РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 5, с. 482–486

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 621.382+621.391.822

ВЫВОДЫ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ТОКАМИ ВО ВНЕШНЕЙ ЦЕПИ И ПАРАМЕТРАМИ ОБРАЗЦОВ

С. Г. Дмитриев*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация

**E-mail: sgd@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.
После доработки 29.06.2022 г.
Принята к публикации 23.07.2022 г.

Рассмотрены различные способы вывода соотношений между токами во внешней цепи и изменениями параметров образцов, которые индуцируют эти токи. Соотношения такого рода обобщают теорему Шокли–Рамо и могут служить развитием законов Кирхгофа для электрических цепей.

DOI: 10.31857/S0033849423050042, **EDN:** UHNGGN

1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТОКАМИ ВО ВНЕШНЕЙ ЦЕПИ И ПАРАМЕТРАМИ ОБРАЗОВ

Впервые соотношения между токами, поступающими из внешней цепи на металлические электроды, и подвижными зарядами в вакууме были рассмотрены в общем виде для произвольного числа (N) электродов и любого количества подвижных и неподвижных зарядов, в рамках теоремы Шокли–Рамо (ТШР) [1, 2] и ее обобщений [3, 4]. Конвективный ток в вакууме с плотностью $\vec{j} = (t,\vec{r})$ индуцирует, в силу ТШР, во внешней цепи компоненту тока, втекающего в отдельный α-й электрод

$$I_{\alpha 0} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)}\vec{j})\,dV, \tag{1}$$

где

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1\alpha)}\big/\Phi_0 \tag{2}$$

– вспомогательное нормированное электрическое поле, $\varphi^{(1\alpha)}(\vec{r})$ и $\vec{E}^{(1\alpha)} = -\mathrm{grad}\varphi^{(1\alpha)}$ – соответственно вспомогательные потенциал и электрическое поле в той же системе, но без пространственных зарядов и с потенциалами электродов

$$\Phi_\beta^{(1\alpha)} = \delta_\beta^\alpha \Phi_0, \quad \Phi_0 = 1\ \text{В}, \tag{3}$$

где δ_β^α – символ Кронекера. Интегрирование проводится по всему пространству без электродов.

Случай одного (точечного) заряда q (в системе без других зарядов) анализировался в работах Шокли и Рамо [1, 2]. Этот заряд, двигающийся со скоростью $\vec{v}$ в точке $\vec{r}_0$, создает плотность тока

$$\vec{j}_0 = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{4}$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция. При этом индуцированная во внешней цепи компонента тока $I_{\alpha 0}$, втекающего в α-й электрод, равна

$$I_{\alpha 0} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)}\vec{j}_0), \quad dV = q(\vec{E}^{(\alpha)},\vec{v}). \tag{5}$$

Формулы особенно просты в случае двух плоскопараллельных электродов:

$$\vec{E}_\parallel^{(0)} = \vec{n}_0\big/d\,, \tag{6}$$

$$I_{0\parallel} = q(\vec{v},\vec{n}_0)\big/d\,, \tag{7}$$

где d – расстояние между электродами, $\vec{n}_0$ – вектор внешней нормали к поверхности одного их этих двух электродов (индекс “0”), направленный в сторону другого электрода. При приближении заряда к выбранному (индекс “0”) электроду имеем, очевидно, $(\vec{v},\vec{n}_0) < 0$, а $qI_{0\parallel} < 0$, т.е. ток из внешней цепи привносит в электрод заряд другого знака, экранирующий поле заряда q, а при удалении от электрода знаки заряда и тока совпадают. Нормаль ко второму электроду (индекс “1”) имеет другой знак $\vec{n}_1 = -\vec{n}_0$, поэтому ток, втекающий в этот электрод, имеет ту же величину, но другой знак

$$I_{1\parallel} = q(\vec{v},\vec{n}_1)\big/d = -I_{0\parallel}, \tag{8}$$

а сумма этих токов равна нулю. Это связано с тем, что заряд q индуцирует на электродах экранирующие заряды, а при его движении экранирующие заряды перераспределяются между электродами, но так, что полный экранирующий заряд сохраняется. Закон сохранения заряда должен выполняться, конечно, и в общем случае, что гарантируется уравнениями Максвелла, которые используются при выводе формул и из которых этот закон вытекает (см., например, [5, 6]).

Обобщение ТШР на системы с диэлектриками проводилось в ряде работ [7–15]. При этом анализировалась возможность распространения ТШР на неоднородные локально анизотропные системы с поляризацией, в которых связь между электрической индукцией $\vec{D}(t,\vec{r})$ и полем $\vec{E}(t,\vec{r})$ имеет тот или иной характер. Например (система единиц СИ),

$$\vec{D} = \vec{P} + \vec{D}', \tag{9}$$

где $\vec{P}(t,\vec{r})$ – поляризация (плотность дипольного момента), которая может быть связана со спонтанной поляризацией в пироэлектриках (см., например, [6]), с различными неоднородностями (включая границы раздела и поверхности), с дефектными образованиями атомного масштаба, с отдельными молекулами и т.п., т.е. с той частью поляризации в образце, которая может существовать и без поля, а слагаемое $\vec{D}'$ призвано описывать остальную, индуцированную полем, часть индукции. Например,

$$D_i' = \varepsilon_0\varepsilon_{ik}E_k, \tag{10}$$

где $\varepsilon_{ik}(t,\vec{r})$ – тензор (относительной) диэлектрической проницаемости, а ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума (по повторяющимся тензорным индексам предполагается суммирование). Связь между индукцией и полем может иметь и более общий характер (см., например, [5, 6]), а деление на слагаемые в (9) тоже достаточно условно. Поэтому предпочтительны формулы общего характера, в которых связь между индукцией и полем не конкретизирована.

Итак, выражение для полного тока на отдельный α-й электрод, справедливое и для систем с диэлектриками, имеет вид

$$I_\alpha = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)}, \vec{j}_п)\, dV, \tag{11}$$

где $\vec{j}_п$ – полный ток (СИ)

$$\vec{j}_п = \vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t, \tag{12}$$

а нормированное поле $\vec{E}^{(\alpha)}$ в этом случае имеет тот же смысл, что и выше. ТШР, очевидно, соответствует вкладу от первого слагаемого в полном токе, т.е. формула (1) сохраняет свой вид и в более общем случае. Соединительные провода не учитываются.

Формулы (4)–(8) (или (1)) и выражают содержание собственно ТШР, хотя не меньшую ценность представляют и более общие выражения, одно из которых имеет вид (см., например, [3, 4]):

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Phi_\alpha^{(1)} I_\alpha = \iiint (\vec{E}^{(1)}, \vec{j}_п)\, dV, \tag{13}$$

где $\Phi_\alpha^{(1)}(t)$ – потенциал α-го электрода из вспомогательной задачи ($\alpha = 1, 2, ..., N$), $\vec{E}^{(1)}$ – вспомогательное поле в этом случае. Формула (1), очевидно, представляет собой частный случай равенства (13) при условиях (3).

Отметим, что в работе [2] вывод формул ТШР основан на применении второй формулы Грина к потенциальным полям; автор ссылается на монографию [16] (по поводу формул Грина см. также [17] и, в более современной постановке, включая и обобщенные функции, [18]). В работе [1] была использована теорема взаимности Грина, которая также следует из второй формулы Грина (см., например, [17]). Формулы Грина были опубликованы в 1828 г. в его знаменитом эссе о применении математического анализа к электричеству и магнетизму [19] (историю вопроса см. в [20]), т.е. задолго до открытия уравнений Максвелла. В этой работе автор, вслед за Лапласом и Пуассоном, развивает теорию потенциала (“потенциальная функция” у Грина). Однако вторая формула Грина имеет вид (см. [16–20])

$$\int (v\Delta u - u\Delta v) dV = \int (v\,\mathrm{grad}\,u - u\,\mathrm{grad}\,v) dS \tag{14}$$

(где Δ – лапласиан), она связывает объемные интегралы с поверхностными и справедлива не только для потенциалов (которые должны удовлетворять уравнениям Лапласа или Пуассона), но, очевидно, и для любых достаточно гладких функций u и v. Авторы [1, 2] выводили свою теорему для потенциальных полей, но формула (14) в их выводах оставляет надежду на перспективы более общего характера.

И действительно, в работе [7] отмечено, что вспомогательные потенциалы в ТШР могут и не иметь прямого отношения к полям основной задачи (но должны удовлетворять, конечно, граничным условиям (3)). Более того, в работе [8] показано, что в качестве вспомогательных можно использовать произвольные функции с теми же граничными условиями. Рассмотрим это утверждение подробнее. Заметим, что вторую формулу Грина можно доказать с помощью теоремы Остроградского–Гаусса, используя интегралы с дивергенцией (см., например, [18, 20]). Этот прием удобно применить и для вывода формул ТШР. Равенство (13), в частности, можно получить, производя дифференцирование под знаком интеграла в функционале (15)

$$F = -\iiint \mathrm{div}(\varphi^{(1)}\vec{j}_п) dV \tag{15}$$

с учетом равенства

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{п}} = 0 \tag{16}$$

и приравнивая результат к поверхностному интегралу, полученному из (15) с помощью теоремы Остроградского–Гаусса. При этом поверхностные интегралы с $\partial\vec{D}/\partial t$ и $\vec{j}$ для α-го электрода дают разность

$$\Phi_\alpha^{(1)} I_\alpha = \Phi_\alpha^{(1)}(\partial Q_\alpha/\partial t - I_{s\alpha}), \tag{17}$$

где Q_α – заряд α-го электрода, $I_{s\alpha}$ – ток, втекающий в него из образца через поверхность, а $\Phi_\alpha^{(1)}$ – потенциал α-го электрода во вспомогательной задаче. Как видно из вывода, вспомогательные функции действительно могут быть не связаны с основной задачей и вообще быть произвольными, но с теми же граничными условиями. То есть требуется только, чтобы они были постоянны вдоль поверхностей электродов (в каждый момент времени). Именно это условие обеспечивает вывод и вид формул ТШР. Обсуждаемое обобщение полезно в том отношении, например, что формулы ТШР остаются справедливыми (и сохраняют свой вид) и для непотенциальных полей, включая высокочастотные поля, например, сверхвысокочастотные (СВЧ) поля.

Сделаем теперь несколько уточняющих замечаний. Отметим, что если в границу области интегрирования включена вся поверхность α-го электрода, то разность в правой части (17) равна нулю в силу закона сохранения заряда. Ток I_α приобретает смысл втекающего из внешней цепи в электрод (через соединительные провода) тока, если в границу не включены участки поверхности, соответствующие контактам проводов с электродом. Нужно, следовательно, чтобы область интегрирования не включала в себя не только металлические электроды (с постоянными потенциалами на своих поверхностях), но и провода (с их непотенциальными, вообще говоря, поверхностями). Затем придется также уточнить определение заряда Q_α, что приводит к появлению в ТШР дополнительных, связанных с проводами, слагаемых, усложняющих (вследствие непотенциальности их поверхностей) формулы ТШР (см. обсуждение этого вопроса в [21]). А вот в качестве вспомогательной можно (формально) выбрать задачу без проводов, но с тем же образцом (без зарядов и поляризации) и, разумеется, с теми же электродами и граничными условиями.

В работах по ТШР соединительные провода не учитывались, а в первых статьях [1, 2] их влияние, на первый взгляд, удалось вообще исключить. Но нет, просто авторы в своем анализе изящно обошли процесс подвода заряда к электродам, рассматривая (без проводов) заряды в них в отдельные, предельно близкие моменты времени. Интересно, что вопрос о влиянии соединительных проводов возник уже на заре изучения электричества, когда сами понятия емкости и потенциала только еще формировались (см., например, легендарные работы Г. Кавендиша [22, 23], в которых особо отмечено, что соединительные провода слабо влияют на распределение зарядов на массивных проводниках). Вспомним также и классическую работу У. Томсона (впоследствии – лорд Кельвин) [24], в которой в 1853 г. (т.е. еще до уравнений Максвелла), было получено (из энергетических, правда, соображений) классическое уравнение для токов в электрических цепях с емкостями и индуктивностями, а выведено оно было для того, чтобы получить не менее известную формулу для периода электрических колебаний в контуре. Так вот, в этой же работе, по ходу вывода формул, предполагалось, что влияние соединительных проводов пренебрежимо мало в силу малости их емкости. Это не удивительно: вспомогательные элементы и не должны ощутимо влиять на процессы в цепях (хотя паразитные эффекты, в качестве платы за их использование, тоже неизбежны). Так что используемое в ТШР приближение – пренебрежение влиянием проводов – можно считать классическим (и обоснованным).

Отметим, что при доказательстве ТШР и ее обобщений использовались различные подходы с разными функционалами, которые могут иметь разные же подынтегральные выражения и области интегрирования. В наиболее простом случае с плоскопараллельными электродами (см. формулы (4)–(8)) формула (7) была приведена в [25] еще до того, как была доказана ТШР, она может быть доказана и более простым, чем формулы в ТШР, способом.

Теорема Шокли–Рамо и ее обобщения использовались для описания работы электровакуумных приборов, в особенности приборов СВЧ [1–4, 25–29]. После распространения теоремы на диэлектрики [7–15], она применялась в работах по датчикам ионизирующего излучения [9, 10, 13, 30], а также при диагностике структур металл–диэлектрик–полупроводник (МДП) и интегральных схем [14, 15, 31, 32]. Весьма привлекательны применения ТШР в биологии для изучения транспорта зарядов в протеинах [33].

2. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Эти же методы, т.е. подбор подходящих функционалов и их преобразование с помощью математических теорем и уравнений Максвелла, можно использовать и для обобщения законов Кирхгофа для электрических цепей [5], которые (законы) призваны обеспечивать полное их описание. ТШР можно рассматривать как первый шаг в этом направлении. Действительно, если элемент цепи нельзя однозначно охарактеризовать вольт-амперной характеристикой (а тем более, сопротивлением), то ТШР дает нам формулу, описывающую и в общем случае соотношение между токами внутри элемента и током, втекающим в него из внешней цепи. Также теорема помогает выявлять те параметры образцов, которые влияют на токи во внешней цепи. Типичным примеров являются электровакуумные приборы: для стационарных режимов выведены вольт-амперные характеристики (например, закон трех вторых для режима ТОПЗ (токов ограниченных пространственным зарядом) [34]), но в общем, нестационарном случае вольт-амперные характеристики получить нельзя (так как ток определяется не одним только напряжением, но зависит и от предыстории). Так что применять можно только формулы ТШР. С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся и при описании полупроводниковых приборов (см. монографии [35–37]). И здесь вольт-амперные характеристики получены только в частных случаях. Типичным контрпримером могут служить датчики ионизирующего излучения, при описания которых требуются формулы ТШР (см., например, работу [13] и цитированную там литературу).

Однако ТШР описывает не весь ток во внешней цепи, а только одну его компоненту (см. формулы (1) и (11)), кроме которой в (11) присутствует еще одно слагаемое

$$I_\alpha^{'} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)}, \partial\vec{D}/\partial t) dV, \tag{18}$$

связанное с токами смещения. Для полноты описания цепей надо разобраться и с ним. Казалось бы, это не трудно, ведь токи смещения традиционно связывают с емкостными (в теории полупроводниковых приборов, например). А если так, то полные токи в (11) должны состоять из индуцированных и емкостных токов. Эта идея, в качестве очевидной, и была принята в первых (вакуумных) работах по ТШР [1, 2, 26–29] (в случае квазистационарных режимов и потенциальных электрических полей). Применялась она и в случае диэлектриков [7, 12]. Но что можно сказать в общем случае?

В работах [14, 15] была предпринята попытка вывести соответствующие формулы для ТШР с учетом и наведенных, и емкостных токов с помощью функционалов более общего вида. Если переписать формулу (11), с учетом (9), в виде

$$I_\alpha = I_{\alpha 1} + \iiint (\vec{E}^{(\alpha)}, \partial\vec{D}'/\partial t) dV, \tag{19}$$

где

$$I_{\alpha 1} = \iiint \left(\vec{E}^{(\alpha)}, (\vec{j} + \partial\vec{P}/\partial t)\right) dV, \tag{20}$$

то вопрос о емкостных токах относится ко второму слагаемому, а формула (20) служит обобщением ТШР с учетом поляризации (плотности дипольного момента). При этом выражение $\partial\vec{P}/\partial t$ описывает плотность тока связанных зарядов (более подробно см. обсуждение связанных с поляризацией вопросов в [38]). Оказалось, что токи во внешней цепи (в формулах (19), (20)), кроме емкостных, содержат дополнительные слагаемые, которые могут быть описаны различными способами. Природа этих слагаемых и вид соответствующих формул рассматривались в работах [14, 15, 21, 38, 39]. Предполагаем продолжить их обсуждение и вывод заключительных формул на основе функционала более общего вида в следующей работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены различные способы вывода ТШР и ее обобщений на случай произвольных сред и непотенциальных полей, включая СВЧ-поля. Сделаны замечания относительно влияния соединительных проводов. Приведена история вопроса. Отмечено, что более полное описание современных электрических цепей в развитие законов Кирхгофа может быть получено путем последовательного усложнения используемых функционалов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shockley W.* // J. Appl. Phys. 1938. V. 9. № 10. P. 635.
2. *Ramo S.* // Proc. IRE. 1939. V. 27. № 9. P. 584.
3. *Jen C.K.* // Proc. IRE. 1941. V. 29. № 6. P. 345.
4. *Beck A.H.W.* Thermionic Valves: their Theory and Design. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953.
5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит, 2002.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005.
7. *Pellegrini B.* // Phys. Rev. B. 1986. V. 34. № 8. P. 5921.
8. *Yoder P.D., Gärtner K., Fichtner W.* // J. Appl. Phys. 1996. V. 79. № 4. P. 1951.
9. *Cavalleri G., Fabri G., Gatti E., Svelto V.* // Nucl. Instr. Meth. 1963. V. 21. P. 177.
10. *Cavalleri G., Gatti E. Fabri G., Svelto V.* // Nucl. Instr. Meth. 1971. V. 92. № 1. P. 137.
11. *Visschere P. De.* // Sol.-Stat. Electronics. 1990. V. 33. № 4. P. 455.
12. *Kim H., Min H.S., Tang T.W., Park Y.J.* // Sol.-Stat. Electronics. 1991. V. 34. № 11. P.1251.
13. *He Z.* // Nucl. Instr. Meth. in Phys. Research A. 2001. V. 463. № 1–2. P. 250.
14. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 10. С. 1115.
15. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 926.

16. *Jeans J.H.* The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
17. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
18. *Владимиров В.С., Жариков В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.
19. *Green G.* An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham: T. Wheelhouse, 1828.
20. *Любимов Ю.А.* // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 1. С. 105.
21. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 7. С. 725.
22. *Cavendish H.* // Phil. Trans. 1771. V. 61. P. 584.
23. *Cavendish H.* The Electrical Researches of the honourable Henry Cavendish. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879.
24. *Thomson W.* // Phil. Mag. 1853. V. 5. № 34. P. 393.
25. *North D.O.* // Proc. IRE. 1936. V. 24. № 1. P. 108.
26. *Гвоздовер С., Лопухин В.* // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1946. Т. 10. № 1. С. 29.
27. *Лопухин В.* // Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1946. Т. 10. № 1. С. 111.
28. *Коваленко В.Ф.* Введение в электронику сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1955.
29. *Лопухин В.М.* Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М.: Гостехиздат, 1953.
30. *Tavernier S.* Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics. L: Springer, 2010.
31. *Дмитриев С.Г.* // ФТП. 2009. Т. 43. № 6. С. 854.
32. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1229.
33. *Eisenberg B., Nonner W.* // J. Comput. Electron. 2007. V. 6. № 1–3. P. 363.
34. *Добрецов Л.Н., Гомоюнова М.В.* Эмиссионная электроника. М.: Наука, 1966.
35. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
36. *Зи С.* Физика полупроводниковых приборов. М.: Мир, 1984.
37. *Nicollian E.R., Brews J.R.* MOS (Metal-Oxide-Semiconductor) Physics and Technology. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1982.
38. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 4. С. 411.
39. *Дмитриев С.Г.* // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 181.