

ISSN 0032-8235

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 87, вып. 1



МОСКВА 2023

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 87. Iss. 1

EDITORIAL BOARD

I.G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V.G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),

N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),

V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),

Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),

V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.E. Udwalia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian,
I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

January–February

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей <i>Г. В. Горр</i>	3
Об отсутствии управляемости в моделях “наивной механики”. Три исключительных случая <i>И. В. Романов</i>	19
Гиперзвуковое неравновесное обтекание острой кромки <i>А. Л. Анкудинов</i>	26
О задаче определения положения источника внутренних волн <i>В. Г. Байдулов</i>	36
Схемы экспериментов по определению ядер некоторых разностных операторов для сред с нерелаксирующим объемом <i>Д. В. Георгиевский</i>	45
Двоякопериодические контактные задачи для слоя с неизвестной зоной контакта <i>Н. Б. Золотов, Д. А. Пожарский</i>	53
Пространственно-одномерные краевые задачи связанной термоупругости. Метод обобщенных функций <i>Л. А. Алексеева, М. М. Ахметжанова</i>	63
Об одном подходе к построению решения задачи о выбросе угля и метана из краевой зоны пласта <i>Н. В. Черданцев</i>	81
XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике	112

C O N T E N T S

One Class of Resonance Precession Motions of a Rigid Body under the Action of Three Homogeneous Force Fields <i>G. V. Gorr</i>	3
About the Lack of Controllability in Models of “Naive Mechanics”. Three Exceptional Cases <i>I. V. Romanov</i>	19
Hypersonic Nonequilibrium Flow around Sharp Edge <i>A. L. Ankudinov</i>	26
On the Problem of Determining the Position of the Source of Internal Waves <i>V. G. Baydulov</i>	36
Schemes of the Experiments for Determining the Kernels of Some Difference-Type Operators for Media with Nonrelaxing Volume <i>D. V. Georgievskii</i>	45
Doubly Periodic Contact Problems for a Layer with an Unknown Contact Zone <i>N. B. Zolotov, D. A. Pozharskii</i>	53
One-Dimensional Spatial Boundary Value Problems of the Connected Thermoelasticity. Generalized Functions Method <i>L. A. Alexeyeva, M. M. Ahmetzhanova</i>	63
About One Approach to the Construction of a Solution to the Problem of Coal and Methane Emissions from the Marginal Zone of the Formation <i>N. V. Cherdantsev</i>	81
Information	112

УДК 531.38; 531.39

**ОДИН КЛАСС РЕЗОНАНСНЫХ ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ
ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ**© 2023 г. Г. В. Горр^{1,*}¹Государственное бюджетное учреждение “Институт прикладной математики и механики”,
Донецк, Россия

*e-mail: gvgorr@gmail.com

Поступила в редакцию 05.09.2022 г.

После доработки 22.11.2022 г.

Принята к публикации 22.11.2022 г.

В статье рассмотрена задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных силовых полей. Исследованы условия существования прецессионных движений, характеризующихся свойством: скорость прецессии тела в два раза больше скорости собственного вращения. Показано, что тело имеет динамическую симметрию относительно оси, образующей постоянный угол с неподвижным в пространстве вектором. В случае сферического распределения масс тела он равен $\arccos \frac{1}{4}$. Решение уравнений движения тела описывается эллиптическими функциями времени.

Ключевые слова: прецессии тела, резонансные движения, однородные силовые поля

DOI: 10.31857/S0032823523010071, EDN: HVLUQK

1. Введение. Прецессионные движения тела, имея достаточно широкий диапазон применения в приложениях (например, в теории гироскопических систем [1]), большой интерес представляют в теоретических исследованиях, поскольку они дают возможность моделировать эти движения под действием различного класса сил. В динамике тяжелого твердого тела существуют регулярные прецессии гироскопа Лагранжа относительно вертикали [2], регулярные прецессии тела относительно наклонной оси [3], полурегулярные прецессии [4] и прецессии общего вида в решении В. Гесса [5] и прецессии общего вида [6]. Но, как показано в [4], тяжелое твердое тело не может совершать полурегулярную прецессию второго типа. В обобщенных задачах динамики твердого тела (задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с постоянным и переменным гиростатическим моментом, задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона) получены многочисленные классы прецессий [7–9]. Определенный интерес представляют и исследования прецессий системы связанных твердых тел [10], состоящей из гироскопа Лагранжа и Гесса, а также в задаче о движении твердого тела с жидким заполнением [11–14].

В задаче о движении твердого тела в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных силовых полей, известны результаты, посвященные рассмотрению только регулярных прецессий [15–17]. В данной статье изучается класс прецессий общего вида при дополнительном предположении о том, что скорость прецессии тела в два раза больше скорости собственного вращения (он может быть отнесен к резонансным прецессиям тела). Из трех направлений, которые характеризуют результиру-

ющие силы однородных полей, выделено приоритетное направление с единичным вектором γ . Поскольку движение тела является прецессией, то постоянен угол между вектором γ и вектором $\mathbf{a}$, неизменно связанным с твердым телом. В результате проведенных исследований по нахождению условий существования резонансных прецессионных движений установлено, что векторы, определяющие центры приложения сил других направлений γ_1, γ_2 ортогональны. Получено алгебраическое уравнение второго порядка на угол нутации, коэффициенты которого зависят от главных моментов инерции тела. Если тело имеет сферическое распределение масс, то этот угол равен $\arccos \frac{1}{4}$. Нахождение основных переменных уравнений движения сведено к обращению эллиптических интегралов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через $\gamma, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ единичные векторы, характеризующие направления сил $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ каждого из полей; C, C_1, C_2 — центры приведения сил; $\mathbf{s} = P \mathbf{OC}$, $\mathbf{r} = P_1 \mathbf{OC}_1$, $\mathbf{p} = P_2 \mathbf{OC}_2$; $Oxyz$ — подвижная система координат, O — неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе $Oxyz$ имеет значение $A = (A_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$). Тело вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3)$ ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — единичные векторы системы $Oxyz$). Для векторов $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{p}$ запишем соотношения

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{i}_1 + s_2 \mathbf{i}_2 + s_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{r} = r_1 \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{p} = p_1 \mathbf{i}_1 + p_2 \mathbf{i}_2 + p_3 \mathbf{i}_3 \quad (2.1)$$

Тогда уравнения движения тела представим в виде

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \gamma + \mathbf{r} \times \gamma^{(1)} + \mathbf{p} \times \gamma^{(2)} \quad (2.2)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\gamma}^{(1)} = \gamma^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\gamma}^{(2)} = \gamma^{(2)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.3)$$

где точка над переменными $\boldsymbol{\omega}, \gamma, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ обозначает дифференцирование по времени t . В формулах (2.2), (2.3) полагаем

$$\gamma \cdot \gamma^{(1)} = 0, \quad \gamma^{(2)} = \gamma \times \gamma^{(1)}, \quad |\gamma| = 1, \quad |\gamma^{(1)}| = 1, \quad (2.4)$$

то есть направления силовых полей будут характеризоваться тройкой $\gamma, \gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Тогда очевидны равенства $\mathbf{P} = P\gamma, \mathbf{P}_i = P_i \gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора γ . Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС)

$$\mathbf{a} \cdot \gamma = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0), \quad (2.5)$$

где θ_0 — угол между векторами $\mathbf{a}$ и γ ($\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, |\mathbf{a}| = 1$). Вектор угловой скорости тела на ИС (2.5) представим так [7]:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \gamma \quad (2.6)$$

Переменные φ, ψ и постоянную θ_0 можно трактовать, как углы Эйлера. Используя метод [7], запишем значение вектора $\gamma^{(i)}$:

$$\gamma^{(1)} = b_0 [a_0 \gamma \sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a} \sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma) \cos(\psi + \psi_0)], \quad (2.7)$$

где $b_0 = \frac{1}{a'_0}$ ($a'_0 = \sin \theta_0$), ψ_0 — постоянная.

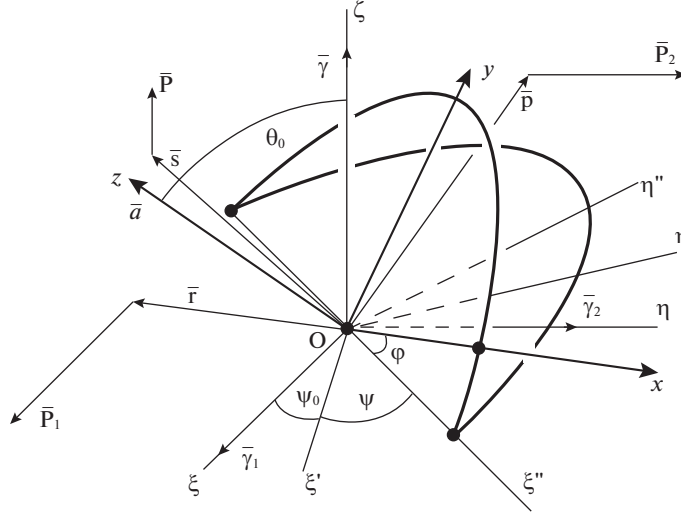


Рис. 1. Геометрическая трактовка прецессий твердого тела.

Значение вектора $\gamma^{(2)}$ найдем по второй формуле системы (2.4):

$$\gamma^{(2)} = b_0 [\mathbf{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0 \gamma \cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma) \sin(\psi + \psi_0)] \quad (2.8)$$

Таким образом, при получении (2.7), (2.8) полагалось, что $\mathbf{a} \times \gamma \neq \mathbf{0}$, то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор $\mathbf{i}_3$ по вектору $\mathbf{a}$. Тогда на основании ИС (2.5), первого уравнения из (2.3) имеем [6, 7]

$$\gamma = a'_0 \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_2 + a_0 \mathbf{i}_3 \quad (\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}) \quad (2.9)$$

На основании (2.6), (2.9) запишем компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} + a_0 \dot{\psi} \quad (2.10)$$

На рис. 1 приведена геометрическая трактовка прецессий тела относительно вектора γ ($O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат).

Замечание 1. При описании кинематических свойств в виде соотношений (2.5)–(2.10) использован метод [7, 8], который отличается от методов, применяемых в [11, 14–17].

Замечание 2. Уравнения (2.2), (2.3) имеют интеграл энергии

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \gamma + \mathbf{r} \cdot \gamma^{(1)} + \mathbf{p} \cdot \gamma^{(2)}) = 2E, \quad (2.11)$$

где E — постоянная. Как было показано [6, 7], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (2.11) значительно упрощается.

3. Преобразование уравнения (2.2) на ИС (2.5). Внесем в уравнение (2.2) значение $\boldsymbol{\omega}$ из (2.6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе $\mathbf{a}, \gamma, \mathbf{a} \times \gamma$ с учетом (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \gamma) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\gamma \times \gamma)] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \gamma)] - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \gamma) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \mathbf{p} \cdot \gamma\} - \\ & - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{\mathbf{r} \cdot \gamma - a_0[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \gamma)]\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2\dot{\phi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}^2[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times A\mathbf{a})] - \\ & - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}) - \\ & - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})\} - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p})]\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}[A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[A\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\phi}\dot{\psi} \left[2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0'^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \right] + \\ & + \dot{\phi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) + a_0(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \\ & - a_0'[(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \cos(\psi + \psi_0) - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)] = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\text{Sp}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ — след матрицы A .

По аналогии с (3.1)–(3.3) распишем интеграл (2.11) на ИС (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\phi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\phi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - 2\{(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + b_0[\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \\ & - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})) + \cos(\psi + \psi_0) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - a_0(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}))]\} = 2E \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= a_0'(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + a_0 s_3 \\ \tilde{f}_0(\varphi) &= a_0'(s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) \\ f_1(\varphi) &= a_0' \left[(a_0 r_1 + p_2) \sin \varphi + (a_0 r_2 - p_1) \cos \varphi - a_0' r_3 \right] \\ f_2(\varphi) &= a_0' \left[(r_2 - a_0 p_1) \sin \varphi - (a_0 p_2 + r_1) \cos \varphi + a_0' p_3 \right] \\ f_3(\varphi) &= a_0' [(p_1 - a_0 r_2) \sin \varphi + (p_2 + a_0 r_1) \cos \varphi] \\ f_4(\varphi) &= a_0' [(r_1 + a_0 p_2) \sin \varphi + (r_2 - a_0 p_1) \cos \varphi] \\ f_5(\varphi) &= a_0' \left[a_0 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a_0' s_3 \right] \\ f_6(\varphi) &= -a_0' \left[a_0' (r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi) + a_0' r_3 \right] \\ f_7(\varphi) &= a_0' \left[a_0' (p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) + a_0' p_3 \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сначала запишем интеграл (3.4) в силу (3.5):

$$\begin{aligned} & (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\phi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\phi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - \\ & - 2[f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi) \sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi) \cos(\psi + \psi_0))] = 2E \end{aligned} \quad (3.6)$$

Затем обратимся к уравнениям (3.1)–(3.3). На основании (3.5) имеем

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \tilde{f}_0(\varphi) - \\ & - b_0(f_3(\varphi) \sin(\psi + \psi_0) + f_4(\varphi) \cos(\psi + \psi_0)) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - 2\dot{\phi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\boldsymbol{\gamma})] - \dot{\phi}^2[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\mathbf{a})] - \\ & - b_0[f_1(\varphi) \cos(\psi + \psi_0) - f_2(\varphi) \sin(\psi + \psi_0)] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{\phi}[\mathbf{a} \cdot (\gamma \times A\mathbf{a})] + \dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\gamma \times A\gamma)] + \dot{\phi}\dot{\psi}[2(A\gamma \cdot \gamma) - \\
& - a_0'^2 \text{Sp}(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \gamma)] + \dot{\phi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \gamma) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \\
& + \dot{\psi}^2[a_0(A\gamma \cdot \gamma) - (A\mathbf{a} \cdot \gamma)] + f_5(\phi) + f_6(\phi) \sin(\psi + \psi_0) + \\
& + f_7(\phi) \cos(\psi + \psi_0) = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Представление соотношений (3.1)–(3.4) в виде (3.6)–(3.9) связано с решением задачи о замене одного из уравнений (3.7)–(3.9) интегралом (3.6). Вычислим производную по времени от левой части уравнения (3.6), используя соотношения

$$\dot{\gamma} = \dot{\phi}(\gamma \times \mathbf{a}), \quad \dot{f}_0 = -\dot{\phi}\tilde{f}_0(\phi), \quad \dot{f}_1(\phi) = \dot{\phi}f_3(\phi), \quad \dot{f}_2(\phi) = \dot{\phi}f_4(\phi)$$

Если учесть в полученном уравнении соотношения (3.7), (3.8), то имеем тождество. Данное свойство выполняется в случае, когда одно из уравнений (3.7), (3.8) не вырождается в тождество (см. разд. 6, уравнения (6.2)). Исключая этот вариант, можно рассматривать интеграл (3.6) совместно с одним из указанных уравнений, но уравнение (3.9) необходимо учитывать всегда.

4. Исследование уравнений (3.6)–(3.9) в случае $\psi = 2\phi$. В динамике твердого тела известны решения, описывающие прецессии при условии

$$\psi = 2\phi \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что $\dot{\psi} = 2\dot{\phi}$, то есть скорость прецессии в два раза больше скорости собственного вращения. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_0'(a_0r_1 + p_2), \quad b_2 = a_0'(a_0r_2 - p_1), \quad c_1 = a_0'(r_2 - a_0p_1) \\
c_2 &= -a_0'(a_0p_2 + r_1), \quad b_0' = -(a_0')^2r_3, \quad c_0 = (a_0')^2p_3
\end{aligned} \tag{4.2}$$

В силу (4.2) функции $f_i(\phi)$ ($i = \overline{1,3}$) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
f_1(\phi) &= b_1 \sin \phi + b_2 \cos \phi + b_0', \quad f_1(\phi) = c_1 \sin \phi + c_2 \cos \phi + c_0 \\
f_3(\phi) &= -b_2 \sin \phi + b_1 \cos \phi, \quad f_4(\phi) = -c_2 \sin \phi + c_1 \cos \phi
\end{aligned} \tag{4.3}$$

На основании (4.1)–(4.3) найдем функции

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\phi) &= f_1(\phi) \cos(2\phi + \psi_0) - f_2(\phi) \sin(2\phi + \psi_0) = H_3 \sin 3\phi + \\
& + G_3 \cos 3\phi + H_2 \sin 2\phi + G_2 \cos 2\phi + H_1 \sin \phi + G_1 \cos \phi
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\phi) &= f_1(\phi) \sin(2\phi + \psi_0) + f_2(\phi) \cos(2\phi + \psi_0) = G_3 \sin 3\phi - \\
& - H_3 \cos 3\phi + G_2 \sin 2\phi - H_2 \cos 2\phi + G_1 \sin \phi - H_1 \cos \phi
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3(\phi) &= f_3(\phi) \sin(2\phi + \psi_0) + f_4(\phi) \cos(2\phi + \psi_0) = \\
& = H_3 \sin 3\phi + G_3 \cos 3\phi - H_1 \sin \phi - G_1 \cos \phi,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
H_3 &= r_{12} \cos \psi_0 - r_{21} \sin \psi_0, \quad G_3 = r_{21} \cos \psi_0 + r_{12} \sin \psi_0 \\
H_2 &= a_0'^2(r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_2 = -a_0'^2(r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0) \\
H_1 &= p_{12} \sin \psi_0 - p_{21} \cos \psi_0, \quad G_1 = -p_{21} \sin \psi_0 - p_{12} \cos \psi_0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{a'_0(a_0 + 1)}{2}(r_1 + p_2), & r_{21} &= \frac{a'_0(a_0 + 1)}{2}(r_2 - p_1) \\ p_{12} &= \frac{a'_0(1 - a_0)}{2}(r_2 + p_1), & p_{21} &= \frac{a'_0(1 - a_0)}{2}(p_2 - r_1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим уравнения (3.6)–(3.9) при условиях (4.1) и $A = (A_{ij})$. Тогда на первом этапе распишем уравнение (3.6). Положим

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + 4(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 4(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \\ &= Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi + Q_1 \sin \varphi + L_1 \cos \varphi + L_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} Q_2 &= 4a_0'^2 A_{12}, & L_2 &= 2a_0'^2 (A_{22} - A_{11}), & Q_1 &= 4a_0'(1 + 2a_0)A_{13} \\ L_1 &= 4a_0'(1 + 2a_0)A_{23}, & L_0 &= A_{33}(1 + 2a_0)^2 + 2a_0'^2 (A_{11} + A_{22}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Уравнение (3.6), в силу условия (4.1) и обозначений (4.7), (4.9), таково:

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}^2 (Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi + Q_1 \sin \varphi + L_1 \cos \varphi + L_0) = \\ &= 2 \left[b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0 \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$S_1 = a_0' s_1 + \frac{G_1}{a_0'}, \quad S_2 = a_0' s_2 - \frac{H_1}{a_0'}, \quad S_0 = a_0 s_3 + E \quad (4.12)$$

На основании (4.1), (4.4), (4.10) уравнение (3.8) представим в развернутом виде. Для этой цели введем обозначения

$$\begin{aligned} F_2(\varphi) &= (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + 2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}Q_2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2}L_2 \cos 2\varphi + \\ &+ \tilde{Q}_1 \sin \varphi + \tilde{L}_1 \cos \varphi + Q_0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} F_3(\varphi) &= 4[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\boldsymbol{\gamma})] + [\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\mathbf{a})] = \\ &= L_2 \sin 2\varphi - Q_2 \cos 2\varphi + \tilde{L}_1 \sin \varphi - \tilde{Q}_1 \cos \varphi, \end{aligned}$$

где Q_2, L_2 имеют значения (4.10), а $\tilde{L}_1, \tilde{Q}_1, Q_0$ зависят от параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= a_0'(1 + 4a_0)A_{13}, & \tilde{L}_1 &= a_0'(1 + 4a_0)A_{23} \\ Q_0 &= a_0(1 + 2a_0)A_{33} + a_0'^2 (A_{11} + A_{22}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

В силу соотношений (4.4), (4.13) и учета (4.1), из уравнения (3.8) получим

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} (Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi + 2\tilde{Q}_1 \sin \varphi + 2\tilde{L}_1 \cos \varphi + 2Q_0) = \\ &= 2 \left[\dot{\varphi}^2 (L_2 \sin 2\varphi - Q_2 \cos 2\varphi + \tilde{L}_1 \sin \varphi - \tilde{Q}_1 \cos \varphi) + \right. \\ &\left. + b_0 (H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Уравнения (4.11), (4.15) записаны в полном представлении, что связано с необходимостью использовать их в дальнейших преобразованиях. Но для исследования конкретных условий на параметры задачи, при которых уравнения совместны, целесообразно

представить их в компактном виде. Обозначим правую часть уравнения (4.11) через $2R_1$, где

$$R_1(\varphi) = b_0 \left(G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi \right) + \left(S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0 \right) \quad (4.16)$$

Тогда, на основании (4.11), (4.16) имеем

$$\dot{\varphi}^2 F_1(\varphi) = 2R_1(\varphi) \quad (4.17)$$

Аналогично запишем (4.15), учтя формулы (4.4), (4.15):

$$\ddot{\varphi} F_2(\varphi) = \dot{\varphi} F_3(\varphi) + b_0 \Phi_1(\varphi) \quad (4.18)$$

Продифференцируем обе части уравнения (4.17) по t и внесем в него $\ddot{\varphi}$ из (4.18). В результате получим уравнение, содержащее $\dot{\varphi}^2$. Поэтому в нем необходимо избавиться от $\dot{\varphi}^2$ с помощью уравнения (4.17). Тогда найдем алгебраическое уравнение

$$R_1(\varphi)[2F_1(\varphi)F_3(\varphi) + F_2(\varphi)F_1'(\varphi)] + F_1(\varphi)[b_0 F_1(\varphi)\Phi_1(\varphi) - R_1'(\varphi)F_2(\varphi)] = 0 \quad (4.19)$$

Если учесть в (4.19) функции (4.6), (4.9), (4.13), то имеем тригонометрический многочлен пятого порядка

$$M_5 \sin 5\varphi + N_5 \cos 5\varphi + M_4 \sin 4\varphi + N_4 \cos 4\varphi + M_3 \sin 3\varphi + N_3 \cos 3\varphi + M_2 \sin 2\varphi + N_2 \cos 2\varphi + M_1 \sin \varphi + N_1 \cos \varphi + M_0, \quad (4.20)$$

где M_i ($i = \overline{0,5}$), N_i ($i = \overline{1,4}$) — постоянные, не зависящие от φ , должны быть равны нулю. Рассмотрим равенства $M_5 = 0$, $N_5 = 0$. Они приводят к условиям

$$Q_2 G_3 + L_2 H_3 = 0, \quad Q_2 H_3 - L_2 G_3 = 0 \quad (4.21)$$

Изучим вариант $G_3^2 + H_3^2 \neq 0$. Тогда из (4.21) получим

$$Q_2 = 0, \quad L_2 = 0 \quad (4.22)$$

Используя в равенствах (4.22) обозначения (4.10), находим условия на тензор инерции A :

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = A_{11} \quad (4.23)$$

Запишем функции $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$, $F_3(\varphi)$, $R_1(\varphi)$, $R_1'(\varphi)$, сохраняя члены, имеющие максимальные аргументы тригонометрических функций

$$\begin{aligned} F_3(\varphi) &= Q_1 \sin \varphi - L_1 \cos \varphi, & F_2(\varphi) &= \tilde{Q}_1 \sin \varphi + \tilde{L}_1 \cos \varphi + \dots \\ F_1(\varphi) &= \tilde{L}_1 \sin \varphi + \tilde{Q}_1 \cos \varphi + \dots, & R_1(\varphi) &= b_0 \left(G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots \right) \\ R_1'(\varphi) &= 3b_0 \left(G_3 \cos 3\varphi + H_3 \sin 3\varphi + \dots \right), & \Phi_1(\varphi) &= H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Обратимся к уравнению (4.19). Для его представления в наглядном виде вычислим $2F_1(\varphi)F_3(\varphi) + F_2(\varphi)F_1'(\varphi)$. Используя (4.24), а также (4.10), (4.14), имеем

$$\begin{aligned} 2F_1(\varphi)F_3(\varphi) + F_2(\varphi)F_1'(\varphi) &= \\ &= 2a_0^2(1 + 2a_0)(1 + 4a_0) \left[(A_{23}^2 - A_{13}^2) \sin 2\varphi - 2A_{13}A_{23} \cos 2\varphi \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках во втором слагаемом уравнения (4.19). На основании принятых ранее обозначений имеем

$$b_0 F_1(\varphi) \Phi_1(\varphi) - R_1'(\varphi) F_2(\varphi) = \\ = (1 - 4a_0) (A_{13}^2 \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi) (G_3 \cos 3\varphi + H_3 \sin 3\varphi) + \dots \quad (4.26)$$

Запишем уравнение (4.19), в силу (4.16), (4.24)–(4.26)

$$(1 + 2a_0)(1 + 4a_0)(G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots) \times \\ \times [(A_{23}^2 - A_{13}^2) \sin 2\varphi - 2A_{13}A_{23} \cos 2\varphi + \dots] + \\ + (1 + 2a_0)(1 - 4a_0)(G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots) \times \\ \times [(A_{23}^2 - A_{13}^2) \cos 2\varphi + 2A_{13}A_{23} \sin 2\varphi + \dots] = 0 \quad (4.27)$$

Рассмотрим случай $1 + 2a_0 = 0$. Тогда из (4.27) следует, что коэффициенты при $\sin 5\varphi$, $\cos 5\varphi$ равны нулю. Для дальнейшего изучения уравнения (4.19) положим в (4.9), (4.13), (4.14) $a_0 = -\frac{1}{2}$:

$$F_1(\varphi) = 4a_0'^2 A_{11}, \quad F_1'(\varphi) = 0 \\ F_2(\varphi) = 2a_0' \left[a_0 (A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi) + a_0' A_{11} \right] \\ F_3(\varphi) = 2a_0' a_0 (A_{23} \sin \varphi - A_{13} \cos \varphi) \quad (4.28)$$

Функции $R_1(\varphi)$, $R_1'(\varphi)$, $\Phi_1(\varphi)$, в силу предположения $H_3 \neq 0$, $G_3 \neq 0$ имеют прежний вид. На основании (4.28) формул для $R_1(\varphi)$ и $R_1'(\varphi)$ из (4.24) можно сделать заключение о том, что коэффициенты при $\sin 4\varphi$, $\cos 4\varphi$ в уравнении (4.19) обращаются в нуль при условии $a_0 = 0$, что невозможно, так как $a_0 = -\frac{1}{2}$, или при выполнении равенств $A_{23} = 0$, $A_{13} = 0$. Рассмотрение уравнения (4.19) в последнем случае приведет к заключению о том, что оно может быть тождеством по φ только при $H_3 = 0$, $G_3 = 0$.

Распишем уравнение (4.27) при $1 + 2a_0 \neq 0$, приняв во внимание только коэффициенты при $\sin 5\varphi$, $\cos 5\varphi$:

$$a_0 (K_1 \cos 5\varphi - K_2 \sin 5\varphi) + \dots, \quad (4.29)$$

где

$$K_1 = 2H_3 A_{13} A_{23} - G_3 (A_{23}^2 - A_{13}^2), \quad K_2 = H_3 (A_{23}^2 - A_{13}^2) + 2G_3 A_{13} A_{23} \quad (4.30)$$

Если в (4.29) полагать $a_0 \neq 0$, то в силу предположения $H_3 \neq 0$, $G_3 \neq 0$, из (4.25), (4.30) получим

$$A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0 \quad (4.31)$$

Пусть в (4.29) $a_0 = 0$. Тогда, на основании (4.10), (4.13), (4.24), из уравнения (4.19) установим его вид, указанный в (4.20):

$$(A_{13} H_3 - A_{23} G_3) \cos 4\varphi - (A_{23} H_3 + A_{13} G_3) \sin 4\varphi + \dots \quad (4.32)$$

Из (4.32) следуют равенства $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$. Тогда $F_1 = L_0$, $F_2 = Q_0$, $F_3 = 0$. Уравнение (4.19) упрощается:

$$L_0 (H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + \dots) - 3Q_0 (G_3 \cos 3\varphi + H_3 \sin 3\varphi + \dots) = 0, \quad (4.33)$$

где

$$L_0 = (1 + 2a_0)^2 A_{33} + 4a_0^2 A_{11}, \quad Q_0 = a_0 (1 + 2a_0) A_{33} + 2a_0^2 A_{11} \quad (4.34)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при $\sin 3\varphi$, $\cos 3\varphi$ в уравнении (4.33), в силу (4.34) получим уравнение

$$2a_0(A_{33} - A_{11}) = 2A_{11} - A_{33} \quad (4.35)$$

Других условий из (4.33) не следует. Поэтому обратимся к уравнению (3.9), полагая в нем $A_{12} = 0$, $A_{22} = A_{11}$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$. Очевидно, что коэффициент при производной $\dot{\varphi}$ равен нулю. Для того, чтобы расписать (3.9), запишем основные формулы. В силу (3.5), (4.5), (4.24), имеем

$$\begin{aligned} \Phi_4(\varphi) &= f_6(\varphi) \sin(2\varphi + \psi_0) + f_7(\varphi) \cos(2\varphi + \psi_0) = \\ &= \frac{a_0^2}{2} (D_1 \sin 3\varphi + D_2 \cos 3\varphi) + \dots \\ R_1 &= -\frac{1}{2} (1 + a_0) (D_1 \sin 3\varphi + D_2 \cos 3\varphi) + \dots, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= (p_1 - r_2) \cos \psi_0 - (p_2 + r_1) \sin \psi_0 \\ D_2 &= (p_1 - r_2) \sin \psi_0 + (p_2 + r_1) \cos \psi_0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Тогда, в силу (4.36), (4.37) и принятых ранее условий из (3.9), для слагаемых, содержащих $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$, имеем

$$\left\{ -\frac{2}{L_0} [2a_0 A_{11} - (1 + 2a_0) A_{33}] (1 + a_0) + \frac{1}{2} \right\} (D_1 \sin 3\varphi + D_2 \cos 3\varphi) + \dots$$

Из данного соотношения следует условие на параметры

$$4A_{11}(a_0 + 1)(3a_0 - 1) - A_{33}(1 + 2a_0)(5 + 6a_0) = 0 \quad (4.38)$$

Очевидно, что уравнения (4.35), (4.38) относительно параметра a_0 не совместны.

Итак, в равенствах (4.29), (4.30) необходимо принять $H_3 = 0$, $G_3 = 0$. Тогда в равенствах (4.21) необходимо принять

$$H_3 = 0, \quad G_3 = 0 \quad (4.39)$$

5. Случай $H_3 = 0$, $G_3 = 0$. В дальнейшем, на основании результатов разд. 4 и формул (4.39), полагаем, что $Q_2^2 + L_2^2 \neq 0$. Из обозначений для H_3 , G_3 из системы (4.7), в силу (4.8), получим

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1 \quad (5.1)$$

При условиях (5.1) значения $\Phi_i(\varphi)$ ($i = \overline{1, 4}$) таковы:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\varphi) &= H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi \\ \Phi_2(\varphi) &= G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi + G_1 \sin \varphi - H_1 \cos \varphi \\ \Phi_3(\varphi) &= -(H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi) \\ \Phi_4(\varphi) &= b_0 a_0 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + \tilde{H}_1 \sin \varphi + \tilde{G}_1 \cos \varphi,\end{aligned}\tag{5.2}$$

где на основании (4.7), (5.1) коэффициенты многочленов (5.2) имеют вид

$$\begin{aligned}H_2 &= a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), & G_2 &= -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0) \\ H_1 &= a_0' (1 - a_0) (r_2 \sin \psi_0 - r_1 \cos \psi_0), & G_1 &= -a_0' (1 - a_0) (r_1 \sin \psi_0 + r_2 \cos \psi_0) \\ \tilde{H}_1 &= a_0'^2 (r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0), & \tilde{G}_1 &= -a_0'^2 (r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0)\end{aligned}\tag{5.3}$$

Если в (5.3) параметры $H_2 = 0$, $G_2 = 0$, то должны выполняться условия $p_3 = 0$, $r_3 = 0$. Тогда на основании равенств (5.1) векторы $\mathbf{p} = (r_2, -r_1, 0)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ ортогональны. Когда выполнены равенства $H_1 = 0$, $G_1 = 0$, то из (5.3) следует, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ направлены по оси, содержащей вектор $\mathbf{a}$.

Рассмотрим уравнения (4.11), (4.15), полагая в них $A_{11} \neq A_{22}$, $A_{12} \neq 0$, то есть $Q_2 \neq 0$, $L_2 \neq 0$. В силу условий (4.38), функция $R_1(\varphi)$ из (4.16) упрощается, а функции $F_i(\varphi)$ ($i = \overline{1, 3}$) сохраняют прежний вид. Запишем их так:

$$\begin{aligned}F_1(\varphi) &= Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi + \dots, & F_2(\varphi) &= \frac{1}{2} (Q_2 \sin 2\varphi + L_2 \cos 2\varphi) + \dots \\ F_3(\varphi) &= L_2 \sin 2\varphi - Q_2 \cos 2\varphi + \dots\end{aligned}\tag{5.4}$$

Как показывают вычисления, в данном случае целесообразно рассматривать не уравнение (3.8), а уравнение (3.7) (совместно с уравнением (3.6)).

На основании соотношения (4.6) при условии $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$ уравнение (3.7) представим в виде

$$F_4(\varphi)\ddot{\varphi} = F_5(\varphi)\dot{\varphi}^2 - S_1 \cos \varphi + S_2 \sin \varphi,\tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned}F_4(\varphi) &= 2a_0' (A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos 2\varphi) + (1 + 2a_0) A_{33} \\ F_5(\varphi) &= N_2 \sin 2\varphi + K_2 \cos 2\varphi + N_1 \cos \varphi + K_1 \sin \varphi,\end{aligned}\tag{5.6}$$

где

$$N_2 = 2a_0'^2 (A_{11} - A_{22}), \quad K_2 = 4a_0'^2 A_{12}, \quad N_1 = 4a_0 a_0' A_{13}, \quad K_1 = -4a_0 a_0' A_{23}$$

Запишем уравнение (4.11), полагая в нем $H_3 = 0$, $G_3 = 0$

$$F_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 = 2R_1(\varphi),\tag{5.7}$$

где

$$R_1(\varphi) = b_0 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0\tag{5.8}$$

Если $F_4(\varphi) \neq 0$, то из (5.5), (5.7) следует

$$R_1(\varphi) \left[2F_1(\varphi)F_5(\varphi) + F_4(\varphi)F_1'(\varphi) \right] - \\ - F_1(\varphi) \left[F_1(\varphi)(S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi) + R_1'(\varphi)F_4(\varphi) \right] = 0 \quad (5.9)$$

В особом случае $F_4(\varphi) \equiv 0$ из (5.5), (5.7) следует

$$2R_1(\varphi)F_5(\varphi) - F_1(\varphi)(S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi) = 0 \quad (5.10)$$

Из уравнения (5.10) в силу $A_{12} \neq 0$, $A_{22} \neq A_{11}$ получим $H_2 = 0$, $G_2 = 0$. Таким образом, $F_4(\varphi) \equiv 0$ и справедливо уравнение (5.9), в котором $R_1(\varphi)$ при $H_2 = 0$, $G_2 = 0$ принимает вид

$$R_1(\varphi) = S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0 \quad (5.11)$$

Подставляя в уравнение (5.9) $F_1(\varphi)$ из (5.4), $F_4(\varphi)$ и $F_5(\varphi)$ из (5.6), $R_1(\varphi)$ из (5.11), потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ . Тогда, приравнявая к нулю коэффициенты при $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$, найдем равенства

$$Q_2 S_1 - L_2 S_2 = 0, \quad Q_2 S_2 + L_2 S_1 = 0,$$

из которых, в силу предположения $Q_2 \neq 0$, $L_2 \neq 0$, следуют условия $S_1 = 0$, $S_2 = 0$.

Рассматривая уравнение (5.9) при данных равенствах, получим $S_0 = 0$, то есть $\dot{\varphi}^2$ из (5.7) обращается в нуль, что невозможно. Итак, установлено, что должны выполняться условия (4.22), (4.23), (5.1).

6. Случай $H_3 = 0$, $G_3 = 0$, $Q_2 = 0$, $L_2 = 0$. Запишем необходимые соотношения для дальнейших преобразований:

$$F_1(\varphi) = 4a_0'(1 + 2a_0)(A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos \varphi) + L_0 \\ F_4(\varphi) = 2a_0'(A_{13} \sin \varphi + A_{23} \cos 2\varphi) + (1 + 2a_0)A_{33} \\ F_5(\varphi) = 4a_0a_0'(A_{13} \cos \varphi - A_{23} \sin \varphi) \quad (6.1)$$

Функция $R_1(\varphi)$ из (5.8) не изменяет своего значения. В силу (5.5) случай $F_4(\varphi) = 0$, $F_5(\varphi) = 0$ является особым. Для него в (6.1) необходимо положить $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $a_0 = -\frac{1}{2}$, а в (5.10) — $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Уравнения (5.7), (4.15) примут вид

$$L_0 \dot{\varphi}^2 = 2 \left[b_0 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_0 \right] \\ Q_0 \ddot{\varphi} = b_0 (H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi) \quad (6.2)$$

Из уравнений (6.2) на основании значений $L_0 = 4a_0'^2 A_{11}$, $Q_0 = 2a_0'^2 A_{11}$ положим, что $H_1 = 0$, $G_1 = 0$. Тогда из (5.3) следует $r_1 = 0$, $r_2 = 0$. В исследуемом случае уравнение (3.7) вырождается и поэтому необходимо обращаться к уравнению (3.9). На основании принятых условий и обозначений (3.5) получим

$$4a_0a_0'^2 A_{11} \dot{\varphi}^2 = a_0'^2 s_3 + a_0a_0' (H_2 \cos 2\varphi - G_2 \sin 2\varphi)$$

Если это уравнение рассматривать совместно с первым уравнением из (6.2) при условии $a_0 = -\frac{1}{2}$, то получим $H_2 = 0$, $G_2 = 0$. Следовательно, в силу первого уравнения из (6.2) установим для $\dot{\varphi}$ постоянное значение, что исключается в данной статье.

Рассмотрим уравнение (5.9) в случае (6.1) и потребуем, чтобы при подстановке (6.1) в (5.9) последнее будет тождеством по φ . Тогда, исключая случай $a_0 = -\frac{1}{2}$, получим два независимых варианта условий на параметры:

$$H_2 = 0, \quad L_2 = 0 \quad (A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0) \quad (6.3)$$

$$A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0 \quad (H_2^2 + L_2^2 \neq 0) \quad (6.4)$$

Изучим вариант (6.3). Рассмотрим уравнение (5.9) при $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$, тогда из (5.9) найдем $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Учитывая эти условия, а также равенства (6.3), из (5.8) установим $R_1(\varphi) = S_0$, то есть $R_1'(\varphi) = 0$. Покажем, что параметр $S_0 = 0$. Обратимся к уравнению (5.9), полагая в нем $R_1(\varphi) = S_0$ ($R_1'(\varphi) = 0$). Тогда указанное свойство следует из (5.9), если

$$F^*(\varphi) = 2F_1(\varphi)F_5(\varphi) + F_4(\varphi)F_1'(\varphi) \neq 0 \quad (6.5)$$

Функцию $F^*(\varphi)$ из (6.5) будем изучать при значениях (6.1). Поскольку $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$, то $F^*(\varphi) = 0$ в случае, когда параметр $a_0 = -\frac{1}{4}$ и выполняется следующее условие на a_0 и другие параметры $2L_0 = A_{33}$:

$$2 \left[A_{33} (1 + 2a_0)^2 + 4a_0^2 A_{33} \right] - A_{33} = 0 \quad (6.6)$$

Подставляя $a_0 = -\frac{1}{4}$ в уравнение (6.6), получим $A_{33} = 15A_{11}$. Так как в силу неравенств треугольника на главные моменты тела $A_{33} < 2A_{11}$, то условие $A_{33} = 15A_{11}$ выполняться не может. Следовательно, $S_0 = 0$ и из (6.2) следует $\dot{\varphi}^2 = 0$, что невозможно. Это свойство означает, что, наряду с равенствами $H_2 = 0$, $L_2 = 0$, необходимо полагать $Q_1 = 0$, $L_1 = 0$. Так как $H_2 = 0$, $L_2 = 0$, то из (5.3) следуют равенства $r_3 = 0$, $p_3 = 0$.

7. Случай динамической симметрии тела. Результаты, полученные ранее, показывают, что исследуемое решение имеет место при следующих условиях:

$$Q_2 = 0, \quad L_2 = 0, \quad Q_1 = 0, \quad L_1 = 0, \quad H_3 = 0, \quad G_3 = 0, \quad H_2 = 0, \quad G_2 = 0, \quad (7.1)$$

которые, в силу обозначений, отвечают равенствам

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = A_{11}, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0 \quad (7.2)$$

$$p_1 = r_2, \quad p_2 = -r_1, \quad p_3 = 0, \quad r_3 = 0 \quad (7.3)$$

Запишем (4.17) с учетом условий (7.2), (7.3):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{L_0} (S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0), \quad (7.4)$$

где

$$L_0 = (1 + 2a_0)^2 A_{33} + 4a_0^2 A_{11} \quad (7.5)$$

Обратимся к уравнению (4.19), в котором $F^*(\varphi) = 0$, $F_3(\varphi) = 0$:

$$b_0 L_0 (H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi) - Q_0 (S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi) = 0, \quad (7.6)$$

где

$$Q_0 = \left[a_0 (1 + 2a_0) A_{33} + 2a_0^2 A_{11} \right] \quad (7.7)$$

Используя значения H_1, G_1 , полученные из (4.7) в силу (7.3):

$$H_1 = a_0' (1 - a_0) (r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0), \quad G_1 = a_0' (1 - a_0) (r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0), \quad (7.8)$$

а также параметры (4.12), из (7.6) получим

$$s_1 = \frac{(1 - a_0) R_0 (r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0)}{a_0' Q_0}, \quad s_2 = -\frac{(1 - a_0) R_0 (r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0)}{a_0' Q_0}, \quad (7.9)$$

где

$$R_0 = L_0 - Q_0 = (1 + a_0) [A_{33} (1 + 2a_0) + 2A_{11} (1 - a_0)] \quad (7.10)$$

Рассмотрим уравнение (3.9) с учетом условий (7.2), (7.3). Потребуем, чтобы оно было тождеством по φ . Тогда, учитывая равенства (7.4), (7.5), (7.7)–(7.10), найдем функцию $E = E(a_0, \psi_0, A_{11}, A_{33})$ (явное значение не выписываем в силу сложности формулы) и равенства

$$(r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0) \tilde{F}(a_0) = 0, \quad (r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) \tilde{F}(a_0) = 0, \quad (7.11)$$

где

$$\tilde{F}(a_0) = (1 - a_0) (6a_0 + 1) A_{11} + (2a_0 + 1) (3a_0 - 2) A_{33} \quad (7.12)$$

Так как условия $r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0 = 0$, $r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0 = 0$ при $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ не выполняются, то в формулах (7.11), (7.12) $\tilde{F}(a_0) = 0$, то есть, в силу (7.12), параметр a_0 удовлетворяет уравнению

$$\tilde{F}(a_0) = 6a_0^2 (A_{33} - A_{11}) + a_0 (5A_{11} - A_{33}) + (A_{11} - 2A_{33}) = 0 \quad (7.13)$$

Представляет интерес случай $A_{33} = A_{11}$, для которого эллипсоид инерции тела является сферой. Тогда из (7.13) следует

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad (7.14)$$

то есть $\theta_0 = \arccos \frac{1}{4}$. В общем случае, в силу неравенств на главные моменты инерции, из уравнения (7.13) получим

$$-\frac{1}{6} < a_0 < \frac{1}{2}$$

Если в (7.13) положить обобщенные условия Ковалевской $A_{22} = A_{11} = 2A_{33}$, то из (7.13) следует, что $a_0 = 0$ ($\theta_0 = 90^\circ$). При этом особенностей в выполненных преобразованиях не возникает. Можно в (7.13) принять и обобщенные условия Горячева–Чаплыгина: $A_{22} = A_{11} = 4A_{33}$, тогда значение параметра таково: $a_0 \approx 0.94$.

Покажем, что в формуле (7.4) $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$. Внесем значения s_1 , s_2 из (7.9) в формулы из (4.12):

$$S_1 = \frac{(1-a_0)L_0}{Q_0} (r_1 \sin \psi_0 - r_2 \cos \psi_0), \quad S_2 = -\frac{(1-a_0)L_0}{Q_0} (r_1 \cos \psi_0 + r_2 \sin \psi_0) \quad (7.15)$$

В силу значения L_0 из (7.5) получим $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$, а из формулы (7.4) следует, что $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени ($\psi(t) = 2\varphi(t)$). Величина S_0 определяется из последней формулы системы (4.12): $S_0 = a_0 s_3 + E(a_0, \psi_0, A_{11}, A_{33})$. Запишем (7.4) в интегральной форме:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0}} = \sqrt{\frac{2}{L_0}} (t - t_0) \quad (7.16)$$

Нахождение $\varphi(t)$ из (7.16) проводится стандартным образом.

Обсудим условия (7.2), (7.3). Равенства (7.2) означают, что прямая, содержащая вектор $\mathbf{a}$, является осью, относительно которой тело имеет динамически симметричное распределение. Но, в силу $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, центр масс тела не лежит на этой оси. На основании равенств (7.3) приходим к выводу о том, что векторы $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$, $\mathbf{p} = (r_2, -r_1, 0)$ ортогональны и расположены в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{a}$. Из полученных в разд. 7 результатов следует, что условий на параметры r_1 , r_2 , ψ_0 нет.

Заключение. В статье рассмотрена задача об условиях существования прецессионных движений твердого тела под действием сил трех однородных силовых полей. Предполагается, что скорость прецессии тела в два раза больше его скорости собственного вращения. Доказано, что необходимым условием таких движений является ортогональность векторов, задающих центры притяжения сил двух однородных силовых полей. Параметр в (7.13) $a_0 \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Если тело имеет распределение масс, для которого

эллипсоид инерции является сферой, то угол нутации равен $\arccos \frac{1}{4}$. Угол собственного вращения находится путем обращения эллиптического интеграла (угол прецессии в два раза больше угла собственного вращения). Тело обладает свойством динамической симметрии относительно оси, образующей постоянный угол с одним из направлений действующих сил.

Представляет интерес привести примеры рациональных значений угла нутации в динамике твердого тела. В классической задаче о движении тела в решении Д. Гриоли [3] угол $\theta_0 = 90^\circ$. В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил известно решение [18], в котором $\theta_0 = 120^\circ$. Можно анонсировать и результат, который относится к анализу прецессионно-изоконических движений ($\psi = \phi$) в рассматриваемой задаче. Он для сферического гиростата характеризуется значением $\theta_0 = 60^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. New York: Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.

3. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26. fasc. 3–4. P. 271–281.
4. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
5. Bressan A. Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В., Шетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
8. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
9. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ “Институт прикладной математики и механики”, 2017. 250 с.
10. Горр Г.В., Рубановский В.Н. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 50. Вып. 5. С. 707–712.
11. Ольшанский В.Ю. О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
12. Ol'shanskii V.Yu. New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. Iss. 12. Art. no. 57.
13. Ol'shanskii V.Yu. Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. Iss. 9. Art. no. 46.
14. Ольшанский В.Ю. Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
15. Yehia H.M. On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. Iss. 3. P. 200–205.
16. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
17. Hessein A.M. Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.
18. Мазнев А.В. Прецессионно-изоконические движения в одном решении уравнений Кирхгофа // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. 2001. Вып. 2. С. 12–16.

One Class of Resonance Precession Motions of a Rigid Body under the Action of Three Homogeneous Force Fields

G. V. Gorr^{a,#}

^aState Budgetary Institution “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”, Donetsk, Russia

[#]e-mail: gvgorr@gmail.com

The article is devoted to the problem on motion of a rigid body with a fixed point under the action of a force field, which is the superposition of three homogeneous force fields. Existence conditions are investigated for precession motions, which are characterized by the following property: the angular velocity of the precession of the body is two times more than the angular velocity of its proper rotation. It is established that the body has the dynamic symmetry with respect to an axis making a constant angle with a vector fixed in the immovable space. In the case of the body with the spherical mass distribution this angle equals to $\arccos \frac{1}{4}$. Solution of the equations of motion of the body is expressed through the elliptic functions of time.

Keywords: precessions of a rigid body, resonance motions, homogeneous force fields

REFERENCES

1. *Ishlinskii A.Yu.* Orientation, Gyroscopes and Inertial Navigation. Moscow: Nauka, 1976. 672 p. (in Russian)
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. N.Y.: Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Math. Pura et Appl., 1947, ser. 4, vol. 26, fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Gorr G.V.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies systems // JAMM, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 573–587. (in Russian)
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1957, vol. 27, pp. 276–283.
6. *Dokshevich A.I.* Finite Form Solutions of Euler–Poisson Equations. Kiev: Nauk. Dumka, 1992. 168 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in the Rigid Body Dynamics and in the Dynamics of Coupled Rigid Bodies. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. (in Russian)
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Dynamics of a Gyrostat Having a Fixed Point. Donetsk: Donetsk National Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Motion of a Gyrostat with the Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Inst. of Appl. Math. Mech., 2017. 250 p. (in Russian)
10. *Gorr G.V., Rubanovskii V.N.* On one new class of motions of a system of rigid bodies coupled by hinges // JAMM, 1988, vol. 50, no. 5, pp. 707–712. (in Russian)
11. *Ol'shanskii V.Yu.* On regular precessions of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // JAMM, 2018, vol. 82, no. 5, pp. 559–571. (in Russian)
12. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2019, vol. 131, no. 12, art. no. 57.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron., 2020, vol. 132, no. 9, art. no. 46.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // JAMM, 2021, vol. 85, no. 5, pp. 547–564. (in Russian)
15. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci., 2015, vol. 2, no. 3, pp. 200–205.
16. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc., 2017, vol. 25, no. 2, pp. 216–219.
17. *Hessein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2019, vol. 15, no. 3, pp. 285–292.
18. *Maznev A.V.* Precessional-isoconical motions in one solution of Kirchhoff equations // Bull. Donetsk Univ., Ser. A: Nature Sci., 2021, no. 2, pp. 12–16. (in Russian)

УДК 517.968.7

ОБ ОТСУТСТВИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ В МОДЕЛЯХ “НАИВНОЙ МЕХАНИКИ”. ТРИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯ

© 2023 г. И. В. Романов^{1,*}¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*e-mail: romm1@list.ru

Поступила в редакцию 20.09.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принята к публикации 27.10.2022 г.

Рассматривается проблема граничной управляемости для широкого класса моделей, который условно можно назвать “наивной механикой”. Доказывается, что для всех моделей “наивной механики”, кроме трех исключительных случаев, управляемость в покое отсутствует. Все эти три случая представляют собой классические примеры уравнений, для двух из которых требуется дополнительное исследование вопроса управляемости.

Ключевые слова: граничное управление, модели вязкоупругости, уравнения с памятью

DOI: 10.31857/S0032823523010083, EDN: HVVMKW

1. Введение. Модели, приводящие к системам с интегральной памятью.

В последние примерно 15–20 лет большое распространение получили исследования в области механических систем с т.н. “памятью” или интегральным последствием. Первые из них были посвящены уравнению Гуртина–Пипкина [1]:

$$\dot{\theta}(t, x) = \int_0^t K(t-s)\theta_{xx}(s, x)ds \quad (1.1)$$

В данном уравнении ядро $K(t)$ может иметь различный вид, отражающий природу физических процессов, которые описывают данное уравнение. В двух простейших случаях это ядро может быть тождественно равно единице или равняться дельта-функции. В первом случае уравнение сводится к волновому уравнению посредством дифференцирования по временной переменной, во втором случае (1.1) превращается в уравнение теплопроводности. Ниже мы рассмотрим ядра более сложного вида.

После (1.1) изучались уравнения классического вида с добавлением интегральных членов (памяти). Эти дополнительные члены в ряде случаев позволяют более эффективно описывать те или иные процессы механики и физики. Кроме этого можно, например, записать уравнение “запаздывающей реакции”:

$$\ddot{\theta}(t, x) = \int_0^t e^{-\lambda_0(t-s)}\theta_{xx}(s, x)ds, \quad \lambda_0 > 0 \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) можно рассматривать как модификацию закона Гука, в котором действующая сила пропорциональна смещению.

Кратко опишем еще один способ получения большого класса моделей с интегральной памятью. Этот способ связан с т.н. “наивной механикой” и подробно изложен в [2].

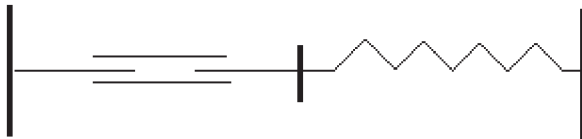


Рис. 1. Модель Максвелла.

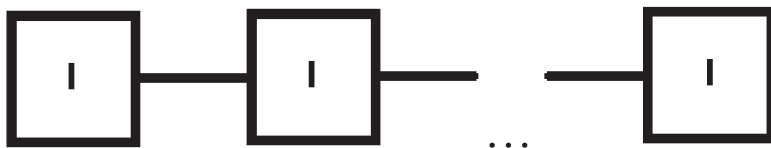


Рис. 2. Цепочка Максвелла.

Суть дела состоит в записи определяющего соотношения между напряжением и деформацией (здесь рассматривается одномерный по пространственной переменной случай). Это соотношение, в свою очередь, записывается исходя из различных способов соединения “пружин” и “поршеньков”. В результате этого соединения образуется элемент, который является простейшей ячейкой сплошной среды и определяющее соотношение для этого элемента затем в ряде случаев (при определенном типе соединения между собой этих элементов) переносится на всю сплошную среду. Если таким элементом является “пружина”, то определяющее соотношение для него имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

если элемент — “поршень”, то

$$\sigma = \mu \dot{\varepsilon}$$

Здесь σ — напряжение, ε — деформация, $E > 0$ — это модуль упругости и $\mu > 0$ коэффициент вязкости.

Приведем примеры известных простых моделей. Рассмотрим модель (элемент) Максвелла (рис. 1). Она состоит в последовательном соединении пружины и поршня. Составим теперь цепочку из последовательного соединения этих элементов (моделей Максвелла), рис. 2:

Для данной цепочки определяющее соотношение имеет вид:

$$\frac{1}{E_1} \dot{\sigma} + \frac{1}{\mu_1} \sigma = \dot{\varepsilon}, \quad E_1, \mu_1 > 0$$

Заметим, что параллельное соединение элементов Максвелла приводит уже к другому определяющему соотношению.

Рассмотрим теперь модель (элемент) Фойгхта. Она состоит из параллельного соединения “пружины” и “поршня” (рис. 3). В свою очередь, составим из параллельного соединения этих элементов цепочку Фойгхта (рис. 4). Для этой цепочки определяющее соотношение имеет вид:

$$\sigma = E_2\varepsilon + \mu_2\dot{\varepsilon}$$

Рассмотрим теперь более сложную модель. Она состоит из последовательного соединения элемента Фойгхта и пружины (рис. 5). Далее соединим эти элементы после-

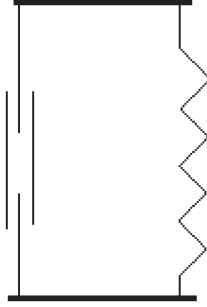


Рис. 3. Модель Фойгхта.



Рис. 4. Цепочка Фойгхта.

довательно, получаем цепочку из сложных элементов (рис. 6). Для этой последней цепочки определяющее соотношение записывается следующим образом:

$$2\sigma + \frac{\mu_3}{E_3} \dot{\sigma} = E_3 \varepsilon + \mu_3 \dot{\varepsilon} \quad (1.3)$$

Из (1.3) формально выразим σ :

$$\sigma = E_3 \varepsilon - E_3 \alpha \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} \varepsilon(s, x) ds; \quad \alpha = \frac{E_3}{\mu_3} \quad (1.4)$$

Пусть $\theta(t, x)$ – состояние системы, тогда его связь с напряжением и деформацией имеет вид:

$$\sigma_x = \ddot{\theta}, \quad \varepsilon = \theta_x \quad (1.5)$$

Продифференцируем (1.4) по переменной x и воспользуемся (1.5):

$$\ddot{\theta} = E_3 \theta_{xx} - E_3 \alpha \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} \theta_{xx}(s, x) ds \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) представляет собой уравнение колебания струны с дополнительным интегральным членом и ядром в виде убывающей экспоненциальной функции.

Рассмотрим теперь общий случай. Доказано [2], что в рамках “наивной механики” определяющее соотношение имеет вид:

$$P\sigma = Q\varepsilon, \quad (1.7)$$

где

$$P = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i}, \quad Q = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \frac{d^i}{dt^i},$$

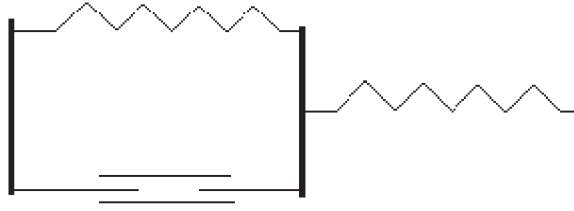


Рис. 5. Сложная модель.

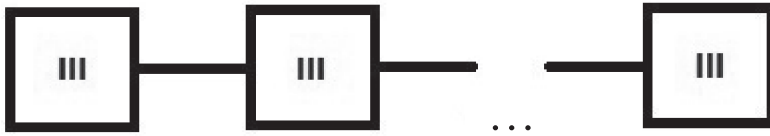


Рис. 6. Цепочка из сложных элементов.

$a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $b_{n+1} \geq 0$. Рассмотрим многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$$

Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ полинома $P(\lambda)$ вещественные, отрицательные и попарно различные, причем среди них нет нулевого. Тогда (см. [2]) формально выразим $\sigma(t, x)$ из определяющего соотношения (1.7):

$$\sigma = C_0 \varepsilon + C_1 \dot{\varepsilon} + \int_0^t K(t-s) \varepsilon(s, x) ds \quad (1.8)$$

Здесь ядро $K(t)$ имеет вид:

$$K(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{\lambda_i t} \quad (1.9)$$

Здесь и далее предположим, что $C_0 \geq 0$, $C_1 \geq 0$ и все постоянные K_i , $i = 1, 2, \dots, n$, меньше либо равны нулю. Данное условие связано с тем, что во всех подобных вязкоупругих моделях знаки берутся именно такими.

Используя (1.5), получим из (1.8) интегро-дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\theta} = C_0 \theta_{xx} + C_1 \dot{\theta}_{xx} + \int_0^t K(t-s) \theta_{xx}(s, x) ds \quad (1.10)$$

Предположим, что в уравнении (1.10) переменная x принадлежит интервалу $(0, \pi)$ и $t > 0$.

2. Задачи граничного управления для систем с памятью

Уравнение (1.10) описывает достаточно широкий класс моделей в механике. Более того, в этот класс прямо или косвенно входят основные классические уравнения (уравнения колебания струны, теплопроводности, телеграфное).

Для (1.10) можно поставить задачу управления. Например, рассмотрим нулевое условие для решения θ на правом конце отрезка $[0, \pi]$ и функцию $v(t) \in L_2^{\text{loc}}(0, +\infty)$

(управление) на левом конце. В нулевой момент времени имеется два начальных условия ξ_1 , ξ_2 (смещение, скорость соответственно). Для этой начально-краевой задачи дадим важное определение управляемости.

Будем говорить, что система управляема в покой, если для любых заданных начальных условий ξ_1 и ξ_2 , можно найти управление $v(t)$ и момент времени $T > 0$ такой, что $v(t)$ равно нулю для любого $t > T$ и соответствующее решение $\theta(t, v)$ задачи также равно нулю для любого $t > T$.

В противоположность, система называется неуправляемой в покой, если существуют начальные условия ξ_1 , ξ_2 такие, что для любого управления $v(t)$, которое равно нулю тождественно вне некоторого конечного отрезка $[0, T]$, соответствующее решение не равно тождественно нулю вне любого конечного отрезка (по t). В этом случае мы также будем говорить, что управляемость в покой отсутствует.

В изучении вопросов управляемости ключевую роль играет исследование спектра задачи. Например, в работе [3] для некоторого случая, который попадает в класс уравнений (1.10), спектр хорошо изучен. Это делает возможным рассматривать не только задачи граничного, но и распределенного управления (см. [4, 5]). Еще отметим работу [6], где рассматриваются похожие интегро-дифференциальные уравнения с более широким, чем (1.9) классом ядер.

Докажем следующую теорему.

Теорема. В задаче управления для уравнения (1.10) заведомо отсутствует граничная управляемость в покой во всех случаях, кроме трех:

- а) $C_0 > 0$, $C_1 = K_1 = K_2 = \dots = K_n = 0$
- б) $C_1 > 0$, $C_0 = K_1 = K_2 = \dots = K_n = 0$
- в) $K_1 < 0$, $C_0 = \frac{K_1}{\lambda_1}$, $C_1 = K_2 = \dots = K_n = 0$

Случай (а) дает уравнение колебания струны, хорошо известно, что для этого уравнения имеет место граничная управляемость. Для (б) и (в) ситуация несколько сложнее. Граничная управляемость для уравнений, описываемых этими случаями, формально отсутствует, если определение управляемости понимать так, как оно было введено выше. Между тем, если мы будем рассматривать более узкий класс начальных данных: положим равным нулю второе начальное условие ξ_2 , то уравнение в случае (б) интегрированием по переменной t сводится к уравнению теплопроводности, а в случае (в) к уравнению Гуртина–Пипкина, которые можно дополнительно исследовать на предмет управляемости. Заметим, что уравнение в случае (в) при $\xi_2 = 0$ может быть также сведено к телеграфному уравнению.

Доказательство. Определим функции комплексного переменного λ :

$$G_n(\lambda) = \lambda^2 + n^2 N(\lambda), \quad N(\lambda) = C_0 + C_1 \lambda + \hat{K}(\lambda),$$

где $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа от ядра $K(t)$. В дальнейшем совокупность всех корней уравнений $G_n(\lambda) = 0$ для каждого натурального n будем называть спектром задачи для уравнения (1.10). Предположим, что (а), (б) и (в) не выполнены и, дополнительно, пусть не выполнен случай $K_1 \neq 0$, $C_0 = C_1 = K_2 = \dots = K_n = 0$ (случай (г)). Тогда нетрудно видеть, что $N(\lambda)$ имеет по крайней мере один нуль λ_0 . Используя методы работы [7], для очень похожего уравнения, нетрудно доказать, что для $\lambda_0 \neq 0$ существуют нули λ_n функций $G_n(\lambda)$, причем построенная последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет предельную точку. Последнее является препятствием к управляемости. Если $\lambda_0 = 0$, то это также является препятствием к управляемости, так как в этом случае преобразование Лапласа от функции управления, т.е. $\hat{v}(\lambda)$, не будет целой функцией.

Осталось рассмотреть случай (г), это уравнение вида (1.2). Доказательство отсутствия управляемости для похожего уравнения приведено в ([7], теорема 3), для случая (г) доказательство отсутствия граничной управляемости проводится совершенно аналогичным методом. Этот метод основан на том, что спектр задачи растет достаточно медленно, именно это и является препятствием к управляемости в покой. Теорема доказана.

Таким образом, среди всех моделей “наивной механики” неуправляемыми в покой заведомо являются все модели, кроме только трех классических систем.

Доказано [8], что для уравнения Гуртина–Пипкина также отсутствует управляемость в покой, если управление приложено к фиксированной подобласти (там рассматривается двумерная система). Остается открытым вопрос, можно ли привести в покой данную систему, если управляющее воздействие приложено к подмножеству, которое движется по некоторому закону. Для более простых уравнений положительный ответ на данный вопрос дан в работах [9–11]. Сделаем важное замечание: пусть ядро $K(t)$ в уравнении (1.1) представляет собой ряд из убывающих экспоненциальных функций, при этом на коэффициенты и показатели этих экспонент наложены дополнительные ограничения, тогда управляемость в покой отсутствует даже, если управляющее воздействие приложено ко всей области. Точное изложение этого результата содержится в работе [12].

В заключение заметим, что интерес представляет перенесение полученных результатов на многомерный случай. Представляется, что это можно сделать, используя методы [8].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00151).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. № 31. P. 113–126.
2. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
3. Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.S. Spectral analysis and correct solvability of abstract integro-differential equations arising in thermophysics and acoustics // Contemp. Math. Fundam. Direct. 2011. V. 39. P. 36–65.
4. Romanov I., Shamaev A. Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. Dyn.&Control Syst. 2013. V. 19. № 4. P. 611–623.
5. Романов И.В., Шамаев А.С. Точное управление распределенной системой, описываемой волновым уравнением с интегральной памятью // Проблемы математического анализа. 2022. Вып. 115. С. 3–13.
6. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. ММО. 2019. Т. 80. Вып. 2. С. 197–220.
7. Ivanov S., Pandolfi L. Heat equations with memory: Lack of controllability to rest // J. Math. Anal.&Appl. 2009. V. 355. № 1. P. 1–11.
8. Romanov I., Shamaev A. Non-controllability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integrodifferential equation // J. Optim. Theory&Appl. 2016. V. 170. № 3. P. 772–782.
9. Chaves-Silva F.W., Rosier L., Zuazua E. Null controllability of a system of viscoelasticity with a moving control. // J. de Math. Pures et Appl. 2014. V. 101. № 2. P. 198–222.
10. Chaves-Silva F.W., Zhang X., Zuazua E. Controllability of evolution equations with memory // SIAM J. Control&Optim. 2017. V. 55. № 4. <https://doi.org/10.1137/151004239>
11. Biccari U., Micu U. Null-controllability properties of the wave equation with a second order memory term // J. Diff. Eqns. 2019. № 267. P. 1376–1422.
12. Романов И.В. Исследование управляемости для некоторых динамических систем с распределенными параметрами, описываемых интегродифференциальными уравнениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 58–61.

About the Lack of Controllability in Models of “Naive Mechanics”. Three Exceptional Cases

I. V. Romanov^{1, #}

¹*HSE University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: romm1@list.ru*

The problem of boundary controllability is considered for a wide class of models, which can be conditionally called “naive mechanics”. It is proved that for all models of “naive mechanics”, except for the three cases, there is no controllability to rest. All these three cases are classical examples of equations, two of which require additional study of the controllability property.

Keywords: boundary controllability, viscoelasticity models, equations with memory

REFERENCES

1. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Ration. Mech. Anal., 1968, no. 31, pp. 113–126.
2. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E., Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)
3. Vlasov V.V., Rautian N.A., Shamaev A.S. Spectral analysis and correct solvability of abstract integro-differential equations arising in thermophysics and acoustics // Contemp. Math. Fundam. Direct., 2011, vol. 39, pp. 36–65.
4. Romanov I., Shamaev A. Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. Dyn.&Control Syst., 2013, vol. 19, no. 4, pp. 611–623.
5. Romanov I., Shamaev A. Exact control of a distributed system described by the wave equation with integral memory // J. Math. Sci., 2022, vol. 262, pp. 358–373.
6. Vlasov V.V., Rautian N.A. Spectral analysis and representation of solutions of integro-differential equations with fractional exponential kernels // Trans. Moscow Math. Soc., 2019, vol. 80, pp. 169–188.
7. Ivanov S., Pandolfi L. Heat equations with memory: Lack of controllability to rest // J. Math. Anal.&Appl., 2009, vol. 355, no. 1, pp. 1–11.
8. Romanov I., Shamaev A. Non-controllability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integrodifferential equation // J. Optim. Theory&Appl., 2016, vol. 170, no. 3, pp. 772–782.
9. Chaves-Silva F.W., Rosier L., Zuazua E. Null controllability of a system of viscoelasticity with a moving control // J. de Math. Pures et Appl., 2014, vol. 101, no. 2, pp. 198–222.
10. Chaves-Silva F.W., Zhang X., Zuazua E. Controllability of evolution equations with memory // SIAM J. Control&Optim., 2017, vol. 55, no. 4, DOI: 10.1137/151004239.
11. Biccari U., Micu U. Null-controllability properties of the wave equation with a second order memory term // J. Diff. Eqns., 2019, no. 267, pp. 1376–1422.
12. Romanov I. Investigation of controllability for some dynamic system with distributed parameters described by integrodifferential equations // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2022, vol. 61 (2), pp. 191–194.

УДК 533.6.011.8

ГИПЕРЗВУКОВОЕ НЕРАВНОВЕСНОЕ ОБТЕКАНИЕ ОСТРОЙ КРОМКИ

© 2023 г. А. Л. Анкудинов^{1,*}¹ФГУП ЦАГИ, Жуковский Моск. обл., Россия

*e-mail: ankudin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.11.2022 г.

После доработки 08.12.2022 г.

Принята к публикации 15.12.2022 г.

Сформулирована регуляризованная задача для описания течения молекулярного газа в гиперзвуковом макрокинетическом неравновесном тонком вязком ударном слое (кинетическом ТВУС) вблизи острой кромки. Показано, что решение регуляризованной задачи кинетического ТВУС на острой кромке в части описания трения и теплообмена совпадает с решением аналога этой ТВУС-задачи в модели Навье–Стокса. Показано, что в кинетическом ТВУС напряжение трения и нормальный тепловой поток на стенке в окрестности острой кромки идентичны с соответствующими величинами в ТВУС для модели Навье–Стокса. Указано на подобие течений около острой кромки в кинетическом варианте ТВУС модели Навье–Стокса. Указан способ построения решения задачи кинетического ТВУС для окрестности острой кромки на основе ТВУС-решения в рамках модели Навье–Стокса. Получена формула для вычисления давления на поверхности в кинетическом ТВУС-течении вблизи острой кромки через компоненты решения (на стенке) задачи ТВУС полученной в рамках модели Навье–Стокса.

Ключевые слова: кинетический тонкий вязкий ударный слой, многоатомный однокомпонентный газ, неравновесность, острая кромка, корреляция, кинетическое давление

DOI: 10.31857/S0032823523010034, EDN: HUNSTT

1. Введение. Рассматриваемая задача обтекания относится к тому разделу современной высокоскоростной (и высотной) аэротермодинамики, который ориентирован, прежде всего, на практические проблемы аэрокосмоса (вход объекта в атмосферу планет, полет аэрокосмического аппарата, суборбитальный полет и др.) и, соответственно, на режимы течения газа выходящие за пределы модели Навье–Стокса, требующие неконтинутальных инструментов исследования потока, привлечения средств, прежде всего, молекулярно-кинетической теории газов.

Статьи по этой тематике в текущей научной периодике [1–6] дают знание о подобного рода средствах (полезно соединенное с их сопоставительным анализом [3]), а также знание о состоянии проблемы в целом, тенденциях и приоритетах в данной сфере вязкого гиперзвука.

Исследования последнего периода посвящены важным вопросам аэродинамики высоких скоростей, результаты их представляют несомненный интерес как в научном, так и в прикладном плане.

В методологиях же изучения высокоскоростных переходных режимов явно наблюдается уклон в сторону макроскопических средств анализа течений и привлечения идеологии вязкого ударного слоя.

Принятый в данной работе макрокинетический моментный способ анализа течения в переходной области относится к той же категории континуальных ударнослоевых средств, что используются в большинстве перечисленных исследований, но отличается тем обстоятельством, что целиком базируется на кинетической теории газов (кинетический ТВУС).

Среди набора современных способов изучения течений переходного режима безусловным лидером представляется метод прямого статистического моделирования. Однако при всех его достоинствах, будучи достаточно ограниченным в диапазоне приложения и чрезвычайно трудоемким, метод не дает возможности оперативного анализа и потому мало используется в инженерной практике; востребован он более для оценки компетентности других подходов к проблеме.

Эффективным средством исследования занавьестоксовского диапазона высокоскоростных течений разреженного газа зарекомендовало себя приближение гиперзвукового тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС), кинетические версии которого, построенные на основе полных моментных уравнений кинетической теории газов, были сформулированы в [7] — для молекулярного однородного газа с внутренними степенями свободы (см. также [8, 9]) и в [10] — для одноатомного газа (поступательные степени свободы) на базе 13-моментных уравнений Грэда кинетической теории газов (см. также [11]).

Модель гиперзвукового кинетического ТВУС предназначена для целей исследования переходного (от свободномолекулярного к континуальному) диапазона режимов течения $O(\epsilon) \leq \epsilon K^2 \leq O(1)$, по классификации [10, 11], где $K^2 = \epsilon \text{Re}$ один из главных параметров теории ТВУС (он определяет тип течения в ударном слое и представляет собой комбинацию числа Кнудсена Kn ($\text{Kn} = \text{Re}^{-1}$, Re — число Рейнольдса) и числа ϵ (ϵ — малый параметр теории тонкого слоя)); такие режимы реализуются при обтекании летательных объектов, движущихся с высокими скоростями на больших высотах.

Макрокинетическая модель ТВУС, сформулированная в [7–9] для многоатомного однокомпонентного газа (т.е. газа с внутренними степенями свободы) на основе общего вида (полных) моментных уравнений кинетической теории газов, позволяет описывать гиперзвуковое обтекание тел в условиях сильного нарушения равновесия по внутренним и поступательным степеням свободы молекул (в модели отсутствует допущение о близости течения к равновесному). Модель [7–9] ориентирована на режимы, при которых влияние диссоциации и электронного возбуждения на течение пренебрежимо мало; кроме того предполагается быстрый обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы частиц газа, т.е. $\alpha \sim O(1)$. Подобного типа модель тонкого вязкого ударного слоя для течения одноатомного газа (учет поступательной неравновесности), построенная на основе 13-моментных уравнений Грэда (специального вида интерпретация уравнений моментов) кинетической теории газов, была предложена в [10, 11]. Здесь же были получены и важные результаты теории ТВУС, а именно корреляция кинетического ТВУС в одноатомном газе с ТВУС рассчитанным в рамках модели Навье–Стокса и главный элемент данной корреляции, формулируемый как: в кинетическом ТВУС-течении одноатомного газа (поступательная неравновесность) локальные величины напряжения трения и нормального теплового потока на стенке идентичны с соответствующими величинами для ТВУС в рамках модели Навье–Стокса. Такое же совпадение пристеночных трения и теплового потока с аналогичными величинами полученными в рамках ТВУС-модели Навье–Стокса и корреляция кинетического ТВУС и ТВУС-модели Навье–Стокса для случая многоатомного газа (неравновесность по внутренним степеням свободы) в рамках более строгой моментной модели кинетического ТВУС [7–9] были получены в [12].

Проблема обтекания острой кромки многоатомным газом (неравновесность по внутренним степеням свободы) является новой задачей теории кинетического ТВУС;

ранее течение вблизи заострения исследовалось лишь для случая бесструктурного одноатомного газа (поступательная неравновесность) [10].

Рассмотренное ТВУС-течение около острой кромки (в отличие от течений около гладких затупленных поверхностей) является в высокой степени нерегулярным, поскольку содержит существенную особенность, вызванную тем обстоятельством, что, согласно критериям приближения ТВУС, головной скачок (являющийся внешней границей ударного слоя) в заостренном носке предполагается присоединенным к острой кромке.

Способы и данные исследования регулярного кинетического ТВУС (прежде всего переменные, применяемые при анализе регулярных задач ТВУС) в условиях обтекания тел с острой кромкой неприменимы.

2. Регуляризация. Ниже предлагается специального вида интерпретация сильно нерегулярного течения в кинетическом ТВУС вблизи острой кромки, позволяющая задачу обтекания, содержащую существенную математическую особенность, трактовать как регулярную (регуляризирующее преобразование переменных).

Заявленная задача обтекания острой кромки представляется как плоское двумерное течение в ТВУС около нетонкого заостренного клина, симметрично обтекаемого гиперзвуковым потоком. Инструментом исследования является приближение кинетического тонкого вязкого ударного слоя (кинетический ТВУС).

Система уравнений, описывающих высокоскоростное неравновесное течение однокомпонентного многоатомного газа в кинетическом тонком вязком ударном слое (кинетическом ТВУС) вблизи тел рассматриваемого типа, согласно [7–9], имеет следующий вид в физических переменных x, y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[H + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2} \right] &= 0 \\ p &= 2\varepsilon \rho h, \quad \mu = \mu(h), \quad H = h + \frac{u^2}{2} \\ \frac{p}{P_{22}} &= 1 + \frac{2}{3\alpha} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu}{p} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Условия на внешней границе ударного слоя y_e (т.е. при $y = y_e(x)$):

$$\begin{aligned} \rho v &= \rho_\infty v_\infty \\ \rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ P_{22} &= \rho_\infty v_\infty^2 \\ \rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[H + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2} \right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Условия на стенке (т.е. при $y = 0$):

$$u = 0, \quad H = H_w \tag{2.3}$$

Величина отхода скачка $y_e(x)$ (внешняя граница ударного слоя) является одной из неизвестных величин задачи ТВУС, подлежащей определению.

Переменные обезразмерены следующим образом:

$$u = \frac{u^*}{U_\infty^*}, \quad v = \frac{v^*}{U_\infty^*}, \quad H = \frac{H^*}{U_\infty^{*2}}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}, \quad h = \frac{h^*}{U_\infty^{*2}}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*},$$

$$T = \frac{T^*}{(U_\infty^{*2}/c_p^*)}, \quad x = \frac{x^*}{L^*}, \quad y = \frac{y^*}{L^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0^*}, \quad r = \frac{r^*}{L^*}, \quad P_{22} = \frac{P_{22}^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}$$

Для представления двумерной задачи ТВУС в (2.1)–(2.3) использована связанная с симметрично обтекаемой поверхностью острого клина (образованного двумя полуплоскостями) ортогональная система координат погранслоного типа, в которой продольная координата x отсчитывается от передней кромки клина вдоль его поверхности (в плоскости исследования двумерной задачи), поперечная координата y отсчитывается от поверхности клина по нормали; или иначе, x – расстояние от фронтальной плоскости (если под фронтальной понимать ортогональную к поверхности клина плоскость, содержащую линию острой кромки); y – расстояние от поверхности клина.

Список основных обозначений:

u, v – компоненты скорости течения в продольном (x) и поперечном (y) направлениях соответственно;

h, H – статическая и полная энтальпии соответственно;

$Re = U_\infty^* L^* \rho_\infty^* / \mu_0^*$ – число Рейнольдса; $Pr = \mu^* c_p^* / \lambda^*$ – число Прандтля;

L^* – характерный линейный размер; $U_\infty^*, \rho_\infty^*$ – скорость и плотность в набегающем невозмущенном потоке; M_∞ – число Маха набегающего потока;

p – давление; ρ – плотность; T – температура; T_0^* – температура торможения; γ – отношение удельных теплоемкостей, т. е. $\gamma = c_p^* / c_v^*$, где c_p^* и c_v^* – удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и при постоянном объеме соответственно; $\varepsilon = (\gamma - 1) / 2\gamma$;

μ^* – коэффициент вязкости; μ_0^* – значение коэффициента вязкости μ^* при температуре торможения T_0^* ; λ^* – коэффициент теплопроводности;

α – отношение времен релаксации при упругих (τ_{el}) и неупругих (τ_{in}) столкновениях молекул газа, $\alpha = \tau_{el} / \tau_{in} = \alpha(T)$;

rL^* – в плоскости (x, y) расстояние от поверхности обтекаемого клина до прямой, проходящей через вершину острой кромки параллельно вектору набегающего потока;

$P_{22} = p + p_{22}$, где $p_{22} \rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ – компонента девиаторной части тензора напряжений $p_{ij} \rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ ($i, j = 1, 2$) при индексах 1 и 2, ассоциируемых с продольным и поперечным направлениями соответственно; $q_i \rho_\infty^* U_\infty^{*3}$ – вектор теплового потока; β – угол раствора клина; $u_\infty = \cos \beta$; $v_\infty = -\sin \beta$.

Индексы характеризуют: “ e ” – внешнюю границу ТВУС, “ w ” – стенку, “ ∞ ” – набегающий (невозмущенный) поток. Индекс в виде звездочки * (наверху, справа от индексируемой величины) относится к размерным величинам.

Далее приводится эквивалентная форма рассматриваемой задачи кинетического ТВУС. Данная форма получается из (2.1)–(2.3) посредством замены независимых переменных (x, y) на переменные Мизеса (x, ψ). Здесь $\psi = \psi / r$, а величина ψ представ-

ляет собой безразмерную функцию тока (т.е. $\psi = \psi^*/L^*\rho_\infty^*U_\infty^*$), описываемую соотношениями:

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.4)$$

Система уравнений кинетического ТВУС (в переменных $(x, \tilde{\psi})$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{\psi}} \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \tilde{\psi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{p} \mu \rho u \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\psi}} \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial \tilde{\psi}} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \tilde{\psi}} \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \tilde{\psi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{\text{Pr}} \frac{p}{p} \mu \rho u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \left[H + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2} \right] \\ p &= 2\varepsilon \rho h, \quad \mu = \mu(h), \quad H = h + \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{p}{P_{22}} = 1 + \frac{2}{3\alpha} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu \rho u}{p} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\psi}} \right)^2$$

Условия на внешней границе ТВУС, т.е. при $\tilde{\psi} = 1$:

$$\begin{aligned} \rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{p} \mu \rho u \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\psi}} \\ P_{22} &= \rho_\infty v_\infty^2 \\ \rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{\text{Pr}} \frac{p}{p} \mu \rho u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \left[H + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условия на стенке, т.е. при $\tilde{\psi} = 0$:

$$u = 0, \quad H = H_w \quad (2.7)$$

Формулами (2.5)–(2.7) описывается кинетический тонкий вязкий ударный слой в $(x, \tilde{\psi})$ -интерпретации.

Вариант задачи ТВУС для модели Навье–Стокса, представленной в переменных Мизеса $(x, \tilde{\psi})$, получается из (2.5)–(2.7), если формально исключить из системы (2.5) последнее уравнение и затем повсеместно (в оставшихся соотношениях) заменить кинетический член (P_{22}/p) единицей, а соответственно величину P_{22} поменять на p .

В переменных $(x, \tilde{\psi})$ областью определения для задачи ТВУС является полуполоса

$$x \geq 0, \quad 0 \leq \tilde{\psi} \leq 1$$

Для регуляризации кинетического ТВУС в области течения вблизи острой кромки (области, включающей и саму острую кромку, т.е. значение $x = 0$) производится преобразование независимых $(x, \tilde{\psi})$ и зависимых (u, H) переменных задачи, вида:

$$\xi = x^{1/2}, \quad \eta = \tilde{\psi}^{1/2}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{r^{1/2}}, \quad \tilde{H} = \frac{(H - H_w)}{r^{1/2}} \quad (2.8)$$

Область изменения новых независимых переменных (ξ, η) : $\xi \geq 0, 0 \leq \eta \leq 1$.

Будучи представлена в переменных (2.8) (это представление здесь не приводится), рассматриваемая задача является регулярной.

Введение новых переменных (2.8), регуляризирующих задачу вблизи носка (в области значений стремящейся к нулю переменной ξ), позволяет получить предельную (при $\xi \rightarrow 0$) форму задачи ТВУС, которая вырождается здесь (на левой границе полуполосы, т.е. на отрезке $0 \leq \eta \leq 1$ при значении $\xi = 0$) в замкнутую краевую математическую проблему для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Кинетический ТВУС на острой кромке, т.е. для области новых независимых переменных (ξ, η) при $\xi = 0$, а именно для

$$\xi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

может быть интерпретирован в результате следующим образом:
система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\text{Re}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \frac{1}{2\eta} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\text{Re Pr}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \frac{1}{2\eta} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta} &= 0 \\ 1 = 2\varepsilon \left[\frac{\rho}{p} \right] h, \quad \mu = \mu(h), \quad h = H_w \end{aligned} \quad (2.9)$$

условия на внешней границе ТВУС, т.е. при $\eta = 1$:

$$\begin{aligned} \rho_\infty v_\infty u_\infty &= \frac{1}{\text{Re}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \frac{1}{2\eta} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \\ P_{22} &= \rho_\infty v_\infty^2 \\ \rho_\infty v_\infty (H_w - H_\infty) &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \mu P_{22} \left[\frac{\rho}{p} \right] \tilde{u} \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

условия на стенке, т.е. при $\eta = 0$:

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{H} = 0 \quad (2.11)$$

Кинетическая задача ТВУС для кромки (2.9)–(2.11), ориентированная на вычисление кинетических величин $(\tilde{u}, \tilde{H}, P_{22})$, становится с абсолютной точностью околоромочной задачей ТВУС в рамках модели Навье–Стокса, описывающей соответственно переменные $(\tilde{u}, \tilde{H}, p)$.

Стало быть, здесь (на кромке) и сами решения задачи ТВУС в рамках кинетической модели и модели Навье–Стокса указанным образом совпадают в части, которую составляют упоминаемые выше величины.

Это решение, помимо своей самодостаточности, представляет еще специфический интерес как функциональное корректное начальное условие для численного анализа течения в ТВУС вниз по потоку от заостренного носка клина, имитирующего кромку.

3. Подобие. Тожественные преобразования задач ТВУС в рамках кинетической модели и модели Навье–Стокса, представленных в (ξ, η) -переменных (т.е. ТВУС-соотношений (2.5)–(2.7) в их кинетической трактовке и рамках модели Навье–Стокса), приводят к единому формату краевой задачи для величин кинетического ТВУС $(\tilde{u}, \tilde{H}, P_{22})$ и соответственно величин $(\tilde{u}, \tilde{H}, p)$ для ТВУС-задачи в рамках модели Навье–Стокса. Отсюда следуют идентичность $\tilde{u}$ и $\tilde{H}$ соответственно для обеих задач ТВУС (кинетической и Навье–Стокса) и идентификация кинетического P_{22} с p из модели

Навье—Стокса. Используя последнюю, можно далее получить ТВУС-идентификацию таких важных величин в потоке, как p_{12} и q_2 соответственно для кинетического и Навье—Стокса вариантов задачи ТВУС, т.е. идентификацию вида

$$(p_{12})_k = (p_{12})_n, \quad (q_2)_k = (q_2)_n, \quad (3.1)$$

где

$$-p_{12} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -q_2 = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.2)$$

для кинетического ТВУС и

$$-p_{12} = \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -q_2 = \frac{1}{\text{Re Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.3)$$

для ТВУС в рамках модели Навье—Стокса.

Здесь (и далее) индексы k и n характеризуют задачи ТВУС кинетической модели и модели Навье—Стокса, соответственно.

Ниже приводятся соотношения, мотивирующие подобие (корреляцию) (3.1).

Для ТВУС модели Навье—Стокса (p_{12} из (3.3)):

$$-p_{12} \text{Re} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \rho u = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} u \frac{\rho}{p} p = \frac{1}{2\eta} \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \tilde{u} \frac{\rho}{p} p$$

Для кинетического ТВУС (p_{12} из (3.2)):

$$-p_{12} \text{Re} = \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} \rho u = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} u \frac{\rho}{p} P_{22} = \frac{1}{2\eta} \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \tilde{u} \frac{\rho}{p} P_{22}$$

Из учета того, что $\left(\frac{\rho}{p}\right)_k = \left(\frac{\rho}{p}\right)_n$ и $(P_{22})_k = (P_{22})_n$, следует: $(p_{12})_k = (p_{12})_n$.

Таким же образом получается и другое равенство в (3.1).

Итак, регуляризующее преобразование задачи (2.8) выявляет в нерегулярном кинетическом многоатомном ТВУС около острой кромки такого же свойства подобие кинетической модели и модели Навье—Стокса, какое имеет место и в варианте регулярного кинетического ТВУС (соответственно при использовании иных специальных переменных).

Переменные (2.8) годятся не только в непосредственной близости собственно острой кромки (где они выполняют регуляризующую роль); формат задачи в регуляризующих переменных пригоден для проведения анализа и в области течения, сколь угодно удаленной от носка клина, интерпретирующего кромку.

Рассматриваемые в качестве соотношений, описывающих задачу кинетического ТВУС, представленные выше идентификации 2-х ТВУС-задач, дополненные уравнением состояния и последним из уравнений кинетической системы (2.5), необходимыми для вычисления пропущенных в идентификациях кинетических давления и плотности, позволяют выстроить — в переменных (ξ, η) — решение кинетического ТВУС полностью на основе решения навье-стоксовского ТВУС; будучи же еще дополнены обращенным 1-м уравнением из (2.4), эти идентификации позволяют представить данное решение в физических переменных (x, y) .

Исполнение равенств, содержащихся в формуле (3.1), применительно к стенке (при $\eta = 0$) означает совпадение на поверхности обтекаемого тела (клина) величин напряжения трения и нормального теплового потока соответственно для обеих (кинетической и Навье—Стокса) задач ТВУС.

Последнее соотношение кинетической системы (2.5), рассмотренное при $\eta = 0$, можно трактовать как формулу для вычисления кинетического давления на поверхности через параметры на стенке (в том числе и давление), взятые из решения ТВУС в рамках модели Навье–Стокса:

$$(p)_k = (p)_n \left[1 + \frac{2}{3\alpha} \left(\frac{1}{4\epsilon \text{Re}} \frac{1}{h} \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right]_n \quad (3.4)$$

Все изменяемые в поле течения величины в (3.4) берутся на обтекаемой поверхности.

Согласно формуле (3.4), кинетическое ТВУС-давление на стенке выше чем в модели Навье–Стокса (то же самое относится и к плотности); представляется, что в целом кинетический ТВУС более плотен и сжат, чем в модели Навье–Стокса.

Заключение. Предложена регуляризованная математическая интерпретация (модель) существенно нерегулярного неравновесного течения многоатомного газа в гиперзвуковом макрокинетическом ТВУС около острой кромки.

Указано на совпадение формата регуляризованных задач ТВУС для кинетической модели и модели Навье–Стокса (и их решений) на острой кромке в части, относящейся к описанию трения и теплообмена.

Показано, что величины напряжения трения и теплового потока на стенке вблизи острой кромки в кинетическом ТВУС совпадают с соответствующими величинами в ТВУС для модели Навье–Стокса.

Сформулирован принцип соотнесения (корреляции, подобия) решений задач ТВУС, построенных в рамках кинетической модели и модели Навье–Стокса около острой кромки в регуляризирующих переменных.

Указан механизм построения решения рассмотренной кинетической задачи ТВУС на базе решения для классического ТВУС Навье–Стокса.

Получена формула для вычисления давления на стенке в кинетическом ТВУС около острой кромки через данные решения (на стенке) задачи ТВУС для модели Навье–Стокса.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 20-08-00790А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брыкина И.Г. Асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии затупленных тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 3. С. 120–131.
2. Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А., Утюжников С.В. Влияние кривизны поверхности на граничные условия в модели вязкого ударного слоя при гиперзвуковом обтекании разреженным газом // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 938–953.
3. Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А., Титарев В.А., Утюжников С.В. Сравнительный анализ подходов к исследованию гиперзвукового обтекания затупленных тел в переходном режиме // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 1. С. 15–26.
4. Брыкина И.Г. Асимптотическое исследование теплопередачи и трения в трехмерных гиперзвуковых течениях разреженного газа // ПММ. 2016. Т. 80. № 3. С. 344–365.
5. Noori S., Ghasemloo S., Mani M. Viscous shock layer around slender bodies with nonequilibrium air chemistry // Iranian J. Sci.&Technol. Trans. Mech. Engng. Shiraz Univ. 2017. V. 41. P. 251–264.
6. Брыкина И.Г. Приближенные аналитические решения для тепловых потоков при трехмерном гиперзвуковом обтекании затупленных тел // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 125–139.

7. Кузнецов М.М., Никольский В.С. Кинетический анализ гиперзвуковых вязких течений многоатомного газа в тонком трехмерном ударном слое // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 38–49.
8. Никольский В.С. Кинетическая модель гиперзвуковых течений разреженного газа // Матем. моделир. 1996. Т. 8. № 12. С. 29–46.
9. Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С. Реология течения разреженного газа в гиперзвуковом ударном и пограничном слоях // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 189–196.
10. Cheng H.K., Lee C.J., Wong E.Y., Yang H.T. Hypersonic slip flows and issues on extending continuum model beyond the Navier–Stokes level // AIAA Paper. 1989. 89–1663.
11. Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K. A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // AIAA Paper. 1991. 91–0783.
12. Анкудинов А.Л. Тонкий вязкий ударный слой с учетом эффектов разреженности газа // Уч. Зап. ЦАГИ. 2007. Т. 38. № 3–4. С. 88–93.

Hypersonic Nonequilibrium Flow around Sharp Edge

A. L. Ankudinov^{a, #}

^a*Zhukovskii Central Institute of Aerohydrodynamics, Moscow Region, Zhukovskii, Russia*

[#]*e-mail: ankudin2@yandex.ru*

A regularized problem has been formulated to describe the flow of a molecular gas in a hypersonic macrokinetic nonequilibrium thin viscous shock layer (kinetic TVSL) near a sharp edge. It is shown that the solution of the regularized kinetic TVSL problem on the sharp edge, the description of friction and heat transfer coincides with the solution of the Navier–Stokes analogue of this TVSL problem.

It is shown that in the kinetic TVSL the friction stress and the normal heat flow on the wall in the vicinity of the sharp edge are identical with the corresponding values in the Navier–Stokes TVSL. The similarity of currents near the sharp edge in the kinetic and Navier–Stokes versions of the TVSL is indicated. A method for constructing a solution to the kinetic TVSL problem for the vicinity of a sharp edge based on the Navier–Stokes TVSL solution is indicated. A formula is obtained for calculating the pressure on the surface in the kinetic TVSL flow near the sharp edge through the components of the solution (on the wall) of the Navier–Stokes TVSL flow problem.

Keywords: kinetic thin viscous shock layer, polyatomic single-component gas, nonequilibrium, sharp edge, correlation, kinetic pressure

REFERENCES

1. Brykina I.G. Asymptotic solutions of the thin viscous shock layer equations near the symmetry plane of blunt bodies in hypersonic rarefied gas flow // Fluid Dyn., 2011, vol. 46, no. 3, pp. 444–455.
2. Brykina I.G., Rogov B.V., Tirsky G.A., Utyuzhnikov S.V. The effect of surface curvature on the boundary conditions in the viscous shock layer model for hypersonic rarefied gas flow // JAMM, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 677–687.
3. Brykina I.G., Rogov B.V., Tirsky G.A., Titarev V.A., Utyuzhnikov S.V. A comparative analysis of approaches for investigating hypersonic flow over blunt bodies in a transitional regime // JAMM, 2013, vol. 77, iss. 1, pp. 9–16.
4. Brykina I.G. Asymptotic investigation of heat transfer and skin friction in three-dimensional hypersonic rarefied gas flows // JAMM, 2016, vol. 80, no. 3, pp. 244–256.
5. Noori S., Ghasemloo S., Mani M. Viscous shock layer around slender bodies with nonequilibrium air chemistry. iranian journal of science and technology // Trans. Mecha. Engng. Shiraz Univ., 2017, vol. 41, iss. 4, pp. 251–264.

6. *Brykina I.G.* Approximate analytical solutions for heat fluxes in three-dimensional hypersonic flow over blunt bodies // *Fluid Dyn.*, 2017, vol. 52, no. 4, pp. 572–586.
7. *Kuznetsov M.M., Nikolsky V.S.* Kinetic analysis of hypersonic viscous flows of a polyatomic gas in a thin three-dimensional shock layer // *Sci. Notes TsAGI*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 38–49.
8. *Nikolsky V.S.* Kinetic model of hypersonic flows of a rarefied gas // *Math. Model.*, 1996, vol. 8, no. 12, pp. 29–46.
9. *Kuznetsov M.M., Lipatov I.I., Nikolsky V.S.* Rheology of rarefied gas flow in hypersonic shock and boundary layers // *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, no. 5, pp. 851–857.
10. *Cheng H.K., Lee C.J., Wong E.Y., Yang H.T.* Hypersonic slip flows and issues on extending continuum model beyond the Navier–Stokes level // *AIAA Paper*, 1989, 89–1663.
11. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // *AIAA Paper*, 1991, 91–0783.
12. *Ankudinov A.L.* Thin viscous shock layer taking into account the effects of gas rarefaction // *Sci. Notes TsAGI*, 2007, vol. 38, no. 3–4, pp. 88–93.

УДК 532.3

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН

© 2023 г. В. Г. Байдулов^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 20.09.2022 г.

После доработки 10.11.2022 г.

Принята к публикации 14.11.2022 г.

При движении тел в непрерывно стратифицированной жидкости с постоянной скоростью волновое поле движется вместе с телом и образует поле так называемых присоединенных внутренних волн. Набегающий на тело поток обычно предполагается постоянным, нестационарными волнами, порождаемыми на начальном этапе движения, пренебрегается. Тело при этом моделируется точечными массовыми источниками, а волновое поле находится с помощью функции Грина с последующим использованием асимптотических разложений на основе метода стационарной фазы [1]. В работе рассмотрена задача определения положения источника по известному волновому полю, генерируемому движущимся в стратифицированной жидкости телом.

Ключевые слова: внутренние волны, массовый источник, стратифицированная жидкость

DOI: 10.31857/S0032823523010046, EDN: HUOILQ

1. Введение. Движению тел в стратифицированной жидкости посвящено большое количество исследований. В линейной постановке решались задачи обтекания двумерных тел (цилиндра) [2], исследовалось поле присоединенных внутренних волн [3, 4]. Широкое распространение получила техника моделирования поля движущегося тела массовыми и силовыми источниками [5], которая была систематически развита в [6–9] в том числе и для случая нестационарного набегающего потока, а также тел движущихся под углом к горизонту [8, 9]. В последние годы изучались задачи о движении тел в ограниченном пространстве и взаимодействия внутренних волн со свободой поверхности [10]. Несмотря на то, что расчету поля присоединенных внутренних волн посвящено большое число работ, обратная задача определения положения источника по известному волновому полю не ставилась. В то же время в гидроакустике широко разрабатываются методы пространственной обработки сигналов с последующим решением задачи определения положения и параметров их источников. Построение методов локации источника по полю внутренних волн создаст дополнительные возможности в областях параметров движения, для которых гидроакустические методы оказываются неэффективными.

2. Постановка задачи. В реальных морских условиях поле течения жидкости определяется многими параметрами. В зависимости от постановки задачи необходимо учитывать многокомпонентный состав среды, диссипативные эффекты (вязкость, теплопроводность, диффузию), а также нелинейный характер уравнений гидродинамики. В этих условиях построение максимально простой модели течения представляется основой для успешного решения поставленной задачи.

Приближение несжимаемости. Традиционным важным упрощением, используемым, например, в гидродинамике океана, является предположение о несжимаемости жидкости, приводящее к условию бездивергентности (соленоидальности) поля скоростей течений. В рамках модели идеальной жидкости энтропия жидких частиц не изменяется в процессе течения, диффузия примеси отсутствует, и несжимаемость среды, понимаемая формально как неограниченность величины скорости звука, приводит к неизменности плотности материальных частиц. Такое постоянство полной (материальной) производной плотности по времени вместе с уравнением сохранения массы дает упомянутое условие бездивергентности скорости. В итоге одно уравнение сохранения массы распадается на два соотношения, делающие излишним уравнение состояния среды. Однако подобный формальный подход к условию несжимаемости требует уточнения рамок его применимости.

Наиболее просто физический смысл приближения несжимаемости выявляется на примере идеальной двухпараметрической модели сжимаемой жидкости. Малые возмущения плотности в этом случае распространяются со скоростью звука, а относительная величина плотностных пульсаций оказывается пропорциональной отношению скорости пульсаций к (адиабатической) скорости звука. Так что несжимаемость подразумевает малость скоростей течения по сравнению со скоростью звука, которая при нормальных условиях в воде близка к 1.5×10^3 м/с.

В случае более общей модели идеальной сжимаемой стратифицированной жидкости для монохроматических плоских волн малой амплитуды в предположении однородной стратификации (постоянной частоты плавучести) и в пренебрежении остальными изменениями плотности основного состояния (в приближении Буссинеска) получается биквадратное по частоте дисперсионное уравнение. Это дисперсионное уравнение внутренних акустикогравитационных волн при больших (по сравнению с частотой плавучести) частотах сводится к квадратному дисперсионному уравнению для обычных акустических волн, которыми при обсуждавшемся ограничении на скорости можно пренебречь. Что касается волн низких частот, меньших частоты плавучести, с фазовыми скоростями гораздо меньшими скорости звука, дисперсионное уравнение упрощается до уравнения внутренних волн второй степени частоты, пропорциональной квадрату частоты плавучести. Общий вид этого соотношения не зависит (в первом приближении) от степени сжимаемости жидкости, поскольку колебания частиц жидкости определяются неоднородностью плотности среды и силой Архимеда. Однако сжимаемость (конечность скорости звука) существенно отражается на виде выражения для частоты плавучести N

$$N^2 = g \frac{d \ln \rho_0}{dz} - \left(\frac{g}{v_s} \right)^2$$

В этой формуле $\rho_0(z)$, g , v_s и z — плотность основного возмущаемого состояния, величина ускорения свободного падения, адиабатическая величина скорости звука, и вертикальная координата, отсчитываемая в направлении силы тяжести, соответственно.

Поскольку для воды отношение ускорения свободного падения к скорости звука составляет 7×10^{-3} 1/с, а частота плавучести в океане не превосходит 2×10^{-2} 1/с, то вклад в изменение плотности, связанный с конечностью скорости звука, является значительным при глубинах, меньших 50 м или больших 200 м. В то же время в области термо- и халоклина на глубинах порядка 100 м для описания внутренних волн может быть использована модель несжимаемой жидкости с соленоидальным полем скорости.

Баланс плотностных изменений существенно изменяется при учете диссипативных (вязких и других) свойств жидкости. В модели неоднородной жидкости плотность материального объема изменяется в отличие от однородной не только за счет изменения

давления, но и из-за производства энтропии, порождаемого диффузией скорости и вещества (изменения концентрационного состава среды). Эти дополнительные изменения могут быть важными даже тогда, когда изменениями плотности в силу изменения давления можно пренебречь.

Для малых возмущений уравнения баланса энтропии и диффузии примеси позволяют свести скорости изменения температуры и концентрации примеси к дивергенциям потоков, так что в силу закона сохранения массы дивергенция скорости будет определяться оператором Лапласа линейной комбинации температуры и концентрации примеси

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \left[\left(\alpha \chi - \gamma D \frac{k_T}{T} \right) \nabla T - \gamma D \nabla c - \gamma D \frac{k_p}{p} \nabla p \right] \approx \Delta (\alpha \chi T - \gamma D c),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, T — температура, c — концентрация примеси, α и γ — коэффициенты теплового расширения и соленостного сжатия, χ и D — коэффициенты температуропроводности и диффузии, k_T и k_p — коэффициенты термо- и бародиффузии.

Здесь приведено также уточненное выражение, принимающее во внимание перекрестные термодинамические эффекты. Выше важность такого влияния устанавливалась на основе относительно крупномасштабных оценок. Однако полученный результат содержит высокие производные, и потому можно ожидать наибольших эффектов от областей с повышенными градиентами при тонкоструктурных изменениях и в пограничных слоях.

Большое различие в скоростях диффузионной, тепловой и вязкой релаксации заставляет в случае вязкой стратифицированной жидкости традиционно принимать во внимание только вязкую диффузию, и в приближении несжимаемости упрощать модель, используя одновременно условия бездивергентности скорости и постоянства плотности материальных частиц.

Поскольку изменения плотности относительно невелики (не превышают нескольких процентов) далее будет использоваться приближение Буссинеска, в рамках которого неоднородностью среды пренебрегается везде за исключением членов содержащих ускорение свободного падения (силы плавучести).

Экспериментальные наблюдения. Простейшим примером стратификации является свободная поверхность, когда плотность меняется на конечную величину на границе раздела воздух—вода. Как известно при движении тела по границе среды в этом случае формируется поле волн (корабельные волны) и картина течения в случае движения тела с постоянной скоростью движется вместе с источником, а поверхности постоянной фазы имеют вид клина (рис. 1).

Экспериментальные наблюдения движения тел (цилиндра и сферы) в однородно стратифицированной жидкости [11–13] показали, что за ограниченное время (порядка 2–3 периода плавучести) позади тела формируется волновое поле, движущееся вместе с источником. При этом существующие благодаря эффектам диффузии конвективные течения вблизи покоящегося тела оказываются настолько слабыми, что после начала движения тела экспериментально не наблюдаются.

Проведенные детальные исследования показали, увеличение скорости движения тела приводит благодаря совместному влиянию нелинейных членов уравнений гидродинамики и вязкости к возникновению возмущений волнового поля в области спутного течения вначале в виде присоединенных донных вихрей, а затем и вихревой дорожки. Тем не менее, волновое поле на больших расстояниях от тела значительное изменение не претерпевает, а сама картина течения определяется эффективным размером источника, скоростью его движения и частотой плавучести. Область спутного течения при этом ограничена в вертикальном направлении размерами тела [11–13],

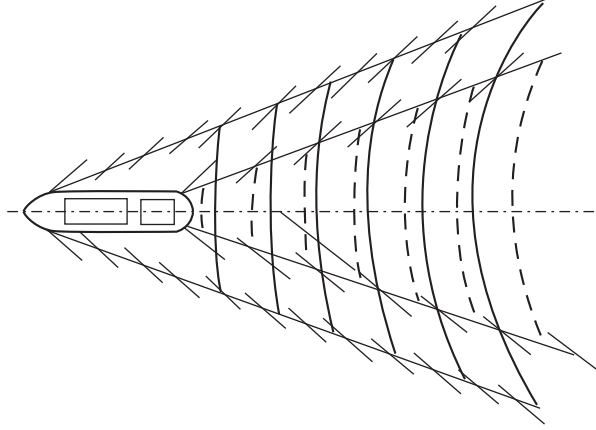


Рис. 1. Корабельные волны на поверхности воды.

а интенсивность волнового поля, создаваемого вихревой дорожкой, значительно уступает полю присоединенных внутренних волн [14].

Таким образом представляется обоснованной задача определения положения источника по полю присоединенных внутренних волн в рамках линеаризованной модели идеальной несжимаемой линейно стратифицированной жидкости.

Теоретическая модель. Рассматривается наиболее типичное горизонтальное движение тела с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ в неограниченной экспоненциально стратифицированной жидкости ($\rho = \rho_0 \exp(-\beta z) + \rho'(\mathbf{r}, t)$, $\beta g = N^2$, N – частота плавучести). В качестве модели выбрана модель идеальной жидкости. Поскольку изменения плотности жидкости по отношению к базовой стратификации обычно малы, и уравнения движения записываются в приближении Буссинеска. Основным безразмерным параметром является число Фруда $Fr = v_0/Na$, где a – размер тела.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla P + \mathbf{g} \frac{\rho'}{\rho_0} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= \beta v_z \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Движущееся тело моделируется массовым источником $m(\mathbf{r}, t) = m_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t)$. Динамическое давление P и скорость могут быть переписаны в терминах внутреннего потенциала $\psi(\mathbf{r}, t)$ [1]

$$P = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla + N^2 \nabla_h \right) \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad (2.2)$$

где $\nabla_h = (\partial_x, \partial_y, 0)$, а внутренний потенциал удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + N^2 \nabla_h^2 \right) \psi = m$$

Для источника, движущегося с постоянной скоростью, поле течения оказывается стационарным в системе координат, связанной с источником. Асимптотическое реше-

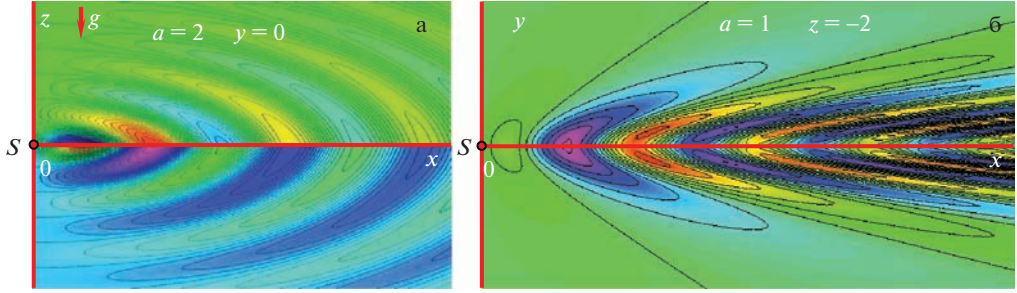


Рис. 2. Вертикальные (а) и горизонтальные (б) карты вертикальных смещений жидкости ζ в системе координат, связанной с движущимся источником.

ние задачи [1] на больших расстояниях от источника дает выражение для вертикального смещения частиц жидкости в системе координат источника

$$\zeta(\mathbf{r}, t) \sim H(x) \frac{Nm_0}{2\pi v_0} \frac{xz}{r_{\perp}^2 r^2} \sqrt{x^2 y^2 + r_{\perp}^4} \cos\left(\frac{N}{v_0} \frac{z}{r_{\perp}} r\right), \quad (2.3)$$

где $r_{\perp}^2 = y^2 + z^2$, $r^2 = x^2 + r_{\perp}^2$ — координаты точки наблюдения в системе отсчета (x, y, z) , связанной с источником, $H(x)$ — функция Хевисайда.

Выражение для вертикальных смещений частиц жидкости позволяет рассчитать горизонтальные карты смещений на различных вертикальных расстояниях от движущегося источника (рис. 2). Эти поля могут быть измерены лабораторно и в натурных условиях традиционными средствами гидрофизических измерений. Таким образом, актуальной оказывается задача определения положения источника по полю вертикальных смещений.

Пусть существует возможность измерять вертикальные смещения в горизонтальной плоскости, над которой движется источник и по данным измерений требуется определить его положение и скорость. Выберем измерительные устройства в виде горизонтальных концентрических окружностей (рис. 3). Пусть измерения вертикального смещения производятся в центре и вдоль концентрических окружностей.

Измеряя в момент времени t_1 смещение в центре O (красная точка $\zeta = \zeta_0$) найдем положения точек на первой от центра окружности (расстояние от центра δl_1), смещения в которых будут равны ζ_0 . Тогда определяя момент времени t_2 в который эти точки сойдутся в одной точке первой окружности, определим направление движения источника и его скорость $v_0 = \delta l_1 / (t_2 - t_1)$.

Чтобы определить положение источника выберем систему отсчета (X, Y, Z) , движущуюся вместе с источником, начало отсчета которой с положением источника не совпадает (рис. 4). При этом координаты источника и точки наблюдения имеют значения (X_0, Y_0, Z_0) и $(x + X_0, y + Y_0, z + Z_0)$. Обращая внимание, что нули вертикального смещения определяются нулями косинуса, входящего в выражение (2.3) для первого и второго нуля, положения которых определяются выражениями

$$\frac{z_1}{r_{\perp,1}} r_1 = \frac{v_0}{N} \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{z_2}{r_{\perp,2}} r_2 = 3 \frac{v_0}{N} \frac{\pi}{2}, \quad (2.4)$$

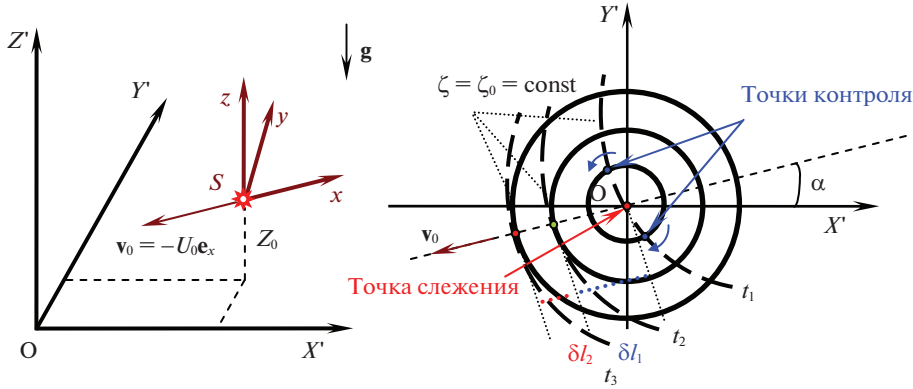


Рис. 3. Схема определения скорости движения источника S относительно неподвижной системы координат. Плоскость (X', Y') – горизонтальная.

То есть в точках с координатами (x, y, z) , которые связаны соотношением

$$x = k\sqrt{y^2 + z^2}, \quad (2.5)$$

где $k = \sqrt{\frac{\pi^2}{4a^2 z^2} (2n-1)^2 - 1}$ (n – номер нуля ζ), вертикальное смещение частиц жидкости обращается в нуль. Для двух значений высот z_1 и z_2 такие зависимости изображены на рис. 4 (сверху). Из рисунка следует, что уже на некотором удалении от источника зависимость $x(y)$ становится близкой к прямолинейной вида $x = ky$. Эти прямые для двух соседних нулей ζ порядков n и $n+1$ пересекаются в месте расположения источника, что позволяет определить связь между горизонтальными координатами источника (X_0, Y_0) , номером нуля и глубиной погружения источника Z_0 . Таким образом, общее число неизвестных оказывается равным четырем, что позволяет решить задачу определения положения источника по данным измерения нулей вертикального смещения жидкости в четырех точках, расположенных в горизонтальной плоскости.

Обозначая координаты нулей порядков $m = n$ и $n+1$, через $(X_{i,m}, Y_{i,m}, Z)$; $i = 1, 2$, а определяя коэффициенты наклона прямых как

$$k_m = \frac{\Delta X_m}{\Delta Y_m},$$

приходим к выражениям

$$X_0 = \frac{k_n k_{n+1} (Y_{i,n+1} - Y_{i,n}) + k_{n+1} X_{i,n} - k_n X_{i,n+1}}{k_{n+1} - k_n} \quad (2.6)$$

$$Y_0 = \frac{k_{n+1} Y_{i,n+1} - k_n Y_{i,n} + X_{i,n} - X_{i,n+1}}{k_{n+1} - k_n} \quad (2.7)$$

$$Z_0 = Z - \frac{\pi/a}{b_{n+1} - b_n}, \quad n = \frac{1}{2} \frac{b_{n+1} + b_n}{b_{n+1} - b_n}, \quad (2.8)$$

где $b_n^2 = k_n^2 + 1$.

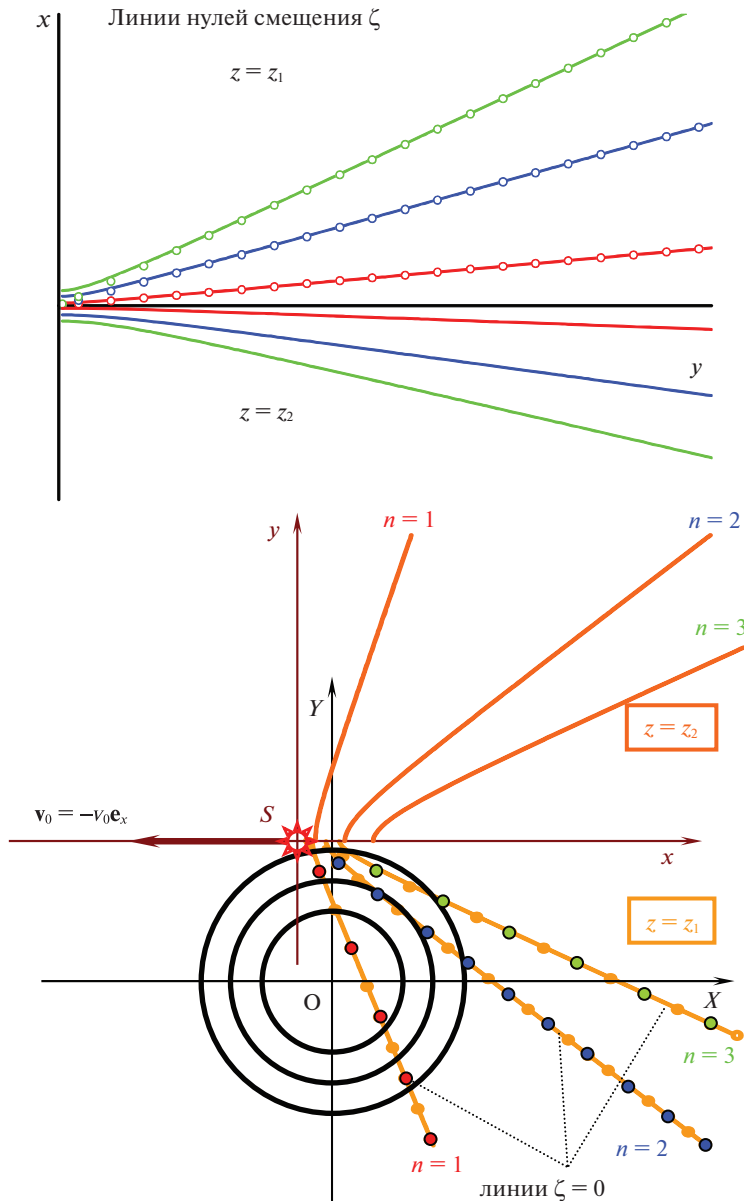


Рис. 4. Для двух вертикальных горизонтов $z = z_1$ и $z = z_2$ показаны расположения нулей смещений (порядков $n = 1, 2, 3$) в системе координат источника (сверху), а также их расположение относительно систем координат $Sxyz$ и $OXYZ$ (внизу).

Решение задачи без использования асимптотических выражений зависимостей (2.5) можно получить, воспользовавшись выражением для производной $x' = k^2 y/x$. В этом случае для полного решения достаточно знать положение четырех точек и четырех производных x' в этих точках.

В отличие от асимптотического, точное решение может быть построено по данным измерения восьми нулевых точек двух соседних нулей вертикального смещения

$(X_{i,m}, Y_{i,m}, Z)$, $m = n, n + 1$; $i = 1, 4$. Выбирая в качестве неизвестных величины X_0 , $k_m^2 Y_0$, k_m^2 приходим к линейной системе уравнений

$$2(X_{i,m} - X_{i+1,m})X_0 - 2(Y_{i,m} - Y_{i+1,m})k_m^2 Y_0 + (Y_{i,m}^2 - Y_{i+1,m}^2)k_m^2 = X_{i,m}^2 - X_{i+1,m}^2, \quad (2.9)$$

решение которой однозначно определяет положение источника.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00151).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 333–374.
2. *Bretherton F.P.* The time-dependent motion due to a cylinder moving in an unbounded rotating or stratified fluid // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. P. 545–570.
3. *Стурова И.В.* Волновые движения, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела // ПМТФ. 1974. № 6. С. 80–91.
4. *Аксенов А.В., Можжаев В.В., Скороваров В.Е., Шеронов А.А.* Фазовая структура трехмерных внутренних волн в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 129–135.
5. *Городцов В.А., Теодорович Э.В.* Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимися сингулярными источниками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 77–83.
6. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 1. Green's function and point sources // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 439–480.
7. *Dupont P., Voisin B.* Internal waves generated by a translating and oscillating sphere // Dyn. Atmos. Oceans. 1996. V. 23. P. 289–298.
8. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2004. V. 498. P. 289–313.
9. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields generated by a translating body in a stratified fluid: an experimental comparison // J. Fluid Mech. 2006. V. 564. P. 305–331.
10. *Stetsyuk I.V.* The development of a stratified flow following over a sphere inside the viscous fluid in the presence of internal or surface waves // J. Phys.&Math. 2015. № 1. P. 293–298.
11. *Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д.* Вихревые системы спутного стратифицированного течения за сферой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 82–90.
12. *Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д.* Экспериментальное исследование поля скорости около цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 20–30.
13. *Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика сферы в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 3–9.
14. *Voisin B.* Internal wave generation by turbulent wakes // In: Mixing in Geophysical Flows / Ed. by Redondo J.M., Métais O. 1995. P. 291–301. CIMNE.

On the Problem of Determining the Position of the Source of Internal Waves

V. G. Baydulov^{a, #}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: baud@ipmnet.ru*

When bodies move in a continuously stratified fluid, the steady wave field moves along with the body and form a field of so-called associated internal waves. The flow incident on the body is usually assumed to be constant; non-stationary waves generated at the initial stage of motion are neglected. In this case, the body is modeled by point mass sources, and the wave field is found using the Green's function method, followed by the use of asymptotic expansions based on the stationary phase method [1]. The inverse problem of determining the position of the source is solved from the wave field.

Keywords: internal waves, mass point, stratified liquid

REFERENCES

1. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources // *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 261, pp. 333–374.
2. *Bretherton F.P.* The time-dependent motion due to a cylinder moving in an unbounded rotating or stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 28, pp. 545–570.
3. *Sturova I.V.* Wave motions produced in a stratified liquid from flow past a submerged body // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1974, vol. 15, pp. 796–805.
4. *Gorodtsov V.A., Teodorovich E.V.* Two-dimensional problem for internal waves generated by moving singular sources // *Fluid Dyn.*, 1981, vol. 16, pp. 219–224.
5. *Aksenov A.V., Mozhaev V.V., Skorovarov V.E., Sheronov A.A.* Stratified flow over a cylinder at low values of the internal Froude number // *Fluid Dyn.*, 1989, vol. 24, pp. 639–642.
6. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 1. Green's function and point sources // *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 231, pp. 439–480.
7. *Dupont P., Voisin B.* Internal waves generated by a translating and oscillating sphere // *Dyn. Atmos. Oceans*, 1996, vol. 23, pp. 289–298.
8. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 498, pp. 289–313.
9. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields generated by a translating body in a stratified fluid: an experimental comparison // *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 564, pp. 305–331.
10. *Stetsyuk I.V.* The development of a stratified flow following over a sphere inside the viscous fluid in the presence of internal or surface waves // *J. Phys.&Math.*, 2015, no. 1, pp. 293–298.
11. *Sysoeva E.Y., Chashechkin Y.D.* Vortex systems in the stratified wake of a sphere // *Fluid Dyn.*, 1991, vol. 26, pp. 544–551.
12. *Mitkin V.V., Chashechkin Y.D.* Experimental investigation of the velocity field near a cylinder in a continuously stratified fluid // *Fluid Dyn.*, 2000, vol. 35, pp. 642–651.
13. *Chashechkin Yu.D.* Hydrodynamics of a sphere in a stratified fluid // *Fluid Dyn.*, 1989, vol. 24, pp. 1–7.
14. *Voisin B.* Internal wave generation by turbulent wakes // In: *Mixing in Geophysical Flows* / Ed. by *Redondo J.M., Métais O.* 1995. pp. 291–301, CIMNE.

УДК 539.3

СХЕМЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЯДЕР НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ СРЕД С НЕРЕЛАКСИРУЮЩИМ ОБЪЕМОМ

© 2023 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,3,*}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 14.10.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принята к публикации 17.12.2022 г.

В рамках интегральных определяющих соотношений для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа в случае нерелаксирующего объема предложены возможные, дополняющие известные, установочные эксперименты по определению ядер операторов $\check{g}_\beta$ Ильюшина. Один из них базируется на использовании образца из вспомогательного вязкоупругого материала, материальные функции которого связаны с функцией ползучести и модулем объемного сжатия исходного материала. Также предложены аналогичные схемы установочных экспериментов для нахождения ядер операторов $\check{h}_\gamma$, в определенном смысле сопряженных с $\check{g}_\beta$.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, релаксация, нерелаксирующий объем, разностный оператор, ядро, расшифровка оператора, материальная функция, установочный эксперимент

DOI: 10.31857/S003282352301006X, EDN: HVLOZC

1. Определяющие соотношения и материальные функции. Рассмотрим интегральные определяющие соотношения между напряжениями $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij}$ и малыми деформациями $\epsilon_{ij} = e_{ij} + \theta \delta_{ij}/3$ для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа:

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(\tau) \equiv \check{R}e_{ij}, \quad e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) \equiv \check{\Pi}s_{ij} \quad (1.1)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t R_1(t-\tau) d\theta(\tau) \equiv \check{R}_1\theta, \quad \theta(t) = \int_0^t \Pi_1(t-\tau) d\sigma(\tau) \equiv \check{\Pi}_1\sigma, \quad (1.2)$$

где $R(t)$ и $R_1(t)$ – функции сдвиговой и объемной релаксации, $\Pi(t)$ и $\Pi_1(t)$ – функции сдвиговой и объемной ползучести [1–4]. Эти функции служат ядрами разностных операторов $\check{R}$, $\check{R}_1$, $\check{\Pi}$ и $\check{\Pi}_1$, таких что $\check{R}\check{\Pi} = \check{\Pi}\check{R} = \check{I}$, $\check{R}_1\check{\Pi}_1 = \check{\Pi}_1\check{R}_1 = \check{I}$. Единичный оператор $\check{I}$ в дальнейшем для простоты будет обозначаться единицей.

Для описания поведения сред во времени помимо упомянутых привлекаются безразмерные операторы $\check{v}$ (оператор Пуассона), $\check{\omega}$ и $\check{\pi}$:

$$\check{v} = \frac{3\check{R}_1 - \check{R}}{6\check{R}_1 + \check{R}} = \frac{3\check{\Pi} - \check{\Pi}_1}{6\check{\Pi} + \check{\Pi}_1}, \quad \check{\omega} = \frac{1}{3} \frac{\check{R}\check{\Pi}_1}{\check{R} + 6\check{R}_1} = \frac{1 - 2\check{v}}{1 + \check{v}}, \quad \check{\pi} = \frac{1}{\check{\omega}} = 3\check{R}_1\check{\Pi}, \quad (1.3)$$

а также оператор Юнга $\check{E}$:

$$\check{E} = \frac{9\check{R}\check{R}_1}{\check{R} + 6\check{R}_1} = \frac{9}{6\check{\Pi} + \check{\Pi}_1} \quad (1.4)$$

2. Оператор $\check{g}_\beta$. Набор $\{\check{R}, \check{R}_1, \check{\Pi}, \check{\Pi}_1\}$ составляет множество так называемых основных операторов, легко подлежащих расшифровке в силу того, что их ядра определяются из стандартных установочных экспериментов на релаксацию и ползучесть. Для расширения числа операторных функций, представимых в виде суммы произведений основных операторов, а следовательно, допускающих точную интегральную расшифровку, вводится оператор $\check{g}_\beta$ Ильюшина

$$\check{g}_\beta = \frac{1}{1 + \beta\check{\omega}}; \quad 0 \leq \beta \in R \quad (2.1)$$

Его свойства подробно освещены в монографиях [1, 2].

Приведем пример задачи теории вязкоупругости, в которой введение $\check{g}_\beta$ в число основных операторов позволяет избежать аппроксимационных методов и найти точное решение.

Пусть сплошной диск радиуса b из материала с определяющими соотношениями (1.1), (1.2) плотности ρ вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega(t)$. Требуется определить возникающее в результате центрифужного эффекта кольцевое напряжение $\sigma_{\theta\theta}(b, t)$ в точках границы диска.

Решение соответствующей задачи теории упругости о вращении тяжелого диска следующее (см., напр., ([5], с. 47)):

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2}{4} (1 - \nu) \rho \Omega^2(t) \quad (2.2)$$

Согласно принципу Вольтерры и связи операторов $\check{\omega}$ и $\check{v}$ в задаче для вязкоупругого диска

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2}{4} (1 - \check{v}) \rho \Omega^2(t) = \frac{b^2}{4} \phi(\check{\omega}) \rho \Omega^2(t); \quad \phi(\check{\omega}) = \frac{1 + 2\check{\omega}}{2 + \check{\omega}} \quad (2.3)$$

Дробно-линейную функцию $\phi(\check{\omega})$ нельзя представить конечной суммой произведений из набора $\{\check{R}, \check{R}_1, \check{\Pi}, \check{\Pi}_1\}$. Но в то же время

$$\phi(\check{\omega}) = 2 - \frac{3/2}{1 + \check{\omega}/2} = \sum_{n=0}^N c_n \check{g}_{\beta_n} \quad (2.4)$$

с параметрами $N = 1$, $\beta_0 = 0$, $c_0 = 2$, $\beta_1 = 1/2$, $c_1 = -3/2$. Таким образом, можно дать точное выражение для кольцевого напряжения:

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2 \rho}{8} \left(4 \int_0^t g_0(t - \tau) d\Omega^2(\tau) - 3 \int_0^t g_{1/2}(t - \tau) d\Omega^2(\tau) \right) \quad (2.5)$$

Возможные установочные эксперименты для непосредственного определения функции $g_\beta(t)$ описаны в ([1], с. 112; [2], с. 109). В общем случае связи шаровых частот (1.2) они достаточно сложны в осуществлении и различны для разных диапазо-

нов изменения β . Так, для $0 \leq \beta \leq 1/2$ к исследуемому образцу необходимо последовательно присоединить скручиваемый образец, изготовленный из того же материала, что и основной, и одной и той же силой растягивать первый и скручивать второй образец.

Проще ситуация в случае вязкоупругой модели с нерелаксирующим объемом ($R_1(t) \equiv K$, $\Pi_1(t) \equiv 1/K$), в которой шаровые части $\sigma(t)$ и $\theta(t)$ связаны упругим законом

$$\sigma(t) = K\theta(t) \quad (2.6)$$

с модулем объемного сжатия $K = \text{const}$. Тогда вместо скручиваемого второго образца в предыдущем эксперименте можно взять работающую на растяжение пружину заданной в зависимости от параметра β жесткости.

Остановимся в дальнейшем подробнее на случае (2.6) и предложим дополнительные возможные установочные эксперименты для определения ядра $g_\beta(t)$. Заметим, что операторы (1.3) и (1.4) примут вид

$$\bar{v} = \frac{3K - \bar{R}}{6K + \bar{R}} = \frac{3K\bar{\Pi} - 1}{6K\bar{\Pi} + 1}, \quad \bar{\omega} = \frac{\bar{R}}{3K}, \quad \bar{\pi} = 3K\bar{\Pi}, \quad \bar{E} = \frac{9K\bar{R}}{\bar{R} + 6K}, \quad (2.7)$$

а сам оператор (2.1) будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{g}_\beta = \frac{1}{1 + \beta\bar{R}/(3K)} \quad (2.8)$$

Если две функции $x(t)$ и $y(t)$ связаны между собой операторным соотношением

$$y(t) = (\bar{g}_\beta x)(t) \equiv \int_0^t g_\beta(t - \tau) dx(\tau), \quad (2.9)$$

то обратная связь имеет вид

$$x(t) = y(t) + \frac{\beta}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dy(\tau) \quad (2.10)$$

Эксперимент 1. Соединим параллельно упругий элемент с модулем Юнга $E^{(1)}$ и слой из исследуемого вязкоупругого материала с определяющими соотношениями (1.1) и (2.6) (рис. 1). При действии осевым напряжением $\sigma(t)$ упругий элемент работает на растяжение, а слой на сдвиг. Так как деформация упругого элемента $\varepsilon(t)$ при параллельном соединении совпадает с деформацией сдвига слоя, то

$$\sigma(t) = E^{(1)}\varepsilon(t) + \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (2.11)$$

Из сравнения выражений в (2.10) и (2.11) видно, что при переобозначении $x(t) = \sigma(t)$, $y(t) = E^{(1)}\varepsilon(t)$, $E^{(1)} = 3K/\beta$ они совпадут, а, следовательно, согласно (2.9)

$$E^{(1)}\varepsilon(t) = \int_0^t g_\beta(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (2.12)$$

Прикладывая напряжение ступенькой Хевисайда $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ и измеряя в эксперименте деформацию $\varepsilon_0(t)$, получим искомую функцию

$$g_\beta(t) = \frac{E^{(1)}}{\sigma_0} \varepsilon_0(t) \quad (2.13)$$

Эксперимент 2. Заменим в предыдущем эксперименте работающий на сдвиг слой из исследуемого материала на работающий на растяжение образец из другого (вспомога-

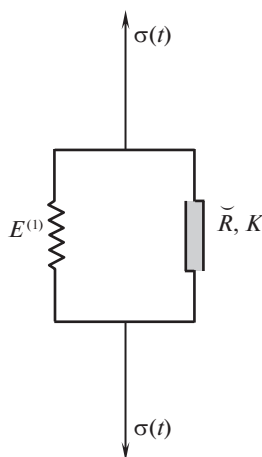


Рис. 1.

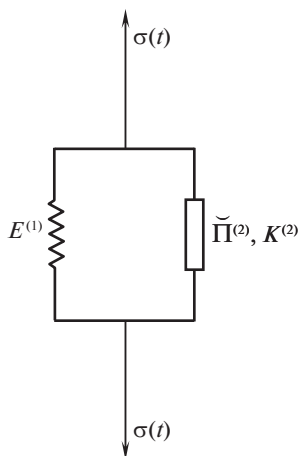


Рис. 2.

тельного) вязкоупругого материала с нерелаксирующим объемом и материальными функциями, которые будем обозначать верхним индексом (2). Упругий элемент в другом колене параллельного соединения оставим прежним (рис. 2).

Как следует из (2.11), вспомогательный материал должен быть таким, чтобы ядро $E^{(2)}(t)$ оператора Юнга $\tilde{E}^{(2)}$ для него совпадало с известной функцией $R(t)$ сдвиговой релаксации. Нетрудно показать, что это требование приводит к следующей связи материальных операторов исследуемой и вспомогательной сред:

$$\tilde{\Pi} = 2\tilde{\Pi}^{(2)}/3 + \frac{1}{9K^{(2)}} \quad (2.14)$$

В частности, если вспомогательный материал несжимаем, то

$$\tilde{\Pi} = 2\tilde{\Pi}^{(2)}/3 \quad (2.15)$$

Результаты эксперимента 2 можно интерпретировать и в обратную сторону. Если имеется образец из материала с нерелаксирующим объемом, функцией сдвиговой ползучести $\tilde{\Pi}_{(t)}^{(2)}$ и модулем объемного сжатия $K^{(2)}$, то, проведя серию экспериментов с упругими элементами с различными модулями Юнга $E^{(1)}$, можно построить серию функций $g_{\beta}(t)$ для материала с функцией сдвиговой ползучести $\Pi(t)$, вид которой следует из (2.14), и модулем объемного сжатия $K = \beta E^{(1)}/3$. Поскольку величины K и β везде входят только своим отношением, то для любого $a > 0$ ядро $g_{\beta}(t)$ вязкоупругой среды с материальными функциями $\Pi(t)$ и K будет совпадать с ядром $g_{a\beta}(t)$ среды с функциями $\Pi(t)$ и aK .

3. Оператор $\tilde{h}_{\gamma}$. С оператором $\tilde{g}_{\beta}$ Ильюшина тесно связан другой оператор, который по аналогии с $\tilde{g}_{\beta}$ назовем $\tilde{h}_{\gamma}$:

$$\tilde{h}_{\gamma} = \frac{1}{1 + \gamma\tilde{\pi}}; \quad 0 \leq \gamma \in R \quad (3.1)$$

Эта связь устанавливается взаимнообратными соотношениями

$$\tilde{h}_{\gamma} = \frac{1 - \tilde{g}_{\beta}}{1 - (1 - \beta\gamma)\tilde{g}_{\beta}}, \quad \tilde{g}_{\beta} = \frac{1 - \tilde{h}_{\gamma}}{1 - (1 - \beta\gamma)\tilde{h}_{\gamma}} \quad (3.2)$$

Так, решение (2.3) упоминаемой ранее задачи о вращении тяжелого диска можно записать и по-другому:

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2}{4} (1 - \tilde{\nu}) \rho \Omega^2(t) = \frac{b^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{3/2}{1 + 2\pi} \right) \rho \Omega^2(t) \quad (3.3)$$

Точное решение (2.5) представимо и в терминах операторов $\tilde{h}_{\gamma}$:

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2 \rho}{8} \left(\int_0^t h_0(t - \tau) d\Omega^2(\tau) + 3 \int_0^t h_2(t - \tau) d\Omega^2(\tau) \right) \quad (3.4)$$

В случае нерелаксирующего объема из (3.1) имеем

$$\tilde{h}_{\gamma} = \frac{1}{1 + 3\gamma K \tilde{\Pi}} \quad (3.5)$$

Предложим ряд экспериментов по непосредственному (безотносительно к $\tilde{g}_{\beta}$) нахождению ядра $h_{\gamma}(t)$. Заметим, что если две функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют операторному уравнению

$$y(t) = (\tilde{h}_{\gamma} x)(t) \equiv \int_0^t h_{\gamma}(t - \tau) dx(\tau) \quad (3.6)$$

с функцией $\tilde{h}_{\gamma}$ в виде (3.5), то

$$x(t) = y(t) + 3K\gamma \int_0^t \Pi(t - \tau) dy(\tau) \quad (3.7)$$

Эксперимент 3. Последовательно соединим упругий элемент с модулем Юнга $E^{(1)}$ и слой из исследуемого материала с определяющими соотношениями (1.1), (2.6) (рис. 3).

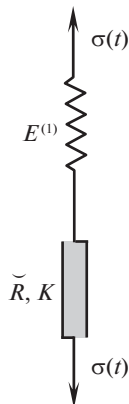


Рис. 3.

Так как напряжение $\sigma(t)$ в упругом элементе при последовательном соединении равно сдвиговому напряжению в слое, то

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E^{(1)}} + \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (3.8)$$

Соотношения (3.7) и (3.8) тождественно совпадут при переобозначении $x(t) = \varepsilon(t)$, $y(t) = \sigma(t)/E^{(1)}$, $E^{(1)} = 3K\gamma$, так что согласно (3.6)

$$\sigma(t) = E^{(1)} \int_0^t h_\gamma(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.9)$$

Если фиксировать деформацию ступенькой Хевисайда $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t)$ и измерять в эксперименте осевое напряжение $\sigma_0(t)$ всей системы, то искомая функция $h_\gamma(t)$ вычисляется по формуле

$$h_\gamma(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E^{(1)} \varepsilon_0} \quad (3.10)$$

По заданному $\gamma > 0$ упругий элемент выбирается так, чтобы его модуль Юнга был равен $3K\gamma$.

Эксперимент 4. Воспользуемся, как и в эксперименте 2, работающим на растяжение образцом из вспомогательного материала с нерелаксирующим объемом и соединим его последовательно с упругим элементом, имеющим модуль Юнга $E^{(1)}$ (рис. 4). Оператор $1/\bar{E}^{(2)}$ для этого материала должен совпадать с известным оператором $\bar{\Pi}$, а, следовательно, $\bar{E}^{(2)} = \bar{R}$. Таким образом, связь материальных операторов (2.14) исследуемой и вспомогательной сред остается такой же, как в эксперименте 2.

Проводя серию экспериментов на релаксацию с упругими элементами с различными модулями Юнга $E^{(1)}$, принципиально можно построить серию функций $h_\gamma(t)$ для материала с функцией сдвиговой ползучести, следующей из (2.14), и модулем объемного сжатия $K = E^{(1)}/(3\gamma)$. Так как K и γ входят только комбинацией своего произве-

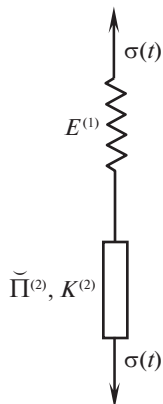


Рис. 4.

дения, то ядро $h_{\gamma}(t)$ вязкоупругой среды с материальными функциями $\Pi(t)$ и K не будет отличаться от ядра $h_{a\gamma}(t)$ среды, характеризующейся $\Pi(t)$ и K/a , $a > 0$.

4. Использование температурно-временной аналогии. Естественно, встает вопрос о подборе в экспериментах 2 и 4 реального вспомогательного материала с фиксированными реологическими свойствами, определяемыми связью (2.14) либо (2.15). Здесь на помощь может прийти температурно-временная аналогия, позволяющая в определенных случаях в качестве вспомогательного материала выбирать сам исследуемый материал.

Положим в (2.14) $K^{(2)} = K$ и запишем

$$\check{\Pi}^{(2)} = \frac{3\check{\Pi}}{2} - \frac{1}{6K} \quad (4.1)$$

Используем тот факт, что при повышении температуры $T > T_0$ явление ползучести во времени протекает быстрее, чем при $T = T_0$, и тем самым значение функции ползучести в каждый момент становится больше. Надлежащим образом устанавливая температурный режим $T(t)$ при проведении экспериментов 2 и 4, добьемся того, чтобы с удовлетворительной точностью выполнялось соотношение

$$\Pi(t, T(t)) \approx \frac{3\Pi(t, T_0)}{2} - \frac{1}{6K}; \quad t > t_1 \quad (4.2)$$

Тогда в качестве ядра $\Pi^{(2)}(t)$ оператора $\check{\Pi}^{(2)}$ в (4.1) можно взять функцию $\Pi(t, T(t))$.

Заметим, что проведенные рассуждения, связанные с приближенным подбором оператора $\check{\Pi}^{(2)}$ в (2.14) и (2.15), имеют место и в случаях, когда в качестве вспомогательного выбирается не сам исследуемый материал, а другой вязкоупругий материал, но эксперимент проводится при вычисленном для него температурном режиме $T(t)$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

2. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
3. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 119–157.
4. Georgievskii D.V. Methods of investigation of boundary value problems in viscoelasticity theory // Rus. J. Math. Phys. 2007. V. 14. № 3. P. 262–274.
5. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1979. 200 с.

Schemes of the Experiments for Determining the Kernels of Some Difference-Type Operators for Media with Nonrelaxing Volume

D. V. Georgievskii^{a,b,c,#}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^b Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

^c Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

[#] e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Within the framework of integral constitutive relations for linear isotropic viscoelastic media with difference-type kernels in the case of a nonrelaxing volume, possible, complementary to the known, setup experiments for determining the kernels of Ilyushin operators $\check{g}_\beta$ are proposed. One of them is based on the use of a sample from an auxiliary viscoelastic solid, the material functions of which are related to the creep function and the volume compression module of the given material. Similar schemes of setup experiments for finding operator kernels $\check{h}_\gamma$, in a certain sense conjugated with $\check{g}_\beta$, are also proposed.

Keywords: viscoelasticity, creep, relaxation, nonrelaxing volume, difference-type operator, kernel, decoding of the operator, material function, setup experiment

REFERENCES

1. Ilyushin A.A., Pobedrya B.E. Foundations of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity. Moscow: Nauka, 1970. 280 p. (in Russian)
2. Pobedrya B.E. Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: MSU, 1995. 366 p. (in Russian)
3. Georgievskii D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E. Specific features of the behavior of viscoelastic models // Mech. Solids, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 119–157.
4. Georgievskii D.V. Methods of investigation of boundary value problems in viscoelasticity theory // Rus. J. Math. Phys., 2007, vol. 14, no. 3, pp. 262–274.
5. Ilyushin A.A., Lomakin V.A., Shmakov A.P. Tasks and Exercises on Mechanics of Continuum. Moscow: MSU, 1995. 200 p. (in Russian)

УДК 539.3

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ЗОНОЙ КОНТАКТА

© 2023 г. Н. Б. Золотов¹, Д. А. Пожарский^{1,*}¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: pozharda@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.07.2022 г.

После доработки 29.10.2022 г.

Принята к публикации 01.11.2022 г.

Рассматриваются двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя с неизвестной областью контакта. Одна грань слоя находится в условиях скользящей или жесткой заделки. Задачи сводятся к интегральным уравнениям, ядра которых не содержат квадратур. Для случая полного контакта другой грани слоя с двумерной синусоидальной жесткой поверхностью задачи имеют точное решение, которое используется для отладки программ, реализующих численный метод нелинейных интегральных уравнений Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Рассчитаны механические характеристики при внедрении системы эллиптических параболоидов, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта.

Ключевые слова: двоякопериодический контакт, упругий слой, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0032823523010101, **EDN:** HVZBFR

Пионерской работой в области периодического контакта является решение Вестергаарда для одномерной волнистой поверхности [1]. Основная доля публикаций по данной тематике относится к плоским задачам [2]. Для исследования пространственного периодического контакта для круговых инденторов разработан метод локализации [3, 4]. Асимптотические [5, 6] и численные [7] результаты получены для контакта двумерной волнистой поверхности с полупространством. На основе регулярного асимптотического метода изучались двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя при заданной области контакта [8]. Учитывалось влияние трения, износа, сцепления, микрогеометрии и адгезии при периодическом контакте упругих тел [9–13], было получено точное решение задачи о полном контакте волнистого штампа со слоем [13]. Исследовались периодические контактные задачи для вязкоупругого полупространства [14], а также для полупространства с частично закрепленной границей [15].

В настоящей статье для решения трехмерных периодических контактных задач для слоя с неизвестной зоной контакта применяется численный метод нелинейных граничных интегральных уравнений [16]. Для верификации результатов используется точное решение для полного контакта двумерной синусоидальной жесткой поверхности и упругого слоя, которое обобщает известное решение Джонсона и соавторов для полупространства [5, 6]. В отличие от прямого численного метода быстрого преобразования Фурье [7] метод интегральных уравнений [16] позволяет получать приемлемые результаты при существенно меньшем числе узлов. Показано, что переход от дис-

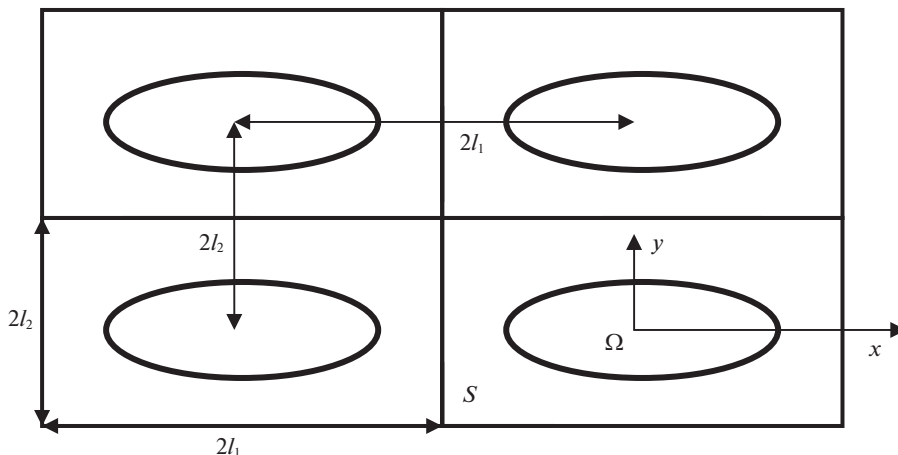


Рис. 1. Двойкопериодическая область контакта.

кретного к непрерывному двойкопериодическому контакту (перколяция) связан с образованием новых интегрируемых особенностей ядра интегрального уравнения на линиях перехода. Качественные выводы согласуются с известными результатами метода локализации для полупространства [3, 4].

1. Постановка задач, интегральные уравнения. В декартовых координатах рассмотрим слой $\{|x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h\}$ с параметрами упругости G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). Изучим контактные задачи без учета сил трения, когда контактное давление

$$q(x, y) = q(x - 2nl_1, y - 2ml_2); \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

является двойкопериодической функцией с полупериодами l_1 и l_2 соответственно вдоль осей x и y . Контакт осуществляется на верхней грани слоя $z = 0$, а нижняя грань $z = -h$ подчинена условиям скользящей или жесткой заделки (задачи А и Б соответственно). Давление (1.1) порождено двойкопериодической системой одинаковых жестких штампов, внедренная подошва которых не имеет острых кромок, поэтому зона контакта заранее неизвестна и содержится в прямоугольных ячейках размера $2l_1 \times 2l_2$. Пусть ячейка S содержит начало координат и единичную область контакта Ω (рис. 1). Форма оснований штампов описывается функцией

$$f(x, y) = f(x - 2nl_1, y - 2ml_2); \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

К каждому штампу приложена нормальная сила P так, что штампы вдавливаются без перекоса и испытывают осадку δ .

Граничные условия контактных задач имеют вид

$$z = h: \quad u_z = -(\delta - f(x, y)), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad (x, y) \notin \Omega$$

$$\text{А) } z = 0: u_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \text{Б) } z = 0: u_x = u_y = u_z = 0$$

При заданных параметрах упругости G , ν , величинах l_1 , l_2 , δ , h и функции $f(x, y)$ требуется определить область контакта Ω и давление $q(x, y) = -\sigma_z(0, 0, h)$, $(x, y) \in \Omega$. Затем при использовании интегрального условия равновесия штампов может быть найдена сила P .

Интегральные уравнения задач А и Б относительно контактного давления, используя известные функции Грина для слоя и периодичность, можно записать, интегрируя по единичной области контакта Ω , в виде ($\theta = G/(1 - \nu)$)

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta = 2\pi\theta[\delta - f(x, y)]; \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.2)$$

с ядром без квадратур в форме В.М. Александрова [8] ($s = \xi - x$, $t = \eta - y$)

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta, x, y) &= R^{-1} + F(s, t); \quad R = \sqrt{s^2 + t^2} \\ F(s, t) &= -\frac{1}{\sqrt{4h^2 + R^2}} + F_1 + F_2 + F_3 - \frac{\pi h}{2l_1 l_2} (G_0 + 2G_1 + 2G_2 + G_3) \\ F_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{n0} + Q_{-n,0}), \quad F_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{0m} + Q_{0,-m}) \\ F_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{nm} + Q_{-n,m} + Q_{n,-m} + Q_{-n,-m}) \\ Q_{nm} &= R_{nm}^{-1} - (4h^2 + R_{nm}^2)^{-1/2}, \quad R_{nm} = [(s + 2nl_1)^2 + (t + 2ml_2)^2]^{1/2} \\ \text{А) } G_0 &= 3/2, \quad \text{Б) } G_0 = 2 - 4(\kappa - 1)/(\kappa + 1)^2, \quad \kappa = 3 - 4\nu \\ G_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} M(r_{n0}) \cos \frac{\pi ns}{l_1}, \quad G_2 = \sum_{m=1}^{\infty} M(r_{0m}) \cos \frac{\pi mt}{l_2} \\ G_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M(r_{nm}) \cos \frac{\pi ns}{l_1} \cos \frac{\pi mt}{l_2} \\ M(r) &= \frac{1 - \exp(-2r) - L(r)}{r}, \quad r_{nm} = \pi h [(n/l_1)^2 + (m/l_2)^2]^{1/2} \\ \text{А) } L(r) &= \frac{\text{ch}(2r) - 1}{\text{sh}(2r) + 2r}, \quad \text{Б) } L(r) = \frac{2\kappa \text{sh}(2r) - 4r}{2\kappa \text{ch}(2r) + 1 + \kappa^2 + 4r^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сходимость рядов в выражениях для F_k . ($k = 1, 2, 3$) улучшается при уменьшении толщины слоя h . Функция $M(r)$ на бесконечности убывает, как $\exp(-2r)$, обеспечивая сходимость рядов в выражениях для G_k . ($k = 1, 2, 3$), а в нуле стремится к G_0 .

2. Точное решение. Интегральное уравнение (1.2) имеет точное решение, когда единичная область контакта Ω совпадает с ячейкой S (полный контакт), а к функции $f(x, y)$ применимо преобразование Фурье. Для определенности рассмотрим полный контакт грани упругого слоя с жесткой двоякопериодической синусоидальной поверхностью амплитуды A и длинами волн (периодами) $2l_1$ и $2l_2$. В рамках линейной теории упругости предполагается, что амплитуда мала по сравнению с длинами волн [6]. В этом случае уравнение (1.2) преобразуется к виду [8]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{u^2 + w^2})}{\sqrt{u^2 + w^2}} \cos\left(u \frac{\xi - x}{h}\right) \cos\left(w \frac{\eta - y}{h}\right) dudw = \\ = 4\pi^2 \theta h \left[\delta - \left(A - A \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} \right) \right]; \quad -\infty < x, y < \infty \quad (\delta \geq 2A) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условие $\delta \geq 2A$ не является достаточным для полного контакта ввиду несогласованности деформаций поверхности слоя с жесткой поверхностью. Как показывают

расчеты по методу Галанова, при $\delta = 2A$ могут оставаться малые зоны в S вне контакта. В этом случае полный контакт возникает лишь при $\delta \geq \delta_1 > 2A$, где δ_1 – некоторое критическое значение.

Пусть $l_1 \geq l_2$. Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{l_1}, \quad \xi' = \frac{\xi}{l_1}, \quad y' = \frac{y}{l_1}, \quad \eta' = \frac{\eta}{l_1}, \quad A' = \frac{A}{l_1}, \quad \lambda = \frac{h}{l_1}, \quad \delta' = \frac{\delta - A}{l_1} \\ q'(x', y') = \frac{q(x, y)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{l_2}{l_1}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l_1^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

Параметр λ характеризует относительную толщину упругого слоя, а параметр $\varepsilon \leq 1$ – отношение периодов.

В обозначениях (2.2) уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{u^2 + w^2})}{\sqrt{u^2 + w^2}} \cos\left(u \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \cos\left(w \frac{\eta - y}{\lambda}\right) dudw = \\ = 2\pi\lambda \left(\delta + A \cos(\pi x) \cos \frac{\pi y}{\varepsilon} \right); \quad -\infty < x, y < \infty \quad (\delta \geq A) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Точное решение интегрального уравнения (2.3) находится при помощи двойного преобразования Фурье. В результате получим

$$q(x, y) = \frac{\delta L_0}{2\pi\lambda} + \frac{A\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}}{2L(\pi\lambda\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}})} \cos(\pi x) \cos \frac{\pi y}{\varepsilon} \quad (2.4)$$

$$L_0 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{L(u)}; \quad \text{А) } L_0 = 2, \quad \text{Б) } L_0 = \frac{2(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu}$$

В задаче Б при приближении материала слоя к несжимаемому ($\nu \rightarrow 0.5$) контактные давления неограниченно возрастают (полный контакт становится затруднительным).

При $\lambda \rightarrow \infty$ решение (2.4) переходит в решение Джонсона и соавторов [5, 6] для упругого полупространства

$$q(x, y) = \frac{A\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}}{2} \cos(\pi x) \cos \frac{\pi y}{\varepsilon},$$

из которого нельзя определить связь между вдавливающей силой и осадкой.

Для слоя из решения (2.4) найдем вдавливающую силу

$$P = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(x, y) dx dy = \frac{2\delta L_0}{\pi\lambda} \quad (2.5)$$

Для задачи Б сила P чувствительна к значению коэффициента Пуассона. При $\nu = 0.25$ значение P (2.5) для задачи Б на 12.5% превышает соответствующее значение для задачи А.

3. Численный анализ. Для численного решения контактных задач применим метод, предложенный Галановым [16], позволяющий одновременно определить область контакта и давления в этой области. В этом методе интегрирование в уравнении (1.2), (1.3) распространяется на ячейку S , содержащую область Ω . Предположения об отсутствии контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области $S \setminus \Omega$ приводят к системе интегрального уравнения и интегрального неравенства (снова используем размерные величины)

$$\begin{aligned} \int_S q(N)K(N, M)dN &= d(M); \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega \\ \int_S q(N)K(N, M)dN &> d(M); \quad q(M) = 0, \quad M \in S \setminus \Omega \\ N &= \xi, \eta, \quad M = x, y, \quad d(M) = 2\pi\theta[\delta - f(M)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

После введения нелинейных операторов

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и представления искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$$

система (3.1) сводится к решению нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d, \quad (3.2)$$

где $p = p(M)$, $p^\pm = p^\pm(M)$, $d = d(M)$,

$$Kp^+ = \int_S p^+(N)K(N, M)dN \quad (3.3)$$

При этом интегральное неравенство (3.1) удовлетворяется автоматически. Можно доказать эквивалентность системы (3.1) и уравнения (3.2) [16].

При численном решении уравнения (3.2) применяется модифицированный метод Ньютона, основанный на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p_n - (F'p_n)^{-1} \Theta p_n, \quad p_n = p_n(M); \quad n = 0, 1, \dots, \quad p_0 = d,$$

где F — дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор Θ по равномерной метрике [16].

В отличие от задач для одного штампа ядра (1.3) в ячейке S имеют не только классическую особенность R^{-1} , но и дополнительные интегрируемые особенности $R_{\pm 1, 0}^{-1}$, $R_{0, \pm 1}^{-1}$, $R_{\pm 1, \mp 1}^{-1}$ соответственно в точках $(\xi = x \mp 2l_1, \eta = y)$, $(\xi = x, \eta = y \mp 2l_2)$, $(\xi = x \mp 2l_1, \eta = y \mp 2l_2)$ и $(\xi = x \mp 2l_1, \eta = y \pm 2l_2)$ на сторонах и в вершинах прямоугольника S . При расчете значений ядра оператора (3.3) в этих точках особенности сглаживались по формуле ($n, m = 0; \pm 1$)

$$(\xi - x + 2nl_1)^2 + (\eta - y + 2ml_2)^2 \rightarrow (\xi - x + 2nl_1)^2 + (\eta - y + 2ml_2)^2 + \frac{h_1 h_2}{16},$$

где h_1 и h_2 — шаги сетки соответственно по осям x и y .

Отладку программ проведем при помощи сравнения интегральной характеристики с точным значением (2.5) при $A = 0.001$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.25$. В силу симметрии достаточно интегрировать по четверти S . В табл. 1 даны значения P , рассчитанные при разных λ , δ и изменении числа узлов равномерной сетки в первой четверти S (сетка 9×9 соответствует 289 узлам в S ; сетка 13×13 — 625 узлам в S). Видно, что при сгущении сетки численное решение приближается к точному. Для сетки 13×13 погрешность расчета интегральной характеристики не превосходит 3%. В табл. 1 неполный (почти полный) контакт осуществляется для задачи А при $\lambda = 1$, $\delta \times 10^3 = 2$. При почти полном контакте численное решение также стремится к точному.

Таблица 1. Сравнение значений силы $P(\delta) \times 10^3$ для сеток 9×9 , 13×13 с (2.5) при $A = 0.001$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.25$

Задача		А		Б	
$\delta \times 10^3$		2	3	2	3
$\lambda = 0.25$	9×9	10.50	15.75	11.86	17.78
	13×13	10.40	15.60	11.73	17.59
	(2.5)	10.19	15.28	11.46	17.19
$\lambda = 1$	9×9	2.58	3.87	2.91	4.36
	13×13	2.57	3.86	2.90	4.35
	(2.5)	2.55	3.82	2.86	4.30

Таблица 2. Значения силы $P \times 10^3$ при $A_0 = B_0 = 0.001$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.25$

$\delta_0 \times 10^3$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\lambda = 1$					
Задача А	0.172	0.575	1.124	1.734	2.365
Задача Б	0.183	0.634	1.257	1.948	2.663
$\lambda = 2$					
Задача А	0.119	0.337	0.605	0.897	1.205
Задача Б	0.127	0.369	0.671	1.004	1.352
$\lambda = 3$					
Задача А	0.0935	0.247	0.426	0.619	0.820
Задача Б	0.101	0.271	0.473	0.691	0.920

Рассмотрим внедрение двоякопериодической системы эллиптических параболоидов, когда

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad R_1 \geq R_2, \quad (x, y) \in S$$

Далее используем безразмерные обозначения (2.2), заменяя формулы для A и δ на

$$A_0 = \frac{l_1}{2R_1}, \quad B_0 = \frac{l_1}{2R_2}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{l_1}$$

Значения силы P в зависимости от осадки δ_0 при разных λ приведены в табл. 2 для случая $A_0 = B_0 = 0.001$ (круговые параболоиды), $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.25$. В задаче А (скользящая заделка) значения силы меньше, чем в задаче Б (жесткая заделка). В обеих задачах, как видно из табл. 2, вдавливающая сила снижается при увеличении λ . В задаче Б, как правило, площадь области контакта немного больше, чем в задаче А.

Для изучения зависимости интегральной характеристики от ν введем безразмерную силу

$$P_0 = \frac{P}{2\pi G l_1^2} \quad (3.4)$$

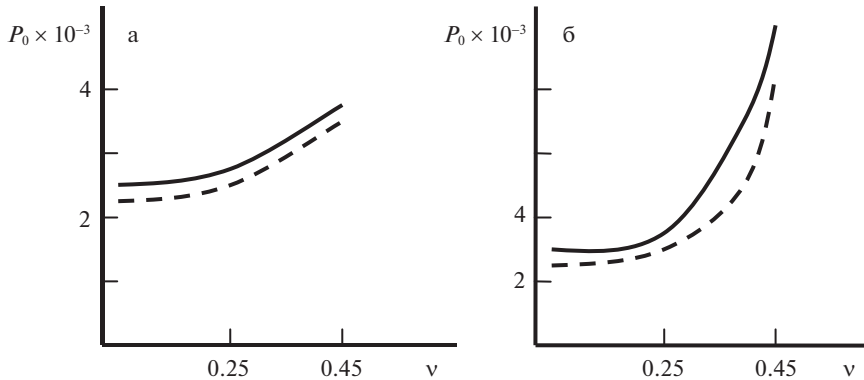


Рис. 2. Зависимость безразмерной вдавливающей силы P_0 от коэффициента Пуассона ν для задач А и A_1 (а) и Б и B_1 (б); $\delta_0 = A_0 = B_0 = 0.001$, $\epsilon = 1$, $\lambda = 0.25$, пунктир для задач A_1 и B_1 .

На рис. 2 представлены зависимости силы P_0 от ν для задач А и Б при $\delta_0 = A_0 = B_0 = 0.001$, $\epsilon = 1$, $\lambda = 0.25$ и для соответствующих случаев вдавливания одного штампа (задачи A_1 и B_1). Для задач А и A_1 зависимость $P_0(\nu)$ имеет гиперболический тип. Значения силы (3.4) для двоякопериодической системы больше, чем для случая одного штампа. Труднее становится вдавить двоякопериодическую систему для задачи Б, когда материал приближается к несжимаемому.

При сближении штампов (уменьшении ϵ) растет их взаимодействие, которое проявляется в уменьшении интегральной характеристики контактных давлений.

Для вытянутых вдоль оси x эллиптических параболоидов ($A_0 = 0.0005$, $B_0 = 0.001$, $\epsilon = 1$, $\nu = 0.25$) значения P больше, чем соответствующие значения для круговых параболоидов из табл. 2.

Отметим, что в случае периодической контактной задачи для упругого полупространства на основе метода локализации были сделаны выводы о том, что учет взаимного влияния пятен контакта уменьшает контактный радиус и увеличивает давление в центральной части области контакта по сравнению со случаем единичного штампа [17]. Для слоя можно сделать аналогичные выводы. Хотя интегральная характеристика (номинальная сила) для единичного штампа, как правило, больше, чем для двоякопериодической системы, давление в центре области контакта больше для двоякопериодической системы. При этом номинальная площадь области контакта меньше для двоякопериодической системы. Например, для задач A_1 и B_1 при $\delta_0 = 0.0025$, $A_0 = B_0 = 0.001$, $\epsilon = \lambda = 1$, $\nu = 0.25$ область контакта заполняет S , а для аналогичных значений параметров в задачах А и Б имеются узлы вне контакта; контактное давление в точке первоначального касания $q_0 \times 10^3 = 0.833$ для задачи A_1 и $q_0 \times 10^3 = 0.885$ для задачи А, аналогично $q_0 \times 10^3 = 0.928$ для задачи B_1 и $q_0 \times 10^3 = 0.970$ для задачи Б.

В табл. 3 даны минимальные значения осадки и соответствующие значения силы, при которых начинается перколяция (сразу в двух направлениях), а также при наступлении полного контакта для двоякопериодической системы равноотстоящих друг от друга круговых параболоидов. В начале перколяции для обеих задач зависимость от $\min \delta_0 \times 10^3$ от λ близка к линейной. Отметим, что значения номинальной силы в табл. 3 с ростом λ выходят на постоянный одинаковый для обеих задач уровень.

Таблица 3. Минимальные значения осадки и силы для начала перколяции и полного контакта при $A_0 = B_0 = 0.001$, $\varepsilon = 1$, $\nu = 0.25$

Задача	λ	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Начало перколяции						
А	$\delta_0 \times 10^3$	1.41	2.14	2.87	3.61	4.33
А	$P \times 10^3$	1.97	1.91	1.90	1.91	1.90
Б	$\delta_0 \times 10^3$	1.33	1.97	2.62	3.27	3.91
Б	$P \times 10^3$	2.00	1.91	1.90	1.90	1.90
Полный контакт						
А	$\delta_0 \times 10^3$	2.82	4.49	6.34	8.22	10.09
А	$P \times 10^3$	5.67	4.93	4.88	4.88	4.88
Б	$\delta_0 \times 10^3$	2.67	4.09	5.71	7.37	9.03
Б	$P \times 10^3$	5.84	4.97	4.88	4.88	4.89

Закключение. Согласование численного решения с точным подтверждает корректность ядра в форме (1.3). Метод Галанова эффективен и в предельном случае полного контакта, когда интегральное неравенство (3.1) исчезает. По сравнению с прямым численным методом [7] приемлемая точность достигается при небольшом числе узлов сетки. Жесткая заделка одной грани упругого слоя из несжимаемого материала препятствует полному двоякопериодическому контакту по другой грани. При двоякопериодическом контакте для слоя выявлены эффекты аналогичные обнаруженным ранее методом локализации для полупространства.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00013) и посвящается столетию прикладного математика академика Е.В. Золотова (1922–1990 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Westergaard H.M.* Bearing pressure and cracks // ASME. J. Appl. Mech. E. 1939. V. 6. № 1. P. 43–53.
2. *Пожарский Д.А.* Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 2. С. 22–33.
3. *Горячева И.Г.* Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1036–1044.
4. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Berlin: Springer, 1998. 360 p.
5. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. № 6. P. 383–396.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. *Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F.* The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. P. 171–183.
8. *Александров В.М.* Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 307–315.
9. *Солдатенков И.А.* Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.
10. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. V. 268. № 11–12. P. 1417–1422.
11. *Jin F., Wan Q., Guo X.* A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 102–103. P. 66–76.

12. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y. Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*. 2017. V. 5. № 3. P. 339–350.
13. Солдатенков И.А. Пространственная контактная задача для упругого слоя и волнистого штампа при наличии трения и износа // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 145–155.
14. Goryacheva I., Yakovenko A. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Int.* 2021. V. 161. P. 107078.
15. Золотов Н.Б., Пожарский Д.А. Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей // *ПММ*. 2022. Т. 86. № 3. С. 394–403.
16. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
17. Яковенко А.А. Моделирование дискретного контакта упругих и вязкоупругих тел. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. н. М.: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2022. 127 с.

Doubly Periodic Contact Problems for a Layer with an Unknown Contact Zone

N. B. Zolotov^a and D. A. Pozharskii^{a,*}

^aDon State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

^{*}e-mail: pozharda@rambler.ru

Doubly periodic contact problems are considered for a layer with an unknown contact domain. One face of the layer is subjected to sliding support or rigidly fixed. The problems are reduced to integral equations the kernels of which do not contain integrals. For full contact of the other layer face with a two-dimensional sinusoidal rigid surface, the problems have exact solutions used to verify computer programs realizing the numerical method of Galanov nonlinear integral equations which allows us to determine the contact domain and the contact pressure simultaneously. Mechanical characteristics are calculated for indentation of the system of elliptic paraboloids, the passage from discrete to continuous contact zones is investigated.

Keywords: doubly periodic contact, elastic layer, integral equations

REFERENCES

1. Westergaard H.M. Bearing pressure and cracks // *ASME J. Appl. Mech. E.*, 1939, vol. 6, no. 1, pp. 43–53.
2. Pozharskii D.A. Periodic contact and mixed problems of the elasticity theory (review) // *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye Nauki*, 2021, no. 2, pp. 22–33. (in Russian)
3. Goryacheva I.G. The periodic contact problem for an elastic half-space // *JAMM*, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 959–966.
4. Goryacheva I.G. *Contact Mechanics in Tribology*. Berlin: Springer, 1998. 360 p.
5. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic regular wavy surfaces // *Int. J. Mech. Sci.*, 1985, vol. 27, no. 6, pp. 383–396.
6. Johnson K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge: Univ. Press, 1985. 468 p.
7. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // *Tribol. Lett.*, 2014, vol. 56, pp. 171–183.
8. Aleksandrov V.M. Doubly periodic contact problems for and elastic layer // *JAMM*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 297–305.
9. Soldatenkov I.A. The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 245–255.
10. Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // *Wear*, 2010, vol. 268, no. 11–12, pp. 1417–1422.
11. Jin F., Wan Q., Guo X. A double-Westergaard model for adhesive contact of a wavy surface // *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 102–103, pp. 66–76.

12. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 339–350.
13. *Soldatenkov I.A.* The spatial contact problem for an elastic layer and wavy punch when there is friction and wear // *JAMM*, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 99–106.
14. *Goryacheva I., Yakovenko A.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribol. Int.*, 2021, vol. 161, pp. 107078.
15. *Zolotov N.B., Pozharskii D.A.* Periodic contact problems for a half-space with a partially fixed boundary // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1758–1765.
16. *Galanov B.A.* The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known // *JAMM*, 1985, vol. 49, no. 5, pp. 634–640.
17. *Yakovenko A.A.* Modeling of Discrete Contact of Elastic and Viscoelastic Bodies. Ph.D. Thesis. Moscow: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 2022. 127 p.

УДК 517.538

ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОМЕРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ© 2023 г. Л. А. Алексеева^{1,*}, М. М. Ахметжанова^{1,**}¹*Институт математики и математического моделирования, Алма-Ата, Казахстан***e-mail: alexeeva@math.kz****e-mail: mariella80@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.10.2019 г.

После доработки 25.02.2020 г.

Принята к публикации 29.11.2022 г.

Рассматриваются задачи определения термонапряженного состояния термоупругого стержня с использованием модели связанной термоупругости. В этом случае в уравнение теплопроводности входит дивергенция скорости движения материальных точек среды, а в уравнения упругости – градиент температуры. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения нестационарных и стационарных прямых и полубратных краевых задач при действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе описываемых сингулярными обобщенными функциями, при различных краевых условиях на концах стержня. Рассмотрены термоударные волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок и тепловых потоков, получены условия на их фронтах. Доказана единственность поставленных краевых задач, в том числе с учетом ударных волн. Даны регулярные интегральные представления обобщенных решений, которые дают аналитическое решение поставленных краевых задач.

Ключевые слова: связанная термоупругость, термоупругий стержень, краевые задачи, фундаментальное и обобщенное решение, преобразование Лапласа, стационарные колебания

DOI: 10.31857/S0032823523010022, EDN: HUDDFA

1. Введение. Стержневые конструкции широко используются в машиностроении в качестве соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры, и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термонапряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем.

При изучении термодинамических процессов в конструкциях обычно используются уравнения *несвязанной* термоупругости (теория температурных напряжений). В этой модели вначале решается задача определения температурного поля без учета деформации среды, что сводится к построению решения краевых задач для параболического уравнения теплопроводности. После определения температурного поля, решается краевая задача динамики термоупругой среды, в которой в гиперболические уравнения движения упругой среды вводится градиент уже известного температурно-

го поля как массовая сила. Эта модель хорошо описывает термодинамические процессы при малых скоростях деформаций и совершенно непригодна для описания высокоскоростных динамических процессов, в частности, высокочастотных периодических колебаний, при которых деформации существенно влияют на тепловое состояние стержня.

Для определения термонапряженного состояния термоупругой среды при высокоскоростных силовых и тепловых воздействиях используется модель связанной термоупругости. В этом случае в уравнение теплопроводности входит дивергенция скорости движения материальных точек среды (скорость дилатации), а в уравнения упругости — градиент температуры. Это связывает уравнения в систему, которую надо решать совместно, не разделяя температурное поле и упругие деформации. Обе теории термоупругости наиболее полно изложены в книгах Новацкого В. В его работах [1–3], построены частные решения уравнений несвязанной и связанной термоупругости и решен ряд краевых задач в областях с канонической формой границ на основе метода разделения переменных и интегральных преобразований.

Отметим, что динамика термоупругих сред имеет довольно обширную библиографию, связанную с решением краевых задач на основе моделей связанной и несвязанной термоупругости и их модификаций. Библиографию по этому направлению можно найти в работах [4, 5].

В работах Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.Г. [6] и других авторов [7–9] разработан метод граничных интегральных уравнений для решения плоских и трехмерных краевых задач термоупругости в областях с произвольной геометрией границ. Метод основан на теории потенциала, хорошо развитой для эллиптических уравнений, и который можно использовать в пространстве преобразований Лапласа (или Фурье) по времени, где уравнения для трансформан-решений являются эллиптическими. Для восстановления оригиналов необходимо привлечение численных методов обращения трансформант. Для численной реализации решений таких задач разработан [10, 11] метод граничного элемента.

Здесь рассмотрены пространственно-одномерные задачи связанной термоупругости, моделирующие динамику стержневых конструкций, подверженных осевым растяжениям и сжатиям. Рассмотрены нестационарные и стационарные краевые задачи, которые описываются системой дифференциальных уравнений смешанного парабола-гиперболического типа, при различных краевых условиях на концах стержня и действии силовых и тепловых источников различного типа, в том числе описываемых сингулярными обобщенными функциями. Рассмотрены термоударные волны, которые возникают в таких конструкциях при действии ударных нагрузок и тепловых потоков, получены условия на их фронтах ударных волн.

Поставлены четыре прямые краевые задачи с классическим типом краевых условий (по два из следующих: перемещений, напряжений, температуры, тепловых потоков) на концах. Доказана единственность решений поставленных краевых задач, в том числе с учетом ударных волн, что не исследовалось другими авторами.

Для решения краевых задач используется метод обобщенных функций (МОФ), основные идеи которого изложены в [8] для решения плоских задач термоупругости и для решения краевых задач для классического волнового уравнения в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$ [12]. Для пространств размерности единица этот метод является обобщением метода Владимирова В.С. решения задачи Коши для гиперболических и параболических уравнений [13]. С использованием ранее построенной авторами матрицы Грина этих уравнений и МОФ, здесь построено вначале обобщенное, а затем аналитическое решение краевых задач.

В основе МОФ — сведение исходной краевой задачи к дифференциальным уравнениям в пространстве обобщенных функций, которые в качестве правых частей содержат сингулярные обобщенные функции — простые и двойные слои на границе обла-

сти определения решения, плотности которых выражаются через граничные условия, часть которых задана, а часть подлежит определению. Использование свойств фундаментальных решений позволяет построить их обобщенные решения, интегральные представления которых дают классическое решение поставленной краевой задачи. А использование асимптотических свойств фундаментальных решений в нуле и на фронтах, позволяют строить разрешающие граничные уравнения для определения неизвестных граничных функций.

Здесь разработана единая методика решения не только прямых, но и ряда обратных и полуобратных краевых задач, которая дает возможность решать 35 краевых задач при заданных четырех из восьми граничных функций (перемещения, напряжения, температура, тепловой поток) на концах стержня.

2. Постановка нестационарных краевых задач термоупругости. Рассматривается термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ , жесткостью EJ и термоупругими константами γ, η и κ [1, 2]. Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гипербола-параболических уравнений вида [1]:

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1 &= 0 \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $u(x, t)$ — компоненты продольных смещений, $\theta(x, t)$ — относительная температура ($\theta = T(x, t) - T_0$), $T(x, t)$ — абсолютная температура, T_0 — абсолютная температура, при которой в стержне нет напряжений и деформаций; $F_1(x, t)$ — продольная компонента объемной силы; $c = \sqrt{EJ/\rho}$ — скорость распространения термоупругих волн в стержне, ρ — погонная плотность. Действие тепловых источников описывает $F_2(x, t) = (\lambda_0 \kappa)^{-1} W(x, t)$, где W — количество выделенного (или поглощенного) тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0 — коэффициент теплопроводности.

Предполагается, что функции $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$ принадлежат классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$ [5], что позволяет моделировать термодинамические процессы в стержнях при действии сосредоточенных как силовых, так и тепловых источников различного типа. Здесь и далее используем обозначения частных производных от функций и компонент: $f_{,j}$, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial j = \partial_j u_i$; $j = x, t$.

Термоупругое напряжение в стержне определяется соотношением Дюамеля—Неймана:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \quad (2.2)$$

Рассмотрим ряд прямых краевых задач термоупругости, решения которых удовлетворяют следующим начальным и краевым условиям [2].

Начальные условия (условия Коши): при $t = 0$ смещения, скорости и температура известны:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x); \quad |x| \leq L \\ \partial_t u(x, 0) = \dot{u}_0(x); \quad |x| < L \end{aligned} \quad (2.3)$$

На концах стержня ($x = x_1 = -L, x = x_2 = L$) заданы *краевые условия*, которые различны в зависимости от рассматриваемых краевых задач. Здесь приведем классические условия для четырех краевых задач:

1 краевая задача. Известны перемещения концов стержня и температура на них:

$$u(x_j, t) = w_j(t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j(t); \quad j = 1, 2 \quad (2.4)$$

2 *краевая задача*. Известны напряжения на концах стержня и тепловые потоки на них:

$$\sigma(x_j, t) = p_j(t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j(t); \quad j = 1, 2 \quad (2.5)$$

3 *краевая задача*. Известны перемещения концов стержня и тепловые потоки на них:

$$u(x_j, t) = w_j(t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j(t); \quad j = 1, 2 \quad (2.6)$$

4 *краевая задача*. Известны напряжения и температура на концах стержня:

$$\sigma(x_j, t) = p_j(t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j(t); \quad j = 1, 2 \quad (2.7)$$

Предполагается, что граничные функции удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$u_j(t) \in C(0, \infty), \quad \theta_j(t) \in C(0, \infty), \quad q_j(t) \in L_1(0, \infty), \quad p_j(t) \in L_1(0, \infty) \quad (2.8)$$

Очевидно, можно рассматривать комбинированные задачи с одним типом краевых условий на одном конце стержня и другим на втором конце и другие несимметричные условия по количеству заданных функций на концах стержня. Здесь мы предложим решение и такого типа полуобратных и обратных задач.

3. Ударные термоупругие волны как обобщенные решения уравнений движения. Система уравнений (2.1) смешанного гиперболо-параболического типа. В силу гиперболичности, возможно возникновение ударных термоупругих волн при ударных воздействиях на концах стержня. Для вывода условий на фронтах ударных волн рассмотрим эти уравнения в классе обобщенных вектор-функций, компоненты которых являются обобщенными функциями из $S'(R^2)$ [13].

Согласно правилам дифференцирования разрывных регулярных обобщенных функций для термоупругих ударных волн, уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} & \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + F_1 + \left(\left[\rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \right]_F v_x - \rho [u_{,t}]_F v_t \right) \delta_F(x, t) + \\ & + \rho c^2 \partial_x [u]_F \delta_F - \rho \partial_t [u]_F \delta_F = 0 \\ & \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 + \partial_x [\theta]_F v_x \delta_F + \\ & + [\theta_{,x}]_F v_x \delta_F - \left[\kappa^{-1} \theta + \eta u_{,x} \right]_F v_t \delta_F - \eta \partial_t [u]_F v_x \delta_F = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок указанных в них функций на фронте ударной волны (для простоты записи здесь уравнения записаны для одной ударной волны).

Сингулярная обобщенная функция $\delta_F(x, t)$ — простой слой на характеристической поверхности F в $D^- = \{(x, \tau) \in R^2 : |x| < L, \tau < t\}$, на которой производные имеют скачки. В пространстве R^1 ей соответствует фронт ударной волны F_t , который движется в стержне со скоростью c . Таких фронтов может быть несколько, что связано с действующими нагрузками и переотражением ударных волн. Тогда в этих уравнениях появятся дополнительные сингулярные слагаемые такого же типа, связанные с каждой ударной волной.

Из (2.1) следует, что на F обращается в ноль следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \rho(c^2 v_x^2 - v_t^2) & 0 \\ v_x^2 & -\eta v_t v_x \end{vmatrix} = -\eta \rho v_t v_x (c^2 v_x^2 - v_t^2) = 0, \quad (3.2)$$

где $v = (v_x, v_t)$ — нормаль к F в D^- . Из (3.2) следует, что прямые $x = \text{const}$ и $t = \text{const}$ являются характеристическими поверхностями для уравнений (2.1), а для ударных волн:

$$v_t = -c|v_x| \quad (3.3)$$

Здесь, в пространственно-одномерном случае, фронт волны имеет простой вид:

$$D_t = \{(x, t) : x \pm ct = x^0\}$$

Это точка разрыва производных на интервале $x \in (-L, L)$, которая движется со скоростью c от точки x^0 , где она формируется, в ту или другую сторону.

Поскольку, в силу сплошности среды, перемещения не могут быть разрывными:

$$[u]_{F_t} = 0$$

В области дифференцируемости ударные волны являются решениями (2.1), поэтому из (3.1), с учетом (2.2), следует, чтобы ударная волна была решением уравнений (2.1) в $S'(K^2)$, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} ([\rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta] v_x - \rho [u_{,t}] v_t) \delta_F &= 0 \\ \partial_x [\theta] v_x \delta_F + ([\theta_{,x}] v_x - [\kappa^{-1} \theta + \eta u_{,x}]) v_t \delta_F &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда, с учетом (3.3), следует, что на фронтах ударных волн должны выполняться следующие условия на скачки:

$$[u]_{F_t} = 0, \quad [\sigma]_{F_t} = -\rho c [\dot{u}]_{F_t} \quad (3.5)$$

$$[\theta]_{F_t} = 0, \quad [\theta_{,x}]_{F_t} = \eta [\dot{u}]_{F_t} \quad (3.6)$$

Первое условие непрерывности перемещений — необходимое условие для сохранения сплошности среды. Второе условие описывает скачок напряжений (удар), который приводит к скачку скоростей на фронте волны. Из третьего и четвертого условия следует, что температура непрерывна на фронте волны, а тепловой поток имеет скачок, пропорциональный скачку скорости смещений среды на фронте волн.

Из этих же соотношений следует, что скачок теплового потока в стержне также формирует термоударную волну, т.к. он вызывает скачок скоростей на фронте, который приводит к скачку напряжений на нем. Такие термоударные волны всегда формируются на концах стержня, если до фиксированного момента времени он находился в статическом состоянии, а затем к нему на концах приложить ненулевые напряжения или тепловые потоки.

4. Единственность решения начально-краевой задачи с учетом ударных волн. Покажем единственность решения начально-краевой задачи при наличии ударных волн. Предполагается, что в каждый фиксированный момент времени область определения по x можно разделить на конечное число интервалов между фронтами ударных волн F_t^k , на которых решение непрерывно и дифференцируемо согласно (2.1).

Обозначим плотность энергии стержня

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \{ \rho (u_{,t})^2 + c^2 (u_{,x})^2 + \gamma (\eta \kappa)^{-1} \theta^2 \},$$

и мощность внутренних сил:

$$M(x, t) = u_{,t} (c^2 u_{,x} - \gamma \theta) + \eta \gamma^{-1} \theta \theta_{,x}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1 (закон сохранения энергии)

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (E(x, t) - E(x, 0)) dx &= \int_0^t dt \int_{-L}^L (u_{,t} F_1 + \eta \gamma^{-1} \theta F_2) dx + \\ &+ \int_0^t (M(L, t) - M(-L, t)) dt - \eta \gamma^{-1} \int_0^t dt \int_{-L}^L (\theta_{,x})^2 dx \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное время $t > 0$. Умножая первое уравнение (2.1) в области дифференцируемости на $u_{,t}$, а второе уравнение на $\alpha \theta$, после ряда эквивалентных преобразований, получим равенства:

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,t} u_{,xx} - u_{,t} u_{,tt} - \gamma u_{,t} \theta_{,x} + \rho F_1 u_{,t} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_x (u_{,t} (\rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta)) - 0.5 \partial_t \{ (u_{,t})^2 + \rho c^2 (u_{,x})^2 \} + \gamma u_{,tx} \theta + u_{,t} \rho F_1 &= 0 \\ \theta \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta \theta_{,t} - \eta \theta u_{,xt} + \theta F_2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \kappa^{-1} \partial_t \theta^2 + \partial_x (\theta \theta_{,x}) - \eta \theta u_{,xt} - (\theta_{,x})^2 + \theta F_2 &= 0 \end{aligned}$$

Складывая их, имеем

$$\begin{aligned} \partial_x (u_{,t} (\rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta) + \alpha \theta \theta_{,x}) - 0.5 \partial_t \{ \rho (u_{,t})^2 + c^2 (u_{,x})^2 + \alpha \kappa^{-1} \theta^2 \} - \alpha (\theta_{,x})^2 + \\ + \theta u_{,xt} (\gamma - \alpha \eta) + u_{,t} \rho F_1 + \alpha \theta F_2 = 0 \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\partial_t E(x, t) - \partial_x M(x, t) + \eta \gamma^{-1} (\theta_{,x})^2 = u_{,t} F_1 + \eta \gamma^{-1} \theta F_2 \quad (4.1)$$

Проинтегрируем (4.1) по D^- с учетом деления области интегрирования фронтами ударных волн $F_k(x, t)$, на подобласти, где решение дифференцируемо. В результате, используя теорему Остроградского—Гаусса, получим следующее интегральное равенство:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (E(x, t) - E(x, 0)) dx + \alpha \int_0^t dt \int_{-L}^L (\theta_{,x})^2 dx = \\ = \int_0^t (M(L, t) - M(-L, t)) dt + \int_0^t dt \int_{-L}^L (u_{,t} \rho F_1 + \alpha \theta F_2) dx + \\ + \left\{ \int_{F_k} \sum_k [v_x M(x, t) - v_t E(x, t)]_{F_k} dS(F_k) \right\} \quad (4.2) \end{aligned}$$

Здесь v — нормаль к характеристической поверхности в R^2 : $\|v\| = 1$. Из (3.3) следует: $v = (v_x, v_t) = (1, -c) \sqrt{1 + c^2}$.

Покажем, что в силу условий на фронтах ударных волн (3.5)–(3.6), скачки в правой части этого равенства равны нулю. Для этого сделаем ряд преобразований:

$$\begin{aligned} [M(x, t)]_{F_k} &= [u_{,t} \sigma]_{F_k} + \alpha [\theta \theta_{,x}]_{F_k} = u_{,t}^- [\sigma]_{F_k} + \sigma^+ [u_{,t}]_{F_k} + \alpha \theta [\theta_{,x}]_{F_k} = \\ &= (\sigma^+ - \rho c u_{,t}^- + \gamma \theta) [u_{,t}]_{F_k} = \rho c (c u_{,x}^+ - u_{,t}^-) [u_{,t}]_{F_k} \end{aligned}$$

(здесь знаки в верхнем индексе означают значения соответствующих функций с правой или левой стороны фронта волны). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+c^2} [v_x M(x, t) - v_t E(x, t)]_{F_k} &= [M(x, t) + cE(x, t)]_{F_k} = \\ &= \rho c (cu_{,x}^+ - u_{,t}^-) [u_{,t}]_{F_k} - \rho c [u_{,t}]_{F_k} (cu_{,x}^- - u_{,t}^+) = \rho c [cu_{,x} + u_{,t}]_{F_k} = 0 \end{aligned}$$

т.к. $[cu_{,x} + u_{,t}] = 0$ в силу второго равенства (3.6). Следовательно, из (4.2) получим формулу теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Решение поставленных начально-краевых задач единственно.

Доказательство. Пусть существуют два решения рассматриваемой краевой задачи из поставленных. Тогда их разность, в силу линейности, тоже будет решением (2.1) при $F_j = 0$, $j = 1, 2$, и будет удовлетворять нулевым начальным и граничным условиям. Запишем для такого решения закон сохранения энергии. Согласно теореме 1:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L E(x, t) dx + \eta \gamma^{-1} \sqrt{1+c^2} \int_0^t dt \int_{-L}^L (\theta_{,x})^2 dx &= \int_0^t (M(L, t) - M(-L, t)) dt \\ \int_0^t M(\pm L, t) dt &= \int_0^t (u_{,t}(\pm L, t) \sigma(\pm L, t) + \eta \gamma^{-1} \theta(\pm L, t) \theta_{,x}(\pm L, t)) dt = 0 \end{aligned}$$

т.к. один из сомножителей в каждом подынтегральном слагаемом, в силу нулевых граничных условий (2.4), равен нулю. Поэтому

$$\int_{-L}^L E(x, t) dx + \eta \gamma^{-1} \int_0^t dt \int_{-L}^L (\theta_{,x})^2 dx = 0$$

В силу нулевых начальных условий и положительной определенности подынтегральных функций, получим $u \equiv 0$, $\theta \equiv 0$. Т.е. решения совпадают. Теорема доказана.

5. Решение начально-краевой задачи. Метод обобщенных функций. Для определения решения задачи поставим краевую задачу в пространстве двумерных обобщенных вектор-функций, компоненты которых являются обобщенными функциями медленного роста:

$$S'_2(R^2) = \left\{ \hat{f} = (\hat{f}_1(x, t), \hat{f}_2(x, t)); \quad (x, t) \in R^2, \quad \hat{f}_j \in S'(R^2) \right\}$$

Для этого введем обобщенную вектор-функцию (помечаем их крышкой):

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \{\hat{u}, \hat{\theta}\} = \{u(x, t)H(x)H(t), \theta(x, t)H(x)H(t)\},$$

где u, θ — решение рассматриваемой краевой задачи, $H(x)$ — функция Хевисайда,

Обозначим $\hat{U}_i^j(x, t)$ ($j = 1, 2$) — матрицу фундаментальных решений. Это решение (2.1) при действии импульсных сосредоточенных источников вида:

$$(F_1, F_2) = \{\delta_1^j \delta(x) \delta(t), \delta_2^j \delta(x) \delta(t)\}; \quad j = 1, 2$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, δ_i^j — символ Кронекера.

В $S'_2(R^2)$ решение с учетом правил дифференцирования разрывных функций [13] удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} c_1^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{tt} - \gamma \hat{\theta}_{,x} + \hat{F}_1 &= -\{\dot{u}_0(x) \delta(t) + u_0(x) \delta'(t)\} H(L - |x|) + \\ &+ c_1^2 H(t) \{(p_1(t) - \gamma \theta_1(t)) \delta(x+L) - (p_2(t) - \gamma \theta_2(t)) \delta(x-L)\} + \\ &+ c_1^2 H(t) \{u_1(t) \delta'(x+L) - u_2(t) \delta'(x-L)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1} \hat{\theta}_{,t} - \eta \hat{u}_{,xt} + \hat{F}_2 = \\
& = H(t) \delta(L+x) (q_1(t) - \eta \dot{u}_1(t)) - H(t) \delta(L-x) (q_2(t) - \eta \dot{u}_2(t)) + \\
& + (\hat{\theta}_1(t) H(t) \delta'(L+x)) - (\hat{\theta}_2(t) H(t) \delta'(L-x)) - \kappa^{-1} \hat{\theta}_0(x) \delta(t) H(L-|x|) - \\
& - \eta \delta(t) H(L-|x|) \partial_x \dot{u}_0(x) - \eta u_1(0) \delta(t) \delta(L+x) + \eta u_2(0) \delta(t) \delta(L-x)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Решение этого уравнения в $S_2'(R^2)$ называется *обобщенным решением*.

Используя свойство матрицы фундаментальных решений $\hat{U}_f^k(x, t)$ системы (2.1), обобщенное решение (5.1) можно представить в виде следующей тензорно-функциональной свертки:

$$\begin{aligned}
& u(x, t) H(t) H(L-|x|) = \hat{F}_1^* \hat{U}_1^1 + \hat{F}_2^* \hat{U}_1^2 + \\
& + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (p_k(t) - \gamma \theta_k(t))_t^* U_1^1(x+L, t) + u_k(t)_t^* U_{1,x}^1(x+L, t) \right\} + \\
& + H(t) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (q_k(t) - \eta \dot{u}_k(t))_t^* \hat{U}_1^2(x - (-1)^k L) + \\
& + \theta_k(t) H(t)_t^* U_{1,x}^2(x+L) - \left\{ \dot{u}_0(x)_x^* \hat{U}_1^1 + u_0(x)_x^* \hat{U}_{1,t}^1 \right\} H(L-|x|) - \\
& - \eta u_1(0) U_1^2(L+x, t) + \eta u_2(0) U_1^2(x-L, t) - \\
& - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L-|x|)_x^* U_1^2 - \eta H(L-|x|) \partial_x \dot{u}_0(x)_x^* U_1^2
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
& \theta(x, t) H(t) H(L-|x|) = \hat{F}_1^* \hat{U}_2^1 + \hat{F}_2^* \hat{U}_2^2 + \\
& + c^2 H(L-|x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} H(t) (p_k(t) - \tilde{\gamma} \theta_k(t))_t^* U_2^1(x - (-1)^k L, t) + \\
& + c^2 H(L-|x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} H(t) u_k(t)_t^* U_{2,x}^1(x - (-1)^k L, t) + \\
& + H(L-|x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} H(t) (q_k(t) - \eta \dot{u}_k(t))_t^* U_2^2(x - (-1)^k L, t) + \\
& + H(L-|x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} H(t) \theta_k(t) H(t)_t^* U_{2,x}^2(x - (-1)^k L, t) - \\
& - \left\{ \dot{u}_0(x) H(L-|x|)_x^* U_2^1(x, t) + u_0(x) H(L-|x|)_x^* \hat{U}_{2,t}^1(x, t) \right\} - \\
& - \eta u_1(0) U_2^2(L+x, t) + \eta u_2(0) U_2^2(x-L, t) - \\
& - \kappa^{-1} \theta_0(x) H(L-|x|)_x^* U_2^2(x, t) - \eta H(L-|x|) \dot{u}_0(x)_x^* U_{2,x}^2(x, t)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Интегральная запись этих свертки имеет вид:

$$\begin{aligned}
& u(x, t) H(|x| - L) H(t) = \hat{F}_1^* \hat{U}_1^1 + \hat{F}_2^* \hat{U}_1^2 + \\
& + c^2 H(t) H(L-|x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \int_0^t \left\{ (p_k(\tau) - \tilde{\gamma} \theta_k(\tau)) U_1^1(x - (-1)^k L, t - \tau) + \right. \\
& \left. + u_k(\tau) U_{1,x}^1(x - (-1)^k L, t - \tau) \right\} d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H(t) H(L - |x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \int_0^t \left\{ (q_k(\tau) - \eta \dot{u}_k(\tau)) U_1^2(x - (-1)^k L, t - \tau) + \right. \\
& \quad \left. + \theta_k(\tau) U_{1,x}^2(x - (-1)^k L, t - \tau) \right\} d\tau - \\
& - \int_{-L}^L \left\{ \dot{u}_0(y) U_1^1(x - y, t) + u_0(y) U_{1,t}^1(x - y, t) \right\} dy - \\
& - \eta u_1(0) U_1^2(L + x, t) + \eta u_2(0) U_1^2(x - L, t) - \\
& - \int_{-L}^L \left\{ \kappa^{-1} U_1^2(x - y, t) \theta_0(y) - \eta U_{1,y}^2(x - y, t) \partial_y \dot{u}_0(y) \right\} dy \\
& \quad \theta(x, t) H(t) H(L - |x|) = \hat{F}_1^* \hat{U}_2^1 + \hat{F}_2^* \hat{U}_2^2 + \\
& + c^2 H(L - |x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \int_0^t \left\{ (p_k(\tau) - \tilde{\gamma} \theta_k(\tau)) U_2^1(x - (-1)^k L, t - \tau) + \right. \\
& \quad \left. + u_k(t) U_{2,x}^1(x - (-1)^k L, t - \tau) \right\} d\tau + \\
& + H(t) H(L - |x|) \int_0^t \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (q_k(\tau) - \eta \dot{u}_k(\tau)) U_2^2(x - (-1)^k L, t - \tau) + \\
& \quad + \theta_k(\tau) U_{2,x}^2(x - (-1)^k L, t - \tau) \Big\} d\tau - \\
& - \int_{-L}^L \left\{ \dot{u}_0(y) U_2^1(x - y, t) + u_0(y) U_{2,t}^1(x - y, t) + \right. \\
& + \eta u_1(0) U_2^2(L + x - y, t) + \eta u_2(0) U_2^2(x - y - L, t) \Big\} dy - \\
& - \int_{-L}^L \left\{ \kappa^{-1} \theta_0(y) U_2^2(x - y, t) - \eta U_{2,y}^2(x - y, t) \dot{u}_0(y) \right\} dy
\end{aligned}$$

Для регулярных $\hat{F}_j$ свертка имеет вид:

$$\hat{F}_j^* \hat{U}_i^j = H(t) H(|x| - L) \int_0^t \int_{-L}^L F_j(y, \tau) U_i^j(x - y, t - \tau) dy d\tau$$

Для сингулярных $\hat{F}_j$, характерных для физических приложений, следует использовать определение свертки обобщенных функций [13].

Если до начального момента времени стержень покоился, и температура была постоянна, тогда начальные условия нулевые и формулы упрощаются.

$$\begin{aligned}
& u(x, t) H(|x| - L) H(t) = \hat{F}_1^* \hat{U}_1^1 + \hat{F}_2^* \hat{U}_1^2 + \\
& + c^2 H(t) H(L - |x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \int_0^t \left\{ (p_k(\tau) - \tilde{\gamma} \theta_k(\tau)) U_1^1(x - (-1)^k L, t - \tau) + \right. \\
& \quad \left. + u_k(\tau) U_{1,x}^1(x - (-1)^k L, t - \tau) \right\} d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H(t) H(L - |x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \int_0^t \left\{ (q_k(\tau) - \eta \dot{u}_k(\tau)) U_1^2(x - (-1)^k L, t - \tau) + \right. \\
& \left. + \theta_k(\tau) U_{1,x}^2(x - (-1)^k L, t - \tau) \right\} d\tau
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
& \theta(x, t) H(t) H(L - |x|) = \hat{F}_1^* \hat{U}_2^1 + \hat{F}_2^* \hat{U}_2^2 + \\
& + c^2 H(L - |x|) \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \int_0^t \left\{ (p_k(\tau) - \tilde{\gamma} \theta_k(\tau)) U_2^1(x - (-1)^k L, t - \tau) + \right. \\
& \left. + u_k(t) U_{2,x}^1(x - (-1)^k L, t - \tau) \right\} d\tau + \\
& + H(t) H(L - |x|) \int_0^t \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (q_k(\tau) - \eta \dot{u}_k(\tau)) U_2^2(x - (-1)^k L, t - \tau) + \\
& + \theta_k(\tau) U_{2,x}^2(x - (-1)^k L, t - \tau) \Big\} d\tau
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Формулы (5.4) и (5.5) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах.

Для вычисления требуется матрица фундаментальных решений.

6. Матрица фундаментальных решений и ее преобразования Фурье и Лапласа по времени. Аналитически матрицу фундаментальных решений $U_k^j(x, t)$ в исходном пространстве-времени удастся построить только для уравнений несвязанной термоупругости (см. [14]), что в нашем случае соответствует $\eta = 0$.

Для уравнений связанной термоупругости такую матрицу можно построить только в пространстве преобразований Фурье или преобразований Фурье–Лапласа. Так для решения задач стационарных колебаний с фиксированной частотой ω нами в работе [15] построено преобразование Фурье по времени этой матрицы, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_1^j(x, \omega) &= \frac{\delta_1^j \operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ i\omega k^{-1} \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) + (\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2}) \right\} - \\
&\quad - \frac{\gamma \delta_2^j \operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}); \quad j = 1, 2 \\
\tilde{U}_2^j(x, \omega) &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ i\omega \eta \delta_1^j (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}) - \omega^2 \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} \right) \delta_2^j + \right. \\
&\quad \left. + c^2 (\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2}) \delta_2^j \right\}; \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь $\lambda_{1,2}(\omega)$ – корни характеристического уравнения системы (2.1),

$$\Delta(\xi, \omega) = 0 \tag{6.2}$$

биквадратного относительно ξ имеют вид:

$$\Delta(\xi, \omega) = (\xi^2 - ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2 - \omega^2) - i\tilde{\gamma}\eta\xi^2\omega = c^2(\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2)$$

Они зависят только от трех *термодинамических параметров* среды: c, α, β :

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}(\omega) &= \frac{\omega}{2c^2} \left\{ \omega + i(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\omega + i(\alpha - \beta))^2 - 4\alpha\beta} \right\} \\ \Delta(\xi, \omega) &= (\xi^2 - ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2 - \omega^2) - i\gamma\eta\xi^2\omega = c^2(\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2) \\ \lambda_{1,2}(\omega) &= \frac{\omega}{2c^2} \left\{ \omega + i(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\omega + i(\alpha - \beta))^2 - 4\alpha\beta} \right\},\end{aligned}\quad (6.3)$$

где $\alpha = \tilde{\gamma}\eta$, $\beta = c^2k^{-1}$. Их асимптотика по частоте ω следующая:

$$\text{а) при } \omega \rightarrow \infty: \lambda_1 \sim \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \lambda_2 \sim \frac{i\omega\beta}{c^2} \quad (6.4)$$

$$\text{б) при } \omega \rightarrow 0: \lambda_1 \sim \frac{3i\omega(\alpha + \beta)}{2c^2}, \quad \lambda_2 \sim \frac{i\omega(\alpha + \beta)}{2c^2} \quad (6.5)$$

Заметим, что риманова поверхность матрицы по ω однолиственная, т.к. значения компонент $\tilde{U}_k^j$ не зависят от выбора знака радикалов $\sqrt{\lambda_j(\omega)}$.

Компоненты $\tilde{U}_k^j$ являются регулярными обобщенными функциями и непрерывны в точке $x = 0$:

$$\tilde{U}_k^j(\pm 0, \omega) = \tilde{U}_k^j(0, \omega) = 0; \quad k, j = 1, 2, \quad (6.6)$$

а ее производные

$$\begin{aligned}\partial_x \tilde{U}_1^j(x, \omega) &= \left[\frac{(\lambda_1 - i\omega\kappa^{-1})}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}) + \cos x\sqrt{\lambda_2} \right] \frac{\text{sgn}(x)}{2} \delta_1^j - \\ &\quad + \frac{\gamma}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (\sqrt{\lambda_1} \sin |x| \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin |x| \sqrt{\lambda_2}) \delta_2^j \\ \partial_x \tilde{U}_2^j(x, \omega) &= -\delta_1^j \frac{i\omega\eta (\sqrt{\lambda_1} \sin |x| \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin |x| \sqrt{\lambda_2})}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\ &\quad - \delta_2^j \text{sgn}(x) \left\{ \frac{\omega^2 - \lambda_1 c^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}) - c^2 \cos x\sqrt{\lambda_2} \right\} \\ \tilde{U}_{1,x}^j(\pm 0, \omega) &= \pm \frac{1}{2} \delta_1^j, \quad \tilde{U}_{2,x}^j(\pm 0, \omega) = \pm \frac{c^2}{2} \delta_2^j\end{aligned}\quad (6.7)$$

в этой точке терпят разрыв первого рода (верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему — правый).

Для решения нестационарных краевых задач следует использовать преобразование Лапласа фундаментальной матрицы $\bar{U}_1^j(x, p)$, которое получим, используя связь между преобразованием Фурье и преобразованием Лапласа по времени ($p \leftrightarrow -i\omega$, $\omega \leftrightarrow ip$) [13]:

$$\tilde{U}_1^j(x, p) = \frac{\delta_1^j \text{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ -p\kappa^{-1} \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) + (\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2}) \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma\delta_2^j \operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}); \quad j = 1, 2 \\
\tilde{U}_2^j(x, p) = & -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ p\eta\delta_1^j (\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}) - p^2 \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} \right) \delta_2^j + \right. \\
& \left. + c^2 (\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2}) \delta_2^j \right\}; \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\text{где } \lambda_{1,2}(p) = -\frac{p}{2c^2} \left\{ p + \alpha + \beta \pm \sqrt{(p + (\alpha - \beta))^2 + 4\alpha\beta} \right\}.$$

7. Преобразование Лапласа по времени решения начально-краевых задач. Здесь рассмотрим начально-краевую задачу с нулевыми начальными условиями, решение которой имеет вид (5.4)–(5.5). Его трансформанта Лапласа по времени имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(x, p) H(|x| - L) = \bar{F}_1(x, p) * \bar{U}_1^1(x, p) + \bar{F}_2(x, p) * \bar{U}_1^2(x, p) + \\
& + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{p}_k - \gamma \bar{\theta}_k) \bar{U}_1^1(x - (-1)^k L, p) + \bar{u}_k(\tau) \bar{U}_{1,x}^1(x - (-1)^k L, p) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{q}_k - \eta p \bar{u}_k) \bar{U}_1^2(x - (-1)^k L, p) + \bar{\theta}_k \bar{U}_{1,x}^2(x - (-1)^k L, p) \right\}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\theta}(x, p) H(L - |x|) = \bar{F}_1(x, p) * \bar{U}_2^1(x, p) + \bar{F}_2(x, p) * \bar{U}_2^2(x, p) + \\
& + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{p}_k - \gamma \bar{\theta}_k) \bar{U}_2^1(x + L, p) + \bar{u}_k \bar{U}_{2,x}^1(x + L, p) \right\} + \\
& + H(t) \left\{ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\bar{q}_k - \eta p \bar{u}_k) \bar{U}_2^2(x - (-1)^k L, p) + \bar{\theta}_k \bar{U}_{2,x}^2(x + L, p) \right\}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

здесь черточкой над функцией обозначено его преобразование Лапласа.

Используя асимптотические свойства фундаментальной матрицы $\bar{U}_j^i$ в нуле (6.7), в работе [16] получена система из четырех линейных уравнений в граничных точках для определения трансформант Фурье по времени неизвестных граничных функций, соответственно решаемой краевой задаче. Она совпадает с трансформантой Фурье по времени решений (5.7), (5.8) в предположении, что в точке разрыва $H(0) = 1/2$.

В пространстве преобразований Лапласа по времени она преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \bar{u}(-L, p) = \left(\bar{F}_{1x}^* \bar{U}_1^1 + \bar{F}_{2x}^* \bar{U}_1^2 \right)_{x=L} + \\
& + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{p}_k(p) - \gamma \bar{\theta}_k(p)) \bar{U}_1^1(-L - (-1)^k L, p) + \bar{u}_k(p) \bar{U}_{1,x}^1(-L - (-1)^k L, p) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{q}_k(p) + i\omega \eta \bar{u}_k(p)) \bar{U}_1^2(-L - (-1)^k L, p) + \bar{\theta}_k(p) \bar{U}_{1,x}^2(-L - (-1)^k L, p) \right\}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \bar{u}(L, p) = \left(\bar{F}_{1x}^* \bar{U}_1^1 + \bar{F}_{2x}^* \bar{U}_1^2 \right)_{x=L} + \\
& + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{p}_k(p) - \gamma \bar{\theta}_k(p)) \bar{U}_1^1(L - (-1)^k L, p) + \bar{u}_k(p) \bar{U}_{1,x}^1(L - (-1)^k L, p) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{q}_k(p) - p\eta \bar{u}_k(\omega)) \bar{U}_1^2(L - (-1)^k L, p) + \bar{\theta}_k(p) \bar{U}_{1,x}^2(L - (-1)^k L, p) \right\}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \bar{\theta}(-L, p) &= \left(\bar{F}_{1x}^* \bar{U}_2^1 + \bar{F}_{2x}^* \bar{U}_2^2 \right) \Big|_{x=-L} + \\
 &+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{p}_k(p) - \gamma \bar{\theta}_k(p)) \bar{U}_2^1(0, p) + \bar{u}_k(p) \bar{U}_{2,x}^1(0, p) \right\} + \\
 &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\bar{q}_k(p) - p \eta \bar{u}_k(p)) \bar{U}_2^2(-L - (-1)^k L, p) + \bar{\theta}_k(\omega) \bar{U}_{2,x}^2(0, p)
 \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \bar{\theta}(L, p) &= \left(\bar{F}_{1x}^* \bar{U}_2^1 + \bar{F}_{2x}^* \bar{U}_2^2 \right) \Big|_{x=L} + \\
 &+ c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ (\bar{p}_k(p) - \gamma \bar{\theta}_k(p)) \bar{U}_2^1(2L, p) + \bar{u}_k(p) \bar{U}_{2,x}^1(2L, p) \right\} + \\
 &+ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\bar{q}_k(p) - p \eta \bar{u}_k(p)) \bar{U}_2^2(L - (-1)^k L, p) + \bar{\theta}_k(p) \bar{U}_{2,x}^2(2L, p)
 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Из этой системы можно получить разрешающие уравнения для любой из четырех поставленных задач.

8. Разрешающие уравнения начально-краевых задач в пространстве преобразований Лапласа. Разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (7.3)–(7.6) представим в матричном виде:

$$\{\mathbf{A1}\} \times \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{q}_1 \end{Bmatrix} + \{\mathbf{A2}\} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{b} \quad (8.1)$$

или более точно

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A1} &= \begin{Bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(c^2 \bar{U}_{1,x}^1 - p \eta \bar{U}_1^2\right)_{(x=2L)} & -c^2 \bar{U}_1^1(2L, p) & \left(\gamma c^2 \bar{U}_1^1 - \bar{U}_{1,x}^2\right)_{(x=2L)} & -\bar{U}_1^2(2L, p) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -\left(c^2 \bar{U}_{2,x}^1 - p \eta \bar{U}_2^2\right)_{(x=2L)} & -c^2 \bar{U}_2^1(2L, p) & \left(\gamma c^2 \bar{U}_2^1 - \bar{U}_{2,x}^2\right)_{(x=2L)} & -\bar{U}_2^2(2L, p) \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{A2} &= \begin{Bmatrix} \left(c^2 \bar{U}_{1,x}^1 - p \eta \bar{U}_1^2\right)_{(x=-2L)} & c^2 \bar{U}_1^1(-2L, p) & -\left(\gamma c^2 \bar{U}_1^1 - \bar{U}_{1,x}^2\right)_{(x=-2L)} & \bar{U}_1^2(-2L, p) \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \left(c^2 \bar{U}_{2,x}^1 - p \eta \bar{U}_2^2\right)_{(x=-2L)} & c^2 \bar{U}_2^1(-2L, p) & -\left(\gamma c^2 \bar{U}_2^1 - \bar{U}_{2,x}^2\right)_{(x=-2L)} & \bar{U}_2^2(-2L, p) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{Bmatrix} \\
 \mathbf{b} &= \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^* \bar{U}_1^1 + \bar{F}_2^* \bar{U}_1^2 \Big|_{-L} \\ \bar{F}_1^* \bar{U}_1^1 + \bar{F}_2^* \bar{U}_1^2 \Big|_L \\ \bar{F}_1^* \bar{U}_2^1 + \bar{F}_2^* \bar{U}_2^2 \Big|_{-L} \\ \bar{F}_1^* \bar{U}_2^1 + \bar{F}_2^* \bar{U}_2^2 \Big|_L \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Здесь в нижнем индексе в скобках стоят значения x , при которых вычисляются функции в компонентах матриц.

Из этой системы нужно строить линейную систему алгебраических уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с извест-

ными. Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера.

После определения недостающих граничных функций по формулам (7.1), (7.2), определяем перемещения, температуру в стержне. Для определения термоупругих напряжений подставим решение в закон Дюамеля–Неймана (2.3), где все входящие функции определены выше. Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

9. Полуобратные и обратные краевые задачи. Рассмотренные выше краевые задачи с любым из краевых условий на левом и правом концах стержня называют *прямыми задачами*. В этом случае на каждом конце задаются два из приведенных краевых условий. Будем называть краевые условия *симметричными*, если они одного типа на концах стержня. Например, на концах стержня заданы перемещения и температура (1).

К прямым задачам относятся также задачи с *несимметричными* краевыми условиями. Например, на левом конце два условия одной краевой задачи, а на правом – другой.

Все другие способы задания 4-х краевых условий определяют класс обратных задач, который тоже многообразен. Например, на одном конце можно задавать только тепловые характеристики, а на другом только упругие. Другие задачи, в которых задаются 4 классических краевых условия из 8 возможных будем называть полуобратными и обратными, когда все известно лишь на одном конце. Для любой из них следует члены, содержащие 4 неизвестные граничные функции оставить в левой части уравнений, а известные перенести в их правую часть. Далее решение уравнений системы 4 линейных алгебраических определяется правилом Крамера.

Для построения оригиналов следует использовать обратное преобразование Лапласа по времени, т.е. обратного преобразования Лапласа у фундаментальных решений не существует. При $\eta = 0$ (несвязанная термоупругость) обратное преобразование Лапласа у фундаментальных решений существует (см. [14]) и возможно обращение преобразования Лапласа на основе численных методов и, соответственно, построение решений этих краевых задач в пространстве оригиналов. Однако полученные решения позволяют решать задачи колебаний стержней с учетом взаимовлияния силовых и тепловых полей.

10. Обратная краевая задача и ее решение. Рассмотрим здесь обратную задачу стационарных колебаний стержня, у которого известны все краевые значения на левом конце:

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= w_1(\omega) \exp(-i\omega t), & \theta(x_1, t) &= \theta_1(\omega) \exp(-i\omega t) \\ \sigma(x_1, t) &= p_1(\omega) \exp(-i\omega t), & q(x_1, t) &= q_1(\omega) \exp(-i\omega t) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Система уравнений для определения амплитуд колебаний в этом случае имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_1, \omega) &= w_1(\omega), & \bar{\sigma}(x_1, \omega) &= \rho c^2 p_1(\omega) \\ \bar{\theta}(x_1, \omega) &= \theta_1(\omega), & \bar{\theta}_{,x}(x_1, \omega) &= \bar{q}_1(\omega) \end{aligned} \quad (10.2)$$

Для определения краевых условий на правом конце надо решить систему уравнений:

$$\mathbf{A2}(-i\omega) \times \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{q}_2 \end{Bmatrix} = b(-i\omega) - \mathbf{A1}(-i\omega) \times \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{q}_1 \end{Bmatrix}, \quad (10.3)$$

где правая часть известна, а недостающие краевые значения определяются ее решением, которое строится по правилу Крамера.

11. Собственные колебания термоупругого стержня. Одной из наиболее важных инженерных задач является определение спектра собственных колебаний термоупругого стержня (*резонансных частот*). Как известно, внешние воздействия на резонансных частотах часто приводят к разрушительным последствиям для конструкций, содержащих такие элементы.

Для определения спектра термоупругих колебаний стержня следует исследовать определитель разрешающей матрицы A_{ij} . А именно резонансные частоты должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det \{A_{ij}(L, \omega_k)\} = 0; \quad k = 1, 2, \dots,$$

которое имеет вид трансцендентного уравнения, поскольку компоненты фундаментальной матрицы выражаются через тригонометрические функции от сложного аргумента. Его корни и их поведение можно определить только численно с помощью различных стандартных программ. В случае нулевого определителя существование решения на этой частоте определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Заключение. По термодинамике стержневых конструкций очень мало работ. В основном они связаны с разработкой численных методов расчета их термонапряженного состояния, которые таких возможностей не дают. Отметим в этом направлении работы Кудайкулова А. и его учеников [17], [18], в которых разрабатываются численные методы на основе МКЭ для расчета термодинамики однородных и неоднородных стержней и стержней переменного сечения.

В настоящей работе разработана методика и построена система разрешающих уравнений для решения 35 прямых и полуобратных краевых задач связанной термодинамики упругого стержня. Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Формулы (5.4) и (5.5) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Последнее очень важно для инженерных приложений, т.к. все граничные функции на концах можно просто измерять. Кроме того, они позволяют исследовать влияние каждого краевого условия в отдельности на термодинамику стержня, что очень важно при проектировании конструкций, т.к. обычно исследуется динамика конструкций при определенном диапазоне внешних воздействий. Никакой другой метод построения решений таких краевых задач такой возможности не дает.

Разработанная методика позволяет также решать краевые задачи при связанных краевых условиях на левом и правом концах стержня. Если систему из 4-х уравнений (8.1) дополнить четырьмя линейными алгебраическими уравнениями, связывающими 8 неизвестных граничных значений искомых функций, то получим замкнутую систему из 8-ми линейных уравнений относительно этих функций, разрешая которую, найдем их значения.

Разработанный алгоритм следует использовать при расчете термонапряженного состояния стержневых конструкций при периодических внешних воздействиях, которые так распространены на практике. Разлагая их в ряды Фурье, получим решенную здесь задачу стационарных колебаний для каждой гармоники ряда. Сумма этих решений дает решение периодической задачи. Можно также исследовать резонансные явления в стержневых конструкциях, связанные с повышением амплитуды колебаний

на определенных частотах, что может привести к потере прочности и разрушению конструкций, содержащих такие стержневые элементы.

Разработанная методика должна найти много полезных инженерных приложений, в частности для исследования термонапряженного состояния колонн, стенок и опор зданий при одноосном расширении и сжатии и приближенных к ним состояний. На ее основе можно создавать информационные технологии для исследования сетевых систем, моделируя их системой термоупругих графов различного строения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Респ. Казахстан (гранты АРО5132272, АР09261033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
4. Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by *Hetnarski R.B.* Netherlands: Springer, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7>
5. *Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V.* Thermo-Dynamics of Plates and Shells. Berlin: Springer, 2007. 468 с.
6. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелешвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
7. *Suh I.J., Tasaka N.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // *Comput. Mech.* 1991. Т. 8. № 1. С. 313–342.
8. *Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.Б., Дадаева А.Н.* Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэластодинамики // *ПММ.* 1999. Т. 63. № 5. С. 853–859.
9. *Алексеева Л.А., Купцова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // *ПММ.* 2001. Т. 65. № 2. С. 334–345.
10. *Dargush E., Banerjee P.K.* The development of a boundary element methods for time-dependent thermoelasticity // *Solid&Struct.* 1989. V. 9. № 5. P. 999–1021.
11. *Dargush G.E., Banerjee P.K.* Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity // *Solid&Struct.* 1990. V. 10. № 2. P. 199–216.
12. *Алексеева Л.А.* Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // *Матем. ж.* Алматы. 2006. Т. 6. № 1. С. 16–32.
13. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978. 270 с.
14. *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айникеева Н.Ж.* Фундаментальные и обобщенные решения уравнений нестационарной динамики термоупругих стержней // *Вестн. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева: Матем., компьют. науки, мех.* 2018. № 2 (123). С. 56–65.
15. *Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М.* Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1. Стационарные колебания // *Матем. ж.* 2014. Т. 14. № 2. С. 5–20.
16. *Алексеева Л.А.* Стационарные краевые задачи динамики термоупругих стержней // *Изв. НАН РК. Сер. Физ.-мат.* 2014. № 3. С. 144–152.
17. *Kudaykulov A., Zhumadillayeva A.* Numerical simulation of temperature distribution field in beam bulk in the simultaneous presence of heat insulation, heat flux and heat exchange // *Acta Phys. Polon. A.* 2016. V. 130. № 1. P. 335–336.
18. *Kudaykulov A., Tashev A., Zhumadillayeva A., Askarova A.* Investigation of the steady nonlinear thermomechanical state of a rod of limited length and constant cross-section in the presence of symmetrical local thermal insulation, lateral heat exchanges and end heat fluxes // *J. Adv. Phys.* 2018. № 7. P. 522–526.

One-Dimensional Spatial Boundary Value Problems of the Connected Thermoelasticity. Generalized Functions Method

L. A. Alexeyeva^{a,#} and M. M. Ahmetzhanova^{a,##}

^a*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Alma-Ata, Kazakhstan*

[#]*e-mail: alexeeva@math.kz*

^{##}*e-mail: mariella80@mail.ru*

Problems of definition of thermotension of a thermoelastic core with use of model of the connected thermoelasticity are considered. In this case in the equation of heat conductivity there is the divergence of speed of the movement of material points of the rod, and the elasticity equations contains the temperature gradient. On the basis of generalized functions method the generalized solutions of non-stationary and stationary boundary value problems have been solved at action of the power and thermal sources of various type including ones described singular generalized functions, under various boundary conditions on the ends of a core. Thermoshock waves which arise in such designs at action of impact loads and heat fluxes are considered, conditions on their fronts are received. The uniqueness of the set boundary tasks, including taking into account shock waves has been proved. Regular integral representation of the generalized solutions are given, which give the analytical solution of the tasks. Numerical implementation of solutions of a number of direct, return and semi-return boundary value problems of stationary fluctuations is carried out and results of computer experiments are presented

Keywords: coupled thermoelasticity, thermoelastic rod, boundary value problems, fundamental and generalized solution, Laplace transform, stationary oscillations

REFERENCES

1. Nowacki W. Teoria Sprężystości. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970. (in Polish)
2. Nowacki W. Dynamiczne Zagadnienia Termosprężystości. Warszawa: PWN, 1966. (in Polish)
3. Nowacki W. Zagadnienia Termosprężystości. Warszawa: PWN, 1960. (in Polish)
4. Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. by Hetnarski R.B. Netherlands: Springer, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7>
5. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Thermo-Dynamics of Plates and Shells. Berlin: Springer, 2007. 468 c.
6. Kupradze V.D., Gegelia T.G., Bacheleshvili M.O., Burchuladze T.V. 3D Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Moscow: Nauka, 1976. 664 p.
7. Suh I.J., Tasaka N. Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Comput. Mech., 1991, vol. 8, no. 1, pp. 313–342.
8. Alekseyeva L.A., Dadayeva A.N., Zhanbyrbayev N.B. The method of boundary integral equations in unsteady boundary-value problems of uncoupled thermoelasticity // JAMM, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 803–808.
9. Alekseyeva L.A., Kupesova B.N. The method of generalized functions in boundary-value problems of coupled thermelastodynamics // JAMM, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 327–337.
10. Dargush E., Banerjee P.K. The development of a boundary element methods for time-dependent thermoelasticity // Solid&Struct., 1989, vol. 9, no. 5, pp. 999–1021.
11. Dargush G.E., Banerjee P.K. Boundary element methods in threedimensional thermoelasticity // Solid&Struct., 1990, vol. 10, no. 2, pp. 199–216.
12. Alekseeva L.A. Method of generalized functions in nonstationary boundary value problems for solutions of the wave equation // Kaz. Math. J., 2006, vol. 6, no. 1, pp. 16–32.
13. Vladimirov V.S. Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow: Mir, 1979.
14. Alekseeva L.A., Dadaeva A.N., Ainikeeva N.Zh. Fundamental and generalized solutions of the equations of non-stationary dynamics of thermoelastic rods // Bull. Gumilyov Euras. Nat. Univ. Ser. Math., Comput. Sci., Mech., 2018, no. 2 (123), pp. 56–65.

15. Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. Fundamental and generalized solutions of the equations of dynamics of thermoelastic cores. 1 Stationary fluctuations // Kaz. Math. J., 2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–20.
16. Alexeyeva L.A. Stationary boundary value problem of dynamics of thermoelastic cores // News of NAS RK. Ser. Phys.&Math., 2014, no. 3, pp. 144–152.
17. Kudaykulov A., Zhumadillayeva A. Numerical simulation of temperature distribution field in beam bulk in the simultaneous presence of heat insulation, heat flux and heat exchange // Acta Phys. Polon. A, 2016, vol. 130, no. 1, pp. 335–336.
18. Kudaykulov A., Tashev A., Zhumadillayeva A., Askarova A. Investigation of the steady nonlinear thermomechanical state of a rod of limited length and constant cross-section in the presence of symmetrical local thermal insulation, lateral heat exchanges and end heat fluxes // J. Adv. Phys., 2018, no. 7, pp. 522–526.

УДК 622.023.23

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫБРОСЕ УГЛЯ И МЕТАНА ИЗ КРАЕВОЙ ЗОНЫ ПЛАСТА

© 2023 г. Н. В. Черданцев^{1,*}¹Федеральный исследовательский центр угля и углехимии СО РАН, Кемерово, Россия

*e-mail: nvch2014@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.

После доработки 13.09.2022 г.

Принята к публикации 20.09.2022 г.

На базе модели геомеханического состояния углепородного массива, вмещающего угольный пласт с непрочным прослойком, пластовую выработку, и разработанных С.А. Христиановичем концепций о газодинамических процессах при отработке угольных пластов, построено решение задачи о выбросе угля и газа из краевой части пласта. Сформулированы условия возникновения газодинамических явлений, проявляющихся в форме образования сначала магистральной трещины в пласте со свободным метаном, затем формированием в нем волны дробления с последующим выбросом в выработку перемычки и смеси раздробленного угля и газа.

Ключевые слова: массив горных пород, горная выработка, угольный пласт, предельно напряженные зоны пласта, характеристики прочности, волна дробления

DOI: 10.31857/S0032823523010058, EDN: HVAYKX

1. Введение. Известно, что отработка угольных месторождений подземным способом сопряжена с риском возникновения газодинамических явлений, наибольшую опасность из которых представляют внезапные выбросы угля и газа, обусловленные быстро протекающими физико-механическими процессами.

Существующие методы прогноза газодинамических явлений, описывающие внезапные выбросы и широко использующие экспериментальные физико-механические методы, едины в том, что внезапные выбросы зарождаются в краевой предельно напряженной зоне пласта [1–7].

Эти методы основаны на изучении акустической эмиссии, характеристик прочности пласта, изменения температуры пласта, количестве бурового шлама и газа, образующихся при бурении из забоя выработки скважин и сопутствующих выбросам [8–12].

В этой связи, для составления прогноза газодинамических явлений важнейшими факторами являются следующие: распределение поля напряжений в краевых зонах угольного пласта и давления порового (сорбированного) метана.

Напряженное состояние в окрестности горных выработок оценивается экспериментальными, теоретическими, полуэмпирическими методами [5, 6, 13–17]. Во всех методах эпюры распределения напряжений, действующие на пласт, задаются аналитическими функциями, чаще всего экспонентами, в которых газовая компонента не оказывает влияния на распределение поля напряжений. Однако методы практически не учитывают два важнейших фактора, влияющих на газодинамические процессы и инициирующие волну дробления угля с последующим выбросом в выработку углеметановой смеси. Во-первых, они лишь приближенно учитывают наличие в пласте нару-

шения в виде непрочного прослойка и, во-вторых, не учитывают в пласте поверхностей ослабления с пониженными характеристиками прочности по сравнению с характеристиками прочности самого пласта.

Как показывают результаты исследований, давление порового метана зависит от целого ряда параметров, к которым относятся горно-геологические и горнотехнические параметры: природная пористость, проницаемость пласта, вязкость метана, а также скорость движения выработки [18]. В этой связи, построение кривой давления метана вглубь пласта является важным этапом в решении общей задачи о внезапных выбросах на угледобывающих предприятиях.

Что касается непосредственно процессов внезапных выбросов, то ряд авторов считает, что они осуществляются в два этапа [5–8, 12]. На первом этапе происходит интенсивное развитие поровых трещин под действием горного давления и давления метана, находящегося в этих трещинах, а на втором этапе высвободившийся в результате образования магистральных трещин метан выдавливает перемычку (пробку) между забоем выработки и магистральной трещиной. Причем, на втором этапе при некоторых условиях возможно возникновение волны дробления, что усиливает эффект выброса.

В ряде работ принято считать, что трещинообразование происходит при условии [5, 8]

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\sigma_3 - p}{\sigma_p} \geq 1, \quad (1.1)$$

где σ_1, σ_3 — главные напряжения в пласте, σ_0, σ_p — пределы прочности угля на одноосное сжатие и растяжение.

Однако, следует отметить, что критерием перехода пласта в предельное состояние является критерий Кулона–Мора, который применительно к прямолинейной огибающей линии кругов предельных состояний, построенных при одноосных растяжении и сжатии, имеет вид [6, 14, 15, 17]

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\sigma_3}{\sigma_p} \geq 1 \quad (1.2)$$

Из сравнения выражений (1.1) и (1.2), легко заметить, что при соблюдении условия (1.2) условие (1.1) выполняется автоматически. Отсюда следует, что первый этап процесса выброса совпадает с процессом перехода пласта в предельно напряженное состояние. Иными словами, в предельно напряженной зоне пласта процесс трещинообразования реализуется автоматически без участия газа. Поэтому критерий (1.1) вряд ли применим для прогнозных оценок выбросов.

Кроме того, на втором этапе решения задачи о внезапном выбросе величина давления метана, входящая в критерий (1.1), определяется косвенными методами. Она не связана ни с сорбционной изотермой угольного пласта, по которой устанавливается характер изменения давления метана вглубь пласта, ни со скоростью движения выработки, хотя учет этих характеристик достаточно подробно изложен в фундаментальных работах [1, 18].

В настоящее время практически нет работ, в которых процессы выбросов описываются в рамках моделей напряженного состояния краевой зоны угольного пласта, построенных на фундаментальных методах механики деформируемого твердого тела [5, 6]. Особенно, это касается работ, учитывающих наличие в пластах непрочных прослоек, которые как раз и оказывают существенное влияние на распределение напряжений в краевых частях пластов, где и зарождаются газодинамические явления. В ряде работ влияние непрочного прослойка на напряженное состояние пласта учитывается посредством усреднения пределов прочности прослойка и самого пласта [3, 4, 6]. В этом случае в качестве характеристики прочности пласта с прослойком выступает средневзвешенный, “размазанный” по его толщине приведенный предел прочности

пласта. Усреднение характеристик прочности существенно меняет вид эпюры опорного давления, особенно в приконтурной части пласта, поскольку вполне очевидно, что на кромке пласта, вмещающего прослойку, вертикальное нормальное напряжение равно пределу прочности прослойки, а в пласте с усредненной прочностью вертикальное напряжение равно приведенному пределу прочности, значительно превышающему предел прочности прослойки.

В задаче о выбросе, представленной в данной работе, впервые увязаны в единое целое оба этапа решения задачи, результаты решения которой могут быть использованы в прогнозных оценках газодинамических явлений. Для конкретных горно-геологических и горнотехнических условий отработки угольного пласта проведены исследования напряженного состояния угольного пласта, определены параметры пласта, при которых возможно возникновение газодинамических явлений в форме образования магистральных трещин, выдавливания части пласта (блока) из краевой предельно напряженной зоны, возникновения волны дробления непрочного прослойки с последующим выбросом в выработку углеметановой смеси.

На первом этапе решения задачи о построении поля напряжений в углепородном массиве использованы ранее разработанные модели геомеханического состояния массива, вмещающего пластовую выработку и дизъюнктивное нарушение [19], а также модели массива с пластовой выработкой и трещиной гидроразрыва [20], выработкой, пройденной по угольному пласту с непрочным прослойком [21].

В этой модели наиболее полно учтены важнейшие факторы, влияющие на напряженное состояние углепородного массива в окрестности пластовой выработки. К этим факторам относятся поверхности ослабления, представляющие направления в массиве горных пород, включая и угольный пласт, по которым характеристики прочности ниже, чем по другим его направлениям. Кливаж и контакты пласта с окружающим массивом являются частными случаями поверхностей ослабления. Наличие этих поверхностей и непрочного прослойки существенно изменяет и картину распределения линий скольжения, и поле напряжений в предельно напряженной зоне пласта [21].

На втором этапе формулируются и проверяются условия выброса в выработку угля и метана. На этом этапе согласно подходу акад. С.А. Христиановича, в котором учитывается сорбционная изотерма угольного пласта, и используются основные законы газовой динамики, строится кривая распределения порового давления метана вглубь пласта [18]. После совмещения графиков порового давления метана и эпюры нормальных напряжений, действующих на поверхностях вероятных магистральных трещин, определяются участки краевой зоны пласта, на которых возможно образование магистральных трещин. В этой связи выбросы возможны либо путем выдавливания части пласта (блока) после образования магистральной трещины, либо с учетом образования волны дробления и последующим выбросом смеси из раздробленного угля и газа. Как правило, к трещинам, по которым образуются магистральные трещины, относятся кливажные трещины и линии скольжения пласта при его переходе в предельное (пластическое) состояние.

Для оценки возникновения и распространения волны дробления также используются концепции акад. С.А. Христиановича о газодинамических явлениях [1, 2, 18].

2. Постановка задачи о геомеханическом состоянии массива, вмещающего пластовую выработку, и построение его решения. Задача о напряженном состоянии пласта формулируется следующим образом (рис. 1). В массиве горных пород, моделируемом невесомой плоскостью, пройдена сначала монтажная камера 1 (для монтажа угледобычного оборудования) шириной a_k , и высотой h_k , а затем проводится очистная выработка 2 высотой h и шириной a_v .

Они пройдены на глубине H по угольному пласту 3 мощностью, равной высоте выработки. В центральной части пласта имеется низкопрочный прослойок 4 мощно-

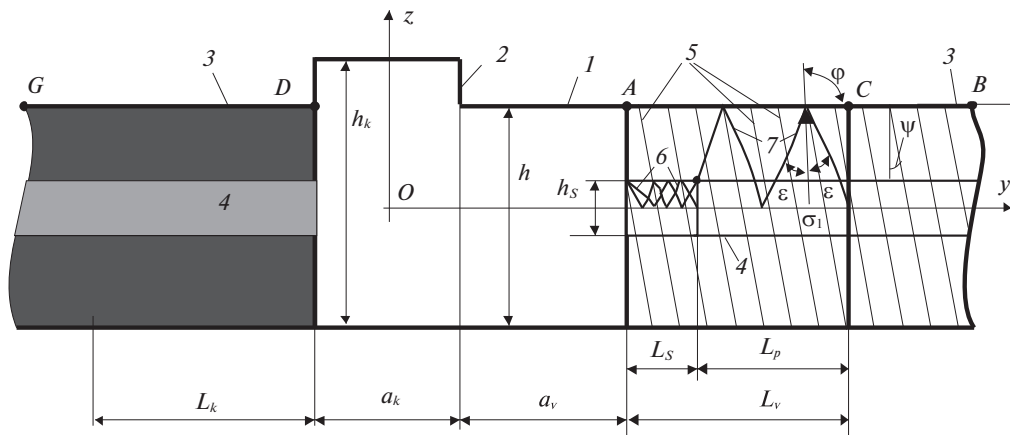


Рис. 1.

стью h_s ; а также регулярная система кливажных трещин 5, наклоненных к вертикали под углом ψ ; 6 — линии скольжения в предельно напряженной зоне прослойка пласта; 7 — линии скольжения в пласте. Характеристики прочности пород массива (боковыми породами), вмещающие пласт, значительно превышают его характеристики и, тем более, они выше, чем характеристики прочности по его контактам с породами массива.

Плоскость нагружена сверху, снизу и с боков равнокомпонентным гравитационным давлением γH (γ — средневзвешенный объемный вес налегающих пород). Характеристики прочности пласта: σ_0 — предел прочности на одноосное сжатие, C — коэффициент сцепления, δ — угол внутреннего трения. Они меньше, чем характеристики прочности пород вмещающего массива, но больше, чем характеристики (C' — коэффициент сцепления, δ' — угол внутреннего трения) по контактам пласта с остальным массивом. Предел прочности прослойка σ_{0s} меньше σ_0 , а его угол внутреннего трения δ_s равен углу δ . В краевых частях пласта впереди очистной выработки образуются зоны неупругого деформирования (предельно напряженные зоны) шириной $L_v = L_s + L_p$ (L_s — ширина зоны прослойка, L_p — ширина зоны пласта), а со стороны монтажной камеры эта зона составляет величину L_k . За пределами предельно напряженных зон пласт находится в упругом состоянии. Принятая система координат yOz совпадает с центральными осями поперечного сечения монтажной камеры (рис. 1).

Механизм формирования предельно напряженных зон в структурно однородном пласте (в отсутствии кливажа) с образованием линий скольжения изложен в работах [6, 19, 20]. В них показано, что предельно напряженные зоны структурно однородного пласта развиваются вглубь, начиная с его обнажения (от его кромки), когда вертикальные главные напряжения σ_1 (главное напряжение σ_3 на обнажении равно нулю) достигают значения σ_0 . В предельно напряженной зоне пласт деформируется не только по направлению его мощности, но и вдоль контакта с окружающими породами, где происходит его проскальзывание. В этой связи в нем одновременно реализуются два предельных состояния равновесия: общее или обыкновенное (состояние самого пласта) и специальное (состояние по контакту пласта с окружающим массивом) [6, 22]. Эти два условия соответствуют критериям Кулона—Мора для прямолинейных огибающих кругов предельных состояний по пласту и по контакту пласта (слоя) с массивом.

Критерии Кулона–Мора совместно с дифференциальными уравнениями равновесия образуют систему уравнений о напряженном состоянии краевой зоны угольного пласта. В задаче с плоской деформацией путем перехода от компонентов тензора напряжений к приведенному напряжению σ и углу φ между осью y и напряжением σ_1 (рис. 1) система сводится к уравнению гиперболического типа [22].

Уравнения гиперболического типа решаются методом характеристик. В этом методе направления характеристик (характеристических линий) совпадают с линиями скольжения материала [6, 22]. На характеристиках уравнения упрощаются, но, несмотря на это, их интегрирование в замкнутом виде получается только на участках пласта (слоя), расположенных в непосредственной близости к его обнажению. На остальных участках его предельно напряженной зоны решение можно получить только путем вычислительной процедуры, последовательно решая три краевые задачи механики предельного равновесия, используя рекуррентные конечно-разностные соотношения [22–24]. В предельно напряженной зоне возникают две системы линий скольжения, образующих своеобразную сетку. Главное напряжение σ_1 составляет с двумя линиями, принадлежащими разным системам сетки линий скольжения, угол $\pm\epsilon$ ($\epsilon = \pi/4 - \delta/2$) (рис. 1).

Очевидно, что при наличии в угольном пласте непрочного прослойка предельное состояние наступает сначала в нем, а в пласте оно возникает лишь на некотором удалении от его кромки и при достижении приведенным напряжением в прослойке величины приведенного напряжения в пласте, которое соответствует предельному состоянию одноосного сжатия. Далее пласт и прослойка деформируются совместно, а характер распределения эпюр напряжений вдоль контактов прослойка, пласта и массива, а также вдоль оси пласта представляет вид попеременно сменяющихся постоянных и нелинейных участков. При решении упругопластической задачи о пластовой выработке в углепородном массиве, ступенчато меняющиеся эпюры напряжений аппроксимируются монотонными функциями в виде полиномов, степень которых определяется протяженностью предельно напряженной зоны [23, 24].

Граница смены пластических и упругих деформаций определяется из решения упругопластической задачи, которая путем замены предельно напряженных зон пласта реактивными усилиями, действующими на границах этих зон, сводится ко второй внешней краевой задаче теории упругости [25, 26] и решается методом интегральных уравнений [25–27]. В разрешающих уравнениях этой задачи кроме неизвестной интенсивности фиктивной нагрузки, приложенной на поверхности выработки, неизвестным остается также и суммарный размер предельно напряженной зоны, входящей в область интегрирования. Эти неизвестные находятся в ходе реализации итерационной процедуры метода последовательных приближений [19, 20]. Сначала задается размер предельно напряженной зоны, затем решается граничное интегральное уравнение, потом проверяется выполнение статических граничных условий на границе упругих областей и предельно напряженных зон. Если условия не выполняются, то процедура повторяется при других значениях предельно напряженной зоны. После того как граничные условия будут выполнены, задача теории упругости считается решенной. Эпюра вертикальных нормальных напряжений, построенная в ходе стыковки решения упругой и пластической областей, является эпюрой опорного давления на угольный пласт. Ее параметрами являются величина нормального напряжения на границе упругой и пластической областей, а также протяженность предельно напряженной (пластической) зоны пласта.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчета параметров опорного давления в окрестности пластовой выработки. В качестве исходной информации при проведении вычислительного эксперимента приняты следующие параметры: $H = 650$ м, $\gamma = 25$ кН/м³,

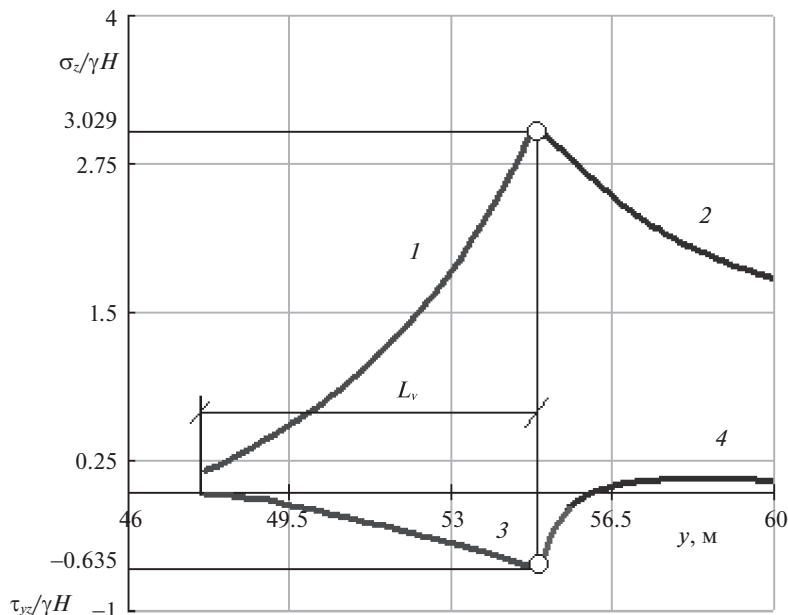


Рис. 2.

$\sigma_0 = 10$ МПа, $\delta = 20^\circ$, $\sigma_{0s} = 1.95$ МПа, $\delta_s = 20^\circ$, $\delta' = 10^\circ$, $C' = 0$, $a_k = 5$ м, $a_v = 45$ м, $h_k = 4.5$ м, $h = 3$ м, $h_s = 0.75$ м.

Принятые прочностные параметры пласта являются среднестатистическими данными для угледобывающих месторождений на территории России [3, 6, 15, 29, 30]. Так, например, предел прочности угольного пласта колеблется в пределах от 7 до 60 МПа, при этом, предел прочности на растяжение меньше предела прочности на сжатие в 8–10 раз [29].

Экспериментальными исследованиями и натурными наблюдениями установлено, что при средневзвешенной прочности пласта более 15.2 МПа выбросы на шахтах Кузбасса не происходят, а большинство же выбросов случались на отработываемых угольных пластах, у которых средневзвешенная прочность составляла менее 5.2 МПа [30]. На угольных шахтах Донбасса выбросы происходили на пластах, чей предел прочности, как правило, меньше 10 МПа [3].

Значения глубины H и мощности пласта h также являются промежуточными величинами для глубин отработываемых угольных пластов с широким спектром мощностей. На некоторых шахтах юга Кузбасса глубина разработки пластов более 700 м, а их мощность превышает 5 м.

На рис. 2 построены эпюры вертикальных нормальных напряжений σ_z (кривые 1, 2) и касательных τ_{yz} (кривые 3, 4) напряжений вдоль кровли пласта (линия ACB на рис. 1), которые являются результатами решения упругопластической задачи. Цифрами 1, 3 обозначены эпюры в предельно напряженной зоне пласта, а цифрами 2, 4 – в его упругой области. Из рисунка следует, что максимум нормальных напряжений приходится на границу упругой области и предельно напряженной зоны, и он равен $3.029 \gamma H$ (49.222 МПа), а ширина предельно напряженной зоны L_v составляет 7.31 м.

На рис. 3 построены эпюры нормальных σ_z (кривые 1, 2) и касательных τ_{yz} (кривые 3, 4) напряжений вдоль кровли пласта в борту монтажной камеры (вдоль линии

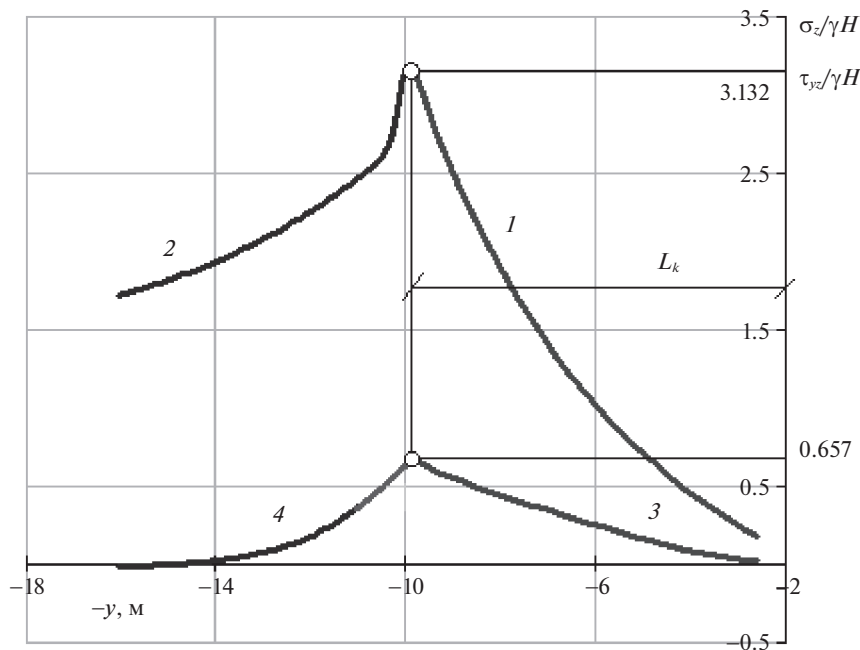


Рис. 3.

DG на рис. 1). Они также являются результатом решения упругопластической задачи. Цифрами 1, 3, как и на рис. 2, обозначены эпюры напряжений в предельно напряженной зоне пласта, а цифрами 2, 4 в его упругой области. Из рисунка следует, что максимум опорного давления равен $3.132 \gamma H$ (50.895 МПа), а ширина предельно напряженной зоны составляет 7.47 м.

Представленные на рисунках эпюры напряжений полностью определяют картину напряженного состояния обрабатываемого пласта и обеспечивают проведение исследований по прогнозу газодинамических явлений.

Если в угольном пласте учтена горизонтальная слоистость пласта, то можно определить и наклон другой системы регулярных поверхностей ослабления, по которым также реализуется предельное состояние [6, 28]. К этим поверхностям относятся кливажные трещины, являющиеся неременным атрибутом любого угольного пласта.

Кливажные трещины образованы геологическими процессами, произошедшими в некоторых районах земной коры, еще до начала отработки исследуемого угольного месторождения, которое находится в пределах этих районов. В результате в угольных пластах, а в некоторых случаях и во вмещающих породах, образуются системы упорядоченных регулярных разрывных или сдвиговых трещин, произвольно ориентированных в пространстве. В естественных условиях и в тектонически не активных к исследуемому моменту времени районах они находятся в закрытом состоянии, т.е. их берега сомкнуты. При расчетах напряженного состояния углепородного массива и газодинамических явлений в нем параметры кливажных трещин, их углы падения и простираения, как и другие параметры массива: мощность пласта характеристики прочности, газоносность и т.д., как правило, известны [6, 15, 28].

Углы α_1 , α_2 между направлением главной площадки, на которой действует напряжение σ_3 , и направлениями площадок, принадлежащих поверхностям ослабления

(кливажным трещинам), где также выполняется специальный критерий Кулона–Мора, определяются следующим образом [6]

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left\{ \arcsin \left[\frac{C' \operatorname{ctg} \delta' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \delta'}{\left(C \operatorname{ctg} \delta + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \delta} \right] - \delta' \right\} \quad (2.1)$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \arcsin \left[\frac{C' \operatorname{ctg} \delta' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \delta'}{\left(C \operatorname{ctg} \delta + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \delta} \right] + \delta' \right\} \quad (2.2)$$

Эти углы получены при условии касания огибающими прямыми линиями кругов предельных состояний, как по пласту, так и по поверхностям ослабления. В этом случае, коэффициент сцепления C связан с пределом прочности известной зависимостью [6, 28]

$$C = \frac{1 - \sin \delta}{2 \cos \delta} \sigma_0 \quad (2.3)$$

По формулам (2.1), (2.2) с учетом (2.3) могут быть определены граничные значения углов наклона поверхностей ослабления α_1 , α_2 , при которых предельное состояние наступает не только по линиям скольжения, но и по поверхностям ослабления.

Так, если характеристики прочности по кливажу составляют $\delta' = 10^\circ$, $C' = 0$, то углы на кромке пласта ($\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_0$) принимают следующие значения: $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 80^\circ$. На достаточном удалении от кромки вглубь пласта эти углы равны: $\alpha_1 = 10.256^\circ$, $\alpha_2 = 69.744^\circ$.

Таким образом, при учете кливажных трещин, наклоненных к вертикали под углом $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, предельно напряженное состояние реализуется как по линиям скольжения, так и по кливажным трещинам.

3. Задача С.А. Христиановича о распределении порового давления метана вглубь пласта при движении забоя выработки и ее применение к оценкам газо-геомеханического состояния краевой зоны пласта. Поскольку фильтрующая способность угля невелика, то при движении забоя пластовой выработки происходит падение давления в приконтурном слое угля небольшой толщины, которая зависит от скорости движения забоя, фильтрационных свойств угля, а также от вязкости метана.

При построении кривой распределения давления метана вглубь пласта здесь применены подходы, изложенные акад. С.А. Христиановичем в работах [1, 18]. В этой связи символика и обозначения физических параметров, описывающих газодинамические процессы, в основном совпадают с обозначениями, принятыми в работах [1, 2, 18].

Полагается, что газовыделение из забоя, движущегося с постоянной скоростью θ , давление метана p вблизи забоя, а также распределение опорного давления по отношению к забою остаются постоянными, т.е. задача решается в квазистатической постановке. При этом используются одномерные уравнения фильтрации метана с учетом явления его десорбции. Считается также, что процесс выделения метана из забоя протекает изотермически и, следовательно, справедливо соотношение

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \frac{p}{p_*}, \quad (3.1)$$

где ρ_* , p_* — начальные значения плотности и давления порового метана в отсутствии фильтрации, ρ , p — его текущие плотность и давление. Наибольшее значение давления

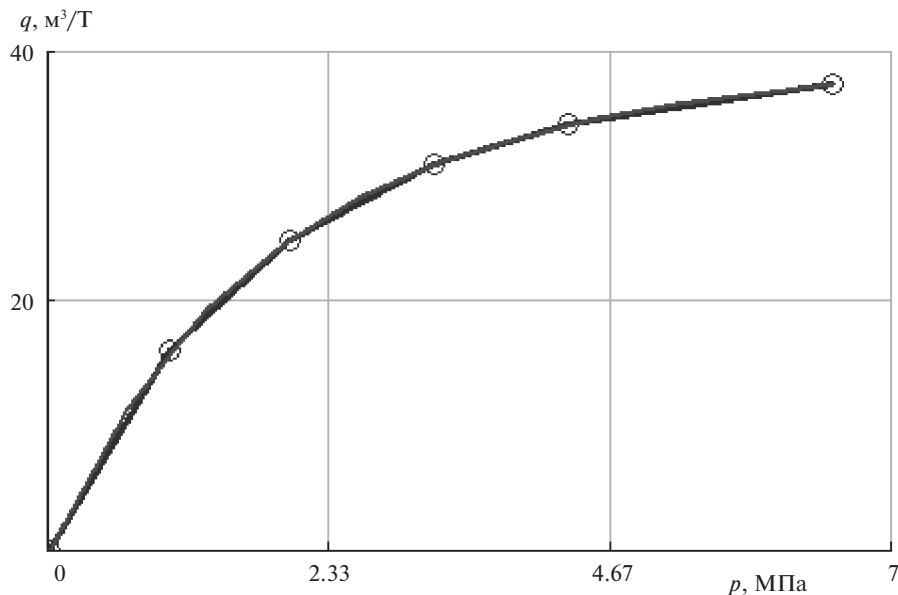


Рис. 4.

p_* равно $\gamma_v H$ (γ_v — объемный вес воды). На глубине 650 м оно составляет 6.5 МПа и равно гидростатическому давлению на заданной глубине [3, 31, 32].

Плотность угля ρ_y можно представить в виде

$$\rho_y = \rho_{y*} - \rho_* b, \quad (3.2)$$

где ρ_{y*} — начальная плотность угля, ρ_* — начальная плотность метана, коэффициент b определяется по изотермам сорбции по формуле [1, 18]

$$b = 1.3 \frac{T_*}{273} \frac{p_a}{p_*} (q_* - q), \quad (3.3)$$

где T_* — начальная температура газа, p_a — атмосферное давление, q_* — сорбция (м³/т) при давлении $p = p_*$, q — сорбция при давлении, равном p .

Сорбционная изотерма, приведена на рис. 4. Здесь принято допущение о том, что сорбционная кривая зависит только от распределения давления метана, расположенного в порах пласта (порового метана). Кружками на ней отмечены среднестатистические данные по пластам на угледобывающих предприятиях Кузбасса. Сплошной кривой линией обозначена функция полинома пятой степени, аппроксимирующая кривую среднестатистических данных.

На рис. 5 по формуле (3.3) построен график зависимости коэффициента b от безразмерного параметра $\beta = p/p_*$.

Очевидно, что количество газа в угольном пласте между двумя его поперечными сечениями в момент времени $t + dt$ равно количеству газа между теми же сечениями в момент времени t , поэтому количество газа, выделившегося между этими сечениями

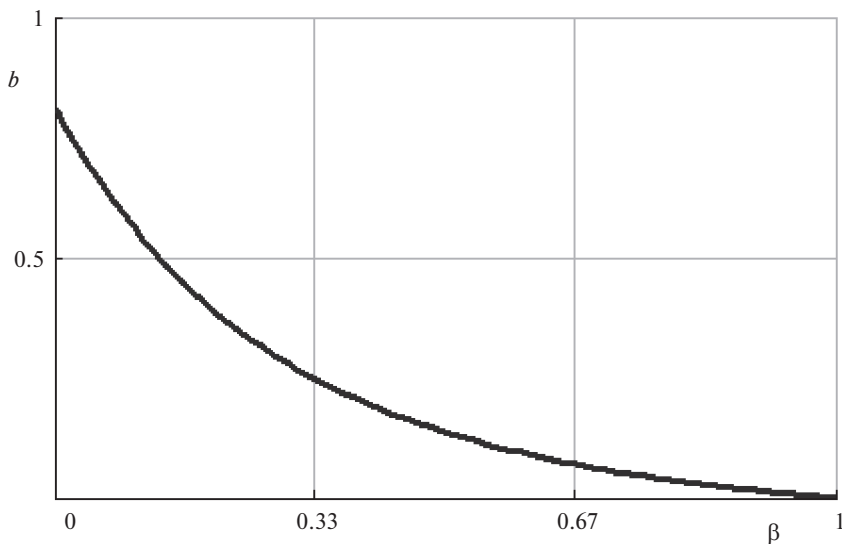


Рис. 5.

за дифференциально малый промежуток времени dt , определится следующим соотношением

$$(\rho_{y*} - \rho_y)\theta = \rho_* b \theta \quad (3.4)$$

Изменение количества газа между этими же сечениями за единицу времени на единицу площади поперечного сечения плюс количество газа, прошедшего через сечение около свободной поверхности, равно

$$m\theta\rho - m\theta\rho_* + u\rho, \quad (3.5)$$

где m — коэффициент пористости угольного пласта, u — скорость фильтрации газа.

На основании закона сохранения массы количество газа, определяемого выражениями (3.4) и (3.5), одинаково и поэтому

$$(\rho_* - \rho)m\theta - u\rho = \rho_* b \theta,$$

откуда определяется скорость фильтрации

$$u = -\theta m \frac{\rho_*}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*} + \frac{b}{m} \right) \quad (3.6)$$

При изотермическом процессе течения газа справедлив закон фильтрации Дарси

$$u = \frac{K}{\mu} p \frac{dp}{dy} = -\frac{K}{\mu} p_* \frac{d\beta}{dy} \quad (3.7)$$

Входящие в выражение (3.7) параметры K и μ являются, соответственно, коэффициентом проницаемости пласта и коэффициентом динамической вязкости метана.

В общем случае коэффициент проницаемости пласта зависит от параметров опорного давления, меняющихся вглубь пласта, и представляется зависимостью [18]

$$K = K_* l(y), \quad (3.8)$$

где K_* — коэффициент проницаемости пласта на достаточном удалении от его кромки, а параметр $l(y)$ является функцией координаты y .

После подстановки выражения (3.6) в дифференциальное уравнение (3.7) и разделения переменных оно приводится к следующему интегральному соотношению между переменными y, β

$$\frac{1}{y_*} \int_0^y \frac{dy}{l(y)} = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\beta d\beta}{1 - \beta + \frac{b}{m}}, \quad (3.9)$$

где параметр y_* обозначен через основные исходные данные

$$\frac{1}{y_*} = \frac{m\theta\mu}{K_* p_*}, \quad (3.10)$$

а β_0 соответствует давлению газа p_0 на свободной поверхности.

Задача определения коэффициента проницаемости угольного пласта является довольно сложной задачей, поскольку этот коэффициент существенно зависит от структуры пласта, количества сорбированного углем метана, распределения горного давления на угольный пласт [31–39].

В этой статье учтена зависимость коэффициента проницаемости пласта от горного давления, при этом, коэффициент пористости при изменении горного давления не меняется.

Коэффициент проницаемости зависит от величины среднего нормального напряжения, действующего на пласт, и в общем случае представляется в дифференциальной форме, в которую входит функция, определяемая по результатам эксперимента [33, 34].

Ряд авторов считает, что изменение коэффициента проницаемости можно представить аналитическими зависимостями в виде экспоненциальных, степенных или показательных функций, в которые входят экспериментально определяемые коэффициенты [36–38].

В этих зависимостях принято, что коэффициент проницаемости зависит не от величины максимального нормального напряжения, действующего на пласт, а определяется величиной среднего нормального напряжения. При достаточно больших значениях опорного давления на пласт, коэффициент проницаемости, как показывают исследования, стремится к нулю [35–37].

В этой связи в экспоненциальной форме входящий в зависимость (3.8) параметр $l(y)$ представляется в следующем виде

$$l(y) = \frac{K_0}{K_*} \exp \left[\frac{\sigma_c(0) - \sigma_c(y)}{\sigma_c(L_K)} k_\sigma \right], \quad (3.11)$$

где K_0 — коэффициент проницаемости на кромке пласта; σ_c — среднее напряжение в пласте, являющееся функцией координаты y ; $\sigma_c(y)$ — среднее напряжение в произвольном сечении с координатой y ; $\sigma_c(0)$ — среднее напряжение на кромке пласта. L_K — расстояние между кромкой пласта и сечением, в котором коэффициент проницаемости K равен K_* ; $\sigma_c(L_K)$ среднее напряжение в сечении $y = L_K$, k_σ — коэффициент, характеризующий скорость спада коэффициента проницаемости вглубь пласта, подбирается из физических условий задачи.

Среднее нормальное напряжение σ_c , являющееся средним арифметическим нормальных напряжений $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$, действующих на пласт, и в плоской задаче определяется следующим образом [25]

$$\sigma_c = \frac{\sigma_z + \sigma_y + \sigma_x}{3} = \frac{(1 + \nu)(\sigma_z + \sigma_y)}{3},$$

где $\sigma_x = \nu(\sigma_z + \sigma_y)$, а ν — коэффициент Пуассона. В предельно напряженной (пластической) области он принят равным 0.5.

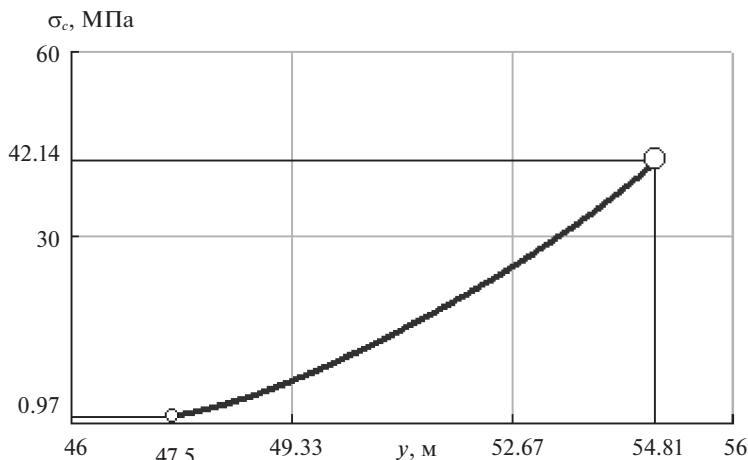


Рис. 6.

На рис. 6 построена эпюра среднего напряжения, действующего вдоль оси пласта в границах его предельно напряженной зоны. На нем показано, что максимальное значение, равное 42.14 МПа, достигается в сечении пласта с максимумом опорного давления ($L_v = 7.31$ м).

Параметр $l(y)$ может быть принят и в форме показательной функции

$$l(y) = \left(\frac{K_0}{K_*} \right)^{1 - \frac{ky}{L_K}}, \quad (3.12)$$

где коэффициент k , как и в случае с экспонентой, подбирается из физических условий задачи.

Выражение (3.12) более простое по сравнению с выражением (3.11), но физически менее обосновано, поскольку в него не входят значения среднего напряжения и, следовательно, размер L_K остается неопределенным. Но более простой вид выражения (3.12) позволяет получить распределение порового давления вглубь пласта в аналитическом виде.

В этой связи после подстановки (3.12) в левую часть (3.9) интеграл берется в замкнутом виде

$$\frac{1}{y_*} \int_0^y \omega^{-\left(1 - \frac{ky}{L_K}\right)} dy = \frac{L_K}{y_* k \ln \omega} \left(\omega^{-\left(1 - \frac{ky}{L_K}\right)} - \omega^{-1} \right), \quad (3.13)$$

где $\omega = K_0/K_*$.

Уравнение (3.9) с учетом (3.13) принимает следующий вид

$$\frac{L_K}{y_* \ln \omega} \left(\omega^{-\left(1 - \frac{ky}{L_K}\right)} - \omega^{-1} \right) = \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\beta d\beta}{1 - \beta + \frac{b}{m}} \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.14) после некоторых преобразований легко получить зависимость между абсциссой y и параметром давления газа β в следующем виде

$$y = \frac{L_K}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{\ln \omega} \ln \left[\frac{\omega L_K}{L_K + \omega J(\beta) y_* k \ln \omega} \right] \right\} \quad (3.15)$$

В выражении (3.15) интеграл в правой части (3.14) обозначен $J(\beta)$.

С помощью выражения (3.11) такой зависимости не получить, поскольку входящие в него значения среднего напряжения представлены численно и получены в ходе решения краевой задачи предельного состояния пласта. В этом случае уравнение (3.9) решается численными методами.

Ниже представлены графические результаты, полученные с помощью приведенных выше формул. В качестве исходной информации приняты следующие данные: $\theta = 13$ м/сут, $m = 0.15$; $K_0 = 3.0$ МД (миллидарси), $\mu = 0.012$ сП (сантипуаз) $= 1.2 \times 10^{-11}$ МПа с; $p_a = 0.1$ МПа.

Принятая скорость движения очистного забоя является средним показателем его скорости при отработке пластов на шахтах Кузбасса. На некоторых шахтах она достигает 20 м/сут.

При выборе данных также учтено, что коэффициент пористости в среднем колеблется в пределах от 0.1 до 0.15 единицы [3, 4, 39], а величины коэффициента проницаемости на выбросоопасных пластах близки к принятому здесь значению [39].

Как показывают результаты исследований, полученные в [32, 35], коэффициент проницаемости угольного пласта при среднем нормальном напряжении, равном 30 МПа, практически равен нулю. В данной задаче этому значению соответствует размер $L_K = 5.84$ м (рис. 6).

Поскольку значений среднего напряжения, соответствующего нулевому коэффициенту проницаемости для широкого спектра угольных пластов нет, то в данной работе принято, что близкий к нулю коэффициент проницаемости K_* составляет 10^{-5} МД и находится в сечении с максимумом опорного давления, поэтому $L_K = L_v = 7.31$ м.

Коэффициенты, входящие в выражения (3.11) и (3.12) для параметра $l(y)$, приняты следующими: $k_\sigma = 22$, $k_\sigma = 9.55$, $k = 1.0$. При таких значениях графики параметра $l(y)$ близки друг к другу.

На рис. 7 показаны три графика распределения давления порового метана вдоль оси y , которые наглядно представляет картину его изменения вглубь пласта. Кривая 1 построена по уравнению (3.15), а 2 и 3 построены по результатам численного решения уравнения (3.9), в котором параметр $l(y)$ задан согласно зависимости (3.11). Более крутая кривая 2 соответствует $k_\sigma = 22.0$, а кривая 3 построена для $k_\sigma = 9.55$. Видно, что кривые 1 и 2, построенные по разным уравнениям, достаточно близки друг к другу.

Из рис. 7 следует, что нарастание давления метана происходит довольно быстро: на расстоянии порядка 2.5 м давление метана становится близким к 6 МПа. На первый взгляд это вызывает сомнение, однако, в некоторых исследованиях рост давления метана, начиная с атмосферного у забоя выработки, до значения, близкого к гидростатическому давлению, происходит на расстоянии всего полутора метров [32].

4. Задача об образовании магистральной трещины, заполненной свободным метаном. Известно, что поровый метан при определенных условиях может привести к росту пор и микротрещин. В механике разрушения развитие микротрещин в твердых деформируемых телах, часто приводящее к его разрушению, описывается теорией Гриффитса — Ирвина [40, 41].

При теоретическом анализе проблемы прочности и распространения трещин в твердых деформируемых и монолитных телах при квазистатических процессах используется уравнение Ирвина [40, 41]

$$k_n^2 + k_t^2 = \frac{E \cdot \Gamma}{1 - \nu^2} = K_{IC}^2, \quad (4.1)$$

где k_n , k_t — коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленные действием нормальной (расклинивающей) p_n и касательной p_t нагрузок на берегах трещины; E — модуль продольной упругости, а ν — коэффициент Пуассона пород массива. Γ — плот-

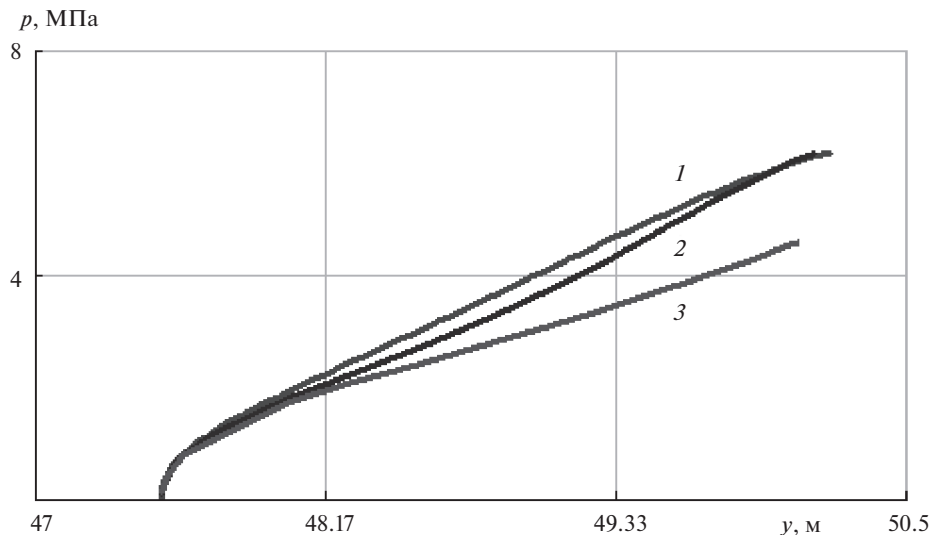


Рис. 7.

ность энергии разрушения материала, необходимой для образования единицы поверхности, K_{IC} — коэффициент трещиностойкости материала.

Из условия (4.1) следует, что трещина растет, если суммарные коэффициенты интенсивности напряжений в ней превышают значение коэффициента трещиностойкости для данного материала. Т.е. для развития трещины ей необходимо преодолеть силы сцепления материала, величина которых определяется эффективной плотностью энергии разрушения.

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений существует несколько методов и подходов. Например, если трещина мала по сравнению с размерами тела и располагается внутри него, то нагрузки p_n , p_t равны нормальным и касательным напряжениям на плоскости трещины в том случае, если бы она была закрыта; следовательно, напряжения находятся аналитически или численно для тела без трещины.

Такой подход к развитию трещины использован в расчете параметров плоской трещины гидроразрыва, развивающейся в окрестности пластовой выработки [20]. В этой работе приведено значение критической силы p_{kp} , при которой иницирующая (“зародышевая”) трещина “страгивается” и начинает расти

$$p_{kp} = p_n + \sqrt{\frac{E\Gamma}{\pi a(1-\nu^2)} - p_t^2}, \quad (4.2)$$

где a — начальная полуудлина трещины.

Если сцепление между берегами трещины отсутствует, то $\Gamma = 0$, и касательная нагрузка p_t также равна нулю. Поэтому выражение (4.2) принимает вид [38]

$$p_{kp} = p_n \quad (4.3)$$

Из решения задачи о напряженном состоянии угольного пласта следует, его крайняя зона находится в предельно напряженном состоянии, т.е. испытывает необратимые деформации. Как отмечено выше, эта зона покрыта сеткой двух систем линий скольжения, по которым реализуется предельное состояние пласта. В отличие от иде-

ально пластической среды угольный пласт обладает хрупкими свойствами и вдоль линий скольжения могут возникать трещины.

При наличии кливажных трещин, наклоненных к вертикали под определенными углами, предельно напряженное состояние пласта реализуется и по ним.

Особенностью и линий скольжения, и кливажных трещин, расположенных в предельно напряженной зоне, является отсутствие на них сцепления. В этой связи коэффициент интенсивности напряжений трещины равен нулю. Поэтому условием раскрытия таких трещин, на берегах которых затем скапливается свободный метан, может быть принято условие, аналогичное условию (4.3)

$$p_* \geq \sigma_n, \quad (4.4)$$

где p_* – поровое давление метана, σ_n – нормальное к поверхности трещины напряжение в пласте.

При появлении в предельно напряженной зоне пласта трещин, совпадающих с линиями скольжения, напряжение σ_n на их берегах определяется по известной формуле теории напряженного состояния в точке [25]

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \varepsilon + \sigma_3 \cos^2 \varepsilon, \quad (4.5)$$

где ε – угол между главным напряжением σ_1 и линией скольжения, определяемый по формуле [6, 22, 28]

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \quad (4.6)$$

Напряжение σ_n на берегах кливажной трещины также определяется по формуле, аналогичной формуле (4.5), с заменой угла ε на угол ξ между направлением σ_1 и трещиной

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \xi + \sigma_3 \cos^2 \xi \quad (4.7)$$

Нормальные напряжения на оси пласта (оси y) являются главными напряжениями, при этом, главное напряжение σ_1 направлено вертикально, а главное напряжение σ_3 – горизонтально. В этом случае $\xi = \psi$, а выражение (4.7) принимает вид

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \psi + \sigma_3 \cos^2 \psi \quad (4.8)$$

Таким образом, на оси пласта, если сравнить формулы (4.5) и (4.8), следует, что при угле $\psi < \varepsilon$, величина σ_n , вычисленная по формуле (4.5), принимает большее значение, чем по формуле (4.8). Следовательно, при наличии в угольном пласте кливажных трещин с углом наклона к вертикали меньшим, чем угол ε раскрытие трещин поровым метаном происходит не вдоль линий скольжения, а по кливажу, поскольку в этом случае при одном и том же значении p_* условие (4.4) выполняется вперед.

На контакте пласта с массивом напряжение σ_n на берегах кливажной трещины может быть найдено либо по формуле

$$\sigma_n = \sigma_z \sin^2 \psi + \sigma_y \cos^2 \psi + \tau_{yz} \sin 2\psi, \quad (4.9)$$

где компоненты напряжений σ_z , σ_y , τ_{yz} , которые находятся из решения задачи о предельно напряженном состоянии пласта (эпюры σ_z и τ_{yz} приведены на рис. 2), либо по формуле

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \psi - \varphi \right) + \sigma_3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \psi - \varphi \right),$$

где φ – угол наклона напряжения σ_1 к горизонтальной оси y (рис. 1).

Таким образом, если угол наклона кливажной трещины к вертикали мал (близок к нулю), то на основании зависимостей (4.2) и (4.3) раскрытие кливажной трещины поровым метаном с переходом ее в магистральную трещину может произойти быстрее,

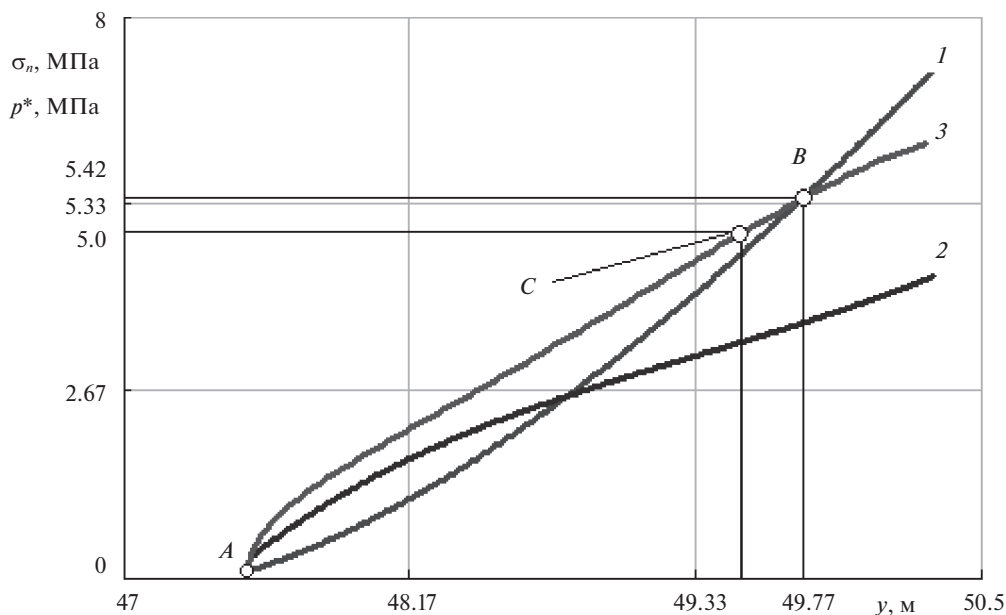


Рис. 8.

чем раскрытие и развитие вертикально ориентированных микротрещин микропор до уровня магистральной трещины.

В работе [42] приведены примеры с результатами расчетов, где показано, что лишь при достаточно крутом расположении кливажных трещин, когда они отклонены от вертикали на небольшой угол и ориентированы практически параллельно забою выработки, возможно раскрытие поровым метаном кливажных трещин и скопление в них свободного метана.

На рис. 8 представлены графики зависимости нормальных напряжений σ_n на берегах кливажных трещин. Кривая 1, построенная по формуле (4.8), показывает распределение напряжений вдоль оси пласта, а кривая 2 построена по формуле (4.9) и демонстрирует изменение напряжений σ_n вдоль кровли пласта. Угол ψ принят равным 12° . Следует отметить, что при угле внутреннего трения $\rho = 20^\circ$, угол ϵ равен 35° , т.е. линии скольжения наклонены к вертикали на больший угол, чем кливажные трещины. Кривая 3 — график распределения давления порового метана вглубь пласта (на рис. 7 обозначена цифрой 1).

Из рисунка следует, что на участке пласта между точкой A, находящейся на его кромке, и точкой B, расположенной на пересечении кривых 1 и 3, величина порового давления метана превышает значения напряжений на берегах кливажной трещины, как на оси пласта, так и на контакте его с массивом. Ордината точки B равна 5.42 МПа, а абсцисса составляет 49.77 м, при этом расстояние от кромки пласта до точки на оси пласта L_u равно 2.27 м (49.77–47.5). Это расстояние является шириной краевой части пласта (размером блока, перемычкой), отсчитываемой вдоль его оси между кромкой и магистральной трещиной.

Следовательно, в соответствии с условием (4.4) на участке AB кливажные трещины могут становиться магистральными трещинами, пересекающими всю толщу пласта, и заполняться свободным метаном под давлением p_0 при условии ширины блока L_u , меньшей 2.27 м.

Таким образом, зная характер распределения напряжений в краевой части пласта и порового метана в нем, нетрудно определить размер его краевой части, в которой возможно образование магистральных трещин, заполненных свободным метаном.

Следующим этапом в исследовании газодинамических процессов в краевой части пласта является проверка условий формирования волны дробления.

5. Задача С.А. Христиановича о волне дробления и ее применение в газодинамической оценке краевой зоны угольного пласта. Как указывает акад. С.А. Христианович: "...при медленном вытекании газа из угля не могут возникнуть силы перепада давления, достаточные для разрушения угля. При движении газа только тогда могут возникнуть силы, способные разрушить уголь, когда у свободной поверхности угля в очень тонком слое образуется и поддерживается большой перепад давления. Это возможно лишь в том случае, когда свободная поверхность угля будет быстро перемещаться. Тонкий слой у свободной поверхности угля, быстро перемещающийся вглубь угля, в котором вследствие его быстрого движения все время поддерживается большой перепад давления, разрушающий этот слой угля, можно назвать *волной дробления*" [1].

Следовательно, для формирования волны дробления необходимо наличие свободной поверхности, в роли которых могут выступать магистральные трещины. Зависимость (4.4), в соответствии с которой образуются магистральные трещины, является необходимым условием, но недостаточным. Если магистральная трещина образуется в результате медленного раскрытия кливажной трещины, или линии скольжения, либо поровых трещин, расположенных по другим направлениям, то резкого перепада между давлениями порового и свободного метана не происходит, поэтому условий для образования волны дробления не будет. При быстром процессе формирования магистральной трещины перепад между этими давлениями может оказаться достаточным для инициирования волны дробления.

Хорошо известно, что при внезапном разрушении угля без дробления в результате десорбции из угля мгновенно выделяется 10% метана, сорбированного в угле [1, 2, 18]. В этой связи здесь также принято условие, что процесс раскрытия метаном кливажных трещин протекает быстро, поэтому можно считать, что при образовании магистральных трещин также выделяется 10% сорбированного метана, и это обстоятельство приводит к резкому падению давления метана на свободной поверхности магистральной трещины.

Таким образом, в момент образования магистральной трещины давление свободного метана в ней меньше порового давления в пласте в непосредственной близости к трещине. Это давление определяется по сорбционной изотерме, представленной на рис. 4.

Таким образом, процесс дробления угля относится к категории быстропротекающих процессов, а для его описания необходимо использовать основные соотношения фундаментальных законов сохранения количества движения и сохранения энергии применительно к условиям протекания адиабатического процесса. Основные зависимости, описывающие процесс дробления угольного пласта, а также условия его возникновения, подробно изложены в трудах акад. С.А. Христиановича [1, 2].

В представляемой работе приведены лишь основные зависимости, необходимые для количественных оценок газодинамических проявлений в угольном пласте путем образования и прохождения по нему волны дробления.

Скорость распространения волны дробления θ_{dr} находится по формуле

$$\theta_{dr} = a_* \sqrt{\frac{\kappa+1}{2\kappa}} \frac{1+v_*}{\sqrt{\frac{\rho_{y*}}{\rho_*} + v_*}} \sqrt{\frac{b_1}{v_* + \frac{b_1}{1 - \frac{p_0}{p_*}}}} \sqrt{\frac{p_0}{p_*} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \quad (5.1)$$

В зависимости (5.1) κ — показатель адиабаты Пуассона (для метана он равен 1.3), a_* — скорость звука в метане, которая вычисляется по следующей формуле

$$a_* = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}, \quad (5.2)$$

где p — давление, а ρ и плотность метана, T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, ρ_* — плотность метана при давлении p_* связана с ним известной формулой

$$\rho_* = \frac{p_*}{RT}, \quad (5.3)$$

а параметр v_* определяется следующей зависимостью

$$v_* = \frac{m}{1 - m} \quad (5.4)$$

В зависимости (5.1) параметр b_1 в два раза больше параметра b , определяемого по графику на рис. 5, поскольку при быстром дроблении угля на мелкие куски из пласта выделяется 20% газа, т.е. в два раза больше, чем при разрушении угля без его дробления.

Отрыв угля при прохождении волны дробления в зависимости от соотношения p_0 и p_{kp} может происходить при следующих двух условиях: $p_0 > p_{kp}$, $p_0 < p_{kp}$ (p_0 — давление метана на свободной поверхности, а p_{kp} его критическое давление).

Критическое давление метана определяется следующей зависимостью

$$p_{kp} = \left(1 + \frac{b}{m}\right) \frac{\tau_{kp}}{1 + \sqrt{\frac{2}{\kappa(\kappa+1)}} \frac{a_*}{\theta_{dr}}} p_*, \quad (5.5)$$

где параметр τ_{kp} определяется следующим образом

$$\tau_{kp} = \frac{2}{\kappa+1} \left(1 + \frac{\kappa-1}{1 + \frac{\theta_{dr}}{a_*} \sqrt{\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}}} \right)^{-1} \quad (5.6)$$

Согласно первому условию ($p_0 > p_{kp}$) дробление угля происходит, если растягивающее напряжение в тонком слое, примыкающем к свободной поверхности, превысит предел прочности угля на растяжение σ_p (эта величина, как уже отмечено выше [29], составляет $0.1 \sigma_0$).

Это условие представляется в следующем виде

$$\sigma = p_* m \left[1 - \frac{p_0}{p_*} - \kappa \left(\frac{\theta_{dr}}{a_*} \right)^2 \tau \frac{p_*}{p_0} \left(1 + \frac{b}{m} \right) \left(1 + \frac{b}{m} - \frac{1}{\tau} \frac{p_0}{p_*} \right) \right] \geq \sigma_p \quad (5.7)$$

Входящий в формулу (5.7) параметр τ определяется следующим образом

$$\tau = \frac{T}{T_*} = \left(1 - \frac{1}{2} \kappa (\kappa - 1) \alpha^2 \right) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{1 + \frac{1}{\alpha} \frac{\theta_{dr}}{a_*}} \right)^{-1}, \quad (5.8)$$

а параметр α определяется согласно следующей зависимости

$$\alpha = \frac{\theta_{dr}}{a_*} \left[\left(1 + \frac{b}{m} \right) \tau \frac{p_*}{p_0} - 1 \right] \quad (5.9)$$

Параметры α и τ взаимно зависят друг от друга и определяются путем совместного решения уравнений (5.8) и (5.9).

По второму условию ($p_0 < p_{kp}$) дробление угля также происходит отрывом, которое представляется в следующем виде

$$\sigma = p_* m \left[1 - \frac{p_0}{p_*} - \frac{\kappa}{\tau_{kp}} \frac{a_{kp} \theta_{dr}}{a_*^2} \frac{p_{kp}}{p_*} \left(1 + \frac{a_{kp}}{\theta_{dr}} \right) \right] \geq \sigma_p,$$

где параметр a_{kp} является критической скоростью звука в метане и вычисляется по формуле

$$a_{kp} = \sqrt{\frac{2}{\kappa(\kappa+1)}} a_*$$

Представленные выше зависимости полностью определяют условия возникновения и распространения волны дробления. Входящие в них параметры определяются из ранее полученных результатов решения задач о напряженном состоянии массива, а также задач о распределении порового давления метана вглубь пласта и условия образования магистральных трещин.

Ниже приведены результаты расчетов волны дробления. В качестве дополнительной к уже имеющейся информации приняты следующие исходные данные: $R = 520$ Дж/(кг К), $T = 293$ К, $\kappa = 1.3$, $\sigma_p = 0.1$, $\sigma_{0s} = 0.195$ МПа.

В этом примере поровое давление метана $p_* = 5.42$ МПа (см. точку B кривой на рис. 8), параметр b для кривой на рис. 5 равен 7.77×10^{-2} , при этом, $p_0 = 3.68$ МПа. По приведенным выше формулам последовательно вычисляются все параметры: по формуле (5.2) вычисляется плотность ρ_*

$$a_* = \sqrt{\kappa R T} = 445 \text{ м/с},$$

по формуле (5.3) вычисляется плотность ρ_*

$$\rho_* = \frac{p_*}{R T} = 34.46 \text{ кг/м}^3,$$

по формуле (5.4) вычисляется параметр v_*

$$v_* = \frac{m}{1-m} = 0.176,$$

по формуле (5.1) вычисляется скорость волны дробления

$$\frac{\theta_{dr}}{a_*} = 0.198, \quad \theta_{dr} = 0.201 a_* = 88.17 \text{ м/с},$$

Из совместного решения уравнений (5.8) и (5.9) определяются параметры α и τ : $\alpha = 0.186$; $\tau = 0.867$.

Из формулы (5.8) вычисляется значение температуры

$$T = 0.867, \quad T_* = 254.1 \text{ К}$$

По формуле (5.6) определяется $\tau_{kp} = 0.7$, а по формуле (5.5) находится $p_{kp} = 1.125$ МПа. Так как значение $p_0 = 3.68 > p_k = 1.125$, то условие образования волны дробления проверяется по формуле (5.7): $\sigma = 0.201$ МПа. Полученное значение σ оказалось больше величины $\sigma_{0s} = 0.195$ МПа, поэтому условие разрушения угольного слоя отрывом выполняется. Таким образом, прохождение волны дробления в непрочном прослойке возможно.

Если магистральная трещина образовалась в сечении C с координатой 49.56 м ($L_u = 2.06$ м) (рис. 8), то ему соответствует поровое давление $p_* = 5.0$ МПа, при этом, давление свободного метана составляет $p_0 = 3.5$ МПа. При таких условиях напряжение отрыва получается равным 0.179 МПа и для формирования волны дробления этого недостаточно, поскольку $\sigma_p = 0.195$ МПа и, следовательно, условие (5.7) не выполняется.

В этом случае необходимо проверить условие равновесия части пласта (блока, перемины) от края до магистральной трещины, и если окажется, что сила, обусловленная давлением свободного метана, превысит реактивные силы, действующие по контакту блока с массивом, то, этот блок будет выброшен в выработку, минуя этап дробления прослойка.

6. Постановка и решение задачи о выдавливании в выработку части пласта (перемины) свободным метаном магистральной трещины. Как отмечалось выше, на участке AB (рис. 8) может быть одновременно образовано несколько магистральных трещин. В этом разделе рассматривается возможность выброса угольной перемины при возникновении одной магистральной трещины. Очевидно, что если выброс возможен при возникновении лишь одной магистральной трещины, то при одновременном возникновении нескольких таких трещин он тем более произойдет.

Расчетная схема задачи о выдавливании (выбросе) в выработку краевой части пласта (без предварительного дробления) давлением метана в магистральной трещине, образующейся в произвольном месте на участке AB (рис. 8), показана на рис. 9. На ней цифрами обозначают следующие параметры: 1 – выработка, 2 – выдавливаемая часть пласта, 3 – магистральная трещина в момент раскрытия, 4 – угольный пласт, 5 – полость со свободным метаном, 6 – движущаяся поверхность трещины. $L_{u,b}$ – длина верхней части контакта пласта с массивом, $L_{u,n}$ – длина нижней ее части. T_b и T_n – реактивные усилия, действующие по верхнему и нижнему контактам части пласта с массивом, p_0 – давления свободного метана. Сила P_0 – результирующая сила, создаваемая давлением метана.

Реактивные усилия на верхнем и нижнем контактах пласта, а также их суммарная величина определяются по следующим зависимостям

$$T_{p,b} = \int_{y_1}^{y_b} \tau_{yz}(y) dy, \quad T_{p,n} = \int_{y_1}^{y_n} \tau_{yz}(y) dy, \quad T = T_b + T_n = 2 \int_{y_1}^{y_c} \tau_{yz}(y) dy, \quad (6.1)$$

где τ_{yz} – касательные напряжения по контактам пласта с массивом, определяемые из решения краевых задач предельного состояния пласта (эпюра показана на рис. 2), а пределы интегрирования определяются следующими зависимостями

$$y_1 = \frac{a_k}{2} + a_v, \quad y_b = \frac{a_k}{2} + a_v + L_{u,b}, \quad y_n = \frac{a_k}{2} + a_v + L_{u,n}, \quad y_c = \frac{a_k}{2} + a_v + L_u$$

Сила P_0 определяется следующим образом

$$P_0 = (p_0 - p_a) h,$$

где p_a – атмосферное давление.

Условием равновесия рассматриваемой части пласта является равенство сил активной силы P_0 и суммарного реактивного усилия T

$$T - P_0 = 0 \quad (6.2)$$

Превышение реактивной нагрузки T над внешней по отношению к блоку силой P_0 обеспечивает равновесие части пласта и равенство (6.2) является предельным состоянием равновесия.


$$M\ddot{u} = P_0 - T, \quad (6.3)$$
$$M = \rho_v L_u h$$

На рис. 10 показаны графики распределения вглубь пласта порового давления метана p_* (кривая 1) и свободного метана p_0 (кривая 2). Кривая 1 приведена на рис. 8, где обозначена цифрой 3.

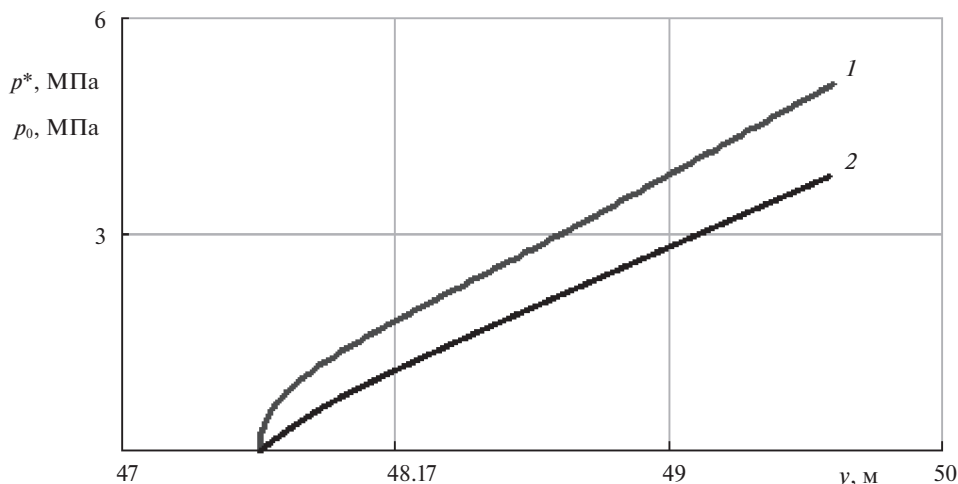


Рис. 10.

С учетом сделанных уточнений о переменности действующих на блок усилий дифференциальное уравнение (6.3) принимает следующий вид

$$\rho_y L_u h \ddot{u} = [p_0(u) - p_{aT}] h - 2 \int_{y_1}^{y_2 - u} \tau_{yz}(y) dy, \quad (6.4)$$

и оно должно удовлетворять следующим однородным начальным условиям:

$$t = 0: \quad 1. u = u(0) = u_0 = 0, \quad 2. w(0) = w_0 = 0$$

Уравнение (6.4) нелинейное и решается методом конечных разностей (МКР) [43].

Для произвольной точки i окончательные конечно-разностные соотношения перемещения u и скорости w представляются в следующем виде

$$u_{i+1} = \left[\frac{p(u_i) - p_a}{\rho_y L_u} - \frac{2}{\rho_y L_u h} \int_{y_1}^{y_2 - u_i} \tau_{yz}(y) dy \right] \Delta t^2 + 2u_i - u_{i-1} \quad (6.5)$$

$$\dot{u}_i = w_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$$

Ниже представлены результаты расчета выброса в выработку угольного блока, выполненные согласно алгоритму (6.5), при давлении свободного метана $p_0 = 3.5$ МПа в магистральной трещине, сформированной в сечении C , отстоящей от забоя выработки на расстоянии $L_u = 2.06$ м. Ранее было показано, что параметры давления в этой трещине не создают волну дробления.

На рис. 11 приведена зависимость перемещения блока пласта от времени, а на рис. 12 — изменение его скорости с течением времени.

Как следует из рисунков, процесс выдавливания блока оказывается достаточно скоротечным, проходящим всего за 0.074 секунды, а на конечных этапах его скорость достигает значительной величины порядка 50 м/с.

Сравнительный анализ полученных результатов и результатов расчета параметров волны дробления показывает, что при внезапном образовании магистральной трещины в сечении B (рис. 8) вполне возможно одновременное протекание двух процессов:

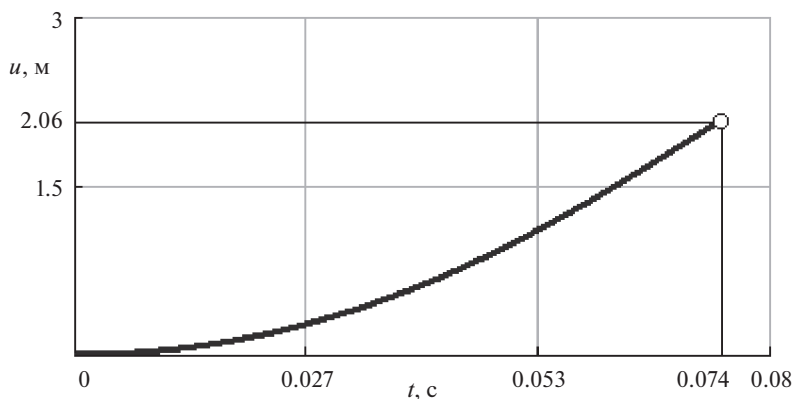


Рис. 11.

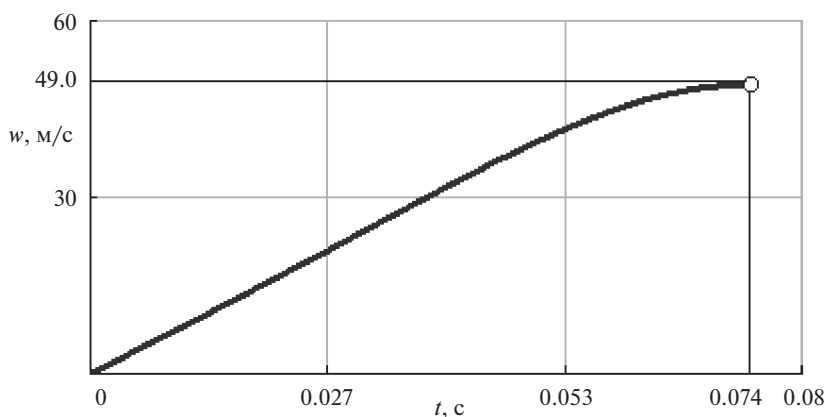


Рис. 12.

процесса дробления, распространяющегося вглубь пласта, и процесса выброса метаном угольного блока между трещиной и выработкой.

Таким образом, если на некотором участке пласта поровое давление метана превысит величину нормального к направлению кливажа напряжения, то выброс произойдет даже при появлении на этом участке всего лишь одной магистральной трещины.

7. Постановка и решение задачи о выдавливании угольной перемычки с последующим выбросом смеси раздробленного угля и метана. В этом разделе без вывода приводятся основные зависимости, характеризующие процесс выброса угля и метана, а также ударной воздушной волны в выработанном пространстве, полученные акад. С.А. Христиановичем [2].

Выброс во всех точках в плоскости поперечного сечения пласта происходит одинаково, частицы угля и газа в метанугольной смеси имеют одинаковую скорость w .

Приняты следующие обозначения основных параметров смеси [2]: n — доля объема угля в единице объема смеси, p — давление в изменяющемся объеме смеси; w — скорость частиц в смеси, ρ и ρ_y — плотности свободного газа и угля в смеси при давлении

нии p . κ — показатель адиабаты метана. T'' — начальная температура десорбции метана, она близка к начальной температуре угля, b — как и раньше, отношение количества газа, выделившегося из единицы объема угля при изменении давления от p_0 до p , к плотности свободного газа при давлении p_0 и температуре T_0 (b — находится по графику на рис. 5), а отношение $p/p_0 = \beta$; ρ_0 и ρ_{y0} — плотности свободного газа и угля в начальном состоянии при p_0 и T_0 , v — отношение объема газа к объему угля в единице смеси. Эта величина связана с параметром n зависимостью

$$v = \frac{1-n}{n} \quad (7.1)$$

Уравнение скорости частиц в смеси выражается следующей зависимостью

$$w = -\frac{a_0}{\kappa} \left(\frac{\rho_{y0}}{\rho_0} + v_0 \right)^{-1/2} \int_1^\beta \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\beta^{-1/\kappa} \left[v_0 - \frac{T''}{\kappa T_0} \int_1^\beta \beta^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} d\beta \right] - \frac{T''}{T_0} \frac{db}{d\beta} \right] d\beta, \quad (7.2)$$

где параметр v_0 и скорость звука в метане a_0 определяются при давлении p_0 , T_0 .

В частном случае, когда десорбцией метана можно пренебречь ($b \rightarrow 0$), уравнения (7.2) упрощаются и после интегрирования принимает следующий вид

$$w = \frac{2a_0}{(\kappa-1)} \sqrt{v_0} \left(\frac{\rho_{y0}}{\rho_0} + v_0 \right)^{-1/2} \left(1 - \beta^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right) \quad (7.3)$$

Выброс смеси угля и газа в выработанное пространство порождает ударную воздушную волну, распространяющуюся впереди волны выброса и питающуюся за счет волны понижения давления в первоначально неподвижной смеси сжатого угля и газа в ограниченном объеме приконтурной части пласта с раздробленным углем.

Уравнения ударной воздушной волны известны, и они получены из основных уравнений газовой динамики [44]

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\kappa_1 + 1)p_1 - (\kappa_1 - 1)p_2}{(\kappa_1 + 1)p_2 - (\kappa_1 - 1)p_1} \quad (7.4)$$

$$\theta_y = \sqrt{\frac{\rho_1 p_1 - p_2}{\rho_2 p_1 - p_2}}, \quad (7.5)$$

где κ_1 — показатель адиабаты для воздуха, а $w_1 = \theta_y(1 - \rho_1/\rho_2)$.

В выражениях (7.4), (7.5) p_1 — давление на фронте воздушной волны, распространяющейся со скоростью θ_y , p_2 — давление перед фронтом ударной волны, оно равно атмосферному давлению p_a , w_1 — скорость частиц воздуха на фронте воздушной волны, ρ_1 — плотность углеметановой смеси, ρ_2 — плотность воздуха при атмосферном давлении.

Из этих уравнений w_1 и θ_y представляются через отношение p_1/p_2

$$\theta_y = a_2 \sqrt{\frac{\kappa_1 + 1}{2\kappa_1}} \sqrt{\frac{p_1}{p_2} + \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1}} \quad (7.6)$$

$$w_1 = 2a_2 \sqrt{\frac{\kappa_1 + 1}{2\kappa_1}} \sqrt{\frac{p_1}{p_a} + \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1}} \frac{\frac{p_1}{p_a} - 1}{(\kappa_1 + 1) \frac{p_1}{p_a} + \kappa_1 - 1}, \quad (7.7)$$

где a_2 — скорость звука в воздухе.

На границе волны выброса и воздушной волны величины давления углеметановой смеси и воздуха должны быть равными ($p = p_1$). Кроме того, на этой границе должны

быть также равны скорости движения частиц углеметановой смеси и скорости частиц воздуха ($w = w_1$). В этой связи выражение (7.7) может быть представлено в следующем виде

$$w_1 = 2a_2 \sqrt{\frac{\kappa_1 + 1}{2\kappa_1}} \sqrt{\beta c_1 + \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \frac{\beta c_1 - 1}{(\kappa_1 + 1)\beta c_1 + \kappa_1 - 1}}, \quad (7.8)$$

где $c_1 = p_0/p_a$.

Приравнивание значения скорости, представленной уравнением в форме (7.2) или в форме (7.3), к скорости, соответствующей уравнению (7.7), позволяет найти неизвестный параметр β .

Ниже приведены результаты расчетов параметров волны выброса, состоящей из смеси угля и метана, а также параметров воздушной волны. В качестве дополнительной информации приняты следующие исходные данные, часть из которых взята из результатов расчета волны дробления: $p_* = 5.42$ МПа; $p_0 = 3.68$ МПа; $T_0 = 254.1$ К; $b = 7.77 \times 10^{-2}$; $\kappa_1 = 1.42$; плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_2 = 1.204$ кг/м³; плотность метана при нормальных условиях $\rho = 0.668$ кг/м³; $T = 293$ К; скорость звука в воздухе при нормальных условиях $a_2 = a = 340$ м/с.

По приведенным выше формулам последовательно вычисляются следующие параметры

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = 27.88 \text{ кг/м}^3$$

$$a_0 = \sqrt{\kappa \cdot RT} = 417.7 \text{ м/с}$$

$$\rho_{y0} = \rho_{y*} - \rho_* b = 1.347 \text{ т/м}^3$$

Далее определяется объем смеси, вмещающий 1 м³ угля и объем метана, выделившийся из этого кубометра угля

$$c_0 = \rho_{y0} q(p_0) + 1 = 46.06$$

Вычисляется доля объема угля на единицу объема смеси

$$n_0 = \frac{1}{c_0} = 0.0217$$

По формуле (7.1) вычисляется параметр, определяющий долю объема газа к объему угля в единице смеси

$$v_0 = \frac{1 - n_0}{n_0} = 45.06$$

Поскольку процесс выдавливания перемычки не является мгновенным, то давление p_0 свободного метана необходимо время, чтобы преодолеть силы сопротивления и поэтому к моменту выброса оно падает до некоторой величины p_{00} , которое следует определить, перед тем как устанавливать параметры воздушной ударной волны. В этой связи параметр β , входящий в выражение (7.3), также изменяется в ходе движения перемычки.

В этом примере за время перемещения перемычки до полного выброса в выработку ее скорость совпадает со скоростью частиц в расширяющейся углеметановой смеси. Поэтому для решения задачи следует воспользоваться разработанным ранее алгоритмом перемещения перемычки. Однако в нем давление в расширяющемся объеме смеси зависит не от перемещения блока, а от его скорости.

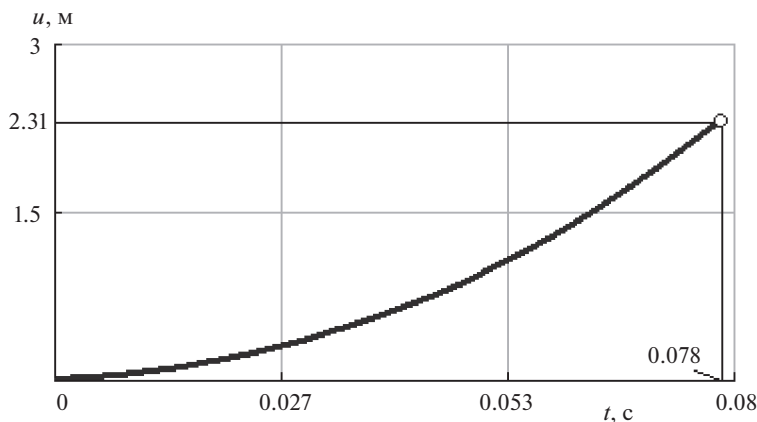


Рис. 13.

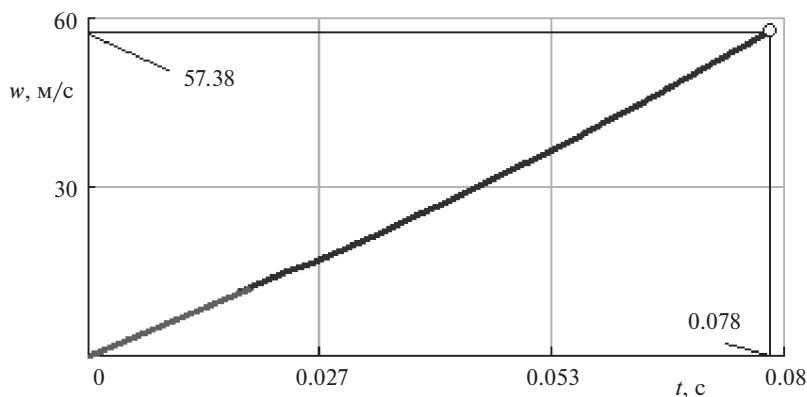


Рис. 14.

Алгоритм численного решения задачи о движении блока (6.4) может быть использован и в задаче о выбросе смеси из раздробленного угля и метана с той лишь разницей, что в новом алгоритме надо использовать обратную выражению (7.3) зависимость между относительным давлением метана β и скоростью его частиц w .

$$\beta = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2a_0 v_0^{1/2}} w \sqrt{\frac{\rho_{y0}}{\rho_0} + v_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \quad (7.9)$$

С учетом выражения (7.9) алгоритм вычисления перемещения перемычки (6.5) в этом случае принимает следующий вид (алгоритм вычисления скорости перемычки остается прежним)

$$u_{i+1} = \left[\frac{p_0 \beta(w_{i-1}) - p_a}{\rho_y L_u} - \frac{2}{\rho_y L_u h} \int_{y_1}^{y_2 - u_i} \tau_{yz}(y) dy \right] \Delta t^2 + 2u_i - u_{i-1} \quad (7.10)$$

На рис. 13, 14 построены зависимости перемещения по алгоритму (7.10) и скорости движения перемычки согласно алгоритму (6.4) от времен. Из сравнения рис. 11 и 12

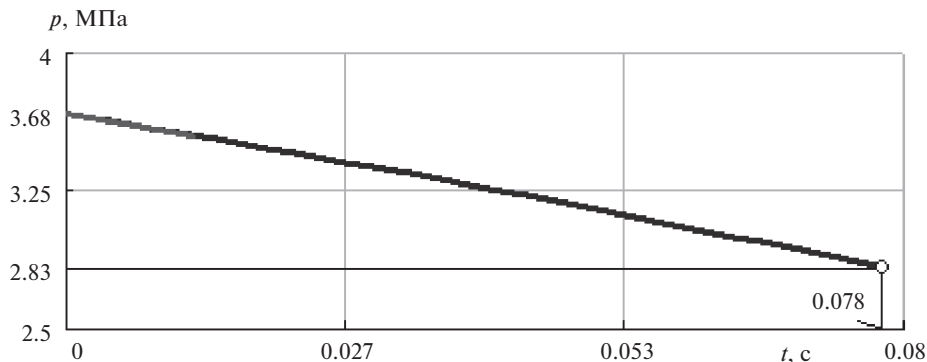


Рис. 15.

следует, время движения перемычки с большей шириной до ее выброса в выработку немного выше, а скорость на конечной стадии выше, чем при выбросе без дробления угля.

На рис. 15 показано изменение давления в смеси раздробленного угля и метана, который также построен с помощью алгоритмов (7.10), (6.5). Из рисунка видно, что в момент выноса перемычки давление смеси p_{00} равно 2.83 МПа, а параметр $\beta = \beta_1 = 0.769$.

С учетом изменения давления метана параметры c_0 , n_0 , v_0 останутся прежними, а его плотность в момент выброса станет равной:

$$\rho_{00} = \frac{p_{00}}{RT_0} = 21.45 \text{ кг/м}^3$$

После этого определяется параметр $\beta = \beta_0$, при котором скорость смеси, определяемой по формуле (7.3) будет равна скорости воздуха, которая находится по формуле (7.8). В ней c_1 принимает значение $p_{00}/p_a = 28.3$.

$$\frac{2a_0v_0^{1/2}}{\kappa - 1} \left(1 - \beta_0^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \right) \left(\frac{p_{y0}}{\rho_0} + v_0 \right)^{-1/2} = 2a_2 \sqrt{\frac{\kappa_1 + 1}{2\kappa_1}} \sqrt{\beta_0 c_1 + \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \frac{\beta_0 c_1 - 1}{(\kappa_1 + 1)\beta_0 c_1 + \kappa_1 - 1}} \quad (7.11)$$

В результате численного решения уравнения (7.11) параметр β_0 получился равным 0.136.

Далее вычисляется значение давления в воздушной волне: $p_1 = p_{00} \cdot \beta_0 = 2.83 \cdot 0.136 = 0.385$ МПа. После этого по формуле (7.6) вычисляется скорость ударной волны

$$\theta_y = 629.6 \text{ м/с},$$

а по формуле (7.7) скорость воздушной волны и волны выброса

$$w_1 = 368.6 \text{ м/с}$$

Полученные значения скоростей ударной и воздушной волн в момент выдавливания перемычки с последующим выбросом смеси в выработку огромны. Скорость воздушной волны превышает скорость звука. Выброс смеси с такими параметрами наверняка приведет к значительным разрушениям горного оборудования, травмам рабочих и создаст аварийную обстановку на участке ведения горных работ.

Из приведенных выше результатов ясно, что процесс одновременного дробления и выброса перемычки относится к более редким газодинамическим явлениям, чем вы-

брос перемычки без дробления. В первом случае он получился возможным только при внезапном образовании магистральной трещины и лишь в небольшой окрестности сечения *B* (на рис. 8), а во втором случае выброс может произойти в любом месте на всем участке *AB*, где сформировалась магистральная трещина, причем, не обязательно внезапно.

Закключение. 1. В основе разработанного подхода к решению задачи о выбросе угля и газа в выработку лежат фундаментальные разработки С.А. Христиановича о газодинамических процессах в угольном пласте, а также модель геомеханического состояния углепородного анизотропного по прочности углепородного массива в окрестности пластовой выработки. В этом подходе показана связь поля напряжений в краевой предельно напряженной зоне угольного пласта и распределение давления порового метана в нем. Сформулированы условия, при которых проявляются газодинамические явления путем формирования раскрытых магистральных трещин, пересекающих всю толщу пласта.

2. Условиями образования магистральных трещин, на которых скапливается под давлением свободный метан, является превышение порового давления метана над величиной нормальных к линиям скольжения и берегам кливажных трещин напряжений.

3. Образование магистральных трещин инициирует дальнейшие газодинамические процессы в краевой части угольного пласта, которые происходят либо путем простого выброса (выдавливания) части угольного пласта (перемычки) между трещиной (трещинами) и забоем выработки, либо за счет возникновения и распространения сначала волны дробления, а затем и волны выброса образовавшейся смеси газа и раздробленного угля.

4. Процесс выброса перемычки и прохождения по пласту волны дробления прослойка представляется комбинированным процессом, который включает в себя два этапа, происходящих параллельно: дробление непрочного прослойка и выдавливание перемычки, примыкающей к забою выработки. Он приводит к более значительным последствиям, но встречается редко, поскольку возможен лишь при определенном и достаточно ограниченном числе соотношений между горно-геологическими характеристиками среды и горнотехническими условиями отработки месторождения.

5. Представленный подход позволяет выполнять расчеты газо-геомеханического состояния краевой части угольного пласта, производить прогноз газодинамических явлений и составлять рекомендации, обеспечивающие безопасные условия труда при отработке газоносных угольных пластов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Христианович С.А. О волне дробления // Изв. АН СССР. ОНТ. 1953. № 12. С. 1689–1699.
2. Христианович С.А. О волне выброса // Изв. АН СССР. ОНТ. 1953. № 12. С. 1679–1688.
3. Ходот В.В. Внезапные выбросы угля и газа. М.: ГосНГИ, 1961. 363 с.
4. Чернов О.И., Пузырев В.Н. Прогноз внезапных выбросов угля и газа. М.: Недра, 1979. 296 с.
5. Петухов И.М., Линьков А.М. Механика горных ударов и выбросов. М.: Недра, 1983. 280 с.
6. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок. М.: Недра, 1976. 272 с.
7. Зыков В.С. О механизме формирования выбросоопасной ситуации в очистном забое угольной шахты // Маркшейд. Вестн. 2016. № 5 (114). С. 44–48.
8. Shadrin A., Diyuk Y. Geophysical criterion of pre-outburst coal outskueezing from the face space into the working // Int. J. Mining Sci.&Technol. 2019. V. 29. Iss. 3. P. 499–506.
9. Yang D., Chen Y., Tang J. et al. Experimental research into the relationship between initial gas release and coal-gas outbursts // J. Natural Gas Sci.&Engng. 2018. V. 50. P. 157–165.
10. Guo H., Yuan L. An integrated approach to study of strata behaviour and gas flow dynamics and its application // Int. J. Coal Sci.& Technol. 2015. № 2. P. 12–21.

11. Zhao B., Wen G., Sun H. et al. Similarity criteria and coal-like material in coal and gas outburst physical simulation // Int. J. Coal Sci. & Technol. 2018. V. 5. Iss. 2. P. 167–178.
12. Физико-химия газодинамических явлений в шахтах. М.: Наука, 1972. 140 с.
13. Христианович С.А. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981. 484 с.
14. Руппенейт К.В. Некоторые вопросы механики горных пород. М.: Углетехиздат, 1954. 384 с.
15. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. Л.: Недра, 1989. 488 с.
16. Gao W. Study on the width of the non-elastic zone in inclined coal pillar for strip mining // Int. J. Rock Mech. & Mining Sci. 2014. № 72. P. 304–310.
17. Galindo R.A., Serrano A., Olalla C. Ultimate bearing capacity of rock masses based on modified Mohr-Coulomb strength criterion // Int. J. Rock Mech. & Mining Sci. 2017. № 93. P. 215–225.
18. Христианович С.А. Распределение давления газа вблизи движущейся свободной поверхности угля // Изв. АН СССР. ОНТ. 1953. № 12. С. 1673–1678.
19. Черданцев Н.В., Черданцев С.В. Анализ состояния углепородного массива, вмещающего пластовую выработку и геологическое нарушение // Изв. РАН МТТ. 2018. № 2. С. 110–121.
20. Черданцев Н.В. Один из подходов к построению траектории трещины гидроразрыва в массиве горных пород вблизи горной выработки // ПММ. 2020. № 2. С. 208–233.
21. Черданцев Н.В. Оценка геомеханического состояния краевой зоны угольного пласта, вмещающего непрочный прослоек // ПММ. 2021. № 2. С. 239–256.
22. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 272 с.
23. Черданцев Н.В. Результаты численного решения уравнений предельного состояния краевой зоны пласта и их аппроксимация полиномами // Безопасность труда в промышленности. 2019. № 6. С. 7–13.
24. Черданцев Н.В. Исследование предельно напряженного состояния пласта в его краевой зоне методами механики сыпучей среды // Горный информ.-аналит. бюлл. 2020. № 3. С. 45–57.
25. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
26. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
27. Черданцев Н.В., Преслер В.Т., Изаксон В.Ю. Геомеханическое состояние анизотропного по прочности массива горных пород в окрестности сопрягающихся выработок // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископ. 2010. № 2. С. 62–68.
28. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. М.: Недра, 1984. 382 с.
29. Баклашов И.В. Основы геомеханики. Т. 1. М.: Изд-во Моск. гос. геол. ун-та, 2004. 208 с.
30. Зыков В.С. Внезапные выбросы угля и газа и другие газодинамические явления в шахтах. Кемерово, 2010. 334 с.
31. Кузнецов С.В., Кригман Р.Н. Природная проницаемость угольных пластов и методы ее определения. М.: Наука, 1978. 122 с.
32. Кузнецов С.В., Трофимов В.А. Газодинамика угольного пласта. Численный алгоритм, частные и приближенные решения // Горный информ.-аналит. бюлл. 2008. № 54. С. 304–324.
33. Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
34. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.
35. Захаров В.Н., Малинникова О.Н., Трофимов В.А., Филиппов Ю.А. Зависимость проницаемости угольного пласта от газосодержания и действующих напряжений // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископ. 2016. № 2. С. 16–25.
36. Conntell L.D., Lu M., Pan Z. An analytical coal permeability model for tri-axial strain and stress conditions // Int. J. Coal Geol. 2010. № 84. P. 103–114.
37. Zhaoqing M., Guoqing L. Experimental research on the permeability of high-rank coal under a varying stress and its influencing factors // Eng. Geol. 2013. № 162. P. 108–117.
38. Shen W.Q., Liu S.Y., Xu W.Y., Shao J.F. et al. An elastoplastic damage constitutive model for rock-like materials with a factional plastic flow rule // J. Nat. Gas Sc. & Eng. 2018. № 50. P. 157–165.
39. Пучков Л.А., Сластунов С.В., Коликов К.С. Извлечение метана из угольных пластов. М.: Из-во Моск. гос. горн. ун-та, 2002. 384 с.
40. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1984. 560 с.
41. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.

42. Черданцев Н.В. Постановка и решение задачи о раскрытии метаном кливажных трещин в краевой зоне угольного пласта // Вестн. Науч. центра ВостНИИ по промышленной и экологической безопасности. 2022. № 1. С. 14–26.
43. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
44. Рахматуллин Х.А., Сагомонян А.Я., Бунимович А.И., Зверев И.Н. Газовая динамика. М.: Высшая школа, 1965. 722 с.

About One Approach to the Construction of a Solution to the Problem of Coal and Methane Emissions from the Marginal Zone of the Formation

N. V. Cherdantsev^{a, #}

^a*Federal Research Center of Coal and Coal Chemistry, SB RAS, Kemerovo, Russia*

[#]*e-mail: nvch2014@yandex.ru*

Based on the model of the geomechanical state of a coal massif containing a coal seam with a fragile layer, a mining working and the ideas developed by S.A. Khristianovich about gas-dynamic processes in the development of coal seams, a solving of the ejection of the marginal part of the formation is constructed. The conditions for the occurrence of gas-dynamic phenomena are formulated, which manifest themselves in the form of the formation first of a main crack in a formation with free methane, then the formation of a crushing wave in it, followed by the release of a jumper and a mixture of crushed coal and gas into mine working.

Keywords: the rock massif, mine working, coal seam, extremely tense zones, strength characteristics, crushing wave

REFERENCES

1. Khristianovich S.A. About the crushing wave // Izv. AN USSR. ONT, 1953, no. 12, pp. 1689–1699.
2. Khristianovich S.A. About the ejection wave // Izv. AN USSR. ONT, 1953, no. 12, pp. 1679–1688.
3. Khodot V.V. Sudden Emissions of Coal and Gas. Moscow: GosNGI, 1961. 363 p. (in Russian)
4. Tchernov O.I., Puzyrev V.N. Prediction of Sudden Gas and Coal Outbursts. Moscow: Nedra, 1979. 296 p. (in Russian)
5. Petukhov I.M., Linkov A.M. The Mechanics of Rock Bursts and Discharges. Moscow: Nedra, 1983. 280 p. (in Russian)
6. Fisenko G.L. The Limiting State of Rocks around an Excavation. Moscow: Nedra, 1976. 272 p. (in Russian)
7. Zykov V.S. About the mechanism of formation of an outlier situation in the treatment face of a coal mine // Surveyor's Bull., 2016, no. 5 (114), pp. 44–48.
8. Shadrin A., Diyuk Y. Geophysical criterion of pre-outburst coal outskueezing from the face space into the working // Int. J. Mining Sci.&Technol., 2019, vol. 29, iss. 3, pp. 499–506.
9. Yang D., Chen Y., Tang J. *et al.* Experimental research into the relationship between initial gas release and coal-gas outbursts // J. Natural Gas Sci.&Engng., 2018, vol. 50, pp. 157–165.
10. Guo H., Yuan L. An integrated approach to study of strata behaviour and gas flow dynamics and its application // Int. J. Coal Sci.&Technol., 2015, no. 2, pp. 12–21.
11. Zhao B., Wen G., Sun H. *et al.* Similarity criteria and coal-like material in coal and gas outburst physical simulation // Int. J. Coal Sci.&Technol., 2018, vol. 5, iss. 2, pp. 167–178.
12. Physico-Chemistry of Gas-Dynamic Phenomena in Mines. Moscow: Nauka, 1972. 140 p. (in Russian)
13. Khristianovich S.A. Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1981, 484 p. (in Russian)
14. Ruppeneyt K.V. Some Questions of Rock Mechanics. Moscow: House of Coal, 1954. 384 p. (in Russian)
15. Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kasparyan E.V. Fundamentals of Rock Mechanics. Leningrad: Nedra, 1989. 488 p. (in Russian)
16. Gao W. Study on the width of the non-elastic zone in inclined coal pillar for strip mining // Int. J. Rock Mech.&Mining Sci., 2014, no. 72, pp. 304–310.

17. Galindo R.A., Serrano A., Olalla C. Ultimate bearing capacity of rock masses based on modified Mohr-Coulomb strength criterion // Int. J. Rock Mech. & Mining Sci., 2017, no. 93, pp. 215–225.
18. Khristianovich S.A. Distribution of gas pressure near the moving free surface of coal // Izv. AN USSR. ONT, 1953. no. 12, pp. 1673–1678.
19. Cherdantsev N.V., Cherdantsev S.V. Analysis of the state for a coal massif in-seam working and a geological discontinuity // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 211–220.
20. Cherdantsev N.V. Approach to the constructing a hydraulic fracture trajectory in a rock mass near mine working // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1372–1391.
21. Cherdantsev N.V. Estimation of the geomechanical state of the marginal zone of a coal seam containing a flimsy layer // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1307–1319.
22. Sokolovsky V.V. Loose Medium Statics, Moscow: Nauka, 1990. 272 p. (in Russian)
23. Cherdantsev N.V. The Results of numerical solution of the equations of limit state boundary formation areas and their approximation by polynomials // Labor Safety in Industry, 2019, no. 6, pp. 7–13.
24. Cherdantsev N.V. Investigation of the extremely stressed state of the formation in its boundary zone by methods of bulk medium mechanics // Mining Inform. & Anal. Bull., 2020, no. 3, pp. 43–57.
25. Lurie A.I. Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 940 p. (in Russian)
26. Parton V.Z., Perlin P.I. Methods of Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1981. 688 p. (in Russian).
27. Cherdantsev N.V., Presler V.T., Isakson V.Yu. Geomechanical state of strength-anisotropic rock mass in the vicinity of mating tunnels // J. Mining Sci., 2010, vol. 46, no. 2, pp. 143–148.
28. Bulychev N.S. Mechanics of Underground Structures. Moscow: Nedra, 1984. 382 p. (in Russian)
29. Baklashov I.V. Fundamentals of Geomechanics. V. 1. Moscow: Mosk. State Geol. Univ. Pub., 2004. 208 p.
30. Zykov V.S. Sudden Emissions of Coal and Gas and Other Gas-Dynamic Phenomena in Mines. Kemerovo, 2010. 334 p. (in Russian)
31. Kuznetsov S.V., Kriegman R.N. Natural Permeability of Coal Seams and Methods of Its Determination. Moscow: Nauka, 1978. 122 p. (in Russian)
32. Kuznetsov S.V., Trofimov V.A. Gas dynamics of a coal seam. Numerical algorithm, partial and approximate solutions // Mining Inform. & Anal. Bull., 2008, no. 54, pp. 304–324.
33. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Motion of Liquids and Gases in Natural Formations. Moscow: Nedra, 1984. 208 p. (in Russian)
34. Romm E.S. Structural Models of the Pore Space of Rocks. Leningrad: Nedra, 1985. 240 p. (in Russian)
35. Zakharov V.N., Maslennikova O.N., Trofimov V.A., Filippov Yu.A. Dependence of coal seam permeability on gas content and operating stresses // Fiziko-Tekhnich. Probl. Pazrab. Mineral Resources, 2016, no. 2, pp. 16–25.
36. Conntell L.D., Lu M., Pan Z. An analytical coal permeability model for tri-axial strain and stress conditions // Int. J. Coal Geol., 2010, no. 84, pp. 103–114.
37. Zhaoping M., Guoqing L. Experimental research on the permeability of high-rank coal under a varying stress and its influencing factors // Eng. Geol., 2013, no. 162, pp. 108–117.
38. Shen W.Q., Liu S.Y., Xu W.Y., Shao J.F. et al. An elastoplastic damage constitutive model for rock-like materials with a fractional plastic flow rule // J. Nat. Gas Sc.&Eng., 2018, no. 50, pp. 157–165.
39. Puchkov L.A., Slastunov S.V., Kolikov K.S. Extraction of Methane from Coal Seams. Moscow: MSMU Pub., 2002. 384 p. (in Russian)
40. Sedov L.I. Continuum Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 560 p. (in Russian)
41. Hellan K. Introduction to Fracture Mechanics. Trondheim: Univ. Press, 1984. 376 p.
42. Cherdantsev N.V. Formulation and solution of the problem of methane disclosure of cleavage cracks in marginal zone of coal seam // Bull. Sci. Center of VostNII on Industrial and Environmental, 2022, no. 1, pp. 14–26 (in Russian)
43. Samarsky A.A. Theory of Difference Schemes. Moscow: Nauka, 1977. 656 p. (in Russian)
44. Rakhmatullin H.A., Sagomonyan A.Ya., Bunimovich A.I., Zverev I.N. Gas Dynamics. Moscow: Vysshaya Shkola, 1965. 722 p. (in Russian)

**ХIII ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ**

DOI: 10.31857/S0032823523010095, EDN: HVWGFS

Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике при поддержке Российской академии наук, Министерства науки и высшего образования Российской Федерации и Правительства Санкт-Петербурга с 21 по 25 августа 2023 года на базе Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого проводит ХIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. В рамках съезда пройдут VI Всероссийская школа молодых ученых-механиков и сессия Общего собрания Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике.

Работа съезда будет проходить в трех секциях:

1. Общая и прикладная механика. 2. Механика жидкости и газа. 3. Механика деформируемого твердого тела.

Кроме того, планируется проведение симпозиумов по современным проблемам механики, возникающим в различных отраслях науки и технологий.

На пленарные и секционные заседания будут вынесены только заказные доклады. Остальные доклады (устные и стендовые по подсекциям и симпозиумам) будут отбираться Оргкомитетом на основании поданных заявок. Каждый автор имеет право на участие только в одном устном докладе и в одном стендовом.

Регистрация и подача заявок на участие в работе съезда осуществляются в режиме онлайн на сайте съезда по установленным там стандартным формам. Адрес сайта съезда: <http://ruscongrmech2023.ru>

Регистрация заявок на участие в работе съезда: до 1 марта 2023 г.