

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 535.015

ВЛИЯНИЕ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА АВТОКОЛЕБАНИЯ В ВОЛОКОННЫХ ЛАЗЕРАХ С МИКРООПТОМЕХАНИЧЕСКИМИ РЕЗОНАНСНЫМИ СТРУКТУРАМИ

© 2023 г. Ф. А. Егоров^а *, В. В. Никитин^б, В. Т. Потапов^а^а Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация^б Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 2, Москва, 119991 Российская Федерация

*E-mail: egorov-fedor@mail.ru

Поступила в редакцию 12.07.2021 г.

После доработки 04.11.2021 г.

Принята к публикации 27.11.2021 г.

В рамках балансного приближения волоконных лазеров (ВЛ), рассматриваемых как распределенные системы, построена уточненная математическая модель, описывающая низкочастотную динамику ВЛ с зеркалами на основе оптомеханических микроосцилляторов (МО) с учетом влияния спонтанного излучения (СИ), локализованного в оболочечных модах активного световода (АС). Выявлены механизмы влияния СИ на режимы синхронных автоколебаний (СА) в лазерной системе ВЛ–МО: дополнительное снятие инверсии в АС благодаря конечной длине пробега фотонов СИ оболочечных мод в активной среде ВЛ; нарушение условия внутреннего резонанса в лазерной системе; возмущение колебаний МО фотоиндуцированной силой, обусловленной СИ. С помощью численного моделирования СА в эрбий-иттербиевом ВЛ с микроосциллятором и экспериментальных исследований установлена зависимость частоты СА от геометрооптических параметров АС и отражательной способности границы раздела АС–окружающая среда, которые могут быть использованы для повышения стабильности частоты лазерных импульсов в волоконных источниках импульсного излучения и создания нового класса резонансных волоконно-оптических датчиков.

DOI: 10.31857/S0033849423020067, EDN: LCVYWK

ВВЕДЕНИЕ

Лазерное возбуждение упругих колебаний в микрооптомеханических резонансных структурах (микроосцилляторах) благодаря ряду механизмов (давление света, фототермический эффект, “градиентная” сила и др.) открывает возможности для реализации в лазерах с микроосцилляторами (МО) новых режимов генерации лазерного излучения с уникальными свойствами [1–5], что обуславливает актуальность исследований таких лазерных систем. Особый интерес вызывают режимы генерации в условиях внутренних резонансов — совпадения собственной частоты микроосциллятора f с той или иной характерной частотой в лазере, что приводит к значительному повышению эффективности взаимодействия лазерного излучения с МО. С этой точки зрения большой интерес представляют волоконные лазеры (ВЛ), в которых благодаря возможностям вариации типов и параметров активных волоконных световодов (АС), а также конфигурации лазерного резонатора и характеристик МО могут быть реализованы

лазерные системы ВЛ–МО с различными видами внутренних резонансов [6–8]. Отметим, что исследования других типов лазеров с МО в условиях внутренних резонансов были начаты лишь недавно [9–11].

В условиях резонанса вида $f = f_{\text{рел}}$ ($f_{\text{рел}}$ — частота релаксационных колебаний в лазере) в ВЛ–МО возможны синхронные автоколебания (СА), представляющие собой одновременные колебания интенсивности лазерного излучения и микроосциллятора с единой (общей) частотой F , зависящей от собственной частоты МО [6, 7]:

$$F = f(1 + \kappa), \kappa \ll 1.$$

Синхронные автоколебания характеризуются довольно высокой стабильностью частоты, $|\Delta F/F| \approx 3 \times 10^{-6}$ [6], что открывает возможности для создания волоконных источников лазерного излучения со стабильной частотой импульсов (аналог “кварцевой” стабилизации в радиотехнике) и разработки нового класса резонансных волокон-

но-оптических датчиков (ВОД) с частотным выходом [12, 13].

В работах [14, 15] в приближениях “точечной” и распределенной систем разработаны математические модели эрбий-иттербиевых волоконных лазеров (ЭИВЛ) с микрозеркалами на основе МО. Было показано, что в условиях резонанса $f = f_{\text{рел}}$ оба подхода приводят к существованию СА, при этом модель распределенной системы обеспечивает более точное описание свойств ЭИВЛ–МО. Следует отметить, что хотя качественную сторону СА эти модели отражают правильно, однако для ряда параметров СА, особенно частоты СА, которую можно измерить с высокой точностью, невозможно получить количественного согласия с экспериментом. Эти расхождения, на наш взгляд, связаны с чрезмерно грубым описанием влияния спонтанного излучения (СИ) – принципиально неустраняемого фактора, играющего важную роль в ВЛ [16]. Помимо низкой точности расчетов параметров СА это приводит к искажениям границ зон существования СА, а также зависимостей их характеристик от внешних воздействий и параметров лазерной системы; к неправильным оценкам устойчивости режимов СА, которые имеют определяющее значение при разработке прецизионных устройств на основе ВЛ–МО.

Наряду с “обычным” взаимодействием спонтанного излучения с активной средой [17, 18], влияние СИ на динамику лазерных систем ВЛ–МО имеет ряд особенностей. В них важную роль могут играть такие специфические факторы, как нарушение точного резонанса ($f = f_{\text{рел}}$) из-за зависимости $f_{\text{рел}}$ от интенсивности СИ [17]; влияние фотоиндуцированной силы, обусловленной спонтанным излучением, на характер движения МО, определяющего модуляцию параметров лазерного резонатора.

Кроме того, значительная часть спонтанного излучения в АС может распространяться в виде оболочечных мод (ОМ), характеристики которых зависят от граничных условий на поверхности раздела АС с окружающей средой (ОС). В результате, учитывая взаимодействие спонтанного излучения оболочечных мод СИ(ОМ) с активной сердцевиной, появляются возможности для управления состоянием АС и, как следствие, параметрами СА в ВЛ–МО за счет вариации оптических свойств границы раздела АС–ОС. Исследование указанных особенностей влияния СИ на динамику ВЛ–МО требует существенного усовершенствования имеющихся математических моделей рассматриваемых лазерных систем.

Цель данной работы – изложение базовых положений и подходов, на которых основано построение уточненных математических моделей (ММ), описывающих низкочастотную динамику

лазерных систем ВЛ–МО с учетом комплексного влияния спонтанного излучения, включая вклад оболочечных мод АС. В ней получены новые результаты, которые позволяют расширить функциональные возможности и области применений ВЛ–МО.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ ВЛ–МО, ИСХОДНЫЕ УСЛОВИЯ

Ввиду того, что релаксационные колебания особенно ярко проявляются в лазерах с инерционной активной средой [19] (лазеры класса В), в работе рассмотрены лазерные системы ВЛ–МО на основе активных световодов с редкоземельными элементами (Er, Yb, Nd...) [20], в которых времена жизни метастабильного уровня достигают, $\tau_m = 0.3 \dots 10$ мс. В силу распределенного характера как ВЛ, так и МО математическая модель ВЛ–МО может быть представлена системой дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих лазерную подсистему, МО и оптическую связь между ними. В силу инерционности активной среды и сравнительно “низких” частот СА:

$$F \approx f_{\text{рел}} \ll T^{-1} = \Omega,$$

($T = 2L/c$ – время обхода фотоном резонатора ВЛ с оптической длиной L ; c – скорость света в вакууме; Ω – межмодовый интервал), лазерная подсистема может быть описана в приближении балансных уравнений [19, 21]. В силу их общего характера ММ для разных типов ВЛ–МО могут быть построены по единой схеме с учетом особенностей рабочих уровней в АС.

Фотоиндуцированные силы ($\vec{F}_d, \vec{F}_{\text{СИ}}, \vec{F}_n$), возбуждающие упругие колебания в МО, обусловлены разными спектральными составляющими света, падающего на МО: линией лазерной генерации λ_d , спонтанным излучением $\lambda_{\text{СИ}}$, а также излучением накачки λ_n , прошедшим через АС (в силу неполного поглощения в АС). Модуляция параметров лазерного резонатора (добротности, собственных частот и др.), связанная с колебаниями МО, определяется из решения волнового уравнения для поля в резонаторе с учетом граничных условий на колеблющейся, деформирующейся отражающей поверхности МО [22].

Уточненную модель рассматриваемых лазерных систем целесообразно построить на примере ЭИВЛ–МО, что объясняется рядом причин (помимо наличия упрощенной модели). Во-первых, основная часть экспериментальных исследований ВЛ–МО выполнена именно с помощью систем данного типа, которые в качестве частных случаев охватывают также иттербиевые и эрбиевые ВЛ. Во-вторых, высокий КПД, большой ре-

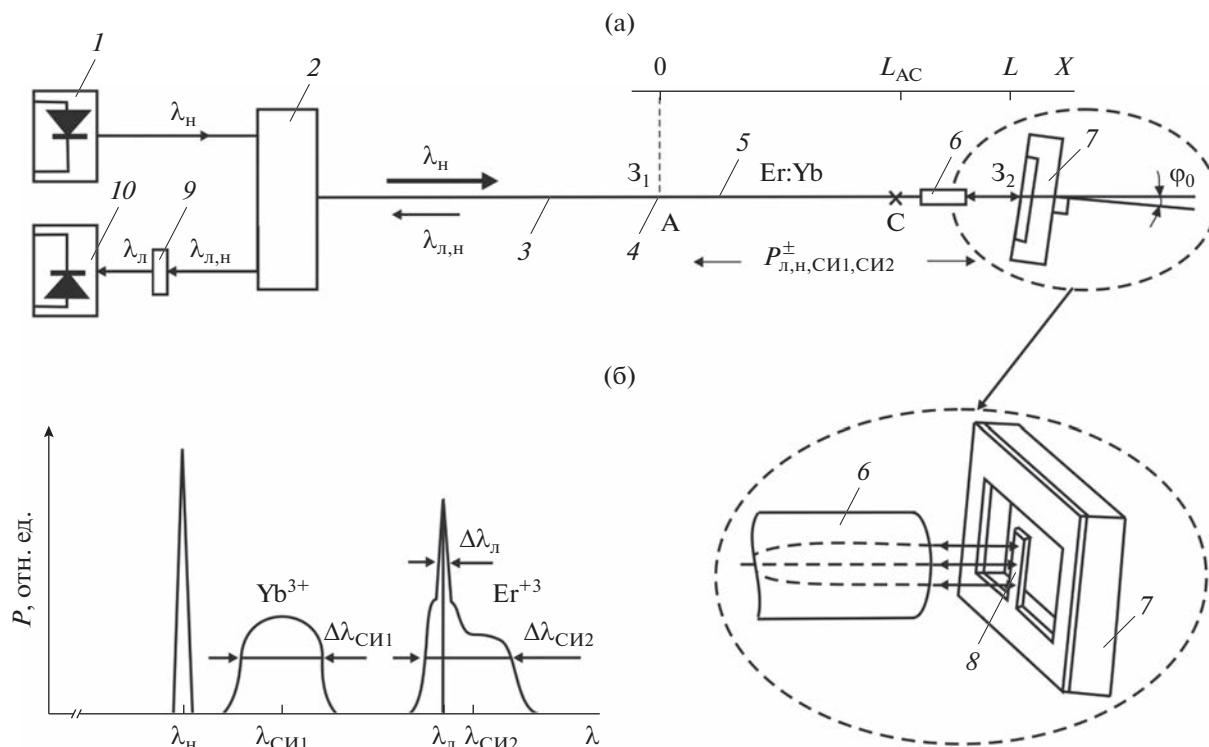


Рис. 1. Схема эрбий-иттербиевого волоконного лазера с микроосциллятором (а): 1 – полупроводниковый лазер накачки ($\lambda_n \approx 980$ нм); 2 – волоконно-оптический разветвитель; 3 – пассивный одно(много)модовый волоконный световод с числовой апертурой $NA_n \leq NA_c$ (NA_o); 4 – дихроичное зеркало Z_1 с коэффициентом пропускания $P_1(\lambda_n) \approx 1$ и отражения $R_1(\lambda_n) \approx 1$; 5 – эрбий-иттербиевый активный световод; 6 – селфок (длина 8 мм; диаметр моды $D \approx 300$ мкм); 7 – МО с колебательным элементом – микробалкой с размерами $l \times b \times h$; 8 – зеркало Z_2 – отражающая поверхность микробалки; 9 – оптический фильтр; 10 – фотоприемник; (б) – спектральный состав излучения (качественный) в лазерном резонаторе, $\Delta\lambda_l, \Delta\lambda_{CI1}, \Delta\lambda_{CI2}$ – спектральные ширины лазерного и спонтанного излучений.

сурс работы ЭИВЛ, устойчивость к дестабилизирующим факторам [23], а также совпадение спектральных полос их накачки и генерации с окнами прозрачности типичных кварцевых волоконных световодов позволяют рассматривать в настоящее время именно ЭИВЛ–МО в качестве основы для создания прецизионных ВОД с прогнозируемыми характеристиками и волоконных источников высокостабильных лазерных импульсов. Отметим, что недавние разработки новых типов (Er : Yb)AC [24] открывают перспективы создания миниатюрных ЭИВЛ–МО с улучшенными характеристиками, позволяющими расширить области их применений.

2. ЛАЗЕРНАЯ СИСТЕМА ЭИВЛ–МО, ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ, ОГРАНИЧЕНИЯ

Схема лазерной системы ЭИВЛ–МО показана на рис. 1. В ней оптическая связь активной среды с МО осуществляется с помощью автоколлиматорной схемы на основе селфока – сегмента градиентного волокна с большим диаметром моды. В

лазерном резонаторе роль микрозеркала – дефлектора Z_2 играет колебательный элемент (КЭ) микроосциллятора в виде, например, прямоугольной микробалки ($l \times b \times h$) с консольным или двусторонним креплением. Коллимированное излучение, падающее на КЭ, представляет собой гауссов пучок с малой расходимостью ($\theta_0 \ll 10^{-2}$ рад) и диаметром $D \geq b \gg \lambda_n$. Схема AC и структура энергетических уровней в нем показаны на рис. 2. Предполагается, что одномодовая сердцевина AC легирована однородно Er, Yb с концентрациями N_{Er}, N_{Yb} ($N_{Yb} = 0$ соответствует эрбиевому ВЛ, $N_{Er} = 0$ – иттербиевому), при этом оптическая накачка AC осуществляется либо в активную сердцевину с числовой апертурой и диаметром (NA_c, d_c), либо в его оптическую оболочку (NA_o, d_o). Длина AC, $L_{AC} \approx L_{n,c}(L_{n,o})$, где $L_{n,c} = \min[(\sigma_{np}^* N_{Yb})^{-1}, (\sigma_{np} N_{Er})^{-1}]$ – длина поглощения излучения накачки в сердцевине AC (масштаб неоднородности инверсии [25]), $(\sigma_{np}, \sigma_{np}^*)$ –

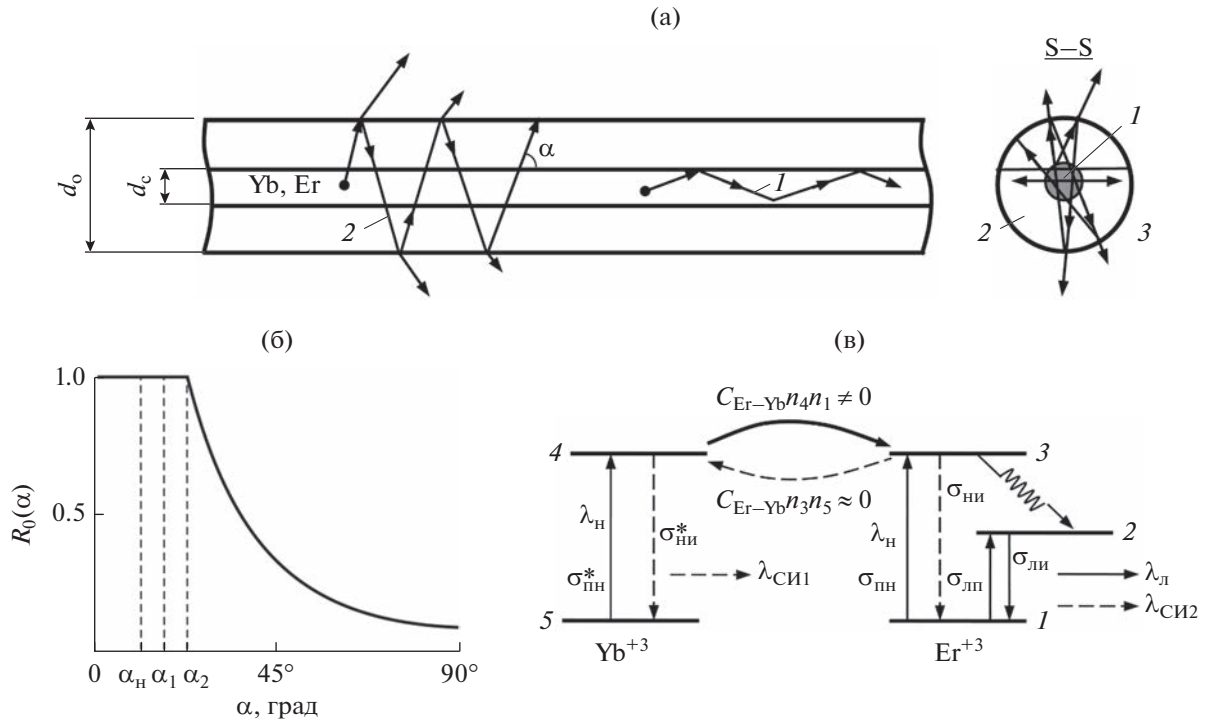


Рис. 2. Схема фрагмента АС (а): $s-s$ – сечение АС, 1 – световедущая сердцевина; 2 – оптическая оболочка; 3 – окружающая среда (или защитное покрытие АС); α – угол между траекторией 2-луча и осью АС; угловая зависимость $R_0(\alpha)$ с характерными значениями углов: $\alpha_1 = \arcsin(N_{Ac}/n_c)$; $\alpha_2 = \arcsin(N_{Ao}/n_o)$; $\alpha_n = \arcsin(N_{An}/n_o)$ (б); структура энергетических уровней в АС (в).

сечения поглощения (Er, Yb); $L_{n,o} = L_{n,c} (d_o/d_c)^2$. Считаем, что спонтанные излучения (СИ1) и (СИ2), генерируемые в АС иттербием и эрбием, распространяются не только в виде мод сердцевинны (1-лучи), но также в оптической оболочке в виде мод оболочки СИ(ОМ) (2-лучи). Резонатор ВЛ полагаем поляризационно изотропным, зеркала $3_{1,2}$ – антиотражающими на линии иттербия, $R_{1,2}(\lambda_{Yb}) = 0$, что исключает лазерную генерацию на этой линии, $\lambda_{Yb} \approx 1.08$ мкм.

Так как в режимах СА пиковая интенсивность лазерных импульсов $I_{л}$ в оптоволоконных резонаторах ВЛ–МО значительно ниже порога нелинейности волоконных световодов, $(I_{л})_{\max} \ll I_{\text{нел}}$ [26], а их длительность равна $\tau > 10$ нс [6–8], то можно пренебречь как оптической нелинейностью, так и хроматической дисперсией в резонаторе. Кроме того, можно пренебречь пространственной решеткой инверсии в АС, которая в лазерах класса В приводит в основном к изменению тонкой структуры спектра релаксационных колебаний [27], что практически не проявляется на суммарной интенсивности генерируемых мод $I_{л}$.

Упругие колебания (волны) в МО $\vec{u}(\vec{r}, t)$ приводят, в частности, к модуляции направления отраженного пучка и эффективного коэффициента отражения 3_2 :

$$R_{2\text{эф}}(t) = R_2(\theta(r, t)),$$

где $R_2(\theta) = R_{20} \exp(-\theta^2/2\theta_0^2)$ – угловая характеристика автоколлиматора в гауссовом приближении; $\theta(\vec{r}, t)$ – угол между осью пучка, падающего на участок поверхности КЭ с координатой $\vec{r}$ и нормалью к этому участку; R_{20} – коэффициент отражения поверхности КЭ (см. рис. 1). Ввиду сложности процессов лазерного возбуждения упругих волн и колебаний в твердых телах [28] ограничимся рассмотрением простых, но при этом широко используемых типов кремниевых МО с КЭ в виде однородных микробалок, для которых характерны значительные интервалы между собственными частотами. Благодаря этому колебания МО могут быть описаны с помощью простых моделей – наборов осцилляторов, соответствующих возбуждаемым модам упругих колебаний [29]. Так, в случае осциллятора, описывающего основную моду поперечных колебаний КЭ ($u(z, t)$), мо-

дуляция угла наклона центра облучаемого участка (с координатой $z_{ц}$) выражается в виде

$$\theta(z_{ц}, t) = \varphi_0 + \Delta\theta(z_{ц}, t),$$

где $\Delta\theta(z_{ц}, t) = u'_z(z_{ц}, t) = \chi u(z_{ц}, t)$ — приращение угла наклона из-за колебаний, φ_0 — исходный угол наклона МО. Полагая, что колебания возбуждаются за счет силы давления света и пренебрегая разницей углов падения и отражения света от движущегося КЭ, имеем

$$|\vec{F}_i| = 2R_{20i}P_i\epsilon_i\cos^2(\theta)/c,$$

где $P_i = I_i S_i$ — поток фотонов с энергией ϵ_i , падающих на КЭ; S_i — эффективная площадь основной моды АС, $i = л, СИ, н$.

Колебания МО

$$U(t) = u(z_{ц}, t) \approx A \cos(\omega t)$$

приводят к модуляции ряда характеристик нестационарного резонатора ВЛ (длины $\tilde{L}(t) = L + U(t)$; потерь $\Pi(t)$ (добротности); спектра частот и др.), что приводит к сложной структуре поля в нем. При малых и “низкочастотных” колебаниях МО, удовлетворяющих условиям

$$A \ll \lambda_n, L; \quad f \ll \Omega = T^{-1}; \\ fA \ll \Pi^2 \Omega \lambda_n; \quad \omega A/c \ll 1,$$

поле в резонаторе может быть описано с помощью “динамических” мод [22] с падающей на МО и отраженной волнами, имеющими разные частоты, сдвинутые на доплеровскую частоту $\Delta\nu_D = 2v_{л} v/c$ ($v = dU/dt$ — скорость КЭ, $v_{л} = \omega_{л}/2\pi$ — центральная частота световой волны).

Интерференция указанных волн приводит к колебаниям (биениям) интенсивности лазерного излучения и инверсии в АС на частоте $\Delta\nu_D$ [30]. При достаточно малых колебаниях $A \ll \lambda_{л}/2\pi$ (типичных в эксперименте), максимальный сдвиг имеет вид

$$(\Delta\nu_D)_{\max} = 2\omega A \lambda_{л}^{-1} \ll f \approx f_{\text{рел}}$$

и, тем самым, в силу $\Delta\nu_D \ll f_{\text{рел}}$, исключается возможность резонансной раскачки биений в АС. Это позволяет пренебречь модуляцией на частоте $\Delta\nu_D$ как интенсивности излучения, так и инверсии в АС. Таким образом, колебания МО приводят в основном к модуляции $R_{2\phi}(t)$ и потерям в резонаторе

$$\Pi(t) = 2\beta L - \ln(R_1 R_{2\phi}(t))/2,$$

где β — распределенные “серые” потери в АС.

При этом в лазерной системе выполняется ряд соотношений:

$$\Delta\nu_D \ll f \approx f_{\text{рел}} \ll \Delta\nu_{л,м} < \Omega,$$

где ширина линии генерируемых мод $\Delta\nu_{л,м} \propto \Pi^2$ [19]. В этих условиях колебания МО приводят к синфазной модуляции потерь всех генерируемых мод, позволяющей описать лазерное излучение в рамках концепции “излучение как целое” [31]. Многократное отражение СИ от внешней поверхности АС (см. рис. 2), характеризующейся коэффициентом отражения $R_0(\alpha)$, приводит к взаимодействию СИ(ОМ) с активной сердцевиной, которое может быть описано в рамках концепции эффективной длины пробега ($l_{c,j}, j = \text{Er, Yb}$) фотонов СИ в активной среде [32]. При этом вынужденные переходы активных центров ($\text{Er}^{+3}, \text{Yb}^{+3}$), вызванные СИ(ОМ), приводят к дополнительному “снятию” инверсии в АС, которое в приведенных ниже уравнениях (1)–(3) учтено с помощью членов вида $n\sigma l_{c,j}$. Они получены в приближении малых длин пробега фотонов СИ(ОМ) вдоль АС: $l_{||j} \ll L_{н,с}(L_{н,о})$, которое для типичных АС, как показано ниже, выполняется с достаточным запасом. В результате низкочастотная динамика ЭИВЛ–МО описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} = & \Gamma_n [\sigma_{ни} n_3 - \sigma_{нп} n_1] (P_n^+ + P_n^-) - \\ & - \Gamma_{СИ1} [\sigma_{СИ1и} n_1 - \sigma_{СИ1п} n_3] (P_{СИ1}^+ + P_{СИ1}^-) + \\ & + \Gamma_{л} [\sigma_{ли} n_2 - \sigma_{лп} n_1] (P_{л}^+ + P_{л}^-) + \\ & + \Gamma_{СИ2} [\sigma_{СИ2и} n_2 - \sigma_{СИ2п} n_1] (P_{СИ2}^+ + P_{СИ2}^-) + \\ & + \frac{n_2}{\tau_{21}} + \Gamma_{л} (1 + \sigma_{СИ2п} n_2 l_{c, \text{Er}}) - C_{\text{Er-Yb}} n_1 n_4, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} = & \Gamma_{л} [\sigma_{лп} n_1 - \sigma_{ли} n_2] (P_{л}^+ + P_{л}^-) + \\ & + \Gamma_{СИ2} [\sigma_{СИ2и} n_1 - \sigma_{СИ2п} n_2] (P_{СИ2}^+ + P_{СИ2}^-) + \\ & + \frac{n_3}{\tau_{23}} \frac{n_2}{\tau_{21}} (1 + \sigma_{СИ2и} n_2 l_{c, \text{Er}}) + \frac{n_2}{\tau_{32}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_5}{\partial t} = & \Gamma_n [\sigma_{ни}^* n_4 - \sigma_{нп}^* n_5] (P_n^+ + P_n^-) + \\ & + \Gamma_{СИ1} [\sigma_{СИ1и}^* n_4 - \sigma_{СИ1п}^* n_5] (P_{СИ1}^+ + P_{СИ1}^-) + \\ & + C_{\text{Er-Yb}} n_1 n_4 + \frac{n_4}{\tau_{45}} (1 + \sigma_{СИ1и} n_4 l_{c, \text{Yb}}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = N_{\text{Er}}(x); \quad n_4 + n_5 = N_{\text{Yb}}(x), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\partial P_{\text{н}}^{\pm}}{\partial x} + \frac{1}{V_{\text{н}}} \frac{\partial P_{\text{н}}^{\pm}}{\partial t} = \\ & = \Gamma_{\text{н}} \left[\sigma_{\text{ни}} n_3 + \sigma_{\text{ни}}^* n_4 - \sigma_{\text{нп}} n_1 - \sigma_{\text{нп}}^* n_5 \right] P_{\text{н}}^{\pm} - \beta_{\text{н}} P_{\text{н}}^{\pm} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\partial P_{\text{СИ1}}^{\pm}}{\partial x} + \frac{1}{V_{\text{СИ1}}} \frac{\partial P_{\text{СИ1}}^{\pm}}{\partial t} = \Gamma_{\text{СИ1}} \times \\ & \times \left[\sigma_{\text{СИ1и}} n_3 + \sigma_{\text{СИ1и}}^* n_4 - \sigma_{\text{СИ1п}} n_1 - \sigma_{\text{СИ1п}}^* n_5 \right] \times \\ & \times P_{\text{СИ1}}^{\pm} - \beta_{\text{СИ1}} P_{\text{СИ1}}^{\pm} + \gamma_1 \frac{n_4}{\tau_{45}} \Gamma_{\text{СИ1}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\partial P_{\text{л}}^{\pm}}{\partial x} + \frac{1}{V_{\text{л}}} \frac{\partial P_{\text{л}}^{\pm}}{\partial t} = \\ & = \Gamma_{\text{л}} [\sigma_{\text{ли}} n_2 - \sigma_{\text{лп}} n_1] P_{\text{л}}^{\pm} - \beta_{\text{л}} P_{\text{л}}^{\pm} + \gamma_{\text{л}} \gamma_2 \frac{n_2}{\tau_{21}} \Gamma_{\text{л}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\partial P_{\text{СИ2}}^{\pm}}{\partial x} + \frac{1}{V_{\text{СИ2}}} \frac{\partial P_{\text{СИ2}}^{\pm}}{\partial t} = \\ & = \Gamma_{\text{СИ2}} [\sigma_{\text{СИ2и}} n_2 - \sigma_{\text{СИ2п}} n_1] P_{\text{СИ2}}^{\pm} - \beta_{\text{СИ2}} P_{\text{СИ2}}^{\pm} + \\ & + (1 - \gamma_{\text{л}}) \gamma_2 \frac{n_2}{\tau_{21}} \Gamma_{\text{СИ2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{\omega}{Q} \frac{dU}{dt} + \omega^2 U = m_{\text{эф}}^{-1} \sum_i |\vec{F}_i| = \\ & = [G_{\text{л}} P_{\text{л}}^+(L, t) + G_{\text{н}} P_{\text{н}}^+(L, t) + G_{\text{СИ1}} P_{\text{СИ1}}^+(L, t) + \\ & + G_{\text{СИ2}} (1 - \gamma_{\text{л}}) P_{\text{СИ2}}^+(L, t)] \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными и начальными условиями (предполагая, что $L_{\text{АС}} = L$):

$$\begin{aligned} P_{\text{н}}^+(0, t) &= P_{\text{н0}}(t) + R_{\text{н}} P_{\text{н}}^-(0, t), \\ P_{\text{н}}^-(L, t) &= R_{2\text{н}}(U) P_{\text{н}}^+(L, t), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{СИ1}}^+(0, t) &= R_{1\text{СИ1}} P_{\text{СИ1}}^-(0, t), \\ P_{\text{СИ1}}^-(L, t) &= R_{2\text{СИ1}}(U) P_{\text{СИ1}}^+(L, t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{л}}^+(0, t) &= R_{1\text{л}} P_{\text{л}}^-(0, t), \\ P_{\text{л}}^-(L, t) &= R_{2\text{л}}(U) P_{\text{л}}^+(L, t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{СИ2}}^+(0, t) &= R_{1\text{СИ2}} P_{\text{СИ2}}^-(0, t), \\ P_{\text{СИ2}}^-(L, t) &= R_{2\text{л}}(U) P_{\text{СИ2}}^+(L, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R_{2, \text{н, л, СИ1}}(U) &= R_{20, \text{н, л, СИ1}} \exp \left[-\frac{(\varphi_0 + \chi U)^2}{\theta_0^2} \right], \\ n_1(x, 0) &= N_{\text{Er}}; \quad n_2(x, 0) = n_3(x, 0) = \\ &= n_4(x, 0) = 0; \quad n_5(x, 0) = N_{\text{Yb}}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{н}}^{\pm}(x, 0) &= P_{\text{л}}^{\pm}(x, 0) = P_{\text{СИ1,2}}^{\pm}(x, 0) = 0; \\ U(0) &= 0; \quad \frac{dU}{dt}(0) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$P_{\text{н0}}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ P_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{t_0} \right) \right), & t > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Уравнения (1)–(4) описывают кинетику инверсии в АС, (5)–(8) – пространственно-временные распределения лазерного $P_{\text{л}}^{\pm}$ и спонтанного излучения $P_{\text{СИ1,2}}^{\pm}$, а также накачки $P_{\text{н}}^{\pm}$, распространяющихся в положительном (+) и отрицательном (–) направлениях оси $0x$; (9) – колебания МО U ; выражение (16) описывает плавное “включение” мощности накачки до постоянного уровня P_0 ($t_0 \geq \tau_{\text{м}}$). Указанные выше механизмы влияния СИ учтены в уравнениях (1)–(9), в которых β_i – распределенные нерезонансные (серые) потери в лазерном резонаторе для разных компонент спектра, $i = \text{н, л, СИ1, СИ2}$; G_i – фактор перекрытия моды излучения с сердцевинной АС; γ_1, γ_2 – факторы спонтанных излучений СИ1, СИ2 в моду сердцевины АС; $\gamma_{\text{л}} = \Delta\lambda_{\text{л}}/\Delta\lambda_{\text{СИ2}} \ll 1$; V_i – групповая скорость излучения; $R_{1,2i}$ – коэффициенты отражения зеркал $Z_{1,2}$; G_i – эффективность возбуждения колебаний; $\sigma_{\text{нп}}, \sigma_{\text{лп}}, \sigma_{\text{СИ1п}}, \sigma_{\text{СИ2п}}$ ($\sigma_{\text{ни}}, \sigma_{\text{ли}}, \sigma_{\text{СИ1и}}, \sigma_{\text{СИ2и}}$) – сечения поглощения (излучения) ионов Er^{+3} ; $\sigma_{\text{нп}}^*, \sigma_{\text{СИ1п}}^*, \sigma_{\text{СИ2п}}^*$ ($\sigma_{\text{ни}}^*, \sigma_{\text{СИ1и}}^*$) – Yb^{+3} [15]; $U(t)$ – смещение КЭ; $m_{\text{эф}}, Q$ – эффективная масса и механическая добротность КЭ; $NA_{\text{с}} = (n_{\text{с}}^2 - n_0^2)^{1/2}$, $NA_0 = (n_0^2 - n_{\text{ОС}}^2)^{1/2}$, $n_{\text{с}}, n_0, n_{\text{ОС}}$ – показатели преломления сердцевины АС, оптической оболочки и окружающей среды. Полагаем, что

$$\begin{aligned} \beta_{\text{СИ1}} &= \beta_{\text{н}}; \quad \beta_{\text{СИ2}} = \beta_{\text{л}}; \quad \Gamma_{\text{СИ2}} = \Gamma_{\text{л}}; \\ V_{\text{н; СИ1,2}} &= V_{\text{л}} = c/n_{\text{с}}; \quad R_{\text{н}} = R_{\text{СИ1}} = 0; \\ R_{\text{СИ2}} &= R_{\text{л}}; \quad R_{20, \text{СИ1}} = R_{20, \text{н}} = 0; \\ R_{\text{н}} &= R_{1\text{СИ1}} = 0; \quad R_{1\text{СИ2}} = R_{1\text{л}}; \\ R_{20, \text{СИ1}} &= R_{20, \text{н}} = 0; \quad R_{20, \text{СИ2}} = R_{20, \text{л}}. \end{aligned}$$

При определенной коррекции уравнения (9) и граничных условий уравнения (1)–(16) могут описывать также ЭИВЛ с внутрирезонаторными оптоволоконными МО [12], которые в лазерном резонаторе играют роль элементов с распределенными потерями, зависящими от упругих колебаний в МО. В случае короткого (по сравнению с длиной резонатора) оптоволоконного МО с отражающим торцом ($R_{20} \approx 1$) такой элемент может

рассматриваться как составное зеркало с эффективным модулированным коэффициентом отражения

$$R_{2\phi}(t) = R_{20} [T(U(t))]^2,$$

где $T(U(t))$ — коэффициент пропускания волнового МО, зависящий от упругих (например, изгибных) колебаний в нем $U(t)$, возбуждаемых лазерным излучением.

3. ВЛИЯНИЕ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Интенсивности спонтанных излучений в сердцевине ($I_{СИ,2}$) существенно зависят от факторов $\gamma_{1,2}$ спонтанных излучений в моду сердцевины — относительных телесных углов канализации АС, при этом в силу слабой дисперсии АС предполагается, что $\gamma_1 = \gamma_2 = NA_c^2/2$. Из уравнений (1)–(3) видно, что влияние СИ(ОМ) можно трактовать как уменьшение эффективного спонтанного времени жизни метастабильного уровня: $\tau_m^* \approx \tau_m(1 + n\sigma l_{c,j})^{-1}$, $\tau_m = \tau_{21}, \tau_{45}$, которое с учетом зависимости $f_{\text{рел}}(\tau_m^*)$ [17] приводит к нарушению точного резонанса ($f = f_{\text{рел}}$) и, тем самым, к зависимости характеристик СА от факторов, определяющих $l_{c,j}$. При сильном френелевском отражении, $R_0(\alpha) \approx 1$, в оболочке АС аккумулируется интенсивное СИ(ОМ), которое в результате многократных отражений от поверхности АС и “фокусировки” в его сердцевину приводит к заметному снятию инверсии, $\tau_m^* < \tau_m$. При $R_0 = 0$, а также сильном поглощении оболочечных мод имеем $l_{c,Er,Yb} = 0$ и, следовательно, $\tau_m^* = \tau_m$.

4. ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ МОД

В силу $d_o \gg d_c > \lambda_d$ СИ(ОМ) можно описать в лучевом приближении, полагая, что 2-лучи являются меридиональными (см. рис. 2). Эффективный коэффициент отражения и число отражений 2-лучей с учетом потерь между последовательными отражениями ($K_j(\alpha) \ll 1$), которые включают потери на отражение на границе сердцевина—оптическая оболочка, составляют:

$$R_j(\alpha) = (1 - K_j(\alpha)) R_{0j}(\alpha);$$

$$N_j(\alpha) = (1 - R_j(\alpha))^{-1}.$$

В предположении изотропного испускания СИ и значительного отражения света на указанной границе ($R_0(\alpha) \approx 1$) средние длины путей, пробегае-

мых 2-лучами в активной сердцевине и перемещения их вдоль АС, составляют, соответственно

$$l_{c,j} \approx 2\pi^{-1} \langle N_j(\alpha) (\sin(\alpha))^{-1} E(\cos(\alpha)) \rangle d_c,$$

$$l_{||,j} \approx 2\pi^{-1} \langle N_j(\alpha) \text{ctg}(\alpha) \rangle d_c,$$

где усреднение по углу производится в пределах: $\alpha_1 \leq |\alpha| \leq \pi/2$; $E(\cos(\alpha))$ — эллиптический интеграл второго рода. Для ЭИВЛ—МО со значениями параметров, приведенными в табл. 1, получены оценки: $l_{||,j} \leq 0.1$ м, $L_{н,о} \approx 0.9$ м, которые подтверждают корректность предположения $l_{||,j} \ll L_{н,о}$. Установлено также, что влияние $l_{c,Er}$ на частоту СА значительно сильнее влияния $l_{c,Yb}$, что позволяет пренебречь вкладом последнего и полагать

$$F(l_{c,Er}, l_{c,Yb}) \approx F(l_{c,Er}, 0).$$

При численном моделировании СА спектральный диапазон СИ ($\Delta\lambda_{СИ2}$) разделен на две части (в соответствии с подходом, использованным в [33]):

1) узкую область с шириной огибающей генерируемых мод ($\Delta\lambda_l$),

2) остальную часть с центральной длиной волны $\lambda_{СИ2}$ и шириной $\Delta\lambda_{СИ2} - \Delta\lambda_l$.

На рис. 3 представлены типичные временные зависимости и фурье-спектр сигналов $P_l^+(L, t)$, $U(t)$, полученные путем численного решения системы уравнений (1)–(16) с использованием методов [14] и значений параметров, приведенных в табл. 1.

На рис. 4 приведены рассчитанные зависимости частоты СА от параметров $(k; \gamma) = (l_{c,Er} N_{Er} \sigma_{СИ2и}; \gamma_l \gamma_2)$, из которых видно, что влияние СИ(ОМ) приводит к сдвигу частоты $\Delta F(k, \gamma)$, заметно превышающему типичный уровень флуктуаций в эксперименте:

$$|\Delta F(k, \gamma)/F| > |\Delta F/F|_{\text{фл}} \approx 3 \times 10^{-6}.$$

Функции $\Delta F(l_{c,Er})$, $\Delta F(\gamma)$ имеют “пороговый” характер — резко возрастают при $l_{c,Er} > l_n$; $\gamma > \gamma_n$, где “пороговые” значения $(l_n, \gamma_n) = (3 \text{ мм}; 10^{-4})$. Эту особенность следует учитывать при разработке высокостабильных ЭИВЛ—МО, так как зависимость величин $l_{c,Er}, \gamma$ от ряда параметров (R_0, d_c, d_o, NA_d) приводит, в силу условий

$$l_{c,Er}(R_0, d_c, d_o, NA_d) \leq l_n;$$

$$\gamma(R_0, d_c, d_o, NA_d) \leq \gamma_n$$

к дополнительным ограничениям на значения указанных параметров АС. На графиках размер вертикальных черточек отражает влияние разбро-

Таблица 1. Значения основных параметров ЭИВЛ–МО

Постоянные величины	Значение	Варьируемые параметры	Значение	Варьируемые параметры	Значение
$\sigma_{\text{нп}}, \sigma_{\text{ни}}, \sigma_{\text{СИ1п}}, \sigma_{\text{СИ1и}}, \text{м}^2$	2×10^{-25}	$N_{\text{Er}}, \text{м}^{-3}$	1×10^{25}	$\beta_{\text{л}}, \text{м}^{-1}$	0.05
$\sigma_{\text{нп}}^*, \sigma_{\text{ни}}^*, \text{м}^2$	2×10^{-24}	$N_{\text{Yb}}, \text{м}^{-3}$	1×10^{26}	$\beta_{\text{н}}, \text{м}^{-1}$	0.05
$\sigma_{\text{СИ2п}}, \sigma_{\text{лп}}, \text{м}^2$	4×10^{-25}	$L_{\text{AC}}, \text{м}$	2	$f, \text{Гц}$	2×10^5
$\sigma_{\text{СИ2и}}, \sigma_{\text{ли}}, \text{м}^2$	6×10^{-25}	$\theta_0, \text{рад}$	2×10^{-3}	Q	10^2
$V_{\text{л}}, \text{м/с}$	2.05×10^8	$\Gamma_{\text{н}}$	6×10^{-3}	$R_{\text{лл}}$	0.9
$\tau_{21}, \text{с}$	10^{-2}	$\Gamma_{\text{л}}$	0.95	$R_{\text{лн}}$	0
$\tau_{32}, \text{с}$	3×10^{-6}	$d_{\text{с}}, \text{мкм}$	8	$R_{20\text{н}}$	0
$\tau_{45}, \text{с}$	1.5×10^{-3}	$d_{\text{о}}, \text{мкм}$	110	$R_{20\text{л}}$	0.8
$C_{\text{Er-Yb}}, \text{м}^3/\text{с}$	7×10^{-23}	$NA_{\text{с}}$	0.16	$m_{\text{эф}}, \text{кг}$	2×10^{-9}
$n_{\text{с}}$	1.46	$NA_{\text{о}}$	0.36	$D, \text{мкм}$	3×10^2
$\lambda_{\text{н}}; \lambda_{\text{л}}, \text{мкм}$	0.98; 1.55	$NA_{\text{н}}$	0.14	$\gamma_{\text{л}}$	4×10^{-3}
$\epsilon_{\text{н}}; \epsilon_{\text{л}}, \text{Дж}$	$2 \times 10^{-19};$ 1.3×10^{-19}	$\Phi_0, \text{рад}$	-2.5×10^{-3}	$\chi, \text{рад/м}$	10^3

са ($\approx 10\%$) параметров ($\Delta N_{\text{Er, Yb}}, \Delta \tau_{21}$), связанного с эффектом кластеризации активных частиц в АС.

На рис. 5 приведены результаты экспериментальных исследований влияния СИ(ОМ) на частоту СА в эрбиевом ВЛ (ЭВЛ, $N_{\text{Yb}} = 0$) с микрозеркалом Z_2 в виде кремниевой микробалки с резонансной частотой $f \approx 68.7$ кГц и добротностью $Q \approx 65$. В ЭВЛ использовано специальное эрбиевое кварцевое активное одномодовое волокно (Er)АС с оголенной оптической оболочкой (без полимерного покрытия), накачка которого производилась в сердцевину. Оголенный участок расположен в кювете, которая могла заполняться той или иной жидкостью с известными оптическими свойствами, что позволяло варьировать в широких пределах френелевское отражение на границе АС–жидкость. Частоты СА измерены при разных условиях (время усреднения частоты 10 с): 1 – пустая кювета – (Er)АС в воздухе, при этом часть лучей СИ(ОМ) испытывает полное внутреннее отражение; 2 – АС в ртути; 3 – АС в глицерине; 4 – АС в черной туши, сильно рассеивающей и поглощающей свет. Экспериментальные данные четко показывают, что заполнение кюветы ртутью, обеспечивающей высокий коэффициент отражения при всех углах ($R_0(\alpha) \geq 0.85$), приводит к сдвигу частоты СА (относительно значения на воздухе): $(\Delta F/F)_{\text{рт}} \approx -6 \times 10^{-5}$, который заметно

превышает уровень флуктуаций $|\Delta F/F|_{\text{фл}} \approx 3 \times 10^{-6}$. Погружение (Er)АС в глицерин – иммерсионную жидкость или же в черную тушь, ослабляющих отражение ($R_0 \approx 0$), приводят лишь к небольшому росту частоты: $|\Delta F/F|_{\text{тушь}} \approx +1 \times 10^{-5}$, сравнимому с уровнем флуктуаций.

Поскольку $I_{\text{с,Er}} \propto (1 - R_0)^{-1}$, то можно сделать вывод о сходстве расчетных и экспериментальных зависимостей (см. рис. 4, 5) частоты СА от отражательной способности границы раздела АС–ОС: увеличение отражения приводит к уменьшению частоты СА. Отметим, что возможность и целесообразность сравнения указанных зависимостей, относящихся к разным лазерным системам, основана на том, что в обеих системах ключевым рабочим компонентом АС является один и тот же элемент – эрбий, спонтанное излучение которого в рассматриваемых явлениях играет определяющую роль. Отметим также, что детальное исследование влияния СИ(ОМ) в ВЛ–МО (с количественным сравнением расчетных и экспериментальных данных для одной и той же системы) является достаточно сложной, самостоятельной задачей, которая включает, в частности: определение точных профилей распределений показателей преломления в АС; концентраций активных частиц; степени их “кластеризации”. Важно учитывать также ряд факторов случайного характера: эксцентрич-

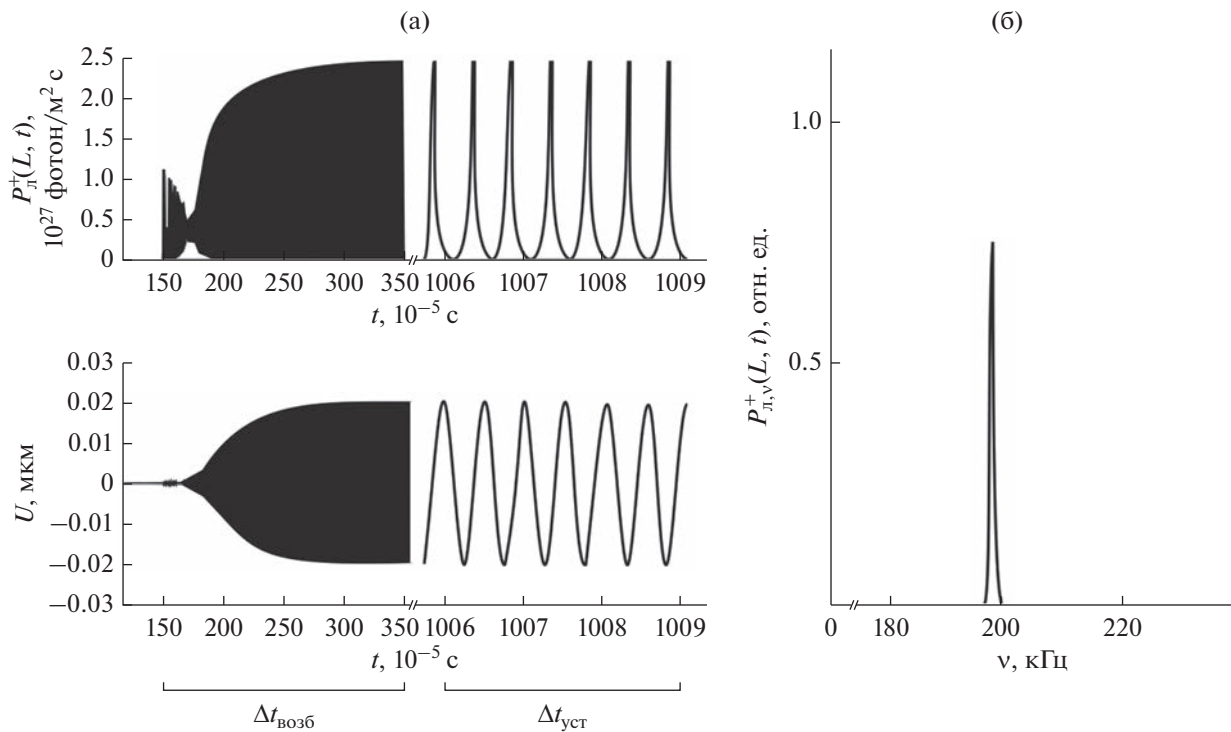


Рис. 3. Зависимости от времени мощности лазерного излучения $P_{\text{л}}^+(L, t)$ и колебаний микроосциллятора $U(t)$ на этапе возбуждения СА ($\Delta t_{\text{возб}}$) и установившихся автоколебаний ($\Delta t_{\text{уст}}$), при значениях $(\gamma, k) = (5.1 \times 10^{-5}; 0.3)$ (а); фурье-спектр мощности излучения $P_{\text{л, в}}^+(L, t)$ в условиях установившихся СА (б).

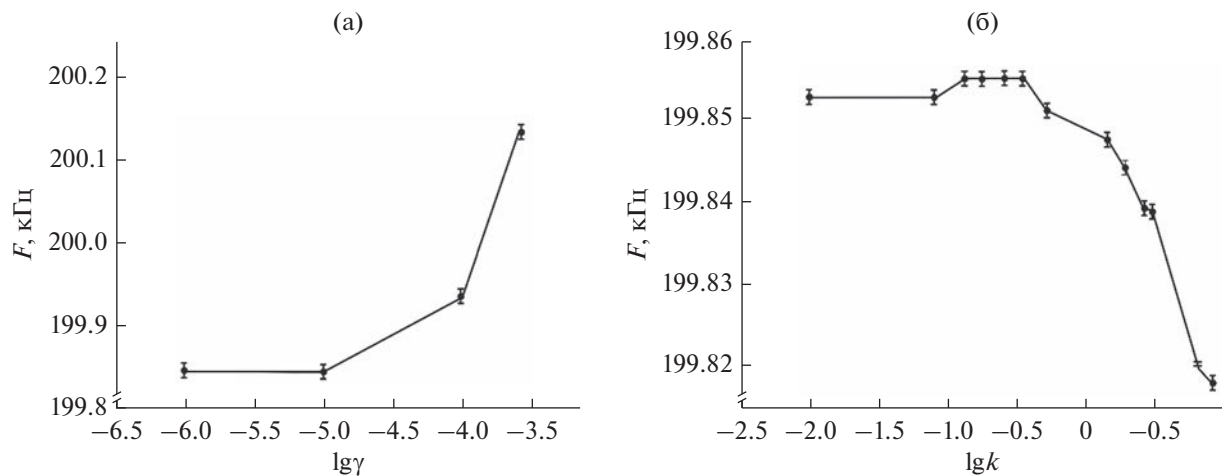


Рис. 4. Рассчитанные зависимости частоты СА от параметров γ (а) и k (б) в логарифмическом масштабе; размер вертикальных черточек отражает влияние разброса ($\approx 10\%$) параметров ($N_{\text{Ер}}, \gamma_{\text{б}}, \tau_{21}$), связанного с эффектом кластеризации активных частиц в АС.

ность сердцевин и некруглость АС; неоднородность и анизотропию оптической оболочки; наличие на ее поверхности переходных слоев [34], влияющих на отражательную способность и “фокусировку” излучения в сердцевину АС, которая имеет весьма малый размер, $d_c \approx 4 \dots 8 \text{ мкм}$. В ис-

следованных лазерных системах эти параметры и факторы известны с недостаточной точностью. Однако обнаруженный эффект — зависимость частоты СА от оптических свойств границы раздела АС—ОС, указывает на важную роль спонтанного излучения, сосредоточенного в ОМ, что открыва-

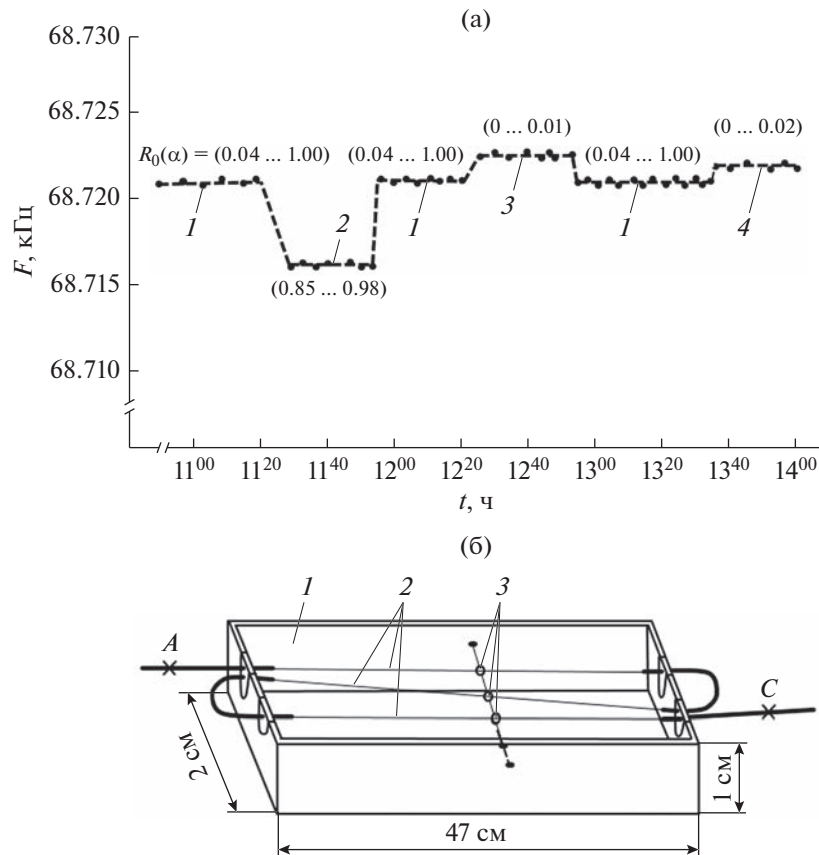


Рис. 5. Зависимость частоты СА в лазерной системе ЭВЛ–МО от отрагательной способности границы раздела оптическая оболочка (Ег) АС–окружающая среда (а): 1 – воздух; 2 – ртуть; 3 – глицерин; 4 – тушь (черная); б – схема кюветы (1) с активным световодом (Ег) АС (2) и с узлом крепления (3) активного световода.

ет новые возможности для управления параметрами лазерного излучения, генерируемого в ВЛ–МО и разработки новых типов резонансных ВОД параметров окружающей среды, связанных с ее оптическими свойствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложены и обоснованы базовые положения, допущения, лежащие в основе предложенной уточненной математической модели, описывающей низкочастотную динамику ВЛ с микроосцилляторами с учетом комплексного влияния спонтанного излучения. Особое внимание уделено спонтанному излучению, сосредоточенному в оболочечных модах активного волокна, влияние которого описано в рамках концепции эффективной длины пробега фотонов СИ(ОМ), рассчитанной в лучевом приближении. Эффект зависимости частоты СА в ВЛ–МО от отрагательной способности внешней поверхности АС подтвержден экспериментально. Предложенная модель применима также для описания полностью волоконных ВЛ–МО с внутрирезонаторными волно-

водными (оптоволоконными) МО, которые весьма технологичны с точки зрения как их изготовления, так и включения в существующие волоконно-оптические схемы, что способствует расширению областей их применения. Отметим важность дальнейшего развития моделей ВЛ–МО с учетом влияния шумов и внешних возмущений, что позволяет исследовать флуктуации в ВЛ–МО и оценить предельно достижимые параметры СА, определяющие, в частности, точностные характеристики ВОД.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aspelmeyer M., Kippenberg T.J., Marquardt F.* Cavity Optomechanics, Nano- and Micromechanical Reso-

- nators Interacting with Light. Heidelberg: Springer, 2014.
2. Гуляев Ю.В., Бугаев А.С., Быстров Р.П., Никитов С.А., Черепенин В.А. Микро- и наноэлектроника в системах радиолокации. М.: Радиотехника, 2013.
 3. Bowen W.P., Milburn G.J. Quantum Optomechanics. Boca Raton: CRC Press, 2016.
 4. Yang W., Gerke S.A., Ng K.W. *et al.* // Sci. Rep. 2015. V. 5. P. 13700.
<https://doi.org/10.1038/srep13700>
 5. Fabert M., Desfarges-Berthelot A., Kermene V. *et al.* // Opt. Express. 2012. V. 20. № 20. P. 22895.
 6. Егоров Ф.А., Потапов В.Т. // Квантов. электрон. 2012. Т. 42. № 9. С. 808.
 7. Егоров Ф.А., Потапов В.Т., Мелькумов М.А. и др. // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. № 8. С. 30.
 8. Егоров Ф.А., Потапов В.Т. // Квантов. электрон. 2020. Т. 42. № 9. С. 808.
 9. Principe D., Wiederhecker G.S., Favero I. *et al.* // IEEE Photonics J. 2018. V. 10. № 3. P. 4500610.
 10. Foley J.M., Ganesan A.V., Lawall J.R. *et al.* // Technical Dig. Conf. "Frontiers in Optics" Washington. 10–16 Oct. 2018. Washington: Opt. Soc. Amer, 2018. paper LW6F.1.
<https://doi.org/10.1364/LS.2018.LW6F.1>
 11. Xiang X., Jingwen M., Xiankai S. // Phys. Rev. A. 2019. V. 99. № 5. P. 053837.
 12. Егоров Ф.А., Потапов В.Т. // Фотон–Экспресс. 2018. № 7. С. 4.
 13. Buks E., Martin I. // Phys. Rev. E 2019. V. 100. № 3. P. 032202.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032202>
 14. Бурков В.Д., Егоров Ф.А., Потапов В.Т. и др. // РЭ. 2000. Т. 45. № 7. С. 880.
 15. Егоров Ф.А., Неугодинов А.П., Никитин В.В. и др. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2009. № 6. С. 45.
 16. Pavlova S., Tunckol E., Pavlov I. // Opt. Express. 2020. V. 28. № 12. P. 18368.
 17. Stewart G. Vijazaghavan K., Whitenett G. *et al.* // J. Lightwave Technol. 2007. V. 25. № 7. P. 1786.
 18. Bogdanovich M.V., Grigor'ev A.V., Kabanov V.V. *et al.* // Lithuanian J. Phys. 2010. V. 50. № 4. P. 413.
 19. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999.
 20. Ter-Mikirtychev V. V. Fundamentals of Fiber Lasers and Fiber Amplifiers. Cham: Springer, 2019.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-02338-0-9>
 21. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. Минск: Навука і тэхніка, 1990.
 22. Красильников В.Н. Параметрические волновые явления в классической электродинамике. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996.
 23. Ladaci A., Girard S., Mescia L. *et al.* // Proc. SPIE. 2018. V. 10524. P. 1052410.
<https://doi.org/10.1117/12.2290381>
 24. Галаган Б.И., Денкер Б.И., Егорова О.Н. и др. // Квантов. электрон. 2018. Т. 48. № 6. С. 550.
 25. Huo Y., Cheo P.K., King G.G. // IEEE J. Quantum Electron. 2005. V. 41. № 4. P. 573.
 26. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics. Waltham: Academic Press, 2012.
 27. Хандохин П.А. Низкочастотная динамика лазеров с инерционной активной средой. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Н. Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2007. 301 с.
 28. Ахманов С.А., Гусев В.Э. // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162. № 3. С. 3.
 29. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985.
 30. Дмитриев А.К., Коновалов А.Н., Ульянов В.А. // Квантов. электрон. 2014. Т. 44. № 4. С. 309.
 31. Ратнер А.М. Квантовые генераторы света с большим угловым расхождением. Киев: Наукова думка, 1970.
 32. Раззахи Д., Хаджесмаилбаджи Ф., Рузбехани М. // Квантов. электрон. 2012. Т. 42. № 8. С. 671.
 33. Barmenkov Y.O., Kiryanov A.V., Cruz J.L. *et al.* // IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics. 2014. V. 20. № 5. P. 1.
<https://doi.org/10.1109/JSTQE.2014.2304423>
 34. Кизель В.А. Отражение света. М.: Наука, 1973.