

**К 85-ЛЕТИЮ
ДМИТРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ЛУКИНА**

УДК 537.87

**ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН
ВЫСОКИХ ЧАСТОТ В СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТОМ
ИОНОСФЕРНОМ РАДИОКАНАЛЕ**

© 2023 г. Н. Н. Зернов^а, М. А. Бисярин^{а, *}, В. Э. Герм^а

^а Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация

*E-mail: m.bisarin@spbu.ru

Поступила в редакцию 29.01.2023 г.

После доработки 29.01.2023 г.

Принята к публикации 27.03.2023 г.

Разработан специальный аналитический метод описания процессов распространения высокочастотных электромагнитных волн, излучаемых точечным вертикальным диполем с поверхности идеально проводящей Земли, в регулярной сферически-слоистой фоновой ионосфере. В качестве базового получено представление волнового поля в виде интеграла по совокупности волновых компонент, каждая из которых связана с определенной лучевой траекторией. Такой подход позволяет аналитически учесть влияние среднемасштабных трехмерных включений в фоновую ионосферу как дополнительный набег фазы волновой компоненты с учетом искажения ее лучевой траектории и численно рассчитать эффект фокусировки волнового поля.

DOI: 10.31857/S0033849423060189, **EDN:** XOJBPL

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительное внимание исследователей привлекают задачи распространения высокочастотных полей в околоземном пространстве при наличии среднемасштабных локальных неоднородностей электронной плотности ионосферы. В таких условиях могут возникать локальные фокусировки высокочастотного (ВЧ) поля, обусловленные присутствием локальных ионосферных неоднородностей. Базовой задачей для описания эффектов фокусировок ВЧ-поля подобными неоднородностями, очевидно, является задача о возбуждении поля в сферически-симметричном приземном волноводе. Она рассматривается в данной работе. Результаты, полученные здесь, в дальнейшем используются при анализе эффектов локальных фокусировок ВЧ-полей среднемасштабными неоднородностями электронной плотности ионосферы.

Следует подчеркнуть, что в отличие от задач о распространении низкочастотных полей в приземном сферическом волноводе Земля–ионосфера [1, 2], где принято рассматривать распространение поля в вакуумном сферическом слое, ограниченном двумя сферическими поверхностями (ионосфера и Земля), характеризующимися своими импедансами, в задачах распространения ВЧ-полей, очевидно, должна учитываться, по меньшей мере, существенная зависимость электрон-

ной плотности фоновой ионосферы от высоты над поверхностью Земли. В таком протяженном слое могут также присутствовать среднемасштабные (10...100 км) локальные неоднородности электронной плотности.

Данная работа посвящена построению строгого асимптотического решения фоновой задачи для произвольно заданного вертикального распределения электронной плотности ионосферы.

Традиционно теоретические исследования процессов распространения электромагнитных волн ВЧ-диапазонов в околоземном пространстве базировались на применении метода геометрической оптики и подразумевали построение полной лучевой картины процесса. Применение этой методики усложнялось наличием специфических свойств ионосферы, таких как немонотонность вертикальных профилей электронной концентрации, порожденная геомагнитным полем анизотропия, и спонтанное возникновение разномасштабных неоднородностей вследствие разнообразных гео- и гелиофизических процессов. Расчеты амплитудных характеристик полей в неоднородной магнитоактивной ионосфере и многочисленные примеры применения метода прямого численного интегрирования уравнений лучей для решения разнообразных прямых и обратных задач акустики, сейсмологии и радиофизики представлены в работах [3, 4]. Последующие исследования

выявили недостаточность стандартного математического аппарата общей теории волновых процессов и инициировали разработку принципиально новой методики.

Важным проявлением неоднородных свойств ионосферы является формирование каустических поверхностей и фокусировка ВЧ-радиоволн. Для описания этих явлений весьма эффективным оказалось применение волновой теории катастроф [5]. Математическое моделирование фокусировки при распространении радиоволн в ионосфере Земли на основе волновой теории катастроф и канонического оператора Маслова осуществлено в работе [6] с помощью расширенной бихарактеристической системы в фазовом пространстве. История развития и применения дифракционно-лучевой теории к задачам распространения электромагнитных волн в ионосферной плазме представлена в обзоре [7]. Здесь проанализировано формирование и изучены свойства поля в областях каустических особенностей в неоднородной ионосфере, рассмотрена пространственно-временная фокусировка при распространении сигналов в диспергирующей ионосфере, отмечены особенности при прохождении и отражении волн от ионосферных слоев. Численная реализация метода Маслова для интегральных представлений, обобщающих представления геометрической оптики при наличии фокусировок, изложена в работе [8].

Явление фокусировки волновых ВЧ-полей в ионосфере на локальных среднemasштабных неоднородностях в последнее время стало привлекать особое внимание исследователей. Основными способами описания этого явления являются построение лучевой картины [9–12] и численное решение полной волновой задачи с привлечением метода множественных фазовых экранов [13].

Следует отметить, однако, что несколько десятилетий назад уже был разработан альтернативный подход для описания названного явления. Ключевым моментом этого подхода является представление волнового ВЧ-поля в неоднородной среде в виде интеграла по некоторому специальному параметру. Неоднородность характеризуется иерархией масштабов. Наибольший из них описывает зависимость от пространственных координат свойств фоновой ионосферы, меньшие масштабы — порядка десятков и сотен километров — относятся к среднemasштабным неоднородностям. В экспериментах по созданию в ионосфере искусственных неоднородностей электронной концентрации величина этого масштаба уменьшается до нескольких километров. Анализ рассеяния ВЧ-волн на неоднородностях столь малого масштаба требует учета дифракционных эффектов, если волновой параметр существенно отличен от нуля.

Упомянутое выше интегральное представление волнового поля в приближении рассеяния вперед было впервые построено в работе [14]. Здесь волновое ВЧ-поле в ионосфере со среднemasштабными неоднородностями представлено в виде разложения по дифракционным компонентам. В последовавшей затем серии работ [15–19] этот подход был усовершенствован и применен к исследованию рассеяния ВЧ-полей на среднemasштабных (протяженностью от десятков до сотен километров) неоднородностей электронной плотности ионосферы в модели двумерных фоновых ионосферы и локальных неоднородностей.

В отличие от некоторых других известных интегральных представлений ВЧ-полей в неоднородной среде [20–23], построенных из элементарных волн геометрикооптического типа, названное выше интегральное представление состоит из компонента, каждая из которых является дифрагирующей волной. Таким образом, автоматически учитывалась дифракция каждой отдельной компоненты на локальных неоднородностях в случае отличного от нуля волнового (дифракционного) параметра. Это достигалось в результате применения теории возмущений для комплексной фазы компонент интегрального представления поля с допущением многократного рассеяния в направлении распространения и с пренебрежением обратного рассеяния. Следует отметить, что в предельном случае нулевого дифракционного параметра волновой компоненты это интегральное представление автоматически сводится к частным случаям интерференционного [22] или осцилляторного [23] интегралов, в которых не учитываются дифракционные явления на ионосферных локальных среднemasштабных неоднородностях.

1. ЗАДАЧА О ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ

Распространение радиоволн высоких частот в окрестности земной поверхности — это классическая задача, исследовавшаяся в [1, 2, 24–29] и многими другими авторами. Отметим среди них изучение специфики формирования каустик обыкновенной и необыкновенной волн [30] и влияния экваториальной аномалии ионосферы на поляризационные характеристики радиоволн ВЧ-диапазона [31].

Построение поля вертикального диполя в сферически симметричной ионосфере осуществляется в сферической системе координат (r, ϑ, φ) с началом отсчета в центре Земли с радиусом R_0 . Вертикальный диполь с дипольным моментом $\mathcal{P}$, ориентированный вдоль полярной оси, помеща-

ется на полярной оси на поверхности Земли в точке с координатами $(R_e, 0, 0)$. При таком задании излучателя векторный электрический потенциал Герца $\vec{\mathcal{H}}$ имеет единственную r -компоненту, которая при этом зависит от координат (r, ϑ) и не зависит от азимутального угла φ . Эта компонента $\mathcal{H}(r, \vartheta)$ получается как решение известного (см., например, [1, (17.1)–(17.5)] и в ряде других изданий) дифференциального уравнения в частных производных, а затем радиальная компонента электрического поля выражается в соответствии с

$$E_r(r, \vartheta) = -\frac{1}{r^2 \epsilon_0 \epsilon_m(r)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \mathcal{H}(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right), \quad (1)$$

где $\epsilon_m(r)$ – это относительная диэлектрическая проницаемость сферически симметричной ионосферы, а константа ϵ_0 – используемая в системе СИ диэлектрическая проницаемость вакуума.

Радиальная компонента вектора Герца представима в виде ряда

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, \vartheta) &= \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) u_n(r, \vartheta) = \\ &= \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\cos \vartheta) R_n(r) \end{aligned} \quad (2)$$

с выделением угловой зависимости от $P_n(\cos \vartheta)$ – полинома Лежандра порядка n от аргумента $\cos \vartheta$. Радиальная функция подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 R_n}{dr^2} - \frac{1}{\epsilon_m(r)} \frac{d\epsilon_m}{dr} \frac{dR_n}{dr} + \\ &+ \left[k^2 \epsilon_m(r) - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] R_n = -\frac{\delta(r-b)}{r^2} \end{aligned} \quad (3)$$

с точечным дипольным источником. В дальнейшем ограничимся случаем, когда источник размещен на поверхности Земли: $b = R_e$. Предположим также, что земная поверхность является идеальным проводником, так что граничное условие на ней следует задать в виде

$$R'_n(R_e) = 0. \quad (4)$$

С физической точки зрения это означает, что электрическое поле не проникает сквозь поверхность Земли и коэффициент отражения на границе раздела равен единице по абсолютной величине. Отметим, что такое ограничение вполне оправданно для целей данной работы: оно не искажает структуру лучевых ВЧ-траекторий в фоновой сферически симметричной ионосфере и процесс рассеяния волнового поля на среднемасштабных локальных неоднородностях, однако делает существенно менее громоздкими последующие вычисления.

Уравнение (3) имеет большую общность, так как допускает неоднородность среды. В случае однородной среды в монографии [1] соответствующая задача рассмотрена для открытой сферы, а в [2] – для сферически симметричного волновода с вакуумной полостью между его стенками. Частный случай уравнения (3) с радиальной зависимостью диэлектрической проницаемости $\epsilon_m(r)$ исследовался авторами [1, 2] при рассмотрении эффекта суперрефракции, обусловленной наличием непосредственно над земной поверхностью вертикально неоднородного бездисперсионного слоя нейтральной атмосферы. В этих работах был введен эквивалентный радиус Земли, и реальная задача сводилась к случаю однородной среды над земной поверхностью. Такой подход, однако, представляется неприменимым для целей данной работы.

В настоящей работе рассмотрение формально ограничено сферически-симметричной фоновой средой. При этом структура поля лучей, порожденного точечным источником в сферически-симметричной среде, является базой и в дальнейшем может использоваться для анализа эффектов, обусловленных присутствием в ионосфере локальных среднемасштабных неоднородностей электронной плотности. Последние, в свою очередь, могут являться причиной появления эффектов многолучевости и эффектов локальных фокусировок высокочастотного поля. В плане учета локальных неоднородностей следует указать, что данная методика практически без изменений распространяется на случай, когда локальная неоднородность (неоднородности) электронной плотности ионосферы не “накрывает” особенности поля лучей (каустики, каустические острия и т.п.), сформированные распределением электронной плотности фоновой ионосферы. Это дает возможность ограничиться при рассмотрении эффектов рассеяния поля крупномасштабными локальными неоднородностями лишь интегрированием фаз поля вдоль всех лучей, соединяющих корреспондирующие точки. Альтернативный случай, когда упомянутые траектории “накрывают” особенности поля невозмущенных лучей, выходит за рамки данного рассмотрения и требует дополнительного изучения. Кроме того, диэлектрическая проницаемость ионосферы как на земной поверхности $r = R_e$, так и вблизи нее полагается равной единице ($\epsilon_m(R_e) = 1$), так что неоднородный ионосферный слой начинается с высот порядка 100 км над Землей, что вполне типично описывается широко используемыми моделями ионосферы, например NeQuick или IRI. Совершенствование моделей ионосферы ведется также в плане учета частоты соударений [32] и численного моделирования амплитудных карт ВЧ-полей [33].

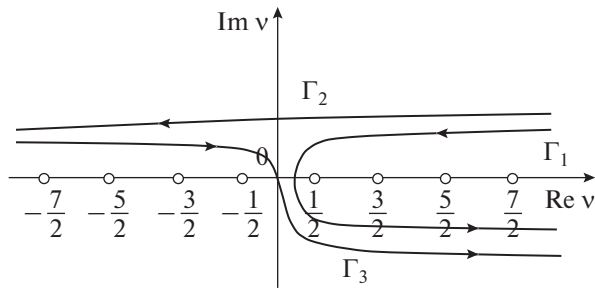


Рис. 1. Элементы контура интегрирования для вычисления $S(r, \vartheta)$ по формуле (7).

Уравнение (3) в действительности представляет собой уравнение для функции Грина. Специфическая трудность рассматриваемой проблемы вызвана тем, что граничное условие (4) задается на поверхности Земли, но там же помещается и сингулярный источник электромагнитной волны. Чтобы разделить эти точки, уравнение (3) следует сначала рассмотреть и решить при произвольном расположении источника $r = b > R_e$ над поверхностью Земли, а затем применить процедуру предельного перехода $b \rightarrow R_e$. В процессе решения обосновывается пренебрежение слагаемыми, содержащими производные от относительной диэлектрической проницаемости (подробнее см. в Приложении). Результатом является следующее выражение для зависимости волнового поля от радиальной координаты:

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\mathcal{P}}{\pi \epsilon_0 \epsilon_m^{3/4}(r) R_e r^2} \sqrt{\frac{r}{R_e}} S(r, \theta), \quad (5)$$

здесь

$$S(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1) P_n(\cos \theta) \times \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr\sqrt{\epsilon_m(r)})}{kR_e \left(H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(kR_e) - H_{n+\frac{3}{2}}^{(1)}(kR_e) \right) + H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR_e)}, \quad (6)$$

$H_v^{(1)}(\xi)$ – функции Ганкеля первого рода.

Стоит особо отметить, что решение (5), (6) расширяет круг возможных сферически симметричных задач распространения радиоволн, допускающих строго асимптотическое решение для большого разнообразия ионосферных структур с радиальной зависимостью над сферической поверхностью Земли. К тому же оно автоматически сводится к хорошо известному строгому решению в случае однородной среды ($\epsilon_m = \text{const}$) над сферической Землей [1].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ

Как показано в [1], ряд (6) сходится медленно и непригоден для практических расчетов. Этот недостаток можно исправить, если заменить дискретную сумму контурным интегралом, такая процедура известна как преобразование Ватсона [25, 26], его результатом является интегральное выражение [1]. Преобразование Ватсона ряда Дебая заключается во введении полуцелой перемен-

ной $n' = n + \frac{1}{2}$, замене дискретной переменной n' ее континуальным аналогом $v = n'$ и выполнении последующих стандартных приемов преобразования Ватсона. В результате вместо дискретного ряда получается интегральное представление

$$S(r, \theta) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{v \left(v^2 - \frac{1}{4} \right)}{\cos \pi v} P_{v-\frac{1}{2}}(\cos(\pi - \theta)) \times \frac{H_v^{(1)}(kr\sqrt{\epsilon_m(r)})}{kR_e \left(H_{v-1}^{(1)}(kR_e) - H_{v+1}^{(1)}(kR_e) \right) + H_v^{(1)}(kR_e)} dv, \quad (7)$$

более удобное для последующего анализа. Интегрирование по формуле (7) производится вдоль контура Γ_1 , представленного на рис. 1. Тем не менее для дальнейшего рассмотрения этого интеграла контур интегрирования преобразуется в контур вдоль вещественной оси в бесконечных пределах $(-\infty, +\infty)$. Преобразование выполняется последовательно в два шага. Сначала интеграл по контуру Γ_1 преобразуется в сумму двух интегралов по контурам Γ_2 и Γ_3 . Привлекая свойства симметрии функций Лежандра и Ганкеля, можно показать, что подынтегральное выражение приобретает противоположный знак при замене переменной интегрирования v на $(-v)$, следовательно, интеграл вдоль кривой Γ_3 обращается в нуль. Таким образом, окончательно электрическое поле $E_r(r, \vartheta)$ выражается посредством интеграла (7) вдоль кривой Γ_2 которая может быть деформирована и совмещена с вещественной осью. Именно в таком виде это представление и используется далее.

Подставив в формулу (7) асимптотические выражения функций Лежандра и Ганкеля [34], а также введя пропорциональную v новую переменную интегрирования $\alpha = v/kR_e$ получаем общее

представление для радиальной компоненты электрического поля

$$E_r(r, \theta) = \frac{\mathcal{P}k(kR_e)^{5/2} \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)}{\pi\epsilon_0\epsilon_m^{3/4}(r)r^2\sqrt{2\pi\sin\theta}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\left((kR_e\alpha)^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{kR_e\alpha - \frac{1}{2}}} \frac{\exp[i\psi_0(r, \vartheta, \alpha)]}{\sqrt[4]{\epsilon_m(r) - \frac{R_e^2}{r^2}\alpha^2} \sqrt[4]{1-\alpha^2}} d\alpha \quad (8)$$

для односкачковой трассы распространения. (Случай многоскачкового распространения также может быть рассмотрен в рамках предложенной процедуры.) Фазовые функции каждой α -компоненты в (8) в случае односкачковой трассы распространения

$$\psi_0(r, \vartheta, \alpha) = k \left(\int_{R_e}^{\tilde{r}} \sqrt{\epsilon_m(r') - \frac{R_e^2}{r'^2} \alpha^2} dr' + \int_r^{\tilde{r}} \sqrt{\epsilon_m(r') - \frac{R_e^2}{r'^2} \alpha^2} dr' + S_e \alpha \right) \quad (9)$$

позволяют явно выделить различные составляющие процесса. Первое слагаемое соответствует распространению волновой компоненты вертикально вверх от расположенного на поверхности Земли источника, переменная интегрирования α связана с направлением излучения. Эта волновая компонента достигает точки поворота $\tilde{r}(\alpha)$ и затем распространяется вниз до точки с координатами (r, ϑ) , что характеризуется вторым слагаемым. В частности, лучевая траектория может заканчиваться и на земной поверхности в точке с координатами $(R_e, \vartheta = S_e/R_e)$. Третье слагаемое соответствует набегу фазы вдоль земной поверхности.

Интеграл (8) выражает волновое поле в терминах волновых компонент геометрооптического типа, маркируемых параметром α . Он характеризует случай более низких частот, когда волновые компоненты с параметром α совершают поворот книзу в ионосфере благодаря явлению рефракции. Значение радиальной координаты $\tilde{r}$ определяется точкой поворота асимптотики Дебая функций Ганкеля [34]. При этом каждая α -компонента приобретает дополнительный набег фазы, соответствующий волне, распространяющейся вниз. Строго говоря, асимптотическое решение методом Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ) для E_r неприменимо в окрестности точки поворота $\tilde{r}$, где равномерная асимптотика должна выражаться посредством функций Эйри. Тем не менее сингулярность в выражении (8) при $r \rightarrow \tilde{r}$ является интегрируемой и, как подробно исследовано в [19], а также

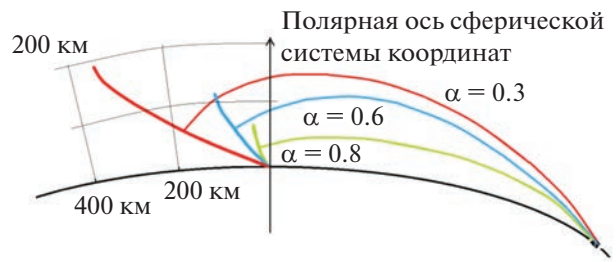


Рис. 2. Волновые фронты α -компонент, проходящие через точку источника, и лучевые траектории, достигающие точку наблюдения.

вкратце обсуждалось в [17] для похожей проблемы, не приводит к существенной погрешности при дальнейшем использовании ВКБ-представления (8).

Выражаемое формулами (8), (9) решение, очевидно, не зависит от угла φ сферической системы координат. Это означает, в частности, что в трехмерном пространстве каждая α -компонента интегрального представления (8), (9) является цилиндрически симметричной волной, поэтому и интегральное представление поля $E_r(r, \vartheta)$ в целом выражено в терминах цилиндрически симметричных волновых компонент. Каждая волновая компонента распространяется до точки наблюдения (r, ϑ, φ) в плоскости $(r, \vartheta, \varphi = \text{const})$ вдоль лучевой траектории, определяемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \pm \frac{\alpha R_e}{r^2 \sqrt{\epsilon_m(r) - \frac{R_e^2}{r^2} \alpha^2}}. \quad (10)$$

Здесь знак плюс соответствует распространению волны вверх, знак минус — вниз.

Для дальнейшего уточнения свойств волновых компонент полного поля в интеграле (8) с фазами (9) для каждой α -компоненты строится лучевая траектория, достигающая точки наблюдения (r, ϑ) и исходящая ортогонально из соответствующего значения α воображаемого волнового фронта, как показано на рис. 2. При этом все воображаемые волновые фронты содержат реальное физическое положение точечного источника $(R_e, 0, 0)$. В соответствии с рис. 2 для нахождения точки выхода лучевой траектории каждой α -компоненты из ее начального фронта необходимо решить задачу для уравнения (10) в обратном направлении от заданной точки наблюдения, причем диапазон ϑ должен включать и отрицательные значения. Физическая альтернативная интерпретация заключается в том, что направления лучевых траек-

торий при $\vartheta > 0$ соответствуют фактическому распределению фаз различных α -компонент вдоль полярной оси сферической системы координат. Утверждая это, следует осознавать, что такая интерпретация фаз излучаемых α -компонент основывается на их ВКБ-структуре. Кроме того, следует также учитывать, что формально ВКБ-амплитуды сингулярны при $\vartheta \rightarrow 0$. Параметр α напрямую привязан к углу χ между полярной осью введенной сферической системы координат и нормалью к волновому фронту α -компоненты в месте расположения источника соотношением $\sin \chi = \alpha$. Наконец, интеграл по переменной α в (8) суммирует вклады в полное поле всех волновых компонент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом разработанного в данной работе аналитического метода решения задачи о поле вертикального электрического диполя, помещенного на поверхности идеально проводящей Земли, является представление поля в точке приемника в виде интеграла по совокупности волновых компонент, каждая из которых связана с определенной лучевой траекторией. Выражения (8), (9) приведены для случая, когда имеет место однократное отражение распространяющегося высокочастотного поля от ионосферы, однако аналогичные выражения легко могут быть выписаны и для транссионосферного распространения, траектория которого также выводится из уравнения (10) (со знаком “+” в правой части). Таким образом, этим методом могут быть описаны волновые поля как в верхнем, так и в нижнем поддиапазонах высокочастотного радиодиапазона.

Полученное интегральное представление для решения задачи в сферически симметричной фоновой ионосфере допускает аналитическую модификацию выражения для фазы (9), учитывающее как локальные отклонения электронной концентрации от фоновых значений, так и сопутствующие искажения лучевых траекторий всех волновых компонент. Тем самым открывается перспектива аналитического учета влияния среднemasштабных трехмерных ионосферных включений на процесс распространения и численной оценки вызываемых ими эффектов фокусировки ВЧ-полей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОСТРОЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

Определение радиальных функций $R_n(r)$ для точечного источника, помещенного на поверхности идеально проводящей земной поверхности,

требует привлечения специальных математических методов, которым и посвящено данное Приложение. Как указывалось в разд. 1, особую трудность рассматриваемой задаче придает то обстоятельство, что граничное условие (4) ставится при $r = R_e$, т.е. в точке сингулярности уравнения (3). Чтобы разделить эти две проблемы, следует сначала записать и решить уравнение (9) при расположении источника поля в некоторой произвольной точке $r = b > R_e$ над земной поверхностью:

$$\frac{d^2 R_n}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) R_n = -\frac{1}{b\xi} \delta(x - \xi), \quad (\text{П.1})$$

где введена вспомогательная независимая переменная $x = kr\sqrt{\varepsilon_m(r)}$, а параметр $\xi = kb\sqrt{\varepsilon_m(b)}$ соответствует значению этой переменной в точке источника. После нахождения решения уравнения (П.1) следует осуществить предельный переход при $b \rightarrow R_e$.

Легко убедиться, что однородное уравнение (П.1) имеет фундаментальную систему решений

$$R_n^{(0)}(x) = \sqrt{x} Z_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (\text{П.2})$$

где $Z_\nu(x)$ — цилиндрические функции порядка ν . Принимая временную зависимость волнового поля в виде $\exp(-i\omega t)$, в области над источником $x > \xi$ следует выбрать функции Ганкеля первого рода, поскольку именно ими описываются волны, распространяющиеся вверх. Поскольку в слое между поверхностью Земли и источником $R_e < x < \xi$ имеет место распространение как вверх, так и вниз, такая ситуация корректно описывается посредством функций Бесселя. Таким образом, частное решение уравнения (П.1) представляется выражением

$$R_n^{(1)}(x) = \frac{i\pi}{2b\xi} \left[\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \Theta(x - \xi) + \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \sqrt{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \Theta(\xi - x) \right] \quad (\text{П.3})$$

с использованием $\Theta(x)$ — функции Хевисайда.

Граничное условие, сформулированное в виде

$$R_n'(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \xi = kR_e \quad (\text{П.4})$$

может быть удовлетворено путем добавления функции (П.2) с должным образом подобранным коэффициентом. Нетрудно убедиться, что выражение

$$R_n^{\text{total}}(x) = \frac{i\pi}{2b\xi} \times \left[\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \Theta(x-\xi) + \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \sqrt{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \Theta(\xi-x) - \sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \frac{\left(\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \right)'}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'} \right] \quad (\text{П.5})$$

удовлетворяет как уравнению (П.1), так и граничному условию (П.4). Поскольку предметом данного исследования является пространство над земной

поверхностью, выделим из (П.5) соответствующую часть, обозначаемую как $R_n(x)$. После подстановки $b = R_e$ и $\xi = kR_e$ эта функция приобретает вид

$$R_n(x) = \frac{i\pi}{2R_e\xi} \left[\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) - \sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \sqrt{\xi} \frac{\left(\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi) \right)'}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'} \right] =$$

$$= \frac{i\pi}{2R_e\xi} \frac{\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'} \mathcal{W} \left[\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi), \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right] = -\frac{1}{R_e\xi} \frac{\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}{\left(\sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right)'}, \quad (\text{П.6})$$

где использовано известное значение вронскиана

$$\mathcal{W} \left[\sqrt{\xi} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi), \sqrt{\xi} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) \right] = \frac{2i}{\pi}.$$

Выражение для производной в знаменателе (П.6) может быть упрощено, и в результате получается

$$R_n(x) = -\frac{2}{R_e} \sqrt{\frac{x}{\xi}} \times \frac{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}{\xi \left(H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi) - H_{n+\frac{3}{2}}^{(1)}(\xi) \right) + H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\xi)}. \quad (\text{П.7})$$

В формулу (П.7) подставляется радиальная координата r , и в таком виде она используется в последующих аналитических преобразованиях. Следует отметить, что радиальная функция (П.7) полностью соответствует решению задачи о поле точечного источника над сферической идеально проводящей Землей в случае поверхностного импеданса $\delta = 0$ [1].

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность Д.С. Лукину за постоянное внимание к работе и пло-

дотворные дискуссии по широкому кругу научных проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. М.: Наука, 1991.
2. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение радиоволн в волноводе Земля–ионосфера и в ионосфере. М.: Наука, 1993.
3. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. // Космич. исслед. 1967. Т. 5. № 4. С. 593.
4. Спиридонов Ю.Г., Лукин Д.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 12. С. 1769.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2019. Т. 64. № 11. С. 1116.
6. Лукин Д.С., Палкин Е.А., Ипатов Е.Б. и др. // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 12/2. С. 29.
7. Растягаев Д.В., Палкин Е.А., Лукин Д.С. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64. № 8–9. С. 590.
8. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: Изд-во МФТИ, 1982.
9. Koval A., Chen Y., Stanislavsky A., Zhang Q.-H. // J. Geophysical Research – Space Phys. 2017. V. 122. P. 9092.
<https://doi.org/10.1002/2017JA024080>

10. Koval A., Chen Y., Stanislavsky A., Kashcheyev A., Zhang Q.-H. // J. Geophysical Research—Space Phys. 2018. V. 123. P. 8940.
11. Lynn K.J.W., Balan N., Klimenko M.V. et al. // J. Geophysical Research. Space Phys. 2020. V. 125. № 7. P. e2019JA027575.
<https://doi.org/10.1029/2019JA027575>
12. Резниченко А.И., Колосков Ф.В., Сопин Ф.Ф., Ямпольский Ю.М. // Радиофизика и радиоастрономия. 2020. Т. 25. № 2. С. 118.
<https://doi.org/10.15407/rpra.25.02.118>
13. Carrano C.S., Retterer J.M., Groves K.M. et al. // 2020 XXXIIIrd General Assembly and Scientific Symp. of the Int. Union of Radio Science. Rome. 29 Aug.—5 Sept. N.Y.: IEEE, 2020. Paper № 9232348.
<https://doi.org/10.23919/URSIGASS49373.2020.9232348>
14. Зернов Н.Н. // РЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1590.
15. Zernov N.N., Ghern V.E., Zaalov N.Yu., Nikitin A.V. // Radio Sci. 1992. V. 27. № 2. P. 235.
16. Zernov N.N., Lundborg B. The Statistical Theory of Wave Propagation and HF Propagation in the Ionosphere with Local Inhomogeneities. Uppsala: Swedish Inst. of Space Physics, 1993.
17. Zernov N.N., Lundborg B. // Radio Sci. 1996. V. 31. № 1. P. 67.
18. Воронцов А.В., Герм В.Э., Зернов Н.Н. Проблемы дифракции и распространения волн. Т. 25 / Под ред. Г.И. Макарова. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. С. 108.
19. Зернов Н.Н. // РЭ. 1994. Т. 39. № 2. С. 241.
20. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
21. Кравцов Ю.А. // Акуст. журн. 1968. Т. 14. № 1. С. 1.
22. Орлов Ю.И. // Труды МЭИ. 1972. Т. 119. С. 82.
23. Arnold J.M. // Radio Sci. 1982. V. 17. P. 1181.
24. Debye P. // Math. Ann. 1909. Bd. 67. № 4. S. 535.
25. Watson G.N. // Proc. Royal Soc. A. 1918. V. 95. № 666. P. 83.
26. Watson G.N. // Proc. Royal Soc. A. 1919. V. 95. № 673. P. 546.
27. Wait J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media. N.Y.: Pergamon Press, 1962.
28. Wait J.R. Lectures on Waves Propagation Theory. N.Y.: Pergamon Press, 1981.
29. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
30. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Бова Ю.И. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1160.
31. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Кутуза Б.Г. и др. // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2021. Вып. 680. С. 77.
32. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Михалёва Е.В., Растягаев Д.В. // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 117.
33. Крюковский А.С., Куркин В.И., Ларюнин О.А. и др. // РЭ. 2016. Т. 61. № 8. С. 794.
34. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.