РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2024, том 69, № 10, с. 960–966

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.8;519.246.2

МЕТОД СИНТЕЗА ЭФФЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ОТ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

 А. Г. Вострецов[a,b,*], С. Г. Филатова[a,c]

[a] *Новосибирский государственный технический университет, просп. К. Маркса, 20, Новосибирк, 630073 Российская Федерация*
[b] *Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Красный просп., 54, Новосибирск, 630091 Российская Федерация*
[c] *Федеральный институт промышленной собственности, Бережковская наб., 30, корп. 1, Москва, 125993 Российская Федерация*

**E-mail: vostreczov@corp.nstu.ru*

Поступила в редакцию 22.02.2024 г.
После доработки 22.03.2024 г.
Принята к публикации 24.03.2024 г.

Предложен метод синтеза эффективных оценок параметров случайного процесса, распределение отсчетов которого обладает полными достаточными статистиками. Метод основан на представлении оцениваемых параметров процесса в виде решения системы уравнений для математических ожиданий функций от полных достаточных статистик, подобранных таким образом, чтобы система уравнений была разрешима относительно оцениваемых параметров, с последующей заменой математических ожиданий в полученном решении на эти функции. Приведены условия, при выполнении которых получаемые оценки будут эффективными. Приведены примеры оценок параметров распределений выборок из равномерного распределения и аддитивной смеси гауссовского шума и последовательности прямоугольных импульсов с неизвестными амплитудами, показана их эффективность.

Ключевые слова: оценка параметров сигналов, эффективные оценки, априорная неопределенность, полные достаточные статистики

DOI: 10.31857/S0033849424100044, **EDN:** HQKKUJ

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах связи, радиолокации, радионавигации, дистанционного зондирования Земли, масс-спектрометрии, медико-биологических исследований и других приложений возникают проблемы оценки параметров наблюдаемых процессов в условиях действия априорно не определенных шумов и помех [1–5]. При решении практических задач использование широко распространенных байесовских, марковских оценок, оценок максимального правдоподобия и максимума апостериорной вероятности [6–11] в ряде случаев затруднено. Например, слишком велика размерность системы нелинейных уравнений при использовании метода максимального правдоподобия; полученные решения носят численный характер и становятся непригодными для реализации в цифровых системах в реальном масштабе времени, либо число неизвестных параметров увеличивается с ростом объема выборки, что ведет к несостоятельности получаемых оценок. Поэтому задача поиска методов получения эффективных оценок параметров сигналов, наблюдаемых на фоне помех, продолжает оставаться актуальной.

В большинстве источников под эффективными оценками понимают несмещенные оценки, матрица вторых моментов которых достигает нижней границы Крамера–Рао. Однако далеко не для всех распределений наблюдаемых данных существуют такие оценки. Поэтому, как и в работе [12], под эффективной мы будем понимать несмещенную оценку, минимизирующую для данного распределения наблюдаемых данных квадратичную функцию потерь. А под наиболее эффективной — эффективную оценку, достигающую нижней границы Крамера–Рао. Естественно, что если существует наиболее эффективная оценка, то эффективная оценка совпадает с нею.

В настоящее время появились работы, в которых эффективная оценка параметров сигнала строится с использованием свойств полных достаточных статистик. Так, в работах [13, 14] на основе полных достаточных статистик получены эффективные оценки фазы и амплитуды сигнала, уровня постоянной составляющей и дисперсии шума в условиях априорной неопределенности относительно этих параметров. В работе [15] предложены эффективные оценки периода квазипрямоугольных импульсов с учетом коэффициента заполнения и коэффициента прямоугольности импульса, в работе [16] — оценки параметров контактов Джозефсона по результатам измерения их вольт-амперных характеристик.

Оценки на основе полных достаточных статистик обладают рядом преимуществ перед другими методами оценки. Во-первых, несмещенные оценки на основе полных достаточных статистик всегда являются эффективными, а при наличии смещения имеют минимальную квадратичную функцию потерь в классе оценок с данной величиной смещения [17, 18]. Во-вторых, во многих случаях применение предлагаемого в данной статье метода приводит к более простой системе уравнений для получения оценок, чем при использовании других методов, и ее решение может быть представлено в аналитическом виде.

Цель данной работы состоит в разработке пригодного для практического использования регулярного метода синтеза эффективных оценок параметров сигналов и помех на основе использования математических ожиданий специально подобранных функций от полных достаточных статистик.

1. МОДЕЛЬ НАБЛЮДАЕМОГО ПРОЦЕССА

Пусть наблюдаемый процесс $x(t)$ представляет собой известную функцию $q(\cdot)$ сигнала $s\left(t,\vec{\gamma}\right)$ и помехи $\eta\left(t,\vec{\nu}\right)$ т.е.

$$x(t) = q\left[s\left(t,\vec{\gamma}\right),\eta\left(t,\vec{\gamma}\right)\right].$$

При этом сигнал характеризуется вектором параметров

$$\vec{\gamma} = \left\{\gamma_1,\ldots,\gamma_r\right\}^T \in \Gamma,$$

а помеха — вектором параметров

$$\vec{\nu} = \left\{\nu_1,\ldots,\nu_k\right\}^T \in \mathrm{N},$$

где Γ и N — области значений, r и k — размерности векторных параметров $\vec{\gamma}$ и $\vec{\nu}$ соответственно, T — знак транспонирования.

В условиях априорной неопределенности относительно параметров сигнала и помехи часто используют метод контраста [19], согласно которому для синтеза алгоритма оценки параметров сигнала и помехи формируется объединенная выборка $\vec{x}$, состоящая из двух статистически независимых выборок — помеховой выборки $\vec{y} = \left\{y_1,\ldots,y_N\right\}^T \in Y$ из наблюдаемого процесса на интервале T_1, где полезный сигнал заведомо отсутствует, и сформированной на интервале T_2 выборки $\vec{u} = \left\{u_1,\ldots,u_K\right\}^T \in U$ из смеси сигнала и помехи. Здесь N и K — соответственно размерности выборок $\vec{y}$ и $\vec{u}$, $N + K = M$; Y и U — области значений векторов $\vec{y}$ и $\vec{u}$. Таким образом,

$$\vec{x} = \left\{x_1,\ldots,x_M\right\}^T = \left\{\vec{y}^T,\vec{u}^T\right\}^T,$$

причем $\vec{x} \in X$, а $X = Y \times U$.

Выборка $\vec{x}$ характеризуется распределением вероятностей $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$. D-мерный параметр $\vec{\Theta} = \left\{\theta_1,\ldots,\theta_D\right\}^T$ распределения $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$ представляет собой некоторую известную в общем случае векторную функцию параметров сигнала и помехи, т.е.

$$\vec{\Theta} = \vec{f}\left(\vec{\gamma},\vec{\nu}\right) \in \Omega,$$

где Ω — область значений параметра $\vec{\Theta}$.

На практике часто распределения наблюдаемых данных $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$ обладают полными достаточными для параметра $\vec{\Theta}$ статистиками

$$\vec{T}\left(\vec{x}\right) = \left\{T_1\left(\vec{x}\right),\ldots,T_D\left(\vec{x}\right)\right\}^T.$$

К числу таких распределений, в частности, относятся распределения из экспоненциального семейства, каноническое представление плотностей вероятностей которых имеет следующий вид:

$$w\left(\vec{x}\right) = C\left(\vec{\Theta}\right)\exp\left\{\sum\nolimits_{i=1}^{D}\Theta_i T_i\left(\vec{x}\right)\right\}g\left(\vec{x}\right), \qquad (1)$$

где $C(\vec{\Theta})$ — нормирующий множитель, $g\left(\vec{x}\right)$ — функция, не зависящая от параметра Θ. В случае, когда область Ω возможных значений параметра Θ содержит D-мерный интервал, распределения (1) и соответствующие достаточные статистики будут полными [20].

На практике некоторые или даже все компоненты векторных параметров сигнала и помехи, а следовательно, и параметра $\vec{\Theta}$, являются априорно неопределенными. Оценке подлежит один или несколько параметров сигнала и/или помехи.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА И ПОМЕХИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

Обозначим $\vec{\Lambda} = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_L\}^T$ вектор оцениваемых параметров сигнала и/или помехи. В качестве компонентов вектора $\vec{\Lambda}$ могут выступать соответствующие компоненты вектора параметров сигнала $\vec{\gamma}$ и (или) помехи $\vec{\nu}$; L — число оцениваемых параметров. Таким образом, векторный параметр $\vec{\Theta}$ распределения (1) зависит как от подлежащего оценке вектора параметров $\vec{\Lambda}$, так и от неоцениваемых параметров сигнала и шума. Векторный параметр $\vec{\Lambda}$ может быть представлен в виде некоторой векторной функции от параметра $\vec{\Theta}$ распределения $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$, т.е.

$$\vec{\Lambda} = \vec{\psi}\left(\vec{\Theta}\right). \tag{2}$$

Введем векторные функции

$$\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right] = \left\{h_1\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right],\ldots,h_L\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]\right\}^T$$

и

$$\vec{V}\left(\vec{\Theta}\right) = \left\{V_1\left(\vec{\Theta}\right),\ldots,V_L\left(\vec{\Theta}\right)\right\}^T.$$

Компоненты функции $\vec{V}\left(\vec{\Theta}\right)$ представляют собой зависящие от параметра $\vec{\Theta}$ математические ожидания соответствующих компонентов функции $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]$, т.е.

$$V_j\left(\vec{\Theta}\right) = E_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}\left\{h_j\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]\right\},$$

где $j = 1,\ldots,L$; $E_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}\{\cdot\}$ означает усреднение по распределению $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$. Обозначим $\vec{m} = \{m_1,\ldots,m_L\}^T$ — вектор значений математических ожиданий компонентов функции $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]$, а саму функцию $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]$ выберем так, чтобы система уравнений

$$\vec{m} = \vec{V}\left(\vec{\Theta}\right), \tag{3}$$

была однозначно и непрерывно разрешима относительно $\vec{\Lambda}$ в области значений $\vec{\Lambda} = \vec{\psi}\left(\vec{\Theta}\right)$, $\vec{\Theta} \in \Omega$, т.е.

$$\vec{\Lambda} = \vec{s}\left(\vec{m}\right), \tag{4}$$

здесь $\vec{s}\left(\vec{m}\right) = \left\{s_1\left(\vec{m}\right),\ldots,s_L\left(\vec{m}\right)\right\}^T$ — решение системы уравнений (3) относительно $\vec{\Lambda}$.

Пусть вектор $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]$ принадлежит области значений $\vec{V}\left(\vec{\Theta}\right)$ при всех $\vec{x} \in X$. В качестве оценки параметра $\vec{\Lambda}$ примем вектор

$$\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right) = \vec{s}\left\{\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]\right\}. \tag{5}$$

Таким образом, для получения оценки $\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right)$ вектора параметров сигнала (помехи) $\vec{\Lambda}$ необходимо в решении (4) системы уравнений (3) компоненты вектора $\vec{m}$ заменить соответствующими компонентами векторной функции $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]$. В качестве компонентов функции $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x}\right)\right]$ часто бывает удобно выбрать функции вида

$$h_i\left[T_i\left(\vec{x}\right)\right] = [T_i\left(\vec{x}\right)]^j,$$

где $j = 1,2,\ldots$ — целые числа. В этом случае вектор $\vec{m}$ представляет собой вектор начальных моментов соответствующих порядков полных достаточных статистик.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

Пусть $\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right)$ — оценка (5) L-мерного параметра $\vec{\Lambda}$; $\vec{A}$ — произвольный L-мерный вектор. Качество оценки $\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right)$ характеризуется средним значением $E_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}\left\{Q\left(\vec{x}\right)\right\}$ квадратичной функции потерь

$$Q\left(\vec{x}\right) = \left(\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right) - \vec{\Lambda}, \vec{A}\right)^2,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение. Данная функция определяет рассеяние оценки относительно истинного значения параметра и зависит как от матрицы вторых моментов оценки, так и от величины ее смещения

$$\vec{b} = E_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}\left\{\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right)\right\} - \vec{\Lambda}.$$

Так как оценка $\hat{\vec{\Lambda}}\left(\vec{x}\right)$ зависит от $\vec{x}$ только через $\vec{T}\left(\vec{x}\right)$, т.е. является функцией от полных достаточных статистик, то существенным ее преимуществом является то, что при любых конечных M она обеспечит минимум квадратичной функции потерь в классе $K_{\vec{b}}$ оценок со смещением $\vec{b}$ [17]. При $\vec{b} = 0$ оценка будет эффективной, при существовании наиболее эффективной оценки — наиболее эффективной.

Отдельно рассмотрим случай, когда компоненты векторной функции $\vec{s}(\vec{m})$ в выражении (4) представляют собой линейные комбинации компонентов вектора $\vec{m}$, т.е. для всех $j = 1, \ldots, L$ получаем

$$s_j(\vec{m}) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i^{(j)} m_i, \tag{6}$$

где $\alpha_i^{(j)}$ — скаляр. В этом случае оценка (5) будет несмещенной и, следовательно, эффективной. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству, приведенному в работе [21] для случая, когда

$$V_j(\vec{\Theta}) = E_{\Theta}^{\vec{x}}\left\{T_j^{k_j}(\vec{x})\right\},$$

где $j = 1, \ldots, L$, k_j — целое положительное число. Если условие (6) не выполняется, то величина смещения оценки в общем случае требует отдельного исследования.

Если наблюдаемый процесс $x(t)$ является стационарным в узком смысле случайным процессом, смещенная при конечных размерах выборки оценка становится асимптотически несмещенной. В этом случае наблюдаемая выборка $\vec{x}$ представляет собой вектор одинаково распределенных случайных величин, характеризуемых распределением P_{Θ}^{x}. При

$$\vec{h}\left[\vec{T}(\vec{x})\right] = \left\{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h_1(x_i), \ldots, \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h_L(x_i)\right\}^T$$

оценка (5) будет классической оценкой по методу моментов [17]. В работе [17] подробно рассмотрены свойства таких оценок. В частности, они являются сильно состоятельными, т.е. при $n \to \infty$ оценки $\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x})$ стремятся к истинным значениям $\vec{\Lambda}$ с вероятностью, равной 1. Кроме того, так как оценка $\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x})$ является функцией полных достаточных статистик, то при конечных M и нулевом смещении она будет эффективной, а при ненулевом смещении — асимптотически эффективной, а значение квадратичной функции потерь при каждом конкретном объеме выборки будет оставаться минимально возможным [17].

Для одномерного параметра $\theta = \lambda$ имеем сильно состоятельную асимптотически нормальную оценку

$$\hat{\lambda} = s\left\{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h(x_i)\right\}$$

со средним, равным λ, и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{M}\left[s'(\lambda)\right]^2 D\left[h(x)\right],$$

где $D\left[h(x)\right]$ — дисперсия случайной величины $h(x)$, $s'(\lambda)$ — производная функции $s(\lambda)$ в точке λ.

В качестве функций $h(x)$ в классическом методе моментов используют степенные функции $h(x) = x^j$ (отсюда и название метода). В этом случае

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} h(x_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i^j$$

представляет собой выборочный начальный момент j-го порядка случайной величины x.

4. ПРИМЕРЫ

4.1. Оценка параметра независимой выборки из равномерного распределения

Пусть $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_M\}^T$ — независимая выборка из равномерного на интервале $[0, \lambda]$ распределения с плотностью вероятности

$$w(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^M}, & 0 \le x_i \le \forall\, i = 1, \ldots, M; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7}$$

Требуется оценить величину параметра . В данном случае параметр распределения (7) одномерный. Полной достаточной статистикой для него является одномерная статистика [17]

$$T_1(\vec{x}) = \max_{i=1,\ldots,M}(x_i).$$

Выберем функцию

$$h_1\left[T_1(\vec{x})\right] = T_1(\vec{x}),$$

тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$m_1 = M / (M+1). \tag{8}$$

При вычислении правой части уравнения (8) учтено, что плотность вероятности статистики T_1 задается формулой

$$w(T_1) = \begin{cases} \dfrac{M T_1^{M-1}}{\lambda^M}, & 0 \le T_1 \le \lambda; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из уравнения (8) получаем

$$\lambda = \frac{M+1}{M} m_1. \tag{9}$$

Заменяя в выражении (9) m_1 на $T_1(\vec{x})$, получаем оценку $\hat{\lambda}(\vec{x})$ параметра

$$\hat{\lambda}(\vec{x}) = \frac{M+1}{M} T_1(\vec{x}) = \frac{M+1}{M} \max_{i=1,\ldots,M}(x_i). \tag{10}$$

Оценка (10) — эффективная, так как оцениваемый параметр согласно выражению (10) линейно зависит от начального момента m_1. Традиционно используемая оценка максимального правдоподобия (МП)

$$\hat{\lambda}_{\text{МП}} = \max_{i=1,\ldots,M}\left(x_i\right)$$

является асимптотически эффективной, но смещенной при конечных M.

4.2. Оценка дисперсии стационарного гауссовского случайного процесса по независимой выборке из аддитивной смеси стационарного гауссовского шума и последовательности прямоугольных импульсов с неизвестными амплитудами

Пусть наблюдаемый процесс представляет собой аддитивную смесь n прямоугольных импульсов с различными (и неизвестными) амплитудами U_i, $i = 0\ldots n-1$, и стационарного гауссовского шума с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией σ^2. Длительность импульсов и шаг дискретизации наблюдаемого процесса соотносятся между собой таким образом, что на протяжении i-го импульса берется только два статистически независимых отсчета x_i и y_i. По выборкам

$$\vec{x} = \left\{x_0,\ldots,x_{n-1}\right\}^T,\ \vec{y} = \left\{y_0,\ldots,y_{n-1}\right\}^T$$

требуется оценить значение дисперсии σ^2. Совместное распределение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеет следующий вид:

$$w\left(\vec{x},\vec{y}\right) = C\left(\vec{U},\sigma^2\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i^2+y_i^2\right)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{U_i}{\sigma^2}\left(x_i+y_i\right)\right\}, \tag{11}$$

где $\vec{U} = \left\{U_0,\ldots,U_{n-1}\right\}^T$, $C\left(\vec{U},\sigma^2\right)$ — нормирующий множитель.

Распределение (11) принадлежит экспоненциальному семейству распределений и характеризуется $(n+1)$-мерным параметром

$$\vec{\Theta} = \left\{\theta_0,\ldots,\theta_n\right\}^T,$$

где $\theta_i = U_i/\left(\sigma^2\right)$ при $i = 0\ldots n-1$, и $\theta_n = -1/\left(2\sigma^2\right)$, и полной достаточной статистикой

$$\vec{T}\left(\vec{x},\vec{y}\right) = \left\{T_0\left(\vec{x},\vec{y}\right),\ldots,T_n\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right\}^T,$$

где $T_i\left(\vec{x},\vec{y}\right) = \left(x_i+y_i\right)$ при $i = 0,\ldots,n-1$ и $T_n\left(\vec{x},\vec{y}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i^2+y_i^2\right)$. Оценке подлежит одномерный параметр $\sigma^2 = -1/\left(2\theta_n\right)$.

Выберем векторную функцию

$$\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right] = \left\{\left[T_0\left(\vec{x}\right)\right]^2,\ldots,\left[T_{n-1}\left(\vec{x}\right)\right]^2,T_n\left(\vec{x}\right)\right\}^T$$

и в соответствии с (2) составим систему из $(n+1)$ уравнений

$$\begin{cases} m_i = E_{\vec{\Theta}}^{(\vec{x},\vec{y})}\left\{\left[T_i\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right]^2\right\} = 2\sigma^2+4U_i^2, i = 0,\ldots,n-1; \\ m_n = E_{\vec{\Theta}}^{(\vec{x},\vec{y})}\left\{T_n\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right\} = 2n\sigma^2+2\sum_{i=0}^{n-1}U_i^2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно σ^2, получим зависимость параметра от математических ожиданий компонентов векторной функции $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right]$:

$$\sigma^2 = \frac{2m_n-\sum_{i=0}^{n-1}m_i}{2n}. \tag{12}$$

Из выражения (12) видно, что оцениваемый параметр σ^2 представляет собой линейную комбинацию математических ожиданий компонентов векторной функции $\vec{h}\left[\vec{T}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right]$. Поэтому, заменяя в (12) m_i соответствующими значениями $T_i\left(\vec{x},\vec{y}\right)$, получим искомую эффективную оценку $\widehat{\sigma^2}$ параметра σ^2:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{2n}\left[2\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i^2+y_i^2\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i+y_i\right)^2\right] = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i-y_i\right)^2. \tag{13}$$

При тех же условиях оценка максимального правдоподобия, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\widehat{\sigma_{\text{МП}}^2} = \frac{1}{4n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_i-y_i\right)^2,$$

ее дисперсия в четыре раза меньше, чем у оценки (13), но в отличие от оценки (13) она не является состоятельной, так как ее математическое ожидание равно $\sigma^2/2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача синтеза оценок параметров случайного процесса, распределение отсчетов которого обладает полными достаточными статистиками. Предложен регулярный метод синтеза эффективных оценок на основе представления оцениваемых параметров процесса в виде решения системы уравнений для математических ожиданий функций от полных достаточных статистик, подобранных таким образом, чтобы система уравнений относительно оцениваемых параметров была разрешима, с последующей заменой полученного решения на эти функции.

Оценки будут эффективными для данного распределения наблюдаемых данных, если оцениваемые параметры представляют собой линейную комбинацию математических ожиданий функций от полных достаточных статистик. Если смещение оценки при конечных объемах выборки отличается от нуля, то полученные оценки обеспечат минимальное для данного смещения значение квадратичной функции потерь при каждом конкретном объеме выборки.

В качестве примеров получены эффективные оценки параметра распределения независимой выборки из равномерного распределения и дисперсии шумовой составляющей выборки из аддитивной смеси стационарного гауссовского шума и прямоугольных импульсов с неизвестными амплитудами. Показано, что данные оценки, в отличие от оценок максимального правдоподобия, являются несмещенными.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSUN-2023-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Woodward P.M.* Probability and Information Theory with Applications to Radar. N.Y.: McGraw-Hill, 1953.
2. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006.
3. *den Dekker A. J., Sijbers J.* // Physica Medica. 2014. V. 30. № 7. P. 725.
4. *Разников В.В., Разникова М.О.* Информационно-аналитическая масс-спектрометрия. М.: Наука, 1991.
5. *Xinya Li, Zhiqun D.D., Rauchenstein L.T., Carlson T.J.* // Rev. Sci. Instrum. 2016. V. 87. № 4. Article No. 041502. doi:10.1063/1.5012687
6. *Губарев В.В.* Алгоритмы статистических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
8. *Миронов М.А.* Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. М.: Изд-во ГосНИИАС, 2013.
9. *Emery A.F., Valenti E., Bardot D.* // Measurement Sci. Technol. 2006. V. 18. № 1. P. 19. doi: 10.1088/0957-0233/18/1/003
10. *Morelli M., Moretti M.* // IEEE Wireless Commun. Lett. 2013. V. 2. № 1. P. 42. doi: 10.1109/WCL.2012.100912.120508.
11. *Shieh W.* // IEEE Photonics Technol. Lett. 2008. V. 20. № 8. P. 605. doi: 10.1109/LPT.2008.918873
12. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
13. *Ivanov S.I., Liokumovich L.B., Medvedev A.V.* // Proc. 2017 XX IEEE Int. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM). St. Petersburg. 24-26 May. N.Y.: IEEE, 2017. P. 11. doi: 10.1109/SCM.2017.7970480.
14. *Ivanov S.I., Liokumovich L.B., Medvedev A.V.* Proc. 18 Int. Conf. NEW2AN. St. Petersburg. 26-27 Aug 2018/ Eds by O.Galinina et al. Cham: Springer Switzerland AG, 2018. P. 666. doi: 10.1007/978-3-030-01168-0_61
15. *Zhuchkov K., Vasilchenko M., Zagrebneva A., Zavyalov A.* // Sci. Rep. 2022 V. 12. P. 19932. doi: 10.1038/s41598-022-24457-2
16. *Vostretsov A.G., Filatova S.G.* // J. Electronic Sci. Technol. 2023. V. 21. № 4. Article No. 100230. doi: 10.1016/j.jnlest.2023.100230
17. *Боровков А.А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
18. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.
19. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др.* Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
20. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
21. *Вострецов А.Г.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 5. С. 551.

METHOD FOR SYNTHESIZING EFFICIENT ESTIMATES OF SIGNAL PARAMETERS USING FUNCTIONS FROM COMPLETE SUFFICIENT STATISTICS

A. G. Vostretsov[a,b,*], **S. G. Filatova**[a,c]

[a] *Novosibirsk State Technical University,*
20 K. Marx Ave., Novosibirsk, 630073 Russian Federation
[b] *Chinakal Institute of Mining of the Siberian Branch of the RAS,*
54, Krasny Ave., Novosibirsk, 630091 Russian Federation
[c] *Federal Institute of Industrial Property,*
30-1 Berezhkovskaya nab., Moscow, G-59, GSP-3 125993 Russian Federation

***** *E-mail: vostreczov@corp.nstu.ru*

Received February 22, 2024, revised March 22, 2024, accepted March 24, 2024

A method for synthesizing efficient estimates of parameters of a random process whose distribution of samples has complete sufficient statistics is proposed. The method is based on the representation of the estimated parameters of the process in the form of a solution to the system of equations for mathematical expectations of functions derived from complete sufficient statistics, selected in such a way that the system of equations was solvable with respect to the estimated parameters. This solution is then replaced by the aforementioned functions in order to obtain the final estimate. The conditions under which the obtained estimates will be efficient are provided. Examples of parameter estimation for sample distributions from a uniform distribution and an additive mixture of Gaussian noise and a sequence of rectangular pulses with unknown amplitudes are presented, and their efficiency is demonstrated.

Keywords: estimation of signal parameters, efficient estimates, a priori uncertainty, complete sufficient statistics