l-p+1} & \dots & B_{l-p+t-1} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{B}_{(l-p+1,t)}^T \mathbf{B}_{(l-p+1,t)} = \mathbf{L}_{(t \times N)} \mathbf{A} \mathbf{L}_{(l-p+1 \times N)}^T \mathbf{L}_{(l-p+1 \times N)} \mathbf{A}^T_{(t \times N)} \quad (22)$$

где

$$\mathbf{L}_{(t \times N)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \dots & \lambda_N^{t-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{(l-p+1 \times N)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{l-p} & \lambda_2^{l-p} & \dots & \lambda_N^{l-p} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Вычислим определитель  $\det \mathbf{K}(t \times t)$ . Используя (19) и (21), можно показать, что

$$\det \mathbf{K}(t \times t) = A_1^2 A_2^2 \dots A_N^2 \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N \leq l-p+1} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ m_1 & m_2 & \dots & m_N \end{pmatrix} \det [\mathbf{L}(t \times N) \mathbf{L}^T(t \times N)], \quad (24)$$

Используя формулу Бине-Коши для вычисления (24), получим

$$\det \mathbf{K}(t \times t) = A_1^2 A_2^2 \dots A_N^2 \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N \leq l-p+1} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ m_1 & m_2 & \dots & m_N \end{pmatrix} \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_t \leq N} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t \\ l_1 & l_2 & \dots & l_t \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где  $L \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t \\ l_1 & l_2 & \dots & l_t \end{pmatrix}$  – минор порядка  $t$  матрицы  $\mathbf{L}(t \times N)$ .

Если предположить, что  $A_i \neq 0, \lambda_i \neq \lambda_j; i, j = 1, N, \det \mathbf{K}(N \times N) > 0$  и  $t \leq N$ , то получим, что как среди миноров порядка  $T$  матрицы  $\mathbf{L}(t \times N)$ , так и среди миноров порядка  $N$  матрицы  $\mathbf{L}(l-p+1 \times N)$ , обязательно найдутся нулевые. Если же  $t > N$ , то  $\det \mathbf{K}(t \times t) = 0$ . Таким образом, определение числа  $N$  сводится к следующему.

По наблюдаемому отрезку  $y_1, y_2, \dots, y_m$  определяется последовательность центральных конечных разностей четного порядка, формируется последовательность  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_l$ , на основе которой строят векторы  $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  согласно (13), причем размерность их  $(l-p+1)$  предполагается больше максимального возможного числа  $P$  компонент в данном временном ряду. На основе векторов  $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  формируется последовательность матриц Грама  $\{\mathbf{K}(t \times t), t = 1, 2, 3, \dots\}$

$$\mathbf{K}(t \times t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{l-p} B_i^2 & \sum_{i=0}^{l-p} B_i B_{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^{l-p} B_i B_{i+t-1} \\ \sum_{i=0}^{l-p} B_{i+1} B_i & \sum_{i=0}^{l-p} B_{i+1}^2 & \dots & \sum_{i=0}^{l-p} B_{i+1} B_{i+t-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{l-p} B_{i+t-1} B_i & \sum_{i=0}^{l-p} B_{i+t-1} B_{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^{l-p} B_{i+t-1}^2 \end{pmatrix}; \quad t = 1, 2, \dots,$$

вычисляются определители  $\det \mathbf{K}(t \times t)$ . Процесс обрывается, как только  $\det \mathbf{K}(S \times S) = 0$ . Последнее означает, что число гармоник равно  $S-1$ . Зная  $N$ , можно определить вектор  $\bar{C}$  (15), корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{S-1}$  уравнения (5). Далее определяются периоды  $T_1, T_2, \dots, T_{S-1}$ . Такой подход позволяет проводить надежное и однозначное определение числа параметров тех компонент, для которых  $A_i \neq 0$ ;  $i = 1, N$ . В силу того, что возможна ситуация, когда выполняется  $A_i = 0$ , следует при оценивании параметров повторять описанную процедуру для нескольких значений  $y_{s1}, y_{s2}, \dots, y_{sk}$  и окончательно суждение выносить на основе анализа совместных результатов.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. Наука, М., 1978.
3. *Абрамов А.Д., Климов В.В., Коновалов Л.Н.* Математическое моделирование в задачах радиотехники и электроники/Под ред В.Ф. Крапивина. М.ИРЭ АН СССР, 1984. С. 152.

## STUDY OF SPECTRAL STRUCTURE SIGNAL BY FINITE DIFFERENCE METHOD

V. V. Klimov\*

*Fryazino branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics Russian Academy of Sciences Fryazino, Moscow oblast, 140190 Russia*

\*E-mail: klimov47@list.ru

Received April 24, 2022; revised November 11, 2022; accepted January 18, 2023

A method for estimating the spectral parameters of a polyharmonic process by the method of central finite differences of even order is considered for the case when the series of numerical observations is quite large and the number of harmonic components in the process under study is a priori unknown.

*Keywords:* estimation of spectral parameters, finite difference method, harmonic components, least squares method, Gram matrix

ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

УДК 621.3.011.72

**АНАЛИЗ ДИОДНЫХ СМЕСИТЕЛЕЙ МЕТОДОМ УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ОБОБЩЕННОМ МАТРИЧНОМ ВИДЕ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ. ЧАСТЬ 2. РАЗВЯЗКА МЕЖДУ ПОРТАМИ, ЭФФЕКТ РАССОГЛАСОВАНИЯ, УРОВЕНЬ ШУМА<sup>1</sup>**

© 2024 г. А. С. Коротков, О. А. Головань\*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация

\*E-mail: golovan\_oa@spbstu.ru

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.

После доработки 13.03.2023 г.

Принята к публикации 27.04.2023 г.

Представлен метод теоретического анализа развязок “вход-выход” и “гетеродин-выход” трех типов диодных преобразователей частоты: балансного, двойного балансного, тройного балансного. Для двух режимов работы гетеродина – “неинтенсивного” и “интенсивного” – получены зависимости развязки “вход-выход” балансного смесителя от нагрузочной проводимости и от амплитуды напряжения гетеродина. Проведен теоретический анализ и моделирование. Показано, что между расчетными результатами и результатами моделирования ошибка не превышает 3 дБ. Получены выражения для ошибок, вносимых технологическим разбросом параметров диодов, которые позволяют оценить предельно достижимые значения характеристик смесителей (коэффициента передачи и развязок по портам). Представлен метод анализа шумовых свойств смесителей, рассчитаны выходные шумовые спектры для каждого из элементов схем (входного сопротивления, диодов и выходного сопротивления), получены аналитические выражения коэффициентов шума. Теоретические оценки коэффициента шума подтверждаются результатами моделирования с точностью до 1 дБ.

*Ключевые слова:* диодные смесители, метод узловых потенциалов, передаточная функция, коэффициент шума, гетеродин, балансная схема

DOI: 10.31857/S0033849424020083, EDN: КМЛТРК

## ВВЕДЕНИЕ

Ранее в [1] нами был представлен подробный обзор существующих методов анализа преобразователей частоты. Однако известные методы применялись только для анализа коэффициента передачи, анализ развязок по портам не рассматривался. Рассмотренный в [2] метод на основе так называемой матрицы преобразования применяется для анализа шумовых характеристик смесителей [3]. Однако, как и в случае линейного анализа, существенно возрастает размерность матрицы, особенно для двойной и тройной балансных схем. Предлагаемая авторами методика

анализа диодных смесителей методом узловых потенциалов в обобщенном матричном виде в частотной области позволяет рассчитать коэффициент передачи преобразователя частоты, развязки “вход-выход” и “гетеродин-выход”, оценить предельно достижимые значения данных характеристик смесителей, провести анализ шумовых свойств схем смесителей различного уровня сложности с учетом собственных шумов преобразовательных элементов.

В данной работе рассмотрен линейный анализ диодных смесителей, включая анализ развязок “вход-выход” и “гетеродин-выход”, получены зависимости функций развязок от сопротивления нагрузки и амплитуды напряжения гетеродина; эффекты рассогласования, вносимые технологическим разбросом параметров диодов; оценки предельно достижимых значений коэффициентов передачи и функций развязок по портам. Рассмотрен шумовой анализ диодных

<sup>1</sup> Первая часть статьи “Анализ диодных смесителей методом узловых потенциалов в обобщенном матричном виде в частотной области. Часть 1. Коэффициент передачи” опубликована на русском языке в журнале “Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника” и на английском языке в “Radioelectronics and Communications Systems” (2022. Т. 65. № 2).

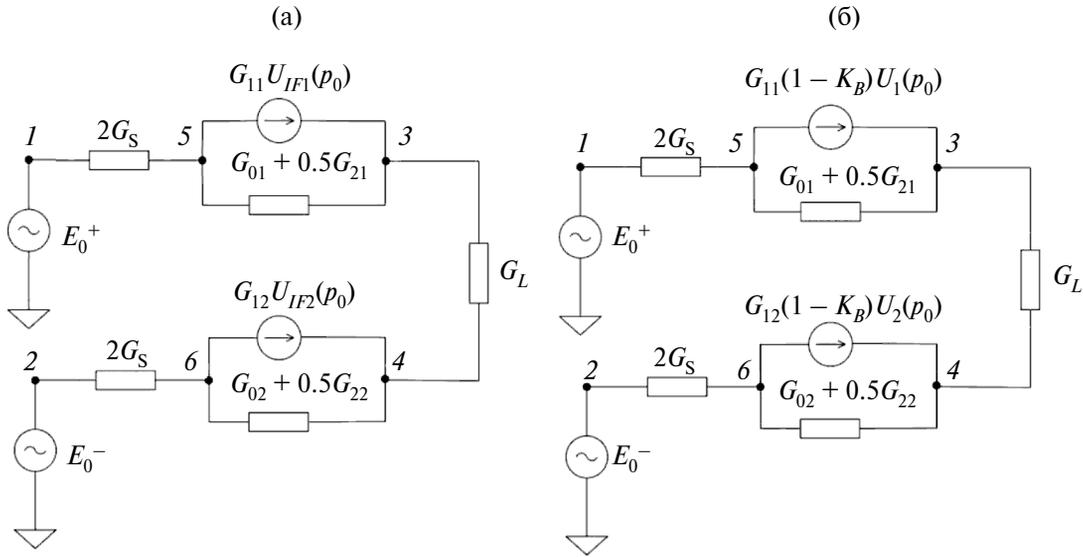


Рис. 1. Эквивалентная (а) и модифицированная (б) схемы балансного смесителя для анализа развязки “вход-выход”: узлы схемы 1...6 пронумерованы в соответствии с нумерацией строк и столбцов  $Y$ -матрицы смесителя.

смесителей – определена спектральная плотность шума на выходе смесителей и рассчитан коэффициент шума. Представлены результаты расчёта и моделирования характеристик диодных смесителей, рассмотренных в статье.

### 1. АНАЛИЗ РАЗВЯЗКИ МЕЖДУ ВХОДАМИ СМЕСИТЕЛЯ

#### 1.1. Анализ развязки между входом и выходом

Эквивалентная схема балансного смесителя для анализа развязки “вход-выход” представлена на рис. 1а.

Рассмотрим выражение для генераторов тока, управляемых напряжением  $G_{1i}U_{IFi}(p_0)$ , где  $i = 1, 2$  – индекс, соответствующий номеру диода. Во временной области выражения имеют вид  $G_{1i}U_{IFmi} \cos \omega_0 t$  [4]. Необходимо определить амплитуду напряжения  $U_{IFmi}$ . Для этого воспользуемся формулой связи амплитуд через коэффициент передачи схемы  $K_B$ . Для амплитудных значений запишем

$$U_{IFmi} = U_{5(6)m}(p_0 \pm j\omega_{LO}) - U_{3(4)m}(p_0 \pm j\omega_{LO}).$$

Если сопротивление источника сигнала мало, то получаем

$$U_{5(6)m}(p_0 \pm j\omega_{LO}) \approx U_{1(2)m}(p_0).$$

То есть перепишем выражение для  $U_{IFmi}$  как

$$U_{IFmi} = U_{1(2)m}(p_0) - U_{3(4)m}(p_0 \pm j\omega_{LO}) = U_{1(2)m}(p_0) - K_B U_{1(2)m}(p_0) = (1 - K_B)U_{1(2)m}(p_0).$$

Тогда выражение для генератора тока во временной области принимает вид

$$G_{1i}(1 - K_B)U_{1(2)m} \cos \omega_0 t,$$

а в частотной –

$$G_{1i}(1 - K_B)U_{1(2)m}(p_0). \tag{1}$$

Эквивалентная схема балансного смесителя для анализа эффекта прохождения входного сигнала на выход должна быть изменена с учетом формулы (1) согласно рис. 1б.

Система уравнений в БУП на частоте  $p_0$  имеет вид

$$[Y] \begin{bmatrix} U_1(p_0) \\ U_2(p_0) \\ U_3(p_0) \\ U_4(p_0) \\ U_5(p_0) \\ U_6(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5GE_0 \\ -0.5GE_0 \\ G_{11}(1 - K_B)U_1(p_0) \\ G_{12}(1 - K_B)U_2(p_0) \\ -G_{11}(1 - K_B)U_1(p_0) \\ -G_{12}(1 - K_B)U_2(p_0) \end{bmatrix},$$

окончательно она может быть представлена в виде

$$[Y'] \begin{bmatrix} U_1(p_0) \\ U_2(p_0) \\ U_3(p_0) \\ U_4(p_0) \\ U_5(p_0) \\ U_6(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5GE_0 \\ -0,5GE_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[Y'] = \begin{bmatrix} G + 2G_S & 0 & 0 & 0 & -2G_S & 0 \\ 0 & G + 2G_S & 0 & 0 & 0 & -2G_S \\ -G_{11}(1 - K_B) & 0 & G_{d1} + G_L & -G_L & -G_{d1} & 0 \\ 0 & -G_{12}(1 - K_B) & -G_L & G_{d2} + G_L & 0 & -G_{d2} \\ -G_{11}(1 - K_B) - 2G_S & 0 & -G_{d1} & 0 & G_{d1} + 2G_S & 0 \\ 0 & -G_{12}(1 - K_B) - 2G_S & 0 & -G_{d2} & 0 & G_{d2} + 2G_S \end{bmatrix}.$$

Как и при расчете коэффициента передачи [1] для определения выходного сигнала необходимо найти отклик от каждого из входных генераторов:  $E_0^+$ ,  $E_0^-$  ( $I_0^+$ ,  $I_0^-$ ). Сигнал на выходе смесителя определяется падением напряжения на нагрузке:

$$U_{\text{вых}}(p_0) = (U_{31}(p_0) + U_{32}(p_0)) - (U_{41}(p_0) + U_{42}(p_0)),$$

где  $U_{31}(p_0)$  и  $U_{41}(p_0)$  – узловые потенциалы на выходе, определяемые воздействием  $E_0^+$  ( $I_0^+$ ), а  $U_{32}(p_0)$  и  $U_{42}(p_0)$  – узловые потенциалы на выходе, определяемые воздействием  $E_0^-$  ( $I_0^-$ ). Сигнал на входе смесителя определяется выражением

$$U_{\text{вх}}(p_0) = U_1(p_0) + U_2(p_0).$$

Таким образом, развязка “вход-выход” выражается как

$$K_{B \text{ RF-IF}} = \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{U_{\text{вых}}(p_0)}{U_{\text{вх}}(p_0)} = \frac{0.5G_S(G_{d1}G_{12}(1 - K_B) + G_{d2}G_{11}(1 - K_B) + 2G_{d1}G_{d2})}{G_{d1}G_{d2}(G_S + G_L) + (G_{d1} + G_{d2})G_S G_L}. \quad (2)$$

В случае одинаковых параметров диодов выражение для развязки “вход-выход” имеет вид

$$K_{B \text{ RF-IF}} = \frac{G_S((G_0 + 0.5G_2) + G_1(1 - K_B))}{((G_0 + 0.5G_2) + 2G_L)G_S + (G_0 + 0.5G_2)G_L}.$$

Отметим, что развязка “вход-выход” двойной и тройной балансных схем определяется как сумма развязок каждой пары диодов и в случае равенства параметров диодов равна 0.

### 1.2. Анализ развязки между гетеродином и выходом

*А. Ток диода в “неинтенсивном” и “интенсивном” режимах гетеродина.* Эффект прохождения сигнала гетеродина на выход описывается составляющей тока  $I_0$  (см. [1, формула (1)]). Рассмотрим “неинтенсивный” режим работы гетеродина. Представим  $I_0$  как

$$I_0 = I_{LO0} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{LOn} \cos n\omega_{LO}t \approx \approx I_{LO0} + \sum_{n=1}^N I_{LOn} \cos n\omega_{LO}t,$$

где компоненты  $I_{LOn}$  связаны с коэффициентами ряда Фурье  $i_n$  следующими соотношениями:

$$I_{LO0} = i_0, \quad I_{LOn} = 2i_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Учтем в разложении только первую гармонику частоты гетеродина:

$$I_0 = I_{LO0} + I_{LO1} \cos \omega_{LO}t,$$

где  $I_{LO0}$  соответствует постоянной составляющей, а  $I_{LO1} \cos \omega_{LO}t$  – переменной составляющей тока. Для оценки эффекта прохождения сигнала гетеродина на выход необходимо получить значение  $I_{LO1}$ :

$$I_{LO1} = 2 \frac{1}{T} \int_0^T f(U_{LO}) \cos \omega_{LO}t dt = \frac{2}{T} \int_0^T I_S \left( \exp\left(\frac{U_{LOm} \cos \omega_{LO}t}{\varphi_t}\right) - 1 \right) \cos \omega_{LO}t dt = = 2I_S B_1(U_{LOm} / \varphi_t),$$

где  $B_n(U_{LOm}/\varphi_t)$  – модифицированная функция Бесселя порядка  $n$ . В “интенсивном” режиме работы гетеродина составляющая тока  $I_{LO1}$  равна

$$I_{LO1} = 2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(U_{LO}) \cos \omega_{LO}t dt = = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(U_{LO}) \cos \omega_{LO}t dt = = \frac{2I_S}{\pi} \left( \exp\left(\frac{U_{LOm}}{\varphi_t}\right) - \exp\left(-\frac{U_{LOm}}{\varphi_t}\right) \right).$$

*Б. Анализ схем смесителей.* Эквивалентная схема балансного смесителя для анализа развязки “гетеродин-выход” представлена на рис. 2.

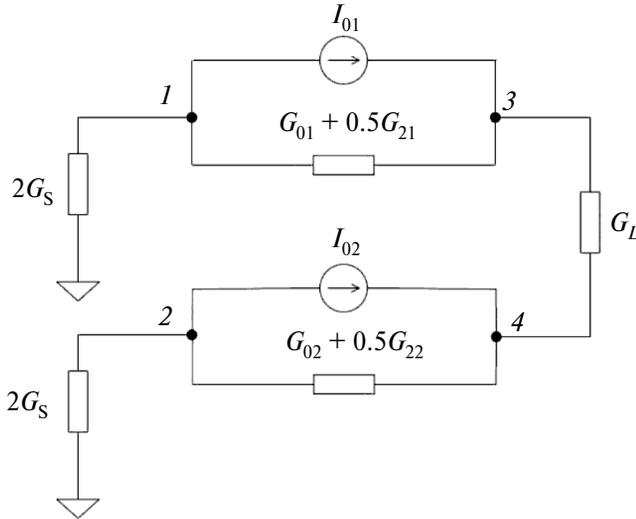


Рис. 2. Эквивалентная схема балансного смесителя для анализа развязки “гетеродин-выход”: узлы схемы 1...4 пронумерованы в соответствии с нумерацией строк и столбцов  $Y$ -матрицы смесителя.

Схема описывается системой уравнений в БУП на частоте  $p_{LO}$ :

$$\begin{bmatrix} 2G_S + G_{d1} & 0 & -G_{d1} & 0 \\ 0 & 2G_S + G_{d2} & 0 & -G_{d2} \\ -G_{d1} & 0 & G_L + G_{d1} & -G_L \\ 0 & -G_{d2} & -G_L & G_L + G_{d2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1(p_{LO}) \\ U_2(p_{LO}) \\ U_3(p_{LO}) \\ U_4(p_{LO}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{01}(p_{LO}) \\ -I_{02}(p_{LO}) \\ I_{01}(p_{LO}) \\ I_{02}(p_{LO}) \end{bmatrix}.$$

Развязка “гетеродин-выход” выражается как

$$K_{B LO-IF} = (U_3(p_{LO}) - U_4(p_{LO})) / U_{LOm}.$$

Токам  $I_{0i}(p_{LO})$  соответствуют составляющие тока  $I_{LOi}(p_{LO})$ , полученные при разложении тока гетеродина в ряд  $I_{01}(p_{LO}) = I_{LO11}(p_{LO})$ ,  $I_{02}(p_{LO}) = I_{LO12}(p_{LO})$ , а отношениям  $I_{LOi}(p_{LO}) / U_{LOm}$  – проводимости источника гетеродина  $G_{LOi}$ . Окончательное выражение для развязки “гетеродин-выход” принимает вид

$$K_{B LO-IF} = \frac{\{G_S((G_{02} + 0.5G_{22})G_{LO11} - (G_{01} + 0.5G_{21})G_{LO12})\}}{\{(G_{01} + 0.5G_{21})(G_{02} + 0.5G_{22})(G_S + G_L) + ((G_{01} + 0.5G_{21}) + (G_{02} + 0.5G_{22}))G_S G_L\}}. \quad (3)$$

В случае одинаковых параметров диодов развязка “гетеродин-выход” равна нулю как для балансной, так и для двойной и тройной балансных схем.

## 2. АНАЛИЗ РАССОГЛАСОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ

В общем случае коэффициент передачи балансного смесителя (см. [1], формула (9)) зависит от параметров двух диодов

$K_B = f(G_{d1}, G_{d2}, G_{11}, G_{12})$ . Введем значения параметров диодов с учетом технологического разброса:

$$\begin{aligned} G'_{d1} &= G_{d1} + \Delta G_{d1}, & G'_{d2} &= G_{d2} + \Delta G_{d2}, \\ G'_{11} &= G_{11} + \Delta G_{11}, & G'_{12} &= G_{12} + \Delta G_{12}, \end{aligned}$$

где первое слагаемое соответствует номинальному значению, а второе – изменению проводимостей диода (разбросу параметров). С учетом разброса коэффициент передачи представляется как

$$\begin{aligned} K_B &= K_{B0} + \Delta K_B = f(G'_{d1}, G'_{d2}, G'_{11}, G'_{12}) \approx f(G_{d1}, G_{d2}, G_{11}, G_{12}) + \frac{\partial f(G_{d1}, G_{d2}, G_{11}, G_{12})}{\partial G_{d1}} \Delta G_{d1} + \\ &+ \frac{\partial f(G_{d1}, G_{d2}, G_{11}, G_{12})}{\partial G_{d2}} \Delta G_{d2} + \frac{\partial f(G_{d1}, G_{d2}, G_{11}, G_{12})}{\partial G_{11}} \Delta G_{11} + \frac{\partial f(G_{d1}, G_{d2}, G_{11}, G_{12})}{\partial G_{12}} \Delta G_{12}, \end{aligned}$$

где  $K_{B0}$  соответствует коэффициенту передачи при номинальных значениях проводимостей, а  $\Delta K_B$  – изменение коэффициента передачи. В случае равенства номинальных значений проводимостей получаем

$$\begin{aligned} \Delta K_B &= \frac{\partial f(G_d, G_1)}{\partial G_d} (\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2}) + \\ &+ \frac{\partial f(G_d, G_1)}{\partial G_1} (\Delta G_{11} + \Delta G_{12}). \end{aligned}$$

Окончательно изменение коэффициента передачи выглядит следующим образом:

$$\Delta K_B = \left\{ 2G_L G_S^2 \left[ 2(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 + G_1^2(G_S + G_L)^2 \right] (\Delta G_{11} + \Delta G_{12}) - 8G_L G_S^2 \left[ 2G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S(G_S + G_L)^2 \right] G_1 (\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2}) \right\} / \left[ 2(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 - G_1^2(G_S + G_L)^2 \right]^2.$$

Аналогично изменения развязки “вход-выход” (2) и “гетеродин-выход” (3) балансного смесителя с учетом разброса параметров имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta K_{B\text{ RF-IF}} &= \left\{ 0.5G_S(1 - K_B)(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)(\Delta G_{11} + \Delta G_{12}) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 0.5G_1 G_S(1 - K_B)(G_S + G_L) - G_L G_S^2 \right) (\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2}) \right\} / (G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2, \\ \Delta K_{B\text{ LO-IF}} &= \frac{-G_S G_{LO1} (\Delta G_{d1} - \Delta G_{d2})}{\left[ (G_d(G_S + G_L) + 2G_S G_L) G_d \right]}. \end{aligned}$$

В общем случае коэффициенты передачи и развязки по портам двойной балансной и тройной балансной схем также зависят от параметров диодов. Для двойной балансной схемы изменения этих характеристик определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta K_{DB} &= \left\{ \left\{ 2G_L G_S^2 \left[ 2(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 + G_1^2(G_S + G_L)^2 \right] (\Delta G_{11} + \Delta G_{12} + \Delta G_{13} + \Delta G_{14}) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 8G_L G_S^2 \left[ 2G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S(G_S + G_L)^2 \right] G_1 (\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2} + \Delta G_{d3} + \Delta G_{d4}) \right\} \right\} / \\ &\quad / \left\{ \left[ 2(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 - G_1^2(G_S + G_L)^2 \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta K_{DB\text{ RF-IF}} &= \left\{ \left\{ 0.5G_S(1 - K_{DB})(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S) \times ((\Delta G_{11} + \Delta G_{12}) - (\Delta G_{13} + \Delta G_{14})) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left( 0.5G_1 G_S(1 - K_{DB})(G_S + G_L) - G_L G_S^2 \right) \times ((\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2}) - (\Delta G_{d3} + \Delta G_{d4})) \right\} \right\} / \left\{ (G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\Delta K_{DB\text{ LO-IF}} = -G_S G_{LO1} ((\Delta G_{d1} - \Delta G_{d2}) + (\Delta G_{d3} - \Delta G_{d4})) / \left[ (G_d(G_S + G_L) + 2G_S G_L) G_d \right]$$

а для тройной балансной –

$$\begin{aligned} \Delta K_{TB} &= \left\{ \left\{ 2G_L G_S^2 \left[ 2(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 + G_1^2(G_S + G_L)^2 \right] (\Delta G_{11} + \Delta G_{12} + \Delta G_{13} + \Delta G_{14} + \Delta G_{15} + \Delta G_{16} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta G_{17} + \Delta G_{18}) \right\} - \left\{ 8G_L G_S^2 \left[ 2G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S(G_S + G_L)^2 \right] G_1 (\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2} + \Delta G_{d3} + \Delta G_{d4} + \Delta G_{d5} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta G_{d6} + \Delta G_{d7} + \Delta G_{d8}) \right\} \right\} / \left\{ \left[ 2(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 - G_1^2(G_S + G_L)^2 \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta K_{TB\text{ RF-IF}} &= \left\{ \left\{ 0.5G_S(1 - K_{TB})(G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S) ((\Delta G_{11} + \Delta G_{12}) - (\Delta G_{13} + \Delta G_{14}) + (\Delta G_{17} + \Delta G_{18}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\Delta G_{15} + \Delta G_{16})) \right\} - \left\{ \left( 0.5G_1 G_S(1 - K_{TB})(G_S + G_L) - G_L G_S^2 \right) ((\Delta G_{d1} + \Delta G_{d2}) - (\Delta G_{d3} + \Delta G_{d4}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\Delta G_{d7} + \Delta G_{d8}) - (\Delta G_{d5} + \Delta G_{d6})) \right\} \right\} / \left\{ (G_d(G_S + G_L) + 2G_L G_S)^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta K_{TB\text{ LO-IF}} &= -G_S G_{LO1} ((\Delta G_{d1} - \Delta G_{d2}) + (\Delta G_{d3} - \Delta G_{d4}) + (\Delta G_{d5} - \Delta G_{d6}) + (\Delta G_{d7} - \Delta G_{d8})) / \\ &\quad / (G_d(G_S + G_L) + 2G_S G_L) G_d. \end{aligned}$$

### 3. ШУМОВОЙ АНАЛИЗ ДИОДНЫХ СМЕСИТЕЛЕЙ

#### 3.1. Балансная схема

*А. Шумовая схема балансного диодного смесителя.* В общем случае шумовые процессы в смесителях являются циклостационарными. Как было показано в работе [5], при использовании на выходе смесителя полосового фильтра с полосой пропускания меньше половины частоты гетеродина циклостационарные шумовые процессы могут рассматриваться как стационарные. Это предположение о полосовой фильтрации было использовано в данной работе. Эквивалентная схема балансного смесителя (см. [1, рис. 3]) по теореме бисекции может быть приведена к симметричному виду: исходная схема делится пополам, входная  $G_S$  и выходная  $G_L$  проводимости приводятся к проводимостям с номиналами  $2G_S$  и  $2G_L$ . Тогда шумовую схему балансного диодного смесителя можно представить, как на рис. 3, где  $S_{R_S}$ ,  $S_D$ ,  $S_{R_L}$  – спектральные плотности средней мощности шумового напряжения

входного сопротивления, диода, сопротивления нагрузки.

В шумовой модели смесителя диод может быть представлен как проводимость  $G_0 + 0.5G_2$  и два генератора тока, управляемые напряжением  $0.5G_1U_0(p_0 \pm j\omega_{LO})$  и  $G_1U_{IF}(p_0)$ , включенные параллельно. Шумовые свойства диода определяются генератором шума со спектральной плотностью средней мощности шумового тока диода  $S_D$ . Поскольку шумами гетеродина на данном этапе анализа пренебрегаем, то генератор тока  $I_0$  (см. [1, формула (1)]) в шумовой модели смесителя не учитывается. Передаточную функцию цепи от каждого шумового источника можно определить, используя метод анализа нелинейно-параметрических цепей [1].

*Б. Шумы сопротивления источника на выходе схемы.* Схема для анализа шумов сопротивления источника представлена на рис. 4.

Составим две системы уравнений в БУП по аргументам  $p_0$  и  $p_0 \pm j\omega_{LO}$  соответственно:

$$\begin{bmatrix} G + 2G_S & 0 & -2G_S \\ 0 & (G_0 + 0.5G_2) + 2G_L & -(G_0 + 0.5G_2) \\ -2G_S & -(G_0 + 0.5G_2) & 2G_S + (G_0 + 0.5G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p_0) \\ U_2(p_0) \\ U_3(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GE_S \\ 0.5G_1U_0(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ -0.5G_1U_0(p_0 \pm j\omega_{LO}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} G + 2G_S & 0 & -2G_S \\ 0 & (G_0 + 0.5G_2) + 2G_L & -(G_0 + 0.5G_2) \\ -2G_S & -(G_0 + 0.5G_2) & 2G_S + (G_0 + 0.5G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ U_2(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ U_3(p_0 \pm j\omega_{LO}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_1U_{IF}(p_0) \\ -G_1U_{IF}(p_0) \end{bmatrix},$$

где  $E_S$  – среднеквадратичное напряжение источника шума входного сопротивления приведенной к симметричному виду схемы, которое по теореме бисекции может быть вычислено как

$E_S = E'_S / 2$ , где  $E'_S = \sqrt{S'_{R_S} \Delta f} = \sqrt{4kTR_S \Delta f}$  – среднеквадратичное напряжение источника шума на входе исходной схемы балансного смесителя, а  $S'_{R_S}$  – соответствующая спектральная плотность средней мощности шумового напряжения шума

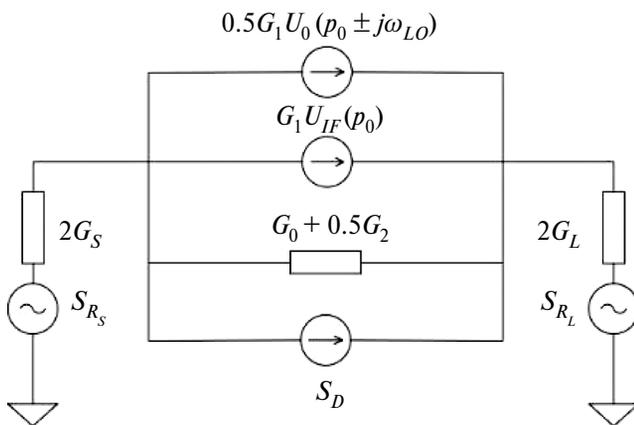


Рис. 3. Эквивалентная шумовая схема балансного смесителя, преобразованная к симметричному виду.

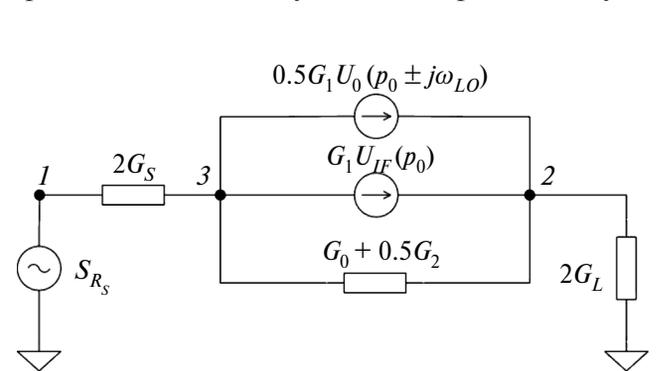


Рис. 4. Эквивалентная схема для анализа шумовых свойств сопротивления  $R_S$ ; узлы схемы 1...3 пронумерованы в соответствии с нумерацией строк и столбцов  $Y$ -матрицы смесителя.

источника. Тогда значение среднеквадратичного напряжения преобразованного источника шума можно выразить как

$$E_S = \frac{\sqrt{4kTR_S\Delta f}}{2} = \sqrt{4kT \frac{R_S}{4} \Delta f} = \sqrt{S_{R_S} \Delta f},$$

где  $S_{R_S} = 4kT \frac{R_S}{4}$  – спектральная плотность средней мощности шумового напряжения пре-

образованного источника. Выражения для напряжения в правых частях систем могут быть раскрыты как в [1]. Составляющая источника шума  $S_{R_S}$  пересчитывается на выход схемы через передаточную функцию из первого узла во второй, причем воздействие рассматривается на частоте  $p_0$ , а отклик – на частоте  $p_0 \pm j\omega_{LO}$ . Передаточная функция  $T_{R_S}$  соответствует линейному коэффициенту передачи балансного смесителя:

$$T_{R_S} = K_B = \frac{4G_S^2 G_1 G_L}{2((G_0 + 0.5G_2)(G_S + G_L) + 2G_S G_L)^2 - G_1^2 (G_S + G_L)^2}. \quad (4)$$

Тогда спектральная плотность средней мощности шумового напряжения генератора шума сопротивления источника на выходе будет иметь вид

$$S_{R_S \text{ вых}} = |T_{R_S}|^2 S_{R_S \text{ вх}},$$

где  $S_{R_S \text{ вх}} = S_{R_S}$ .

*В. Шумы диодов на выходе схемы.* Схема для анализа шумов диода представлена на рис. 5.

Она может быть описана двумя системами уравнений в БУП по аргументам  $p_0$  и  $p_0 \pm j\omega_{LO}$  соответственно:

$$\begin{bmatrix} 2G_S + (G_0 + 0.5G_2) & -(G_0 + 0.5G_2) \\ -(G_0 + 0.5G_2) & (G_0 + 0.5G_2) + 2G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p_0) \\ U_2(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_D - 0.5G_1 U_0(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ I_D + 0.5G_1 U_0(p_0 \pm j\omega_{LO}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2G_S + (G_0 + 0.5G_2) & -(G_0 + 0.5G_2) \\ -(G_0 + 0.5G_2) & (G_0 + 0.5G_2) + 2G_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ U_2(p_0 \pm j\omega_{LO}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 U_{IF}(p_0) \\ G_1 U_{IF}(p_0) \end{bmatrix},$$

где  $I_D$  – среднеквадратичный ток источника шума диода, а соответствующая спектральная плотность средней мощности равна  $S_D = 2qI_D$  ( $I_D$  – постоянная составляющая тока диода) [6, 7]. Как было отмечено выше, составляющая тока  $I_0$  может быть разложена в ряд Фурье, где

постоянная составляющая тока диода определяется как  $I_{LO0}$ . Следовательно, необходимо вычислить значение  $I_{LO0}$ :

$$I_{LO0} = i_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(U_{LO}) dt,$$

$$I_{LO0} = \frac{1}{T} \int_0^T I_S \left( \exp\left(\frac{U_{LOm} \cos \omega_{LO} t}{\varphi_t}\right) - 1 \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_S \exp\left(\frac{U_{LOm} \cos \omega_{LO} t}{\varphi_t}\right) dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_S dt = I_S \left[ B_0 \left( \frac{U_{LOm}}{\varphi_t} \right) - 1 \right],$$

где  $T = 2\pi/\omega_{LO}$ . Тогда окончательное выражение спектральной плотности шума диода на входе принимает вид

$$S_D = 2qI_S \left[ B_0 \left( \frac{U_{LOm}}{\varphi_t} \right) - 1 \right]. \quad (5)$$

Составляющая источника шума  $S_D$  пересчитывается на выход схемы через передаточный импеданс, соответствующий отношению напряжения во втором узле на частоте  $p_0 \pm j\omega_{LO}$  к току  $I_D$ , протекающему из первого во второй узел на частоте  $p_0$ :

$$Z_D = - \frac{2G_S G_1 (G_S + G_L)}{2((G_0 + 0.5G_2)(G_S + G_L) + 2G_S G_L)^2 - G_1^2 (G_S + G_L)^2}. \quad (6)$$

Тогда спектральная плотность средней мощности шумового напряжения диода на выходе определяется как  $S_{D \text{ вых}} = |Z_D|^2 S_{D \text{ вх}}$ , где  $S_{D \text{ вх}} = S_D$ .

*Г. Шумы сопротивления нагрузки на выходе схемы.* Для анализа шумов сопротивления нагрузки рассмотрим схему на рис. 6.

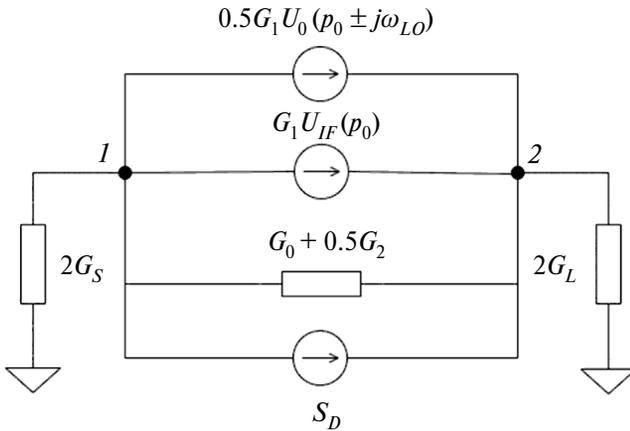


Рис. 5. Эквивалентная схема для анализа шумовых свойств диода: узлы схемы 1...2 пронумерованы в соответствии с нумерацией строк и столбцов  $Y$ -матрицы.

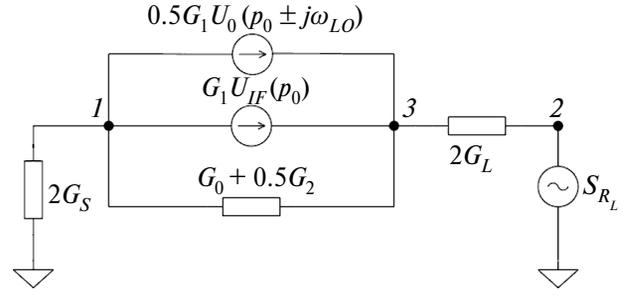


Рис. 6. Эквивалентная схема для анализа шумовых свойств сопротивления  $R_L$ : узлы схемы 1...3 пронумерованы в соответствии с нумерацией строк и столбцов  $Y$ -матрицы смесителя.

Схема описывается двумя системами уравнений в БУП по аргументам  $p_0$  и  $p_0 \pm j\omega_{LO}$ :

$$\begin{bmatrix} (G_0 + 0.5G_2) + 2G_S & 0 & -(G_0 + 0.5G_2) \\ 0 & G + 2G_L & -2G_L \\ -(G_0 + 0.5G_2) & -2G_L & 2G_L + (G_0 + 0.5G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p_0) \\ U_2(p_0) \\ U_3(p_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5G_1U_0(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ GE_L \\ 0.5G_1U_0(p_0 \pm j\omega_{LO}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} (G_0 + 0.5G_2) + 2G_S & 0 & -(G_0 + 0.5G_2) \\ 0 & G + 2G_L & -2G_L \\ -(G_0 + 0.5G_2) & -2G_L & 2G_L + (G_0 + 0.5G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ U_2(p_0 \pm j\omega_{LO}) \\ U_3(p_0 \pm j\omega_{LO}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1U_{IF}(p_0) \\ 0 \\ G_1U_{IF}(p_0) \end{bmatrix},$$

где  $E_L$  – среднеквадратичное напряжение источника шума сопротивления нагрузки схемы, приведенной к симметричному виду, а соответствующая спектральная плотность средней мощности  $S_{R_L} = 4kT \frac{R_L}{4}$  определяется аналогично спектральной плотности  $S_{R_S}$ . Составля-

ющая источника шума  $S_{R_L}$  пересчитывается на выход схемы через передаточную функцию из второго узла в третий узел, причем воздействие рассматривается на частоте  $p_0$ , а отклик – на частоте  $p_0 \pm j\omega_{LO}$ . Передаточная функция  $T_{R_L}$  соответствует линейному коэффициенту передачи балансного смесителя:

$$T_{R_L} = -K_B = -\frac{4G_S^2G_1G_L}{2((G_0 + 0.5G_2)(G_S + G_L) + 2G_SG_L)^2 - G_1^2(G_S + G_L)^2}. \quad (7)$$

Спектральная плотность средней мощности шумового напряжения сопротивления нагрузки на выходе определяется как  $S_{R_L \text{ вых}} = |T_{R_L}|^2 S_{R_L \text{ вх}}$ , где  $S_{R_L \text{ вх}} = S_{R_L}$ .

Д. Коэффициент шума. Коэффициент шума смесителя  $F$  определяется как  $F = 1 +$

$\frac{P_{\text{вых}}^{\text{сш}}}{P_{\text{вых}}^{\text{иш}}}$ , где  $P_{\text{вых}}^{\text{сш}}$  – мощность собственных шумов на выходе смесителя,  $P_{\text{вых}}^{\text{иш}}$  – мощность шума сопротивления источника сигнала на выходе. Рассмотрим подробнее выражение для коэффициента шума:

$$F = 1 + \frac{P_{\text{вых}}^{\text{сш}}}{P_{\text{вых}}^{\text{иш}}} = 1 + \frac{S_{\text{вых}}^{\text{сш}} \Delta f}{S_{\text{вых}}^{\text{иш}} \Delta f} = 1 + \frac{S_{\text{вых}}^{\text{сш}}}{S_{\text{вых}}^{\text{иш}}} = 1 + \frac{S_{\text{вых}}^{R_L} + S_{\text{вых}}^D}{S_{\text{вых}}^{R_S}} = 1 + \frac{|T_{R_L}|^2 4kT \frac{R_L}{4} + |Z_D|^2 2qI_D}{|T_{R_S}|^2 4kT \frac{R_S}{4}}.$$

Так как  $T_{R_S} = -T_{R_L} = K_B$ , то

$$F = 1 + \frac{R_L}{R_S} + \frac{4|Z_D|^2 2qI_{D0}}{|T_{R_S}|^2 4kTR_S}.$$

Рассмотрим отношение

$$|Z_D|^2 / |T_{R_S}|^2 = (G_S + G_L)^2 / 4G_S^2G_L^2 = A,$$

из которого следует окончательное выражение для коэффициента шума балансного диодного смесителя:

$$F = 1 + G_S / G_L + (G_S + G_L)^2 2qI_S \times \\ \times [B_0 (U_{LOm} / \varphi_t) - 1] / G_L^2 4kTG_S.$$

### 3.2. Двойная балансная схема

Двойную балансную схему можно представить в виде параллельного соединения двух балансных смесителей [1]. Каждый балансный смеситель может быть приведен по теореме бисекции к симметричному виду. Шумовая схема первой пары диодов полностью соответствует схеме балансного смесителя, а шумовая схема второй пары диодов составляется аналогично.

*А. Шумы сопротивлений источника и нагрузки на выходе схемы.* Передаточные функции от сопротивлений источника  $T_{R_S}$  и нагрузки  $T_{R_L}$  двойной балансной схемы равны сумме соответствующих передаточных функций каждой из пар диодов. Передаточные функции первой пары диодов  $T_{R_{S1}}$  и  $T_{R_{L1}}$  получены выше, передаточные функции второй пары диодов  $T_{R_{S2}}$  и  $T_{R_{L2}}$  выражаются формулами (4), (7) соответственно. Передаточные функции от сопротивлений источника и нагрузки двойного балансного смесителя соответствуют его коэффициенту передачи и определяются как  $T_{R_S} = T_{R_{S1}} + T_{R_{S2}} = -T_{R_L} = -(T_{R_{L1}} + T_{R_{L2}}) = K_{DB}$ . Спектральные плотности средней мощности шумового напряжения сопротивлений источника  $S_{R_S \text{ вых}}$  и нагрузки  $S_{R_L \text{ вых}}$  на выходе определяются как  $S_{R_S \text{ вых}} (S_{R_L \text{ вых}}) = |K_{DB}|^2 S_{R_S \text{ вх}} (S_{R_L \text{ вх}})$ , где спектральные плотности средней мощности шумового напряжения сопротивлений на входе определяются так же, как и в случае балансного смесителя.

*Б. Шумы диодов на выходе схемы.* Эквивалентная схема для анализа шума диода на выходе представлена на рис. 5. Выше получено выражение для передаточного импеданса (см. (6)). Выходная спектральная плотность средней мощности шумового напряжения генератора шума диода определяется как  $S_{D \text{ вых}} = |Z_D|^2 S_{D \text{ вх}}$ , где  $S_{D \text{ вх}}$  – спектральная плотность средней мощности собственного шумового напряжения диода согласно формуле (5).

*В. Коэффициент шума.* Аналогично предыдущему случаю, может быть получено выражение

для коэффициента шума двойного балансного смесителя

$$F = 1 + \frac{R_L}{R_S} + \frac{4|Z_D|^2 2qI}{|T_{R_S}|^2 4kTR_S},$$

причем  $|Z_D|^2 / |T_{R_S}|^2 = A / 4$ . Тогда окончательное выражение для коэффициента шума двойного балансного диодного смесителя имеет вид

$$F = 1 + G_S / G_L + (G_S + G_L)^2 2qI_S \times \\ \times [B_0 (U_{LOm} / \varphi_t) - 1] / 4G_L^2 4kTG_S.$$

### 3.3. Тройная балансная схема

Тройную балансную схему можно представить в виде параллельного соединения четырех балансных смесителей [1], каждый из которых может быть приведен по теореме бисекции к симметричному виду. Шумовая схема первой и третьей пар диодов соответствуют шумовой схеме балансного смесителя, а шумовая схема второй и четвертой пар соответствует шумовой схеме второй пары диодов двойного балансного смесителя.

*А. Шумы сопротивлений источника и нагрузки на выходе схемы.* Передаточные функции от сопротивлений источника  $T_{R_S}$  и нагрузки  $T_{R_L}$  тройной балансной схемы равны сумме соответствующих передаточных функций каждой из пар диодов. Передаточные функции первой и третьей пар диодов  $T_{R_{S1}}$ ,  $T_{R_{S3}}$  и  $T_{R_{L1}}$ ,  $T_{R_{L3}}$  получены выше, передаточные функции второй и четвертой пар диодов  $T_{R_{S2}}$ ,  $T_{R_{S4}}$  и  $T_{R_{L2}}$ ,  $T_{R_{L4}}$  выражаются формулами (4), (7). Окончательно передаточные функции от сопротивлений источника и нагрузки тройного балансного смесителя определяются как  $T_{R_S} = T_{R_{S1}} + T_{R_{S2}} + T_{R_{S3}} + T_{R_{S4}} = -T_{R_L} = -(T_{R_{L1}} + T_{R_{L2}} + T_{R_{L3}} + T_{R_{L4}}) = K_{TB}$ . Спектральные плотности средней мощности шумового напряжения сопротивлений источника и нагрузки на выходе определяются как  $S_{R_S \text{ вых}} (S_{R_L \text{ вых}}) = |K_{TB}|^2 S_{R_S \text{ вх}} (S_{R_L \text{ вх}})$ . Спектральные плотности средней мощности шумового напряжения сопротивлений на входе определяются так же, как и в случае балансного смесителя.

*Б. Шумы диода на выходе схемы.* Аналогично случаю, соответствующему анализу шумов диода двойного балансного смесителя, выходная спектральная плотность средней мощности

шумового напряжения диода определяется как  $S_{D \text{ вых}} = |Z_D|^2 S_{D \text{ вх}}$ , где  $Z_D$  – передаточный импеданс (см. (6)),  $S_{D \text{ вх}}$  – спектральная плотность средней мощности собственного шумового напряжения диода (см. (5)).

*В. Коэффициент шума.* Коэффициент шума тройного балансного смесителя определяется как

$$F = 1 + \frac{R_L}{R_S} + \frac{4|Z_D|^2 2q\overline{I_D}}{|T_{R_S}|^2 4kTR_S},$$

при этом  $|Z_D|^2 / |T_{R_S}|^2 = A / 16$ , тогда выражение для коэффициента шума тройного балансного диодного смесителя определяется следующим образом:

$$F = 1 + G_S / G_L + (G_S + G_L)^2 2qI_S \times \\ \times [B_0 (U_{LOm} / \phi_t) - 1] / 16G_L^2 4kTG_S.$$

#### 4. РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работе [1] подробно рассмотрено формирование линейной параметрической модели диода на основе закона Эберса–Молла. Каждый диод в схеме смесителя представляется в виде параллельно включенной проводимости и двух управляемых напряжением генераторов тока. В процессе моделирования была использована SPICE модель диода (параллельное сопротивление в модели отсутствовало, а последовательное равно 2.1 Ом). Моделирование и расчет выполнены при температуре  $T = 300$  К для двух режимов работы гетеродина. Моделирование проводилось в среде автоматизированного проектирования Advanced Design System (ADS). При расчете и моделировании были использованы следующие значения:  $I_S = 1.14$  пА – ток насыщения диода,  $U_{0m} = 0.05$  В – амплитудное значение напряжения сигнала,  $U_{LOm} = 1.0$  В – амплитудное значение напряжения гетеродина,  $R_S = 50$  Ом – сопротивление источника,  $R_L = 50$  Ом – сопротивление нагрузки; частота сигнала 4 МГц, частота гетеродина 5 МГц. Частотный диапазон выбран так, чтобы минимизировать влияние емкостей  $p$ - $n$ -перехода диода. Если импеданс диффузионной емкости  $p$ - $n$ -перехода превосходит внутренний импеданс диода более чем в шесть раз, то частотной зависимостью передаточной функции можно пренебречь. Так, в работе [8] показано, что импеданс диффузионной емкости  $p$ - $n$ -перехода

**Таблица 1.** Результаты расчета и моделирования для балансной схемы

Режим работы гетеродина	$K_{RF-IF}$ , дБ	
	Расчет	Моделирование
“Неинтенсивный”	–16.5	–17.1
“Интенсивный”	–14.4	–15.9

равен 26.0 Ом на частоте 1 ГГц, а внутренний импеданс диода – 4.3 Ом, при этом отклонение передаточной функции от значения в области низких частот составляет не более 0.1 дБ.

Выбор представленных частот сигнала и гетеродина позволил провести адекватное сравнение расчета и моделирования для проверки справедливости предложенного подхода (табл. 1).

На рис. 7а, 7б приведены зависимости развязки “вход-выход” соответственно от нагрузочной проводимости при  $U_{LOm} = 0.8$  В и от амплитуды напряжения гетеродина при  $R_L = 50$  Ом.

Зависимости получены для двух режимов работы гетеродина. Ошибка между результатами расчета и моделирования не превышает 3 дБ. Полученный результат превосходит результаты, представленные в работах других авторов. Так, например, в работе [9] ошибка между результатами расчета уровня нелинейных искажений 3-го порядка по параметру входной мощности перекрестных искажений  $IIP3$  и результатами моделирования лежит в пределах от 4 до 10 дБ, в работе [10] расчетные значения коэффициента передачи, параметра  $IIP3$  и параметра  $IIP2$  отличаются от значений, полученных при моделировании, в пределах 4 дБ, а в работе [11] результаты расчета и моделирования параметра  $IIP3$  отличаются в пределах 5 дБ.

В табл. 2 представлены изменения коэффициента передачи и развязок по портам балансной схемы для “неинтенсивного” режима работы гетеродина для различных значений разбросов параметров.

Значения ошибок, вносимых разбросом параметров диодов, позволяют оценить предельно достижимые значения коэффициентов передач и развязок по портам. Аналогичным образом могут быть получены максимально достижимые значения параметров двойного и тройного балансных смесителей. Например, для двойной балансной схемы при технологическом разбросе параметров 20 % для диодов D1, D2, D3 и при

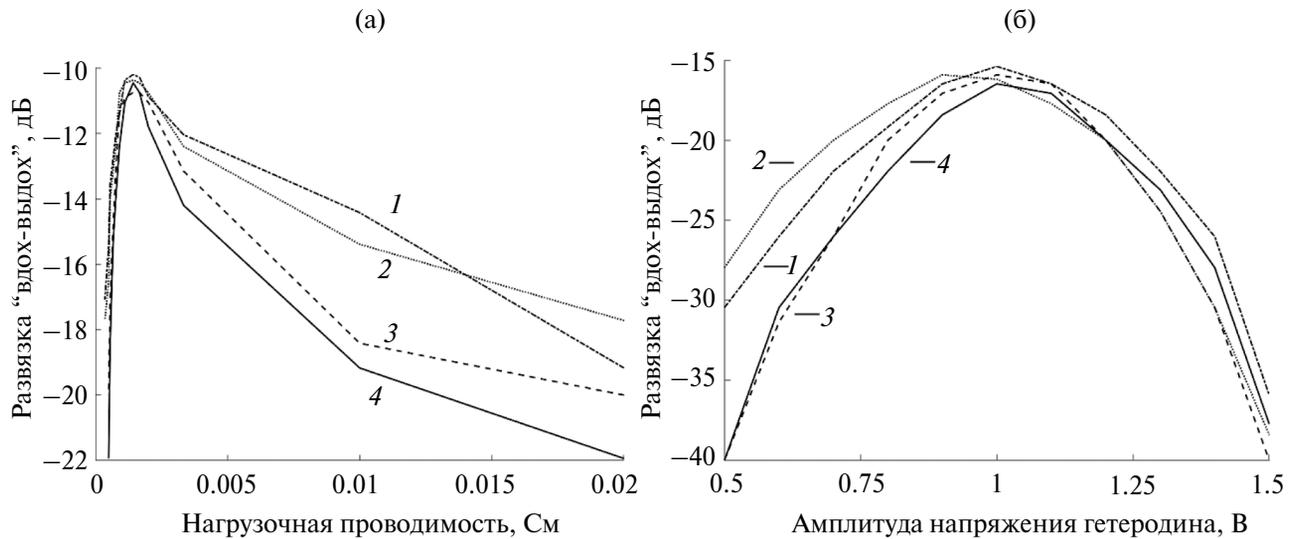


Рис. 7. Зависимость развязки “вход-выход” балансной схемы смесителя от нагрузочной проводимости (а) и от амплитуды напряжения гетеродина (б) при “интенсивном” (1, 2) и “неинтенсивном” (3, 4) режимах работы гетеродина: 1, 4 – расчет, 2, 3 – моделирование.

Таблица 2. Изменения коэффициента передачи и развязок по портам

$\Delta D1$	$\Delta D2$	$\frac{\Delta K_B}{K_{B0}}$	$\frac{\Delta K_{B RF-IF}}{K_{B RF-IF0}}$	$\Delta D1$	$\Delta D2$	$\Delta K_{B LO-IF}$
%						дБ
0	5	1.5	2.6	0	5	-66.5
5	10	4.4	7.8	0	10	-60.5
10	15	7.4	13.0	0	15	-57.0
15	20	10.4	18.3	0	20	-54.5

разбросе параметров 0 % для диода D4 значения параметров схемы принимают следующие значения:  $\Delta K_{DB} / K_{DB0} = 8.9 \%$ ,  $\Delta K_{DB RF-IF} = -36.1$  дБ,  $\Delta K_{DB LO-IF} = -54.5$  дБ. Для тройной балансной схемы при разбросе параметров 20 % для диодов D1...D3, D5...D7 и при разбросе параметров 0 % для диодов D4, D8 значения параметров схемы принимают значения  $\Delta K_{TB} / K_{TB0} = 8.9 \%$ ,  $\Delta K_{TB RF-IF} = -50.1$  дБ,  $\Delta K_{TB LO-IF} = -48.5$  дБ.

В табл. 3 представлены результаты моделирования и расчета коэффициента шума диодных смесителей, ошибка в пределах 1 дБ.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены теоретические выражения для развязок “вход-выход” и “гетеродин-выход”; выражения для вносимых технологическим разбросом параметров диодов ошибок, которые позволяют оценить предельно достижимые зна-

Таблица 3. Результаты расчета и моделирования коэффициента шума

Тип схемы	Расчет, дБ	Моделирование, дБ
Балансная	4.03	4.51
Двойная балансная	3.28	4.21
Тройная балансная	3.07	3.76

чения коэффициентов передачи и развязок по портам. Представлены зависимости развязок от нагрузочной проводимости и от амплитуды напряжения гетеродина. Проведен теоретический анализ и моделирование, ошибка между расчетными результатами и результатами моделирования лежит в пределах 0.5...3 дБ. Как было показано в работе [1], выбор сопротивления нагрузки и амплитуды напряжения гетеродина позволяет максимизировать коэффициент передачи сме-

сителя. Однако результаты данной работы показали, что изменение значений сопротивления нагрузки и амплитуды напряжения гетеродина в сторону увеличения коэффициента передачи схемы приводит к ухудшению развязок. Так, например, в “неинтенсивном” режиме при фиксированном сопротивлении нагрузки 50 Ом при амплитуде напряжения гетеродина 1 В коэффициент передачи балансной схемы составляет  $-20.0$  дБ, но при этом значение развязки “вход-выход” не превышает  $-15.9$  дБ, в то время как при амплитуде 0.7 В получим коэффициент передачи  $-29.9$  дБ и развязку  $-26.0$  дБ. Аналогично для случая “неинтенсивного” режима гетеродина и балансной схемы при амплитуде напряжения гетеродина 0.8 В при сопротивлении нагрузки 700 Ом достигается максимум коэффициента передачи  $-12.8$  дБ, но при этом значение развязки “вход-выход”  $-10.8$  дБ. Однако при сопротивлении нагрузки 50 Ом коэффициент передачи падает до  $-25.5$  дБ, но развязка улучшается до  $-20.0$  дБ.

Рассмотрены шумовые свойства диодных смесителей, рассчитаны выходные шумовые спектры для каждого из элементов схем (входного сопротивления, диодов и выходного сопротивления), получены аналитические выражения коэффициентов шума. Шумовой анализ показал, что диодные смесители обладают низким коэффициентом шума. При одинаковых значениях элементов схем балансный смеситель обладает самым высоким коэффициентом шума (4.5 дБ), а тройной балансный смеситель – самым низким (3.8 дБ), что является преимуществом перед остальными схемами. Значение коэффициента шума двойного балансного смесителя – 4.2 дБ. Результаты моделирования коэффициента шума согласуются с результатами расчета в пределах 1 дБ.

Следует отметить, что предлагаемая методика анализа смесителей позволяет значительно сократить объем вычислений по сравнению, например, с известным методом матрицы преобразований [2, с. 247, § 5.3], который основан на линеаризованной модели активных элементов. Использование матрицы преобразований предполагает повышение порядка матрицы схемы при анализе балансных структур и при введении в состав системы уравнений токов (напряжений) на промежуточной частоте. Если в матрице преобразований используются лишь первые два коэффициента из разложения нелинейной проводимости диода, то для небалансной схемы размерность матрицы преобразований составляет  $2 \times 2$ , а для балансной – размерность

матрицы увеличивается до значения  $6 \times 6$ . В случае двойной балансной схемы порядок матрицы увеличится до значения  $10 \times 10$ , а в случае тройной балансной – до  $18 \times 18$ . При введении в рассмотрение большего числа коэффициентов из разложения нелинейной проводимости диода порядок матрицы также значительно увеличивается:  $3 \times 3$  – для небалансного смесителя,  $9 \times 9$  – для балансного,  $15 \times 15$  – для двойного балансного,  $27 \times 27$  – для тройного балансного смесителей. Высокая размерность матрицы преобразования затрудняет аналитическое решение задачи параметрической оптимизации схемы смесителя, что делает необходимым применение численных методов. Однако при использовании методов численной оптимизации остаются открытыми вопросы выбора начального приближения и расстановки весовых коэффициентов. При анализе смесителей по предлагаемой методике размерность матриц не превосходит  $6 \times 6$  для всех рассмотренных схем. Это позволяет осуществить параметрическую оптимизацию на основе аналитических выражений. Использование предлагаемой методики повышает точность расчетов. Ошибка между результатами расчета и моделирования не превышает 3 дБ. При использовании других методов анализа ошибка достигает 4...10 дБ [9–11]. В целом рассмотренная методика является универсальной и позволяет проводить анализ и параметрическую оптимизацию не только диодных смесителей, но и схем иных типов, например транзисторных смесителей.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2023-0016).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korotkov A.S., Golovan O.A.* // *Radioelectronics and Communications Systems*. 2022. V. 65. № 2. P. 81.
2. *Henderson B.* *Microwave Mixer Technology and Applications*. N. Y.: Artech House, 2013.
3. *Аверина Л.И., Бобришов А.М., Шапошникова Ж.В.* // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Серия: Физика. Математика*. 2011. № 1. С. 5.
4. *Korotkov A., Golovan O.* // *2021 Int. Symp. Signals, Circuits and Systems*. Iasi. 15–16 Jul. 2021. N.Y.: IEEE, 2021. P. 9497452. <https://doi.org/10.1109/ISSCS52333.2021.9497452>
5. *Roychowdhury J., Long D., Feldmann P.* // *IEEE J. Solid-State Circuits*. 1998. V. 33. № 3. P. 324.

6. *Darabi H., Abidi A.A.* // IEEE J. Solid-State Circuits. 2015. V. 35. № 1. P. 15.
7. *Nitsch J.B., Solovyeva E.B., Korovkin N.V., Scheibe H.-J.* // IEEE Trans. 2008. V. EC-50. № 4. P. 887.
8. *Головань О.А., Коротков А.С.* // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2022. № 3. С. 190.
9. *Vitee N., Ramiah H., Mak P.-I., Yin J., Martins R.P.* // IEEE Trans. 2020. V. VLSI-28. № 3. P. 700.
10. *Mollaalipour M., Miar-Naimi H.* // IEEE Trans. 2016. V. VLSI-24. №6. P. 2275.
11. *Jiang J., Holburn D.M.* // Proc. Europ. Conf. on Circuit Theory and Design. Antalya, 23–27 Aug. 2009. N.Y.: IEEE, 2009. P. 675.

## ANALYSIS OF DIODE MIXERS USING THE METHOD OF NODE POTENTIALS IN GENERALIZED MATRIX FORM IN THE FREQUENCY DOMAIN. PART 2. ISOLATION BETWEEN PORTS, MISCONDITON EFFECT, NOISE LEVEL

**S. Korotkov, O. A. Golovan\***

*Peter the Great St-Petersburg Polytechnic University St-Petersburgh, 195251 Russia*

*\*E-mail: golovan\_oa@spbstu.ru*

Received October 3, 2022; revised March 13, 2023; accepted April 27, 2023

A method for theoretical analysis of “input-output” and “local oscillator-output” decouplings of three types of diode frequency converters is presented: balanced, double balanced, triple balanced. For two operating modes of the local oscillator – “non-intensive” and “intensive” – the dependences of the “input-output” decoupling of the balanced mixer on the load conductivity and on the amplitude of the local oscillator voltage were obtained. Theoretical analysis and modeling were carried out. It is shown that the error between the calculated results and the simulation results does not exceed 3 dB. Expressions are obtained for errors introduced by the technological spread of diode parameters, which make it possible to estimate the maximum achievable values of the mixer characteristics (transmission coefficient and port isolation). A method for analyzing the noise properties of mixers is presented, the output noise spectra are calculated for each of the circuit elements (input resistance, diodes and output resistance), and analytical expressions for noise coefficients are obtained. Theoretical noise figure estimates are confirmed by simulation results with an accuracy of 1 dB.

*Keywords:* diode mixers, nodal potential method, transfer function, noise figure, heterodyne, balanced circuit

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 538.953

ФОНОННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ И ОСОБЕННОСТИ  
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ  
ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

© 2024 г. Е. И. Саламатов<sup>а</sup>, А. В. Таранов<sup>б,\*</sup>, Е. Н. Хазанов<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Физико-технический институт УдмФИЦ УрО РАН, ул. Кирова, 13, Ижевск, 426000 Российская Федерация

<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: taranov@cplire.ru

Поступила в редакцию 18.05.2023 г.

После доработки 12.11.2023 г.

Принята к публикации 25.11.2023 г.

Исследованы кинетические характеристики фононов тепловых частот в области гелиевых температур в образцах керамики твердого раствора электролита  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$ . Для объяснения температурной зависимости длины свободного пробега фононов использованы выполненные ранее результаты расчетов энергии образования вакансий в анионной подрешетке твердого раствора диоксида циркония, стабилизированного иттрием  $\text{ZrO}_2\text{:Y}_2\text{O}_3$  (YSZ) с аналогичной кристаллической структурой. Показано, что в исследуемой системе  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$  возможно образование структурных дефектов, связанных с наличием вакансий в анионной подрешетке с энергией  $\Delta = 8.53$  К. Установлено, что анализ температурных зависимостей теплоемкости YSZ позволяет проследить степень неупорядоченности (аморфизации) твердого раствора в зависимости от уровня его стабилизации.

*Ключевые слова:* фононы, кинетические характеристики, керамика твердого раствора электролита, анионная подрешетка, структурные дефекты, вакансии

DOI: 10.31857/S0033849424020091, EDN: KMIQVQ

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известен широкий спектр кристаллических материалов, особенностью которых является преимущественно ионная проводимость [1, 2]. Функциональные свойства ионных проводников или твердых электролитов (ТЭ) широко используются в различных областях науки и техники, таких как энергетика (твердотельные топливные элементы), медицина, полупроводниковая техника (получение полупроводников с заданным составом и свойствами), изучение термодинамических свойств нестехиометрических соединений.

Метод фононной спектроскопии в области гелиевых (He) температур позволяет получать информацию как о структуре неупорядоченных систем, так и о релаксационных процессах, когда энергия релаксации сопоставима с энергией фононов. Так, например, характер взаимодействия фононов тепловых частот с низкоэнер-

гетическими возбуждениями в модели низкоэнергетических шоткиподобных двухуровневых систем (ДУС), обусловленных парамагнитной природой редкоземельных ионов иттриевого ряда, рассмотрен в [3] на примере твердых растворов иттрий-редкоземельных алюминидов гранатов  $\text{Y}_{3-x}\text{Re}_x\text{Al}_5\text{O}_{12}$  ( $\text{Re} = \text{Lu}, \text{Yb}, \text{Tm}, \text{Er}$ ).

Исследования показали, что эффективность взаимодействия и транспортные характеристики фононов в области гелиевых температур зависят от типа редкоземельного иона, энергии ДУС, величины магнитного момента на 4f-оболочке, спин-решеточной релаксации.

Сложность подобных соединений, как монокристаллов, так и керамики на их основе, обусловлена природой и составом структурных дефектов. Важным микроскопическим параметром твердых растворов электролитов, определяющим наряду с ионной проводимостью и их стабильность, является распределение вакансий по неэквивалентным узлам анионной подрешетки.

Согласно условию электронейтральности в системах  $\text{Re}(4+)\text{-O:Re}(3+)\text{-O}$  ( $\text{Re}$  – редкоземельный металл в степени окисления 4+ или 3+) на каждые два катиона в степени окисления 3+ приходится одна вакансия в анионной подрешетке. Если разница энергий двух конфигураций оказывается близка к энергии инжектируемых фононов и переходы между ними влияют на транспортные свойства фононов, то из анализа транспортных характеристик фононов можно делать выводы об энергетических характеристиках дефектов в системе.

Данной проблеме посвящено много как экспериментальных, так и теоретических работ, большинство из которых выполнено на образцах диоксида циркония, стабилизированного иттрием  $\text{ZrO}_2\text{:Y}_2\text{O}_3$  (YSZ) [1, 2, 4–7], который, обладая уникальными прочностными характеристиками, широко применяется в различных областях науки и техники. Экспериментальные же исследования других систем в литературе либо ограничены, либо отмечены лишь высокотемпературными свойствами [8–10], а спектроскопические, которые дают надежные данные для теории, представлены недостаточно.

Экспериментальные исследования керамических образцов на основе твердых растворов электролитов дополнительно затруднены зависимостью их физических свойств от структуры керамического материала.

Цель данной работы – анализ общих закономерностей кинетических и термодинамических характеристик в монокристаллах твердых растворов электролитов.

### 1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Особенности методики эксперимента подробно изложены в [3]. Экспериментально измеряемой величиной являлось время регистрации максимума сигнала  $t_m(T)$  слабо неравновесных фононов (НФ), инжектированных в исследуемый образец, распространяющихся в режиме диффузии и регистрируемых болометром на основе Sn на его противоположной грани

$$t_m = L^2 / 2D(T),$$

где  $L$  – размер образца,  $D(T) = lv/3$  – коэффициент диффузии ( $l$  – длина свободного пробега НФ,  $v$  – средняя по поляризациям скорость звука).

На рис. 1 представлены экспериментальные и теоретические зависимости  $l(T)$  для образ-

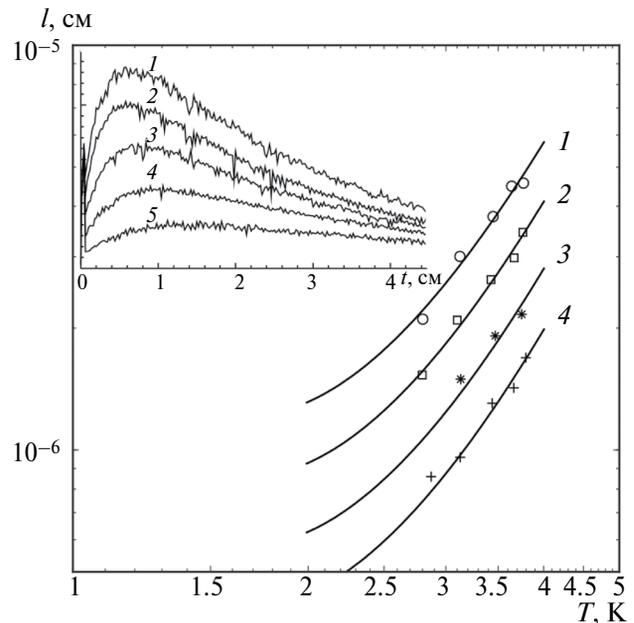


Рис. 1. Зависимость  $l$  от температуры для образцов одного размера ( $R \approx 200$  нм) с различным содержанием примеси:  $x = 0.091$  (1), 0.126 (2), 0.20 (3) и 0.30 (4); сплошными линиями изображены расчетные теоретические зависимости. На вставке – регистрируемые сигналы в образце керамики ТЭ состава  $\text{Ce}_{0.909}\text{Gd}_{0.091}\text{O}_{2-y}$  при различных температурах термостата:  $T = 3.76$  (1), 3.64 (2), 3.44 (3), 3.13 (4) и 2.81 К (5).

цов со средним размером зерен ( $R \approx 200$  нм) и различной концентрацией примеси. На вставке представлены регистрируемые болометром сигналы НФ для ряда температур в образце керамики состава  $\text{Ce}_{0.909}\text{Gd}_{0.091}\text{O}_{2-y}$  с размером зерна  $R = 200$  нм. По мере роста температуры (энергии) НФ наблюдается уменьшение времени прихода максимума  $t_m$  (рост коэффициента диффузии НФ). Абсолютные значения длины свободного пробега НФ при  $T = 3.76$  К составляли  $l = 4.6 \times 10^6$  см и уменьшались по мере уменьшения энергии НФ. В плотных диэлектрических керамиках на основе оксидов значение коэффициента диффузии НФ при  $T = 3.8$  К и  $R \approx 200$  нм [11] было, как правило,  $D \approx 10$  см<sup>2</sup>/с, что соответствует  $l \geq 10^{-4}$  см. То есть для всех температур выполнялось условие  $R \gg l$ , что свидетельствовало об интенсивном рассеянии НФ внутри зерна. Следовательно, рассеяние фононов на структурных особенностях керамики, – межзеренных границах (МГ) и кристаллитах (зернах) не могло быть ответственным за наблюдаемый эффект.

В условиях эксперимента  $qR \gg 1$ . То есть можно предположить, что фононный спектр керамики аналогичен спектру материала зерна, поэтому

средняя по поляризациям скорость акустических волн определялась согласно выражению

$$v^{-3} = 1 / 3 (v_l^{-3} + 2v_t^{-3}).$$

Продольная  $v_l$  и сдвиговая  $v_t$  скорости рассчитывались на основании данных [12] по измерению упругих модулей с учетом изменений плотности и пористости в образцах состава  $\text{CeO}_2:10$  и  $20\% \text{Gd}_2\text{O}_3$  пролонгацией зависимостей  $v(x)$  до  $x = 0.3$ .

Согласно теоретическим расчетам [6, 7] энергетических характеристик вакансий в анионной подрешетке YSZ – твердого электролита с той же кристаллической структурой, что и  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$ , энергия образования вакансии в кислородной позиции зависит от ее расположения относительно примесных ионов иттрия. В работе [7] для ряда концентраций оксида иттрия в YSZ были рассчитаны энергии образования вакансии для всех возможных конфигураций. Оказалось, что наиболее энергетически выгодной конфигурацией (основное состояние с энергией  $E_0$ ) является та, в которой два иона иттрия находятся во второй координационной сфере от вакансии. Энергия всех остальных конфигураций, отделенных друг от друга энергетическим барьером высотой порядка  $E_b \approx 1$  эВ, больше  $E_0$  на 200...300 К. Ближайшая к основному состоянию конфигурация с энергией  $E_1$ , содержащая по одному примесному иону в первой и второй координационной сфере, возникает при перескоке вакансии из основного состояния  $E_0$  в одно из соседних положений. В работе [7] предполагалось, что переходы вакансии между двумя этими положениями дают малый вклад в макроскопическую диффузию, т.е. после перехода в высокоэнергетическую конфигурацию  $E_1$  наиболее вероятным является возвращение вакансии назад. Это приводит к тому, что время жизни такого комплекса достаточно большое и поэтому его можно рассматривать как двухуровневую систему с  $\Delta = E_1 - E_0 \approx 200$  К. Вычисленные в работе [7] значения теплоемкости находились в хорошем соответствии с экспериментальными результатами [1]. Однако столь большое значение ( $\Delta \approx 200$  К) не могло эффективно влиять на распространение фононов тепловых частот в области Не-температур, что и наблюдалось в образцах керамики YSZ, синтезированных в условиях различных технологических режимов, при  $R \geq 200$  нм,  $l \gg R$  и определялось только рассеянием НФ на межзеренных границах [13].

На рис. 2 приведены температурные зависимости теплопроводности  $\kappa(T)$  для монокри-

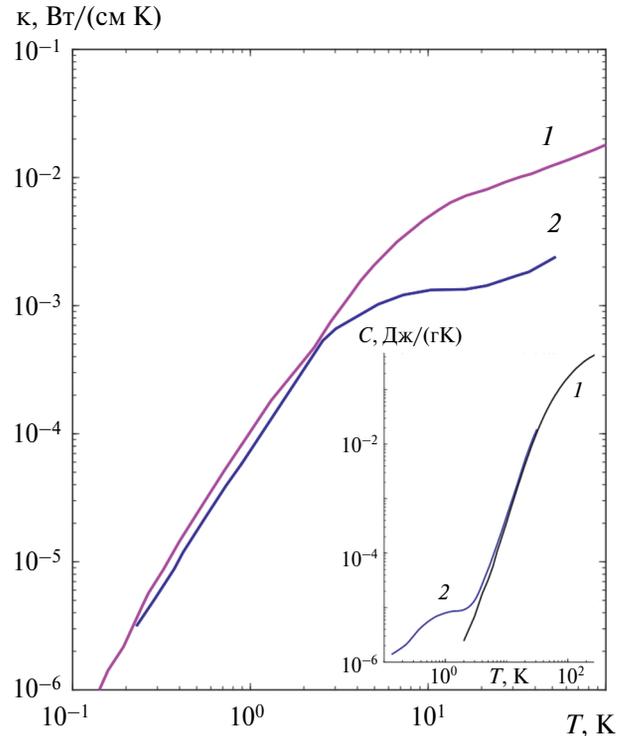
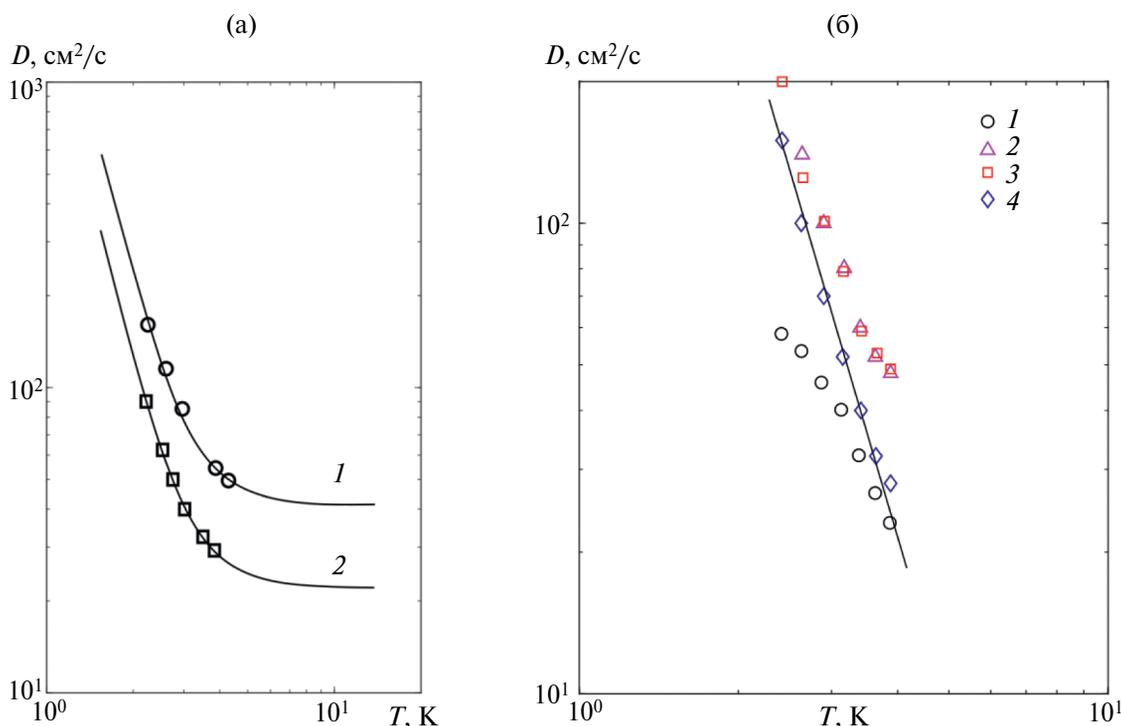


Рис. 2. Зависимости теплопроводности в монокристаллах YSZ 4.5 % (кривая 1) и PMN (2) от температуры, на вставке – зависимости теплоемкости в YSZ 4.5 % [14] (кривая 1) и 5 % (2) от температуры.

сталла твердого раствора YSZ, содержащего 4.5 мол. %  $\text{Y}_2\text{O}_3$  и сегнетоэлектрика-релаксора  $\text{PbMg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3}\text{O}_3$  (PMN) из работы [14], имеющие, по мнению авторов указанной работы, стеклоподобный характер. Данное утверждение не является безосновательным, так как для того же образца YSZ (5 %  $\text{Y}_2\text{O}_3$ ) зависимость теплоемкости в области  $T \leq 1$  К имеет вид  $C(T) \propto T$  (см. вставку на рис. 2). Там же приведены результаты  $C(T)$  на основании данных работы [15]. В работе [16] также отмечалось, что составы YSZ можно рассматривать как монокристаллы только условно. Однако в работе [15] было показано, что в монокристаллах твердого раствора YSZ природа термодинамических зависимостей  $C(T)$  и  $\kappa(T)$  в основном определяется процессами, характерными для кристаллического состояния. А именно, в монокристаллах YSZ в исследуемом диапазоне температур наблюдалось геометрическое рассеяние фононов тепловых частот (рис. 3а), когда температурная зависимость  $D(T)$  в длинноволновом пределе стремится к  $D(T) \propto T^{-4}$ . При этом абсолютные значения  $D(T)$ , а значит, и длина свободного пробега НФ в YSZ, на два порядка превышали аналогичные в материалах со стеклоподобным характером рассеяния НФ [3].



**Рис. 3.** Экспериментальные (точки) и расчетные (кривые) зависимости коэффициента диффузии  $D$  от температуры (а) в образцах YSZ длиной 0.1 см с концентрацией 12 (1) и 20 мол. %  $\text{Y}_2\text{O}_3$  (2). Зависимости коэффициента диффузии от температуры в YSZ (б): сплошная линия –  $D \sim T^{-4}$ ; кривая 1 – 5 %  $\text{Y}_2\text{O}_3$ ,  $L = 0.08$  см; кривая 2 – 20 %,  $L = 0.085$ ; кривая 3 – 20 %,  $L = 0.04$ ; кривая 4 – 5 %,  $L = 0.05$ .

Геометрическое рассеяние НФ может означать присутствие в твердом растворе YSZ наноразмерных фрагментов, сопоставимых с длиной волны фононов. Аналогичные особенности, в частности геометрическое рассеяние, когда длина волны фонона меньше или сопоставима с размером неоднородности, наблюдались нами при кластеризации в монокристаллах твердых растворов моноалюминатов [17]. По-видимому, характер теплопроводности  $\kappa(T)$  монокристалла YSZ, наблюдавшийся в виде уплощения в области температур, характерных для стеклоподобного поведения на рис. 2, являлся отражением подобной неупорядоченности твердого раствора. Данные о размере включений в образцах YSZ с 5 %  $\text{Y}_2\text{O}_3$  (области моноклинной фазы  $\sim 10 \dots 15$  нм в тетрагональной матрице) приведены в работе [18].

На рис. 3б представлены температурные зависимости коэффициента диффузии в образцах разной длины твердого раствора YSZ 5 и 20 % состава на основании данных работы [15]. Зависимость от длины образца наблюдалась только для 5 %-ного состава твердого раствора, что свидетельствует о наличии дополнительного вклада в рассеяние НФ на длине образцов с  $L \geq 0.05$  см.

В работе [7] было показано, что по мере увеличения стабилизации (содержание  $\text{Y}_2\text{O}_3$  от 5 до 20 %) отношение концентрации ДУС к количеству вакансий в анионной подрешетке твердого раствора YSZ уменьшается на порядок. Наличие наноструктурных фрагментов в твердом растворе способствует увеличению плотности колебательных состояний по сравнению с дебаевской моделью [19], а также трансформации фононного спектра монокристалла за счет формирования дополнительных низкочастотных локальных мод. Об этом может свидетельствовать сдвиг максимума теплоемкости в координатах  $C(T)/T^3$  в область низких температур (рис. 4) при уменьшении степени стабилизации твердого раствора YSZ с содержанием  $\text{Y}_2\text{O}_3$  от 20 до 5 % [1, 14, 15].

Подобный характер поведения зависимости  $C(T)/T^3$  наблюдался при переходе от кристаллического состояния в аморфную фазу (стекло) в редкоземельных пентафосфатах [20].

Предположим, что в системе  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$ , обладающей той же структурой, что и YSZ, в тех же условиях эксперимента может реализоваться ситуация с другим значением  $\Delta$ , когда взаимодействие фононов с ДУС будет определяющим.

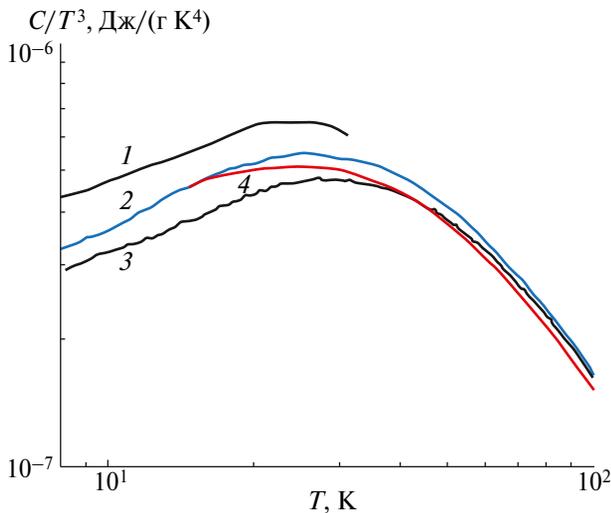


Рис. 4. Зависимости величины  $C/T^3$  от температуры для образцов YSZ: 4.5 % [14] (1), 5 % [15] (2), 20 % [15] (3), 7.76 % [1] (4).

Обратимся к модели диффузионного распространения фононов в системе с ДУС, которая была предложена в работах [21, 22] для объяснения аномалий температурных и концентрационных зависимостей при регистрации НФ в иттрий-алюминиевых гранатах с парамагнитными примесями. Согласно результатам этих работ ДУС являются центрами захвата неравновесных фононов и в уравнении теплопроводности (температуропроводности) могут быть формально описаны как равномерно распределенные в пространстве точечные источники, знак которых меняется в зависимости от координаты и времени. При достижении тепловым импульсом данной точки источник имеет отрицательный знак, отбирая энергию из фононной подсистемы, а после прохождения теплового импульса — положительный, отдавая накопленную энергию фононам. При этом сигнал на болометре формируется из двух групп фононов. Первую (быстрый процесс) формируют фононы, которые в процессе распространения только упруго взаимодействовали с дефектами структуры. Вторую (медленный процесс) формируют фононы, которые успели провзаимодействовать с подсистемой ДУС. Значение регистрируемого сигнала в этих точках определяется отношением времен

$$\alpha = t_0/\tau,$$

где  $t_0$  — время прихода максимума сигнала в отсутствие ДУС, а  $\tau$  — время энергообмена между подсистемой ДУС и фононами.

При  $\alpha \ll 1$  подсистема ДУС не успевает взаимодействовать с тепловым импульсом, болометр регистрирует только быстрый процесс. С ростом  $\alpha$  возрастает доля фононов, успевших взаимодействовать с ДУС. При  $\alpha \gg 1$  регистрируемый сигнал несет информацию только о медленном процессе и определяется отношением теплоемкостей подсистемы ДУС и фононов:

$$D = \frac{D_0}{1 + nc_{\text{ДУС}} / c_{\text{Ф}}} < D_0, \quad (1)$$

где  $c_{\text{ДУС}}$ ,  $c_{\text{Ф}}$  — теплоемкости ДУС и фононов соответственно,  $n$  — количество ДУС;  $D_0$  — коэффициент диффузии в отсутствие ДУС. Физический смысл этого выражения заключается в том, что при большей теплоемкости подсистемы ДУС фонон в процессе диффузионного распространения в образце с коэффициентом диффузии  $D_0 = 1/3l_0v$  может многократно провзаимодействовать с ДУС, накопив тем самым время задержки.

Из анализа рис. 1 следует, что в системе  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$  регистрируется информация только об одном процессе и, согласно проведенным оценкам, этот процесс медленный. Таким образом, для описания эксперимента можно воспользоваться приведенным выше выражением (1). Зная фононную теплоемкость одного моля вещества

$$c_{\text{Ф}} = (12/5)R_g\pi^4(T/\theta)^3$$

( $R_g$  — универсальная газовая постоянная,  $\theta$  — температура Дебая) и теплоемкость ДУС

$$c_{\text{ДУС}} = k_B \left( \frac{\Delta}{T} \right)^2 \frac{\exp(-\Delta/T)}{(1 + \exp(-\Delta/T))^2},$$

можно подобрать остальные параметры ( $\Delta$ ,  $n$  и  $l_0$ );  $k_B$  — постоянная Больцмана.

При расчетах температуру Дебая для образцов с различной концентрацией примеси вычисляли по формуле [10]

$$\theta = \frac{\hbar}{k_B} \frac{2\pi}{a} \left( \frac{3N}{4\pi} \right)^{1/3} v$$

где  $a$  — постоянная решетки,  $N$  — число атомов в элементарной ячейке. Было найдено, что значение  $\Delta = 8.53$  К позволяет получить лучшее для всех образцов соответствие теоретических зависимостей с экспериментом. При этом для

всех образцов  $l_0 \approx 1.5 \times 10^{-4}$  см, а концентрация ДУС пропорциональна концентрации атомов гадолиния, но примерно на порядок меньше ( $n = 0.08x$ ), что представляется вполне разумным значением с учетом присутствия в рассматриваемой системе ионов церия с различной степенью окисления.

Модель, рассмотренная в работах [21, 22], является феноменологическим обобщением микроскопической модели [23] и позволяет получить выражение для коэффициента диффузии в системе с ДУС в самом общем виде, которое может быть использовано для центров захвата любой природы. В частности, в работе [24] в качестве центров захвата были рассмотрены мелкие металлические включения в диэлектрической матрице.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе проанализированы кинетические характеристики субтерагерцовых фононов в образцах керамики твердых растворов электролита  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$  и YSZ. Для объяснения характера температурной зависимости и малой длины свободного пробега фононов использованы результаты расчетов энергии образования вакансий в анионной подрешетке твердого раствора YSZ с аналогичной кристаллической структурой. Анализ экспериментальных результатов показал, что если в исследуемой системе  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$ , так же как и в системе YSZ, образуются структурные дефекты, связанные наличием вакансий, то в модели ДУС их энергия равна  $\Delta = 8.53$  К.

Показано, что анализ температурных зависимостей коэффициента диффузии НФ и теплоемкости YSZ позволяет проследить степень “аморфизации” твердого раствора в зависимости от его стабилизации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (2023 г.).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tojo T., Atake T., Mori T., Yamamura H.* // J. Thermal Analysis and Calorimetry. 1999. V. 57. № 1. P. 447.

2. *Vlachos D., Craven A.J., McComb D.W.* // J. Phys.: Cond. Matt. 2001. V.13. № 10. P. 799.

3. *Саламатов Е.И., Таранов А.В., Хазанов Е.Н.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 6. С. 523.

4. *Degueldre C., Tissot P., Lartigue H., Pouchon M.* // Thermochimica Acta. 2003. V. 403. № 2. P. 267.

5. *Ostanin S.A., Salamatov E.I.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. № 11. С. 625.

6. *Ostanin S., Craven A.J., McComb D.W. et al* // Phys. Rev. B. 2002. V. 65. № 22. P. 224109.

7. *Ostanin S., Salamatov E.* // Phys. Rev. B. 2003. V. 68. № 17. P. 172106.

8. *Hayashi H., Kanoh M., Ch. Ji Quan et al.* // Solid State Ionics. 2000. V. 132. № 3–4. P. 227.

9. *Hisashige T., Yamamura Y., Tsuji T.* // J. Alloys and Compounds. 2006. V. 408–412. P. 1153.

10. *Wang Y., Duncan K., Wachsmann E.D., Ebrahimi F.* // Solid State Ionics. 2007. V.178. № 1–2. P. 53.

11. *Хазанов Е.Н., Таранов А.В.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 9. С. 874.

12. *Atkinson A., Selcuk A.* // Solid State Ionics. 2000. V. 134. №1–2. P. 59.

13. *Барабаненков Ю.Н., Иванов В.В., Иванов С.Н. и др.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. № 1. С. 131.

14. *Ackerman D.A., Moy D., Potter R.C., Anderson A.C.* // Phys. Rev. B. 1981. V. 23. № 8. P. 3886.

15. *Саламатов Е.И., Таранов А.В., Хазанов Е.Н. и др.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 152. № 5. С. 910.

16. *Иванов С.Н., Егоров Г.В., Попов П.А.* // ФТТ. 1992. Т. 34. № 11. С. 3599.

17. *Лезова И.Е., Карбань О.В., Таранов А.В. и др.* // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. № 1. С. 90.

18. *Борик М.А., Бублик В.Т., Кулебякин А.В. и др.* // ФТТ. 2013. Т. 55. № 8. С. 1578.

19. *Малиновский В.К., Новиков В.Н., Соколов А.П.* // Успехи физ. наук. 1993. Т. 163. № 5. С. 119.

20. *Лезова И.Е., Саламатов Е.И., Таранов А.В. и др.* // ЖЭТФ. 2019. Т. 156. № 5. С. 918.

21. *Саламатов Е.И.* // ФТТ. 2002. Т. 44. № 5. С. 935.

22. *Саламатов Е.И.* // ФТТ. 2003. Т. 45. № 4. С. 691.

23. *Козорезов А.Г.* // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. № 5. С. 1577.

24. *Карбань О.В., Саламатов Е.И., Таранов А.В. и др.* // ЖЭТФ. 2009. Т. 135. № 4. С. 758.

## PHONON SPECTROSCOPY AND FEATURES OF LOW-TEMPERATURE HEAT CAPACITY OF SOLID SOLUTIONS OF ELECTROLYTES

E. I. Salamatov<sup>a</sup>, A. V. Taranov<sup>b,\*</sup>, E. N. Khazanov<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Physics and Technology of the Udmurt Federal Research Center  
of the Ural branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 462067 Russia*

<sup>b</sup>*Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics Russian Academy of Sciences,  
Moscow, 1125009 Russia*

\*E-mail: [taranov@cplire.ru](mailto:taranov@cplire.ru)

Received May 18, 2023; revised November 12, 2023; accepted November 25, 2023

The kinetic characteristics of thermal frequency phonons in the region of helium temperatures in ceramic samples of the  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$  electrolyte solid solution have been studied. To explain the temperature dependence of the phonon mean free path, we used the previously performed calculations of the energy of vacancy formation in the anion sublattice of a solid solution of zirconium dioxide stabilized by yttrium  $\text{ZrO}_2\text{:Y}_2\text{O}_3$  (YSZ) with a similar crystal structure. It is shown that in the  $\text{Ce}_{1-x}\text{Gd}_x\text{O}_{2-y}$  system under study, the formation of structural defects associated with the presence of vacancies in the anion sublattice with energy  $\Delta = 8.53$  K is possible. It has been established that analysis of the temperature dependences of the YSZ heat capacity allows one to trace the degree of disorder (amorphization) of the solid solution depending on its level of stabilization.

*Keywords:* phonons, kinetic characteristics, electrolyte solid solution ceramics, anion sublattice, structural defects, vacancies

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 537.311.322

РАЗМЕРНЫЙ РЕЗОНАНС СОБСТВЕННОГО СТИМУЛИРОВАННОГО  
ПИКОСЕКУНДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НАВЕДЕНИИ ИМ  
ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА И ОСЦИЛЛЯЦИЙ НАСЕЛЕННОСТИ  
ЭЛЕКТРОНОВ В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ  $Al_xGa_{1-x}As-GaAs-Al_xGa_{1-x}As$

© 2024 г. Н. Н. Агеева, И. Л. Бронева\*, А. Н. Кривонос

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр.7, Москва, 125009 Российская Федерация*

*\*E-mail: bil@cplire.ru*

Поступила в редакцию 16.05.2023 г.

После доработки 15.07.2023 г.

Принята к публикации 28.07.2023 г.

Мощная пикосекундная оптическая накачка слоя GaAs гетероструктуры вызывает генерацию в нем стимулированного пикосекундного излучения. Благодаря своей высокой интенсивности излучение наводит брэгговскую решетку населенности электронов в активной области слоя, делая последнюю активным фотонным кристаллом. В поле излучения инверсная населенность электронов осциллирует со временем, что должно приводить к пространственно-временной модуляции излучения и этой населенности. Обнаружено, что, если расстояние  $Y$  между торцом гетероструктуры и центром активной среды и геометрические параметры указанной модуляции и движения излучения в фотонном кристалле удовлетворяют определенным условиям, то происходит размерный резонанс – возникает локально максимум модуляции зависимости энергии излучения, выходящего из торца, от  $Y$  и от энергии накачки.

*Ключевые слова:* размерный резонанс, гетероструктура, стимулированное пикосекундное излучение, фотонный кристалл, осцилляции населенности электронов в полупроводнике, пространственно-временная модуляция излучения

DOI: 10.31857/S0033849424020106, EDN: KMGYN1

## ВВЕДЕНИЕ

Во время мощной оптической пикосекундной накачки слоя GaAs гетероструктуры  $Al_xGa_{1-x}As-GaAs-Al_xGa_{1-x}As$  в нем возникает интенсивное пикосекундное стимулированное излучение (далее – излучение). Ранее преимущественное внимание уделялось нами исследованию той части излучения, которая вытекала прямо из активной области слоя GaAs в направлении, ортогональном плоскости гетероструктуры. Это было излучение, рассеиваемое несовершенствами кристаллической структуры и сохраняющее при этом основные характерные свойства стимулированного излучения. Оно не подвергалось поглощению в пассивной области, и на его генерацию практически не влияло отраженное от далеко расположенных торцов гетероструктуры излучение. Только в работе [1]

при фиксированной энергии  $W_{ex}$  импульса накачки экспериментально исследовалось выходящее из торца гетероструктуры излучение, а исходное расстояние от центра активной области до торца гетероструктуры было уменьшено до 1 мм. Тогда обнаружилось, в частности, что зависимость энергии спектральной компоненты излучения от уменьшения расстояния между активной областью и торцом гетероструктуры автомодулирована. В более поздней работе, также в отсутствие влияния отраженного от торца излучения было установлено, что излучение наводило в активной области брэгговскую решетку населенности – распределенный брэгговский отражатель (РБО), превращая эту область в фотонный кристалл. Кроме того, было найдено, что под влиянием поля излучения возникали осцилляции инверсной населенности электронов,

происходившие во времени и в энергетическом пространстве. Частота  $F$  осцилляций населенности зависела от интенсивности излучения, зависящей, в свою очередь, от  $W_{\text{ex}}$ . (Подробнее см. обзор [2].)

Цель данной статьи — продолжая исследование работы [1], описать дальнейшее экспериментальное исследование автомодуляции зависимостей энергии излучения, интегрального по спектру, и энергии его спектральных компонент от расстояния  $Y$  центра активной области до торца гетероструктуры и энергии импульса накачки  $W_{\text{ex}}$ . Под модуляцией понималось отклонение графика зависимости от гладкой кривой.

Эти исследования обнаружили локальные усиления отдельных колебаний в автомодуляции. При этом выделяющееся своей величиной колебание энергии излучения возникает при определенных сочетаниях расстояния  $Y$  и энергии  $W_{\text{ex}}$ . Этим сочетаниям соответствуют установленные соотношения между расстоянием  $Y$  и геометрическими параметрами: а) движения излучения в фотонном кристалле, б) пространственной модуляции излучения и населенности электронов, вызванной упомянутыми осцилляциями последней. Тем самым обнаружен новый размерный резонанс (РР), поскольку избирательный отклик колебательной системы на установление определенного соотношения между геометрическими параметрами образца и происходящими в нем физическими процессами квалифицируется как РР. Он пополняет ряд уже описанных в [2] колебательных процессов, возникающих, как доказывает их существование, в новой колебательной системе — гетероструктуре с наведенным активным фотонным кристаллом и собственным стимулированным излучением.

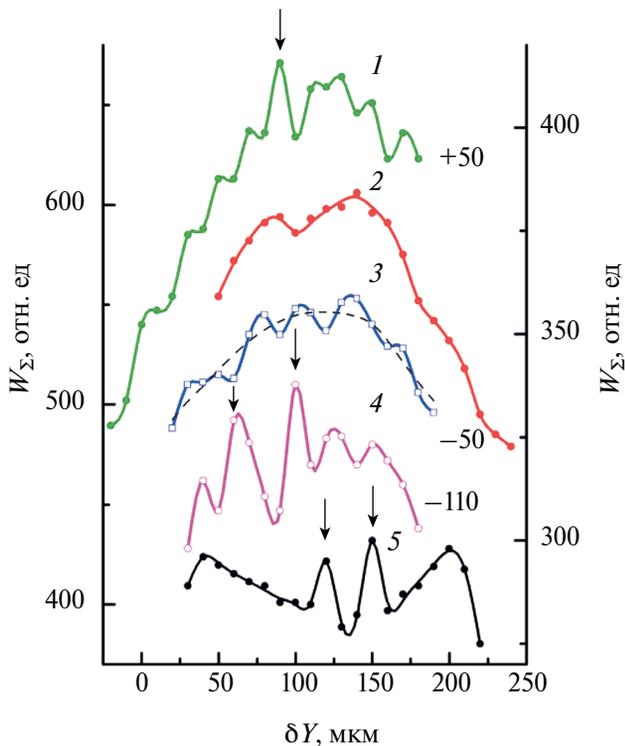
Обнаруженный РР образовывался при участии фотонного кристалла, что является новым вкладом и в изучение фотонных кристаллов. Их исследование актуально и ведет к нетривиальным результатам (см. [3] и ссылки там). В частности, в работе [4] были математически получены результаты, распространяющиеся также на случай наведения решетки населенности, но двумя симметричными световыми лучами, падающими извне на полупроводник, который остается пассивной средой. Полученные в [4] результаты показали возможность нарушения симметрии указанных лучей в полупроводнике и возникновения бистабильности их интенсивности.

В прикладном аспекте данная работа интересна в связи со следующими фактами. Наведение собственным излучением брэгговской решетки заселенности в волноводной гетероструктуре во многом сходно с выжиганием пространственных дыр в полупроводниковом лазере. А наведение излучением осцилляций населенности электронов является одной из причин нестабильностей лазерного излучения. Поэтому описанные здесь явления могут быть характерны и для лазеров, и их исследование в нашей постановке экспериментов, по-видимому, доступнее, чем исследование непосредственно в лазерах.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Данная работа началась с исследования зависимости интегральной по времени энергии спектра излучения от расстояния центра активной области до ближайшего торца гетероструктуры, которое исходно составляло  $Y_0 \approx 1$  мм. Эксперименты выполняли на спектрофотохронометрическом лазерном пикосекундном комплексе, подробно описанном в [2]. Исследуемый образец изначально представлял собой гетероструктуру  $\text{Al}_{0,22}\text{Ga}_{0,78}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_{0,4}\text{Ga}_{0,6}\text{As}$  с толщиной слоев соответственно 1.3–1.5–1.2 мкм. Часть площади гетероструктуры, включая один торец, была освобождена от подложки. Оставшаяся часть подложки окаймляла гетероструктуру, как рама, с трех сторон (см. [1, рис. 1]). Слои  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  предназначены для стабилизации поверхностной рекомбинации и механической прочности и прозрачны для света, используемого в эксперименте.

Слой GaAs подвергали оптической накачке (ex) мощным световым импульсом длительностью (FWHM, т.е. на полувысоте)  $t_p \approx 10$  пс и с энергией фотона  $\hbar\omega_{\text{ex}} \approx 1.56$  эВ. Длительность основания импульса составляла около 22 пс. Диаметр луча накачки (FWHM), а соответственно, и диаметр создаваемой ею активной области слоя GaAs, равнялся  $D_{\text{ex}} \approx 0.5$  мм. Стимулированное излучение возникало, как только плотность накачиваемых носителей заряда достигала пороговой величины. Затем его интенсивность росла в течение примерно 16 пс, достигала максимума, после чего релаксировала на протяжении примерно 46 пс. Длительность (FWHM) составляла  $t_s \approx 24$  пс (Подробнее см. [5]). Часть излучения, выходящего из торца участка гетероструктуры, освобожденного от подложки, попадала в



**Рис. 1.** Зависимость энергии излучения  $W_{\Sigma}$ , интегральной по спектру, от изменения  $\delta Y$  расстояния между центром активной области и торцом гетероструктуры при энергии импульса накачки  $W_{\text{ex}}$ : 3.96 (1), 3.75 (2), 3.6 (3), 3.46 (4) и 3.9 отн. ед. (5). Для наглядности спектры сдвинуты по оси ординат относительно своего истинного положения на величину, указанную справа от кривых. Пунктиром показан пример нивелирования зависимости  $W_{\Sigma}(\delta Y)$ . Зависимости 1–4 (левая ось ординат) измерены в максимуме диаграммы направленности излучения, а 5 (правая ось) – на ее периферии (стрелки пояснены в тексте).

кварцевый световод, по которому транспортировалась к входной щели двойного спектрографа. Интегральный по времени спектр излучения регистрировался ПЗС-камерой PIXIS, установленной у выходной щели первой ступени спектрографа.

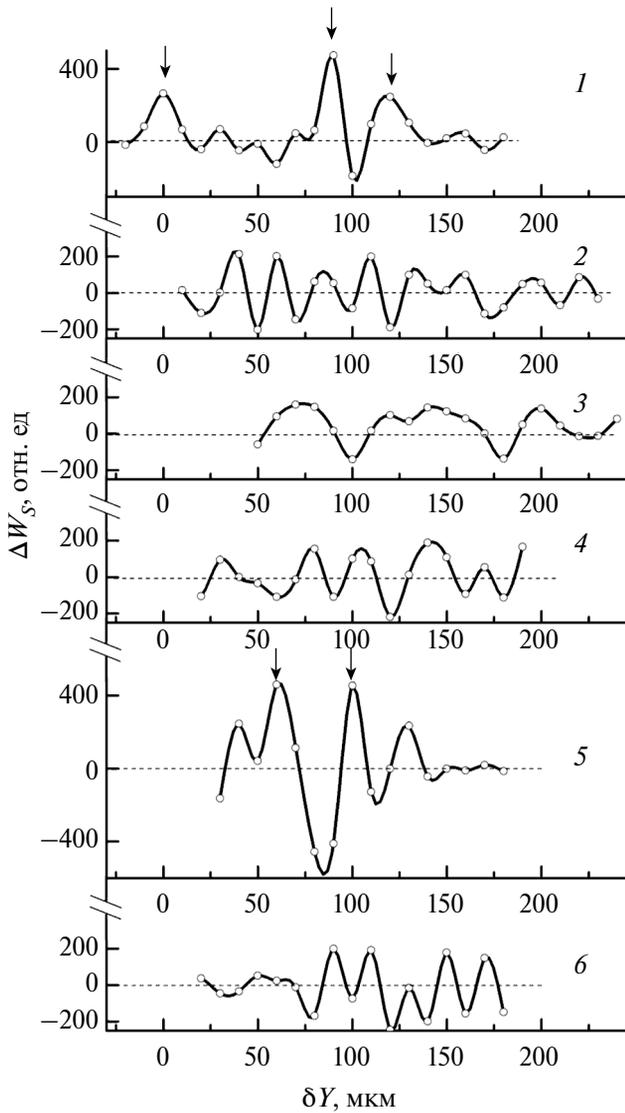
Положения в пространстве световода и фокусного пятна оптической накачки сохранялись неизменными во время каждого опыта. Изменение расстояния фокусного пятна, т.е. активной области в слое GaAs, до торца гетероструктуры достигалось за счет сдвига образца в направлении измеряемого излучения. Поскольку затруднительно определять с высокой точностью расстояние между центром пятна и торцом, далее будем указывать сдвиг  $\delta Y$  от исходного положения образца. В каждом опыте образец устанавливали так, чтобы с допустимой точностью

исходное расстояние между центром фокусного пятна и торцом образца составляло  $Y_0 \approx 1$  мм. Сдвиг  $\delta Y$ , приближавший активную область к торцу образца, считался положительным.

По сравнению с экспериментами, описанными в работе [1], лазерный комплекс был модернизирован так, что позволял одновременно измерять интегральные по времени энергии  $W_{\Sigma}$  спектральных компонент излучения, расположенных в спектральном диапазоне шириной до 52 мэВ. Спектральное разрешение было равно 0.1 мэВ. Во время измерений в расчет принимались только те акты накачки, для которых отклонение энергии импульса накачки от заданного значения не превышало  $\pm 2\%$ . Накопление данных продолжалось до тех пор, пока усредненный по ним спектр излучения не переставал с точностью до 1% зависеть от числа импульсов накачки.

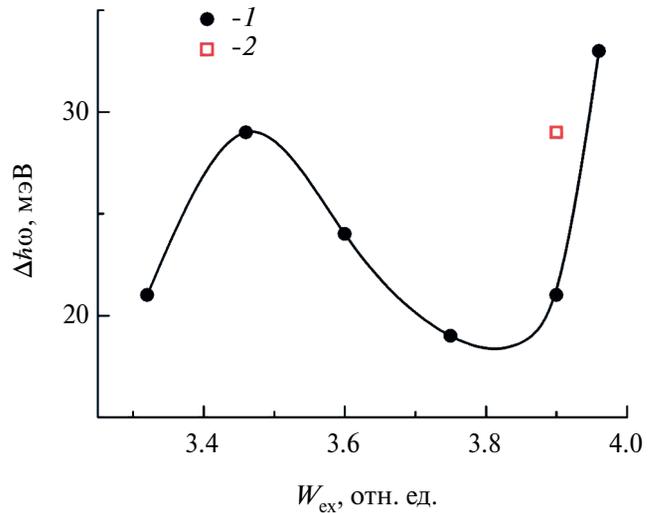
На основании измерений при фиксированной  $W_{\text{ex}}$  определяли зависимость энергии  $W_{\Sigma}$  основной части излучения, интегральной примерно по указанному выше диапазону спектра, от  $\delta Y$ . Зависимость была автомодулированной. Обнаружилось, что при изменении  $W_{\text{ex}}$  меняется характер модуляции зависимости  $W_{\Sigma}(\delta Y)$ , измерявшейся в почти одном и том же диапазоне значений  $\delta Y$  (см. рис. 1, кривые 1–4). Под характером модуляции понимается расположение, форма и высота локальных выступов (ЛВ) на графике зависимости.

Модуляция зависимостей  $W_{\Sigma}(\delta Y)$  являлась суммой модуляций зависимостей энергии  $W_{\Sigma}$  спектральных компонент излучения от  $\delta Y$ . Каждая зависимость  $W_{\Sigma}(\delta Y)$ , являвшаяся наиболее ярким примером модуляции при каждой  $W_{\text{ex}}$ , была разделена с помощью компьютерного анализа на гладкую составляющую и на модуляционную составляющую  $\Delta W_{\Sigma}(\delta Y)$  (рис. 2). Последняя представляла разность экспериментальной зависимости  $W_{\Sigma}(\delta Y)$  и ее гладкой составляющей. На рис. 1 только в качестве примера представлена гладкая составляющая (пунктир), полученная компьютерным нивелированием графика 3. Ширина спектрального диапазона  $\Delta h\nu$ , в котором заключены существенно модулированные зависимости  $W_{\Sigma}(\delta Y)$ , менялась при изменении  $W_{\text{ex}}$  (рис. 3). Эта и другие экспериментальные зависимости получены при  $W_{\text{ex}} < 4$  отн. ед., что объясняется опасностью повреждения образца при длительных измерениях с еще более высокой энергией накачки.

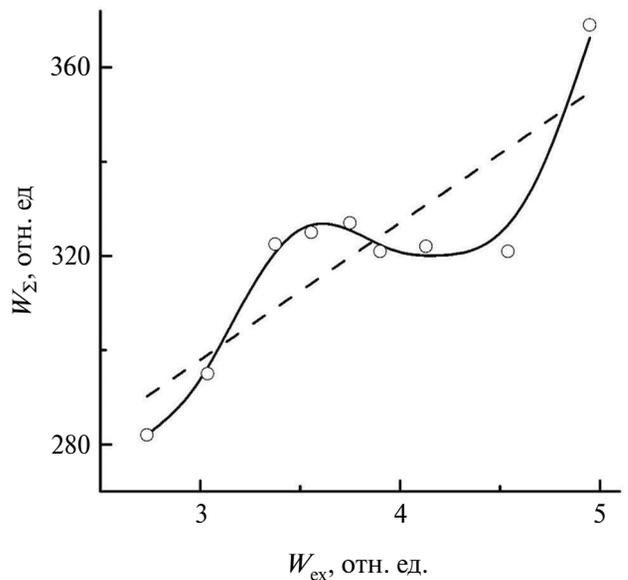


**Рис. 2.** Зависимость от  $\delta Y$  модуляционной составляющей  $\Delta W_s$  энергии спектральной компоненты излучения: с  $\hbar\omega = 1.387$  эВ при  $W_{ex} = 3.96$  (1), 3.75 (3), 3.6 отн. ед. (4); с  $\hbar\omega = 1.384$  эВ при  $W_{ex} = 3.9$  отн. ед. (2), 3.46 отн. ед. (5); с  $\hbar\omega = 1.39$  эВ при  $W_{ex} = 3.32$  отн. ед. (6). Стрелки пояснены в тексте.

То, что при изменении  $W_{ex}$  менялся характер модуляции зависимости  $W_{\Sigma}(\delta Y)$  заставило предположить, что и зависимость  $W_{\Sigma}(W_{ex})$  при  $\delta Y = \text{const}$  должна быть модулированной. Это действительно экспериментально обнаружилось (рис. 4). Измеренная зависимость может быть представлена как сумма её немодулированной составляющей (пунктирная прямая) и модуляционной составляющей, представляемой разностью экспериментальной зависимости и указанной пунктирной прямой. Полученные модуляционные составляющие  $\Delta W_s(W_{ex})$  изме-



**Рис. 3.** Ширина спектрального диапазона  $\Delta\hbar\omega_s$ , в котором заключены существенно модулированные зависимости  $W_s(\delta Y)$ , в функции  $W_{ex}$  для измерений в максимуме (1) и на периферии (2) диаграммы направленности излучения.



**Рис. 4.** Зависимость энергии излучения  $W_{\Sigma}$  от энергии накачки  $W_{ex}$  при  $\delta Y = 160$  мкм; пунктиром показана линейная составляющая этой зависимости.

ренных зависимостей энергии спектральных компонент излучения  $W_s(W_{ex})$  иллюстрирует на отдельных примерах рис. 5. Максимум и минимум на графиках  $\Delta W_s(W_{ex})$  соответствуют, как будет показано ниже, РР.

Описанные результаты получены благодаря измерениям излучения, располагавшегося в максимуме диаграммы направленности. Но при

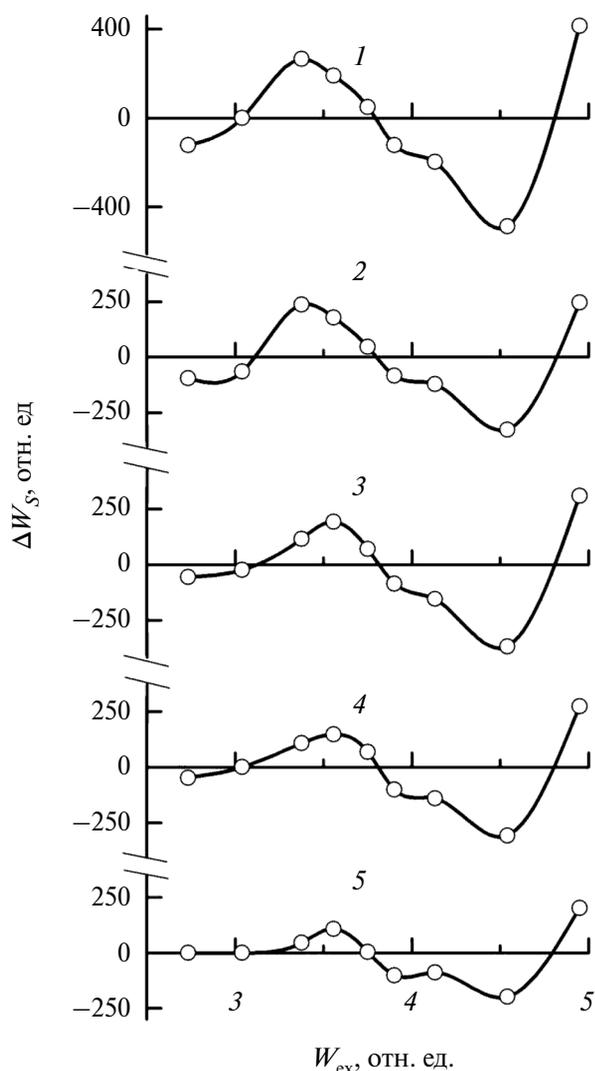


Рис. 5. Зависимость от  $W_{\text{ex}}$  модуляционной составляющей  $\Delta W_s$  энергии спектральной компоненты излучения с  $\hbar\omega$ : 1.387 (1), 1.39 (2), 1.394 (3), 1.398 (4) и 1.403 эВ (5).

$W_{\text{ex}} = 3.9$  отн. ед. было однократно выполнено ещё и измерение энергии излучения на периферии диаграммы его направленности, т.е. распространявшегося в гетероструктуре и преломлявшегося при выходе из нее под другими углами, чем излучение из максимума диаграммы. На графике этой зависимости выделились два высоких и узких ЛВ при  $\delta Y = 120$  и  $150$  мкм (см. рис. 1, кривая 5). Подобные им высокие ЛВ, выявляющие локально возникающие наиболее сильные колебания в модуляции энергии излучения (на рис. 1 и 2 на такие ЛВ указывают стрелки) наблюдаются при  $\delta Y = 60$  и  $100$  мкм (см. рис. 1, кривая 4, рис. 2, кривая 5), при  $\delta Y = 90$  мкм (кривая 1), а

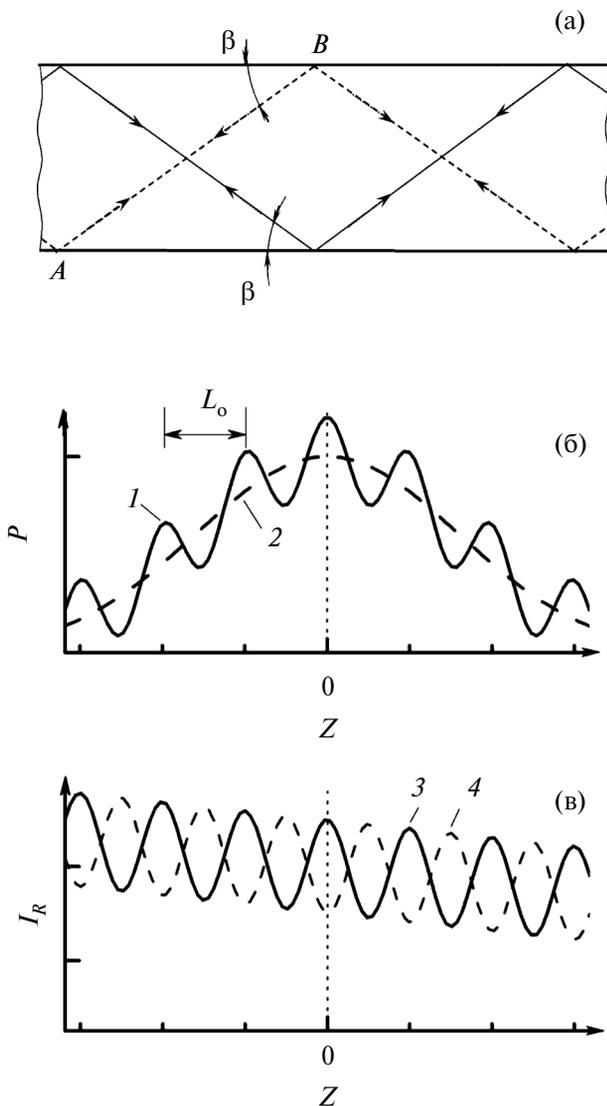
также при  $\delta Y = 0$  и  $\delta Y = 90$  и  $120$  мкм (см. рис. 2, кривая 1). Они вызваны тоже РР, см. ниже.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем сначала упрощенное представление, на основании которого сделаны приводимые ниже оценки. Оно допускает формирование РР модуляции излучения, выходящего из торца гетероструктуры. Начнем с того, что в активной среде в поле излучения возникают осцилляции населенности электронов. Частота  $F$  осцилляций является линейной функцией  $W_{\text{ex}}$  и интенсивности излучения, интегрального по спектру, а спектр фазовой постоянной осцилляций в наиболее простом случае (в области максимума импульса излучения) имеет форму меандра [2]. Эти осцилляции модулируют излучение. Части одной и той же спектральной компоненты излучения, движущиеся диаметрально противоположно, формируют цилиндрическую стоячую волну. Последняя создает осциллирующие обеднения (“выжигает осциллирующие дыры”) в распределении в пространстве населенности  $P$  электронов на тех энергетических уровнях зоны проводимости, рекомбинируя с которых, они генерируют эту компоненту излучения. Это приводит к такой модуляции пространственного распределения данной населенности, которая имеет подобную же форму цилиндрической стоячей волны (далее –  $f$ -волна). Ее период в пространстве равен  $L_0 = T_0 c_0 / n_g$ , где  $T_0 = F^{-1}$  – период осцилляций населенности электронов, возбуждаемых полем излучения,  $c_0$  – скорость света в вакууме,  $n_g \approx 5.1$  – групповой показатель преломления для GaAs. Пространственное распределение населенности  $P$  в два избранных момента времени, разделенных интервалом  $T_0/4$ , представлены схематически на рис. 6.

Представление о  $f$ -волне позволяет объяснить и модуляцию излучения, выходящего из активной среды, диаметр которой не менее  $D_{\text{ex}} \gg L_0$ .  $f$ -Волна должна обладать бистабильной осевой симметрией, поскольку в местоположении оси, проведенной через центр активной области, может находиться узел (состояние 1) или середина пучности (состояние 2)  $f$ -волны. Переход  $f$ -волны из состояния 1 в состояние 2 равнозначен сдвигу ее пучностей и узлов в пространстве в радиальном направлении на  $L_0/2$ .

Уточним, что модуляция излучения установлена пока косвенными экспериментальными



**Рис. 6.** Схематическое представление: а – движения в слое GaAs навстречу друг другу парциальных волн спектральной компоненты излучения; б – распределения населенности  $P$  электронов в пространстве в моменты времени, разделенные интервалом  $T_0/4$  (1), (2); в – изменения интенсивности  $I_R$  отраженного излучения в пространстве, в моменты времени, разделенные интервалом  $T_0/2$  (3), (4).

методами [2, 6]. Осуществить её прямые измерения в реальном времени имеющимися средствами пока невозможно. Однако факт аналогичной модуляции, но с периодом 6 пс и более, был доказан измерениями в реальном времени огибающей зондирующего светового импульса, прошедшего через фотонакаченный слой GaAs гетероструктуры, в котором генерировалось излучение, [2].

Пусть при какой-то  $W_{ex}$  получается, что отраженное от торца гетероструктуры модулированное излучение движется в активной среде так, что в местоположениях пучностей  $f$ -волны в состоянии 2, в момент максимума инверсной населенности (рис. 6, локальные максимумы кривой 1), оказываются минимумы интенсивности модулированного отраженного излучения, представляемого кривой 4. Тогда отраженное излучение минимально усилится. В то же время генерируемое, движущееся к торцу излучение усилится в активной среде максимально. Это требует выполнения условия

$$2(Y_0 - \delta Y) = (m + 0.5)L_0, \quad (1)$$

где  $m$  – целое число. Если же, меняя  $W_{ex}$ , изменить частоту  $F$  и, соответственно, период  $L_0$  так, чтобы создать ситуацию, когда локальным максимумам (ЛМ) инверсной населенности в пучностях  $f$ -волны будут соответствовать ЛМ модулированного отраженного излучения (см. рис. 6, кривая 3), то отраженное излучение максимально усилится в активной среде, а энергия выходящего из торца излучения станет минимальной. Это потребует выполнения условия

$$2(Y_0 - \delta Y) = mL_0. \quad (2)$$

Однако бистабильность  $f$ -волны делает возможным при выполнении условия (2) и противоположный результат. Пусть в состоянии 1 при условии (1) энергия движущейся к торцу спектральной компоненты излучения усилилась максимально, что отобразилось бы появлением высокого выступа, или, иначе, ЛМ, на зависимости  $W_s(\delta Y)$ . Если изменить затем  $\delta Y$  на  $L_0/4$ , то согласно (2) энергия выходящего из торца излучения стала бы минимальной. Но с приходом отраженного излучения в активную область, возможно, начнется синхронизация его модуляции с бистабильной модуляцией  $f$ -волны. Допустимо, что в процессе этого произойдет переключение  $f$ -волны в состояние 2. Тогда энергия движущейся к торцу волны вновь усилится максимально. При этом на зависимости  $W_s(\delta Y)$  появится второй ЛМ, отделенный от первого ЛМ интервалом  $\Delta_1 Y \approx L_0/4$ . Такое наблюдалось экспериментально в работе [1, рис. 2, кривые 1 и 2], где было  $T_0 \sim 4$  пс и  $\Delta_1 Y \approx L_0/4 \sim 60$  мкм, и теперь получило объяснение. Этим же, видимо, объясняется и описанное в разд. 1 появление преимущественно парами наиболее высоких

ЛМ на зависимости  $W_s(\delta Y)$ . Значение для них  $\Delta_1 Y \approx 30 \dots 40$  мкм сопоставимо с величиной  $L_o/4 \sim 44$  мкм при оцениваемом ниже для нынешних экспериментов значении  $T_o \sim 3$  пс.

Кроме того, отметим следующее. При увеличении  $\delta Y$  возрастает интенсивность отраженной волны. Возможно, с этим связано то, что по мере возрастания  $\delta Y$  от 0 до 150 мкм возникает сначала один ЛМ с шириной основания 40 мкм, затем две пары ЛМ с разной шириной основания — первая пара 40 и 20 мкм, вторая пара — 20 и 30 мкм и, наконец, пара ЛМ с шириной основания 20 мкм каждого, предельно узкой для нашей возможности менять  $\delta Y$  с шагом 10 мкм. То есть появление второго ЛМ и сужение основания обоих ЛМ до 20 мкм имеет характер нелинейного явления.

Излучение наводит в гетероструктуре в слое GaAs еще и брэгговскую (динамическую) решетку населенности электронов. Иными словами, это РБО, или фотонный кристалл (подробнее см. [2]). В волноводной гетероструктуре, имеющей такой РБО, генерируемое излучение движется в активной области от одного её края до диаметрально противоположного, соответственно в двух противоположных направлениях по двум зигзагообразным траекториям (далее —  $z$ -траекториям), простирающимся и в пассивную область, и наклоненным под углом  $\beta$  к гетерограницам (см. рис. 6). Угол  $\beta$  задается граничными условиями, при выполнении которых образуется РБО. В соответствии с ними угол  $\beta$  должен удовлетворять соотношению

$$\sin \beta = k \lambda_0 / 2n_0 d, \quad (3)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны (в вакууме) той наиболее интенсивной в активной области спектральной компоненты излучения, которая создает РБО,  $n_0$  — показатель преломления GaAs,  $d$  — толщина слоя GaAs,  $k$  — целое число, отчего угол  $\beta$  может меняться только дискретно. РБО должен приводить к образованию в спектре излучения кроме ЛМ при  $\lambda_0$ , еще других ЛМ, приблизительно разделенных с ним интервалами, кратными величине

$$\xi = hc_0 \sin \beta / 2n_0 d = hc_0 k \lambda_0 / (2n_0 d)^2. \quad (4)$$

Примем для оценки, что  $k = 1$ ,  $\lambda_0 = 0.886$  мкм для спектральной моды с энергией фотона  $\hbar\omega_0 = 1.40$  эВ,  $n_0 = 3.6$  для GaAs при температу-

ре решетки  $T_R \approx 300$  К,  $d = 1.5$  мкм. Получаем  $\beta \approx 4.7^\circ$ ,  $\xi \approx 9.4$  мэВ. Упомянутое выше граничное условие образования РБО состоит в следующем. Каждой точке пересечения одной  $z$ -траектории с гетерограницей соответствует симметрично расположенная точка пересечения второй  $z$ -траектории с другой гетерограницей, так что обе указанные точки лежат на противоположных концах нормали к гетерограницам. Это условие беспрепятственно выполняется до того момента, пока отраженное от торца излучение не поступит в активную область. Допустим, что точка пересечения двух симметричных зигзагообразных  $z$ -траекторий излучения — последняя точка перед его выходом через торец наружу — не располагается в плоскости торца. Тогда отраженное излучение будет двигаться в активной области, усиливаясь, в направлении от торца уже по другим, новым траекториям. И эти траектории будут пересекаться с гетерограницами в новых точках, отличающихся от установившихся до прихода отраженного излучения. И эти новые точки уже не лежат на одной нормали с точками пересечения с гетерограницами излучения, движущегося в направлении к торцу.

Возникшее расхождение с граничным условием образования РБО окажет деструктивное влияние на РБО. Это проявится в уменьшении доли генерируемого излучения, направляемой из активной области к указанному торцу. То есть одно из условий достижения максимальной энергии выходящего из торца гетероструктуры излучения заключается в том, что точка пересечения  $z$ -траекторий — последняя точка перед выходом излучения из гетероструктуры — лежит на ее торце. Соответствующий выполнению этого условия ЛМ энергии излучения должен достигаться в какой-то точке зависимости  $W_s(\delta Y)$ , а ширина основания образованного на ней при этом ЛВ примерно совпадать с интервалом  $L_i$  между соседними точками пересечения  $z$ -траекторий, который по оценке равен  $L_i = d/\text{tg} \beta \approx 18$  мкм. Этому условию в эксперименте соответствуют наиболее высокие и узкие ЛВ, например, для зависимости  $W_s(\delta Y)$  на рис. 2 при  $\delta Y = 100$  (5) и 90 мкм (1) и для зависимости  $W_{\Sigma}(\delta Y)$  на рис. 1 при  $\delta Y = 120$  и 150 мкм (кривая 5) и др.

Перейдем к дальнейшим оценкам. При  $W_{\text{ex-1}} = 3.96$  отн. ед. на зависимости  $\Delta W_s(\delta Y)$  наибольшие ЛМ располагались при  $\delta Y = 0$  и 90 мкм (см. рис. 2 кривая 1), т.е. их разделял интервал

$\Delta Y \approx 90$  мкм. Предположим, что при сдвиге торца относительно центра активной области на  $\Delta Y$  отраженная волна сдвигается в активной области на период  $L_0$ . Тогда из следующего отсюда равенства

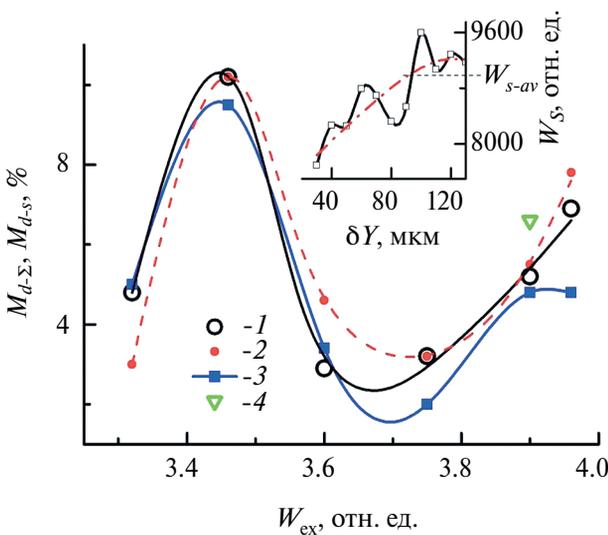
$$L_0 = 2\Delta Y \quad (5)$$

получаем  $T_0 = 3.06$  пс для  $\Delta Y \approx 90$  мкм, что вполне реалистично для наших экспериментов согласно графику частотной характеристики  $F(W_{ex})$ , представленному в [2, рис. 11]. Периоду  $T_0 = 3.06$  пс соответствует частота  $F = 0.327$  ТГц, которая на указанном графике достигается при энергии накачки, определявшейся в [2] в других относительных единицах нежели в данной работе,  $W_{ex-2} = 0.84$  отн. ед. То, что наибольшие ЛМ возникают при выполнении равенства (5), является эмпирическим подтверждением равенства (1), поскольку (5) следует из (1). Тем самым подтверждается, что (1) – это одно из условий РР.

Будем характеризовать относительную величину модуляции  $M_{d-s}$  зависимости  $W_s(\delta Y)$  как

$$M_{d-s} = (\Delta W_{s-max} - \Delta W_{s-min}) / W_{s-av}, \quad (6)$$

где  $\Delta W_{s-max} - \Delta W_{s-min}$  – разность энергий соседних локальных максимума и минимума на зави-



**Рис. 7.** Изменение с  $W_{ex}$  максимальной относительной величины  $M_{d-s}$  модуляции зависимости  $W_s(\delta Y)$  для измерений в максимуме (1) и на периферии (4) диаграммы направленности; то же, но для глубины  $M_{d-s}$  зависимости  $W_s(\delta Y)$  спектральной компоненты излучения с  $\hbar\omega = 1.387$  (2) и  $1.384$  эВ (3). На вставке: фрагмент зависимости  $W_s(\delta Y)$  – сплошная кривая; её гладкая составляющая – штрихпунктир; определенные энергии  $W_{s-av}$  для формулы (6) – пунктир.

симости энергии модуляционной составляющей  $\Delta W_s(\delta Y)$ , а  $W_{s-av}$  – энергия спектральной компоненты излучения, соответствующая точке пересечения линии, соединяющей те же локальные максимум и минимум, но уже на зависимости  $W_s(\delta Y)$ , с гладкой составляющей этой зависимости (см. рис. 7, пунктир на вставке). Максимальная глубина модуляции на зависимости  $W_s(\delta Y)$ , измеренной при фиксированной  $W_{ex}$ , представлена в функции  $W_{ex}$  в качестве примера (см. рис. 7, кривые 2 и 3). Это сделано для двух спектральных компонент излучения, в которых модуляция наиболее контрастна. Аналогично полученная максимальная глубина  $M_{d-s}$  модуляции графиков  $W_s(\delta Y)$  представлена в функции  $W_{ex}$  (см. рис. 7, кривая 1). На примере этих трех графиков и одиночного значения  $M_{d-s} = 6.6$  при  $W_{ex} = 3.9$  отн. ед. для измерений на периферии диаграммы направленности (рис. 7) можно принять, что экстремумы модуляции зависимости энергии излучения от  $\delta Y$  возникают при энергиях  $W_{ex-3} \approx 3.46$  отн. ед. и вблизи  $W_{ex-1} \approx 3.96$  отн. ед., т.е. через интервал  $\Delta W_{ex} \approx 0.5$  отн. ед. Предположим, что такое изменение энергии накачки нужно, чтобы те из пучностей f-волны, которые совпадают с точками пересечения z-траекторий, сместилась в пространстве настолько, чтобы опять совпадать, но уже со следующими точками пересечения z-траекторий. Для этого увеличение периода  $L_0$  должно равняться интервалу  $L_i$ . Чтобы увеличить  $L_0$  на величину  $L_i$ , надо увеличить период  $T_0$  на  $\delta T_0 = L_i n_g / c_0 = 0.306$  пс. Большому на  $\delta T_0$ , чем  $T_0 = 3.06$  пс, периоду  $T_0 = 3.366$  пс соответствует на упоминавшемся графике  $F(W_{ex})$  в [2] частота  $F = 0.297$  ТГц при  $W_{ex-4} = 0.71$  отн. ед. Получается, что для увеличения  $L_0$  на величину  $L_i$  надо изменить энергию накачки в  $W_{ex-4} / W_{ex-2} = 0.71 / 0.84 = 0.85$  раза. Эта оценка настолько близка к отношению энергий в эксперименте  $W_{ex-3} / W_{ex-1} = 3.46 / 3.96 = 0.87$ , что подтверждает предположения, на которых была основана. То есть ещё одним условием максимальной модуляции зависимости энергии выходящего из торца излучения от  $\delta Y$  должно быть совмещение в пространстве пучностей f-волны с какими-либо из точек пересечения z-траекторий. Отсюда вытекает ещё одно условие создания РР, заключающееся в кратности периодов

$$L_0 = mL_i. \quad (7)$$

Возможно, эмпирическое условие (7) указывает на влияние f-волны на z-траектории в фо-

тонном кристалле. Это, по-видимому, интересно для теоретического исследования в будущем. В отсутствие же РР, когда по мере изменения сдвига  $\delta Y$  колеблется степень приближения к его условиям, возникает наблюдавшаяся более слабая модуляция энергии излучения.

Модуляцию зависимости  $W_{\Sigma}(W_{ex})$  при  $\delta Y = 160$  мкм (см. рис.4) можно упрощенно прокомментировать следующим образом. Как установлено выше, при  $W_{ex-1} = 3.96$  отн. ед. частота модуляции  $F = 1/T_0 = 0.327$  ТГц, которая на частотной характеристике  $F(W_{ex})$  располагается при  $W_{ex-2} = 0.84$  отн. ед. (см. [2, рис.11]). С помощью этого соответствия определяем, что  $W_{ex} = 4.54$  отн. ед. соответствует на указанной характеристике  $W_{ex-5} = 0.963$  отн. ед. и  $F_1 = 0.355$  ТГц, а  $W_{ex} = 3.38$  отн. ед. соответствует  $W_{ex-6} = 0.717$  отн. ед. и  $F_2 = 0.3$  ТГц. Отсюда следует, что период  $T_0 \approx 2.82$  пс при  $W_{ex} = 4.54$  отн. ед. и период  $T_0 \approx 3.33$  пс при  $W_{ex} = 3.38$  отн. ед. Этому соответствуют периоды  $L_0 = 196$  мкм при  $W_{ex} = 3.38$  отн. ед. и  $L_0 = 166$  мкм при  $W_{ex} = 4.54$  отн. ед. Расстояние от центра активной области до торца  $Y_0 - \delta Y \approx 1$  мм  $- 0,16$  мм  $= 0.84$  мм. Тогда расстояние от центра активной области до торца и обратно, которое пройдено излучением, возвратившимся в активную область, составит  $2(Y_0 - \delta Y) = 8.57L_0$  при  $W_{ex} = 3.38$  отн. ед. То есть при  $W_{ex} = 3.38$  отн. ед. будет примерно выполнено условие (1), в согласии с которым в эксперименте энергия модуляционной составляющей излучения, представляемая зависимостями  $\Delta W_s(W_{ex})$  для его спектральных компонент (см. рис. 5), оказывается максимальной. Напротив, при  $W_{ex} = 4.54$  получается  $2(Y_0 - \delta Y) \approx 10L_0$ , т.е. выполняется условие (2), и в согласии с ним в эксперименте энергия модуляционной составляющей излучения, представляемая указанными зависимостями на рис. 5 минимальна.

Таким образом, экспериментально подтвердились условия РР (1) и (2). Если выше подтверждение условия (1) было дано при варьировании  $\delta Y$ , то теперь при варьировании  $L_0$  путем изменения  $W_{ex}$ .

Появление резонансных максимумов при  $W_{ex} \approx 3.9$  отн. ед. и  $\delta Y = 120$  и  $150$  мкм на кривой 5 (см. рис. 1) для измерений на периферии диаграммы направленности и то, что их еще не было при измерениях с той же  $W_{ex}$ , но в максимуме диаграммы направленности, можно теперь объяснить следующим. Излучение в первом

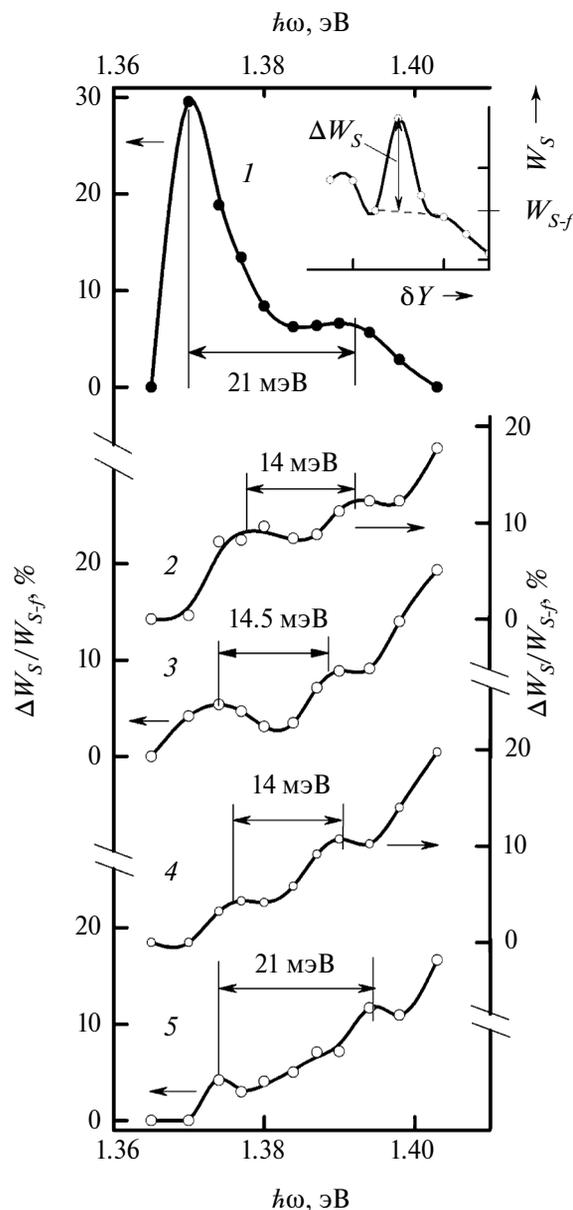


Рис. 8. Спектры относительной высоты  $\Delta W_s/W_{s-f}$  локальных выступов на зависимости  $W_s(\delta Y)$  при  $W_{ex} = 3.46$  отн. ед. и  $\delta Y = 60$  (1) и  $100$  мкм (2);  $W_{ex} = 3.9$  отн. ед. и  $\delta Y = 120$  (3) и  $150$  мкм (4);  $W_{ex} = 3.96$  отн. ед. и  $\delta Y = 90$  мкм (5); на вставке – определение относительной высоты локальных выступов (см. текст статьи).

случае двигалось под несколько другим углом к гетерограницам, чем излучение во втором случае, поэтому они и вышли из торца под разными углами. Соответственно, периоды  $L_i$  этих частей несколько отличались. Из-за этого, как и должно быть по условию (7), резонанс возникал при разных  $L_0$ , а значит, немного разных  $W_{ex}$ . Аналогично объясняется и то, что на рис.7 одна

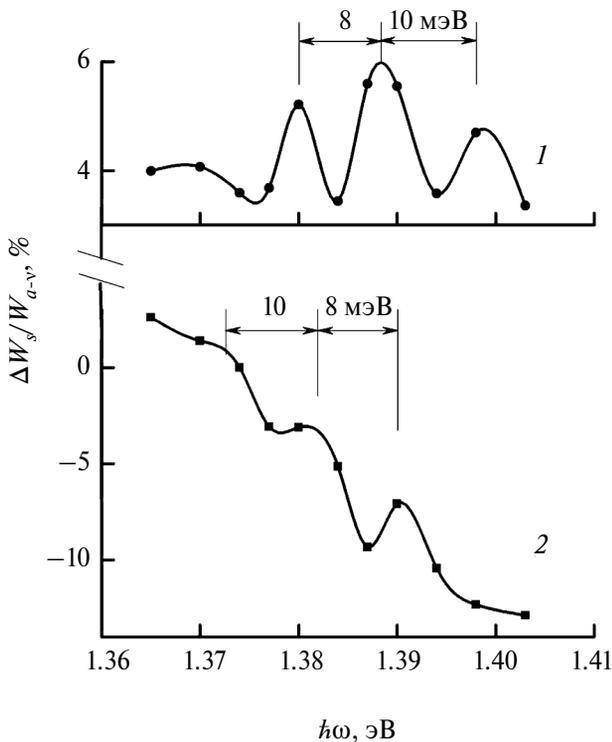


Рис. 9. Спектры относительной величины максимума (1) и минимума (2) зависимости  $\Delta W_s(W_{ex})$ .

спектральная компонента (кривая 3) уже проходит через максимум при  $3.9 < W_{ex} < 3.96$  отн. ед., а другая (кривая 2) еще нет. Дело в том, что направление максимального усиления спектральных компонент излучения при их отражении от разных слоев РБО зависит от длины волны компоненты. Поэтому компоненты, по-видимому, тоже двигаются в гетероструктуре под несколько разными углами к гетерограницам. Зависимость от длины волны очевидна из соотношения Брэгга-Вульфа, которое имеет тот же вид, что и соотношение (3), но только в соотношении Брэгга-Вульфа  $d$  – период РБО,  $\beta$  – угол скольжения (дополнение до  $\pi/2$  угла падения света на границу раздела двух сред с разными показателями преломления).

Спектры относительной высоты ЛВ на зависимости  $W_s(\delta Y)$  при тех фиксированных  $\delta Y$  и  $W_{ex}$ , при которых возникал резонанс, представлены на рис. 8. Относительную высоту ЛВ характеризует отношение  $\Delta W_s/W_{s-f}$ , где  $\Delta W_s$  – высота ЛВ, а  $W_{s-f}$  – энергия спектральной компоненты излучения на уровне основания ЛВ (см. рис. 8, вставка). Эти спектры оказались модулированы так,

что интервал между выступами составлял  $\Delta \hbar\omega = 21$  мэВ (кривые 1 и 5) или 14 мэВ (кривые 2–4), что связано с  $\delta Y$  (объяснение см. ниже).

Спектры  $\Delta W_s/W_{s-av} = f(\hbar\omega)$  (рис. 9) характеризуют относительную величину модуляции зависимостей  $\Delta W_s(W_{ex})$  (см. рис. 5) в максимуме при  $W_{ex} \approx 3.38$  отн. ед. и минимуме при  $W_{ex} \approx 4.54$  отн. ед. Энергия  $W_{s-av}$  определялась аналогично показанному на вставке к рис. 7. Эти спектры модулированы с периодом  $\Delta \hbar\omega = 8 \dots 10$  мэВ, близким к приведенной выше оценке периода  $\xi$  модуляции спектра излучения, создаваемой РБО при  $k = 1$ . С таким периодом были модулированы благодаря РБО и экспериментальные мгновенные спектры излучения в [2].

При сопоставлении спектров на рис. 8 и 9 обнаруживается, что интервал  $\Delta \hbar\omega$  между выступами на них составляет  $21$  мэВ  $\sim 2\xi$  при  $\delta Y < 100$  мкм и  $8 \dots 14$  мэВ  $\sim \xi$  при  $\delta Y > 100$  мкм. Аналогичная смена ширины интервалов с  $21 \dots 23$  мэВ на  $12$  мэВ происходила в модуляции спектров фундаментального поглощения зондирующего света в гетероструктуре, генерирующей излучение (см. [7, рис. 5]). Тогда это объяснялось обеднением населенности электронов в зоне проводимости, создаваемым излучением, модулированным в РБО с  $k = 2$  и  $k = 1$  соответственно. Величина  $k = 1$  относилась к области максимальной интенсивности излучения, а  $k = 2$  – к области фронта излучения, когда его интенсивность была меньше. При этом возможно такое объяснение изменения величины  $\Delta \hbar\omega$ . При  $\delta Y > 100$  мкм отраженное излучение приходит в активную область, когда там интенсивность излучения достаточно большая, чтобы формировать РБО с  $k = 1$ , и тогда  $\Delta \hbar\omega \sim \xi$ , а при  $\delta Y < 100$  мкм оно приходит туда позже, когда интенсивность излучения там уже меньше, и поэтому РБО с  $k = 2$ , отчего  $\Delta \hbar\omega \sim 2\xi$ . Очевидно, что обсуждавшаяся модуляция спектров дополнительно указывает на то, что РБО или, иначе говоря, активный фотонный кристалл, участвует в создании размерного резонанса.

То, что интервал  $\Delta \hbar\omega$  не точно совпадал со значениями  $\xi$  и  $2\xi$ , по-видимому, вызвано второстепенными причинами, которые не подвергают сомнению сделанные выше выводы. Причинами не точного совпадения могли бы быть следующие: а) резонанс возникал в каком-то участке времени излучения, а обсуждавшиеся спектры строили, основываясь на измерениях энергии,

интегральной по времени; б) неточность определения толщины слоя GaAs; в) недостаточно точная настройка на резонанс из-за возможности изменения  $\delta Y$  только с шагом 10 мкм; г) упрощения, исходно сделанные при оценке  $\xi$  [2], и т.п. Отметим, что аналогично и, видимо, по сходного рода причинам для упоминавшейся модуляции спектров фундаментального поглощения света интервал между локальными максимумами тоже несколько превышал значения  $\xi$  и  $2\xi$ .

И ещё один существенный вывод. Во-первых, сопоставление графика  $\Delta\hbar\omega(W_{\text{ex}})$  (см. рис. 3) с графиком  $M_{d-\Sigma}(W_{\text{ex}})$  (см. рис. 7) обнаруживает подобие их формы. Во-вторых, сопоставление со спектрами на рис. 8 выявляет совпадение ширины спектров  $\Delta W_s/W_{s-f} = f(\hbar\omega)$  при размерном резонансе с шириной диапазона  $\Delta\hbar\omega$  на рис. 3 при той  $W_{\text{ex}}$ , при которой возникает размерный резонанс (напомним, что  $\Delta\hbar\omega$  – диапазон спектральных компонент, у которых зависимости  $W_s(\delta Y)$  существенно модулированы). Из этого можно заключить следующее. При наступлении РР энергия  $W_{\Sigma}$ -излучения, интегрального по спектру, возрастает еще и благодаря тому, что РР возникает в относительно широком  $\approx 29$  мЭВ диапазоне спектральных компонент.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продолжено экспериментальное исследование обнаруженной в работе [1] модуляции зависимости энергии собственного излучения гетероструктуры, вышедшего из её торца, от изменения (на  $\delta Y$ ) расстояния активной области до этого торца. Наряду с этим экспериментально обнаружена модуляция зависимости энергии указанного излучения от энергии накачки  $W_{\text{ex}}$ . Проведен анализ экстремумов модуляции названных зависимостей, учитывающий, что излучение создает в активной области РБО, превращая её этим в фотонный кристалл, и что в поле излучения возбуждаются осцилляции населенности электронов. Последние приводят к модуляции излучения и стоячей волне населенности электронов в активной области с одинаковыми периодами в пространстве  $L_0$  и во времени  $T_0$ . Этот анализ привел к заключению, что в обеих зависимостях имеются РР нового вида. Размерный резонанс представлял собой локальное усиление отдельного колебания в модуляции этих зависимостей. Максимум энергии излучения в

таком колебании возникал при следующих условиях:

а) удвоенная длина интервала между центром активной области и торцом гетероструктуры равна целому нечетному числу полупериодов  $L_0/2$ ;

б) период  $L_0$  является кратным расстоянию между ближайшими точками пересечения двух симметричных зигзагообразных траекторий, по которым, благодаря РБО, преимущественно движется излучение в гетероструктуре;

в) точка пересечения упомянутых траекторий излучения – последняя точка перед выходом излучения из гетероструктуры – лежит на её торце.

Определяемые РР условия максимального выхода энергии излучения из гетероструктуры в заданном направлении, по-видимому, должны приниматься во внимание для достижения максимальной энергии излучения при создании полупроводниковых лазеров, предназначенных для генерации мощных пикосекундных импульсов света. РР оказывается и новым нелинейным эффектом, возникающим при участии фотонного кристалла.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеева Н.Н., Броневова И.Л., Кривоносов А.Н. и др. // ФТП. 2005. Т. 39. № 6. С. 681.
2. Агеева Н.Н., Броневова И.Л., Кривоносов А.Н. // ЖЭТФ. 2022. Т. 162. № 6. С. 1018.
3. Шадрин Г.В., Булгаков Е.Н. // ЖЭТФ. 2022. Т. 162. Вып. 5. С. 646.
4. Peschel T., Peschel U., Lederer F. // Phys. Rev. A. 1994. V.50. P. 5153.
5. Агеева Н.Н., Броневова И.Л., Кривоносов А.Н. // РЭ. 2023. Т. 68. № 3. С. 211.
6. Васильев П.П. // Квант. электроника. 1994. Т. 21. № 6. С. 585.
7. Агеева Н.Н., Броневова И.Л., Забегаев Д.Н., Кривоносов А.Н. // ФТП. 2020. Т. 54. № 10. С. 1018.

**DIMENSIONAL RESONANCE OF INTRINSIC STIMULATED PICOSECOND  
EMISSION WHILE IT INDUCES A PHOTONIC CRYSTAL  
AND ELECTRON POPULATION OSCILLATIONS  
IN HETEROSTRUCTURE  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{GaAs}-\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$**

**N. N. Ageeva, I. L. Bronevoi\*, A. N. Krivonosov**

*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics,  
Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009 Russia*

*\*E-mail: bil@cplire.ru*

Received May 16, 2023; revised July 15, 2023; accepted July 28, 2023

Powerful picosecond optical pumping of the GaAs heterostructure layer causes the generation of stimulated picosecond emission in it. Due to its high intensity, the emission induces a Bragg grating of the electron population in the active region of the layer, making the latter an active photonic crystal. In the emission field, the inverse population of electrons oscillates with time, which should lead to spatiotemporal modulation of the emission and this population. It has been discovered that if the distance  $Y$  between the end of the heterostructure and the center of the active medium and the geometric parameters of the indicated modulation and movement of emission in the photonic crystal satisfy certain conditions, then dimensional resonance occurs - a maximum of modulation of the dependence of the energy of emission emerging from the end on  $Y$  and on pump energy appears locally.

*Keywords:* dimensional resonance, heterostructure, stimulated picosecond emission, photonic crystal, electron population oscillations in a semiconductor, spatiotemporal modulation of emission.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 621.382

# ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ТРАССИРОВКИ ДЛЯ АНАЛИЗА СБОЕВ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕЙТРОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 14 МэВ

© 2024 г. А. С. Пилипенко\*, М. И. Тихонов

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт  
технической физики им. акад. Е.И. Забабахина, ул. Васильева, 13,  
Снежинск Челябинской обл., 456770 Российская Федерация*

*\*E-mail: A.S.Pilipenko@vniitf.ru*

Поступила в редакцию 16.10.2022 г.

После доработки 07.06.2023 г.

Принята к публикации 25.06.2023 г.

Проанализированы возможности средств поддержки трассировки микроконтроллера с ядром Cortex-M3 для исследования сбоев, возникающих при облучении нейтронами с энергией 14 МэВ. Показано, что в большинстве случаев зависание вызвано переходом микроконтроллера в бесконечный цикл обработки неактивного исключения. Оценено значение сечения эффекта функционального прерывания и тиристорного эффекта.

*Ключевые слова:* микроконтроллер, трассировка, тиристорный эффект, эффект функционального прерывания, нейтрон

DOI: 10.31857/S0033849424020117, EDN: KMELDA

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при исследованиях радиационной стойкости микроконтроллеров (МК) применяется несколько подходов для контроля их состояния. Одним из наиболее перспективных является применение встроенных средств отладки, которые входят в состав большинства современных МК. Данные инструменты позволяют как получать доступ к общей шине ядра, запоминая устройств и периферии, так и контролировать пошагово ход выполнения программы. Если доступ к шине реализован как стандартный инструмент, то возможности пошаговой отладки (трассировки) существенно зависят от типа микропроцессорного ядра, а в ряде случаев – от реализации необязательных функций конкретным производителем МК. Тем не менее средства трассировки являются достаточно мощным инструментом анализа реакции МК при воздействии ионизирующего излучения. Как показано в [1], для ядра Cortex-A9 средства трассировки позволяют восстановить ход выполнения программы вплоть до момента зависания, возникающего при воздействии отдельных ядерных частиц. Следует отметить, что

в [1] аппаратный блок сбора и анализа данных от системы трассировки был реализован на базе системы-на-кристалле совместно с исследуемым МК. Это, на наш взгляд, сужает универсальность использования такой конфигурации, так как возникает вопрос устойчивости к сбоям блока сбора и анализа данных при воздействии импульсного ионизирующего излучения.

В [2] показана возможность получения данных из регистров МК с ядром Cortex-M3 даже в случае его зависания с помощью доступа общей шине через встроенные средства отладки. В данной работе был проанализирован доступный для одной из реализаций ядра Cortex-M3 функционал средств поддержки трассировки с целью оценки возможности анализа причин зависания МК. Для данного ядра в принципе не предусмотрено наличие модуля Program Trace Macrocell, использованного в [1] (этот модуль поддерживается ядром Cortex-A9), а в рассматриваемой реализации нет модуля Embedded Trace Macrocell. Указанные два компонента системы трассировки предоставляют наиболее полный контроль за ходом выполнения программы, вплоть до фиксирования истории изменений программ-

ного счетчика в реальном времени (на рабочей частоте ядра). В нашем случае реализованы компоненты Data Watch and Trace (DWT), Interface Trace Macrocell (ITM), Trace Interface Port Unit (TPIU). Далее кратко рассмотрены их возможности (для конкретного МК) с точки зрения применимости к рассматриваемой задаче.

В DWT предусмотрены возможности считывания содержимого программного счетчика, однако оно происходит либо по запросу от внешнего отладчика, либо периодически (но не менее чем раз в 64 такта). Также реализованы различные счетчики числа тактов, затрачиваемых для выполнения операций загрузки/сохранения, нахождения в спящем режиме, выполнения команды, а также связанных с переходом в обработчик исключения.

Компонент ITM является промежуточным модулем, передающим пакеты от DWT в порт трассировки для передачи внешнему отладчику. ITM может генерировать пакеты временных меток, вставляемые в поток данных от DWT, что помогает отладчику вести хронометраж событий.

Компонент TPIU применяется для вывода пакетов трассировки во внешний отладчик. Протокол передачи является последовательным (JTAG/SW), что замедляет обмен данными и априори не позволяет проводить сбор данных в реальном времени. TPIU содержит промежуточный буфер данных, однако его объем составляет всего 32 бита (одно слово).

Таким образом, рассмотренный функционал блоков трассировки ядра Cortex-M3 не позволяет выполнять контроль в реальном времени и определять предысторию перехода в состояние зависания. Однако представляется возможным получение дополнительной информации о состоянии “зависшего” МК в виде адреса последней выполняемой инструкции и количестве тактов, которое потребовалось для обработки исключительной ситуации в случае, если зависание связано с прерыванием выполнения хода программы.

## 1. ОБРАЗЦЫ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве объекта исследований использовался МК с ядром ARM Cortex-M3, изготовленный по технологии “объемный кремний” 0.18 мкм. МК облучали нейтронами с энергией 14 МэВ и плотностью потока порядка  $10^9$  н/(с·см<sup>2</sup>). Общий флюенс нейтронов за время экспери-

мента составил  $6 \times 10^{12}$  н/см<sup>2</sup>, его определяли с помощью активационных детекторов с погрешностью 20 %.

Микроконтроллер исполнял программу из встроенной FLASH-памяти, функционал программы заключался в формировании на одном из выводов МК периодического сигнала (меандра). Тактовая частота работы ядра составляла 80 МГц, источником тактового сигнала являлся встроенный RC-генератор. В программе задействованы следующие функциональные блоки: блок умножителя частоты PLL, порт ввода-вывода PORTA, блок управления тактовыми частотами, таймер общего назначения. В качестве контролируемых параметров были использованы выходной сигнал (регистрировался на осциллографе) и ток потребления, фиксируемый по показаниям программируемого источника питания. Изменение параметров выходного сигнала или прекращение генерации рассматривалось как одиночный эффект функционального прерывания (single event functional interrupt, SEFI) – эффект, возникающий в программно-управляемых цифровых устройствах вследствие воздействия отдельной ядерной частицы, при котором работоспособность устройства восстанавливается после перезагрузки управляющей программы [3] (в нашем случае, после выключения/включения питания).

Перед началом облучения считывалась исходная информация из регистров процессорного ядра, оперативной памяти, периферийных блоков, служебного блока управления системой. Информация считывалась периодически или при проявлении SEFI, после чего производился контроль изменений в данных и их анализ, в том числе с использованием модели исключений ядра ARMv7 [4].

Информацию считывали через средства отладки посредством доступа к шине обмена данными между функциональными блоками МК с добавлением данных из модуля трассировки DWT (согласно описанному во введении).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

### 2.1. Одиночный эффект функционального прерывания

За время эксперимента зарегистрировано 31 событие, классифицируемое как SEFI. В двух случаях изменилась частота выходного сигнала, так как поменялся множитель частоты ядра в ре-

гистре блока управления тактовыми частотами вследствие одиночного сбоя (single event upset, SEU) – инверсии ячейки памяти, возникающей при воздействии отдельной ядерной частицы. Остальные события проявлялись как прекращение генерации выходного сигнала. При этом следует отметить, что:

- в трех случаях зарегистрирован SEU в регистрах управления работой порта ввода-вывода, вследствие чего режим работы порта изменился (он перестал функционировать как цифровой выход);

- 19 раз МК перешел в бесконечный цикл обработки исключения;

- для семи SEFI причина прекращения генерации не установлена, так как в анализируемых данных отсутствуют указания на обработку исключений или SEU в регистрах используемых в программе периферийных блоков.

Алгоритм анализа экспериментальных данных, позволяющий сделать вывод о переходе в бесконечный цикл обработки исключения, является основным в данной работе. В алгоритме рассматриваются регистры МК, используемые в модели исключений ядра ARMv7. Для определения того, находится ли МК в состоянии обработки исключения, рассматривалась информация из следующих регистров:

- стек из восьми 32-разрядных слов, используемый для хранения данных регистров МК для корректного выхода из обработчика исключения;

- регистр связи LR, указывающий на текущий режим работы МК (режим выполнения программы, режим обработки исключения либо вложенного исключения);

- регистр флагов xPSR (младшие 8 бит), содержащий поле для хранения номера активного исключения;

- регистр с информацией об адресе текущей исполняемой инструкции программно счетчика PC (Program Counter);

- счетчик числа тактов, требуемых для перехода в обработчик исключения EXCCOUNT;

- регистр состояния отказов с настраиваемым уровнем приоритета CFSR, хранящий флаги типов событий, приводящих к вызову обработчика исключений.

Данные, полученные из указанных выше регистров, приведены в табл. 1 (для эксперимен-

тов, где наблюдается переход в бесконечный цикл обработки исключения).

Как видно из таблицы, в большинстве случаев данные в регистрах совпадают (за исключением регистра флагов CFSR), следовательно, МК обрабатывает один и тот же алгоритм. Для отличающихся данных в экспериментах можно предположить возникновение SEU в отдельных ячейках регистров (например, в предпоследней строке таблицы значение EXCCOUNT отличается на один бит 0000000F – 0000001F).

Используя данные табл. 1 и информацию об алгоритме работы модели исключений ядра ARMv7 при штатной обработке исключений [4], можно сделать предположения о последовательности перехода МК в бесконечный цикл. Вначале устанавливается флаг исключительного события по одной из двух причин: либо событие действительно произошло (например, по причине SEU в регистрах ядра), либо SEU возникает непосредственно в регистре CFSR. Несмотря на разнообразие флагов событий в регистре CFSR (что свидетельствует о случайном характере их возникновения), после установления флага МК во всех случаях входит в обработку исключения с номером 3 – тяжелый отказ (номер исключения содержится в младших битах регистра xPSR). Факт входа в обработчик подтверждается корректным сохранением стека, значением регистра LR, ненулевым значением счетчика тактов EXCCOUNT и адресом из регистра PC, указывающим на область памяти, в которой расположен обработчик тяжелого отказа. Переход от любого типа исключения M, V и U к тяжелому отказу (с повышением приоритета исключения) предусмотрен моделью исключений в том случае, если исключения не разрешены к обработке (неактивны), что по умолчанию установлено в исполняемой программе. Кроме того, также по умолчанию все обработчики исключений (кроме сброса) не инициализированы, т.е. представляют собой бесконечные циклы. В данной работе мы не рассматриваем причины возникновения конкретного типа исключения и подробно не расписываем их в табл. 1 по двум причинам. Во-первых, анализ реакции МК в рамках применяемого подхода проводится по данным после воздействия, а не в режиме реального времени, что безусловно затрудняет определение причин зависания. Во-вторых, в нашем случае обработчики исключений были не инициализированы и неактивны, поэтому любой тип исключения M, V или U, приводит к тяжелому отказу.

Таблица 1. Основные анализируемые регистры МК

Стек*	PC**	EXCCOUNT**	xPSR**	LR**	Флаги регистра исключений CFSR ***									
					U1	U2	U3	U4	B1	B2	M1	M2	M3	
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9	v									
+	08000232	0000000F	21000003	FFFFFFFF9		v								
+	08000232	0000000F	01000003	FFFFFFFF9						v				
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9										
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9									v	v
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9		v								
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9		v								
+	08000232	0000000F	01000003	FFFFFFFF9							v			
+	08000232	0000000F	01000003	FFFFFFFF9				v						
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9							v			
+	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9		v								
+	08000232	0000000B	61000003	FFFFFFFF9										
+	08000232	00000013	61000003	FFFFFFFF0			v							
+	0800023A	0000000F	6100000B	FFFFFFFF9										
–	08000232	0000000F	81000000	0C000201	v									
+	08000232	0000001F	01000003	FFFFFFFF1		v								
–	08000232	0000000F	61000003	FFFFFFFF9	v									

\*Знаком “+” обозначен факт корректного сохранения стека, \*\*32-битные значения в регистрах представлены в 16-ричной системе счисления, \*\*\*флаги регистра исключений CFSR разбиты на группы: тип U (UsageFault) – отказы при выполнении программы, тип B (BusFault) – отказы доступа к шине, тип M (MemoryFault) – отказы доступа к памяти, цифрами условно обозначены различные виды исключений в каждой группе.

Таким образом, данные табл. 1 позволяют сделать вывод, что в большинстве случаев зарегистрированных SEFI МК полностью обрабатывает предусмотренный спецификацией алгоритм перехода в обработчик исключений после фиксации флага возникновения исключения. Описанная ситуация отличается от случая воздействия импульсного ионизирующего излучения [5] (в том числе нейтронного), когда при наличии явных признаков нахождения в обработчике исключения (по данным анализируемых регистров), не все регистры после воздействия содержат значения, предусматриваемые моделью исключений.

Оценка сечения SEFI  $\sigma$  дает значение  $5.3 \times 10^{-12}$  см<sup>2</sup>. Значения верхней и нижней границ доверительного интервала ( $\sigma_H$ , см<sup>2</sup>;  $\sigma_L$ , см<sup>2</sup>), соответствующие заданному значению довери-

тельной вероятности  $P$ , определялись по следующим соотношениям [3]:

$$\sigma_H = \frac{t_H(P, N)(0,67 + N)}{(1 - \theta)F} \quad (1)$$

$$\sigma_L = \frac{t_L(P, N)(0,67 + N)}{(1 + \theta)F} \quad (2)$$

где  $t_H$  и  $t_L$  – коэффициенты, зависящие от значения  $P$  и числа наблюдаемых событий  $N$ ;  $F$  – флюенс нейтронов, н/см<sup>2</sup>;  $\theta$  – погрешность определения флюенса нейтронов.

Итоговые значения границ доверительного интервала, определенные по формулам (1) и (2), составили  $3.1 \times 10^{-12}$  см<sup>2</sup> и  $9.2 \times 10^{-12}$  см<sup>2</sup> для доверительной вероятности 0.95. Следует отметить, что данное сечение SEFI существенно меньше

сечения SEU, которое составляет  $1.4 \pm 0.3 \times 10^{-8} \text{ см}^2$  (здесь границы доверительных интервалов определяются главным образом погрешностью дозиметрии).

## 2.2. Одиночный тиристорный эффект

В эксперименте также зарегистрировано четыре события, проявляющихся в переходе источника питания в режим ограничения выходного тока (оно составляло 200 мА при номинальном токе потребления на уровне 85 мА) с просадкой напряжения питания с 3.3 до 2.14 В и невозможностью обмена данными со средствами отладки. Возврат к штатному функционированию МК происходил после переключения питания. Такой тип событий можно трактовать как одиночный тиристорный эффект (single event latchup, SEL). Сечение данного вида эффектов оценивается как  $7.8 \times 10^{-13} \text{ см}^2$  с границами доверительных интервалов  $2.3 \times 10^{-13} \text{ см}^2$  и  $2.1 \times 10^{-12} \text{ см}^2$  для вероятности 0.95.

SEL при воздействии нейтронов с энергией 14 МэВ в интегральных схемах (ИС) может иметь место, так как

1) современные ИС имеют широкий диапазон пороговых линейных потерь энергий (ЛПЭ) для данного эффекта. Так, например, в работах [6–8] по результатам исследований большого числа типоминималов ИС при воздействии тяжелых заряженных частиц показано, что пороговые ЛПЭ SEL не зависят от функционального класса ИС и имеют значение от 2 МэВ·см<sup>2</sup>/мг;

2) результаты моделирования взаимодействия нейтронов с энергией 14 МэВ с кремнием (см., например, [9]) показывают, что ЛПЭ продуктов реакций достигают 8 МэВ·см<sup>2</sup>/мг.

Исходя из сказанного выше, можно сделать вывод, что при воздействии нейтронов с энергией 14 МэВ в ИС возможно возникновение SEL за счет вторичных частиц, рожденных в реакциях на ядрах <sup>28</sup>Si, несмотря на их относительно малые ЛПЭ в кремниевых структурах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ функционала блоков трассировки ядра Cortex-M3 исследуемого объекта показал, что для данного ядра полный контроль хода выполнения программы до момента зависания невозможен. Тем не менее, на основе анализа был дополнен существующий метод контроля

состояния МК в случае его зависания. Новой получаемой информацией является количество тактов, затрачиваемых на вход в обработчик исключения, а также адрес инструкции, в которой находится МК в момент обработки прерывания.

Установлено, что в большинстве случаев зависания МК переходит в бесконечный цикл, при этом он полностью обрабатывает предусмотренный спецификацией алгоритм перехода в обработчик исключений после фиксации флага возникновения исключения. Оценка сечения эффекта дает значение  $5.3 \times 10^{-12} \text{ см}^2$ .

В эксперименте также зарегистрировано четыре события, проявляющихся в переходе источника питания в режим ограничения выходного тока, что можно трактовать как одиночный тиристорный эффект. Сечение данного вида эффектов оценивается как  $7.8 \times 10^{-13} \text{ см}^2$ .

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peña-Fernandez M., Lindoso A., Entrena L., Garcia-Valderas M. // IEEE Trans. 2020. V. NS-67. № 1. P. 126.
2. Пилипенко А. С. // РЭ. 2022. Т. 67. № 5. С. 514.
3. РД 134-0175-2009. Аппаратура радиоэлектронная бортовая космических аппаратов. Методы испытаний цифровых сверхбольших интегральных микросхем на стойкость к воздействию отдельных высокоэнергетических протонов и тяжелых заряженных частиц космического пространства на ускорителях заряженных частиц. Нормативный документ по стандартизации РКТ. М.: "ЦНИИ Машиностроения", 2009. №19720. 29 с.
4. ARM DDI 0403D "ARMv7-M Architecture Reference Manual" / Cambridge: ARM Limited, 2010. 1020 p.
5. Пилипенко А. С., Тихонов М. И. // Тр. 25-й Всерос. научн.-техн. конф. "Стойкость-2022". Лыткарино. 7–8 июня 2022. М.: НИИП, 2022. С. 52.
6. Протопопов Г. А., Казанцев Д. А. // Тр. 25-й Всерос. научн.-техн. конф. "Стойкость-2022". Лыткарино. 7–8 июня 2022. М.: НИИП, 2022. С. 125.
7. Irom F., Miyahira T. F. // Radiation Effects Data Workshop. 2005. P. 36.
8. Irom F., Miyahira T. F. // IEEE Trans. 2005. V. NS-52. № 6. P. 2475.
9. Weulersse C., Guibbaud N., Beltrando A.-L. et al. // IEEE Trans. 2017. V. NS-64. № 8. P. 2268.

## APPLICATION OF TRACING TOOLS FOR ANALYSIS OF MICROCONTROLLER FAILURES ARISING UNDER THE 14 MeV NEUTRONS EXPOSURE

**A. S. Pilipenko\*, M. I. Tikhonov**

*Federal State Unitary Enterprise “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russia  
Research Institute of Technical Physics” Snezhinsk, Chelyabinsk oblast, 456770 Russia*

*\*E-mail: A.S.Pilipenko@vniitf.ru*

Received October 16, 2022; revised June 7, 2023; accepted June 25, 2023

The trace support tools capabilities for a microcontroller (MC) with a Cortex-M3 core are analyzed to investigation of failures arising under the 14 MeV neutrons exposure. It has been shown that in most cases, MC hang is caused by the microcontroller going into a handling an inactive exception infinite loop. The cross-section values for the single event functional interrupt and the single event latch-up are estimated.

*Keywords:* microcontroller, tracing, single event latch-up, single event functional interrupt, neutron