

## ПАРАКСИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВО ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2024 г. Т. М. Сапронова\*, В. А. Сыровой\*

ВЭИ – филиал ФГУП "РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",  
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

\*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 23.12.2023 г.

После доработки 15.03.2024 г.

Принята к публикации 25.03.2024 г.

Приведена оценка параксиальных алгоритмов расчета формирующих электродов для плотного электронного пучка в криволинейных ортогональных координатах. Предложены два варианта ортогональных систем, не имеющих недостатков известных подходов, использованию которых не мешает принципиальное отсутствие ортогональной сетки в области электронного потока (релятивистские пучки с собственным азимутальным магнитным полем; случай магнитного поля под острым углом к катоду). Выполнено тестирование различных алгоритмов решения задачи с использованием известных точных решений.

*Ключевые слова:* формирующие электроды, параксиальная модель, криволинейные ортогональные координаты

DOI: 10.31857/S0033849424110063, EDN: HOFXXJ

### ВВЕДЕНИЕ

Приближенные модели узких электронных пучков основываются на классической асимптотической теории параксиальных и кольцевых потоков, изложение которой можно найти в монографии [1], использовании ортогональных криволинейных координат [2–4] и геометризованной теории [5, 6]. Аппаратом всех этих подходов являются обыкновенные дифференциальные уравнения, через решения которых в численном виде выражаются потенциал в потоке, нормальное электрическое поле на трубке тока и сама геометрия течения.

При расчете формирующих электродов существуют две возможности: либо смотреть на результат приближенных построений как на точный и использовать известные в этом случае подходы, либо заниматься конструированием приближенных параксиальных моделей и во внешней задаче [1, 7–9].

Одна из основных трудностей при любом составе исходной информации, аналитической или численной, состоит в построении в лапласовской области координатной сетки, удовлетворяющей требованию однозначности на удалениях от границы пучка, достаточных для расчета эффективной электронно-оптической системы.

Как точные алгоритмы, так и численные подходы с выходом в комплексное пространство, где мнимые характеристики уравнения Лапласа

становятся действительными [9–11], вынуждены иметь дело не с конформным отображением внешности границы пучка на какую-либо каноническую область, а с аппаратом аналитического продолжения, не гарантирующего упомянутых свойств криволинейной системы. Особые точки и области неоднозначности, как правило, формируются возле вогнутых участков границы. Универсальная система  $l, s$  (длина дуги образующей трубки тока, нормаль к ней) приводит к пересечению нормалей на расстояниях порядка радиуса кривизны траектории. При строгом выполнении требований параксиальной теории (малая кривизна) этого могло бы быть достаточно, но в практических задачах соответствующие критерии редко выполнимы. Длинные узкие пучки в диодном варианте требуют электродов с поперечным размером порядка продольной протяженности системы, либо перехода к совокупности коротких формирующих электродов.

Цель работы – оставаясь в рамках параксиального приближения, сформулировать алгоритмы построения однозначной сетки и решения задачи для сплошных осесимметричных, трубчатых и ленточных потоков и сравнить возможные приближенные модели с существующими точными решениями этой проблемы.

1. КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, СВЯЗАННАЯ СО ВСЕМ ПОЛЕМ ТЕЧЕНИЯ, В ОБЛАСТИ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ

В работе [10] решение уравнения Лапласа предложено искать в системе координат, связанной с геометрией потока, в которой описывается и сам пучок, в виде

$$\varphi = \varphi_i + \varepsilon^2 S, \tag{1}$$

где  $\varphi_i$  – потенциал в пучке,  $S$  – функция второго порядка малости, удовлетворяющая уравнению Пуассона с членом  $(-\rho)$  в правой части ( $\rho$  – плотность пространственного заряда) и однородными условиями на границе течения. Поперечная координата  $\eta$  описывается выражением

$$R = \eta R_1(z) \tag{2}$$

где  $R_e = \eta_e R_1(z)$  – уравнение границы.

В работе [11] это предложение распространено на теорию второго приближения, причем модифицированная формула (2) описывает кривые, не удовлетворяющие требованию подобия:

$$\begin{aligned} R &= \eta R_1(z) + \eta^3 R_3(z), \\ R_e &= \eta_e R_1(z) + \eta_e^3 R_3(z). \end{aligned} \tag{3}$$

Форма (1) оказалась эффективной в общетеоретическом плане при работе с точными решениями  $\varphi_i$  ( $\varepsilon = 1$ ): в работах [12–15] с ее помощью получен новый вид точного решения внешней задачи для произвольного осесимметричного потока, цилиндрического пучка с произвольным сечением, произвольного клиновидного потока, однако в приложении к приближенным моделям электронных пучков она имеет следующие недостатки.

При однозначной криволинейной сетке (2) для решения внешней задачи по алгоритму [10] необходимо часть интервала по  $\eta$ , в которой ряд для  $\varphi_i$  обнаруживает тенденцию к сходимости, зарезервировать для решения внешней задачи, тем самым отказываясь от возможности описать более широкий пучок.

Во втором приближении в дополнение к указанному ограничению добавляется генерация неоднозначной сетки. На рис. 1 приведены координатные линии  $\eta = \text{const}$  для второго приближения геометризованной теории осесимметричных электростатических пучков [16]. Электроды для электронного потока на рис. 1а с границей  $\eta_e = 0.5$  при  $Z = 3$  можно рассчитать в области  $\eta \leq 0.75$  явно недостаточной для эффективного формирования пучка. Для  $\eta = 1.2$  вблизи  $Z = 3$  начинаются самопересечения координатных линий, при больших значениях  $\eta$  система становится неоднозначной и непригодной как для расчета потока, так и формирующих

электродов. Ситуация усугубляется для более широкого пучка  $\eta_e = 0.75$  (рис. 1б).

На рис. 2 представлены координатные линии  $\eta = \text{const}$  и распределение потенциала на них в трех приближениях геометризованной теории для эталонного решения с эллиптическими орбитами частиц при отношении полуосей базовой трубки тока  $a/b = 3$  и увеличении начальной ширины потока  $f(0)$  [17]. Из рис. 2б,  $f(0) = 0.25$ , начиная со второго приближения видно изменение качественной картины траекторий с образованием вогнутой части с большой кривизной в третьем приближении. Потенциал при этом обнаруживает тенденцию к сходимости: максимальная относительная ошибка  $\delta_\varphi = 5.9\%$ ,  $4.0\%$ ,  $2.7\%$ . При  $f(0) = 0.3$  (рис. 2б) в третьем приближении образуется петля на возможной внешней границе пучка, в то время как для потенциала  $\delta_\varphi = 7.5\%$ ,  $5.4\%$ ,  $5.0\%$ . При  $f(0) = 0.4$  (рис. 2в) петля линии  $\eta = 1.96$  в третьем приближении приобретает размеры, сравнимые с малой полуосью эллипса;

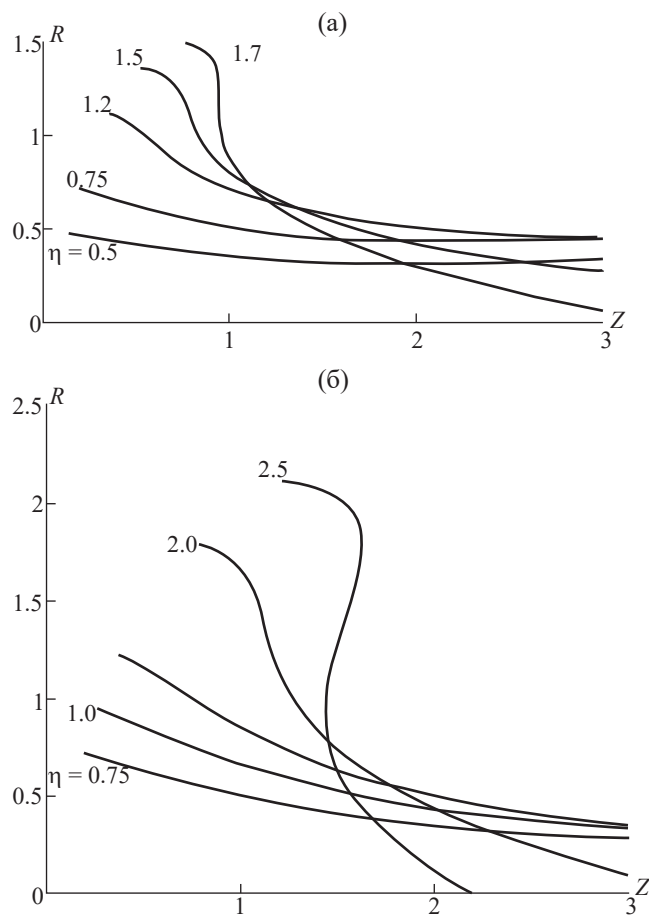


Рис. 1. Координатные линии  $\eta = \text{const}$  для второго приближения геометризованной теории осесимметричных электростатических пучков: начальная ширина пучка  $R_e = 0.5$  (а) и  $0.75$  (б).

система настолько неоднозначна, что аналогичный эффект наблюдается и для кривой  $\varphi = \varphi(X)$  (рис. 2г).

Приведенные примеры иллюстрируют очевидное свойство приближенного решения: терять смысл, начиная с некоторой величины параметра, по которому строится ряд. Система координат в области внешней задачи лишилась необходимого свойства однозначности раньше, чем выражение для потенциала в пучке  $\varphi_r$ .

В силу сказанного представляется целесообразным, сохранив аппарат описания пучка для самого электронного потока, построить решение внешней задачи в специально организованной криволинейной системе, не обладающей продемонстрированными недостатками.

Будем считать, что в результате рассмотрения занятой зарядами области нам известны форма границы, потенциал и нормальное поле на ней:

$$R = R_e(z), \varphi = \varphi_e(z), E_y = E_y(z). \quad (4)$$

Все приводимые ниже соотношения даны в нормировках, исключающих физические константы используемой системы единиц [1].

### 2. СПЛОШНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПУЧКИ

*Координатные линии, подобные границе пучка.* В отличие от (3) определим систему, связанную с границей пучка  $\eta = 1$ , формулой

$$R = \eta R_e(z), R_e = \eta_e R_1(z) + \eta_e^3 R_3(z) + \dots, \quad (5)$$

где функция  $R_e(z)$  может включать произвольное число слагаемых, соответствующих номеру приближения. Вторая координата  $\xi$  ортогональной системы описывается выражением

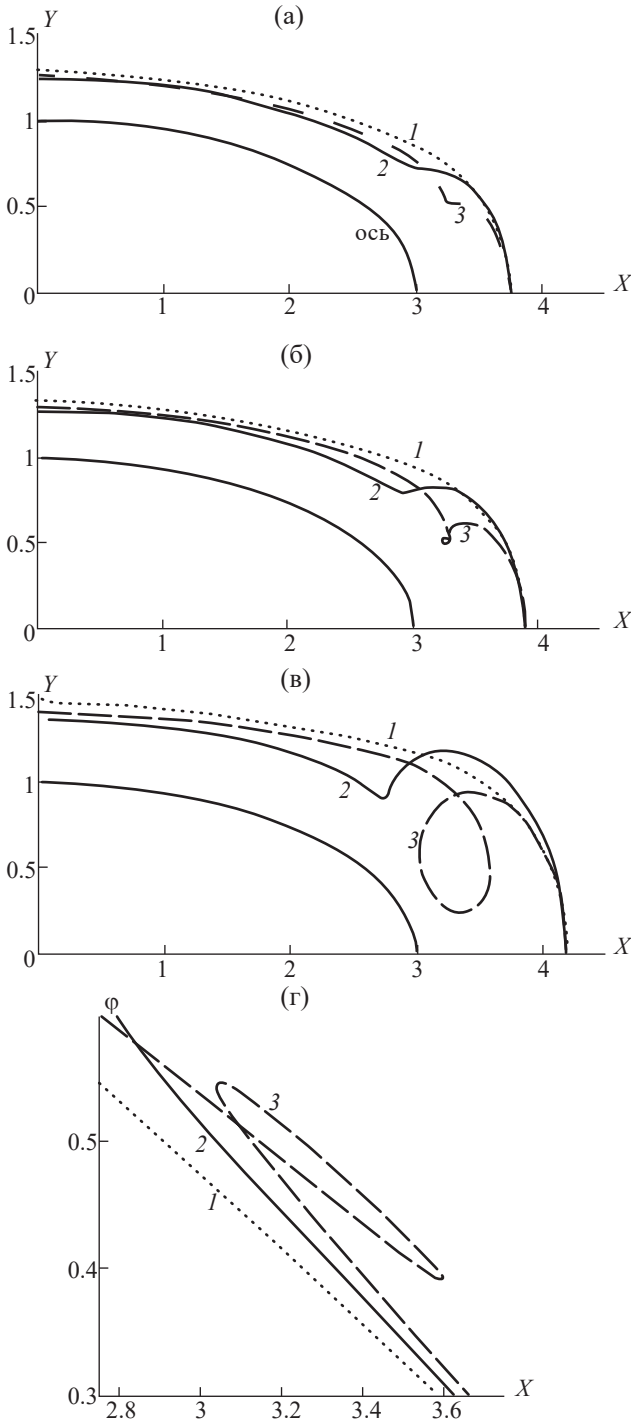
$$\xi = \frac{1}{2} R^2 + \int \frac{R_e}{R_e'} dz. \quad (6)$$

По сравнению с величиной  $\xi$  в [10] формула (6) дает явную зависимость  $\xi$  от  $R, z$ , но при этом не совпадает с  $z$  на оси пучка, которая не входит в область рассмотрения.

Производные от  $R, z$  по  $\xi, \eta$  ( $R_{,\xi} \equiv \partial R / \partial \xi$ ) и коэффициенты Ляме в системе (5), (6) имеют вид

$$\begin{aligned} R_{,\xi} &= \frac{RR_e'^2}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}, & R_{,\eta} &= \frac{R_e^3}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}, \\ z_{,\xi} &= \frac{R_e R_e'}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}, & z_{,\eta} &= -\frac{RR_e^2 R_e'}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}; \\ h_1 &= \frac{R_e'}{\sqrt{R^2 R_e'^2 + R_e^2}}, & h_2 &= \frac{R_e^2}{\sqrt{R^2 R_e'^2 + R_e^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение Лапласа в предположении  $\partial/\partial \xi \sim \epsilon$  запишется следующим образом:



**Рис. 2.** Координатные линии  $\eta = \text{const}$  (а, б, в) и распределение потенциала (г) в трех приближениях (1, 2, 3) геометризованной теории для потока с эллиптической границей при различной начальной ширине пучка:  $f(0) = 0.25$  (а),  $0.3$  (б),  $0.4$  (в).

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1 R}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2 R}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{R'_e}{R_e} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e^3}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right).$$

Как и всегда в параксиальных моделях, нас интересуют члены с  $\eta$  в степени, не выше второй. Последний член во втором уравнении (8) выписан на границе  $\eta = 1$ , где между  $\xi$  и  $z$  существует связь

$$\xi = \frac{1}{2} R_e^2(z_e) + \int_{z_e}^z \frac{R_e}{R'_e} dz, \quad z_e = z(\xi, 1), \tag{9}$$

и зависит только от  $\xi$ . Производная по криволинейной координате  $\xi$  при  $\eta = 1$  описывается формулой

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = z_{,\xi} \frac{d}{dz} = \frac{R'_e}{R_e(1 + R_e'^2)} \frac{d}{dz}. \tag{10}$$

Учитывая соотношение (10), получаем

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e^3}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right) = \frac{R'_e}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ R_e \Phi_e'' + \frac{2R'_e}{1 + R_e'^2} (1 + R_e'^2 - R_e R_e'') \Phi_e' \right]. \tag{11}$$

Представим функцию  $R'_e/R_e$  в левой части уравнения Лапласа в виде разложения по  $\bar{\eta} = \eta - 1$ :

$$\frac{R_e}{R'_e} = F(z(\xi, \eta)) = F_0(z_e) + F_1(z_e) \bar{\eta} + \frac{1}{2} F_2(z_e) \bar{\eta}^2;$$

$$F_0 = \frac{R_e(z_e)}{R'_e(z_e)}, \quad F_1 = -\frac{R_e R'_e}{1 + R_e'^2} F', \quad \bar{F}_k \equiv \frac{F_k}{F_0},$$

$$F_2 = \frac{R_e^2 R_e''}{(1 + R_e'^2)^2} F'' + \frac{R_e R'_e}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ R_e'^2 + \frac{R_e(2 - R_e'^2) R_e''}{1 + R_e'^2} \right];$$

$$F' = 1 - \frac{R_e R_e''}{R_e'^2},$$

$$F'' = \frac{1}{R_e^3} (-R_e R'_e R_e''' + 2R_e R_e''^2 - R_e'^2 R_e''). \tag{12}$$

Последовательно оставляя в уравнении (8) члены порядка  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ , в результате интегрирования получаем

$$\Phi = \Phi_e + \frac{\Phi_1}{F_0} (1 + \bar{F}_1 - \bar{F}_2 + \bar{F}_1^2) \ln \eta + \frac{1}{F_0} \left[ -(1 + \bar{F}_2 - \bar{F}_1^2) \Phi - (\bar{F}_1 - \bar{F}_2 + \bar{F}_1^2) \Phi_1 \right] \bar{\eta} +$$

$$+ \frac{1}{2F_0} \left[ (\bar{F}_1 - 2\bar{F}_2 + 2\bar{F}_1^2) \Phi - (\bar{F}_2 - \bar{F}_1^2) \Phi_1 \right] \bar{\eta}^2, \tag{13}$$

$$\Phi_1 = F_0 \Phi_{,\eta e} + (1 + \bar{F}_2 - \bar{F}_1^2) \Phi.$$

При малых  $\bar{\eta}$  логарифм ведет себя как квадратичная функция:

$$\ln \eta = \bar{\eta} - \frac{1}{2} \bar{\eta}^2. \tag{14}$$

Система, образованная трансляцией границы пучка вдоль оси  $R$ . Ортогональная система, связанная с границей пучка  $\eta = 0$ , определена формулами

$$\xi = R + \int \frac{dz}{R'_e}, \quad \eta = R - R_e(z);$$

$$R_{,\xi} = \frac{R_e'^2}{1 + R_e'^2}, \quad R_{,\eta} = \frac{1}{1 + R_e'^2},$$

$$z_{,\xi} = \frac{R'_e}{1 + R_e'^2}, \quad z_{,\eta} = -\frac{R'_e}{1 + R_e'^2},$$

$$h_1 = \frac{R'_e}{\sqrt{1 + R_e'^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + R_e'^2}}. \tag{15}$$

Уравнение Лапласа в системе (15) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ R'_e (\eta + R_e) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right). \tag{16}$$

Раскладывая сомножитель производной  $\partial \Phi / \partial \eta$  в ряд, имеем

$$R'_e (\eta + R_e) = R_e(\xi) R'_e(\xi) \left[ 1 + \frac{1 + R_e R_e''}{R_e (1 + R_e'^2)} \eta \right]. \tag{17}$$

Интегрирование уравнения (16) приводит к следующему результату:

$$\Phi = \Phi_e(\xi) + \Phi_{,\eta e}(\xi) \eta - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Phi}{R_e R'_e} + \frac{1 + R'_e R_e''}{R_e (1 + R_e'^2)} \Phi_{,\eta e} \right] \eta^2,$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right) = \frac{R'_e}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ R_e \Phi_e'' + R'_e \Phi_e' - \frac{2R_e R'_e R_e'' \Phi_e'}{1 + R_e'^2} \right]. \tag{18}$$

### 3. ТРУБЧАТЫЕ И ЛЕНТОЧНЫЕ ПУЧКИ

Для трубчатых пучков вывод формул основан на разложении коэффициентов Ляме в ряд по  $\eta$

и приравнивании членов с одинаковыми степенями этой координаты в уравнении Лапласа.

Координатные линии, подобные границе осесимметричного пучка. Для разложений коэффициентов Ляме (7) системы  $\xi, \eta$  имеем

$$\xi = \frac{1}{2}R^2 + \int \frac{R_e}{R_e'} dz, \quad \eta = \frac{R}{R_e(z)}, \quad \bar{\eta} = \eta - 1;$$

$$h_1 = a_0(1 + \bar{a}_1\bar{\eta} + \dots), \quad h_2 = b_0(1 + \bar{b}_1\bar{\eta} + \dots),$$

$$h_3 = R = R_0(1 + \bar{R}_1\bar{\eta} + \dots), \quad R_0 = R_e(z_e),$$

$$R_1 = R_{,\eta e}(z_e), \quad z_e = z(\xi, 1). \quad (19)$$

Будем искать решение уравнения Лапласа из (8) в виде

$$\Phi = \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\bar{\eta} + \varphi_2(\xi)\bar{\eta}^2. \quad (20)$$

Подстановка разложений (19), (20) в (8) дает выражение для  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2}(\bar{a}_1 - \bar{b}_1 + \bar{R}_1)\varphi_{,\eta e}, \\ \Phi &= \frac{b_0}{a_0 R_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{b_0 R_0}{a_0} \frac{d\varphi_e}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты Ляме на границе потока определены формулами

$$\begin{aligned} a_0(\xi) &= \frac{R_e'}{R_e \sqrt{1 + R_e'^2}}, \\ b_0(\xi) &= \frac{R_e}{\sqrt{1 + R_e'^2}}, \quad z_e = z(\xi, 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Функции  $a_1, b_1$  вычисляются по следующим правилам:

$$a_1(\xi) = (h_{1,\eta})_e = (h_{1,z}z_{,\eta} + h_{1,R}R_{,\eta})_e = -\frac{R_e'R_e''}{(1 + R_e'^2)^{5/2}},$$

$$\begin{aligned} b_1(\xi) &= (h_{2,\eta})_e = (h_{2,z}z_{,\eta} + h_{2,R}R_{,\eta})_e = \\ &= -\frac{R_e R_e'^2 (2 + 2R_e'^2 - R_e R_e'')}{(1 + R_e'^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Входящие в формулу (21) величины имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{R_e R_e''}{(1 + R_e'^2)^2}, \quad \bar{b}_1 = -\frac{R_e'^2 (2 + 2R_e'^2 - R_e R_e'')}{(1 + R_e'^2)^2}, \\ \bar{R}_1 &= \frac{1}{1 + R_e'^2}, \end{aligned}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{(R_e'^2 \varphi_e')'}{(1 + R_e'^2)^2} - 2 \frac{R_e'^2 R_e' R_e'' \varphi_e'}{(1 + R_e'^2)^3}. \quad (24)$$

Используя формулы (24), для функции  $\varphi_2$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2} \frac{1 + 2R_e'^2 - R_e R_e''}{1 + R_e'^2} \varphi_{,\eta e}, \\ \varphi_{,\eta e} &= \frac{R_e}{\sqrt{1 + R_e'^2}} E_v. \end{aligned} \quad (25)$$

Ленточные пучки. Для плоских потоков с границей  $y = y_e(x)$ , формулы осесимметричного случая модифицируются следующим образом:

$$\Phi = \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\bar{\eta} + \varphi_2(\xi)\bar{\eta}^2;$$

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{y_e'}{y_e'}, \quad z_{,\xi} = \frac{y_e'}{y_e(1 + y_e'^2)}, \quad \bar{a}_1 - \bar{b}_1 = \frac{2y_e'y_e'' - y_e y_e'''}{1 + y_e'^2},$$

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{y_e(y_e \varphi_e')'}{(1 + y_e'^2)^2} - 2 \frac{y_e^2 y_e' y_e''}{(1 + y_e'^2)^3} \varphi_e', \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2} \frac{2y_e'^2 - y_e y_e''}{1 + y_e'^2} \varphi_{,\eta e}. \end{aligned} \quad (26)$$

Система, образованная трансляцией границы, трубчатые пучки. В формулу для потенциала входят следующие функции, описывающие трубчатые пучки:

$$\xi = R + \int \frac{dz}{R_e'}, \quad \eta = R - R_e(z);$$

$$\Phi = \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\eta + \varphi_2(\xi)\eta^2;$$

$$a_0(\xi) = \frac{R_e'}{\sqrt{1 + R_e'^2}}, \quad b_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + R_e'^2}},$$

$$\frac{b_0 R_0}{a_0} = \frac{R_e}{R_e'}, \quad \frac{b_0}{a_0 R_0} = \frac{1}{R_e R_e'},$$

$$a_1(\xi) = -\frac{R_e' R_e''}{(1 + R_e'^2)^{5/2}}, \quad b_1(\xi) = \frac{R_e'^2 R_e''}{(1 + R_e'^2)^{5/2}},$$

$$\bar{a}_1(\xi) = -\frac{R_e''}{(1 + R_e'^2)^2}, \quad \bar{b}_1(\xi) = \frac{R_e'^2 R_e''}{(1 + R_e'^2)^2},$$

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{b_0}{a_0 R_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{b_0 R_0}{a_0} \frac{d\varphi_e}{d\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ \frac{(R_e \varphi_e')'}{R_e} - \frac{2R_e' R_e'' \varphi_e'}{1 + R_e'^2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Фрагмент второго порядка малости  $\varphi_2$  определен выражением

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2}(\bar{a}_1 - \bar{b}_1 + \bar{R}_1)\varphi_{,\eta e} = \\ &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2}\frac{1 + R_e R_e''}{R_e(1 + R_e'^2)^2}\varphi_{,\eta e}, \\ \varphi_{,\eta e} &= \sqrt{1 + R_e'^2} E_v.\end{aligned}\quad (28)$$

*Ленточные потоки.* Функции  $\Phi(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$  для ленточных пучков следуют из (27), (28) при  $R_e \rightarrow \infty$  с заменой  $R_e(z)$  на  $y_e(x)$ :

$$\begin{aligned}\xi &= y + \int \frac{dx}{y_e'}, \quad \eta = y - y_e(x), \\ \varphi &= \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\eta + \varphi_2(\xi)\eta^2, \\ \bar{a}_1 - \bar{b}_1 &= -\frac{y_e''}{1 + y_e'^2}, \quad \Phi(\xi) = \frac{1}{(1 + y_e'^2)^2} \left[ \varphi_e'' - \frac{2y_e' y_e'' \varphi_e'}{1 + y_e'^2} \right], \\ \varphi_2(\xi) &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2}\frac{y_e''}{1 + y_e'^2}\varphi_{,\eta e}.\end{aligned}\quad (29)$$

Отметим, что все производные, определяющие решение внешней задачи, присутствуют в алгоритме приближенного описания самого пучка и не требуют аппроксимации результатов для выполнения численного дифференцирования. Обращение  $h_1$  в нуль за счет равенств  $R_e' = 0$  или  $y_e' = 0$ , имеющих место при эмиссии с плоскости или в кроссовере, может приводить к сложностям при построении решения внешней задачи.

*Система  $\xi$ ,  $\eta$  с конформной метрикой.* Для пучков, которые могут быть описаны в подобной системе, уравнение Лапласа и его параксиальное решение имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} &= 0, \quad \varphi = \varphi_e(\xi) + \\ &+ \varphi_{,\eta e}(\xi)\bar{\eta} - \frac{1}{2}\varphi_{e,\xi\xi}(\xi)\bar{\eta}^2.\end{aligned}\quad (30)$$

*Система  $l$ ,  $s$  классической параксиальной теории.* В системе  $l$ ,  $s$  (длина дуги образующей, нормаль к ней) параксиальное решение внешней задачи для тонких трубчатых пучков описывается формулой

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_e(l) + \varphi_{,se}(l)s + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{R_e} (R_e \varphi_{e,l})_{,l} + (k_1 + k_2)\varphi_{,se} \right] s^2,\end{aligned}\quad (31)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  — главные кривизны граничной трубки тока. На вогнутых участках границы система теряет однозначность на расстояниях порядка радиуса кривизны  $1/k_1$  из-за пересечения нормалей из разных точек контура.

Для ленточных пучков имеем

$$\varphi = \varphi(l) + \varphi_{,se}(l)s + \frac{1}{2}(-\varphi_{e,ll} + k_1\varphi_{,se})s^2.\quad (32)$$

В сформулированных выше алгоритмах (для определенности будем говорить о ленточных пучках в системе с трансляцией) производные от декартовых координат  $x$ ,  $y$  по криволинейным координатам  $\xi$ ,  $\eta$  и коэффициенты Ляме зависят от  $x$ . Множители перед степенями  $\eta$  в формуле для  $\varphi$  выражаются через производные по  $x$  от функции  $y = y_e(x)$ , определяющей границу пучка. Эти производные, однако, записываются при  $\eta = 0$ , поэтому величина  $x$  перестает быть декартовой координатой  $x = x(\xi, \eta)$  и становится функцией  $\xi$ :  $x_e = x(\xi, 0)$ . По этой причине построение эквипотенциалей сводится к следующему. Задав на границе пучка точку  $x_0$ , получим величину потенциала  $\varphi_0$ , которую мы хотели бы отследить. Смещаясь от  $x_0$  в ту или другую сторону, фиксируем значение  $x_*$ , которое определит величину  $\xi_*$  в этой точке границы. Изменяя  $x$ , движемся вдоль линии  $\xi = \xi_*$ , причем координата  $y$  при этом меняется по закону

$$y_* = \xi_* - \int_{x_*}^x \frac{dx}{y_e'}.\quad (33)$$

Соответствующее значение  $\eta_*$

$$\eta_* = y_* - y_e(x)\quad (34)$$

позволяет вычислить величину потенциала  $\varphi_*$ , коэффициенты в формуле для которого являются функциями  $\xi_*$ , и сравнить  $\varphi_*$  с  $\varphi_0$ . При совпадении координаты эквипотенциала  $\varphi = \varphi_0$  определяются парой  $(x, y_*)$ .

#### 4. ТЕСТИРОВАНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Для тестирования параксиальных моделей мы располагаем решениями внешней задачи в элементарных функциях для трех эталонных потоков: плоского электростатического течения с гиперболической границей [18, 19], плоского течения с эллиптическими орбитами частиц в однородном магнитном поле [20–23], потока в плоском магнетроне с магнитным полем под острым углом к катоду (пространственные траектории на цилиндрических трубках тока с криволинейными направляющими) [24, 25]. В четвертом случае для течения с траекториями-окружностями [26] решение внешней задачи содержит определенный интеграл.

*Электростатический поток с равнобочной гиперболой в качестве границы.* Точные выражения для траекторий и потенциала в потоке определены формулами

$$\eta = xy = \text{const}, \quad \varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).\quad (35)$$

Решение внешней задачи в элементарных функциях для гиперболической границы  $\eta = 1$  описывается выражениями [1, 19]

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sqrt{m} \cos \frac{\vartheta}{2} + \theta, \quad w = u + iv; \\ \sqrt{w^2 + 1} &= \sqrt{m} \exp(i\vartheta/2), \quad w + \sqrt{w^2 + 1} = M \exp(i\theta); \\ u = \xi, \quad v &= \eta - 1, \quad \xi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \eta = xy. \end{aligned} \quad (36)$$

Система  $\xi, \eta$  с подобными границе линиями. Построение линий, подобных граничной кривой  $\eta_e = 1$ , приводит к системе с конформной метрикой и решению в форме (31):

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \eta = xy, \quad \bar{\eta} = xy - 1; \\ \varphi &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \varphi_e = \sqrt{\xi^2 + 1}, \quad \varphi_{,\eta e} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}, \\ \varphi_{e,\xi\xi} &= \frac{1}{(\xi^2 + 1)^{3/2}}; \\ \varphi &= \sqrt{\xi^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \bar{\eta} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} \bar{\eta}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

На рис. 3 приведено сравнение решения (37) и точного результата (36).

Применим формулу (1) в однозначной системе (37) с точным выражением потенциала  $\varphi_i$  в пучке, не требуя его узости. Сравнение с решением (36) позволит оценить эффективность формы (1), когда

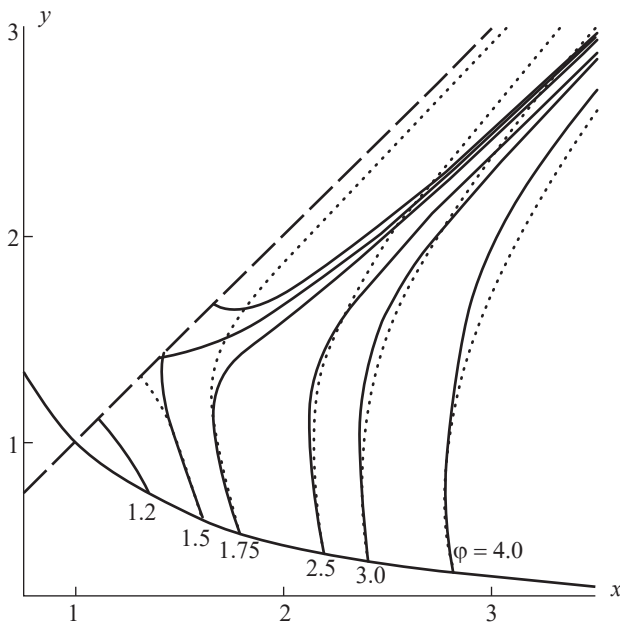


Рис. 3. Решение для гиперболического потока с подобными границе координатными линиями: пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (37).

все травмирующие факторы (неоднозначность сетки, приближенное значение  $\varphi_i$ ) исключены:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_i + S, \quad \varphi_i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ S &= -\int_1^\eta \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) d\eta + \\ &+ \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)(\eta - 1). \end{aligned} \quad (38)$$

Потенциал на линии симметрии меняется по закону

$$\varphi(0, \eta) = 2\eta - \ln \eta - 1, \quad \eta = x^2. \quad (39)$$

Сравнение эквипотенциалей для решений (36), (39) приведено на рис. 4.

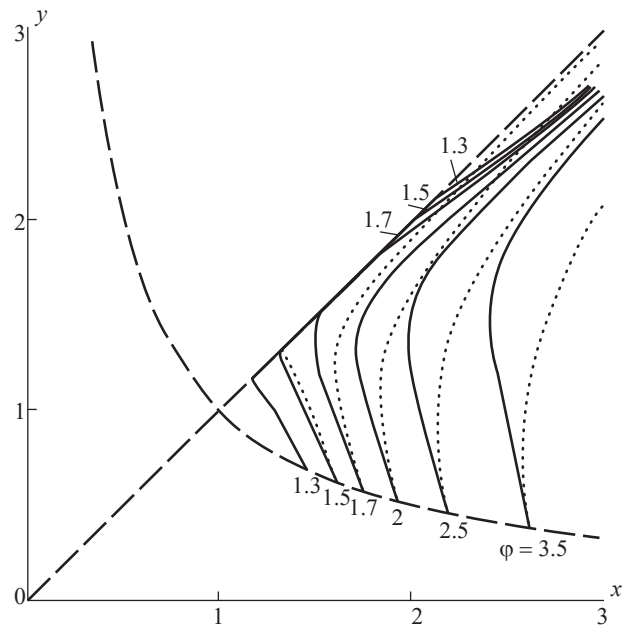


Рис. 4. Решение для гиперболического потока в форме (1) с точным значением  $\varphi_i$ ; пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (38).

Если рассматриваются узкие пучки, то, сохранив квадратичные по  $\bar{\eta}$  члены в разложениях для  $\varphi_i, S$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_{iар} &= \sqrt{\xi^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \bar{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} \bar{\eta}^2, \\ S_{ар} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \bar{\eta}^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Нетрудно проверить, что результат совпадает с формулой (37).

Система  $l, s$ . На основании формулы (32) параксиальное разложение в системе  $l, s$  описывается выражениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e + \varphi_{,se}s + \frac{1}{2}(-\varphi_{e,ll} + k_1\varphi_{,se})s^2; \\ y_e &= \frac{1}{x}, \quad y'_e = -\frac{1}{x^2}, \quad 1 + y_e'^2 = \frac{x^4 + 1}{x^4}, \\ \frac{d}{dl} &= \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} \frac{d}{dx}, \\ \varphi_e &= \frac{x^4 + 1}{2x^2}, \quad \varphi_{,se} = 2k_1\varphi_e = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}, \\ k_1 &= \frac{2x^3}{(x^4 + 1)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{41}$$

В формуле для  $\varphi$  удобно перейти от  $l$  к  $x$ , в результате получим

$$\varphi = \frac{x^4 + 1}{2x^2} + \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}s - \frac{1}{2}s^2. \tag{42}$$

Эквипотенциали, соответствующие выражению (42), приведены на рис. 5. На рис. 6 представлены распределения потенциала на оси симметрии для точного решения и параксиальных вариантов (37), (38), (42). В табл. 1 даны численные значения  $\varphi$ , позволяющие оценить ошибку на разных расстояниях от границы.

Сравнение двух эквипотенциальных кривых для различных вариантов решения демонстрирует рис. 7.

*Система с трансляцией границы.* Вертикальная трансляция границы  $y = 1/x$  нарушает симметрию задачи. Трансляция вдоль оси симметрии

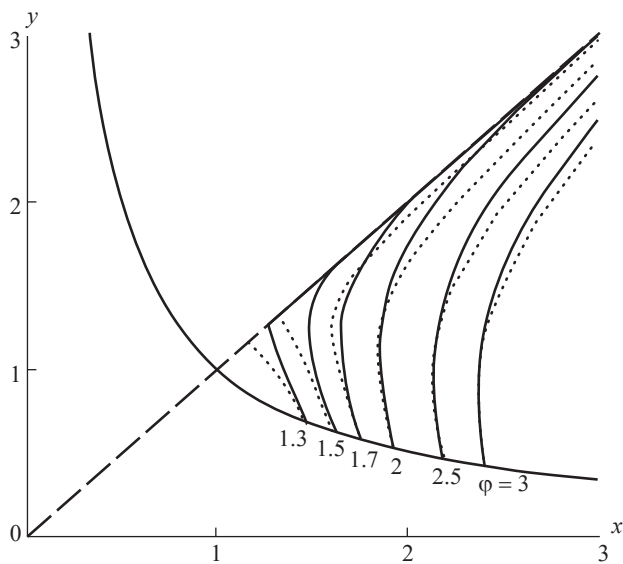


Рис. 5. Решение для гиперболического потока в системе  $l, s$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (42).

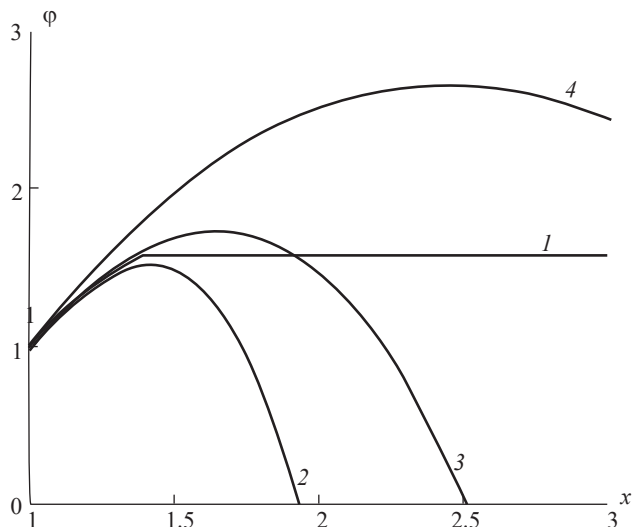


Рис. 6. Распределение потенциала на оси симметрии для гиперболического потока; 1 – точное решение, 2 – модель (37), 3 – модель (38), 4 – модель (42).

Таблица 1. Распределение потенциала на оси симметрии для равнобочной гиперболы

$x$	$\varphi$			
	Точное решение	модель (37)	модель (38)	модель (42)
1	1.0	1.0	1.0	1.0
1.1	1.189	1.188	1.189	1.206
1.2	1.354	1.343	1.355	1.414
1.3	1.485	1.452	1.493	1.613
1.4	1.567	1.499	1.601	1.795
1.5	1.571	1.469	1.675	1.959
1.6	1.571	1.343	1.714	2.103
1.7	1.571	1.104	1.713	2.229

для равнобочной гиперболы  $y = \sqrt{2 + x^2}$ , получающейся из  $y = 1/x$  поворотом на  $45^\circ$ , описывается формулами

$$y_e = \sqrt{2 + x^2}, \quad y'_e = \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}, \quad 1 + y_e'^2 = \frac{2(1 + x^2)}{2 + x^2};$$

$$\xi = y + \sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2} \left[ \ln \left( \sqrt{2} + \sqrt{2 + x^2} \right) - \ln x \right],$$

$$\eta = y - y_e; \quad \varphi = \varphi_e + \varphi_{,\eta e}\eta + \varphi_{2,\eta^2}\eta^2; \tag{43}$$

$$\varphi_e = x^2 + 1, \quad \varphi_{,\eta e} = \frac{\sqrt{2 + x^2}}{1 + x^2},$$



$$\Phi_2 = -\frac{2+x^2}{4(1+x^2)^3}(x^4+x^2+2) + \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\Phi_{,ne}$$

где  $x$  означает  $x(\xi, 0)$

Эквипотенциалы, построенные по формулам (43) с учетом (33), (34) приведены на рис. 8.

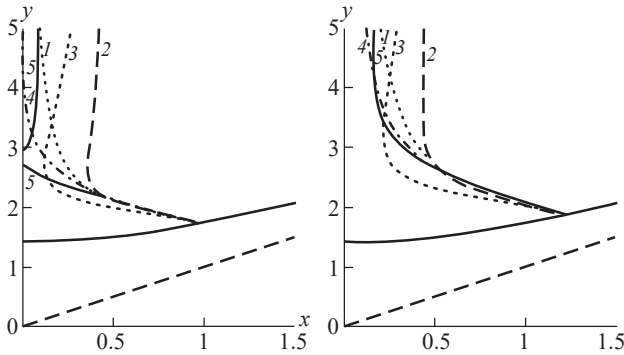


Рис. 7. Сравнение эквипотенциалов  $\varphi = 2.0$  (а) и  $2.5$  (б) для гиперболического потока, рассчитанных по различным моделям: 1 – точное решение, 2 – модель (37), 3 – модель (38), 4 – модель (42), 5 – модель (43); масштаб по оси  $x$  увеличен.

Поток с эллиптическими орбитами в однородном магнитном поле. Финитные траектории не являются характерными в задачах электронной оптики. Известно всего два решения для плоских двумерных потоков с замкнутыми орбитами: эллиптический поток в однородном магнитном поле и электростатическое периодическое течение, имеющее финитные траектории в области под траекторией-сепаратрисой [20]. Для эллиптической границы известно точное решение внешней задачи [21–23], что дает возможность провести ряд тестовых расчетов.

Семейство эллипсов  $\xi = \text{const}^1$  в системе  $\xi, \eta$  с конформной метрикой образовано софокусными кривыми, в то время как траектории эллиптического потока в магнитном поле получаются из базовой кривой  $\xi = 1$  равномерным растяжением координат  $x, y$  с сохранением отношения полуосей  $a/b$ . По этой причине алгоритм [3] не может быть применен в этом случае в полной мере: линии  $\xi = \text{const}$  внешней задачи не являются траекториями пучка.

Течение с эллиптическими орбитами частиц в однородном магнитном поле [20] описывается формулами

<sup>1</sup> Эллиптическая граница пучка в конформной системе  $\xi, \eta$  [21–23] описывается уравнением  $\xi = \text{const}$ , поэтому в этом примере в отличие от предыдущих продольной координатой будет  $\eta$ .

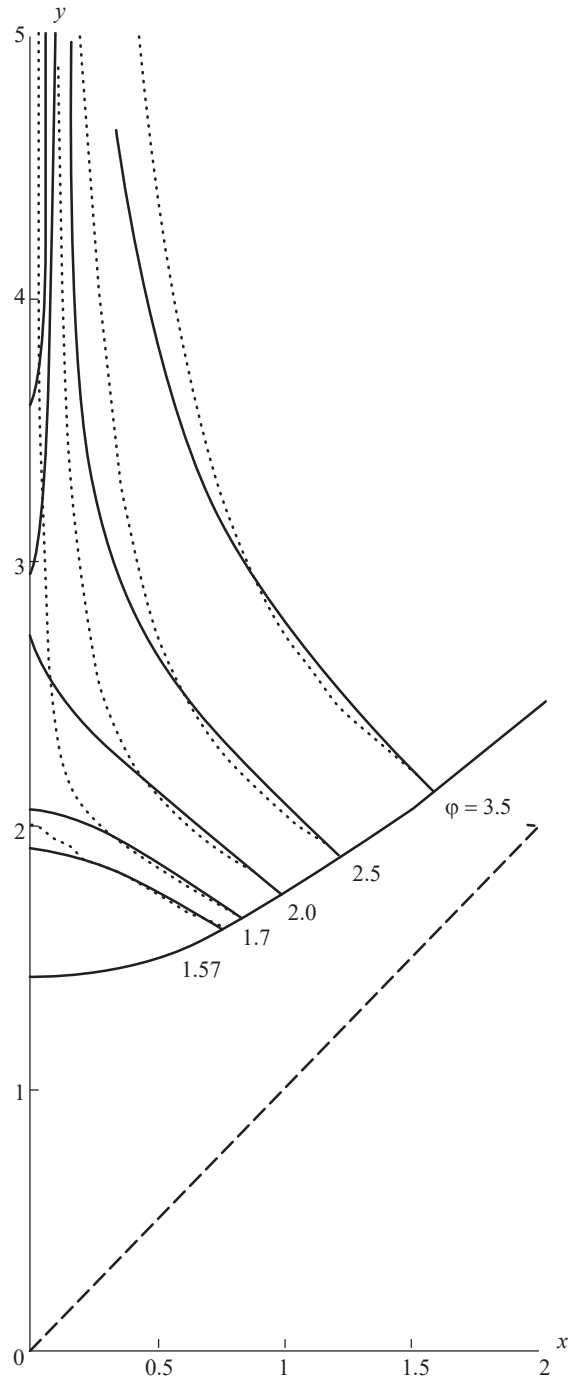


Рис. 8. Решение для гиперболического потока в системе с трансляцией: пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (43).

$$\varphi = \frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2), \quad \bar{\Omega}x^2 + y^2 = \text{const}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega},$$

$$\omega = \frac{1}{2}H_z, \quad \Omega = \text{const}, \quad \alpha = a/b = 1/\sqrt{\bar{\Omega}};$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^4} \text{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + (\alpha^2 - 1) \text{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \right],$$

$$x = \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (44)$$

Точное выражение для потенциала в лапласовской области в системе  $\xi, \eta$  с конформной метрикой  $h_1 = h_2 = h$  имеет вид [21–23]

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} + \frac{\alpha^4 + 1}{2\alpha^3} (\xi - \xi_e) - \\ &- \left( \frac{\alpha^4 + 1}{4\alpha^3} \operatorname{sh} 2\xi - \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} \operatorname{ch} 2\xi \right) \cos 2\eta, \\ h &= \sqrt{(\alpha^2 - 1) (\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta)}, \\ \operatorname{th} \xi_e &= 1/\alpha. \end{aligned} \quad (45)$$

Системы с растяжением и трансляцией непригодны для замкнутых контуров с двумя плоскостями симметрии: помимо возникновения особенностей в вершинах, область, покрываемая сеткой, ограничивается полосой, ширина которой равна соответствующей полуоси контура.

Оценка основного предположения параксиальной теории о малости продольных производных в конформной системе  $\xi, \eta$  для эллипса приводит к выражению (31) с результатами, изображенными на рис. 9:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e + \varphi_{,\xi e} \bar{\xi} - \frac{1}{2} \varphi_{e,\eta\eta} \bar{\xi}^2, \quad \bar{\xi} = \xi - \xi_e; \\ \varphi_e &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \cos 2\eta, \\ \varphi_{,\xi e} &= \frac{1}{\alpha^3} (\cos^2 \eta + \alpha^4 \sin^2 \eta), \\ \varphi_{e,\eta\eta} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \cos 2\eta. \end{aligned} \quad (46)$$

В окончательной форме решение принимает вид

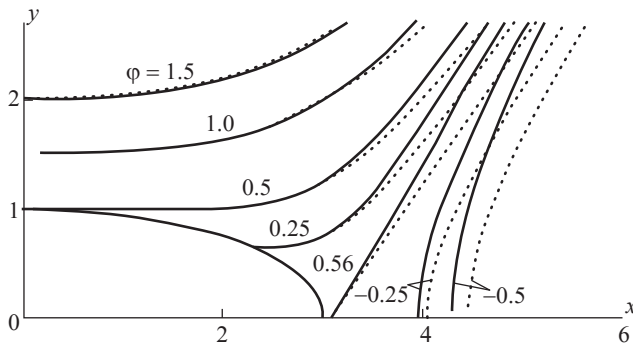


Рис. 9. Решение для эллиптического потока,  $a/b = 3$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (49).

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \cos 2\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3} - \right. \\ &- \left. \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha^3} \cos 2\eta \right) \bar{\xi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \cos 2\eta \bar{\xi}^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Использование представления потенциала (1) с точным значением  $\varphi_i$  из (44) дает (рис. 10) выражение

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_i + S, \quad \rho = (1 + \alpha^4)/\alpha^4, \\ \varphi_i &= \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \left( \frac{1}{\alpha^4} \operatorname{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \right), \\ S &= -\frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \rho \left[ \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\xi_e) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi_e^2) \cos 2\eta + \left( \xi_e \cos 2\eta - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi_e \right) \bar{\xi} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

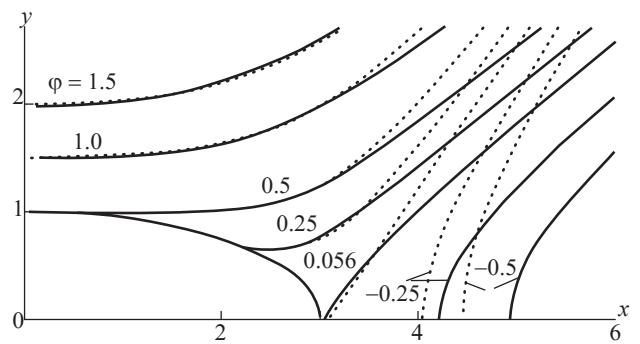


Рис. 10. Решение для эллиптического потока,  $a/b = 3$ , в форме (1) с точным значением  $\varphi_i$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (49).

Если учесть узость пучка, сохраняя в формулах для  $\varphi_i, S$  члены порядка  $\bar{\xi}^2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{iap} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \eta + \sin^2 \eta + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{\alpha^4} \cos^2 \eta + \sin^2 \eta \right) \left[ 2\alpha \bar{\xi} + (\alpha^2 + 1) \bar{\xi}^2 \right] \right\}, \\ S_{ap} &= -\frac{1 + \alpha^4}{4\alpha^4} \left[ \alpha^2 + 1 - (\alpha^2 - 1) \cos 2\eta \right] \bar{\xi}^2, \end{aligned} \quad (49)$$

то, как и в случае с гиперболой, решение (49) совпадает с (47).

Система  $l, s$ . Для выпуклых контуров система  $l, s$  является однозначной. В случае эллиптической границы справедлива формула (41) со следующими входящими в это выражение величинами

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e + \varphi_{,se}s + \frac{1}{2}(-\varphi_{e,ll} + k_1\varphi_{,se})s^2; \\ \varphi_e &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \cos 2\eta, \\ \varphi_{,\xi e} &= \frac{1}{\alpha^3}(\cos^2 \eta + \alpha^4 \sin^2 \eta), \\ \varphi_{,se} &= \frac{1}{h_e} \varphi_{,\xi e} = \frac{\cos^2 \eta + \alpha^4 \sin^2 \eta}{\alpha^3 \sqrt{\cos^2 \eta + \alpha^2 \sin^2 \eta}}, \quad k_1 = -\frac{\alpha}{h_e^3}, \\ \frac{d}{dl} &= \frac{1}{h_e} \frac{d}{d\eta}, \quad h_e = \sqrt{\cos^2 \eta + \alpha^2 \sin^2 \eta}; \\ \varphi_{e,ll} &= \frac{1}{h_e} \left( \frac{1}{h_e} \varphi_{,e\eta} \right)_{,\eta} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} \frac{1}{h_e^4} \left[ -\frac{\alpha^2 - 1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha^2 + 1) \cos 2\eta - \frac{\alpha^2 - 1}{2} \cos^2 2\eta \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Переход к декартовым координатам выполняется по формулам

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos \eta + s \sin \vartheta, \quad y = \sin \eta + s \cos \vartheta, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \eta. \end{aligned} \quad (51)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 11. Хотя, как было сказано выше, система с трансляцией границы не дает возможности построить решение внешней задачи для всего эллиптического контура, однако наличие точного решения позволяет исследовать поведение приближенных моделей вблизи точек с заметной кривизной. В примере с гиперболической границей кривизна не превышала единицы.

Для эллипса с  $a/b = 10$  в точке с  $k = 7.6$ , радиус кривизны  $R = 0.13$ , модель с трансляцией слабо

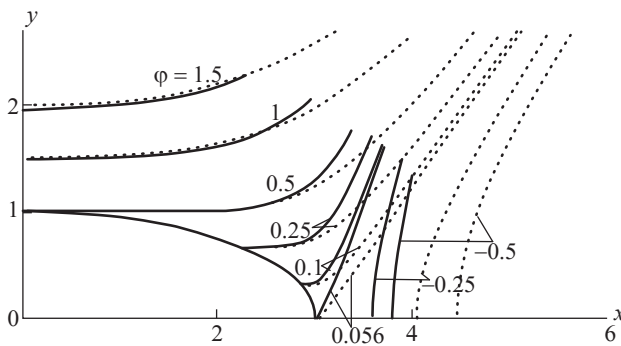


Рис. 11. Решение для эллиптического потока,  $a/b = 3$ , в системе  $l, s$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (50).

отличается от точного решения на расстоянии до  $0.38R$ , система  $(l, s)$  – до  $0.055R$ . При  $a/b = 3$  соответствующие величины в точке с кривизной  $k = 2.67$ ,  $R = 0.37$  составляют  $0.37R$  и  $0.15R$ .

*Плоский магнетрон.* В случае магнитного поля, направленного под острым углом к катоду и эмиссии в  $\rho$ -режиме, с трубками тока в принципе нельзя связать ортогональную систему координат [5] и использовать алгоритм [3]. Точное решение уравнений пучка при эмиссии в  $T$ -режиме в параметрической форме с параметром  $\tau$  построено в работах [24, 25]. Расчет формирующих электродов [24, 25] выполнен с использованием подхода [26], основанного на аналитическом продолжении границы для построения ортогональной сетки  $u, v$  и интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения эквипотенциали.

При сопоставлении приводимых ниже результатов с данными [24, 25] необходимо иметь в виду различие нормировок: в [24, 25] интерес представлял  $T$ -режим эмиссии и при обезразмеривании потенциала поле  $E$  на катоде находилось в знаменателе. Мы используем безразмерные переменные (символы с чертой), позволяющие объединить описание двух режимов эмиссии и определенные следующими формулами для потенциала, электрического и магнитного полей, плотности тока:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{\varphi_*}, \quad \varphi_* = \frac{V_*^2}{\eta}; \quad \bar{E} = \frac{E}{E_*}, \quad E_* = \frac{V_*^2}{\eta L_*}; \\ \bar{\Omega} &= \frac{\Omega}{\Omega_*}, \quad \Omega_* = \frac{V_*}{\eta \mu L_*}, \quad \bar{J} = \frac{J}{J_*}, \quad J_* = \frac{\varepsilon V_*^3}{\eta L_*^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

где звездочками отмечены характерные значения величин;  $V_*$ ,  $L_*$  – масштабы скорости и длины;  $\eta, \mu, \varepsilon$  – удельный заряд электрона, магнитная и диэлектрическая постоянные вакуума. В результате соотношение безразмерных длины и потенциала ( $X, G$ ) в [24, 25] и  $(\bar{y}_m, \bar{\varphi})$  ниже определено формулами

$$\frac{X}{\bar{y}_m} = \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{E} \cos^2 \alpha}, \quad \frac{\bar{\varphi}}{G} = \frac{\bar{E}^2}{\bar{\Omega}^2}; \quad \Omega \equiv H. \quad (53)$$

Здесь  $\Omega, \alpha$  – напряженность и угол наклона магнитного поля на катоде. Типичные для планарного гиротрона [27] величины  $\bar{\Omega} = 2.9$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\bar{E} = 0.6$  приводят к следующим значениям отношений в (53):

$$X/\bar{y}_m = 18.7, \quad \bar{\varphi}/G = 0.043. \quad (54)$$

Параметр  $\gamma = \bar{\Omega} \bar{E} / \bar{J}$  является обратной величиной параметра с тем же обозначением в [24, 25].

*Точное решение.* Дифференциальное уравнение эквипотенциали, определяющее точное решение задачи, имеет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{\operatorname{Re} \Phi}{\operatorname{Im} \Phi}, \quad \tau = u + iv = t \exp(i\vartheta),$$

$$A = \frac{\dot{y}_m}{\dot{x}_m}, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau};$$

$$\bar{y} = \tau - \sin \tau + \gamma(1 - \cos \tau), \quad \bar{z} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{1}{3} \tau^3 + \gamma \tau^2 \right),$$

$$\bar{h}^2 = \dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{z}}^2, \quad \bar{U} = \frac{1}{2} (\bar{h}^2 + \bar{y}^2), \quad \bar{k}_1 = (\ddot{\bar{y}} \dot{\bar{z}} - \ddot{\bar{z}} \dot{\bar{y}}) / \bar{h}^3,$$

$$\bar{E}_v = \bar{k}_1 \bar{h}^2 + \bar{y} \dot{\bar{z}} / \bar{h}; \tag{55}$$

$$\bar{x}_m = \bar{y} \cos \alpha + \bar{z} \sin \alpha, \quad \bar{y}_m = -\bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha.$$

Здесь  $y, z$  – система, связанная с направленным по оси  $z$  магнитным полем;  $x_m, y_m$  – система с уравнением  $x_m = 0$  для катода;  $\bar{U}$  – потенциал в потоке;  $\bar{k}_1, \bar{E}_v$  – кривизна трубки тока и нормальное электрическое поле на ней. Символы  $y, z$  и  $\bar{y}, \bar{z}$  и т.д. различаются постоянными множителями [28].

Правая часть уравнения эквипотенциали определена формулами

$$\operatorname{Re} \Phi = \operatorname{Re} \dot{\bar{U}} (1 + \operatorname{Im} A) + \operatorname{Im} \dot{\bar{U}} \operatorname{Re} A,$$

$$\operatorname{Im} \Phi = -\operatorname{Re} \dot{\bar{U}} \operatorname{Re} A + \operatorname{Im} \dot{\bar{U}} (1 + \operatorname{Im} A),$$

$$\operatorname{Re} A = (\operatorname{Re} \dot{x}_m \operatorname{Re} \dot{y}_m + \operatorname{Im} \dot{x}_m \operatorname{Im} \dot{y}_m) / M^2, \tag{56}$$

$$\operatorname{Im} A = (-\operatorname{Im} \dot{x}_m \operatorname{Re} \dot{y}_m + \operatorname{Re} \dot{x}_m \operatorname{Im} \dot{y}_m) / M^2,$$

$$M^2 = (\operatorname{Re} \dot{x}_m)^2 + (\operatorname{Im} \dot{x}_m)^2.$$

Функция  $\operatorname{Im} \Phi$  обращается в нуль не только на границе пучка, но и в некоторых внутренних точках лапласовской области. В подобных случаях приходится интегрировать уравнение  $du/dv = \operatorname{Im} \Phi / \operatorname{Re} \Phi$ . Аналитическое продолжение границы приводит к неоднозначной координатной сетке, что не дает возможность построить точное решение задачи во всей интересующей нас области.

Система  $l, s$ . Параксиальное решение задачи о формировании потока в магнетроне с использованием формулы (31) приобретает вид

$$\varphi = \bar{\Omega}^2 \left\{ p^2 \bar{U} + p \bar{E}_s s + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\bar{h}^2} \left( \ddot{\bar{U}} - \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} \dot{\bar{U}} \right) + \bar{k}_1 \bar{E}_s \right] s^2 \right\},$$

$$p = J \cos \alpha / \bar{\Omega}^3. \tag{57}$$

Расчет потенциала по формуле (57) сводится к следующему: задав  $\tau$ , находим все функции, зависящие от этой переменной в (57). Определив  $s$ , находим точку  $X, Y$  и значение потенциала  $\varphi$  в ней, используя (57)

$$X = \bar{z} - \frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{h}} \frac{s}{p}, \quad Y = \bar{y} + \frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{h}} \frac{s}{p}. \tag{58}$$

По формулам для  $\bar{x}_m, \bar{y}_m$  в (55) с заменой  $\bar{y} \rightarrow Y, \bar{z} \rightarrow X$ , умножив результат на  $p$ , получаем координаты точки в системе, связанной с катодом. Результаты вычислений при  $\bar{\Omega} = 2.9, \bar{J} = 0.116, \bar{E} = 0.6, \alpha = 30^\circ$  приведены на рис. 12–14 для внешней и внутренней областей границы. Там же представлены эквипотенциали точного решения и криволинейная сетка – результат аналитического продолжения. При принятой нормировке кривая  $\bar{\varphi} = 0$  соответствует аноду.

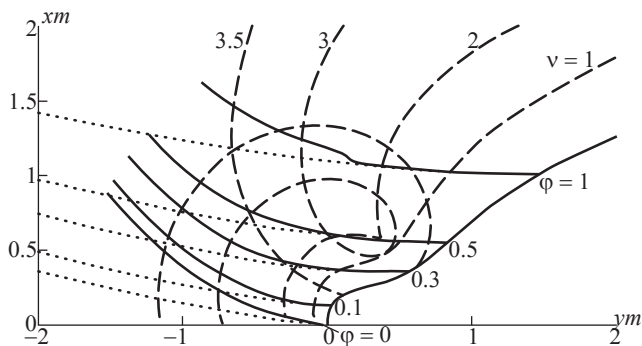


Рис. 12. Решение для плоского магнетрона во внешней области, система  $l, s, \gamma = 15, T$ -режим эмиссии; пунктирные кривые – точное решение, сплошные – параксиальное решение;  $v = \text{const}$  – координатные линии системы  $u, v$ .

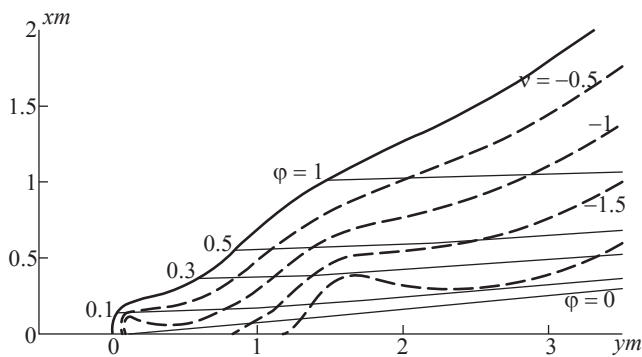


Рис. 13. Решение для плоского магнетрона во внутренней области, система  $l, s, \gamma = 15, T$ -режим эмиссии.

Во внутренней области (рис. 13) самопересекающиеся линии  $v = \text{const}$  вблизи катода  $x_m = 0$  не позволяют просчитать кривую  $\varphi = 0$  точного решения дальше  $y_m \sim 0.4$ , кривую  $\varphi = 0.1$  – дальше  $y_m \sim 1.8$ . В области, где точное решение построено, параксиальное приближение обнаруживает хорошее совпадение с ним. Во внешней области различие гораздо сильнее: параксиальные кривые имеют большую кривизну, а отсутствие гладкости линии  $\varphi = 1$  является следствием пересечения нормалей

из разных точек контура. Сетка  $u, v$  однозначна при  $v \leq 1$ , на линии  $v = 2$  образуется острие, пре-  
вращающееся в петлю при  $v = 3$ .

На рис. 14 приведены результаты расчетов для внешней области в случае эмиссии в  $\rho$ -режиме ( $\gamma = 0$ ). Максимальное отличие от точной кривой имеет параксиальная эквипотенциаль  $\varphi = 0$ , причем область близости приближенного и точного решений уменьшается по мере убывания значения  $\varphi$  от  $\varphi = 1$ .

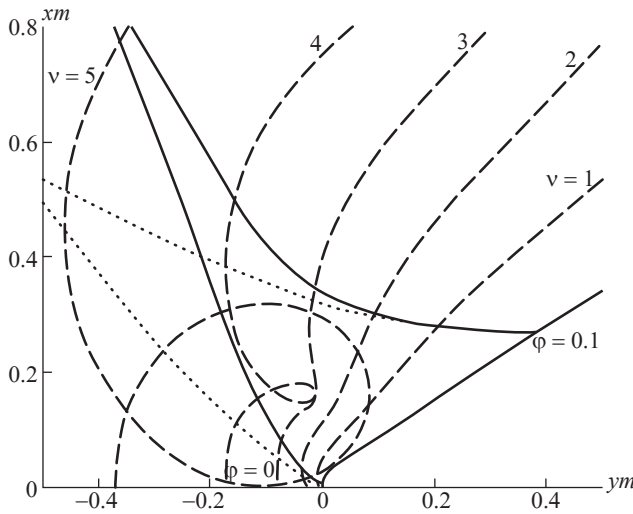


Рис. 14. Решение для плоского магнетрона во внешней области, система  $l, s, \gamma = 0$ , эмиссия в  $\rho$ -режиме; пунктирные кривые – точное решение, сплошные – параксиальное решение.

*Решение с траекториями-окружностями.* Электронный поток описывается элементарными функциями [28], а выражение для потенциала в лапласовской области содержит определенный интеграл [26]

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2R^2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2}, \quad \varphi_{,R} = -\frac{1}{R^3} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2}; \\ \varphi(u, v) &= \frac{1}{2} r^{4/3}(u, v) \cos \frac{4}{3} \vartheta(u, v) + \\ &+ \int_0^v r^{4/3}(u, \xi) \cos \frac{4}{3} \vartheta(u, \xi) d\xi; \quad u = \psi, \quad v = -\ln R; \\ r^2(u, \xi) &= \left( \sin \frac{3u}{2} \operatorname{ch} \frac{3\xi}{2} \right)^2 + \left( \cos \frac{3u}{2} \operatorname{sh} \frac{3\xi}{2} \right)^2, \\ \vartheta &= \operatorname{Arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{3u}{2} \operatorname{th} \frac{3\xi}{2} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Решение в форме (1) с точным значением  $\varphi_i$  для границы  $R_e = 1$  описывается формулой (рис. 15)

$$\varphi = \frac{1}{2R^2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4R^2} \sin^{-2/3} \frac{3\Psi}{2} \left[ \frac{1}{2} (R^2 - 1) - R^2 \ln R \right]. \quad (60)$$

В системе  $l, s$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} + \left( \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} \right) s + \\ &+ \frac{1}{4} \sin^{-2/3} \frac{3\Psi}{2} \left( -\cos^2 \frac{3\Psi}{2} + 5 \sin^2 \frac{3\Psi}{2} \right) s^2; \quad (61) \\ l &= \psi, \quad s = 1 - R. \end{aligned}$$

В работе [29] показано, что точность приближенного решения может зависеть от смысла поперечной координаты, не меняющей вида координатных линий (преобразование перемаркировки). В системе  $\xi = \Psi, \eta = \ln R$  решение принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} - \left( \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} \right) \ln R - \\ &- \frac{1}{4} \sin^{-2/3} \frac{3\Psi}{2} \left( \cos^2 \frac{3\Psi}{2} - 3 \sin^2 \frac{3\Psi}{2} \right) \ln^2 R. \end{aligned} \quad (62)$$

На рис. 16 результаты расчетов по формулам (61), (62) сравниваются с точным решением (59). Распределение потенциала на оси симметрии для решений (59)–(62) показано на рис. 17. В табл. 2

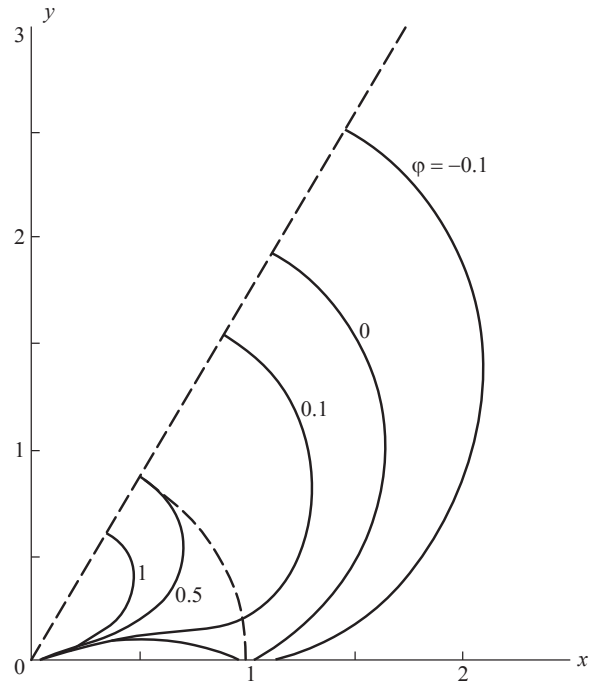
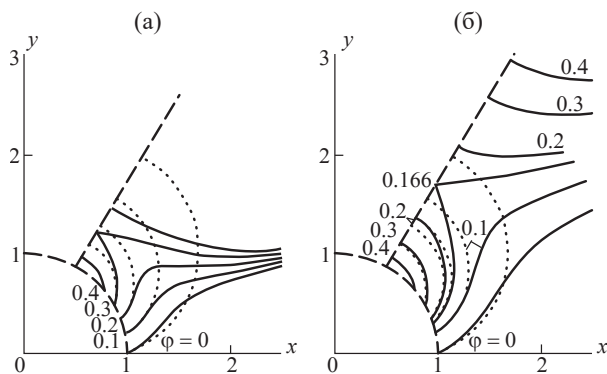
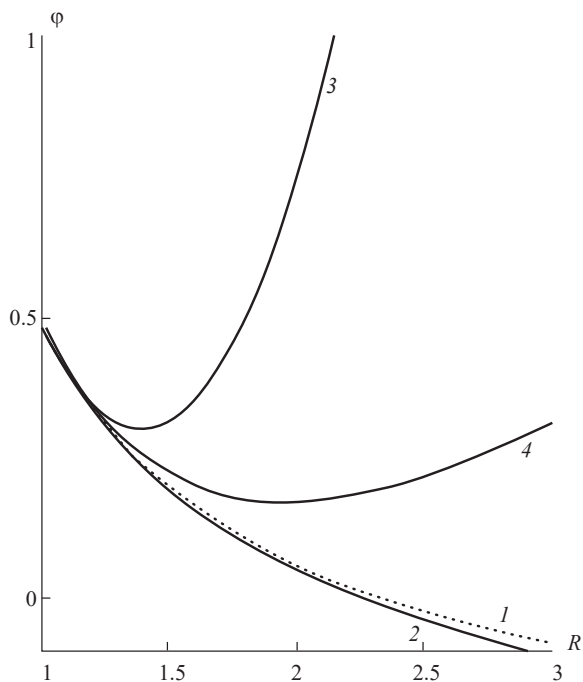


Рис. 15. Решение с траекториями-окружностями в форме (1) с точным значением  $\varphi$ , модель (60)



**Рис. 16.** Решение с траекториями-окружностями: а – система  $1 = \psi, s = 1 - R$ , модель (61); б – система  $\psi, \ln(R)$ , модель (62); пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модели (61) и (62).



**Рис. 17.** Решение с траекториями-окружностями, распределение потенциала на оси симметрии для различных моделей: 1 – точное решение, 2 – модель (60), 3 – модель (61), 4 – модель (62).

приведены координаты нулевой эквипотенциали, рассчитанные на основании разных моделей.

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Задачи с гиперболической и эллиптической границами позволяют оценить эффективность решения в форме (1) при однозначной криволинейной

**Таблица 2.** Координаты  $R = R(\psi)$  эквипотенциали  $\varphi = 0$

$\psi$ , град	$R$ , точное решение	$R$ , модель (60)	$R$ , модель (61)	$R$ , модель (62)
0.051	1.0	1.0	1.0	1.0
5	1.201	1.180	1.161	1.171
10	1.383	1.348	1.300	1.326
15	1.548	1.505	1.457	1.480
20	1.698	1.649	1.982	1.649
25	1.832	1.779		1.875
30	1.949	1.895		2.032
35	2.049	1.995		
40	2.131	2.078		
45	2.196	2.143		
50	2.243	2.191		
55	2.271	2.220		
60	2.281	2.229		

сетке. Поле в случае гиперболы имеет более сложную структуру (образование сепаратрисы) и в качественном отношении воспроизводится обеими моделями (37), (38), рис. 3, 4 (точное и параксиальное выражения для  $\varphi_i$ ). Аналогичные приближения для эллипса описываются формулами (47), (48) и рис. 9, 10. Модель (48) с точным значением  $\varphi_i$  имеет меньшую ошибку в окрестности вершины с большей кривизной, причем из рис. 9, 10 видно, как уменьшается отличие от точного решения по мере убывания кривизны в начальной точке границы. Подобное утверждение для гиперболы в области сепаратрисы менее очевидно из-за сложной картины поля. В этой области (см. рис. 7) все модели заметно отличаются от точного решения, причем модель ( $l, s$ ), (41), рис. 5 не воспроизводит эквипотенциаль-сепаратрису. Кривые с бóльшим значением  $\varphi$  (см. рис. 7,  $\varphi = 2.5$ ) получают ближе к точной кривой при использовании модели ( $l, s$ ) и системы с трансляцией (43).

Из рис. 12, 13 видно, что координаты  $l, s$  с хорошей точностью обеспечивают формирование узкой

вырезки из плоского магнетрона как во внешней, так и во внутренней областях границы. В практических задачах подобного типа (планарный гиротрон [27]) кривая  $\varphi = 0$  должна быть скорректирована, исходя из соотношения приближенного и точного решений (см. рис. 12) с использованием результатов теории антипараксиальных разложений [5, 6].

Решение с траекториями-окружностями отличается от практических задач с диодной оптикой наличием оси симметрии и соответствующей структурой поля. Из рис. 15 видно, что форма (1) оказалась весьма удачной: ошибка в определении линии  $\varphi = 0$  в точке максимального удаления от границы пучка при использовании системы  $R, \psi$  составляет 1.3%. Система  $l, s$  приводит к образованию сепаратрисы, отсутствующей в точном решении, и замене монотонного убывания потенциала на оси симметрии на зависимость с минимумом. Трансформация поперечной координаты от  $1-R$  к  $\ln R$  повышает точность приближенного решения, не меняя его качественного характера (рис. 17). Приемлемое отличие от точного результата в координатах  $\psi, \ln R$  имеет место в полосе порядка 0.5, в то время как в системе  $l, s$  она втрое уже. Разумная толщина пучка может составлять 0.17, 0.05 соответственно.

Проведенное рассмотрение тестовых задач без учета толщины пучка дает уровень ошибки, обусловленной предположениями параксиальной теории в задаче расчета формирующих электродов. В практических случаях к ней будет добавляться ошибка, связанная с приближенным описанием электронного потока [30].

Особенности, свойственные эталонным тестовым задачам (эмиссия с плоскости, обращение  $h_1$  в нуль, а  $\xi$  — в бесконечность, плоскости симметрии) не позволили в полной мере (исключение — трансляция равнобочной гиперболы вдоль линии симметрии) оценить эффективность предлагаемых в разд. 2 систем с растяжением и трансляцией границы, которые, тем не менее, обладают несомненным качеством однозначности криволинейной сетки.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликтов интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В. А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. Кормилицын Б. Т., Овчаров В. Т. // РЭ. 1960. Т. 5. № 7. С. 1112.
3. Овчаров В. Т. // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
4. Овчаров В. Т., Пензяков В. В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 8. С. 1651.
5. Сыровой В. А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
6. Syrovoy V. A. Theory of Intense Beams of Charged Particles. Amsterdam; N.Y.; Tokyo: Elsevier, 2011.
7. Harker K. J. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 12. P. 2165.
8. Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1486.
9. Мануилов В. Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 11. С. 2425.
10. Овчаров В. Т. // РЭ. 1967. Т. 12. № 12. С. 2156.
11. Овчаров В. Т., Пензяков В. В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 9. С. 1897.
12. Сыровой В. А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 2. С. 185.
13. Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 7. С. 804.
14. Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1221.
15. Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 12. С. 1323.
16. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2024. Т. 69. № 9. С.
17. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2024. Т. 69. № 3. С. 260.
18. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62B. № 355. P. 431.
19. Rosenblatt J. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 8. P. 1371.
20. Kirstein P. T. // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
21. Kent G. // Communic. Electr. 1960. V. 79. № 48. P. 144.
22. Pöschl K., Veith W. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 3. P. 1013.
23. Сыровой В. А. // РЭ. 1993. Т. 38. № 3. С. 481.
24. Цимринг Ш. Е. // Радиопизика. Изв. вузов. 1977. Т. 20. № 10. С. 1550.
25. Tsimring Sh. E. Electron Beams and Microwave Vacuum Electronics. US: A John Wiley&Sons, 2006.
26. Lomax R. J. // J. Electr. Contr. 1959. V. 7. № 6. P. 482.
27. Manuilov V. N., Zaslavsky V. Yu., Ginzburg N. S. et al. // Phys. of Plasmas. 2014. V. 21. P. 023106.
28. Meltzer B. // J. Electr. Contr. 1956. V. 2. № 2. P. 118.
29. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
30. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1209

## PARAXIAL MODEL IN THEORY OF DENSE ELECTRON BEAMS FORMATION

**T. M. Saprionova\*, V. A. Syrovoy\***

*All-Russian Electrotechnical Institute – branch of the Russian Federal Nuclear Center  
All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after academician E.I. Zababakhin,  
Krasnokazarmennaya Str. 12, Moscow, 111250 Russian Federation  
\*E-mail: red@cplire.ru*

Received December 23, 2023, revised March, 15, 2024, accepted March, 25, 2024

Two variants of orthogonal curvilinear system for dense electron beam formation are discussed in the paper. Testing calculations are carried out using some exact solutions for comparison with paraxial approximation.

*Keywords:* beam forming electrodes, paraxial model, orthogonal curvilinear system