

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 88, вып. 5



Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 88. Iss. 5

EDITORIAL BOARD

I. G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V. G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Łódź, Poland),

N. N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F. M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A. B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A. M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M. L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju. D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A. A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A. M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),

V. V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A. M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

Yu. Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

T. J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,
Technische Universität München, Munich, Germany),

V. V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S. A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V. A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye. I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F. E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S. E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

V. F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N. I. Amelkin, I. M. Anan'evskii, A. S. Andreev, V. A. Babeshko,
A. M. Formalskii, Yu. P. Gupalo, A. P. Ivanov, A. N. Kraiko, A. P. Markeev, S. A. Nazarov,
S. V. Nesterov, V. S. Patsko, A. G. Petrov, N. N. Rogacheva, V. V. Sazonov, A. P. Seyranian,
I. A. Soldatenkov, S. Ya. Stepanov, V. N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

September–October

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В. Г. Байдулов — отв. секретарь

Е. В. Есина — зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала «Прикладная математика и механика» в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V. G. Baydulov — executive secretary

E. V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Нерегулярная прецессия гиростата в трех однородных полях <i>В. Ю. Ольшанский</i>	649
Синтез оптимального быстродействия для одной линейной системы четвертого порядка <i>И. М. Ананьевский</i>	665
Тонкая структура поля плотности в двумерных периодических течениях на поверхности вязкой стратифицированной жидкости <i>А. А. Очиров, Ю. Д. Чашечкин</i>	679
К влиянию эффекта релаксации заряда на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей капли вязкой жидкости <i>А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева, С. О. Ширяева</i>	692
Аналитическое решение задачи о билинейном течении в пласте с конечной трещиной авто-ГРП <i>А. М. Ильясов, В. Н. Киреев</i>	722
Объемные волны, индуцированные сосредоточенными силовыми воздействиями <i>А. В. Ильяшенко</i>	738
Моделирование поля скорости течения на свободной поверхности стратифицированной жидкости <i>Д. Ю. Князьков</i>	745
Численное моделирование кромочного шума с применением метода на основе синтетической турбулентности <i>Н. В. Балакирева, А. С. Суворов</i>	758
Геомеханические маркеры напряженно-деформированного состояния и взаимодействия структур в неоднородных геосредах <i>Е. Б. Осипова</i>	778
Трехпольный МКЭ в расчетах оболочек с вариантами интерполяции искомых величин <i>Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, В. А. Пшеничкина, О. В. Вахнина, А. С. Андреев, М. Ю. Клочков</i>	797

CONTENTS

Nonregular Precession of a Gyrostat in Three Uniform Fields <i>V. Yu. Ol'shanskii</i>	649
Synthesis of Time-Optimal Control for One Fourth-Order Linear System <i>I. M. Ananievski</i>	665
The Fine Structure of the Density Field in Two-Dimensional Periodic Flows on the Surface of a Viscous Stratified Liquid <i>A. A. Ochirov, Yu. D. Chashechkin</i>	679
Effect of Charge Relaxation Effect on Electromagnetic Radiation Intensity of Oscillating Viscous Liquid Drop <i>A. I. Grigoryev, N. Yu. Kolbneva, S. O. Shiryayeva</i>	692
Analytical Solution of the Problem on Bi-Linear Flow in a Formation with a Finite Auto-Fracture <i>A. M. Il'yasov, V. N. Kireev</i>	722
Body Waves Induced by a Concentrated Force <i>A. V. Ilyashenko</i>	738
Simulation of the Flow Velocity Field on the Free Surface of a Stratified Fluid <i>D. Yu. Knyazkov</i>	745
Numerical Simulation of Edge Noise Using a Method Based on Synthetic Turbulence <i>N. V. Balakireva, A. S. Suvorov</i>	758
Geomechanical Markers of Stress and Strain State, and Interaction of Structures in Inhomogeneous Geoenvironment <i>E. B. Osipova</i>	778
Three-Field FEM in Shell Calculations with Options for Interpolation of the Sought Values <i>Yu. V. Klochkov, A. P. Nikolaev, V. A. Pshenichkina, O. V. Vakhnina, A. S. Andreev, M. Yu. Klochkov</i>	797

УДК 531.381

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

© 2024 г. В. Ю. Ольшанский^{1,*}¹ИПТМУ РАН, Саратов, Россия

*e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 10.03.2024 г.

После доработки 24.06.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

В статье приведено решение задачи об условиях прецессии гиростата в трех однородных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. Выделен случай гиростата с осевой динамической симметрией, ось собственного вращения которого совпадает с осью симметрии гиростата. Показано, что нерегулярная прецессия возможна только при скорости прецессии вдвое большей скорости собственного вращения и гиростатическом моменте, отклоненном от оси симметрии на некоторый угол ε . Получено выражение каждой из скоростей через элементарные функции времени. При $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ движение периодическое, при $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ скорость стремится к нулю и тело совершает не больше одного оборота вокруг оси собственного вращения; угол ε_* выражен через постоянный угол нутации θ . Найдена связь между углом нутации и отношением осевого и экваториального моментов инерции, при сферической симметрии $\cos\theta = 1/4$. Указано множество допустимых положений центров приведения сил при произвольных заданных углах между силовыми линиями однородных полей и для частного случая ортогональных полей.

Ключевые слова: гиростат, движение вокруг неподвижной точки, три однородных поля, нерегулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823524050018 EDN: JQEEUU

1. Введение. Классическая задача движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет много обобщений для различных силовых полей. Наиболее исследован случай, когда поле одно или действуют несколько полей с общей осью симметрии. Получены [1] решения для тяжелого тела в магнитном поле, для гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [2, 3].

Важным случаем движения является прецессия и случай симметричного тяжелого тела хорошо известен. Гриоли была найдены [4] условия регулярной прецессии несимметричного тела вокруг оси, отклоненной от вертикали. В наших работах [5–8] показано, что прецессия тела с полостью, заполненной жидкостью, также возможна при отсутствии динамической симметрии. Обзор прецессий твердого тела и гиростата под действием сил различной природы приведен в [9, 10].

Случай, когда направления полей заданы двумя или тремя векторами в инерциальном пространстве, изучен в значительно меньшей степени и исследования в этой области активно проводятся в настоящее время. Первые примеры регулярной прецессии несимметричного твердого тела и гиростата в двух [11] и трех [12]

однородных полях были построены Х. Яхья. В этих решениях оси прецессии и собственного вращения ортогональны, а скорости прецессии и собственного вращения совпадают; эти решения можно считать аналогами прецессии Гриоли для двух и трех полей. В наших работах описаны возможные случаи прецессии твердого тела и гиригата в двух [13] и трех [14] однородных полях; найден новый случай [14], когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения, угол между осями прецессии и собственного вращения задан равенством $\cos\theta = 1/6$.

Была рассмотрена [15] регулярная прецессия гиригата в трех полях, одно из которых — осесимметричное, и для частного случая, когда скорости прецессии и собственного вращения равны, поля ортогональны и ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, получены условия, связывающие параметры системы. В нашей работе [16] выполнено исследование всех возможных случаев регулярной прецессии в данной суперпозиции трех полей, найдены конфигурационные условия и центры приведения сил. Показано [16], что прецессия возможна при скорости прецессии равной, вдвое большей или вдвое меньшей скорости собственного вращения. Для известного случая [15] с равными скоростями прецессии и собственного вращения указаны новые решения с осью прецессии, отклоненной от оси симметрии неоднородного поля. Найдены [16] новые случаи регулярной прецессии, когда отношение скоростей прецессии и собственного вращения равно двум либо одной второй. Показано, что в частном случае гиригата, гиригастический момент которого направлен по оси собственного вращения и в случае твердого тела скорость прецессии может быть вдвое меньше скорости собственного вращения, только если угол нутации задан равенством $\sin\theta = 4/5$.

Г.В. Горром была рассмотрена задача о нерегулярной прецессии вокруг вертикали динамически симметричного тела в трех однородных ортогональных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно [17–19]. В нашей работе [20] проанализированы возможные случаи нерегулярной прецессии динамически симметричного тела в трех однородных полях с постоянным отношением скоростей при произвольных углах между силовыми линиями полей и с произвольным направлением оси прецессии в инерциальном пространстве. В частном случае сферической симметрии тела при скорости прецессии вдвое меньшей или вдвое большей скорости собственного вращения угол нутации определен равенством $\cos\theta = 1/4$, при равных скоростях $\cos\theta = 1/2$.

В настоящей статье приведено решение задачи об условиях нерегулярной прецессии гиригата в трех однородных полях, при которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. Условия получены для случая гиригата с осевой динамической симметрией, ось собственного вращения которого совпадает с осью симметрии гиригата. Показано, что нерегулярная прецессия возможна только при скорости прецессии вдвое большей скорости собственного вращения и гиригастическом моменте, отклоненном от оси симметрии. При угле отклонения ε , меньшем ε_* , движение периодическое, при $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ скорость стремится к нулю и тело совершает не больше одного оборота вокруг оси собственного вращения; угол ε_* выражен через постоянный угол нутации θ . Решение найдено в элементарных функциях. Найдена связь между отношением осевого и экваториального моментов инерции гиригата и углом нутации, при сферической симметрии $\cos\theta = 1/4$. Указано множество допустимых положений центров приведения сил при произвольных заданных углах между силовыми линиями однородных полей и для частного случая ортогональных полей.

2. Постановка задачи. Для описания движения гиригата вокруг неподвижной точки под действием трех полей используем уравнения [12]

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{M} = \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \times \mathbf{u}_3 \quad (2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha}_i = 0; i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Здесь $(\cdot)^{\bullet}$ — производная по времени в системе отсчета, связанной с телом; векторы $\mathbf{u}_i$ постоянны в этой системе, $\mathbf{u}_i = p_i \mathbf{OC}_i$, C_i — центры приведения сил, $\mathbf{I}$ — оператор инерции тела в неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, единичные векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ задают направления сил каждого из полей, $\boldsymbol{\sigma}$ — гиростатический момент, $\mathbf{M}$ — момент действующих на тело сил относительно неподвижной точки O .

Прецессия тела задается равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \boldsymbol{\rho} \quad (2.3)$$

Единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\rho}$ постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах. Скалярные функции $\omega_r(t)$ и $\omega_p(t)$ — это величины скоростей собственного вращения и прецессии. Прецессия называется регулярной, если обе скорости ω_r и ω_p постоянны, и нерегулярной, если хотя бы одна из скоростей непостоянна [10].

Рассмотрим прецессии гиростата, для которых, как и в работах [17–20] для твердого тела, отношение скоростей постоянно

$$\omega_p / \omega_r = \kappa = \text{const} \quad (2.4)$$

Ниже решается следующая задача: при заданных в инерциальной системе отсчета направлениях полей $\boldsymbol{\alpha}_i$ и оси прецессии $\boldsymbol{\rho}$ определить при каких ограничениях на оператор $\mathbf{I}$, гиростатический момент $\boldsymbol{\sigma}$, векторы $\mathbf{u}_i$ и отношение скоростей κ гиростат может совершать прецессию и найти зависимость скоростей прецессии и собственного вращения от времени.

Векторная функция $\boldsymbol{\rho}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2), которое, при учете равенства (2.3), становится линейным

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} + \omega_r(t) \mathbf{m} \times \boldsymbol{\rho} = 0 \quad (2.5)$$

Пусть $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ — некоторый связанный с телом ортонормированный правый базис такой, что $\mathbf{l}_3 = \mathbf{m}$. Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \sin \theta (\sin \tau \mathbf{l}_1 + \cos \tau \mathbf{l}_2) + \cos \theta \mathbf{l}_3; d\tau = \Omega dt \quad (2.6)$$

Здесь $\Omega = \omega_r(t)$ — скорость собственного вращения, произвольный параметр θ — это постоянный угол между осями собственного вращения и прецессии (угол нутации), $\cos \theta = (\mathbf{m}, \boldsymbol{\rho})$. При $\Omega = \text{const}$ в рассматриваемом случае, когда отношение скоростей κ постоянно, прецессия является регулярной.

Векторные функции $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$, как и ранее [14, 16, 20], задаются в связанном с телом ортонормированном базисе $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ равенствами:

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \kappa \sin \theta (\sin \tau \mathbf{l}_1 + \cos \tau \mathbf{l}_2) + (1 + \kappa \cos \theta) \mathbf{l}_3 \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\mathbf{R} \mathbf{s}_i; i = 1, 2, 3, \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{R} \mathbf{l}_3 \quad (2.8)$$

Элементы матрицы оператора поворота $\mathbf{R}$ в базисе $(\mathbf{l}_i)$ следующие:

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa - 1)\tau, \quad r_{31} = -\sin\theta \sin\kappa\tau \\ r_{12} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa + 1)\tau + \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa - 1)\tau, \quad r_{13} = -\sin\theta \sin\tau \\ r_{21} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin(\kappa - 1)\tau, \quad r_{32} = -\sin\theta \cos\kappa\tau \\ r_{22} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa + 1)\tau - \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\kappa - 1)\tau, \quad r_{23} = -\sin\theta \cos\tau, \quad r_{33} = -\cos\theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции $\alpha_i(t)$, заданные равенствами (2.8), являются решениями линейных (при заданной формулой (2.7) функции $\omega(t)$) уравнений (2.2) при произвольных постоянных (в связанной с телом системе отсчета) векторах $\mathbf{s}_i$. При известных функциях $\alpha_i(t)$ момент внешних сил $\mathbf{M}$ задан в подвижной системе отсчета.

Задача, решаемая в работе, состоит в нахождении условий обращения в тождество равенства (2.1) при функциях $\omega, \alpha_i(t), \mathbf{M}$, заданных равенствами (2.7)–(2.9). Из формул (2.7) получим

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega}\tilde{\omega} + \Omega^2 \kappa \sin\theta (\cos\tau \mathbf{l}_1 - \sin\tau \mathbf{l}_2) \quad (2.10)$$

Уравнение (2.1) записывается в виде

$$\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} \mathbf{f} + \Omega^2 \mathbf{g} + \Omega \mathbf{h} = \mathbf{M} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{I}\tilde{\omega}, \quad \mathbf{g} = \tilde{\omega} \times \mathbf{I}\tilde{\omega} + \kappa \sin\theta \mathbf{I}(\cos\tau \mathbf{l}_1 - \sin\tau \mathbf{l}_2), \quad \mathbf{h} = \tilde{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} \quad (2.12)$$

Зависимость $\tau = \tau(t)$ найдем из равенства

$$t = \int \frac{d\tau}{\Omega(\tau)} \quad (2.13)$$

В общем случае, когда поля не ортогональны, удобно, как ранее в наших работах [14, 16, 20] преобразовать формулу для момента сил следующим образом. Зададим векторы $\mathbf{n}_i$ и оператор $\mathbf{G}$ равенствами

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3}{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle} (1 \ 2 \ 3), \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{G} \mathbf{n}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

Здесь $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(1 \ 2 \ 3)$ – знак циклической перестановки.

Всюду в работе рассматриваем случай неприводимых полей и считаем векторы α_i некопланарными, тогда, в силу равенств (2.8), $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle \neq 0$.

Имеем формулу [16] для суммы моментов внешних сил

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{R} \mathbf{l}_1 + \mathbf{G} \mathbf{l}_2 \times \mathbf{R} \mathbf{l}_2 + \mathbf{G} \mathbf{l}_3 \times \mathbf{R} \mathbf{l}_3 \quad (2.15)$$

Ниже, в разд. 3, приведена система трех тождеств, выполнение которых необходимо и достаточно для существования искомого решения, описывающего прецессию гиростата с осевой динамической симметрией, для которой отношение скоростей прецессии и собственного вращения постоянно. В разд. 4 доказано, что для совмест-

ности названной системы тождеств в случае трех полей, неприводимых к двум или одному полю, необходимо, чтобы отношение скоростей было равно одному, двум или одной второй. Дальнейший анализ показывает, что случаи $\kappa = 1$ и $\kappa = 1/2$ возможны только при $\Omega = \text{const}$, то есть при регулярной прецессии. Кроме того, показано, что вектор гиростатического момента должен быть отклонен от оси динамической симметрии гиростата. Разд. 5 и 6 содержат основные результаты статьи. В разд. 5 показано, что при $\kappa = 2$ система трех тождеств совместна и система уравнений (2.1), (2.2) имеет в случае трех неприводимых полей решение, описывающее нерегулярную прецессию с постоянным отношением скоростей. Получено необходимое условие, выражающее угол нутации через отношение осевого и экваториального моментов инерции гиростата. Дано описание допустимых положений центров приведения сил. Найдено выражение $\Omega(\tau)$ через элементарные функции. В разд. 6 выполнен анализ возможных движений гиростата. Записана в элементарных функциях зависимость от времени компонент угловой скорости гиростата. Показано, что при угле ε отклонения гиростатического момента от оси симметрии гиростата, меньшем ε_* , движение периодическое, при $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ скорость стремится к нулю и тело совершает не больше одного оборота вокруг оси собственного вращения; угол ε_* выражен через постоянный угол нутации θ .

3. Прецессия гиростата с осевой симметрией. Определяющие тождества. Рассмотрим прецессию гиростата, имеющего осевую динамическую симметрию, ось симметрии которого совпадает с осью собственного вращения. В этом случае $I_{ij} = 0$; $i \neq j$, $I_1 = I_2$. Оси I_1, I_2 выберем так, что $\sigma_2 = 0$. Запишем заданные формулой (2.12) параметры $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$

$$\mathbf{f} = \kappa \sin \theta I_1 (\sin \tau I_1 + \cos \tau I_2) + (1 + \kappa \cos \theta) I_3 I_3 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{g} = \lambda_1 (\cos \tau I_1 - \sin \tau I_2), \quad \lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \sin \theta ((1 + \kappa \cos \theta) I_3 - \kappa \cos \theta I_1) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{h} = \kappa \sin \theta \sigma_3 (\cos \tau I_1 - \sin \tau I_2) + (1 + \kappa \cos \theta) \sigma_1 I_2 - \kappa \sin \theta \sigma_1 \cos \tau I_3 \quad (3.3)$$

Отметим следующее. Если гиростатический момент коллинеарен оси симметрии, то $\sigma_1 = 0$ и векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ коллинеарны, что упрощает анализ уравнения (2.11). Проведенная проверка показала, что в этом случае искомое решение, описывающее прецессию с постоянным отношением скоростей осесимметричного гиростата в трех неприводимых однородных полях, существует, только если $\Omega = \text{const}$. Прецессия является регулярной, все возможные случаи такой прецессии описаны в нашей работе [16]. Всюду ниже при построении условий нерегулярной прецессии с постоянным отношением скоростей (то есть при условии (2.4)) считаем $\sigma_1 \neq 0$, гиростатический момент σ при этом отклонен от оси симметрии.

Запишем уравнение (2.11) в проекциях на оси $\mathbf{I}_i$

$$\kappa \sin \theta I_1 \sin \tau \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} + \lambda_1 \cos \tau \Omega^2 + \kappa \sin \theta \sigma_3 \cos \tau \Omega = M_1 \quad (3.4)$$

$$\kappa \sin \theta I_1 \cos \tau \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - \lambda_1 \sin \tau \Omega^2 + ((1 + \kappa \cos \theta) \sigma_1 - \kappa \sin \theta \sigma_3 \sin \tau) \Omega = M_2 \quad (3.5)$$

$$(1 + \kappa \cos \theta) I_3 \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} - \kappa \sin \theta \sigma_1 \cos \tau \Omega = M_3 \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4), (3.5) эквивалентны системе

$$\kappa \sin \theta \, I_1 \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} + (1 + \kappa \cos \theta) \sigma_1 \cos \tau \Omega = M_1 \sin \tau + M_2 \cos \tau \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{M}_1 \quad (3.7)$$

$$\lambda_1 \Omega^2 + (\kappa \sin \theta \, \sigma_3 - (1 + \kappa \cos \theta) \sigma_1 \sin \tau) \Omega = M_1 \cos \tau - M_2 \sin \tau \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{M}_2 \quad (3.8)$$

Из уравнений (3.6) и (3.7) находим

$$\lambda_2 \sigma_1 \cos \tau \, \Omega = (1 + \kappa \cos \theta) I_3 \tilde{M}_1 - \kappa \sin \theta \, I_1 M_3 \quad (3.9)$$

$$\lambda_2 \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = \kappa \sin \theta \, \tilde{M}_1 + (1 + \kappa \cos \theta) M_3 \quad (3.10)$$

Здесь

$$\lambda_2 = (\kappa \sin \theta)^2 I_1 + (1 + \kappa \cos \theta)^2 I_3 \quad (3.11)$$

Таким образом, исходное векторное уравнение (2.11) эквивалентно системе трех уравнений (3.8)–(3.10).

Из формул (2.9) и (2.15) получим компоненты M_i момента в базисе (I_i) и затем запишем величины $\tilde{M}_i$, заданные в формулах (3.7) и (3.8)

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 = & \cos \theta (G_{13} \cos \tau - G_{23} \sin \tau) + G_{32} \sin \kappa \tau - G_{31} \cos \kappa \tau + \\ & + \frac{\sin \theta}{2} ((G_{12} + G_{21}) \cos(\kappa + 1) \tau + (G_{11} - G_{22}) \sin(\kappa + 1) \tau) + \\ & + ((G_{12} - G_{21}) \cos(\kappa - 1) \tau + (G_{11} + G_{22}) \sin(\kappa - 1) \tau) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 = & \cos \theta (G_{23} \cos \tau + G_{13} \sin \tau + G_{32} \cos \kappa \tau + G_{31} \sin \kappa \tau) - \\ & - \frac{\sin \theta}{2} (2G_{33} + (G_{11} - G_{22}) \cos(\kappa + 1) \tau - (G_{12} + G_{21}) \sin(\kappa + 1) \tau - \\ & - (G_{11} + G_{22}) \cos(\kappa - 1) \tau + (G_{12} - G_{21}) \sin(\kappa - 1) \tau) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} M_3 = & \sin \theta (-G_{13} \cos \tau + G_{23} \sin \tau) + \\ & + \sin^2 \frac{\theta}{2} ((G_{21} - G_{12}) \cos(\kappa - 1) \tau - (G_{11} + G_{22}) \sin(\kappa - 1) \tau) + \\ & + \cos^2 \frac{\theta}{2} ((G_{12} + G_{21}) \cos(\kappa + 1) \tau + (G_{11} - G_{22}) \sin(\kappa + 1) \tau) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Правые части уравнений (3.9), (3.10) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \kappa \sin \theta \, \tilde{M}_1 + (1 + \kappa \cos \theta) M_3 = \\ & = \sin \theta (-G_{13} \cos \tau + G_{23} \sin \tau + \kappa (G_{32} \sin \kappa \tau - G_{31} \cos \kappa \tau)) + \\ & + \frac{1 + \cos \theta}{2} (\kappa + 1) ((G_{12} + G_{21}) \cos(\kappa + 1) \tau + (G_{11} - G_{22}) \sin(\kappa + 1) \tau) + \\ & + \frac{1 - \cos \theta}{2} (\kappa - 1) ((G_{12} - G_{21}) \cos(\kappa - 1) \tau + (G_{11} + G_{22}) \sin(\kappa - 1) \tau) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
(1 + \kappa \cos \theta) I_3 \tilde{M}_1 - \kappa \sin \theta I_1 M_3 = & (1 + \kappa \cos \theta) I_3 (G_{32} \sin \kappa \tau - G_{31} \cos \kappa \tau) + \\
& + \lambda_3 (G_{13} \cos \tau - G_{23} \sin \tau) + \\
& + \frac{1}{2} \lambda_4 ((G_{12} + G_{21}) \cos(\kappa + 1) \tau + (G_{11} - G_{22}) \sin(\kappa + 1) \tau) + \\
& + \frac{1}{2} \lambda_5 ((G_{12} - G_{21}) \cos(\kappa - 1) \tau + (G_{11} + G_{22}) \sin(\kappa - 1) \tau)
\end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\lambda_3 = \cos \theta (1 + \kappa \cos \theta) I_3 + \kappa (\sin \theta)^2 I_1$$

$$\lambda_4 = \sin \theta ((1 + \kappa \cos \theta) I_3 - \kappa (1 + \cos \theta) I_1) \quad (3.17)$$

$$\lambda_5 = \sin \theta ((1 + \kappa \cos \theta) I_3 + \kappa (1 - \cos \theta) I_1)$$

4. Предварительный анализ. Необходимо определить условия, при которых равенства (3.8)–(3.10) тождественно выполнены для некоторой функции $\Omega(\tau) \neq \text{const}$ и найти эту функцию. Из формулы (3.10) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_2}{2} \Omega^2 = & \sin \theta (-G_{13} \sin \tau - G_{23} \cos \tau - G_{31} \sin \kappa \tau - G_{32} \cos \kappa \tau) + \\
& + \frac{1 + \cos \theta}{2} ((G_{12} + G_{21}) \sin(\kappa + 1) \tau - (G_{11} - G_{22}) \cos(\kappa + 1) \tau) + \\
& + \frac{1 - \cos \theta}{2} ((G_{12} - G_{21}) \sin(\kappa - 1) \tau - (G_{11} + G_{22}) \cos(\kappa - 1) \tau) + C
\end{aligned} \quad (4.1)$$

Если $\kappa \neq 1$, то необходимы условия

$$G_{11} = G_{22}, \quad G_{12} = -G_{21} \quad (4.2)$$

Формулы (3.9) и (4.1) при условиях (4.2) записываются в виде

$$\begin{aligned}
\lambda_2 \sigma_1 \cos \tau \Omega = & (1 + \kappa \cos \theta) I_3 (G_{32} \sin \kappa \tau - G_{31} \cos \kappa \tau) + \\
& + \lambda_3 (G_{13} \cos \tau - G_{23} \sin \tau) + \lambda_5 (G_{12} \cos(\kappa - 1) \tau + G_{11} \sin(\kappa - 1) \tau)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_2}{2} \Omega^2 = & \sin \theta (-G_{13} \sin \tau - G_{23} \cos \tau - G_{31} \sin \kappa \tau - G_{32} \cos \kappa \tau) + \\
& + (1 - \cos \theta) (G_{12} \sin(\kappa - 1) \tau - G_{11} \cos(\kappa - 1) \tau) + C
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Если функцию $\Omega(\tau)$ из равенства (4.3) подставить в равенство (4.4), то получим тождество, одним из условий выполнения которого при $\kappa \neq 1$, $\kappa \neq 2$, $\kappa \neq 1/2$ является $G_{11} = G_{12} = 0$. Учитывая условие (4.2), получим, что матрица G – вырожденная и имеем приводимый случай. Таким образом, искомое решение, описывающее нерегулярную прецессию гиростата в трех полях с постоянным отношением скорости прецессии к скорости собственного вращения, может существовать только в одном из указанных случаев. В нашей работе [20] показано, что нерегулярная прецессия твердого тела в трех однородных полях возможна, когда отношение скорости прецессии к скорости собственного вращения равно одному, двум или одной второй. Ниже показано, что аналогичное решение для гиростата существует, только если скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения.

Рассмотрим случай $\kappa = 1$. Условия (3.9), (3.10) записываются в виде

$$\lambda_2 \sigma_1 \cos \tau \Omega = (1 + \cos \theta) I_3 (G_{32} \sin \tau - G_{31} \cos \tau) + \lambda_3 (G_{13} \cos \tau - G_{23} \sin \tau) + \\ + \frac{1}{2} \lambda_4 ((G_{12} + G_{21}) \cos 2\tau + (G_{11} - G_{22}) \sin 2\tau) + \frac{1}{2} \lambda_5 (G_{12} - G_{21}) \quad (4.5)$$

$$\lambda_2 \dot{\Omega} = \lambda_2 \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = \sin \theta (-(G_{13} + G_{31}) \cos \tau + (G_{23} + G_{32}) \sin \tau) + \\ + (1 + \cos \theta) ((G_{12} + G_{21}) \cos 2\tau + (G_{11} - G_{22}) \sin 2\tau) \quad (4.6)$$

В соответствии с формулой (3.11) $\lambda_2 \neq 0$ и, так как $\sigma_1 \neq 0$, то правая часть в формуле (4.5) должна делиться на $\cos \tau$, для этого необходимо выполнение условий

$$(1 + \cos \theta) I_3 G_{32} - \lambda_3 G_{23} = 0, \lambda_4 (G_{12} + G_{21}) = \lambda_5 (G_{12} - G_{21}) \quad (4.7)$$

При выполнении этих условий формула (4.5) упрощается:

$$\Omega = \frac{\lambda_4 ((G_{12} + G_{21}) \cos \tau + (G_{11} - G_{22}) \sin \tau) + \lambda_3 G_{13} - (1 + \cos \theta) I_3 G_{31}}{\lambda_2 \sigma_1} \quad (4.8)$$

Если из формулы (4.8) подставить Ω в равенство (4.6) и сравнить коэффициенты при $\cos 2\tau$, $\sin 2\tau$, то получим необходимые условия

$$2xy = y, x^2 - y^2 = x, x = \frac{G_{11} - G_{22}}{v}, y = \frac{G_{12} + G_{21}}{v}, v = \frac{2(1 + \cos \theta) \lambda_2 \sigma_1^2}{\lambda_4^2} \quad (4.9)$$

Если $y \neq 0$, то $x = 1/2$ и второе уравнение (4.9) не имеет действительных решений. Если $y = 0$, то $x = 0$ или $x = 1$. В первом случае из формулы (4.8) следует $\Omega = \text{const}$. Остается только случай $y = 0, x = 1$ и получаем условия

$$G_{12} = -G_{21}, G_{11} - G_{22} = v \quad (4.10)$$

Формула (4.8) и равенство (4.6) принимают вид

$$\Omega = \frac{1}{\lambda_2 \sigma_1} (\lambda_4 v \sin \tau + \lambda_3 G_{13} - (1 + \cos \theta) I_3 G_{31}) \quad (4.11)$$

$$\lambda_2 \Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = \sin \theta ((G_{23} + G_{32}) \sin \tau - (G_{13} + G_{31}) \cos \tau) + (1 + \cos \theta) v \sin 2\tau \quad (4.12)$$

Равенства (4.11) и (4.12) совместны при условиях

$$G_{23} + G_{32} = 0, \frac{\lambda_4 v}{\lambda_2 \sigma_1^2} (\lambda_3 G_{13} - (1 + \cos \theta) I_3 G_{31}) = -\sin \theta (G_{13} + G_{31}) \quad (4.13)$$

Так как $\lambda_3 + (1 + \cos \theta) I_3 = (1 + \cos \theta)^2 I_3 + (\sin \theta)^2 I_1 \neq 0$, то из первых условий (4.7) и (4.13) следует $G_{23} = G_{32} = 0$.

Осталось рассмотреть возможность выполнения тождества (3.8), которое при полученных условиях записывается в виде

$$((1 + \cos \theta) \sigma_1 \sin \tau - \sin \theta \sigma_3) \Omega - \lambda_1 \Omega^2 = \\ = -\frac{\sin \theta}{2} (v \cos 2\tau + 2G_{33} - G_{11} - G_{22}) + \cos \theta (G_{13} + G_{31}) \sin \tau$$

Сравнение здесь слагаемых с $\cos 2\tau$ приводит либо к условию $v = 0$, но тогда $\Omega = \text{const}$, либо к условию $(1 + \cos \theta)(2\lambda_1 - \lambda_4) + \sin \theta \lambda_2 = 0$. Данное условие приводится к виду $(1 + \cos \theta)^2 I_3 + (\sin \theta)^2 I_1 = 0$ и не может быть выполнено. Таким образом, при $k = 1$ искомого решения нет.

Покажем, что этот случай при $\kappa = 1/2$ также невозможен. Из формулы (3.9) при учете условия (4.2) получим

$$\lambda_2 \sigma_1 \cos \tau \Omega = a \cos \tau + b \sin \tau + c \cos \frac{\tau}{2} + d \sin \frac{\tau}{2} \quad (4.14)$$

Здесь $a = \lambda_3 G_{13}$, $b = -\lambda_3 G_{23}$, $c = \lambda_5 G_{12} - \left(1 + \frac{\cos \theta}{2}\right) I_3 G_{31}$, $d = \left(1 + \frac{\cos \theta}{2}\right) I_3 G_{32} - \lambda_5 G_{11}$.

Для делимости правой части в формуле (4.14) на $\cos \tau$ необходимо $b = c = d = 0$. Формула принимает вид $\lambda_2 \sigma_1 \Omega = \text{const}$. Заданный формулой (3.11) параметр λ_2 больше нуля, следовательно $\sigma_1 \Omega = \text{const}$. При $\sigma_1 \neq 0$ отсюда следует $\Omega = \text{const}$ и прецессия будет регулярной. В разд. 3 показано, что рассмотрение случая $\sigma_1 = 0$ также приводит к условию $\Omega = \text{const}$. Таким образом, при $\kappa = 1/2$ искомая нерегулярная прецессия невозможна.

5. Построение условий прецессии в случае $\kappa = 2$. Формулы (4.3), (4.4) при условиях (4.2) дают

$$\begin{aligned} \lambda_2 \sigma_1 \cos \tau \Omega = & (1 + 2 \cos \theta) I_3 (G_{32} \sin 2\tau - G_{31} \cos 2\tau) + \\ & + (\lambda_3 G_{13} + \lambda_5 G_{12}) \cos \tau + (\lambda_5 G_{11} - \lambda_3 G_{23}) \sin \tau \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{2} \Omega^2 = & -\sin \theta (G_{31} \sin 2\tau + G_{32} \cos 2\tau) - (\sin \theta G_{23} + (1 - \cos \theta) G_{11}) \cos \tau + \\ & + (-\sin \theta G_{13} + (1 - \cos \theta) G_{12}) \sin \tau + C \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для делимости на $\cos \tau$ в формуле (5.1) необходимы условия

$$G_{31} = 0, \lambda_5 G_{11} - \lambda_3 G_{23} = 0 \quad (5.3)$$

При этом

$$\lambda_2 \sigma_1 \Omega = 2(1 + 2 \cos \theta) I_3 G_{32} \sin \tau + \lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13} \quad (5.4)$$

Отсюда следует $G_{32} \neq 0$, иначе $\Omega = \text{const}$, и получаем

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & \frac{1}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} \left(((1 + 2 \cos \theta) I_3 G_{32})^2 2(1 - \cos 2\tau) + \right. \\ & \left. + 4(1 + 2 \cos \theta) I_3 G_{32} (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13}) \sin \tau + (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13})^2 \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Сравнение с формулой (5.2) приводит к условию

$$\sin \theta G_{23} + (1 - \cos \theta) G_{11} = 0 \quad (5.6)$$

Формула (5.2) при условиях (5.3), (5.6) дает

$$\Omega^2 = \frac{2}{\lambda_2} \left(-\sin \theta G_{32} \cos 2\tau + (-\sin \theta G_{13} + (1 - \cos \theta) G_{12}) \sin \tau + C \right) \quad (5.7)$$

Сравнивая формулы (5.5) и (5.7), приходим к условиям

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} ((1 + 2 \cos \theta) I_3 G_{32})^2 &= \frac{1}{\lambda_2} \sin \theta G_{32} \\ \frac{2}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} (1 + 2 \cos \theta) I_3 G_{32} (\lambda_1 G_{12} + \lambda_2 G_{13}) &= \frac{1}{\lambda_2} (-\sin \theta G_{13} + (1 - \cos \theta) G_{12}) \end{aligned}$$

Из первого условия находим

$$G_{32} = \frac{\sin\theta \lambda_2 (\sigma_1)^2}{((1 + 2\cos\theta) I_3)^2} \quad (5.8)$$

Из второго условия при учете формулы (5.8) следует связь

$$-\sin\theta G_{13} + (1 - \cos\theta) G_{12} = \frac{2\sin\theta}{(1 + 2\cos\theta) I_3} (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13}) \quad (5.9)$$

По формуле (3.13) получим

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 = & \cos\theta G_{32} \cos 2\tau + (\sin\theta G_{11} + \cos\theta G_{23}) \cos \tau + \\ & + (\cos\theta G_{13} - \sin\theta G_{12}) \sin \tau - \sin\theta G_{33} \end{aligned} \quad (5.10)$$

В левой части равенства (3.8) при учете формулы (5.4) нет слагаемых с $\cos \tau$, поэтому в $\tilde{M}_2$ такие члены должны отсутствовать и из формулы (5.10) получаем условие

$$\sin\theta G_{11} + \cos\theta G_{23} = 0 \quad (5.11)$$

Определитель системы (5.6), (5.11) не равен нулю, следовательно

$$G_{11} = G_{22} = G_{23} = 0 \quad (5.12)$$

Формула (5.10) принимает вид

$$\tilde{M}_2 = \cos\theta G_{32} \cos 2\tau + (\cos\theta G_{13} - \sin\theta G_{12}) \sin \tau - \sin\theta G_{33} \quad (5.13)$$

Добьемся теперь выполнения равенства (3.8), используя формулы (5.4) и (5.13). Сравнивая коэффициенты при $\cos 2\tau$, получим связь

$$\frac{2\lambda_1}{(\lambda_2 \sigma_1)^2} ((1 + 2\cos\theta) I_3)^2 G_{32}^2 - \frac{1}{\lambda_2 \sigma_1} (1 + 2\cos\theta)^2 I_3 G_{32} \sigma_1 = \cos\theta G_{32}$$

Подставив сюда G_{32} из формулы (5.8), приходим к условию

$$2\lambda_1 \sin\theta - (1 + 2\cos\theta)^2 I_3 = \mu \cos\theta$$

Данное условие при использовании формул (3.2), (3.11) для λ_1, λ_2 приводится к виду

$$4\cos\theta (1 - \cos\theta) I_1 = (1 - 4\cos^2\theta) I_3 \quad (5.14)$$

Отметим, что в случае сферической симметрии $I_1 = I_2 = I_3$ из условия (5.14) получаем

$$\cos\theta = \frac{1}{4} \quad (5.15)$$

Такое же значение отмечено в работах [17] и [20] для частного случая твердого тела со сферической симметрией.

При имеющемся ограничении $I_3 < 2I_1$ допустимые значения угла нутации определяются условием

$$0 < \cos\theta < \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \quad (5.16)$$

Сравнивая в тождестве (3.8) коэффициенты при $\sin \tau$ и свободные члены, получим связи

$$\left(1 - \frac{4\lambda_1}{\lambda_2(\sigma_1)^2} I_3 G_{32}\right) (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13}) + \lambda_2 \frac{\sin \theta G_{12} - \cos \theta G_{13}}{1 + 2\cos \theta} = 4 \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \sin \theta I_3 G_{32} \quad (5.17)$$

$$G_{33} = \frac{2\sigma_3(\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13})}{\lambda_2 \sigma_1} + \frac{\lambda_1 \left(2(1 + 2\cos \theta) I_3\right)^2 G_{32}^2 + (\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13})^2}{\sin \theta (\lambda_2 \sigma_1)^2} - \frac{(1 + 2\cos \theta)^2 I_3 G_{32}}{\lambda_2 \sin \theta} \quad (5.18)$$

Равенства (5.9) и (5.17) позволяют найти величины G_{12} и G_{13} , из равенства (5.18) затем найдем G_{33} .

Заданные формулами (3.17) параметры λ_3 и λ_5 при связи (5.14) записываются в виде

$$\lambda_5 = \frac{\sin \theta (1 + 2\cos \theta)}{2\cos \theta} I_3, \lambda_3 = \frac{(1 - \cos \theta)(1 + 2\cos \theta)}{2\cos \theta} I_3 \quad (5.19)$$

Условие (5.9) при учете формул (5.19) преобразуется к виду

$$(1 - \cos \theta) G_{12} + \sin \theta G_{13} = 0 \quad (5.20)$$

Полученная связь позволяет записать G_{12}, G_{13} в виде

$$G_{12} = -\sin \theta g, G_{13} = (1 - \cos \theta) g \quad (5.21)$$

С учетом формул (5.19), (5.20) получим

$$\lambda_5 G_{12} + \lambda_3 G_{13} = (\sin \theta G_{12} - \cos \theta G_{13}) I_3 = -(1 - \cos \theta)(1 + 2\cos \theta) I_3 g \quad (5.22)$$

Параметр g определим из равенства (5.17)

$$g = -\frac{4\sigma_3 \cos \theta}{\sigma_1 \sin \theta (1 - 2\cos \theta)} G_{32}$$

Подставляя сюда G_{32} из формулы (5.8), получим

$$g = -\frac{4\sigma_1 \sigma_3}{(1 - 4\cos^2 \theta) I_3} \quad (5.23)$$

Формулы (5.21) принимают вид

$$G_{12} = \frac{4\sigma_1 \sigma_3 \sin \theta}{(1 - 4\cos^2 \theta) I_3}, G_{13} = -\frac{4\sigma_1 \sigma_3 (1 - \cos \theta)}{(1 - 4\cos^2 \theta) I_3} \quad (5.24)$$

Из формулы (5.18) при учете формул (5.21) и (5.23) находим

$$G_{33} = \frac{\sigma_1^2}{I_3 (1 + 2\cos \theta)} + \frac{2\sigma_3^2}{I_1 (1 - 2\cos \theta)} \quad (5.25)$$

Соберем вместе полученные результаты. Для того, чтобы гироскат с осевой динамической симметрией совершал в суперпозиции трех неприводимых однородных полей нерегулярную прецессию, при которой ось прецессии совпадает с осью симметрии гироската, а отношение скоростей прецессии и собственного вращения было постоянно, необходимо, чтобы скорость прецессии была вдвое больше скорости

собственного вращения, отношение осевого и экваториального моментов инерции выражалось через постоянный угол нутации по формуле

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{4\cos\theta(1 - \cos\theta)}{1 - 4\cos^2\theta} \quad (5.26)$$

и элементы матрицы $\mathbf{G}$, определяющей положения центров приведения, задавались формулами

$$G_{12} = -G_{21} = \frac{4\sigma_1\sigma_3\sin\theta}{I_3(1 - 4\cos^2\theta)}, G_{13} = -\frac{4\sigma_1\sigma_3(1 - \cos\theta)}{I_3(1 - 4\cos^2\theta)}, G_{32} = \frac{\sigma_1^2}{I_3} \frac{\sin\theta}{\cos\theta(1 + 2\cos\theta)}$$

$$G_{33} = \frac{\sigma_1^2}{I_3(1 + 2\cos\theta)} + \frac{2\sigma_3^2}{I_1(1 - 2\cos\theta)}, G_{11} = G_{22} = G_{23} = G_{31} = 0 \quad (5.27)$$

Здесь σ_1 и σ_3 – проекции гиросtatического момента на экваториальную плоскость и на ось симметрии эллипсоида инерции.

Из формулы (5.4) получаем выражение для скорости собственного вращения

$$\Omega = 2\frac{\sigma_1}{I_3} \frac{\sin\theta}{1 + 2\cos\theta} \sin\tau + \frac{\sigma_3}{I_1} \quad (5.28)$$

Допустимые положения центров приведения сил определяются при заданной матрице $\mathbf{G}$ из формул (2.14).

В случае ортогональных полей единичные векторы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ образуют правую ортогональную тройку, тогда, в соответствии с формулами (2.8), единичные векторы s_1, s_2, s_3 образуют левую ортогональную тройку. Из формул (2.14) получим $\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i, i = 1, 2, 3$. Если ось прецессии совпадает с осью симметрии неоднородного поля, то $\rho = \alpha_3$ и, в соответствии с формулой (2.8), $s_3 = I_3$.

6. Анализ движения гиростата. Получим явную зависимость переменной τ от времени и зависимость от времени компонент угловой скорости гиростата. Запишем формулу (5.28) в виде

$$\Omega = a + b\sin\tau, \quad a = \frac{\sigma_3}{I_1}, b = 2\frac{\sigma_1}{I_3} \frac{\sin\theta}{1 + 2\cos\theta} \quad (6.1)$$

Интеграл (2.13) выражается через элементарные функции. При $a^2 > b^2$ движение – периодическое, при $b^2 \geq a^2$ скорость вращения стремится к нулю.

Из формул (5.26), (6.1) получим

$$\frac{a^2}{b^2} = \operatorname{ctg}^2\varepsilon \frac{4(1 - \cos\theta)\cos^2\theta}{(1 + \cos\theta)(1 - 2\cos\theta)^2}, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = |\operatorname{ctg}\varepsilon| \left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| \frac{2\cos\theta}{1 - 2\cos\theta} \quad (6.2)$$

Здесь ε – угол между вектором гиросtatического момента σ и осью симметрии I_3 , $\sigma_1 = \sigma\sin\varepsilon$, $\sigma_3 = \sigma\cos\varepsilon$. Движение периодическое при $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, иначе – затухающее

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon_* = \frac{4(1 - \cos\theta)\cos^2\theta}{(1 + \cos\theta)(1 - 2\cos\theta)^2}, \quad |\operatorname{tg}\varepsilon_*| = \frac{2\cos\theta}{1 - 2\cos\theta} \left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| \quad (6.3)$$

В случае сферической динамической симметрии гиростата $\cos\theta = 1/4$,

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon_* = \frac{3}{5}; \quad \varepsilon_* \approx 37^\circ 46'$$

Случай 1: $a = \pm b$

$$t + C = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\tau}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right), \quad \sin\tau = \pm \frac{1 - a^2(t + C)^2}{1 + a^2(t + C)^2}, \quad \cos\tau = \mp \frac{2a(t + C)}{1 + a^2(t + C)^2}$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\omega_p = \Omega = \frac{2a}{1 + a^2(t + C)^2}$$

Носитель гиростата приближается к состоянию покоя, $\Omega > 0$ при $t > \infty$.

Случай 2: $a^2 > b^2$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a - b} \operatorname{tg} \frac{\tilde{t}}{2}; \quad \tilde{t} = \sqrt{a^2 - b^2} (t + \operatorname{const})$$

Отсюда находим

$$\cos \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a \cos \tilde{t} - b}{a - b \cos \tilde{t}}, \quad \sin \left(\tau - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin \tilde{t}}{a - b \cos \tilde{t}} \quad (6.4)$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\omega_p = \Omega = \frac{a^2 - b^2}{a - b \cos \tilde{t}} \quad (6.5)$$

Скорость собственного вращения Ω и вдвое большая скорость прецессии являются периодическими функциями времени с периодом $T = 2\pi / \sqrt{a^2 - b^2}$.

Знак Ω совпадает со знаком параметра a и, в силу формулы (6.1), со знаком σ_3 . Учитывая связь (2.6) переменных τ и t , получим, что при увеличении времени t переменная τ монотонно возрастает, если $\sigma_3 > 0$ (гиростатический момент образует острый угол с осью собственного вращения) и монотонно убывает, если $\sigma_3 < 0$.

Наибольшее и наименьшее значения Ω задаются равенствами

$$\max |\Omega| = |a| + |b|, \quad \min |\Omega| = |a| - |b|$$

Обозначим

$$f(\tilde{t}, \chi) = \frac{\sqrt{1 - \chi^2} \sin \tilde{t}}{1 - \chi \cos \tilde{t}}; \quad \chi = \frac{b}{a}$$

При $|\chi| \approx 1$ вращение тела происходит очень неравномерно, так как, в соответствии с формулой (6.5) почти при всех $\tilde{t}$ скорость Ω близка к нулю и только в малой окрестности $\tilde{t}_{\max}$ скорость возрастает до величины, близкой к $2a$. На интервале $(0, 2\pi)$ функция $f(\tilde{t}, \chi)$ имеет максимум ($f = 1$) и минимум ($f = -1$) в точках $\tilde{t}_{1,2}$, заданных равенством $\cos \tilde{t}_{1,2} = \chi$. При $|\chi| \approx 1$ величина $f(\tilde{t}, \chi)$ почти всюду близка к нулю, кроме малых окрестностей точек $\tilde{t}_1 \approx 0$, $\tilde{t}_2 \approx 2\pi$. Обозначив $\delta = (1 - \chi^2)^{1/4}$, при малых δ получим оценку

$$|f(\tilde{t}, \chi)| < \delta(1 + O(\delta^2)) \quad \text{при } \tilde{t} \in (2\delta, 2\pi - 2\delta) \quad (6.6)$$

Пусть $a, b > 0$. Из формул (6.4), (6.6) следует, что на большей части периода параметр τ находится вблизи значения $\tau = \pi/2$. При прохождении почти полного периода, соответствующему изменению $\tilde{t}$ на величину $2\pi - 4\delta$, происходит поворот вокруг оси собственного вращения на малый угол $\Delta\tau \approx 2\delta$ (и поворот вокруг оси прецессии на угол, вдвое больший). Затем, за малую часть периода $\Delta\tilde{t} = 4\delta$ происходит поворот на угол $\Delta\tau \approx 2\pi - 2\delta$. Отметим, что аналогичное исследование неравномерности вращения тела с полостью, наполненной жидкостью, выполнено в нашей работе [8].

Случай 3: $b^2 > a^2$. После интегрирования получаем

$$\tilde{t} = \ln |\Phi|; \quad \Phi = \frac{a \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \quad (6.7)$$

Отсюда следует $\tilde{t} \rightarrow \mp\infty$ при $\tau \rightarrow \tau_{1,2}$, где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\tau_1}{2} &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2} - b}{a}, \operatorname{tg} \frac{\tau_2}{2} = -\frac{\sqrt{b^2 - a^2} + b}{a} \\ \cos \tau_{1,2} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}, \sin \tau_{1,2} = -\frac{a}{b} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Пусть $\tau_1, \tau_2 \in (-\pi, \pi)$. В зависимости от знаков величин a и b скорость Ω , заданная равенством (6.1), может быть положительна либо отрицательна в любой момент времени. Обозначим

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1, \gamma = \arcsin \frac{|a|}{|b|}$$

Рассмотрим возможные случаи, используя формулы (6.8)

$$a > 0, b > 0 : \tau_1 = -\gamma, \tau_2 = \gamma - \pi, \Delta\tau = 2\gamma - \pi < 0, \Omega < 0, \Phi < 0$$

$$a < 0, b > 0 : \tau_1 = \gamma, \tau_2 = \pi - \gamma, \Delta\tau = \pi - 2\gamma > 0, \Omega > 0, \Phi < 0$$

$$a > 0, b < 0 : \tau_1 = \pi - \gamma, \tau_2 = \gamma, \Delta\tau = 2\gamma - \pi < 0, \Omega < 0, \Phi < 0$$

$$a < 0, b < 0 : \tau_1 = \gamma - \pi, \tau_2 = -\gamma, \Delta\tau = \pi - 2\gamma > 0, \Omega > 0, \Phi < 0$$

Так как $0 < \gamma < \pi/2$, то во всех случаях максимально возможный поворот вокруг собственной оси равен $|\Delta\tau| = \pi - 2\gamma < \pi$.

Учитывая, что во всех случаях $\Phi < 0$, из формулы (6.7) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2} - b - \left(\sqrt{b^2 - a^2} + b\right) \exp \tilde{t}}{a(\exp \tilde{t} + 1)} \\ \cos \tau &= -\frac{\sqrt{b^2 - a^2} \left(\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{ch} \tilde{t} + b \operatorname{sh} \tilde{t}\right)}{b^2 \operatorname{ch} \tilde{t} + b\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh} \tilde{t} + a^2}, \quad \sin \tau = -a \frac{b \operatorname{ch} \tilde{t} + \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh} \tilde{t} + b}{b^2 \operatorname{ch} \tilde{t} + b\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh} \tilde{t} + a^2} \\ \omega_r &= \frac{1}{2} \omega_p = \Omega = \frac{a(a^2 - b^2)}{b^2 \operatorname{ch} \tilde{t} + b\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh} \tilde{t} + a^2} \end{aligned}$$

При $t \rightarrow +\infty$ получим

$$\cos \tau > -\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}, \quad \sin \tau > -\frac{a}{b}$$

Носитель гиростата приближается к состоянию покоя, $\Omega \rightarrow 0$. Угол собственного вращения изменяется на величину, меньшую π , угол прецессии — меньше, чем на 2π . При $\chi \rightarrow 1$ получаем $|\tau_2 - \tau_1| = \pi$. Ось собственного вращения не может совершить вокруг оси прецессии больше одного оборота.

Заключение. Известные точные решения задачи о вращении твердого тела в суперпозиции трех однородных полей описывают регулярную прецессию [12,14], либо нерегулярную прецессию с постоянным отношением скоростей прецессии и собственного вращения [17–20]. Для гиростата в трех однородных полях также получены [12,18] условия регулярной прецессии. В настоящей работе получены условия нерегулярной прецессии с постоянным отношением скоростей гиростата с осевой симметрией в трех неприводимых однородных полях. Показано, что возможен только случай, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения и гиростатический момент отклонен от оси собственного вращения. Приведено

выражение каждой из скоростей через элементарные функции времени. Выделены случаи периодического и затухающего движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.* 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor.&Appl. Mech.* 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
3. *Yehia H.M., El-kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostatt with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7(4). P. 2120–2128.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.* 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
5. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
6. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. Iss. 12. Art. 57.
7. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2020. V. 132. Iss. 9. Art. 46.
8. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
9. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
10. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ, 2009.
11. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. Iss.3. P. 200–205.
12. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.* 2023. V. 127. Art.104041.
14. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 872–886.
15. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.
16. *Ольшанский В.Ю.* Регулярная прецессия гиростата в трех силовых полях // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 571–588.
17. *Горр Г.В.* Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей // *ПММ.* 2023. Т. 87. Вып. 1. С. 3–18
18. *Горр Г.В.* Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения твердого тела // *Изв. РАН МТТ.* 2023. № 3. С 123–134.
19. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023. V. 19. Iss. 2. P. 249–264.
20. *Ольшанский В.Ю.* Нерегулярная прецессия осесимметричного тела в трех однородных полях // *ПММ.* 2024. Т. 88. Вып. 1. С. 17–33.

Nonregular Precession of a Gyrostat in Three Uniform Fields

V. Yu. Ol'shanskii^{a,*}

^a*Institute of Precision Mechanics and Control of the RAS, Saratov, Russia*

^{*}*e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru*

This article presents a solution to the problem of the conditions of gyrostat nonregular precession in three homogeneous fields, in which the ratio of precession and proper rotation velocities is constant. The case of a gyrostat with axial dynamic symmetry, the axis of its proper rotation coinciding with the axis of symmetry of the gyrostat, is highlighted. It is shown that the precession is possible only at a precession rate twice the rate of its proper rotation, and the

gyrostatic moment deflected from the axis of symmetry by some angle ε . An expression for each of the rates is obtained through elementary functions of time. At $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ the motion is periodic, at $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ the velocity tends to zero and the solid makes no more than one revolution around the axis of its proper rotation, the angle ε_* is expressed through the constant nutation angle θ . A relationship has been found between the nutation angle and the ratio of the axial and equatorial moments of inertia, under spherical symmetry $\cos\theta = 1/4$. The set of permissible positions of the centers of force at arbitrary given angles between the lines of force of homogeneous fields and for the special case of orthogonal fields is indicated.

Keywords: gyrostat, motion around a fixed point, three uniform fields, nonregular precession

REFERENCES

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.*, 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I. The equations of motion and their transformation // *J. Theor. & Appl. Mech.*, 1986, vol. 5, no. 5, pp. 747–754.
3. *Yehia H.M., El-kenani H.N.* Effect of the gravity and magnetic field to find regular precessions of a satellite-gyrostat with principal axes on a circular orbit // *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7(4), pp. 2120 – 2128.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. Mat. Pura e Appl.*, 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
5. *Ol'shanskii V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Mech. of Solids*, 2018, vol. 53 (suppl. 2), pp. 95–106.
6. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, iss. 12, art. no. 57.
7. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2020, vol. 132, iss. 9, art. no. 46.
8. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body filled with a liquid // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1500–1513.
9. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Nauk. Dumka, 2013. 408 p.
10. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ. 2009. 222 p. (in Russian)
11. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.*, 2015, vol. 2, iss.3, pp. 200–205.
12. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.*, 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216–219.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a rigid body in two uniform fields // *Mech. Res. Commun.*, 2023, vol.127, art. no. 104041.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three uniform fields // *Mech. of Solids*, 2022, vol.57, iss. 8, pp. 1873–1884.
15. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in three force fields // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 7, pp. 2515–2530.
17. *Gorr G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // *JAMM*, 2023, vol. 87, iss. 1, pp. 3–18.
18. *Gorr G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogeneous force fields. Precession-isoconic motions of a rigid body // *Izv. RAS. Mech. of Solids*, 2023, no.3, pp. 123–134. (in Russian).
19. *Gorr G.V.* On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force field // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 249–264.
20. *Ol'shanskii V.Yu.* Nonregular precession of a rigid body in three uniform fields // *JAMM*, 2024, vol. 88, iss. 1, pp. 17–33.

УДК 531.31:62-50

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. И. М. Ананьевский^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: anan@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 14.08.2024 г.

После доработки 05.09.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Изучается линейная управляемая система четвертого порядка, описывающая в первом приближении динамику перевернутого маятника с активным динамическим гасителем. На основе принципа максимума Понтрягина и предложенного А.А. Фельдбаумом метода построение множеств, на которых происходит переключение управления, решена задача синтеза оптимального управления, приводящего систему в состояние покоя за минимальное время. Свойства рассматриваемой системы позволили свести решение задачи оптимального быстрогодействия к решению аналогичной задачи для системы меньшей размерности.

Ключевые слова: линейная управляемая система, перевернутый маятник, динамический гаситель, оптимальное быстродействие, принцип максимума Понтрягина

DOI: 10.31857/S0032823524050025 EDN: JQBMGN

1. Введение. Исследуется задача управления системой четвертого порядка, которая описывает в линейном приближении динамику следующей двухмассовой механической системы (рис. 1,а): шарнирно закрепленный на неподвижном основании вертикально стоящий невесомый жесткий стержень с грузом m_1 на верхнем конце (обратный маятник) взаимодействует с массой m_2 , которая может поступательно перемещаться вдоль горизонтальной направляющей (активный динамический гаситель). Управляющей переменной служит ограниченная по модулю сила взаимодействия между грузом m_1 и массой m_2 гасителя. Требуется построить закон управления в форме обратной связи, который из произвольного начального состояния за минимальное время приведет маятник в вертикальное состояние, а массу гасителя m_2 остановит в заданном положении.

Особенность изучаемой системы состоит в том, что ее первые два уравнения не содержат третьей и четвертой переменной, а четвертая переменная не входит в первые три уравнения. Это обстоятельство позволяет сначала решить задачу оптимального управления для редуцированной системы, состоящей только из первых двух уравнений. Затем, используя полученное решение, найти закон оптимального управления для системы, состоящей из первых трех уравнений, и применить результаты решения этих вспомогательных задач меньшей размерности для нахождения оптимального по быстродействию управления полной системой. Излагаемый ниже подход основан на

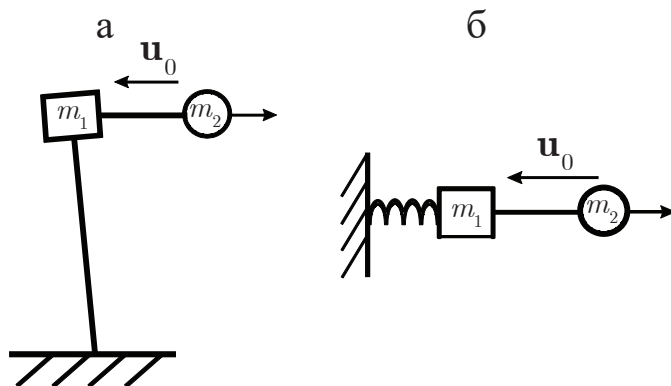


Рис. 1

принципе максимума Понтрягина [1,2] и методе построения поверхностей переключения, предложенном А.А. Фельдбаумом [3].

Задачи управления движением неустойчивых объектов, таких как перевернутый маятник, рассматривались ранее [4–6]. Изучена [7] задача оптимального быстрогодействия для двухмассовой системы, содержащей обычный линейный маятник. Предложены [8,9] методы управления, обеспечивающие остановку колебаний маятника с помощью активного динамического гасителя без минимизации времени движения. Исследована [10] аналогичная рассматриваемой ниже задача для системы третьего порядка и построен закон оптимального управления, обеспечивающий наискорейшую остановку системы в состоянии равновесия в предположении, что конечное положение массы гасителя несущественно.

2. Постановка задачи и уравнения движения. Динамика системы, изображенной на рис. 1,а, в линейном приближении описывается теми же уравнениями, что и динамика механической системы, состоящая из двух точечных масс m_1 и m_2 , перемещающихся вдоль горизонтальной прямой (рис. 1,б). Первая масса соединена с неподвижным основанием пружиной отрицательной жесткости $k < 0$, а вторая соединена с первой посредством привода, который генерирует силу u_0 . Уравнения движения такой системы имеют вид

$$m_1 \ddot{\xi}_1 + k \xi_1 = -u_0, \quad m_2 \ddot{\xi}_2 = u_0, \quad (2.1)$$

где ξ_i — координат i -й массы, $i = 1, 2$, $k < 0$. Управляющая сила предполагается ограниченной по модулю:

$$|u_0| \leq U; \quad U > 0 \quad (2.2)$$

Необходимо найти управление в форме обратной связи, приводящее систему в начало координат за минимальное время.

Используя безразмерные переменные

$$t' = t \sqrt{\frac{-k}{m_1}}, \quad \eta_1 = -\frac{k}{U} \xi_1, \quad \eta_2 = \frac{d\eta_1}{dt'}, \quad z = \frac{-km_2}{Um_1} \xi_2, \quad v = \frac{dz}{dt'}, \quad u = \frac{u_0}{U}$$

и замену $x = \eta_2 - \eta_1$, $y = \eta_1 + \eta_2$, перепишем уравнения (2.1) в форме

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad \dot{v} = u, \quad \dot{z} = v \quad (2.3)$$

Здесь и ниже точками обозначены производные по новому времени t' . Ограничение (2.2) примет вид

$$|u| \leq 1 \quad (2.4)$$

С помощью критерия Калмана [11], можно показать, что система (2.3) вполне управляема. Исходная задача теперь формулируется следующим образом.

Задача 1. Построить закон управления в форме обратной связи, т.е. как функцию переменных (x, y, v, z) , который подчиняется ограничению (2.4) и приводит системе (2.3) в начало координат за минимальное время.

Из принципа максимума Понтрягина следует, что для любого начального состояния оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию времени, принимающую значения 1 и -1 . Оптимальная траектория при этом состоит из чередующихся отрезков траекторий, отвечающих этим значениям управляющей функции. В дальнейшем будем называть траектории движения системы с управлением $u = 1$ положительными, а с управлением $u = -1$ — отрицательными.

Замечание 1. Преобразование центральной симметрии относительно начала координат, что соответствует смене знака у фазовых переменных (x, y, v, z) и управления u , переводит положительные траектории в отрицательные и наоборот.

Известно [1], что оптимальное по быстродействию управление для линейной системы порядка n , собственные числа которой вещественны, при ограничении вида (2.4) имеет не более $n - 1$ переключений. Собственные числа системы (2.3) равны $-1, 1, 0, 0$, поэтому оптимальное управление имеет не более трех переключений. Ниже дается описание множеств, на которых происходит переключение управления, а также указываются области фазового пространства, в которых управление принимает значение $+1$ или -1 .

3. Подсистема второго порядка. Рассмотрим сначала задачу синтеза оптимального быстродействия для подсистемы второго порядка, содержащую только два первых уравнения (2.3) :

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u \quad (3.1)$$

Задача 2. Построить управление $u(x, y)$, которое удовлетворяет ограничению (2.4) и приводит систему (3.1) в начало координат за минимальное время.

Обозначим через G полосу, заключенную между прямыми $y = -1$ и $y = 1$:

$$G = \{(x, y) \in R^2 : |y| < 1\}$$

При ограничении (2.4) вне полосы имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt} \frac{y^2}{2} = \dot{y}y = y^2 - uy \geq y^2 - |y| \geq 0$$

Следовательно, величина y^2 вне полосы G при любых допустимых значениях управляющей функции не убывает, а область начальных состояний, из которых возможно приведение системы в начало координат, совпадает с полосой G .

Поскольку собственные числа системы (3.1) вещественны, то искомого оптимального управления имеет одно переключение, принимает значения 1 и -1 , а приведение системы в начало координат состоит из двух этапов: на первом этапе $u = -1$, а на втором $u = 1$ (первый сценарий), либо наоборот, сначала $u = 1$, затем $u = -1$ (второй сценарий). В соответствии с замечанием 1 преобразование центральной симметрии относительно начала координат переводит один сценарий движения в другой.

Решение системы (3.1), начинающееся в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = (\bar{x} - 1)e^{-t} + 1, & y(t) = (\bar{y} + 1)e^t - 1, & \text{если } u = -1 \\ x(t) = (\bar{x} + 1)e^{-t} - 1, & y(t) = (\bar{y} - 1)e^t + 1, & \text{если } u = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Отрицательные траектории, вдоль которых система (3.1) приходит в начало координат, лежат на кривой Γ_-^2 , заданной уравнением

$$x = \frac{y}{1+y}; \quad y < 0,$$

а положительные траектории, идущие в начало координат, лежат на кривой Γ_+^2 , заданной уравнением

$$x = \frac{y}{1-y}; \quad y > 0$$

Вместе эти кривые составляют кривую $\Gamma^2 = \Gamma_-^2 \cup \Gamma_+^2$, на которой происходит переключение управления.

Замечание 2. Здесь и далее верхний индекс в обозначениях для кривой Γ и поверхности S , которая появится ниже, указывает на размерность фазового пространства задачи.

По первому сценарию оптимального движения сначала система (3.1) вдоль отрицательной траектории, т.е. при $u = -1$, приходит на кривую Γ_+^2 , а затем вдоль этой кривой под действием управления $u = 1$ — в начало координат. Множество начальных состояний (x_0, y_0) для такого движения составляет область G_- , заключенную между прямой $y = -1$ и кривой Γ^2 . По второму сценарию сначала система вдоль положительной траектории, т.е. при $u = 1$, приходит на кривую Γ_-^2 , а затем вдоль этой кривой под действием управления $u = -1$ — в начало координат. Множество начальных состояний (x_0, y_0) для второго сценария составляет область G_+ , заключенную между прямой $y = 1$ и кривой Γ^2 .

Зададим на множестве $G_- \cup \Gamma_-^2$ функции C_- и D_- :

$$C_-(x, y) = (x - 1)(y + 1) + 1, \quad D_-(x, y) = C_-(x, y)(C_-(x, y) + 8); \quad (x, y) \in G_- \cup \Gamma_-^2, \quad (3.3)$$

а на множестве $G_+ \cup \Gamma_+^2$ — функции C_+ и D_+ :

$$C_+(x, y) = (x + 1)(y - 1) + 1, \quad D_+(x, y) = C_+(x, y)(C_+(x, y) + 8); \quad (x, y) \in G_+ \cup \Gamma_+^2 \quad (3.4)$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} C_- = 0, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_-^2 \\ 0 < C_- < 1, & \text{если } (x, y) \in G_-, x < 1 \\ C_- = 1, & \text{если } (x, y) \in G_-, x = 1 \\ C_- > 1, & \text{если } (x, y) \in G_-, x > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Из (3.2) следует, что при первом сценарии на первом этапе оптимальная траектория, идущая из точки (x_0, y_0) , лежит на гиперболе $(x - 1)(y + 1) + 1 = C_-(x_0, y_0)$. Обозначим через $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ координаты точки пересечения этой траектории с кривой переключений Γ_+^2 , где t_1 — время движения на первом этапе. Тогда

$$x_1 = \frac{y_1}{1 - y_1}, \quad (x_1 - 1)(y_1 + 1) + 1 = C_-(x_0, y_0),$$

откуда вытекает, что

$$y_1 = \frac{-C_-(x_0, y_0) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4} > 0, \quad (3.6)$$

а время движения на первом этапе как функция начального состояния (x_0, y_0) задается выражением

$$t_1(x_0, y_0) = \ln \frac{y_1 + 1}{y_0 + 1} = \ln \frac{4 - C_-(x_0, y_0) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4(1 + y_0)} \quad (3.7)$$

На втором этапе система движется из точки (x_1, y_1) в начало координат с управлением $u = 1$ вдоль положительной ветви кривой переключений Γ_+^2 . Время движения здесь как функция переменных x_0, y_0 вычисляется с использованием соотношений (3.2) и (3.6) так:

$$t_2(x_0, y_0) = -\ln(1 - y_1) = \ln \frac{4 + C_-(x_0, y_0) + \sqrt{D_-(x_0, y_0)}}{4} \quad (3.8)$$

Полное время движения $T = t_1 + t_2$ до начала координат как функция начального состояния (x_0, y_0) при первом сценарии управления равно:

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0) &= \ln \frac{(4 - C_- + \sqrt{D_-})(4 + C_- + \sqrt{D_-})}{16(1 + y_0)} = \\ &= \ln \frac{(4 + \sqrt{D_-})^2 - C_-^2}{16(1 + y_0)} = \ln \frac{2 + C_- + \sqrt{D_-}}{2(1 + y_0)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Второй сценарий применяется, если начальное состояние (x_0, y_0) лежит в области G_+ . В этом случае время движения t_1 до отрицательной ветви кривой переключений Γ_-^2 , время движения t_2 вдоль этой кривой и полное время движения T до начала координат находятся аналогично и задаются выражениями

$$t_1 = \ln \frac{4 - C_+ + \sqrt{D_+}}{4(1 - y_0)}, t_2 = \ln \frac{4 + C_+ + \sqrt{D_+}}{4}, T = \ln \frac{2 + C_+ + \sqrt{D_+}}{2(1 - y_0)} \quad (3.10)$$

В выражениях (3.9) и (3.10) аргументы x_0, y_0 у функций C_-, C_+, D_- и D_+ опущены.

4. Подсистема третьего порядка. Рассмотрим теперь задачу синтеза оптимального быстрогодействия для системы, состоящей из первых трех уравнений (2.3):

$$\dot{x} = -x - u, \quad \dot{y} = y - u, \quad \dot{v} = u \quad (4.1)$$

Задача 3. Построить управление $u(x, y, v)$, которое удовлетворяет ограничению (2.4) и приводит систему (4.1) в начало координат за минимальное время.

Собственные числа данной системы вещественны, поэтому оптимальное управление имеет не более двух переключений и состоит из трех этапов: на первом этапе $u = 1$, на втором $u = -1$, на третьем $u = 1$ (первый сценарий), или на первом этапе $u = -1$, на втором $u = 1$ и на заключительном этапе $u = -1$ (второй сценарий).

Изучим первый сценарий движения. Пусть (x_0, y_0, v_0) — начальное состояние системы, (x_1, y_1, v_1) — точка, в которой заканчивается первый этап и управление меняется с $u = 1$ на $u = -1$, (x_2, y_2, v_2) — точка, в которой заканчивается второй этап и управление вновь переключается на $u = 1$, $t_i \geq 0$ — время движения на i -м этапе, $i = 1, 2, 3$.

Решение системы (4.1) с начальным состоянием $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = (\bar{x} - 1)e^{-t} + 1, y(t) = (\bar{y} + 1)e^t - 1, v(t) = \bar{v} - t, \text{ если } u = -1 \\ x(t) = (\bar{x} + 1)e^{-t} - 1, y(t) = (\bar{y} - 1)e^t + 1, v(t) = \bar{v} + t, \text{ если } u = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Первые два уравнения систем (3.1) и (4.1) совпадают, следовательно, совпадают и координаты $x(t), y(t)$ решений (3.2) и (4.2) этих систем. Отсюда вытекает, что траек-

тории системы (3.1) представляют собой проекции на плоскость $v = 0$ траекторий системы (4.1).

На третьем, заключительном, этапе система (4.1) приходит в начало координат под действием управления $u = 1$, т.е. вдоль положительной траектории. Все положительные траектории, проходящие через начало координат, лежат на кривой Γ_+^3 , которая задается уравнениями

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad v = \ln(1-y); \quad y \geq 0 \quad (4.3)$$

Отметим, что кривая Γ_+^2 , которая фигурировала ранее в задаче для подсистемы второго порядка, представляет собой проекцию кривой Γ_+^3 на плоскость $v = 0$.

На третьем этапе система (4.1) переходит из точки (x_2, y_2, v_2) в начало координат вдоль положительной траектории за время t_3 , поэтому

$$x(t_3) = (x_2 + 1)e^{-t_3} - 1 = 0, \quad y(t_3) = (y_2 - 1)e^{t_3} + 1 = 0, \quad v(t_3) = v_2 + t_3 = 0,$$

откуда получаем следующую параметризацию кривой Γ_+^3 :

$$x_2(t_3) = e^{t_3} - 1, \quad y_2(t_3) = 1 - e^{-t_3}, \quad v_2(t_3) = -t_3 \quad (4.4)$$

На втором этапе система переходит из точки (x_1, y_1, v_1) в точку (x_2, y_2, v_2) за время t_2 вдоль отрицательной траектории, поэтому

$$x_2 = (x_1 - 1)e^{-t_2} + 1, \quad y_2 = (y_1 + 1)e^{t_2} - 1, \quad v_2 = -t_2 + v_1 \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} x_1(t_2, t_3) &= e^{t_2+t_3} - 2e^{t_2} + 1 \\ y_1(t_2, t_3) &= -e^{-(t_2+t_3)} + 2e^{-t_2} - 1 \\ v_1(t_2, t_3) &= t_2 - t_3; \quad t_2 > 0, t_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

которые параметризуют с помощью t_2 и t_3 множество точек (x_1, y_1, z_1) , из которых можно попасть на кривую Γ_+^3 вдоль отрицательных траекторий. Это множество представляет собой поверхность, образованную семейством полутраекторий системы (4.1) с управлением $u = -1$, оканчивающихся на кривой Γ_+^3 .

Обозначим данную поверхность через S_-^3 и найдем ее уравнение в декартовых координатах. Траектория системы (3.1) на первом этапе представляет собой проекцию на плоскость $v = 0$ траектории системы (4.1) на втором этапе. Поэтому время движения t_2 системы (4.1) на втором этапе равно времени движения системы (3.1) на первом этапе и задается равенством (3.7), в которое вместо x_0, y_0 следует подставить x_1, y_1 — координаты начального состояния для второго этапа движения системы (4.1):

$$t_2(x_1, y_1) = \ln \frac{4 - C_-(x_1, y_1) + \sqrt{D_-(x_1, y_1)}}{4(1 + y_1)} \quad (4.7)$$

Траектория системы (3.1) на втором этапе представляет собой проекцию на плоскость $v = 0$ траектории системы (4.1) на третьем этапе, поэтому время движения t_3 системы (4.1) на третьем этапе равно времени движения системы (3.1) на втором и задается равенством (3.8) с заменой x_0, y_0 на x_1, y_1 :

$$t_3(x_1, y_1) = \ln \frac{4 + C_-(x_1, y_1) + \sqrt{D_-(x_1, y_1)}}{4} \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7) и (4.8) в последнее соотношение (4.6), получаем уравнение поверхности S_-^3 в декартовых координатах

$$\begin{aligned} v_1(x_1, y_1) &= t_2(x_1, y_1) - t_3(x_1, y_1) = \ln \frac{4 - C_- + \sqrt{D_-}}{(4 + C_- + \sqrt{D_-})(y_1 + 1)} = \\ &= \ln \frac{16 - (C_- - \sqrt{D_-})^2}{((4 + C_-)^2 - D_-)(y_1 + 1)} = \ln \frac{16 - (C_- - \sqrt{D_-})^2}{16(y_1 + 1)} \end{aligned}$$

(здесь аргументы x_1, y_1 у функций C_- и D_- опущены). Данное равенство означает, что поверхность S_-^3 представляет собой график функции

$$f_-(x, y) = \ln \frac{16 - (C_-(x, y) - \sqrt{D_-(x, y)})^2}{16(y + 1)}, \quad (4.9)$$

заданной на множестве $G_- \cup \Gamma_-^2$.

На первом этапе система переходит из начального состояния (x_0, y_0, v_0) за время t_1 вдоль положительной траектории в точку (x_1, y_1, v_1) , лежащую на поверхности S_-^3 . Подставив в равенство $v_1 = f_-(x_1, y_1)$ вытекающие из (4.2) соотношения

$$x_1 = (x_0 + 1)e^{-\eta_1} - 1, \quad y_1 = (y_0 - 1)e^{\eta_1} + 1, \quad v_1 = v_0 + t_1,$$

приходим к уравнению относительно t_1 :

$$v_0 + t_1 = f_-((x_0 + 1)e^{-\eta_1} - 1, (y_0 - 1)e^{\eta_1} + 1) \quad (4.10)$$

Корень данного уравнения задает время движения t_1 на первом этапе как функцию начального состояния (x_0, y_0, v_0) .

Второй сценарий оптимального движения предполагает, что на третьем этапе система (4.1) приходит в начало координат под действием управления $u = -1$ вдоль кривой Γ_-^3 , которая симметрична кривой Γ_+^3 относительно нуля и задается уравнением

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad v = -\ln(1 + y); \quad y \leq 0$$

Рассуждая, как и выше, и учитывая симметрию, приходим к выводу, что множество точек (x_1, y_1, v_1) , из которых можно попасть на кривую Γ_-^3 вдоль положительных траекторий, описывается как график функции

$$f_+(x_1, y_1) = -f_-(-x_1, -y_1); \quad (x_1, y_1) \in G_+ \cup \Gamma_+^2$$

Обозначим это множество через S_+^3 . Оно представляет собой поверхность, образованную семейством полутраекторий системы (4.1) с управлением $u = 1$, оканчивающихся на кривой Γ_-^3 .

Поверхности S_-^3 и S_+^3 «склеиваются» на кривой $\Gamma^3 = \Gamma_-^3 \cup \Gamma_+^3$ и образуют поверхность $S^3 = S_-^3 \cup S_+^3$, которая задается уравнением

$$v = f(x, y), \quad (4.11)$$

т.е. как график непрерывной функции f , определенной на полосе G соотношениями:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_-(x, y), & \text{если } (x, y) \in G_- \cup \Gamma_-^2 \\ f_+(x, y), & \text{если } (x, y) \in G_+ \cup \Gamma_+^2 \end{cases}$$

Этот график разбивает множество допустимых начальных состояний

$$Q = G \times R^1 = \{(x, y, v) : -\infty < x, v < \infty, |y| < 1\}$$

на две области, одна из которых лежит выше S^3 , обозначим ее через Q_+ , а другая — ниже, обозначим ее через Q_- . В [10] установлено, что положительные траектории пересекают поверхность S^3 сверху вниз, т.е. из области Q_+ в область Q_- , а отрицательные — снизу вверх.

Поскольку система (4.1) при фиксированном значении управления удовлетворяет условию единственности решений, то ее траектории «одного знака» не пересекаются друг с другом. Поэтому положительные траектории могут пересечь поверхность S^3 только на участке S_-^3 , образованном семейством отрицательных траекторий, а отрицательные — на участке S_+^3 , образованном семейством положительных траекторий.

Закон управления, доставляющий решение задачи 3, состоит в следующем: если точка (x, y, v) лежит выше поверхности S^3 , т.е. $v > f(x, y)$, то $u(x, y, v) = 1$; если точка (x, y, v) лежит ниже поверхности S^3 , т.е. $v < f(x, y)$, то $u(x, y, v) = -1$. Если $v = f(x, y)$, то $u(x, y, v) = -1$, если точка (x, y, v) лежит на участке поверхности S_-^3 , включая кривую Γ_-^3 , и $u(x, y, v) = 1$, если точка (x, y, v) лежит на участке поверхности S_+^3 , включая кривую Γ_+^3 .

Таким образом, сначала оптимальное движение происходит до пересечения траектории с поверхностью S^3 . В момент пересечения управление меняет знак, а движение продолжается по поверхности S^3 до достижения траекторией кривой Γ^3 . Здесь управление вновь меняет знак, и система вдоль кривой Γ^3 приходит в начало координат. Если же начальное состояние лежит на поверхности S^3 , то первый этап отсутствует.

5. Система четвертого порядка. Вернемся к задаче 1 для исходной системы. Оптимальное движение системы (2.3) возможно по двум сценариям, каждый состоит из четырех этапов. Изучим подробнее сценарий, при котором на первом и третьем этапах $u = -1$, а на втором и четвертом $u = 1$. В этой задаче, как и в рассмотренных выше, преобразование центральной симметрии относительно начала координат переводит один сценарий управления в другой.

Решение системы (2.3) с начальным состоянием $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{z})$ имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (\bar{x} - 1)e^{-t} + 1, \quad y(t) = (\bar{y} + 1)e^t - 1 \\ v(t) &= \bar{v} - t, \quad z(t) = \bar{z} + \bar{v}t - t^2 / 2, \text{ если } u = -1 \\ x(t) &= (\bar{x} + 1)e^{-t} - 1, \quad y(t) = (\bar{y} - 1)e^t + 1 \\ v(t) &= \bar{v} + t, \quad z(t) = \bar{z} + \bar{v}t + t^2 / 2, \text{ если } u = 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Первые три уравнения систем (2.3) и (4.1) совпадают, поэтому совпадают и координаты $x(t), y(t), v(t)$ решений (4.2) и (5.1) этих систем.

Замечание 3. Поскольку оптимальное управление для системы (2.3) на i -м этапе совпадает с управлением для системы (4.1) на $(i - 1)$ -м этапе, $i = 2, 3, 4$, то оптимальная траектория системы (4.1) представляет собой проекцию траектории системы (2.3) на подпространство $z = 0$.

Пусть t_i — время движения на i -м этапе, $i = 2, 3, 4$. Из замечания 3 вытекает, что время движения t_i системы (2.3) на i -м этапе равно времени движения системы (4.1) на $(i - 1)$ -м этапе. В частности, из (4.7), (4.8) получаем

$$t_3(x, y) = \ln \frac{4 - C_-(x, y) + \sqrt{D_-(x, y)}}{4(y + 1)}, \quad t_4(x, y) = \ln \frac{4 + C_-(x, y) + \sqrt{D_-(x, y)}}{4}, \quad (5.2)$$

где x, y — первые две координаты начального состояния системы (4.1) для третьего этапа движения.

Изучение оптимального движения начнем с последнего, четвертого, этапа. На этом этапе система приходит в начало координат по положительной траектории вдоль кривой Γ_+^4 , которая описывается уравнениями

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad v = \ln(1-y), \quad z = \ln^2(1-y); \quad 0 \leq y < 1 \quad (5.3)$$

Первые два уравнения (5.3) совпадают с уравнениями (4.3), поэтому кривая Γ_+^3 представляет собой проекцию кривой Γ_+^4 на подпространство $z = 0$. Кривая Γ_+^4 может быть параметризована временем движения t_4 на последнем этапе так:

$$x = e^{t_4} - 1, \quad y = 1 - e^{-t_4}, \quad v = -t_4, \quad z = \frac{t_4^2}{2} \quad (5.4)$$

Рассмотрим множество состояний системы, из которых можно попасть на кривую Γ_+^4 , двигаясь по отрицательным траекториям. Это множество образовано семейством полутраекторий системы (2.3) с управлением $u = -1$, оканчивающихся на кривой Γ_+^4 , и представляет собой двумерную поверхность, обозначим ее через S_-^4 . Поскольку на третьем этапе система движется вдоль этой поверхности в течение времени t_3 , то в силу (5.1) и (5.4) поверхность S_-^4 может быть задана параметрически следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t_3, t_4) &= e^{t_3+t_4} - 2e^{t_3} + 1 \\ y(t_3, t_4) &= -e^{-(t_3+t_4)} + 2e^{-t_3} - 1 \\ v(t_3, t_4) &= t_3 - t_4 \\ z(t_3, t_4) &= \frac{t_4^2}{2} + t_4 t_3 - \frac{t_3^2}{2}; \quad t_4 > 0, t_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь первые три соотношения совпадают с соотношениями (4.6), в которых, с учетом замечания 3, следует заменить t_2 и t_3 на t_3 и t_4 соответственно. Это означает, что поверхность S_-^3 представляет собой проекцию поверхности S_-^4 на подпространство $z = 0$. Для описания поверхности S_-^4 в декартовых координатах необходимо к уравнению (4.11) добавить выражение для координаты z , подставив в последнее равенство (5.5) соотношения (5.2).

Обозначим через S_+^4 и Γ_-^4 множества, которые симметричны относительно начала координат поверхности S_-^4 и кривой Γ_+^4 соответственно.

Рассмотрим множество состояний системы (2.3), из которых можно попасть на поверхность S_+^4 по положительным траекториям. Это множество образовано семейством полутраекторий системы (2.3) с управлением $u = 1$, оканчивающихся на поверхности S_+^4 , и представляет собой трехмерное многообразие $M_+ \subset R^4$. Поскольку на втором этапе система (2.3) с управлением $u = 1$ движется вдоль этого многообразия в течение времени t_2 , то, используя соотношения (5.1) и (5.5), многообразие M_+ может быть описано параметрически следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t_2, t_3, t_4) &= e^{t_2+t_3+t_4} - 2e^{t_2+t_3} + 2e^{t_2} - 1 \\ y(t_2, t_3, t_4) &= -e^{-(t_2+t_3+t_4)} + 2e^{-(t_2+t_3)} - 2e^{-t_2} + 1 \\ v(t_2, t_3, t_4) &= -t_2 + t_3 - t_4 \\ z(t_2, t_3, t_4) &= \frac{(t_4 + t_2)^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + (t_4 - t_2)t_3; \quad t_4 > 0, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Пусть $(x, y, v, z) \in M_+$ — точка, в которой оптимальная траектория попадает на многообразие M_+ и заканчивается первый этап. На втором, третьем и четвертом этапах проекция оптимальной траектории системы (2.3) совпадает с оптимальной траекторией системы (4.1) с начальным состоянием (x, y, v) . Отсюда и из (4.10) вытекает, что время движения t_2 на втором этапе как функция переменных x, y, v задается уравнением

$$v + t_2 = f_- \left((x+1)e^{-t_2} - 1, (y-1)e^{t_2} + 1 \right) \quad (5.7)$$

Времена движения на третьем и четвертом этапах t_3 и t_4 вычисляются с использованием соотношений (4.7) и (4.8) следующим образом:

$$t_3 = \ln \frac{4 - P(x, y) + \sqrt{Q(x, y)}}{4((y-1)e^{t_2} + 2)}, \quad t_4 = \ln \frac{4 + P(x, y) + \sqrt{Q(x, y)}}{4} \quad (5.8)$$

Здесь

$$P(x, y) = C_- \left((x+1)e^{-t_2} - 1, (y-1)e^{t_2} + 1 \right), \quad Q(x, y) = P(x, y)(P(x, y) + 8)$$

Многообразие M_+ в декартовых координатах описывается уравнением $z = F_+(x, y, v)$ и представляет собой график функции $F_+(x, y, v)$, заданной на множестве $Q_+ \cup S_+^4$ формулой

$$F_+(x, y, v) = \frac{(t_4 + t_2)^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} + (t_4 - t_2)t_3,$$

в которую нужно подставить значения t_2, t_3 и t_4 , вычисленные с помощью соотношений (5.7) и (5.8).

При втором сценарии первое переключение управления происходит на многообразии M_- , которое симметрично относительно начала координат многообразию M_+ и представляет собой график функции

$$F_-(x, y, v) = -F_+(-x, -y, -v); \quad (x, y, v) \in Q_- \cup S_-^4$$

Затем управление переключается последовательно на множествах S_+^4 и Γ_-^4 . Многообразия M_- и M_+ «склеиваются» на поверхности $S^4 = S_-^4 \cup S_+^4$ и образуют многообразие $M = M_- \cup M_+$, которое представляет собой график непрерывной функции F , заданной на множестве Q формулой:

$$F(x, y, v) = \begin{cases} F_-(x, y, v), & \text{если } (x, y, v) \in Q_- \cup S_-^4 \\ F_+(x, y, v), & \text{если } (x, y, v) \in Q_+ \cup S_+^4 \end{cases}$$

Многообразие M разбивает область допустимых начальных состояний

$$H = \{(x, y, v, z) : -\infty < x, v, z < \infty, |y| < 1\}$$

на две подобласти, одна из которых, обозначим ее через H_+ , лежит выше M и там выполнено неравенство $z > F(x, y, v)$, а другая, которую обозначим через H_- , лежит ниже M , там $z < F(x, y, v)$.

Утверждение. Отрицательные траектории системы (2.3) пересекают многообразие M сверху вниз, т.е. из области H_+ в область H_- , а положительные — снизу вверх, т.е. из области H_- в область H_+ .

Доказательство. Поскольку участок M_- многообразия M образован семейством отрицательных траекторий, а траектории «одного знака» не пересекаются, то отрица-

тельные траектории пересекают многообразие M только на участке M_+ . Соответственно, положительные траектории пересекают многообразие M на участке M_- .

Выясним, в каком направлении отрицательные траектории пересекают многообразие M_+ . С этой целью вычислим знак скалярного произведения (N, V) векторного поля системы V и вектора нормали N к M_+ , т.е. к графику функции $F_+(x, y, v)$. Используя параметрическое представление (5.6) многообразия M_+ , координаты ненормированного вектора нормали N к этому многообразию в точке $(x, y, v, z) \in M_+$, отвечающей параметрам t_2, t_3, t_4 , запишем в виде

$$\begin{aligned} N_x(t_2, t_3, t_4) &= (t_3 + t_4)e^{-t_2-t_3} - t_4e^{-t_2} - t_3e^{-t_2-t_3-t_4} \\ N_y(t_2, t_3, t_4) &= t_3e^{t_2+t_3+t_4} - (t_3 + t_4)e^{t_2+t_3} + t_4e^{t_2} \\ N_v(t_2, t_3, t_4) &= -t_2 \operatorname{sh} t_4 - (t_2 + t_3 + t_4) \operatorname{sh} t_3 + (t_2 + t_3) \operatorname{sh}(t_3 + t_4) \\ N_z(t_2, t_3, t_4) &= \operatorname{sh}(t_3 + t_4) - \operatorname{sh} t_3 - \operatorname{sh} t_4; \quad t_3, t_4 > 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Векторное поле V в этой же точке при $u = -1$ в соответствии с (5.6) задается выражениями

$$\begin{aligned} V_x(t_2, t_3, t_4) &= -e^{t_2+t_3+t_4} + 2e^{t_2+t_3} - 2e^{t_2} + 2 \\ V_y(t_2, t_3, t_4) &= -e^{-(t_2+t_3+t_4)} + 2e^{-(t_2+t_3)} - 2e^{-t_2} + 2 \\ V_v(t_2, t_3, t_4) &= -1 \\ V_z(t_2, t_3, t_4) &= -t_2 + t_3 - t_4 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Введем обозначение $\Phi = (N, V) / 4$. Покажем, что $\Phi(t_2, t_3, t_4) < 0$ при $t_2 \geq 0, t_3, t_4 > 0$. Из (5.9) и (5.10) вытекает

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, t_3, t_4) &= (t_3 + t_4) \operatorname{sh}(t_2 + t_3) + (t_2 + t_3) \operatorname{sh}(t_3 + t_4) - t_4 \operatorname{sh} t_2 - \\ &\quad - t_2 \operatorname{sh} t_4 - (t_2 + t_3 + t_4) \operatorname{sh} t_3 - t_3 \operatorname{sh}(t_2 + t_3 + t_4) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Приведенные ниже рассуждения основаны на том, что если для гладкой функции $\Theta(t_2, t_3, t_4)$ при $t_2, t_3, t_4 \geq 0$ и фиксированном $i, i = 2, 3, 4$, имеют место неравенство $\partial \Theta / \partial t_i < 0$ и при $t_i = 0$ неравенство $\Theta \leq 0$, то $\Theta(t_2, t_3, t_4) < 0$. Кроме того, ниже используются следующие свойства гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}(t + s) > \operatorname{sh} t + \operatorname{sh} s > 0, \quad \operatorname{ch}(t + s) > \operatorname{ch} t > 0, \quad t \operatorname{ch} t > \operatorname{sh} t > 0; \quad t, s > 0$$

Производные функции Φ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t_2 \partial t_3^2 \partial t_4} (t_2, t_3, t_4) &= \operatorname{ch}(t_2 + t_3) + \operatorname{ch}(t_3 + t_4) - 2 \operatorname{ch}(t_2 + t_3 + t_4) - t_3 \operatorname{sh}(t_2 + t_3 + t_4) < 0 \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_2 \partial t_3 \partial t_4} (t_2, 0, t_4) &= \operatorname{sh} t_2 + \operatorname{sh} t_4 - \operatorname{sh}(t_2 + t_4) < 0, \end{aligned}$$

из которых вытекает неравенство

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial t_2 \partial t_3 \partial t_4} (t_2, t_3, t_4) < 0 \quad (5.12)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_2 \partial t_3} (t_2, t_3, t_4) &= -\operatorname{ch} t_3 + \operatorname{ch}(t_2 + t_3) + (t_3 + t_4) \operatorname{sh}(t_2 + t_3) + \operatorname{ch}(t_3 + t_4) - \\ &\quad - \operatorname{ch}(t_2 + t_3 + t_4) - t_3 \operatorname{sh}(t_2 + t_3 + t_4); \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_2 \partial t_3} (t_2, t_3, 0) = 0, \end{aligned}$$

то с учетом (5.12) получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_2 \partial t_3}(t_2, t_3, t_4) < 0 \quad (5.13)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t_2}(t_2, t_3, t_4) = & -t_4 \operatorname{ch} t_2 - \operatorname{sh} t_4 - \operatorname{sh} t_3 + (t_3 + t_4) \operatorname{ch}(t_2 + t_3) + \\ & + \operatorname{sh}(t_3 + t_4) - t_3 \operatorname{ch}(t_2 + t_3 + t_4); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_2}(t_2, 0, t_4) = 0, \end{aligned}$$

то с учетом (5.13) получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_2}(t_2, t_3, t_4) < 0$$

Отсюда и из равенства $\Phi(0, t_3, t_4) = 0$ вытекает, что $\Phi(t_2, t_3, t_4) < 0$, $t_2 \geq 0, t_3, t_4 > 0$, т.е. скалярное произведение векторного поля системы (2.3) при $u = -1$ и вектора нормали к многообразию M_+ меньше нуля. Следовательно, отрицательные траектории системы пересекают многообразие M сверху вниз. В силу замечания 1 положительные траектории пересекают многообразие M снизу вверх. Утверждение доказано.

Таким образом, синтез оптимального по быстродействию управления системой (2.3) имеет следующий вид. Если точка (x, y, v, z) не лежит на многообразии M , то

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } z > F(x, y, v) \\ 1, & \text{если } z < F(x, y, v) \end{cases}$$

На первом этапе оптимальная траектория приходит на многообразие M , где происходит первое переключение управления. На втором этапе движение продолжается вдоль многообразия M до поверхности S^4 , где происходит второе переключение управления. На третьем этапе траектория проходит по поверхности S^4 до пересечения с кривой Γ^4 . Здесь управление вновь меняет знак, и система вдоль кривой Γ^4 достигает начала координат.

Если же $(x, y, v, z) \in M$, то знак управления $u(x, y, v, z)$ определяется знаком участка многообразия, на котором лежит точка (x, y, v, z) :

$$u(x, y, v, z) = \begin{cases} -1, & \text{если } (x, y, v, z) \in M_- \\ 1, & \text{если } (x, y, v, z) \in M_+ \end{cases}$$

Принадлежность точки (x, y, v, z) многообразию M определяется равенством $z = F(x, y, v)$. Если при этом $v > f(x, y)$, то $(x, y, v, z) \in S_-^4 \subset M_-$, если $v < f(x, y)$, то $(x, y, v, z) \in S_+^4 \subset M_+$. В случае $v = f(x, y)$ имеем

$$(x, y, v, z) \in \Gamma_-^4 \subset S_-^4 \subset M_-, \text{ если } x > \frac{y}{1 - |y|}$$

$$(x, y, v, z) \in \Gamma_+^4 \subset S_+^4 \subset M_+, \text{ если } x < \frac{y}{1 - |y|}$$

Заключение. Использованный подход к решению задачи 1 может быть применен при решении аналогичных задач оптимального быстродействия для линейных систем с нижнетреугольной матрицей. В этом случае фазовые переменные с номером, большим k , не входят в первые k уравнений, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, здесь n – порядок системы. Это позволяет свести решение задачи к последовательному решению задач меньшей размерности, постепенно увеличивая порядок системы.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием 124012500443-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 391 с.
2. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
3. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автомат. и телемех. 1955. Т. 16(2). С. 129–149.
4. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014. 229 с.
5. Лавровский Э.К. О быстрodeйствии в задаче управления вертикальным положением маятника с помощью перемещения его основания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 42–51.
6. Решмин С.А., Черноусько Ф.Л. Оптимальное по быстрodeйствию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 51–62.
7. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
9. Ананьевский И.М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып 6. С. 901–908.
10. Ананьевский И.М., Дунаев И.А. Наискорейшее успокоение линейного обратного маятника с помощью динамического гасителя // Изв. РАН. ТиСУ. 2024. Т. 58. № 3. С. 11–25.
11. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. New York: McGraw-Hill, 1969. 358 p.

Synthesis of Time-Optimal Control for One Fourth-Order Linear System

I. M. Ananievski^{a,*}^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*^{*}*e-mail: anan@ipmnet.ru*

A linear fourth-order control system is studied, describing in the first approximation the dynamics of an inverted pendulum with an active dynamic damper. Based on Pontryagin's maximum principle and the method proposed by A.A. Feldbaum for constructing sets on which control switching occurs, the problem of synthesizing optimal control that brings the system to a state of rest in minimal time is solved. The properties of the system under consideration make it possible to reduce the solution of the optimal response problem to the solution of a similar problem for a system of lower dimension.

Keywords: linear control system, inverted pendulum, dynamic damper, time-optimal control, Pontryagin's maximum principle

REFERENCES

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley, 1962. 360 p.
2. *Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskiy N.P.* The Maximum Principle in Optimal Control. Moscow. MSU. Pub., 2004. 168 p. (in Russian)
3. *Feldbaum A.A.* On synthesis of optimal systems with the help of phase space // *Avtomat. i Tele-meh.*, 1955, vol. 16, no. 2, pp. 129–149. (in Russian)
4. *Formalskii A.M.* Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects. Vol. 33. De Gruyter Studies in Mathematical Physics. Berlin; München; Boston: De Gruyter, 2016.
<https://doi.org/10.1515/9783110375893>

5. *Lavrovsky E.K.* On quick action in the problem of controlling the vertical position of a pendulum by the movement of its base // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 1, pp. 39–47.
6. *Reshmin S.A., Chernous'ko F.L.* Time-optimal control of an inverted pendulum in the feedback form // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2006, vol. 45, no. 3, pp. 383–394.
7. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N.* Control of Oscillations. Moscow: Nauka, 1980. 384 p. (in Russian)
8. *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. 396 p.
9. *Anan'yevskii I.M.* Control of a fourth-order linear system with mixed constraints // *PMM*, 2000, vol. 64, iss. 6, pp. 863–870.
10. *Ananievskii I.M., Dunaev I.A.* The fastest damping of a linear inverted pendulum using a dynamic absorber // *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2024, vol. 63, no. 3, pp. 390–402.
11. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 p.

УДК 532.59

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. А. А. Очиров^{1,*}, Ю. Д. Чашечкин^{1,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: otchirov@mail.ru, **e-mail: yulidch@gmail.com

Поступила в редакцию 14.04.2024 г.

После доработки 05.09.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

В линейном приближении рассматривается распространение периодического возмущения вдоль свободной поверхности вязкой стратифицированной жидкости в однородном гравитационном поле с учетом действия поверхностного натяжения. Получены полные решения линеаризованной системы фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей, определяющие регулярные волновые и сингулярные лигаментные компоненты. Рассчитана тонкая структура полей физических переменных: скорости жидкости, импульса, плотности и ее градиента.

Ключевые слова: периодические движения, свободная поверхность, вязкость, стратификация, тонкая структура, распределение давления, распределение плотности

DOI: 10.31857/S0032823524050031 EDN: JQAPNX

1. Введение

Перенос вещества нелинейными потенциальными волнами на поверхности однородной жидкости, установленный методами теории возмущений еще в середине XIX века [1], продолжает изучаться и теоретически, и экспериментально в лабораторных и природных условиях [2–4] в силу распространенности и практической важности явления. В последние годы развитие исследований волнового переноса было активизировано изучением движения поплавков (лагранжевых дрейфтеров) [5] и экологических проблем, вызванных увеличением объема плавающего пластика и других загрязнителей в морской среде [6–8]. О математической сложности задачи описания волнового переноса вещества свидетельствует парадоксальное отсутствие рассчитанного во втором порядке теории возмущений стока дрейфа [1] в теории вихревых волн Герстнера [9], природа которого продолжает активно изучаться [10].

В последние годы внимание уделяется анализу переноса вещества и в приповерхностном свободном [11–13], и в подледном [14], и в придонном пограничном слое [15]. Проводятся расчеты взаимодействия процесса волнового переноса с течениями [16–18] и вихрями Лэнгмюра [19], сопровождающегося формированием полос плавающих водорослей и пузырьков, вытянутых вдоль направления ветра [20].

В большинстве оригинальных работ и базовых трактатах [21–23] теория поверхностных волн развивается в приближении однородной жидкости, хотя, как правило, и в природных, и лабораторных условиях жидкости гетерогенны вследствие

неоднородности распределений давления, температуры, концентрации растворенных веществ и взвешенных частиц. В поле массовых сил плотности жидкостей возрастают с глубиной (уменьшаются с высотой в атмосфере) — среды естественно стратифицируются. Наряду с общей плавной стратификацией, и в атмосфере, и в океане наблюдается тонкая структура, в которой однородные слои разделены более тонкими высокоградиентными прослойками [24].

Общая стратификация создает необходимые условия для существования внутренних волн, теоретический анализ которых, впервые проведенный в [25], отражен в отдельных разделах трактатов [21, 23] и монографии [26]. В последние годы, наряду с изучением общих свойств волновых процессов в гетерогенных средах [27], внимание уделяется анализу волновых полей, создаваемых равномерно движущимися источниками [28–31].

Волновой перенос вещества в слоистых средах рассмотрен в [32]. Влияние вязкости на распространение поверхностных волн проанализировано в [33, 34]. Методика одновременного учета влияния стратификации и действия диссипативных факторов на динамику и структуру периодических течений предложена в [35].

Совместный анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований динамики и структуры периодических гравитационных волн в жидкости показал, что ряд ключевых вопросов теории волнового дрейфа в однородной жидкости все еще нуждается в уточнении и экспериментальном подтверждении [36]. Цель данной работы — анализ распространения поверхностных периодических возмущений, включающих волны и тонкоструктурные компоненты [24, 37] с учетом эффектов стратификации и диссипации.

2.2. Математическая формулировка задачи

В основу рассмотрения положена система фундаментальных уравнений механики жидкостей, включающая определяющую среду уравнения состояния для потенциала Гиббса G и плотности ρ [35]. Система дифференциальных уравнений неразрывности, переноса импульса, температуры, концентрации примесей в пренебрежении эффектами Людвига—Соре и Дюфура имеет вид [21]:

$$\begin{aligned} G &= G(P, T, S_i), \quad \rho = \rho(P, T, S_i), \\ \partial_t \rho + \nabla_j (p^j) &= Q_\rho \\ \partial_t (p^i) + \nabla_j \Pi^{ij} &= \rho g^i + 2\varepsilon^{ijk} p_j \Omega_k + Q^i \\ \partial_t (\rho T) + \nabla_j (p^j T) &= \Delta(\kappa_T \rho T) + Q_T \\ \partial_t (\rho S_i) + \nabla_j (p^j S_i) &= \Delta(\kappa_{S,i} \rho S_i) + Q_{S,i} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь P, T, S_i — термодинамические величины, обозначающие давление, температуру и концентрацию i -ой примеси — производные термодинамических потенциалов [38], p^i — компоненты импульса, $Q_\rho, Q^i, Q_T, Q_{S_n}$ — источники массы, импульса, тепла и растворенного вещества соответственно, Π^{ij} — компоненты тензора плотности потока импульса, ε^{ijk} — символ Леви-Чивиты, Ω_k — угловая скорость, $\kappa_T, \kappa_{S,i}$ — коэффициенты температуропроводности и диффузии i -ой примеси соответственно.

Примем ряд упрощений для решения задачи. Будем производить рассмотрение в двумерной постановке в декартовой системе координат Oxz , в которой вертикальная ось Oz направлена вверх против ускорения свободного падения $\mathbf{g}$, ось Ox определяет равновесное положение свободной поверхности вязкой равномерно стратифицированной жидкости, занимающей все нижнее полупространство $z < 0$. Рассмотрение будем проводить без указания природы стратификации в пренебреже-

нии эффектами глобального вращения. В этом случае уравнение состояния заменяется выражением для неоднородной плотности:

$$\rho = \rho_{00}(r(z) + \tilde{\rho}(x, z, t))$$

Здесь $\rho_0(z) = \rho_{00}r(z)$ — профиль невозмущенной плотности, ρ_{00} — ее значение на равновесном уровне $z = 0$, функция $r(z)$ характеризует равновесную стратификацию жидкости, а периодические возмущения плотности, связанные со смещениями свободной поверхности, определяются функцией $\tilde{\rho}(x, z, t)$. Система уравнений в этом случае заметно упрощается:

$$z < \zeta : \rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) = \rho v \Delta \vec{u} - \nabla P + \rho \vec{g} \quad (2.3)$$

$$\partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь $\vec{u} = (u, w)$ — поле скоростей, давление в жидкости P определяется суммой атмосферного давления P_0 , гидростатического $P_\zeta = \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi$ и возмущением $\tilde{P}(x, z, t)$:

$$P = P_0 + P_\zeta + \tilde{P}(x, z, t) \quad (2.5)$$

В приближении Буссинеска жидкость считается несжимаемой, а плотность — постоянной во всех слагаемых за исключением слагаемых, включающих ускорение свободного падения в уравнении Навье—Стокса и слагаемых, включающих градиент плотности в уравнении неразрывности. В этом случае компоненты вектора скорости можно представить в виде пространственных производных функции тока ψ :

$$u = \partial_z \psi, \quad w = -\partial_x \psi \quad (2.6)$$

После линеаризации уравнений движения математическая формулировка задачи (2.3)–(2.4) для поверхностных периодических возмущений принимает вид:

$$\begin{aligned} z < 0 : \\ \rho_{00}(\partial_t \vec{u} - v \Delta \vec{u}) + \nabla P - \rho \vec{g} &= 0 \\ \rho_{00}(\partial_t \tilde{\rho} + \vec{u} \cdot \nabla r(z)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

С учетом (2.2) и (2.6) из уравнений (2.7) можно получить уравнение, содержащее только функцию тока. Для этого распишем первое уравнение в (2.7) по компонентам, произведем перекрестное дифференцирование по координатам и вычтем одно из другого:

$$\partial_t \Delta \psi - v \Delta \Delta \psi - g \partial_x \tilde{\rho} = 0 \quad (2.8)$$

Дифференцирование по горизонтальной координате x второго уравнения и умножение на модуль ускорения свободного падения g приводит к выражению:

$$g(\partial_{xt} \tilde{\rho} - \partial_z r \partial_{xx} \psi) = 0 \quad (2.9)$$

Продифференцировав (2.8) по времени и вычитая из результата (2.9) получим уравнение, содержащее только скалярную функцию тока ψ и равновесное начальное распределение стратификации $r(z)$:

$$\partial_{tt} \Delta \psi - v \partial_t (\Delta \Delta \psi) - g \partial_z r \partial_{xx} \psi = 0 \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) для жидкости с экспоненциальной стратификацией $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$ с масштабом $\Lambda = |d \ln \rho_0 / dz|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом плавучести $T_b = 2\pi/N$ приобретает вид:

$$\partial_{xx} \Delta \psi - v \partial_z (\Delta \psi) + N^2 \exp(-z_\Lambda) \partial_{xx} \psi = 0 \quad (2.11)$$

Для упрощения выражений в дальнейшем используется безразмерная высота $z_\Lambda = z/\Lambda$, нормированная на масштаб плавучести Λ .

3. Решение линеаризованной задачи

Подстановка в (2.9) решения в виде бегущих монохроматических поверхностных волн вида:

$$\psi = A \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_z z) \quad (3.1)$$

с положительно определенной частотой ω и комплексным волновым числом $k = (k_x, k_z)$ приводит к дисперсионному соотношению:

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(ivk_x^2 - ivk_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 \exp(-z_\Lambda) = 0 \quad (3.2)$$

Геометрия задачи естественным образом выделяет вертикальную компоненту волнового вектора k_z , вдоль которой невозмущенная среда неоднородна. Поэтому решение уравнения (3.2) в настоящей работе ищется в виде зависимости $k_z(k_x, \omega)$.

Уравнение (3.2) имеет два типа корней: регулярные и сингулярные. Принципы, согласно которым решения относятся к тому или иному типу можно понять, если рассмотреть задачу в безразмерных переменных, в которых в качестве параметров обезразмеривания выбраны собственные масштабы задачи: обратная частота плавучести $\tau_N = N^{-1}$ и вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = (gv)^{1/3} N^{-1}$. В случае малой вязкости отношение вязкого $\delta_g^v = v^{2/3} g^{-1/3}$ и вязкого волнового масштаба определяет безразмерный параметр $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N v^{1/3} / g^{2/3}$. В этом случае дисперсионное уравнение (3.2) записывается следующим образом:

$$\omega_*^2 (k_{*x}^2 - k_{*z}^2) + i\varepsilon \omega_* (k_{*x}^2 - k_{*z}^2)^2 - k_{*x}^2 \exp(-z_\Lambda) = 0 \quad (3.3)$$

Здесь нижним индексом «*» обозначены соответствующие безразмерные величины. В жидкостях с малой вязкостью или со слабой стратификацией параметр $\varepsilon \ll 1$. Малый коэффициент, который при этом появляется в слагаемом с наибольшим показателем степени, позволяет отнести (3.3) к классу сингулярно возмущенных уравнений, асимптотические методы анализа которых развиты в [39]. Методы теории сингулярных возмущений позволяют строить полные решения уравнений вида (3.3), содержащие два типа корней: традиционные регулярные и сингулярные:

$$\begin{aligned} k_{*z} &\simeq \pm k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda)}}{\omega_*} \pm \varepsilon \frac{ik_{*x} \exp(-z_\Lambda)}{2\omega_*^2 \sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda)}} \\ k_{*l} &\simeq \pm \frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*} \pm \sqrt{\varepsilon} \frac{(1+i)k_{*x}^2 (\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda))}{2\sqrt{2}\omega_*^{5/2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Точное решение биквадратного уравнения (3.2), построенное без обращения к технике асимптотических вычислений, имеет вид:

$$k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - \frac{i(\omega^2 + (1+i)\tilde{R}(k_x, z))}{2\nu\omega}}, \quad k_z = \pm \sqrt{k_x^2 - \frac{i(\omega^2 - (1+i)\tilde{R}(k_x, z))}{2\nu\omega}} \quad (3.5)$$

$$\tilde{R}(k_x, z) = \sqrt{\frac{4\nu\omega N^2 k_x^2 \exp(-z_\Lambda) - i\omega^4}{2}}$$

При переходе к безразмерному виду главные члены полученных решений (3.5) определяются соотношениями:

$$k_{*l} \approx \pm \frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{\omega_*}, \quad k_{*z} \approx \pm k_{*x} \frac{\sqrt{\omega_*^2 - \exp(-z_\Lambda)}}{\omega_*} \quad (3.6)$$

Сравнение показывает, что главные члены асимптотического решения (3.4) и асимптотики точного решения (3.6) совпадают.

Отметим, что соотношения, соответствующие регулярным решениям k_z отвечают за волновой компонент периодического течения, а соответствующие сингулярным решениям k_l определяют лигаментный компонент, задающий тонкую структуру течения.

В выражении (3.1) компоненты волнового вектора полагаются независимыми от координат, в то же время в решении (3.5) появляется зависимость от вертикальной координаты z и в волновом k_z и в лигаментном k_l решении. Такое приближение будет справедливо, если в решении ограничиваться областью, определяемой безразмерной глубиной, на которой проводится рассмотрение, остается малой величина $z_\Lambda \ll 1$. В реальных жидкостях масштаб стратификации принимает значения порядка километров и больше, поэтому описанные соображения незначительно ограничивают область применения полученных выражений.

С учетом выражений, определяющих волновой k_z и лигаментный k_l компонент течения (3.5) решение для функции тока (3.1) трансформируется в:

$$\psi = \exp(ik_x x - i\omega t) (A \exp(k_z z) + B \exp(k_l z)) \quad (3.7)$$

В качестве управляющего параметра периодического течения выступает положительно определенная частота ω . Связь между частотой и компонентой волнового вектора k_x находится из стандартных кинематических и динамических граничных условий на свободной поверхности и условием затухания движения с глубиной:

$$z = \zeta : \quad \frac{D(z - \zeta)}{Dt} = 0 \quad (3.8)$$

$$P - 2\rho\nu\vec{n} \cdot ((\vec{n} \cdot \nabla)\vec{u}) + \sigma \operatorname{div} \vec{n} = 0$$

$$(\vec{\tau} \cdot ((\vec{n} \cdot \nabla)\vec{u}) + \vec{n} \cdot ((\vec{\tau} \cdot \nabla)\vec{u})) = 0$$

$$z \rightarrow -\infty : \vec{u} \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \left(\frac{-\partial_x \zeta}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \right), \quad \vec{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \frac{\partial_x \zeta}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \right)$$

Здесь $\vec{n}, \vec{\tau}$ — орты нормали и касательной к свободной поверхности соответственно, D/Dt — материальная производная, а σ — коэффициент поверхностного натяжения. Более подробно вывод граничных условий на свободной поверхности в вязкой жидкости разобран в [21, 40, 41]. Стоит отметить, что условие затухания движения с глу-

биной (3.9) накладывает ограничения на полученные ранее решения (3.5), (3.6). С учетом вида решения (3.1) физически реализуемыми решениями в (3.5) и (3.6) оказываются корни, с положительной действительной частью $\operatorname{Re}(k_{z,l}) > 0$, $\operatorname{Re}(k_{*z,l}) > 0$.

В линеаризованной постановке после проведения процедуры сноса граничных условий на равновесную поверхность $z = 0$ граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} z = 0 : \\ \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0 \\ \tilde{P} + 2\rho_{00} v \partial_{xz} \psi + \sigma \partial_{xx} \zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_{xx} \psi - \partial_{zz} \psi = 0 \\ z \rightarrow -\infty : \partial_x \psi \rightarrow 0, \partial_z \psi \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставляя выражения для давления из уравнения Навье—Стокса (2.7) в динамическое граничное условие получим, с учетом кинематического граничного условия (3.10), запись динамических граничных условий, содержащих только функцию тока:

$$\begin{aligned} z = 0 : \\ v \partial_{zt} \Delta \psi - \partial_{tz} \psi + 2v \partial_{tzz} \psi + g \partial_{xx} \psi - \gamma \partial_{xxxx} \psi = 0 \\ \partial_{xx} \psi - \partial_{zz} \psi = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $\gamma = \sigma/\rho_{00}$ — нормированный на равновесное значение плотности на поверхности коэффициент поверхностного натяжения. Подставляя в (3.11) выражение для функции тока (3.7), получим условие совместности, определяющее дисперсионное соотношение между компонентами волнового вектора и частотой периодического течения:

$$\begin{aligned} (k_x^2 + k_z^2) \left(-gk_x^2 - iv\omega k_l^3 + \omega k_l (3ivk_x^2 + \omega) - \gamma k_x^4 \right) - \\ - (k_x^2 + k_l^2) \left(-gk_x^2 + 3iv\omega k_x^2 k_z + \omega k_z (-ivk_z^2 + \omega) - \gamma k_x^4 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) допускает численное или приближенное решение, по которому строятся дисперсионные характеристики волнового и лигаментного компонента периодического течения.

Построим решения для неизвестных функций с учетом слагаемых, определяющих тонкую структуру течения. Вид искоемых функций отклонения свободной поверхности от равновесного положения, периодической составляющей плотности и давления с учетом выражения для функции тока (3.7) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta &= Z \exp(ik_x x - i\omega t) \\ \tilde{\rho} &= \exp(ik_x x - i\omega t) (G \exp(k_z z) + H \exp(k_l z)) \\ \tilde{P} &= \exp(ik_x x - i\omega t) (K + L \exp(k_z z) + M \exp(k_l z)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из динамического граничного условия на касательные напряжения найдем связь между амплитудными множителями для лигаментного и волнового компонента функции тока:

$$B = -A \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} \quad (3.15)$$

Подставляя (3.7), (3.11) и (3.12) в кинематическое граничное условие, найдем связь между амплитудой отклонения свободной поверхности и амплитудами компонентов периодического движения функции тока:

$$A = Z \frac{\omega(k_x^2 + k_l^2)}{k_x(k_l^2 - k_z^2)}, \quad B = -Z \frac{\omega(k_x^2 + k_z^2)}{k_x(k_l^2 - k_z^2)} \quad (3.16)$$

Амплитуды волнового G и лигаментного H компонента в выражении для периодической части плотности, которые определяются из уравнения неразрывности (2.7), с учетом (3.16) можно записать в виде:

$$G = Z \exp(-z_\Lambda) \frac{k_x^2 + k_l^2}{\Lambda(k_l^2 - k_z^2)}, \quad H = -Z \exp(-z_\Lambda) \frac{k_x^2 + k_z^2}{\Lambda(k_l^2 - k_z^2)} \quad (3.17)$$

Амплитуды для компонентов давления K, L, M определяются из уравнения Навье–Стокса с учетом (3.14)–(3.17):

$$\begin{aligned} K &= -Z \frac{g\Lambda\rho_{00}(k_x^2 + k_z k_l(-1 + k_z\Lambda + k_l\Lambda))}{(k_z + k_l)(k_z\Lambda - 1)(k_l\Lambda - 1)} \\ L &= -Z \frac{g\rho_{00}(k_x^2 + k_l^2)\exp(-z_\Lambda)}{(k_z^2 - k_l^2)(k_z\Lambda - 1)} - Z \frac{ik_z\omega\rho_{00}(k_x^2 + k_l^2)(vk_z^2 - vk_x^2 + i\omega)}{k_x^2(k_z^2 - k_l^2)} \\ M &= -Z \frac{g\rho_{00}(k_x^2 + k_z^2)\exp(-z_\Lambda)}{(k_l^2 - k_z^2)(k_l\Lambda - 1)} - Z \frac{ik_l\omega\rho_{00}(k_x^2 + k_z^2)(vk_l^2 - vk_x^2 + i\omega)}{k_x^2(k_l^2 - k_z^2)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Получим выражение для градиента плотности. При этом рассмотрим отдельно волновой и лигаментный компоненты плотности. В общем виде можно записать выражение для волнового компонента периодического возмущения плотности $\tilde{\rho}_w$ следующим образом:

$$\tilde{\rho}_w = \exp(ik_x x - i\omega t) G(z) \exp(k_z(z)z) \quad (3.19)$$

Для лигаментного компонента периодического возмущения плотности $\tilde{\rho}_l$ в общем виде выражение записывается:

$$\tilde{\rho}_l = \exp(ik_x x - i\omega t) H(z) \exp(k_l(z)z) \quad (3.20)$$

В явном виде после подстановки дисперсионных соотношений (3.5) градиент волнового компонента периодического возмущения плотности определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{\rho}_w &= \frac{(-1)^{3/4} Z k_x (k_x^2 + k_l^2) v \omega}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) \Lambda} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_z z - z_\Lambda) \\ \partial_z \tilde{\rho}_w &= \frac{Z v \omega}{4\sqrt{2} k_z \tilde{R}(k_x, z)^3 \Lambda^2} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_z z - 2z_\Lambda) \times \\ &\times \left[-k_x^2 (k_x^2 + k_l^2) N^2 \sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) z + 4(-1)^{1/4} \exp(z_\Lambda) k_z^2 (k_x^2 + k_l^2) \tilde{R}(k_x, z)^2 \Lambda + 2k_z \times \right. \\ &\times \left. \left(2(-1)^{1/4} k_x^2 (k_x^2 + k_l^2) N^2 v \omega + \sqrt{2} k_x^2 N^2 \tilde{R}(k_x, z) - 2(-1)^{1/4} \exp(z_\Lambda) (k_x^2 + k_l^2) \tilde{R}(k_x, z)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для градиента лигаментного компонента возмущения плотности в явном виде получим:

$$\begin{aligned}
\partial_x \tilde{\rho}_l &= -\frac{(-1)^{3/4} Z k_x (k_x^2 + k_z^2) v \omega}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) \Lambda} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_l z - z_\Lambda) \\
\partial_z \tilde{\rho}_l &= -\frac{Z v \omega}{4\sqrt{2} k_l \tilde{R}(k_x, z)^3 \Lambda^2} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_l z - 2z_\Lambda) \times \\
&\times \left[-k_x^2 (k_x^2 + k_z^2) N^2 \sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) z + 4(-1)^{1/4} \exp(z_\Lambda) k_l^2 (k_x^2 + k_z^2) \tilde{R}(k_x, z)^2 \Lambda + 2k_l \times \right. \\
&\times \left. \left(2(-1)^{1/4} k_x^2 (k_x^2 + k_z^2) N^2 v \omega + \sqrt{2} k_x N^2 \tilde{R}(k_x, z) - 2(-1)^{1/4} \exp(z_\Lambda) (k_x^2 + k_z^2) \tilde{R}(k_x, z)^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Для экспериментальных наблюдений поверхностных волн отдельный интерес представляет горизонтальная компонента градиента плотности. На поверхности амплитуда волновой R_w и лигаментной R_l частей горизонтальной компоненты градиента плотности определяются выражениями:

$$z = 0 : R_w = \frac{(-1)^{3/4} Z k_x (k_x^2 + k_l^2) v \omega}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, 0) \Lambda}, R_l = \frac{(-1)^{3/4} Z k_x (k_x^2 + k_z^2) v \omega}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, 0) \Lambda} \tag{3.23}$$

Выражения (3.23) характеризуют масштабы лигаментной и волновой части градиента плотности вдоль горизонтальной координаты в зависимости от частоты периодического течения. Масштаб лигаментного компонента горизонтальной составляющей градиента плотности относительно волнового определяется отношением амплитуд:

$$\frac{R_l}{R_w} = \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} = \frac{4v\omega k_x^2 - i(\omega^2 - (1+i)\tilde{R}(k_x, 0))}{4v\omega k_x^2 - i(\omega^2 + (1+i)\tilde{R}(k_x, 0))} \tag{3.24}$$

В безразмерном виде, подставляя приближенные значения (3.6) в (3.24) с точностью до членов более высокого порядка малости, получим:

$$\frac{R_l}{R_w} = \frac{k_{*x}^2 + k_{*z}^2}{k_{*x}^2 + k_{*l}^2} \approx \frac{\varepsilon k_{*x}^2 (2\omega_*^2 - 1)}{\omega_*^2 (\varepsilon k_{*x}^2 - i\omega_*)} \approx \frac{i\varepsilon k_{*x}^2 (2\omega_*^2 - 1)}{\omega_*^3} + O(\varepsilon^2) \tag{3.25}$$

При переходе в (3.25) от безразмерных переменных к размерным значениям получим для жидкостей с малой вязкостью:

$$\frac{R_l}{R_w} \approx ik_x^2 (\delta_\omega^v)^2 \left(2 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \tag{3.26}$$

Здесь $\delta_\omega^v = \sqrt{\nu/\omega}$ – вязкий масштаб Стокса. Стоит отметить, что выражением, аналогичным (3.26) определяется соотношение лигаментной и волновой составляющей функции тока: из (3.7) и (3.15) следует:

$$\frac{|B|}{|A|} = \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_x^2 + k_l^2} \approx ik_x^2 (\delta_\omega^v)^2 \left(2 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \tag{3.27}$$

Подставляя в (3.26)–(3.27) решение дисперсионного уравнения (3.13), можно получить связь между масштабами лигаментного и волнового компонентов периодического течения в явном виде.

Проследим за импульсом жидкости, переносимым периодическим волновым движением и распишем его по компонентам: отдельно лигаментный и волновой компоненты. В линейном приближении для волнового компонента импульса $\vec{p}_w = (p_{wx}, p_{wz})$, используя (2.2), (3.7) и (3.16) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
p_{wx} &= \rho_{00} \exp(-z_\Lambda) \partial_z \psi_w = Z \frac{\rho_{00} v \omega^2}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z)} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_z z - z_\Lambda) \times \\
&\times \left[(-1)^{1/4} \frac{(k_x^2 + k_l^2)}{k_x} \left(k_z - \frac{(-1)^{3/4} \exp(-z_\Lambda) k_x^2 N^2 z}{2k_z \sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) \Lambda} \right) - \right. \\
&\left. - \exp(-z_\Lambda) \left(\frac{k_x N^2}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) \Lambda} - \frac{(-1)^{1/4} k_x (k_x^2 + k_l^2) N^2 v}{\tilde{R}(k_x, z)^2 \Lambda} \right) \right] \\
p_{wz} &= -\rho_{00} \exp(-z_\Lambda) \partial_x \psi_w = \\
&= -Z \frac{(-1)^{3/4} \rho_{00} v \omega^2 (k_x^2 + k_l^2)}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z)} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_z z - z_\Lambda)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Для лигаментного компонента импульса $\vec{p}_l = (p_{lx}, p_{lz})$ в линейном приближении получим выражения:

$$\begin{aligned}
p_{lx} &= \rho_{00} \exp(-z_\Lambda) \partial_z \psi_l = Z \frac{\rho_{00} v \omega^2}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z)} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_l z - z_\Lambda) \times \\
&\times \left[-(-1)^{1/4} \frac{(k_x^2 + k_z^2)}{k_x} \left(k_l + \frac{(-1)^{3/4} \exp(-z_\Lambda) k_x^2 N^2 z}{2\sqrt{2} k_l \tilde{R}(k_x, z) \Lambda} \right) - \right. \\
&\left. - \exp(-z_\Lambda) \left(\frac{k_x N^2}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z) \Lambda} + \frac{(-1)^{1/4} k_x (k_x^2 + k_z^2) N^2 v}{\tilde{R}(k_x, z)^2 \Lambda} \right) \right] \\
p_{lz} &= -\rho_{00} \exp(-z_\Lambda) \partial_x \psi_l = \\
&= Z \frac{(-1)^{3/4} \rho_{00} v \omega^2 (k_x^2 + k_z^2)}{\sqrt{2} \tilde{R}(k_x, z)} \exp(ik_x x - i\omega t) \exp(k_l z - z_\Lambda)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Выражения (3.28)–(3.29) характеризуют импульс, передаваемый отдельными компонентами периодического течения, распространяющегося вдоль свободной поверхности стратифицированной вязкой жидкости. При этом формулы (3.28) определяют часть импульса, вызванного крупномасштабными волновыми компонентами периодического течения, а формулы (3.29) — часть, обусловленную тонкоструктурными лигаментными компонентами течения.

Заключение

Методами теории сингулярных возмущений в линейном приближении проведен расчет динамики и тонкой структуры полей плотности, градиента плотности, функции тока, давления и импульса в периодических возмущениях свободной поверхности в модели двумерной несжимаемой экспоненциально стратифицированной вязкой жидкости.

Полученные выражения, совместно с оценками собственных пространственных и временных масштабов определяющей системы уравнений, задают требования к технике измерений, позволяющей наблюдать тонкую структуру периодических поверхностных течений, которые включают волны, изменяющие положения свободной поверхности, и лигаменты, расслаивающие поле плотности.

Научный и практический интерес представляет расчет влияния лигаментов на эволюцию картины поля плотности в бегущих возмущениях в полной нелинейной постановке.

Благодарности. Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500442-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V. 8. P. 441–455.
2. *Monismith S.G., Cowen E.A., Nepf H.M. et al.* Laboratory observations of mean flows under surface gravity waves // J. Fluid Mech. 2007. V. 573. P. 131–147.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891>
3. *Plueddemann A.J., Weller R.A.* Structure and evolution of the oceanic surface boundary layer during the Surface Waves Processes Program // J. of Marine Syst. 1999. V. 21. № 1–4. P. 85–102.
[https://doi.org/10.1016/S0924-7963\(99\)00007-x](https://doi.org/10.1016/S0924-7963(99)00007-x)
4. *Yan S., Zou Z., You Z.* Eulerian description of wave-induced Stokes drift effect on tracer transport // J. of Marine Sci.&Engng. 2022. V. 10. № 2. P. 253.
5. *Subbaraya S., Breitenmoser A., Molchanov A. et al.* Circling the seas: Design of Lagrangian drifters for ocean monitoring // IEEE Robotics & Autom. Mag. 2016. V. 23. № 4. P. 42–53.
<https://doi.org/10.1109/MRA.2016.2535154>
6. *Bosi S., Broström G., Roquet F.* The role of Stokes drift in the dispersal of North Atlantic surface marine debris // Front. Mar. Sci., Sec. Marine Pollution. 2021. V. 8.
<https://doi.org/10.3389/fmars.2021.697430>
7. *Higgins C., Vanneste J., van den Bremer T.S.* Unsteady Ekman–Stokes dynamics: Implications for surface wave-induced drift of floating marine litter // Geophys. Res. Lett. 2020. V. 47. P. e2020GL089189.
<https://doi.org/10.1029/2020GL089189>
8. *Pizzo N., Melville W.K., Deike L.* Lagrangian transport by nonbreaking and breaking deep-water waves at the ocean surface // J. Phys. Ocean. 2019. V. 49. P. 983–993.
<https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0227.1>
9. *Gerstner F.J.* Theorie der Wellen. Abhandlunger der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Prague. 1802; Repr. in: Annalen der Physik. 1809. V. 32. № 8. P. 412–445.
10. *Абрашкин А.А., Пелиновский Е.Н.* О связи дрейфа Стокса и волны Герстнера // УФН. 2018. Т. 188. № 3. С. 329–334.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038089>
11. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. A. Math.&Phys. Sci. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1953.0006>
12. *Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W.* Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to ‘surf beats’ // J. of Fluid Mech. 1962. V. 13. № 4. P. 481–504.
<https://doi.org/10.1017/S0022112062000877>
13. *Van Den Bremer T.S., Whittaker C., Calvert R. et al.* Experimental study of particle trajectories below deep-water surface gravity wave groups // J. of Fluid Mech. 2019. V. 879. P. 168–186.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.584>
14. *Ильичев А.Т., Савин А.С., Шапков А.Ю.* Движение частиц в поле нелинейных волновых пакетов в слое жидкости под ледяным покровом // ТМФ. 2024. Т. 218. № 3. С. 586–600.
<https://doi.org/10.4213/tmf10585>
15. *You Z.J., Wilkinson D.L., Nielsen P.* Near bed net drift under waves // in: Proc. of the 10th Australasian Conf. on Coastal and Ocean Engineering, Auckland, New Zealand. 1991. Dec. 2–6. P. 183–186.
16. *David H.* Stokes drift in equatorial water waves, and wave–current interactions // Deep Sea Res. Pt. II: Topical Studies in Oceanogr. 2019. V. 160. P. 41–47.
<https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2018.08.003>
17. *Bühler O.* Waves and Mean Flows. Cambridge: Univ. Press, 2014. 374 p.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781107478701>
18. *McWilliams J.C., Restrepo J.M., Lane E.M.* An asymptotic theory for the interaction of waves and currents in coastal waters. // J. of Fluid Mech. 2004. V. 511. P. 135–178.
<https://doi.org/10.1017/S0022112004009358>

19. *Leibovich S.* The form and dynamics of Langmuir circulations // *Annual Rev. of Fluid Mech.* 1983. V. 15. № 1. P. 391–427.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.002135>;
20. *Kinsman, B.* Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean's Surface. Prentice Hall, 1965.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
22. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Т.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Л.;М.: ОГИЗ. ГИТТЛ, 1948. 535 с.
23. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с.
24. *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеиздат.
25. *Rayleigh (Lord).* Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // *Proc. London Math. Soc.* 1882. V. s1–14. Iss. 1. P. 170–177.
<https://doi.org/10.1112/plms/s1-14.1.170>
26. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
27. *Xu F., Li F., Zhang Y.* The symmetry of steady stratified periodic gravity water waves // *Monatshefte für Mathematik.* 2024. V. 203. № 1. P. 247–266.
<https://doi.org/10.1007/s00605-023-01904-4>
28. *Байдулов В.Г.* О задаче определения положения источника внутренних волн // *ПММ.* 2023. Т. 87. №. 1 С. 36–44.
<https://doi.org/10.31857/S0032823523010046>
29. *Князьков Д.Ю., Байдулов В.Г., Савин А.С. и др.* Прямые и обратные задачи динамики поверхностного волнения, вызванного обтеканием подводного препятствия // *ПММ.* 2023. Т. 87. № 3. С. 442–453.
<https://doi.org/10.31857/S0032823523030074>
30. *Wang C.A., Zhang H., Zhu H.L.* Numerical predictions of internal waves and surface thermal signatures by underwater vehicles in density-stratified water using OpenFOAM // *Ocean Engng.* 2023. Т. 272. С. 113847.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.113847>
31. *More R.V., Ardekani A.M.* Motion in stratified fluids // *Annual Rev. of Fluid Mech.* 2023. V. 55. P. 157–192.
<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-011132>
32. *Dore B.D.* Mass transport in layered fluid systems // *J. of Fluid Mech.* 1970. V. 40. № 1. P. 113–126.
<https://doi.org/10.1017/S0022112070000071>
33. *Liu A.K., Davis S.H.* Viscous attenuation of mean drift in water waves // *J. of Fluid Mech.* 1977. V. 81. № 1. P. 63–84.
<https://doi.org/10.1017/S0022112077001918>
34. *Robertson S., Rousseaux G.* Viscous dissipation of surface waves and its relevance to analogue gravity experiments, 2018.
<http://arxiv.org/abs/1706.05255v3>
35. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms.* 2021. V. 10. № 4. P. 286.
<https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
36. *Monismith S.G.* Stokes drift: theory and experiments // *J. of Fluid Mech.* 2020. V. 884. P. F1.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891>
37. *Chashechkin Y.D., Ochirov A.A.* Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // *Mathematics.* 2023. V. 11. № 21. P. 4443.
<https://doi.org/10.3390/math11214443>
38. *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // *Ocean. Sci.* 2018. V. 14. P. 471–502.
<https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018>
39. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений М.: Мир, 1984. 535 с.
40. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 536 с.
41. *Баринев В.А.* Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // *Вестн. С.-Петербургского ун-та. Прикл. матем. Информ. Процессы управл.* 2010. № 2. С. 18–31.

The Fine Structure of the Density Field in Two-Dimensional Periodic Flows on the Surface of a Viscous Stratified Liquid

A. A. Ochirov^{a, #}, Yu. D. Chashechkin^{a, ##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: otchirov@mail.ru, ##e-mail: yulidch@gmail.com*

In the linear approximation, the propagation of a periodic disturbance along the free surface of a viscous stratified fluid in a uniform gravitational field is considered, taking into account the action of surface tension. Complete solutions of the linearized system of fundamental equations of the mechanics of heterogeneous fluids, which determine the regular wave and singular ligament components, are obtained. The fine spatial structure of the fields of next physical variables: fluid velocity, momentum, density and density gradient is calculated.

Keywords: Periodic motion, free surface, viscosity, stratification, fine structure, pressure distribution, density distribution

REFERENCES

1. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Cam. Philos. Soc.*, 1847, vol. 8, pp. 441–455.
2. *Monismith S.G., Cowen E.A., Nepf H.M. et al.* Laboratory observations of mean flows under surface gravity waves. // *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 573, pp. 131–147.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891>
3. *Plueddemann A.J., Weller R.A.* Structure and evolution of the oceanic surface boundary layer during the surface waves processes program // *J. of Marine Syst.*, 1999, vol. 21, no. 1–4, pp. 85–102.
[https://doi.org/10.1016/S0924-7963\(99\)00007-X](https://doi.org/10.1016/S0924-7963(99)00007-X)
4. *Yan S., Zou Z., You Z.* Eulerian description of wave-induced Stokes drift effect on tracer transport // *J. of Marine Sci.&Engng.*, 2022, vol. 10, no. 2, pp. 253.
5. *Subbaraya S., Breitenmoser A., Molchanov A. et al.* Circling the seas: Design of Lagrangian drifters for ocean monitoring // *IEEE Robotics&Autom. Mag.*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 42–53.
<https://doi.org/10.1109/MRA.2016.2535154>
6. *Bosi S., Broström G., Roquet F.* The role of Stokes drift in the dispersal of North Atlantic surface marine debris // *Front. Mar. Sci., Sec. Marine Pollution*, 2021, vol. 8.
<https://doi.org/10.3389/fmars.2021.697430>
7. *Higgins C., Vanneste J., van den Bremer T.S.* Unsteady Ekman–Stokes dynamics: Implications for surface wave-induced drift of floating marine litter // *Geophys. Res. Lett.*, 2020, vol. 47, pp. e2020GL089189.
<https://doi.org/10.1029/2020GL089189>
8. *Pizzo N., Melville W.K., Deike L.* Lagrangian transport by nonbreaking and breaking deep-water waves at the ocean surface // *J. Phys. Ocean*, 2019, vol. 49, pp. 983–993.
<https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0227.1>
9. *Gerstner F.J.* Theorie der Wellen. Abhandlungen der Königlichen Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften, Prague. 1802. Repr. in: *Annalen der Physik*. 1809, vol. 32, no. 8, pp. 412–445.
10. *Ab rashkin A.A., Pelinovsky E.N.* On the relation between Stokes drift and the Gerstner wave // *Phys. Uspekhi*, 2018, vol. 61, no. 3, pp. 307.
<https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.03.038089>
11. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // *Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. A. Math.&Phys. Sci.*, 1953, vol. 245, no. 903, pp. 535–581.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1953.0006>
12. *Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W.* Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to ‘surf beats’ // *J. of Fluid Mech.*, 1962, vol. 13, no. 4, pp. 481–504.
<https://doi.org/10.1017/S0022112062000877>
13. *Van Den Bremer T.S., Whittaker C., Calvert R. et al.* Experimental study of particle trajectories below deep-water surface gravity wave groups. // *J. of Fluid Mech.*, 2019, vol. 879, pp. 168–186.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.584>
14. *Il'ichev A.T., Savin A.S., Shashkov A.Y.* Motion of particles in the field of nonlinear wave packets in a liquid layer under an ice cover // *Theor.&Math. Phys.*, 2024, vol. 218, no. 3, pp. 503–514.
<https://doi.org/10.1134/S0040577924030097>
15. *You Z.J., Wilkinson D.L., Nielsen P.* Near bed net drift under waves // in: *Proc. of the 10th Australasian Conf. on Coastal and Ocean Engineering*, Auckland, New Zealand, 1991, Dec. 2–6, pp. 183–186.
16. *David H.* Stokes drift in equatorial water waves, and wave–current interactions // *Deep Sea Res. pt. II: Topical Studies in Oceanogr.*, 2019, vol. 160, pp. 41–47.

- <https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2018.08.003>
17. *Bühler O.* Waves and Mean Flows,... Cambridge: Univ. Press, 2014. 374 p.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781107478701>
 18. *McWilliams J.C., Restrepo J.M., Lane E.M.* An asymptotic theory for the interaction of waves and currents in coastal waters // *J. of Fluid Mech.*, 2004, vol. 511, pp. 135–178.
<https://doi.org/10.1017/S0022112004009358>
 19. *Leibovich S.* The form and dynamics of Langmuir circulations // *Annual Rev. of Fluid Mech.*, 1983, vol. 15, no. 1, pp. 391–427.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.002135>
 20. *Kinsman B.* Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean's Surface. Prentice Hall, 1965.
 21. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics Vol. 6. Oxford: Pergamon, 1987. 560 p.
 22. *Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V.* Theoretical Hydromechanics. Moscow: Intersci. Pub., 1964. V. 1.
 23. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1924.
 24. *Fedorov K.N.* The Thermohaline Finestructure of the Ocean. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1976. (in Russian)
 25. *Rayleigh (Lord).* Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // *Proc. London Math. Soc.*, 1883, vol. s1–14, iss. 1, pp. 170–177.
<https://doi.org/10.1112/plms/s1-14.1.170>
 26. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1978. 524 p.
 27. *Xu F., Li F., Zhang Y.* The symmetry of steady stratified periodic gravity water waves // *Monatshefte für Mathematik*, 2024, vol. 203, no. 1, pp. 247–266.
<https://doi.org/10.1007/s00605-023-01904-4>
 28. *Baydulov V.G.* On the problem of determining the position of a source of internal waves // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1206–1212.
<https://doi.org/10.1134/S0015462823602085>
 29. *Knyazkov D.Y., Baydulov V.G., Savin A.S. et al.* Direct and inverse problems of the dynamics of surface waves caused by the flow around an underwater obstacle // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 9, pp. 1725–1733.
<https://doi.org/10.1134/S0015462823603030>
 30. *Wang C.A., Zhang H., Zhu H.L.* Numerical predictions of internal waves and surface thermal signatures by underwater vehicles in density-stratified water using OpenFOAM // *Ocean Engng.*, 2023, vol. 272, pp. 113847.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.113847>
 31. *More R.V., Ardekani A.M.* Motion in stratified fluids // *Annual Rev. of Fluid Mech.*, 2023, vol. 55, pp. 157–192.
<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-011132>
 32. *Dore B.D.* Mass transport in layered fluid systems // *J. of Fluid Mech.*, 1970, vol. 40, no. 1, pp. 113–126.
<https://doi.org/10.1017/S0022112070000071>
 33. *Liu A.K., Davis S.H.* Viscous attenuation of mean drift in water waves // *J. of Fluid Mech.*, 1977, vol. 81, no. 1, pp. 63–84.
<https://doi.org/10.1017/S0022112077001918>
 34. *Robertson S., Rousseaux G.* Viscous dissipation of surface waves and its relevance to analogue gravity experiments // <http://arxiv.org/abs/1706.05255v3>
 35. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 286.
<https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
 36. *Monismith S.G.* Stokes drift: theory and experiments // *J. of Fluid Mech.*, 2020, vol. 884, pp. F1.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2019.891>
 37. *Chashechkin Y.D., Ochirov A.A.* Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 21, pp. 4443.
<https://doi.org/10.3390/math11214443>
 38. *Feistel R.* Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // *Ocean. Sci.*, 2018, vol. 14, pp. 471–502.
<https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018>
 39. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Technique. N.Y.: Wiley, 1993. 536 p.
 40. *Sedov L.I.* Mechanics of Continuous Media. World Scientific, 1997.
 41. *Barinov V.A.* Distribution of waves on free surface of viscous liquid // *Vestn. St.-Pb. univ., ser. 10. Prikl. Matem., Inform., Process Upravl.*, 2010, no. 2, pp. 18–31. (in Russian)

УДК 532.612, 532.614

К ВЛИЯНИЮ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ЗАРЯДА НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. А. И. Григорьев^{1,*}, Н. Ю. Колбнева^{2,**}, С. О. Ширяева^{3,***}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

e-mail: grigorai@mail.ru*, kolbneva-nata@yandex.ru*, shir@uniyar.ac.ru***

Поступила в редакцию 22.01.2024 г.

После доработки 07.07.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Теоретическими асимптотическими методами показано, что эффект релаксации электрического заряда влияет на физические характеристики электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли. Получены аналитические выражения для частот, декрементов затухания капиллярных осцилляций каплей из-за вязкого затухания и потерь энергии на излучение. Показано, что частоты электромагнитного излучения облачных капель, реализующиеся в диапазонах сотен килогерц и единиц мегагерц, уменьшаются с увеличением радиуса и зарядового параметра излучающей капли, как и декременты затухания, связанные с излучением. Интенсивность излучения электромагнитных волн снижается при уменьшении электропроводности и подвижности зарядов в жидкости.

Ключевые слова: заряженная капля, капиллярные осцилляции, релаксация заряда

DOI: 10.31857/S0032823524050046 EDN: JPXANL

1. Введение. Впервые проблема электромагнитного излучения от осциллирующей заряженной капли в облаке была рассмотрена в [1] и затем развита в [2–5]. В [5], в частности было указано на ошибку в расчетах [1] (неправильно была определена асимптотика функции Ханкеля), и эта ошибка перекочевала в [2–4]. В [6] было указано на необходимость учета кривизны заряженной поверхности жидкости при записи уравнения баланса поверхностной плотности заряда в жидкости с конечной электропроводностью. Все это сделало актуальным повторение расчетов [3–4].

Сама задача о расчете интенсивности радиоизлучения (конвективного) грозового облака актуальна в связи с широким спектром разнообразных приложений в геофизике, гидрометеорологии, технике и химической технологии. Большое количество работ посвящено теоретическому и экспериментальному изучению капиллярных осцилляций и электростатической неустойчивости жидкой капли, заряженной собственным или индуцированным внешним электрическим полем зарядами (см. [1–5] и цитируемую там литературу).

В частности, исследование излучения осциллирующей каплей электромагнитных волн привлекает внимание из-за проблем радиолокационного зондирования облаков и туманов [7–10], проблем радиопомех от огней Св. Эльма, появляющихся на обшивке самолетов, пролетающих через облака [11].

Что касается эффекта релаксации заряда, то он возможен только при отличной от нуля вязкости жидкости. Это связано тем, что на свободной поверхности электрические напряжения, возникающие из-за релаксационных движений, могут быть скомпенсированы только вязкими напряжениями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уединенную сферическую каплю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости, характеризующейся массовой плотностью ρ , коэффициентами поверхностного натяжения σ и кинематической вязкости ν , удельной проводимостью $\gamma_1 \equiv \gamma$, диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . Примем, что капля несет заряд Q и находится в вакууме с удельной проводимостью $\gamma_2 = 0$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 = 1$. Будем считать проводимость внутренней среды достаточной, чтобы обеспечить отсутствие объемного заряда в капле. Индекс j , принимает значения 1 и 2.

В сферической системе координат (r, θ, ϕ) с началом в центре масс капли уравнение ее поверхности, совершающей осесимметричные капиллярные осцилляции, в произвольный момент времени t представим в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t), \quad (2.1)$$

где $\xi(\theta, t)$ — малое возмущение равновесной сферической формы, генерируемое капиллярным волновым движением тепловой природы. При наличии внешних неконтролируемых силовых воздействий (коагуляция, дробление, столкновение, трение о воздух и т.д.) тепловая амплитуда $|\xi|$ может возрасти до десятков процентов от радиуса капли [12, 13].

Отношение $|\xi|/R$, имеющее смысл безразмерной амплитуды капиллярного волнового возмущения, примем в качестве малого параметра задачи: $\varepsilon \equiv |\xi|/R \ll 1$. Так как движение жидкости вызывается осцилляциями капли, будем считать, что поле скоростей течения внутренней среды $\vec{V}(r, \theta, t)$ имеет тот же порядок малости, что и $\xi(\theta, t)$: $\vec{V}(r, \theta, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$.

В нижеследующих рассуждениях учтем, что собственный заряд капли равномерно распределен на равновесной поверхности с постоянной поверхностной плотностью $\kappa^{(0)}$. В виду конечности электропроводности жидкости перенос электрического заряда при волновом искажении формы капли приводит к эффекту релаксации заряда.

Выпишем систему электрогидродинамических уравнений, описывающих капиллярные осцилляции заряженной вязкой капли конечной проводимости и возникающего при этом электромагнитного излучения.

Система состоит из уравнения Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}(r, \theta, t)}{\partial t} + (\vec{V}(r, \theta, t), \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(r, \theta, t) + \nu \Delta \vec{V}(r, \theta, t), \quad (2.2)$$

уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{V}(r, \theta, t) = 0,$$

уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D}_j(r, \theta, t) = 0, \quad \vec{D}_j(r, \theta, t) = \epsilon_j \vec{E}_j(r, \theta, t)$$

$$\Delta \vec{E}_j(r, \theta, t) - \frac{\epsilon_j \mu_j}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_j(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

условий ограниченности:

$$r \rightarrow 0: \vec{V}(r, \theta, t) \rightarrow 0, \vec{E}_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty: \vec{E}_2(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

и граничных условий на свободной поверхности капли $F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0$: кинематического:

$$\frac{\partial F(r, \theta, t)}{\partial t} + \vec{V}(r, \theta, t) \cdot \nabla F(r, \theta, t) = 0,$$

динамического для касательной компоненты тензора напряжений:

$$\Pi_{ex\tau} - \Pi_{in\tau} - \rho v \left[\vec{\tau}(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t), \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}(r, \theta, t) (\vec{\tau}(r, \theta, t), \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) \right] = 0$$

$$\Pi_{in\tau} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} E_{1n}(r, \theta, t) E_{1\tau}(r, \theta, t), \Pi_{ex\tau} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} E_{2n}(r, \theta, t) E_{2\tau}(r, \theta, t)$$

и динамического для нормальной компоненты тензора напряжений:

$$P(r, \theta, t) - 2\rho v \vec{n}(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t), \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + P_Q(r, \theta, t) = P_\sigma(r, \theta, t)$$

Чтобы учесть эффект релаксации электрического заряда, введем дополнительные граничные условия на поверхности капли $F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0$: скачка нормальной компоненты электрической индукции:

$$D_{exn}(r, \theta, t) - D_{inn}(r, \theta, t) = 4\pi\kappa(r, \theta, t), \quad (2.4)$$

непрерывности касательных компонент напряженности электрического поля:

$$E_{ex\tau}(r, \theta, t) = E_{in\tau}(r, \theta, t),$$

и баланса поверхностной плотности заряда [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(r, \theta, t)}{\partial t} - \gamma (\vec{n}(r, \theta, t), \vec{E}_m(r, \theta, t)) + \kappa(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t), \vec{V}(r, \theta, t)) \operatorname{div} \vec{n}(r, \theta, t) + \\ + \kappa(r, \theta, t) \operatorname{div}_\Sigma \vec{V}_\tau(r, \theta, t) + b \kappa(r, \theta, t) \operatorname{div}_\Sigma \vec{E}_{in\tau}(r, \theta, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Кроме того, потребуем выполнения естественных интегральных условий сохранения объема капли при ее осцилляциях, неизменности положения центра масс:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

а также постоянства суммарного заряда:

$$\oint_S \kappa(r, \theta, t) dS = Q, S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi] \quad (2.6)$$

В приведенной математической формулировке задачи нижний индекс 1 относится к капле, индекс 2 – к внешней среде, μ_j – магнитная проницаемость j -й среды (ниже принимается $\mu_1 = \mu_2 = 1$), $\kappa(r, \theta, t)$ – поверхностная плотность электрического заряда на капле, c – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, b – поверхностная подвижность носителей заряда, $E_j(r, \theta, t)$, $D_j(r, \theta, t)$ – векторы напряженности и индукции электрического поля, создаваемого собственным зарядом, $E_{jn}(r, \theta, t)$, $E_{j\tau}(r, \theta, t)$ – компоненты вектора $E_j(r, \theta, t)$ вдоль ортов нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к поверхности капли (2.1), P – давление внутри капли, $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ – давление

сил поверхностного натяжения, $P_Q = \frac{1}{8\pi} (E_{2n}^2 - E_{2\tau}^2 - \varepsilon_1 (E_{1n}^2 - E_{1\tau}^2))$ – давление электрических сил, $\Pi_{in\tau}, \Pi_{ex\tau}$ – электрические составляющие касательной компоненты тензора напряжений, относящиеся к капле (с нижним индексом «in») и внешней среде (с нижним индексом «ex»), $\text{div}_\Sigma \vec{A} = \left(\text{div} \vec{A} - \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \right)_\Sigma$ – оператор поверхностной дивергенции (символом Σ обозначена поверхность капли (2.1)), $\vec{V}_\tau, \vec{E}_{1\tau}$ – компоненты вектора скорости движения жидкости в капле и напряженности электрического поля внутри капли, лежащие в плоскости касательной к поверхности капли (2.1), и вычисляемые по формулам:

$$\vec{V}_\tau = \vec{V}(r, \theta, t) - \vec{n}(\vec{n}, \vec{V}), \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{1\tau} - \vec{n}(\vec{n}, \vec{E}_{1\tau})$$

Заметим, что в граничном условии (2.5) скорость изменения поверхностной плотности заряда $\frac{\partial \kappa(r, \theta, t)}{\partial t}$ (первое слагаемое в (2.5)) на возмущенной поверхности капли обуславливается несколькими физическими факторами. В этом случае второе слагаемое представляет собой нормальный к свободной поверхности капли ток проводимости за характерное время максвелловской релаксации $\tau_r \sim \varepsilon_1 / \gamma$. Появление третьего слагаемого обусловлено изменением площади свободной поверхности капли в процессе ее капиллярных осцилляций. Четвертый член имеет смысл конвективного потока заряда касательными составляющими течения жидкости за время порядка периода осцилляций капли $\tau \sim (R^3 \rho / \sigma)^{1/2}$. Пятый член связан с направленным переносом носителей заряда вдоль свободной поверхности капли под действием касательной составляющей электрического поля.

В уравнении (2.5) отсутствует вклад диффузионной компоненты, так как влияние механизма диффузии на конечность скорости переноса носителей заряда существенно лишь для плохо проводящих жидкостей типа жидкого гелия.

Отыскание решения приведенной выше системы уравнений проведем методом прямого разложения в рамках теории возмущений [14]. Ограничиваясь линейным приближением по малому параметру $\varepsilon \equiv |\xi| / R \ll 1$, все искомые функции представим в виде асимптотических разложений по ε :

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2), \vec{V}(r, \theta, t) = \vec{V}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \kappa(r, \theta, t) &= \kappa^{(0)}(r, \theta) + \kappa^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \vec{E}_j(r, \theta, t) &= \vec{E}_j^{(0)}(r, \theta) + \vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \quad (j = 1, 2) \\ P(r, \theta, t) &= P^{(0)}(r, \theta) + P^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ P_Q(r, \theta, t) &= P_Q^{(0)}(r, \theta) + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \Pi_{in\tau}(r, \theta, t) &= \Pi_{in\tau}^{(0)}(r, \theta) + \Pi_{in\tau}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \\ \Pi_{ex\tau}(r, \theta, t) &= \Pi_{ex\tau}^{(0)}(r, \theta) + \Pi_{ex\tau}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Номер верхнего индекса указывает на порядок малости по ε соответствующих компонент. Индексом «0» обозначены величины, характеризующие равновесное состояние системы.

Обратим внимание, что в граничных условиях задействованы орты $\vec{n}(r, \theta, t)$ и $\vec{\tau}(r, \theta, t)$. В виду этого возникает необходимость в определении явного вида этих функций.

Вычислим единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности капли вида $F(r, \theta, t) = 0$ по общей формуле: $\vec{n}(r, \theta, t) \equiv \nabla F / |\nabla F|$. В линейном по ε приближении получим:

$$\vec{n} = \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (2.8)$$

В плоскости, касательной к возмущенной поверхности капли в любой ее точке, выберем ортогональные орты $\vec{\tau}_\varphi, \vec{\tau}_\theta$: орт касательной к параллелям $\vec{\tau}_\varphi$ и орт касательной к меридианам $\vec{\tau}_\theta$.

Представим касательную к параллелям как $\vec{\tau}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{n}$, где в качестве постоянного вектора выбран орт оси симметрии $\vec{e}_z$. Несложно убедиться, что вектор $\vec{\tau}_\varphi$, имеющий единичную длину, совпадает с азимутальным ортом $\vec{e}_\varphi$ сферической системы координат:

$$\vec{\tau}_\varphi = \vec{e}_\varphi \quad (2.9)$$

Определим орт второй касательной при помощи векторного произведения: $\vec{\tau}_\theta = \vec{\tau}_\varphi \times \vec{n}$. Используя (2.8), (2.9) и учитывая, что орт должен иметь единичную длину, найдем единичный вектор касательной в меридиальном направлении в виде:

$$\vec{\tau}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta, \quad (2.10)$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат.

3. Решение задачи нулевого порядка малости по ε . Подставляя разложения (2.7) в систему уравнений (2.2)–(2.6) и собирая вместе слагаемые $\sim \varepsilon^0$, получим задачу нулевого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε для невозмущенного состояния системы:

$$\operatorname{div} \vec{E}_j^{(0)} = 0, \operatorname{rot} \vec{E}_j^{(0)} = 0$$

$$r \rightarrow 0: \vec{E}_1^{(0)}(r, \theta, t) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty: \vec{E}_2^{(0)}(r, \theta, t) \rightarrow 0$$

$$r = R: P^{(0)}(r, \theta) + P_Q^{(0)}(r, \theta) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta)$$

$$P^{(0)} = P_0, P_q = \frac{1}{8\pi} \left(\left(E_{2n}^{(0)} \right)^2 - E_{2\theta}^{(0)} - \varepsilon_1 \left(\left(E_{1n}^{(0)} \right)^2 - E_{1\theta}^{(0)} \right) \right)$$

$$P_\sigma^{(0)} = \sigma \operatorname{div} \vec{n}_0, \vec{n}_0 = \vec{e}_r$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \Pi_{in\varphi}^{(0)} = 0, \Pi_{ex\varphi}^{(0)} = 0, E_{ex\varphi}^{(0)}(r, \theta, t) = E_{in\varphi}^{(0)}(r, \theta, t)$$

$$-\gamma \left(\vec{n}_0(r, \theta) \cdot \vec{E}_{in}^{(0)}(r, \theta) \right) + b\kappa_0 \operatorname{div}_\Sigma \left[E_{in\varphi}^{(0)}(r, \theta) \vec{e}_\varphi \right] = 0$$

$$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \Pi_{in\theta}^{(0)} = 0, \Pi_{ex\theta}^{(0)} = 0, E_{ex\theta}^{(0)}(r, \theta, t) = E_{in\theta}^{(0)}(r, \theta, t)$$

$$-\gamma(\vec{n}_0(r, \theta) \cdot \vec{E}_{in}^{(0)}(r, \theta)) + b\kappa_0 \operatorname{div}_\Sigma [E_{in\theta}^{(0)}(r, \theta) \vec{e}_\theta] = 0$$

$$E_{exn}^{(0)}(r, \theta) - \varepsilon_1 E_{inn}^{(0)}(r, \theta) = 4\pi\kappa_0$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

$$\oint_S \kappa_0 dS = QV = [0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$S = [r = R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

где $\vec{n}_0$, $\vec{\tau}_{0\varphi}$, $\vec{\tau}_{0\theta}$ — орты нормали и касательных к равновесной сфере, P_0 — равновесное давление внутри капли.

Решение вышеприведенной системы уравнений нетрудно найти:

$$\kappa^{(0)} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \vec{E}_1^{(0)} = 0, \vec{E}_2^{(0)} = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r, P_0 = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4} \quad (3.1)$$

В итоге приходим к тому, что равновесная форма поверхности капли совпадает с исходной сферической.

4. Решение задачи первого порядка малости по ε . Вывод дисперсионного уравнения.

Подставляя асимптотические выражения (2.7) в полную математическую формулировку задачи (2.2)–(2.6) и выделяя слагаемые $\sim \varepsilon^1$, выпишем гидродинамическую часть задачи в первом порядке малости:

$$\frac{\partial \vec{V}(r, \theta, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{(1)}(r, \theta, t) + \nu \Delta \vec{V}(r, \theta, t) \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}(r, \theta, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}_j^{(1)} = 0, \Delta \vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t) - \frac{\varepsilon_j}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (4.3)$$

$$r \rightarrow 0: \vec{V}(r, \theta, t) \rightarrow 0, \vec{E}_{in}^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

$$r \rightarrow \infty: \vec{E}_{ex}^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

$$r = R: -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + (\vec{V}(r, \theta, t), \vec{e}_r) = 0 \quad (4.6)$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi:$$

$$\Pi_{ex\varphi}^{(1)} - \Pi_{in\varphi}^{(1)} - \rho \nu [\vec{e}_\varphi(\vec{n}_0, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}_0(\vec{e}_\varphi, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t)] = 0, \vec{n}_0 = \vec{e}_r \quad (4.7)$$

$$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \Pi_{ex\theta}^{(1)} - \Pi_{in\theta}^{(1)} - \rho \nu [\vec{e}_\theta(\vec{n}_0, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}_0(\vec{e}_\theta, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t)] = 0 \quad (4.8)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho \nu \vec{n}_0(\vec{n}_0, \nabla) \cdot \vec{V}(r, \theta, t) + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.9)$$

$$r = R: -2\frac{Q}{R^3} \xi(\theta, t) + E_{2r}^{(1)}(r, \theta, t) - \varepsilon_1 E_{inr}^{(1)}(r, \theta, t) = 4\pi\kappa^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.10)$$

$$\text{для } \vec{\tau} = \vec{\tau}_\theta: \frac{Q}{R^3} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + E_{ex\theta}^{(1)}(r, \theta, t) = E_{in\theta}^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.11)$$

$$\text{для } \vec{\tau} = \vec{\tau}_\varphi: E_{ex\varphi}^{(1)}(r, \theta, t) = E_{in\varphi}^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \kappa^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial t} - \gamma E_{1r}^{(1)}(r, \theta, t) + \frac{Q}{4\pi R^2} (\vec{e}_r, \vec{V}(r, \theta, t)) \operatorname{div} \vec{e}_r + \\ & + \frac{Q}{4\pi R^2} \operatorname{div}_\Sigma [\vec{V}(r, \theta, t) + b \vec{E}_m^{(1)}(r, \theta, t)] = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$3R^2 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0, \quad 4R^3 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.14)$$

$$2\pi R^2 \int_0^\pi \left(\kappa^{(1)} + \frac{Q}{2\pi R^3} \xi(\theta, t) \right) \sin \theta d\theta = 0, \quad (4.15)$$

где $E_{jr}^{(1)}, E_{j\theta}^{(1)}, E_{j\varphi}^{(1)}$ — проекции вектора $\vec{E}_j^{(1)}$ на орты сферической системы координат.

Скаляризуем уравнения (4.1), (4.2) по методике, подробно изложенной в [15]. Для этого разложим искомое поле скоростей $\vec{V}(r, \theta, t)$ на сумму трех ортогональных векторных полей:

$$\vec{V}(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^3 \vec{N}_m \psi_m(r, \theta, t) \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.16)$$

где ψ_m — скалярные функции, а дифференциальные векторные операторы $\vec{N}_m$ в сферической системе координат определяются соотношениями:

$$\vec{N}_1 \equiv \nabla, \quad \vec{N}_2 \equiv \vec{N}_1 \times \vec{r} \equiv \nabla \times \vec{r}, \quad \vec{N}_3 \equiv \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{r}), \quad (4.17)$$

и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$(\vec{N}_m^+, \vec{N}_q) = 0, \quad (m \neq q), \quad (4.18)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа Δ :

$$\Delta \vec{N}_m = \vec{N}_m \Delta \quad (4.19)$$

В выражениях (4.17), (4.18) $\vec{r}$ — радиус-вектор, $\vec{N}_m^+$ — операторы, эрмитово-сопряженные к $\vec{N}_m$, имеющие вид:

$$\vec{N}_1^+ \equiv -\nabla, \quad \vec{N}_2^+ \equiv \vec{r} \times \nabla, \quad \vec{N}_3^+ \equiv (\vec{r} \times \nabla) \times \nabla \quad (4.20)$$

Уравнение (4.16) означает, что поле скоростей течения вязкой жидкости представлено суперпозицией потенциальной и вихревой (обусловленных вязкостью) составляющих: оператор $\vec{N}_1$ выделяет потенциальную компоненту, а операторы $\vec{N}_2$ — вихревую тороидальную и $\vec{N}_3$ — вихревую полоидальную части движения реальной жидкости относительно оси симметрии z капли.

Учитывая разложение (4.16) и свойства операторов (4.18), (4.19), приведем систему векторных выражений (4.1), (4.2) к системе трех скалярных уравнений для функций ψ_m :

$$\Delta \psi_m(r, \theta, t) - \frac{1}{v} (1 - \delta_{1m}) \frac{\partial \psi_m(r, \theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.21)$$

и добавки к давлению внутренней среды капли, вызванной искажением $\xi(\theta, t)$ сферической поверхности:

$$P^{(1)}(r, \theta, t) = -\rho \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial t}, \quad (4.22)$$

δ_{lm} — дельта-символ Кронекера.

Прежде чем записать граничные условия (4.6)–(4.9) в терминах скалярных функций ψ_m , перепишем систему (4.6)–(4.9) через проекции вектора скорости $V(r, \theta, t)$ на орты сферической системы координат:

$$r = R: -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + V_r(r, \theta, t) = 0 \quad (4.23)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho v \frac{\partial V_r(r, \theta, t)}{\partial r} + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.24)$$

$$\text{для } \vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \Pi_{ex\theta}^{(1)} - \Pi_{in\theta}^{(1)} - \rho v \left[\frac{\partial V_\theta(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r(r, \theta, t)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} V_\theta(r, \theta, t) \right] = 0 \quad (4.25)$$

$$\text{для } \vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \Pi_{ex\varphi}^{(1)} - \Pi_{in\varphi}^{(1)} - \rho v \left[\frac{\partial V_\varphi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} V_\varphi(r, \theta, t) \right] = 0 \quad (4.26)$$

Входящие в (4.23)–(4.26) компоненты V_r, V_θ, V_φ поля скоростей выражаются в виде:

$$V_r(r, \theta, t) = \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} L \psi_3(r, \theta, t); \quad L \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$V_\theta(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3(r, \theta, t)}{\partial \theta} \right)$$

$$V_\varphi(r, \theta, t) = -\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial \theta},$$

где L — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

После подстановки этих соотношений в (4.23)–(4.26) система скаляризованных граничных условий примет удобный для дальнейшего решения вид:

$$r = R: -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{R} L \psi_3(r, \theta, t) = 0 \quad (4.27)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho v \left(\frac{\partial^2 \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r^2} - L \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_3(r, \theta, t)}{r} \right) \right) + P_Q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) \quad (4.28)$$

$\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta:$

$$\Pi_{2\theta}^{(1)} - \Pi_{1\theta}^{(1)} - \rho v \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1(r, \theta, t)}{r} \right) - \frac{1}{R^2} (2 + L) \psi_3(r, \theta, t) + \frac{\partial^2 \psi_3(r, \theta, t)}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (4.29)$$

$$\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \quad \Pi_{2\varphi}^{(1)} - \Pi_{1\varphi}^{(1)} + \rho v \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \psi_2(r, \theta, t) \right] = 0 \quad (4.30)$$

В (4.28) выражения для линейных по ε поправок к давлению электрического поля $P_q^{(1)}$ и капиллярных сил $P_\sigma^{(1)}$ определяются в виде:

$$P_Q^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{E}_2^{(0)} \right)^2 \xi(\theta, t) + 2 \vec{E}_2^{(0)} \vec{E}_2^{(1)} \right) \quad (4.31)$$

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R} \left[- \left(2 + L \right) \frac{\xi(\theta, t)}{R} \right] \quad (4.32)$$

В случае стоячих капиллярных волн положим зависимость малых величин $\xi(\theta, t)$, $\psi_m(r, \theta, t)$ от времени периодической:

$$\xi(\theta, t) \sim \exp(-i\omega_n t), \quad \psi_m(r, \theta, t) \sim \exp(-i\omega_n t),$$

где i — мнимая единица, ω_n — частота n -ой моды капиллярных осцилляций капли, в общем случае комплексная: $\omega_n = \text{Re} \omega_n \pm i \text{Im} \omega_n$, где вещественная часть $\text{Re} \omega_n$ определяет собственную частоту осцилляций, а мнимая часть — декремент затухания в случае отрицательной мнимой компоненты: $\text{Im} \omega_n < 0$ или инкремент капиллярной неустойчивости капли по отношению к ее собственному заряду в случае положительной мнимой компоненты $\text{Im} \omega_n > 0$.

Решения уравнения (4.21) для скалярных функций $\psi_m(r, \theta, t)$ с учетом условий ограниченности (4.4) представим в виде разложений [16]:

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-i\omega_n t) r^n P_n(\mu) \quad (4.33)$$

$$\psi_m(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \exp(-i\omega_n t) I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{\nu}} \right) P_n(\mu) (m = 2, 3), \quad (4.34)$$

где $\mu \equiv \cos \theta$, $P_n(\mu)$ — полином Лежандра n -ого порядка, n — целое положительное число, $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [17]. В (4.34) нижний индекс m в амплитудном коэффициенте B_{mn} указывает на вихревую тороидальную ($m = 2$) или полоидальную ($m = 3$) компоненту поля скоростей движения жидкости в капле.

Отклонение поверхности осциллирующей капли от равновесной сферической запишем в форме ряда по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.35)$$

Здесь суммирование начинается с $n = 2$, так как в первом порядке малости невозможно возбуждение нулевой ($n = 0$) и первой ($n = 1$) мод, отвечающих за радиальные пульсации капли и ее движение как целого соответственно, в силу дополнительных условий (4.14).

В (4.33)–(4.35) неизвестные амплитудные коэффициенты A_n , B_{mn} , M_n имеют первый порядок малости по ε и вычисляются из системы граничных условий (4.27), (4.29), (4.30).

Сосредоточим свое внимание на вычислении в динамическом граничном условии для нормальной компоненты тензора напряжений (4.28) линейных по ε компонент давлений $P^{(1)}$, $P_Q^{(1)}$, $P_\sigma^{(1)}$, вызванных деформацией $\xi(\theta, t)$ равновесной формы поверхности капли.

Используя решение (4.33) для функции $\psi_1(r, \theta, t)$, из формулы (4.22) при $r = R$ выпишем добавку к гидродинамическому давлению внутри капли $P^{(1)}$:

$$P^{(1)}(r, \theta, t) = i\rho \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n A_n R^n \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.36)$$

Для поправки к давлению сил поверхностного натяжения $P_\sigma^{(1)}$ из (4.32) с учетом разложения (4.35) для возмущения $\xi(\theta, t)$ получается соотношение:

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) M_n \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.37)$$

Чтобы найти выражения для добавки к давлению электрических сил $P_Q^{(1)}$ и электрических составляющих касательной компоненты тензора напряжений $\Pi_{2\theta}^{(1)} - \Pi_{1\theta}^{(1)}$, $\Pi_{2\varphi}^{(1)} - \Pi_{1\varphi}^{(1)}$, необходимо решить краевую задачу (4.3)–(4.5), (4.10)–(4.13), (4.15) для напряженности поля $\vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t)$.

Для решения векторных уравнений (4.3) в рамках метода операторной скаляризации представим напряженность электрического поля $\vec{E}_j^{(1)}(r, \theta, t)$ в виде суперпозиции:

$$\vec{E}_j^{(1)} = \sum_{m=1}^3 \vec{N}_m \Phi_j^{(m)} \quad (m = 1, 2, 3), \quad (4.38)$$

где $\Phi_j^{(m)}$ – неизвестные скалярные функции, $\vec{N}_m$ – векторные дифференциальные операторы, описываемые выражениями (4.17) и подчиняющиеся свойствам (4.18), (4.19).

Подставляя (4.38) в уравнение непрерывности электрического поля (4.3) и применяя условие ортогональности, приходим к уравнению Лапласа для скалярной функции $\Phi_j^{(1)}$:

$$\Delta \Phi_j^{(1)} = 0 \quad (4.39)$$

В силу свойства коммутативности операторов-проекторов $\vec{N}_m$ с оператором Лапласа (4.19) подстановка разложения (4.38) в волновое уравнение (4.3) позволяет выписать систему трех скалярных уравнений:

$$\sum_{m=1}^3 \vec{N}_m \left\{ \Delta \Phi_j^{(m)} - \frac{\varepsilon_j}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^{(m)}}{\partial t^2} \right\} = 0 \quad (m = 1, 2, 3)$$

Положим временную зависимость функций $\Phi_j^{(m)}$ экспоненциальной: $\Phi_j^{(m)} \sim \exp(-i\omega_n t)$. Тогда подействовав слева на выше записанное уравнение поочередно эрмитовосопряженными операторами $\vec{N}_m^+$ ($m = 1, 2, 3$), при использовании свойства (4.18) перейдем к уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_j^{(m)} + \varepsilon_j k^2 \Phi_j^{(m)} = 0, \quad k \equiv \frac{\text{Re } \omega_n}{c}, \quad (4.40)$$

где k – волновое число.

Из уравнения (4.40) при значении индекса $m = 1$ с учетом (4.39) легко прийти к решению: $\Phi_j^{(1)} = 0$, что соответствует отсутствию потенциальной составляющей электрического поля. В результате поправка к напряженности поля $\vec{E}_j^{(1)}$, связанная с возмущением $\xi(\theta, t)$ равновесной формы капли, представляется только вихревой частью:

$$\vec{E}_j^{(1)} = \vec{N}_2 \Phi_j^{(2)} + \vec{N}_3 \Phi_j^{(3)}$$

Учитывая явный вид векторных операторов $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, запишем составляющие вектора $\vec{E}_j^{(1)}$ в сферических координатах (r, θ, φ) , выраженные через неизвестные функции $\Phi_j^{(2)}$, $\Phi_j^{(3)}$:

$$\vec{N}_2 \Phi_2 \equiv -\frac{\partial \Phi_j^{(2)}}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi \quad (4.41)$$

$$\vec{N}_3 \Phi_3 \equiv -\frac{1}{r} \hat{L} \Phi_j^{(3)} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_j^{(3)}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (4.42)$$

Решение уравнения Гельмгольца (4.40) при $j = 1$ (внутри капли), ограниченное в начале координат, представим в виде суперпозиции стоячих волн:

$$\Phi_1^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} \exp(-i\omega_n t) j_n(kr) P_n(\mu) \quad (m = 2, 3) \quad (4.43)$$

Решение уравнения (4.40) при $j = 2$ (вне капли), удовлетворяющее условию ограниченности на бесконечном удалении от капли, естественно искать в виде суперпозиции бегущих волн:

$$\Phi_2^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(m)} \exp(-i\omega_n t) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \quad (m = 2, 3) \quad (4.44)$$

Здесь $j_n(z)$ – сферическая функция Бесселя первого рода, $h_n^{(2)}(z)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода или функция Ханкеля [18], $C_n^{(m)}$, $D_n^{(m)}$ – неизвестные коэффициенты первого порядка малости по ϵ , вычисляемые из граничных условий (4.10)–(4.13).

Несложно показать, что для выполнения условия равенства касательных компонент при $\vec{\tau} = \vec{\tau}_\phi$ необходимо потребовать, чтобы все константы $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ в решениях (4.43), (4.44) для функций $\Phi_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$) обращались в ноль. Из сказанного следует отсутствие тороидальной части поля: $\Phi_j^{(2)} = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля внутри $\vec{E}_1^{(1)}$ и вне капли $\vec{E}_2^{(1)}$ описывается лишь полоидальной составляющей:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)} \exp(-i\omega_n t) \left[\frac{1}{r} n(n+1) j_n(\epsilon_1^{1/2} kr) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r} j_n(\epsilon_1^{1/2} kr) + \frac{\partial j_n(\epsilon_1^{1/2} kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(3)} \exp(-i\omega_n t) \left[\frac{1}{r} n(n+1) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{r} h_n^{(2)}(kr) + \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Исходя из условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля для орта касательной $\vec{\tau} = \vec{\tau}_\theta$, найдем соотношение, связывающее амплитуды M_n , $C_n^{(3)}$, $D_n^{(3)}$ разложений (4.35), (4.45), (4.46):

$$C_n^{(3)} = \frac{Q}{R^2} M_n f_1 + D_n^{(3)} f_2 \quad (4.47)$$

$$f_1 \equiv \frac{1}{\partial_r (r j_n(\epsilon_1^{1/2} kr)) \Big|_{r=R}}, \quad f_2 \equiv \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}{\partial_r (r j_n(\epsilon_1^{1/2} kr)) \Big|_{r=R}}$$

Условие скачка нормальной компоненты вектора электрической индукции на заряженной границе жидкости (4.10) после подстановки в него решений (4.45), (4.46) при использовании амплитудного коэффициента (4.47) позволяет определить поправку первого порядка малости к равновесной плотности заряда:

$$\begin{aligned} \kappa^{(1)} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{Q}{R^3} M_n \left(2 + \varepsilon_1 f_1 n(n+1) j_n(\varepsilon_1^{1/2} kR) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} D_n^{(3)} n(n+1) \left(h_n^{(2)}(kR) - \varepsilon_1 f_2 j_n(\varepsilon_1^{1/2} kR) \right) \right] \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Применяя (4.23), перепишем векторное условие баланса поверхностной плотности заряда в скалярном виде:

$r = R$:

$$\frac{\partial \kappa^{(1)}}{\partial t} - \gamma E_{1r}^{(1)} + \frac{Q}{2\pi R^3} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{Q}{4\pi R^4} L \left(\psi_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_3) \right) + b \frac{Q}{4\pi R^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_{1\theta}^{(1)} \sin \theta) = 0,$$

из которого с учетом уравнений (4.33), (4.34) при $m = 3$, (4.45), (4.48) выразим коэффициент $D_n^{(3)}$ в (4.46) через амплитуды M_n, A_n, B_{3n} в виде:

$$D_n^{(3)} = \frac{Q}{R^2} F_2 \left[M_n f_1 F_1 + \frac{1}{R} \left(A_n R^n + B_{3n} \partial_r \left(r I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right) \right) \right]_{r=R} \quad (4.49)$$

$$F_1 \equiv (-i\omega_n \varepsilon_1 + 4\pi\gamma) j_n(\varepsilon_1^{1/2} kR) + b \frac{Q}{R^3} \frac{1}{f_1}, \quad F_2 = \frac{1}{-i\omega_n h_n^{(2)}(kR) - f_2 F_1}$$

Заметим, что интегральное условие сохранения полного заряда капли (4.15) выполняется тождественно.

Наконец, подставляя в (4.31) полученные решения (3.1), (4.46) для напряженности поля $\vec{E}_2^{(0)}, \vec{E}_2^{(1)}$ с учетом амплитуды (4.49), запишем при $r = R$ выражение для добавки к давлению электрических сил $P_Q^{(1)}$:

$$P_Q^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi R^5} \sum_{n=0}^{\infty} [T_1 M_n + T_2 A_n + T_3 B_{3n}] \exp(-i\omega_n t) P_n(\mu) \quad (4.50)$$

$$T_1 \equiv -2 + n(n+1) f_1 F_1 F_2 h_n^{(2)}(kR), \quad T_2 \equiv R^{n-1} n(n+1) F_2 h_n^{(2)}(kR)$$

$$T_3 \equiv \frac{1}{R} n(n+1) F_2 h_n^{(2)}(kR) \partial_r \left(r I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right) \Big|_{r=R}$$

Далее перейдем к вычислению электрических частей касательных компонент тензора напряжений в (4.29), (4.30). Воспользовавшись соотношениями (2.8)–(3.1), (4.45), (4.46), убедимся, что в первом порядке малости по ε компоненты $\Pi_{2\varphi}^{(1)} = \Pi_{1\varphi}^{(1)} = \Pi_{1\theta}^{(1)} = 0$,

а $\Pi_{2\theta}^{(1)}$ рассчитывается по формуле $\Pi_{2\theta}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R} \left(E_2^{(0)} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + E_2^{(0)} E_{2\theta}^{(1)} \right]$, из которой при

$r = R$ несложно найти:

$$\Pi_{2\theta}^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi R^5} \sum_{n=0}^{\infty} [G_1 M_n + G_2 A_n + G_3 B_{3n}] \exp(-i\omega_n t) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta}$$

$$G_1 \equiv 1 + f_1 F_1 F_2 \partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}, \quad G_2 \equiv R^{n-1} F_2 \partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}$$

$$G_3 \equiv \frac{1}{R} F_2 \partial_r \left(r I_n \left(r \sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right) \Big|_{r=R} \partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}$$

Рассмотрим теперь граничные условия (4.27), (4.29), (4.30). Подставим найденные электрические составляющие в (4.29), (4.30) и подействуем на эти уравнения слева

оператором $\vec{N}_1$. При использовании свойства ортогональности операторов (4.18) и равенства $\vec{N}_2^+ \cdot \vec{N}_2 = -L$ преобразованное уравнение (4.29) и условие (4.30) с учетом разложений (4.33), (4.34) при $m = 3$ позволяют определить связь неизвестных констант A_n, B_{3n} с амплитудами капиллярных осцилляций M_n :

$$A_n = M_n \frac{-i\omega_n \left[-i\omega_n \rho \left(\frac{2}{x} f(x) - 1 - \frac{2}{x^2} (n-1)(n+1) \right) + \frac{G_3}{I_n(x)} \right] + \frac{Q^2}{4\pi R^5} \frac{G_1 n(n+1)}{R}}{nR^{n-1} \left[-i\omega_n \rho \left(\frac{2}{x} f(x) - 1 \right) + \frac{Q^2}{4\pi R^5} \left(-\frac{G_2(n+1)}{R^n} + \frac{G_3}{I_n(x)} \right) \right]}$$

$$B_{n3} = M_n \frac{-i\omega_n \left(2\rho v(n-1) - \frac{Q^2}{4\pi R^5} \frac{G_2}{R^{n-2}} \right) - \frac{Q^2}{4\pi R^5} nRG_1}{RnI_n(x) \left[-i\omega_n \rho \left(\frac{2}{x} f(x) - 1 \right) + \frac{Q^2}{4\pi R^5} \left(-\frac{G_2(n+1)}{R^n} + \frac{G_3}{I_n(x)} \right) \right]}$$

$$f(x) = \frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}, x = R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}},$$

а из граничного условия (4.30) для неизвестной скалярной функции $\psi_2(r, \theta, t)$ после подстановки в него представления (4.34) при $m = 2$ несложно получить уравнение вида:

$$B_{2n} \left[\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} I_{n+1} \left(R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) + \frac{1}{R} (n-1) I_n \left(R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}} \right) \right] = 0$$

Легко заметить, что последнее равенство может выполняться, когда все коэффициенты B_{2n} положить равными нулю: $B_{2n} = 0$, либо приравнять нулю выражение в квадратных скобках. Из первого случая следует обнуление скалярной функции $\psi_2(r, \theta, t)$, что равносильно отсутствию вихревых тороидальных движений внутренней среды капли при ее капиллярных осцилляциях. Во втором случае получаем дисперсионное уравнение, определяющее апериодически затухающие вихревые тороидальные движения жидкости. При этом краевая задача для отыскания $\psi_2(r, \theta, t)$ полностью автономна и никак не связана с остальной частью анализируемой системы. В виду этого в нижеследующем изложении функция $\psi_2(r, \theta, t)$ рассматриваться не будет.

Для дальнейшего анализа решения удобнее рассмотреть динамическое граничное условие для нормальной составляющей тензора напряжений (4.28) относительно амплитуд возмущения M_n , которые легко оценить в экспериментальных и естественных условиях [11]. Для этого подставим в (4.28) выражения (4.36), (4.37), (4.50) для компонент давлений $P^{(1)}$, $P_Q^{(1)}$, $P_\sigma^{(1)}$ и разложения (4.33), (4.34) для скалярных функций $\psi_1(r, \theta, t)$, $\psi_3(r, \theta, t)$ с учетом полученных амплитудных коэффициентов A_n, B_{3n} . Применяя известные рекуррентные соотношения для функции Бесселя $I_n(x)$ (см. [18], стр. 263):

$$\frac{\partial I_n(x)}{\partial x} = I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x), I_{n+1}(x) = -\frac{2n+1}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x),$$

и пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, получим общий вид дисперсионного уравнения для полоидальных движений жидкости в излучающей капле:

$$\omega_n^3 + i\alpha_1 \omega_n^2 + \alpha_2 \omega_n + i\alpha_3 = 0 \quad (n \geq 2) \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\equiv 2 \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) - \frac{\sigma}{\rho R^3} W (n+1) F_2 \left(h_n^{(2)}(kR) n + \partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \right) \Big|_{r=R} - \\
&\quad - x f(x) \left\{ \frac{\sigma}{\rho R^3} W F_2 \partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} + 2 \frac{\nu}{R^2} \right\} \\
\alpha_2 &\equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} n \left\{ W (n+1) G_1 - (n-1)(n+2) \left[1 - W \frac{T_1}{(n-1)(n+2)} \right] \right\} + \\
&\quad + x f(x) \left\{ 4 \frac{\nu^2}{R^4} n(n-1)(n+2) - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} W F_2 n \left(n(n+1) h_n^{(2)}(kR) + 2 \partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \right) \Big|_{r=R} \right\} \\
\alpha_3 &\equiv -x f(x) \left\{ 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} W G_1 n^2 (n+1) + 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} W T_1 n - 2 \frac{\sigma}{\rho R^3} \frac{\nu}{R^2} n(n-1)(n+2) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\sigma}{\rho R^3} \right)^2 W F_2 n \left(\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \right) \Big|_{r=R} \left((n-1)(n+2) + 2W \right) + W h_n^{(2)}(kR) n(n+1) \right\}
\end{aligned}$$

В (4.51) параметр Релея $W \equiv Q^2/4\pi\sigma R^3$ характеризует устойчивость заряженной поверхности проводящей капли по отношению к собственному заряду (т.е. в случае, когда силы поверхностного натяжения преобладают над электрическими силами). При этом условие устойчивости капиллярных осцилляций n -ой колебательной моды представляется в виде $W < (n+2)$ [19]. Для основной моды $n=2$ критическая для начала реализации электростатической неустойчивости проводящей капли величина ее заряда выписывается в виде: $Q_{кр} = 4R\sqrt{\pi\sigma R}$.

Несложно заметить, что учет конечности скорости перераспределения заряда капли приводит к увеличению порядка алгебраического уравнения (4.51) по сравнению с дисперсионным уравнением при отсутствии эффекта релаксации заряда. Это объясняется усложнением структуры спектра реализующихся движений внутренней среды капли за счет появления релаксационных аperiодических движений жидкости, связанных с перераспределяющимся по возмущенной поверхности электрическим зарядом. Возникающие приповерхностные электрические токи, обусловленные сдвигом фаз между капиллярным волновым движением жидкости и течением, связанным с перемещением носителей заряда, приводят к диссипации кинетической энергии в виде тепла.

Обратим внимание, что влияние вязкости на капиллярные осцилляции капли (на основной (второй) колебательной моде $n=2$) оценивается величиной безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\mu = \frac{\nu}{Re\omega_2 R^2} = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$ [20]. Как видно, безразмерная комбинация μ зависит не только от самого коэффициента кинематической вязкости ν , но и от плотности жидкости ρ , коэффициента поверхностного натяжения σ и радиуса капли R . В связи с этим при неизменных величинах ν , ρ , σ жидкость может проявлять себя как маловязкая ($\mu \ll 1$) и сильновязкая ($\mu \gg 1$) в зависимости от размеров капель. Таким образом, выполнение критерия сильной вязкости ($\mu \gg 1$) возможно для очень мелких капель, когда их осцилляции подавляются вязкостью. Однако осцилляции капель имеют место для малых значений вязкости ($\mu \ll 1$), соответствующих большему радиусам.

Оценим величину безразмерного параметра μ , принимая во внимание, что линейные размеры R туманных, облачных и дождевых капель варьируются в пределах от

$R = 1$ мкм до $R = 3.5$ мм [21]. Используя средние характеристики водяных капель $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $v = 0.01$ см²/с и принятые радиусы R , легко показать, что значение параметра μ изменяется в диапазоне от $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ при $R = 3.5$ мм до $\mu \approx 0.117$ при $R = 1$ мкм. Это означает, что во всех случаях величина безразмерной вязкости μ удовлетворяет условию $\mu \ll 1$, что применительно к осцилляциям рассматриваемых капель.

Исходя из выше сказанного, для перехода к пределу малой вязкости ($\mu \ll 1$) воспользуемся асимптотическим выражением функции Бесселя $I_n(x)$ при больших значениях аргумента [18, стр. 262]:

$$x \rightarrow \infty: I_n(x) = \frac{1}{2x} \exp(x) \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

с учетом которого имеем:

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right); x = R\sqrt{\frac{-i\omega_n}{v}}, \quad (4.52)$$

O — символ порядка [14].

Учитывая асимптотическое поведение функции Бесселя $j_n(z)$ при малых значениях аргумента [18, стр. 257]:

$$z \rightarrow 0: j_n(z) = \frac{z^n}{(2n+1)!!} (1 + O(z^2)),$$

для которой справедливо рекуррентное соотношение (см. [18, стр. 258]):

$$\frac{\partial j_n(z)}{\partial z} = -j_{n+1}(z) + \frac{n}{z} j_n(z),$$

найдем асимптотическое выражение:

$$\frac{j_n(z_0)}{\partial_z (z j_n(z)) \Big|_{z=z_0}} = \frac{1}{n+1} + O(z_0^2); z_0 = \varepsilon_1^{1/2} kR \quad (4.53)$$

Используя разложение сферической функции $h_n^{(2)}(z)$ в степенной ряд [18]:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}},$$

для случая $z = z_1 \ll 1$ получим решение:

$$\frac{h_n^{(2)}(z_1)}{\partial_z (z h_n^{(2)}(z)) \Big|_{z=z_1}} \approx -\frac{1}{n} + i \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z_1^{2n+1}, z_1 = kR \quad (4.54)$$

После подстановки асимптотических разложений (4.52)–(4.54) в (4.51), выпишем кубическое дисперсионное уравнение в относительно простом виде:

$$\omega_n^3 + il_1 \omega_n^2 - \omega_n (l_{21} + il_{22}) - il_{31} + l_{32} = 0 \quad (n \geq 2) \quad (4.55)$$

$$l_1 \equiv \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} + 2 \frac{v}{R^2} (n-1)(2n+1)$$

$$l_{21} = \omega_{n0}^2 + 2 \frac{v}{R^2} \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} (n-1)(2n+1)$$

$$\begin{aligned}\omega_{n0}^2 &\equiv \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right) \\ l_{22} &\equiv W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2(n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \\ l_{31} &\equiv \omega_{n0}^2 \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} \\ l_{32} &\equiv W \frac{\sigma}{\rho R^3} \left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1} n^2(n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1},\end{aligned}$$

где ω_{n0} – собственная частота капиллярных осцилляций заряженной капли проводящей жидкости.

Как видно из (4.55), учет конечности скорости переноса заряда описывается соотношением $\left(4\pi\gamma + b \frac{Q}{R^3} (n+1) \right) \left(1 + \frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^{-1}$, которое при $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ обращается в ноль.

В этом случае отсутствие эффекта релаксации заряда обуславливается мгновенным перераспределением носителей заряда. В результате (4.55) превращается в дисперсионное уравнение для затухающих капиллярных осцилляций заряженной капли идеально проводящей маловязкой жидкости с учетом энергопотерь на электромагнитное излучение:

$$\begin{aligned}\omega_n^2 + 2i\omega_n \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) - \\ - \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} + i \frac{Wn(n+1)}{(n-1)(n+2)} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \right) = 0,\end{aligned}\quad (4.56)$$

где $k \equiv \frac{\text{Re}\omega_n}{c}$ – волновое число.

5. Решение дисперсионного уравнения. Обратимся теперь к решению дисперсионного уравнения (4.55). Данные натурных измерений средних зарядов на каплях естественного происхождения с типичными размерами от $R = 1$ мкм до $R = 3.5$ мм показывают, что в реальных условиях большая часть капель несет малые заряды, не превышающие одной десятой Рэлеевского предела [21]. Тогда в случае устойчивой поверхности капли по отношению к собственному заряду общий вид комплексной частоты задается в виде: $\omega_n = \text{Re}\omega_n - i\text{Im}\omega_n$. Вещественная компонента $\text{Re}\omega_n$ соответствует собственной частоте осцилляций, а мнимая отрицательная часть определяет полный декремент затухания $\text{Im}\omega_n = \eta_1 + \eta_2$, связанный с потерями первоначально запасенной энергии капиллярных осцилляций капли на диссипацию в виде тепла за счет вязкости (η_1) и на генерацию электромагнитных волн (η_2).

При помощи пакета аналитических вычислений, учитывая условие $\eta_2 \ll \text{Re}\omega_n$ (это следует из того, что формула для η_2 , определяемая слагаемыми в (4.55), зависящими от параметра Релея W , будет содержать малый параметр $z_1 = kR \ll 1$), получим комплексные решения кубического уравнения (4.55). Их реальные $\text{Re}\omega_n^{(j)}$ и мнимые $\text{Im}\omega_n^{(j)}$ ($j = 1 - 3$) составляющие для разных диапазонов радиусов капель представляются в виде:

для $R < 42$ мкм:

$$\text{Re}\omega_n^{(1)} = 0 \quad (5.1)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = \alpha_1 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.2)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(3)} = -\alpha_1 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.3)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(1)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.4)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.5)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(3)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) - \alpha_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.6)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(1)} = 0 \quad (5.7)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = \alpha_1 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.8)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n^{(3)} = \alpha_1 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.9)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(1)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) - \alpha_2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.10)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.11)$$

$$\operatorname{Im} \omega_n^{(3)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) + \alpha_2 \cos \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} y_0 \right) \quad (5.12)$$

$$\alpha_0 \equiv \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \frac{1}{y} (l_1^2 - 3l_{21}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} y, \alpha_1 \equiv -\frac{\sqrt[3]{2}}{3} \frac{1}{y} (l_1^2 - 3l_{21}) + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} y, \alpha_2 \equiv \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y}$$

$$y_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} |2l_1^3 - 9l_1 l_{21} + 27l_{31} - \sqrt{x}|, y \equiv |2l_1^3 - 9l_1 l_{21} + 27l_{31} - \sqrt{x}|^{\frac{1}{3}}$$

$$x \equiv |27l_1^2 l_{21}^2 - 108l_{21}^3 - 108l_1^3 l_{31} + 486l_1 l_{21} l_{31} - 729l_{31}^2|$$

В выражениях (5.1)–(5.12) первый корень $\omega_n^{(1)} = -i \operatorname{Im} \omega_n^{(1)}$ соответствует зарядово-релаксационному аperiодическому движению жидкости, второй $\omega_n^{(2)} = \operatorname{Re} \omega_n^{(2)} - i \operatorname{Im} \omega_n^{(2)}$ и третий $\omega_n^{(3)} = -\operatorname{Re} \omega_n^{(3)} - i \operatorname{Im} \omega_n^{(3)}$ корни определяют затухающие капиллярные осцилляции капли ($\operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = \operatorname{Im} \omega_n^{(3)}, \operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = -\operatorname{Re} \omega_n^{(3)}$).

В (5.1)–(5.12) верхний индекс в круглых скобках ($j = 1 - 3$) указывает на порядковый номер корня дисперсионного уравнения (4.55).

Вспомним, что волновое число $k \equiv \operatorname{Re} \omega_n^{(1)} / c$ и, принимая во внимание отсутствие реальной части (5.1), (5.7) мнимой частоты $\omega_n^{(1)}$, из (5.4), (5.10) найдем декремент затухания $\eta_1^{(1)}$ зарядово-релаксационного аperiодического движения жидкости:

для $R < 42$ мкм:

$$\eta_l^{(1)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctg y_0\right) \quad (5.13)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\eta_l^{(1)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

Из полного декремента затухания $\text{Im} \omega_n^{(j)}$ ($j = 2, 3$), определяемого выражениями (5.5), (5.6) при $R < 42$ мкм и (5.11), (5.12) при $R \geq 42$ мкм, выделим отдельные решения для декремента затухания $\eta_l^{(j)}$ ($j = 2, 3$) полоидального движения жидкости в капле (при вязкости $\nu \neq 0$):

для $R < 42$ мкм:

$$\eta_l^{(2)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right) \quad (5.14)$$

$$\eta_l^{(3)} = -\frac{l_1}{3} - \alpha_0 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\eta_l^{(2)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctg y_0\right), \eta_l^{(3)} = -\frac{l_1}{3} + \alpha_0 \sin\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

Заметим, что полученные соотношения $\eta_l^{(2)}, \eta_l^{(3)}$ определяются двумя первыми слагаемыми в (5.5), (5.6), (5.11), (5.12), не зависящими от волнового числа $k \equiv \frac{\text{Re} \omega_n^{(j)}}{c}$ (в полном декремента затухания $\text{Im} \omega_n^{(j)}$ принимается $c \rightarrow \infty$).

Подставляя в третье слагаемое в (5.5), (5.6), (5.11), (5.12) волновое число $k = \frac{\text{Re} \omega_n^{(j)}}{c}$ ($j = 2, 3$) и выражения (5.2), (5.3) при $R < 42$ мкм, (5.8), (5.9) при $R \geq 42$ мкм для реальных компонент $\text{Re} \omega_n^{(j)}$ ($j = 2, 3$), из полного декремента затухания $\text{Im} \omega_n^{(j)}$ (в отсутствие вязкости $\nu = 0$) выразим поправки $\eta_2^{(j)}$ ($j = 2, 3$), связанные с энергопотерями осциллирующей заряженной капли на излучение электромагнитных волн:

для $R < 42$ мкм:

$$\eta_2^{(2)} = \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right), \eta_2^{(3)} = -\sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arctg y_0\right) \quad (5.15)$$

для $R \geq 42$ мкм:

$$\eta_2^{(2)} = \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctg y_0\right), \eta_2^{(3)} = \sqrt[3]{2} \frac{l_{22}}{y} \cos\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right)$$

$$l_{22} \equiv W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2 (n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(\frac{R}{c} \alpha_1 \cos\left(\frac{1}{3}\arctg y_0\right) \right)^{2n+1},$$

где коэффициенты где y_0, y зависят от физических параметров задачи.

Отметим, что поправки $\eta_2^{(j)}$ ($j = 2, 3$) к декременту затухания на электромагнитное излучение зависят от волнового числа k и определяются конечным значением скорости распространения электромагнитных волн в вакууме c .

Для отыскания численных решений дисперсионного уравнения (4.55), положим, что осцилляции капель связаны с возбуждением основной (второй) моды $n = 2$, соответствующей сфероидальным деформациям [20]. Примем для расчетов согласно справочным данным [21]: $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 1 \cdot 10^6$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ. Тогда для внутриоблачных капель, имеющих средние заряды $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.002Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм), при $R = 3$ мкм справедливо решение:

$$\omega_2^{(1)} = -8.33 \cdot 10^6 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (4.61 \cdot 10^6 - 0.56 \cdot 10^6 i) \text{ рад/с}$$

$$\omega_2^{(3)} = (-4.61 \cdot 10^6 - 0.56 \cdot 10^6 i) \text{ рад/с}$$

Для капли размером $R = 30$ мкм найдем:

$$\omega_2^{(1)} = -162 \cdot 10^3 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (147 \cdot 10^3 - 5.6 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с}$$

$$\omega_2^{(2)} = (-147 \cdot 10^3 - 5.6 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с}$$

Используя средние заряды дождевых капель $Q = 7 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 2 \cdot 10^{-3}Q_{кр}$ при $R = 0.25$ мм и $\sim 3 \cdot 10^{-5}Q_{кр}$ при $R = 3.5$ мм), для мелкой облачной капли с радиусом $R = 0.25$ мм получим следующие результаты:

$$\omega_2^{(1)} = -1,55 \cdot 10^5 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (6.1 \cdot 10^3 - 80 i) \text{ рад/с}$$

$$\omega_2^{(3)} = (-6.1 \cdot 10^3 - 80 i) \text{ рад/с}$$

Для крупной дождевой капли с характерным линейным размером $R = 3.5$ мм имеем:

$$\omega_2^{(1)} = -154 \cdot 10^3 i \text{ рад/с}, \omega_2^{(2)} = (117 - 0.4 i) \text{ рад/с}, \omega_2^{(3)} = (-117 - 0.4 i) \text{ рад/с}$$

Анализ численных расчетов показывает, что первый корень $\omega_2^{(1)}$ является чисто мнимым и соответствует релаксационному аperiodическому затухающему движению жидкости, порожденному перетеканием заряда по возмущенной поверхности капли. Второй $\omega_2^{(2)}$ и третий $\omega_2^{(3)}$ корни содержат одинаковые мнимые части и разные по знаку реальные компоненты. При этом $\omega_2^{(2)}$, $\omega_2^{(3)}$ ответственны за быстро затухающие капиллярные осцилляции облачных и дождевых капель. В этом случае величина декремента затухания $\eta_1^{(j)}$ ($j = 2, 3$) полоидального движения жидкости в капле на один-два порядка слабее частоты собственных осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(j)}$ ($j = 2, 3$).

Кроме того, заметим, что среди решений $\omega_2^{(2)}$, $\omega_2^{(3)}$ физически значимым является второй корень $\omega_2^{(2)}$, имеющий положительную вещественную часть $\text{Re}\omega_2^{(2)} > 0$. В связи с этим для дальнейшего анализа будем использовать решение $\omega_2^{(2)} = \text{Re}\omega_n^{(2)} - i(\eta_1^{(2)} + \eta_2^{(2)})$.

В рассматриваемой ситуации декремент затухания $\eta_1^{(2)}$ проявляется в подавлении осцилляций капли и, следовательно, на прекращении радиоизлучения на соответствующей частоте. Так, осцилляции (электромагнитное излучение) на основной моде $n = 2$ облачной капли размером $R = 3$ мкм исчезают при значении кинематической вязкости $\nu = 0.08$ см²/с, а для капли $R = 30$ мкм — при $\nu = 0.26$ см²/с.

Численные расчеты показывают, что по сравнению с каплей идеально проводящей жидкости учет конечности скорости перераспределения заряда приводит к не-

большому увеличению собственной частоты осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ при снижении радиуса капли.

Из рис. 1, на котором представлены расчетные зависимости $\text{Re}\omega_2^{(2)}(R, W)$ по формуле (5.2), прослеживается весьма быстрое уменьшение частоты осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ при возрастании размера R и заряда Q капли (величины параметра Релея W). Заметим, что кривые построены для основной моды $n = 2$ при значениях параметра Релея, достаточно близких к критическому $W_{\text{кр}} = 4$. Однако в реальных условиях грозового облака заряды на каплях такие, что величина $W \ll 1$, поэтому приведенные зависимости имеют лишь качественный характер.

Графики зависимостей $\eta_1^{(2)}(R, \nu)$, изображенные в соответствии с (5.14) на рис. 2, показывают, что декремент затухания $\eta_1^{(2)}$, при возрастании радиуса R — снижается по обратной квадратичной зависимости, а с ростом кинематической вязкости ν увеличивается по линейному закону.

Согласно численным расчетам по (5.13) электропроводность жидкости γ и поверхностная подвижность носителей заряда b не оказывают влияние на декремент затухания $\eta_1^{(2)}$ капиллярных осцилляций. При этом зависимость собственной частоты $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ от величин γ, b весьма мала.

Из общефизических соображений очевидно, что периодически меняющаяся амплитуда $M_n(t)$ возмущения $\xi(\theta, t)$ равновесной формы капли за счет вязкости затухает со временем по экспоненциальному закону:

$$M_n(t) = \varepsilon R \cos(\text{Re}\omega_n^{(2)}t + \varphi) \exp(-\eta_1^{(2)}t) \quad (5.16)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\eta_1^{(2)}}{\text{Re}\omega_n^{(2)}} \right)^2}, \quad \varphi = \arctg\left(-\frac{\eta_1^{(2)}}{\text{Re}\omega_n^{(2)}} \right),$$

где $\varepsilon_0 = 0.1$ — безразмерная амплитуда возмущения.

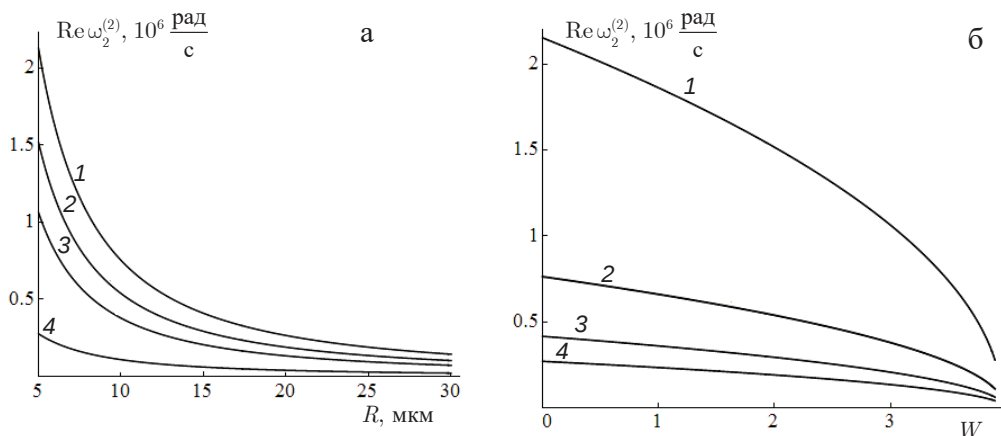


Рис. 1. Зависимость собственной частоты $\text{Re}\omega_2^{(2)}$ капиллярных осцилляций вязкой заряженной облачной капли

а: от ее радиуса R ; кривые 1–4 соответствуют значениям $W = 0.1, 2, 3, 3.9$.

б: от величины параметра Релея W ; кривые 1–4 соответствуют значениям $R = 5, 10, 15, 20$ мкм
 Расчеты проведены по формуле (5.2) при $n = 2, \sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $\nu = 0.01$ см²/с, $\varepsilon_1 = 80$, $\gamma = 1 \cdot 10^6$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ.

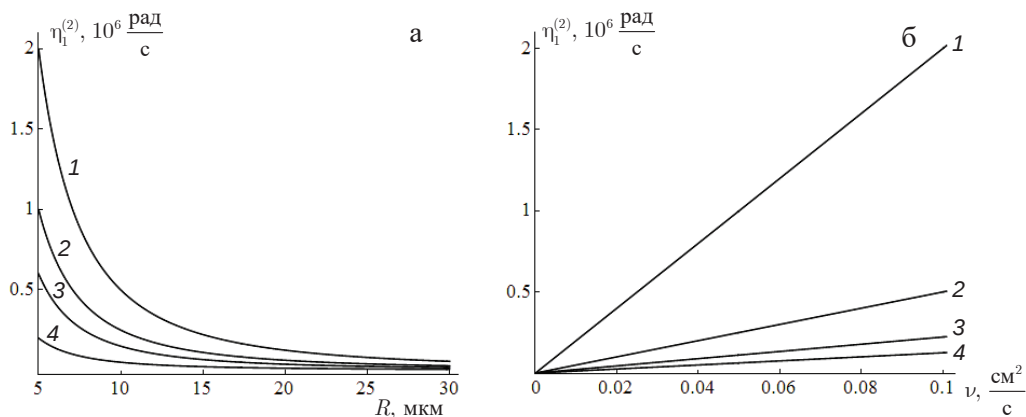


Рис. 2. Зависимость декремента затухания $\eta_l^{(2)}$ капиллярных осцилляций вязкой облачной капли с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06 Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.002 Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм) от:
 а: радиуса R (а) кривые 1–4 соответствуют значениям $\nu = 0.01, 0.03, 0.05, 0.1$ см²/с
 б: коэффициента кинематической вязкости ν ,
 кривые 1–4 соответствует значениям $R = 5, 10, 15, 20$ мкм
 Расчеты проведены по формуле (5.14) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

На рис. 3,а иллюстрируются численно рассчитанные по соотношению (5.16) зависимости от времени t амплитуды $M_2(t)$ второй моды $n = 2$ капиллярных осцилляций мелкой облачной капли при различных радиусах. На приведенных графиках можно наблюдать, что внутриоблачная капля наименьшего размера $R = 3$ мкм, осциллирующая на частоте $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 4.61 \cdot 10^6$ рад/с с декрементом затухания $\eta_1^{(2)} = 0.56 \cdot 10^6$ рад/с и периодом затухающих осцилляций $T = 1.37$ мкс, возвращается к равновесной форме, совершив ≈ 8 колебаний. Для капли большего радиуса $R = 4$ мкм с характеристиками осцилляций $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 3 \cdot 10^6$ рад/с, $\eta_1^{(2)} = 0.31 \cdot 10^6$ рад/с, $T = 2.1$ мкс число колебаний до полного их исчезновения увеличивается до ≈ 10 . Капля размером $R = 5$ мкм при $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 2.15 \cdot 10^6$, $\eta_1^{(2)} = 0.2 \cdot 10^6$ рад/с, $T = 2.93$ мкс совершает уже ≈ 11 колебаний за время вязкого затухания, при котором искажение равновесной формы снижается до нуля.

Из результатов численных расчетов и рис. 1,а можно сделать заключение, что снижение радиуса капли приводит к уменьшению периода T затухающих осцилляций так, что чем меньше размер капли, тем ее осцилляции быстрее гасятся вязкостью.

Для сравнения на рис. 3,б приведены временные зависимости амплитуды $M_5(t)$ пятой моды $n = 5$, построенные по (5.16) при тех же значениях физических параметров, что на рис. 3,а. Несложно видеть, что скорость снижения амплитуды отклонения поверхности капли от равновесной сферы увеличивается с ростом номера моды. Указанное обстоятельство объясняется повышением величины декремента затухания $\eta_1^{(2)}$ на высоких колебательных модах (см. рис. 4): увеличение номера моды в три раза приводит к возрастанию $\eta_1^{(2)}$ на порядок.

Для иллюстрации изобразим временную зависимость экспоненциально убывающей со временем амплитуды $M_n(t)$ возмущения $\xi(\theta, t)$ в случае релаксационного движения внутренней среды капли, порождаемого переносом заряда по искривленной сферической поверхности, в соответствие с законом:

$$M_n(t) = \varepsilon_0 \text{Rexp}(-\eta_1^{(1)} t), \quad (5.17)$$

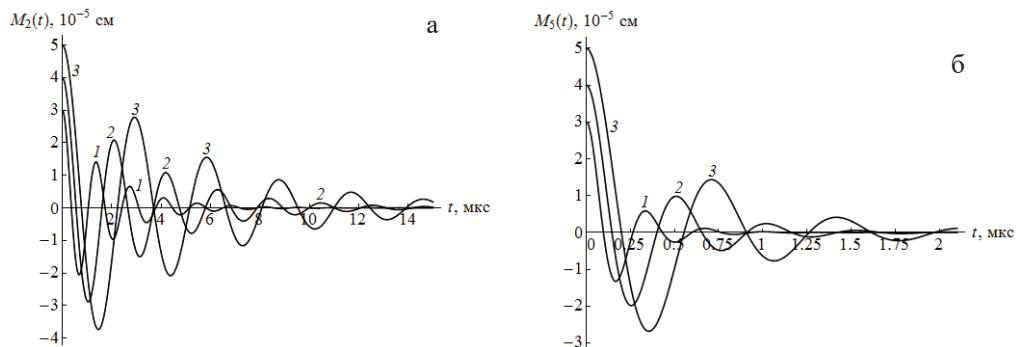


Рис. 3. Зависимость амплитуд $M_n(t)$ различных мод возмущения равновесной формы вязкой облачной капли с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.03Q_{кр}$ при $R = 5$ мкм) от времени t .

а – $n = 2$, б – $n = 5$. Кривые 1–3 соответствуют значениям $R = 3, 4, 5$ мкм.

Расчеты проведены по формуле (5.16) при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

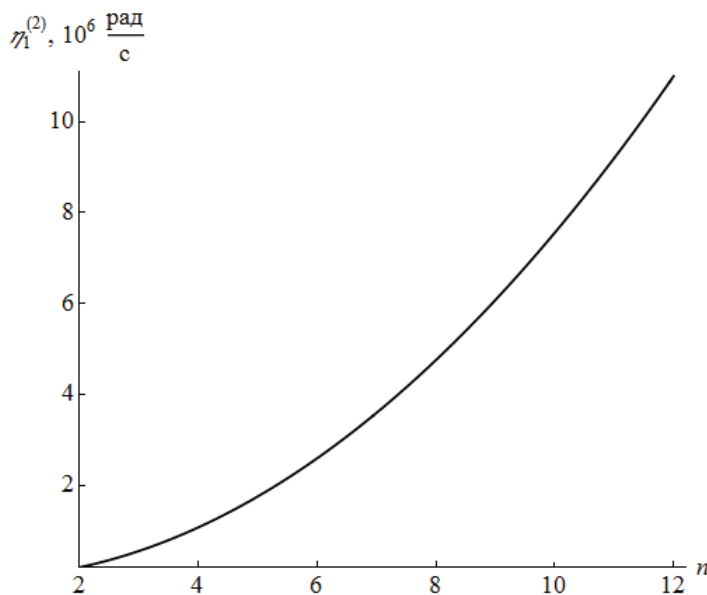


Рис. 4. Зависимость декремента затухания $\eta_1^{(2)}$ капиллярных осцилляций капли радиуса $R = 5$ мкм с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.03Q_{кр}$) от номера моды n .

Расчеты проведены по формуле (5.14) при тех же значениях параметров, что и на рис. 1.

где безразмерная амплитуда возмущения принимается $\varepsilon_0 = 0.1$.

Из рис. 5, полученному по выражению (5.17) при $n = 2$, видно, что релаксационное движение жидкости имеет аperiодический быстро затухающий характер. В соответствие с численными расчетами для декремента затухания $\eta_1^{(1)}$ зарядово-релаксационного движения жидкости прослеживается линейная зависимость от проводимости γ и подвижности зарядов b . Причем, увеличение γ сказывается на весьма слабом возрастании декремента затухания $\eta_1^{(1)}$, а увеличение подвижности b в два раза приводит к удвоению величины $\eta_1^{(1)}$.

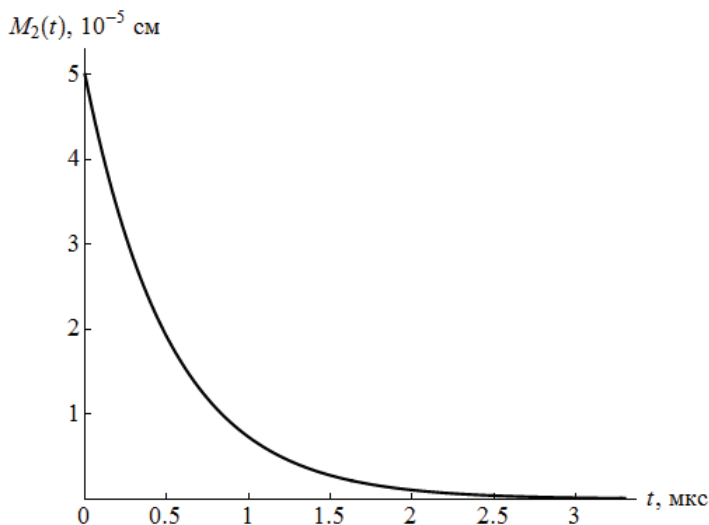


Рис. 5. Временная эволюция амплитуды $M_2(t)$ основной моды $n = 2$ возмущения равновесной формы капли радиуса $R = 5$ мкм с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.03Q_{кр}$), соответствующая зарядово-релаксационному аperiодическому движению жидкости.

Расчеты проведены по формуле (5.17) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

На рис. 6 и 7 изображены рассчитанные по (5.15) зависимости декремента затухания $\eta_2^{(2)}$, связанного с излучением электромагнитных волн, от удельной электропроводности жидкости γ и подвижности носителей заряда b . Приведенные кривые качественно ожидаемы из общефизических тенденций: поправка к декременту затухания $\eta_2^{(2)}$ почти линейно возрастает при изменении величин γ , b .

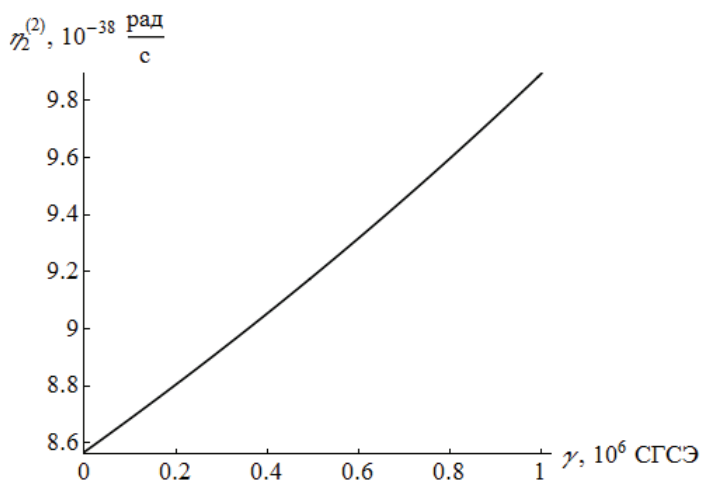


Рис. 6. Зависимость величины поправки $\eta_2^{(2)}$ декремента затухания капиллярных осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн капли радиуса $R = 10$ мкм и заряда $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.01Q_{кр}$), от удельной проводимости γ .

Расчеты проведены по формуле (5.15) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

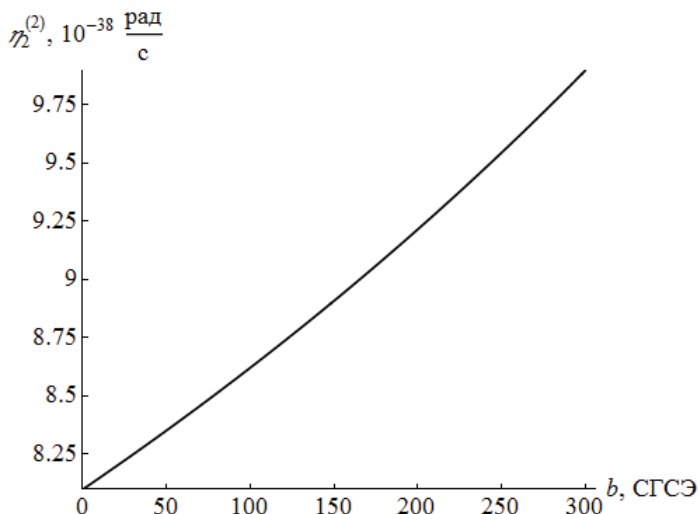


Рис. 7. Зависимость величины поправки $\eta_2^{(2)}$ декремента затухания капиллярных осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн капли радиуса $R = 10$ мкм и заряда $Q = 2 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.01Q_{\text{кр}}$), от подвижности носителей заряда b .

Расчеты проведены по формуле (5.15) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

Что касается малой добавки $\eta_2^{(2)}$ к декременту затухания капиллярных осцилляций, определяемой энергопотерями капли на электромагнитное излучение, рассмотрим ее поведение при конечных значениях электропроводности жидкости (рис. 8,а), а также в двух предельных случаях: для капли идеально проводящей жидкости ($\epsilon_1 \rightarrow \infty$) (рис. 8,б) и капли идеально диэлектрической жидкости ($\epsilon_1 \rightarrow 0$) (рис. 8,в). Из графиков рис. 8, построенных в соответствии с (5.15), можно заметить, что величина поправки $\eta_2^{(2)}$ к декременту затухания, связанного с излучением электромагнитных волн, сильно заряженных капель в случае конечной удельной проводимости жидкости на порядок ниже по сравнению с идеальным проводником и на два порядка выше по сравнению с идеальным диэлектриком. Из этого факта следует, что чисто диэлектрическая капля, для которой заряд равномерно распределен по поверхности и заморожен в нее, при осцилляциях излучает электромагнитные волны с наименьшей интенсивностью.

Как видно из рис. 8, увеличение параметра Релея W приводит к весьма быстрому нарастанию добавки $\eta_2^{(2)}$ к декременту затухания капиллярных осцилляций капли, связанного с радиоизлучением. Достигнув наибольшего значения, величина $\eta_2^{(2)}$ снижается до нуля в широком диапазоне изменения параметра Релея W (вплоть до критических значений). Кроме того, рис. 8 показывает, что возрастание размера капли сказывается на быстром уменьшении малой поправки $\eta_2^{(2)}$.

6. Электромагнитное излучение. Известно, что вихревая полоидальная часть течения связана с вязкостью реальной жидкости. Тогда механическая энергия капиллярных осцилляций капли, определяемая кинетической энергией полоидальной составляющей поля скоростей движения реальной жидкости, теряется на диссипацию в виде тепла. В случае маловязкой жидкости положим диссипацию энергии капиллярных осцилляций пренебрежимо малой. Учитывая это обстоятельство, в приближении идеальной жидкости ($\nu = 0$) вязкое затухание отсутствует. Тогда согласно закону сохранения энергии потери механической энергии капиллярных осцилляций,

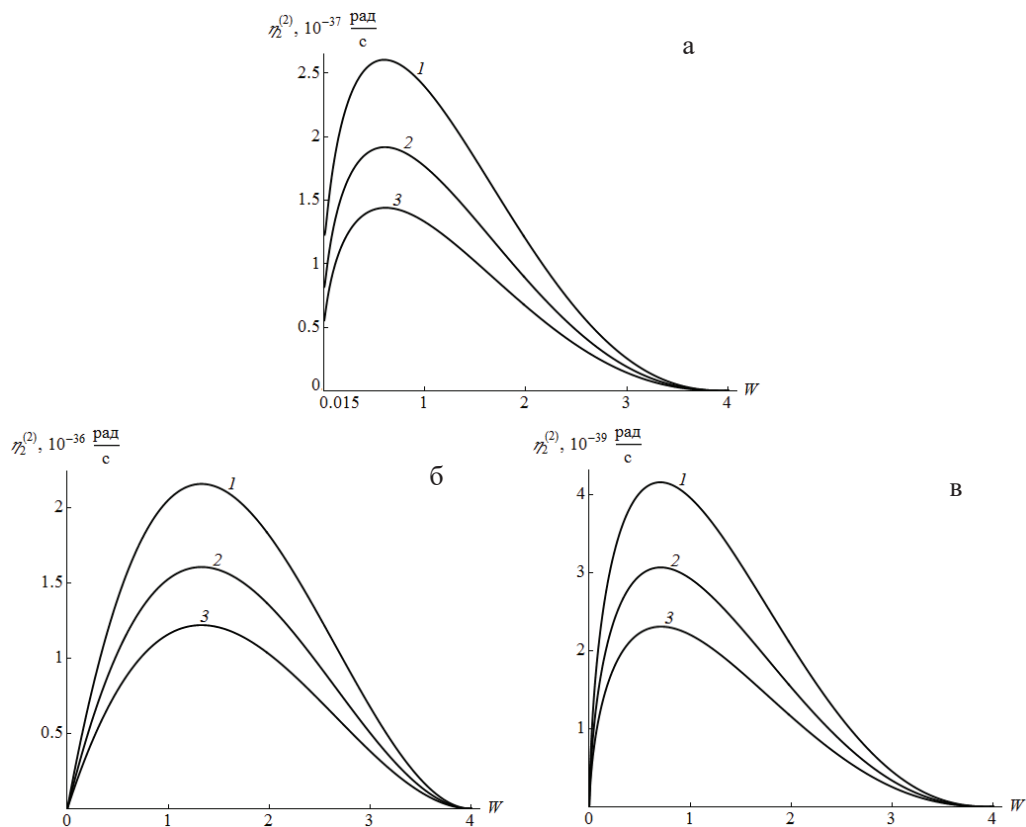


Рис. 8. Зависимость поправки $\eta_2^{(2)}$ декремента затухания капиллярных осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн заряженной облачной капли, от величины параметра Релея W .

а – $\varepsilon_1 = 80$, б – $\varepsilon_1 = \infty$, в – $\varepsilon_1 = 0$; кривые 1–3 соответствуют значениям $R = 26, 28, 30$ мкм.

Расчеты проведены по формуле (5.15) при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

определяемые кинетической энергией потенциальной составляющей поля скоростей течения идеальной жидкости, связываются с излучением электромагнитных волн, вызванным наличием ускоренно движущегося заряда. Принимая во внимание, что энергия поверхностных колебаний n -й моды ϑ_n снижается по экспоненциальному закону: $\vartheta_n \sim \exp(-2\eta_2)$, запишем общее выражение для мощности излучения [1]:

$$I = -\frac{d\vartheta_n}{dt} = 2\eta_2\vartheta_n, \quad (6.1)$$

где величина η_2 находится из дисперсионного уравнения (4.56) в виде [22]:

$$\eta_2 = W \frac{1}{2} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho^{n+1}} n^{n+2} ((n-1)(n+2))^n (n+1) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right)^n \quad (6.2)$$

При использовании теоремы вириала представим ϑ_n в виде удвоенной средней за период кинетической энергии потенциального движения жидкости в капле:

$$\vartheta_n = \frac{2\pi\rho R^3 M_n^2 \omega_{n0}^2}{n(2n+1)}, \quad (6.3)$$

где $M_n = \varepsilon R$ – размерная амплитуда осцилляций n -ой колебательной моды.

В итоге, подставляя (6.2), (6.3) в (6.1), получим окончательное аналитическое выражение для мощности излучения единичной заряженной капли идеальной проводящей жидкости, осциллирующей на фиксированной частоте ω_{n0} :

$$I = \frac{2\pi W \sigma^{n+2} M_n^2 n^{n+2} ((n-1)(n+2))^{n+1} (n+1)}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho^{n+1} (2n+1)} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right)^{n+1} \quad (6.4)$$

Согласно данным натурных измерений большая часть облачной воды сосредоточена в каплях с типичными радиусами от 3 до 30 мкм и концентрацией $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Максимум функции распределения таких капель по размерам приходится на диапазон 3–7 мкм [21].

Подставляя в (6.4) приведенные ранее средние характеристики внутриоблачных капель, осциллирующих на основной (второй) моде $n = 2$ с амплитудой $M_2 = 0.1R$, несложно оценить интенсивность электромагнитного излучения, равную $I \sim 1 \cdot 10^{-39} \text{ эрг/с}$, для капли размером $R = 3 \text{ мкм}$ и зарядом $Q = 5 \cdot 10^{-5} \text{ СГСЭ}$ ($\sim 0.16Q_{\text{кр}}$), осциллирующей на частоте $\omega_{20} = 4.6 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ с поправкой к декременту невязкого затухания $\eta_2 = 2 \cdot 10^{-33} \text{ рад/с}$, идущего на генерацию электромагнитного излучения. При возрастании радиуса капли на порядок $R = 30 \text{ мкм}$, имеющей заряд $Q = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ СГСЭ}$ ($\sim 0.11Q_{\text{кр}}$), мощность излучения снижается на два порядка величины: $I \sim 7 \cdot 10^{-42} \text{ эрг/с}$ при $\omega_{20} = 146 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ и $\eta_2 = 1 \cdot 10^{-37} \text{ рад/с}$.

На рис. 9 приведены результаты расчетов по формуле (6.4) в виде зависимостей $I(R, W)$. Видно, что интенсивность излучения I единичной облачной капли идеальной идеально проводящей жидкости, осциллирующей на основной (второй) моде $n = 2$, при возрастании радиуса R убывает по обратному квадратичному закону. Несложно заметить, что график функции $I(W)$ (рис. 9, а) качественно повторяет зависимость поправки $\eta_2^{(2)}(W)$ к декременту затухания капиллярных осцилляций капли маловязкой идеально проводящей жидкости, определяемого потерями на электромагнитное излучение (рис. 8, б). Интересно отметить, что учет малой вязкости по

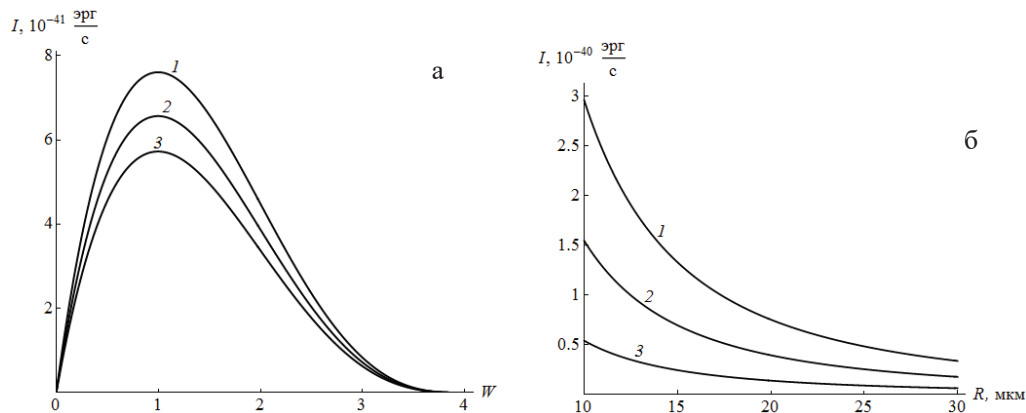


Рис. 9. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения I заряженной капли идеальной идеально проводящей жидкости от параметра Релея W (а) и радиуса R (б).

а: Кривые 1–3 соответствуют значениям $R = 26, 28, 30 \text{ мкм}$.

б: Кривые 1–3 соответствуют значениям $W = 2, 2.5, 3$.

Расчеты проведены по формуле (5.4) при $n = 2$, $\sigma = 73 \text{ дин/см}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$

сравнению с идеальной жидкостью приводит лишь к весьма малым количественным изменениям.

Сравним теперь между собой интенсивности излучения I заряженной невязкой идеально проводящей капли в двух случаях: учитывая в степенном асимптотическом разложении сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ при малых z (см. [18, стр. 257, ф-ла 10.1.17]) все члены ряда по методике Н.А. Богатова [7] и сохраняя только старшие слагаемые как это делалось в [1].

Зависимость $I(R, W)$ (см. рис. 10), построенная для второй моды осцилляций $n = 2$ по выражению [1]:

$$I = \frac{2\pi W \sigma^2 M_n^2}{c\rho R^2} \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{(2n+1)} \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right), \quad (6.5)$$

указывает на качественные и количественные расхождения по сравнению с численными расчетами по формуле (6.4) при $n = 2$ в методике Н.А. Богатова. Из выражения (6.5) при амплитуде возмущения $M_2 = 0.1R$ и рис. 10 видно, что мощность излучения не зависит от размера капли и на 31–33 порядка величины выше (при изменении радиуса облачной капли от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм).

Следует отметить, что использование корректного асимптотического представления сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ (а именно: учет всех членов степенного ряда) приводит к качественному и количественному согласованию полученных результатов интенсивности излучения капли идеально идеально проводящей жидкости, осциллирующей на основной (второй) моде $n = 2$, выполненных на основе физико-химической гидродинамики двумя методами: на основе закона сохранения энергии и в рамках теории излучения [11].

Ясно, что при снижении электропроводности жидкости уже сказывается конечность скорости переноса электрического заряда при деформациях равновесной фор-

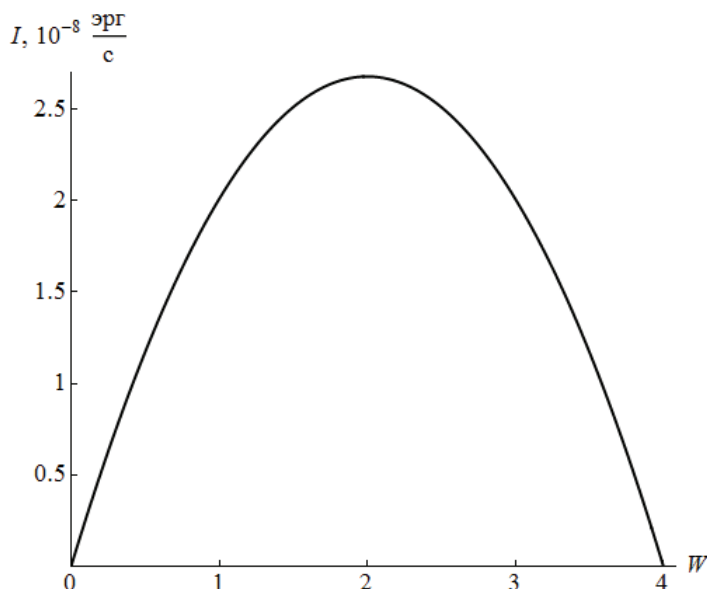


Рис. 10. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения I заряженной капли идеально идеально проводящей жидкости от параметра Релея W , построенная по [1].

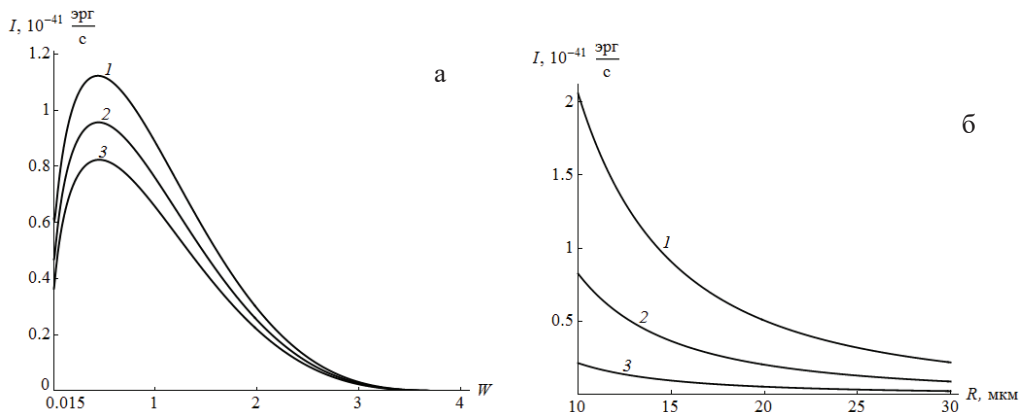


Рис. 11. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения I заряженной вязкой капли конечной электропроводности от параметра Релея W (а) и радиуса R (б).

Расчеты проведены при тех же значениях параметров, что на рис. 1.

мы капли. Данное обстоятельство приводит к снижению характеристик излучения, полученных без учета эффекта релаксации заряда. Примем для оценки $\gamma = 1 \cdot 10^6$ СГСЭ, $b = 300$ СГСЭ. Так для наименьшей облачной капли $R = 3$ мкм с зарядом $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.16Q_{кр}$), осциллирующей на частоте $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 4.56 \cdot 10^6$ рад/с, получена интенсивность излучения $I \sim 8 \cdot 10^{-40}$ эрг/с при добавке к декременту затухания капиллярных осцилляций, равной $\eta_2^{(2)} = 1 \cdot 10^{-33}$ рад/с. Для наиболее крупной внутриоблачной капли $R = 30$ мкм, несущей заряд $Q = 1.1 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.11Q_{кр}$), интенсивность излучения составила $I \sim 5 \cdot 10^{-42}$ эрг/с при $\text{Re}\omega_2^{(2)} = 146 \cdot 10^3$ рад/с, $\eta_2^{(2)} = 7 \cdot 10^{-38}$ рад/с.

Из проведенных численных расчетов, проиллюстрированных на рис. 11, для заряженной капли вязкой жидкости с конечной электропроводностью, осциллирующей на второй моде $n = 2$, выясняется, что интенсивность излучения I при изменении размера капли R снижается по закону $\sim R^{-2}$. При этом зависимость мощности излучения I от величины параметра Релея W (рис. 11,а) качественно схожа с графиком зависимости малой поправки $\eta_2^{(2)}(W)$ к декременту затухания, связанного с излучением электромагнитных волн (рис. 8,а).

Из сравнения рис. 9 и 11 можно сделать заключение, что учет конечности скорости переноса электрического заряда при капиллярных осцилляциях капли маловязкой жидкости приводит к снижению (примерно на порядок величины или в пределах порядка величины в зависимости от параметра Релея W) интенсивности излучения.

Заключение. Согласно выше изложенному учет конечности скорости переноса заряда приводит к уменьшению интенсивности радиоизлучения от осциллирующей заряженной капли, и в первую очередь этому способствует вязкость жидкости, снижающая частоты осцилляций.

Работа выполнена в ИПМех РАН в рамках Государственного задания АААА-А20-120011690131-7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
2. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Голованов А.С., Рыбакова М.В. Электромагнитное излучение, генерируемое линейными колебаниями заряженной капли // ЖТФ. 2002. Т. 72. № 1. С. 8–14.

3. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли конечной проводимости // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С.74–80.
4. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Крючков О.С. Об осцилляциях заряженной капли вязкой жидкости с конечной проводимостью // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 6. С.13–21.
5. Богатов Н.А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель // Сб. тез. докл. VI Международной конф. "Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений". Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН. 2013. С.22–26.
6. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 11. С.22–27.
7. Белоцерковский А.В., Дивинский Л.И. Активно-пассивная радиолокация грозовых и грозоопасных очагов в облаках. СПб: Гидрометеиздат, 1992. 286 с.
8. Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 463 с.
9. Горелик А.Г., Козлов А.И., Стерлядкин В.В. Рассеяние радиоволн на несферических и осциллирующих дождевых каплях // Науч. вест. МГТУ ГА. 2012. № 176. С. 25–30.
10. Жуков В.Ю., Шукин Г.Г. Распознавание опасных явлений погоды в современной метеорологической радиолокации // Проблемы военнопприкладной геофизики и контроля состояния природной среды : материалы VI Всерос. науч. конф. СПб. 2020. С. 40–50.
11. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Этюды о грозе. Огни св. Эльма, свечение воронок смерчей, разные молнии. М.;Берлин: Durect-MEDIA, 223 с.
12. Стерлядкин В.В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
13. Beard K.V., Tokay A. A field study of small raindrop oscillations // Geophysical research letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
14. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
15. Лазарянц А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач. М.: Русайнс, 2020. 140 с.
16. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
17. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
19. Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
20. Григорьев А.И. О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 10. С.1–7.
21. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
22. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. О влиянии эффекта релаксации вязкости жидкости на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли // Коллоидный ж. 2023. Т. 85. № 4. С.483–501.

Effect of Charge Relaxation Effect on Electromagnetic Radiation Intensity of Oscillating Viscous Liquid Drop

A. I. Grigoryev^{a, #}, N. Yu. Kolbneva^{b, ##}, S. O. Shiryaeva^{b, ###}

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia

^bDemidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

e-mail: grigori@mail.ru[#], kolbneva-nata@yandex.ru^{##}, shir@uniyar.ac.ru^{###}

Theoretical asymptotic methods have shown that the electric charge relaxation effect affects the physical characteristics of the electromagnetic radiation of the oscillating charged droplet. Analytical expressions are obtained for frequencies, decrements of attenuation of capillary

oscillations of droplets due to viscous attenuation and energy losses on radiation. It has been shown that the frequencies of electromagnetic radiation of cloud droplets, realized in the ranges of hundreds of kilohertz and megahertz units, decrease with an increase in the radius and charge parameter of the emitting droplet, as well as attenuation decrements associated with radiation. Intensity of emission of electromagnetic waves decreases with decrease of electrical conductivity and mobility of charges in liquid.

Keywords: charged drop, capillary oscillations, charge relaxation

REFERENCES

1. *Kalechits V.I., Nakhutin I.E., Poluektov P.P.* On the possible mechanism of radio emission of convective clouds // Dokl. AN USSR, 1982, vol. 262, no.6, pp. 1344–1347.
2. *Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I., Golovanov A.S., Rybakova M.V.* Electromagnetic radiation generated by linear vibrations of a charged drop // ZhTF, 2002, vol.72, no. 1S, pp. 8–14.
3. *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* Electromagnetic radiation of an oscillating charged drop of finite conductivity // Izv. RAS. Fluid&Gas Mech., 2002, no. 5, pp.74–80.
4. *Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I., Kryuchkov O.S.* On oscillations of a charged drop of viscous liquid with final conductivity // ZHTF, 2007, vol. 77, no.6, pp.13–21.
5. *Bogatov N.A.* Electromagnetic field generated by capillary oscillations of drops // VI Int. Conf. "Solar-Earth Connections and Physics of Earthquake Precursors." Petropavlovsk-Kamchatsky, FEB RAS. Abstracts. 2013. pp.22–26.
6. *Belonozhko D.F., Grigoriev A.I.* On the correct form of recording the law of preserving the amount of matter at the moving interface of two liquid media // ZHTF, 2004, vol.74, no. 11, pp. 22–27.
7. *Belotserkovsky A.V., Divinsky L.I.* Active-Passive Radar of Thunderstorm and Menacing Foci in the Clouds. St. Petersburg: Hydrometeoizdat, 1992. 286 p.
8. *Kachurin L.G.* Physical Basis of Impact on Atmospheric Processes. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1990. 463 p.
9. *Gorelik A.G., Kozlov A.I., Sterlyadkin V.V.* Scattering of radio waves on non-spherical and oscillating rain drops // Sci. Vest. MSTU GA, 2012, no. 176, pp. 25–30.
10. *Zhukov V.Yu., Shchukin G.G.* Recognition of weather hazards in modern meteorological radar // Problems of Prisoner of War Geophysics and Monitoring of the State of the Natural Environment: Materials All Russian Sci. Conf. SPb.: 2020. pp. 40–50.
11. *Grigoriev A.I., Shiryayeva S.O.* Etudy about a Thunderstorm. Lights of St. Elm, the Glow of Tornadoes, Different Lightning. Moscow;Berlin: Durect-MEDIA. 223 p.
12. *Sterlyadkin V.V.* Full-scale measurements of precipitation drop oscillations // Izv. USSR AS. FAO, 1988, vol.24, no.6, pp. 613–621.
13. *Beard K.V., Tokay A.* A field study of small raindrop oscillations // Geophys. Res. Lett., 1991, vol.18, no.12, pp. 2257–2260.
14. *Naiife A.H.* Methods of Perturbation. Moscow: Mir, 1976. 455 p.
15. *Lazaryants A.E., Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I.* Scalarization of Vector Boundary Problems. Moscow: Russines, 2020. 140 p.
16. *Arfken G.* Mathematical Methods in Physics. Moscow: Atomizdat, 1970. 712 p.
17. *Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Kherson V.K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Leningrad: Nauka, 1975. 436 p.
18. *Abramowitz M., Steegan I.* Handbook of Mathematical Functions. Moscow: Nauka, 1979. 830 p.
19. *Rayleigh.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag., 1882, vol.14, pp.184–186.
20. *Grigor'ev A.I.* On some regularities of the implementation of instability of a highly charged viscous drop // ZHTF, 2001, vol.71, no.10, pp.1–7.
21. *Mazin I.P., Hrgian A.H., Imyanitov I.M.* Clouds and Cloud Atmosphere. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1989. 647 p.
22. *Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryayeva S.O.* On the effect of the liquid viscosity relaxation effect on the electromagnetic radiation intensity of an oscillating charged drop // Colloid J., 2023, vol.85, no. 4, pp. 483–501.

УДК 532.5

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БИЛИНЕЙНОМ ТЕЧЕНИИ
В ПЛАСТЕ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ АВТО-ГРП**© 2024 г. А. М. Ильясов^{1,*}, В. Н. Киреев^{2,**}¹ООО «РН-БашНИПИнефть», Уфа, Россия²Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

e-mail: amilyasov67@gmail.com*, kireevvn@uust.ru**

Поступила в редакцию 02.05.2024 г.

После доработки 15.09.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Рассматривается задача о нестационарном билинейном течении однофазной ньютоновской жидкости в пласте с конечной трещиной авто-ГРП, соединяющей нагнетательную и добывающую скважину. Скважины одновременно начинают работать при постоянных давлениях в изначально невозмущенном бесконечном пласте с вертикальной магистральной трещиной постоянной ширины. Методом преобразования Лапласа получены аналитические решения для полей давления в трещине и пласте, а также скорости течения в трещине. Рассмотрена приближенная модель, использующая автомодельное решение задачи о фильтрации несжимаемой жидкости в упругом полупространстве с постоянным давлением на границе для моделирования фильтрационных утечек. Выяснено, что для ряда модельных параметров простое аналитическое решение приближенной модели дает приемлемые результаты.

Ключевые слова: нестационарное течение, билинейный поток, конечная магистральная трещина, преобразование Лапласа, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0032823524050051 EDN: JPQEQN

1. Введение. На добывающих скважинах для повышения нефтеотдачи низкопроницаемых нефтяных коллекторов создают технологические трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Для того чтобы эти трещины не смыкались под действием нормальных сжимающих напряжений они закрепляются твердым гранулированным материалом — проппантом. С другой стороны, на нагнетательных скважинах, вводимых для поддержания высокого пластового давления в истощенных коллекторах, из-за высоких давлений нагнетания жидкости образуются разрывы породы — техногенные трещины авто-ГРП. Часто трещины авто-ГРП достигают добывающих скважин. Со временем эти разрывы породы промываются нагнетаемыми фильтрационными потоками и вследствие эрозии трансформируются в незакрепленные проппантом трещины с некоторым характерным раскрытием. Таким образом, в коллекторе образуется система скважина—трещина—скважина—пласт, в которой возникает билинейный поток, представляющий одномерное течение в трещине авто-ГРП и перпендикулярное трещине фильтрационное течение в коллекторе с прямолинейными траекториями частиц.

Впервые билинейный поток в бесконечном пласте в закрепленной проппантом трещине ГРП бесконечной длины был, вероятно, аналитически изучен в работе [1].

Методом преобразования Лапласа получена асимптотическая зависимость падения забойного давления как корень четвертой степени от времени на больших временах. Однако решение для давления в пласте в этой работе не было получено. Как и в [1] в работах [2, 3] также операционным методом изучалось течение в бесконечной трещине закрепленной проппантом в неограниченном пласте. В [2] описание фильтрационного течения в трещине сведено к интегральному уравнению типа свертки, получены решения для полей давления в трещине при постоянном давлении и постоянном расходе на забое добывающей скважины. В случае работы скважины с постоянным дебитом, как и в [1], получена зависимость забойного давления от времени в степени одна четвертая, а также закон изменения расхода на скважине при заданном постоянном давлении. Решение для давления в пласте также не рассматривается. В работе [3] пласт и трещина также предполагаются бесконечными. Для билинейного течения методом преобразования Лапласа получено решение как для давления в закрепленной трещине ГРП, так и для давления в пласте при постоянном давлении на забое скважины. В [4] методом преобразования Лапласа найдены аналогичные аналитические решения для закрепленной проппантом трещины конечной длины в бесконечном коллекторе при заданном забойном давлении или заданном расходе на скважине. В случае конечной трещины решения представляются в виде интегралов от рядов.

В работе [5] операционным методом получены аналитические решения для билинейного течения в бесконечном пласте с не закрепленной проппантом бесконечной трещине авто-ГРП постоянной ширины при заданном постоянном давлении на скважине и постоянном пластовом давлении. Аналитические решения для билинейного потока в случае заданного расхода на скважине для такой же геометрической конфигурации задачи получены в [6].

Недостатком решений [5, 6] является их ограниченность при применении к реальным трещинам авто-ГРП конечной длины. Эти решения можно использовать только до времен пока волна давления в трещине не достигнет конца трещины авто-ГРП или что то же самое, пока частицы жидкости не достигнут конца трещины. Для относительно широких трещин порядка 0.5 мм в низкопроницаемых пластах эти времена могут измеряться минутами и меньше. Очевидно, что характерные времена фильтрационного течения в конечном пласте вообще и билинейного режима течения [1] в частности намного больше, чем указанные времена существования решений для бесконечных трещин и могут применяться только для очень узких трещин или для высокопроницаемых пластов. В последнем случае вследствие большой утечки жидкости через стенки трещины авто-ГРП возникают ползущие течения.

Для того чтобы аналитические решения можно было применять для процессов фильтрации с характерными временами порядка времен существования билинейного течения, в данной работе рассматривается постановка задачи о билинейном течении в бесконечном в одном направлении коллекторе с трещиной авто-ГРП конечной длины и постоянной ширины.

2. Постановка задачи, математическая модель и безразмерные уравнения. Нагнетание жидкости в пласт через стенки трещины происходит со скоростью, имеющую только нормальную составляющую к стенкам трещины. Поэтому, траектории частиц жидкости в пласте непосредственно у стенки трещины всегда прямолинейны и перпендикулярны ей. На ранних временах фильтрации такая же картина будет наблюдаться и в объеме пласта. Однако на поздних временах фильтрации, вследствие нагнетания и/или отбора жидкости скважинами/скважиной, в пласте могут появиться значительные горизонтальные градиенты давления и составляющие скорости фильтрации, параллельные направлению трещины, станут величинами одного порядка с нормальными составляющими скорости фильтрации. Траектории течения жидкости в пласте начнут искривляться, и билинейный режим течения не будет иметь места.

Таким образом, рассматривается задача о билинейном потоке в сопряженной системе конечная трещина/бесконечный пласт. Геометрия задачи показана на рис. 1, где показана область течения. Трещина начинается на нагнетательной скважине и заканчивается на добывающей. Трещина имеет постоянную ширину w и длину L . Течение в пласте и трещине однофазное и изотермическое. Предполагается, что трещина заполнена той же ньютоновской жидкостью, что и пласт. На скважинах заданы различные постоянные давления. Далее все решения получены для верхней полуплоскости. Фильтрационное течение в нижней полуплоскости получается зеркальным отражением относительно оси симметрии трещины авто-ГРП.

Течение в пласте описывается уравнением пьезопроводности. Течение в трещине авто-ГРП описывается уравнениями сохранения массы и движения несжимаемой жидкости в гидравлическом приближении [7] для трещины постоянной ширины с учетом проницаемости стенок канала с пористостью (просветностью) m . В работе [6] показано, что данную нестационарную систему уравнений можно линеаризовать. Линеаризованная система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{u_L}{w}, u_L = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_r}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12(1-m)\mu v}{\rho w^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 p_r}{\partial y^2}, \chi = \frac{k}{\mu(m\beta_l + \beta_s)}, \quad (2.3)$$

где v — скорость течения жидкости ГРП в трещине; u_L — скорость фильтрационной утечки по нормали к стенкам трещины; p — давление в трещине; p_r — давление в пласте; ρ — постоянная плотность жидкости в трещине; m — коэффициент пористости породы; μ — динамическая вязкость жидкости; k — проницаемость пласта; β_l и β_s — коэффициенты сжимаемости жидкости в пласте и скелета породы, соответственно.

В системе уравнений (2.1)–(2.3) течение в трещине является одномерным, а течение в пласте — двумерным с прямолинейными траекториями, параллельными оси ординат (рис. 1).

На стенке трещины выполняется динамическое условие непрерывности давления:

$$p_r(x, y = 0, t) = p(x, t), \quad (2.4)$$

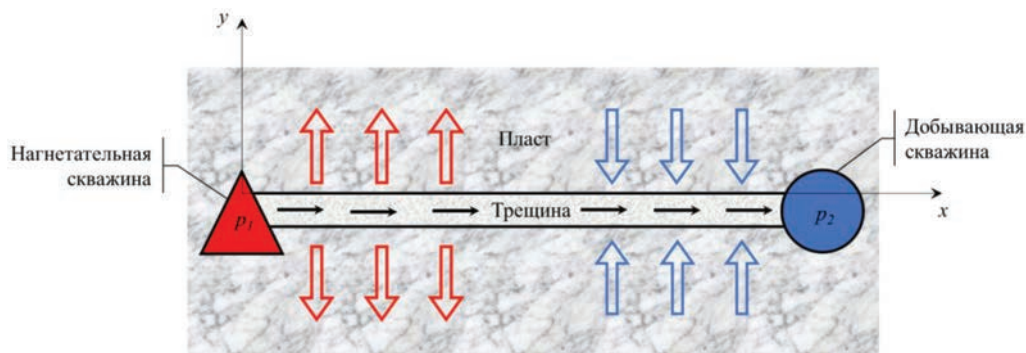


Рис. 1. Схема к постановке задачи

В начальный момент времени жидкость в трещине и пласте покоится, а давление в трещине равно пластовому давлению

$$v(x,0) = 0, \quad p(x,0) = p_k, \quad p_r(x,y,0) = p_k, \quad (2.5)$$

где p_k — пластовое давление.

В начальный момент времени обе скважины одновременно начинают работать с постоянными, но различными давлениями. Таким образом, граничные условия на скважинах следующие

$$p(0,t) = p_1, \quad p(L,t) = p_2, \quad (2.6)$$

где p_1 и p_2 — постоянное давление на левой и правой скважинах.

На бесконечности потребуем равенства давления в коллекторе пластовому давлению:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_r(x,y,t) = p_k \quad (2.7)$$

Уравнения (2.1)–(2.7) образуют замкнутую систему.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{p}_r = \frac{p_r - p_k}{p_*}, \quad \bar{p}(x,t) = \frac{p - p_k}{p_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad (2.8)$$

где характерные и безразмерные параметры, а также размерный параметр C равны

$$t_* = \frac{L^2}{\chi}, \quad v_* = \frac{t_* p_*}{\rho L}, \quad p_* = p_1 - p_2 \quad (2.9)$$

$$A = \frac{2k p_*}{\mu v_*} > 0, \quad B = \frac{12\mu(1-m)t_*}{\rho w^2} > 0, \quad C = \frac{k p_*}{\mu L},$$

где L — расстояние между скважинами. Если $p_1 > p_k > p_2$, то левая скважина является нагнетательной, а правая — добывающей. Если $p_2 > p_k > p_1$, то наоборот. В обоих случаях безразмерные параметры A и B являются положительными величинами, а параметр C имеет размерность скорости и зависит от знака характерного давления p_* .

С учетом (2.8), (2.9) безразмерные уравнения (2.1)–(2.7) примут вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \bigg|_{\bar{y}=0} \quad (2.10)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - B \bar{v} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{p}_r}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.12)$$

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (2.13)$$

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0 \quad (2.14)$$

$$\bar{p}_1(0, \bar{t}) = \frac{p_1 - p_k}{p_*}, \quad \bar{p}_2(1, \bar{t}) = \frac{p_2 - p_k}{p_*} \quad (2.15)$$

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0 \quad (2.16)$$

3. Применение метода преобразования Лапласа. Применим преобразование Лапласа [8] по безразмерному времени

$$\begin{aligned} F(\bar{x}, \omega) &= \int_0^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})\} \\ F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \int_0^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

к системе уравнений (2.10)–(2.16). Обозначим изображения искомых функций следующим образом:

$$V(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{v}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad P(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = L\{\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\} \quad (3.2)$$

С учетом начальных условий (2.14) получим следующую систему ОДУ для изображений

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial P_r}{\partial \bar{y}} \bigg|_{\bar{y}=0} \quad (3.3)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} - BV \quad (3.4)$$

$$\omega P_r = \frac{\partial^2 P_r}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.5)$$

Безразмерное условие непрерывности давления в изображениях преобразуется к виду

$$P_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \omega) = P(\bar{x}, \omega) \quad (3.6)$$

Граничные условия (2.15) для изображения запишутся в форме

$$P(0, \omega) = \frac{\bar{p}_1}{\omega}, \quad P(1, \omega) = \frac{\bar{p}_2}{\omega} \quad (3.7)$$

Условия на бесконечности (2.16) примут вид

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0 \quad (3.8)$$

Получим следующее решение системы ОДУ (3.3)–(3.5) с дополнительными условиями (3.6)–(3.8):

$$\begin{aligned} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) &= \frac{1}{\omega \left(1 - e^{2\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} \right)} \left\{ \left(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 e^{\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} \right) e^{\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}} - \sqrt{\omega}\bar{y}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\bar{p}_2 e^{\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} - \bar{p}_1 e^{2\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}} \right) e^{-\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}} - \sqrt{\omega}\bar{y}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$P(\bar{x}, \omega) = P_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \omega), \quad V(\bar{x}, \omega) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \omega^{1/4} P(\bar{x}, \omega)$$

В первом выражении (3.9) берется положительная ветвь квадратного корня $\sqrt{\omega}$ на действительной оси.

Для нахождения оригиналов изображений (3.9) применяется теорема обращения Меллина [8]:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) &= L^{-1}\{F(\bar{x}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \\ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) &= L^{-1}\{F(\bar{x}, \bar{y}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega\end{aligned}\quad (3.10)$$

Для всех изображений (3.9) начало координат $\omega = 0$ является одновременно и полюсом, и точкой ветвления. Также полюсами всех изображений являются нули их знаменателей

$$1 - e^{2\sqrt{AB}\sqrt{\omega}^{1/2}} = 0 \text{ или } \sqrt{\omega_k} = -\frac{\pi^2 k^2}{AB}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

но последнее выражение не является положительной ветвью квадратного корня на действительной оси.

Следовательно, для интегрирования изображений рассмотрим замкнутый контур на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси, показанный на рис. 2. Внутри выбранного контура и на контуре функции (3.9) являются однозначными аналитическими функциями.

Обход от точки A_1 до C происходит по часовой стрелке. Далее обходится контур $CDEFB_1A_1$. Обозначим дуги A_1C и FB_1 соответственно через C_R^1 и C_R^2 . Окружность DE обозначается через C_r , а координаты точек $F(C)$ и $E(D)$ соответственно через $(-R, 0)$ и $(-r, 0)$. Координаты точек A_1 и B_1 равны $(a, \mp \sqrt{R^2 - a^2})$ соответственно.

С использованием второго выражения (3.10) найдем оригинал изображения пластического давления $P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$, представленного последним выражением (3.9):

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \right] \quad (3.11)$$

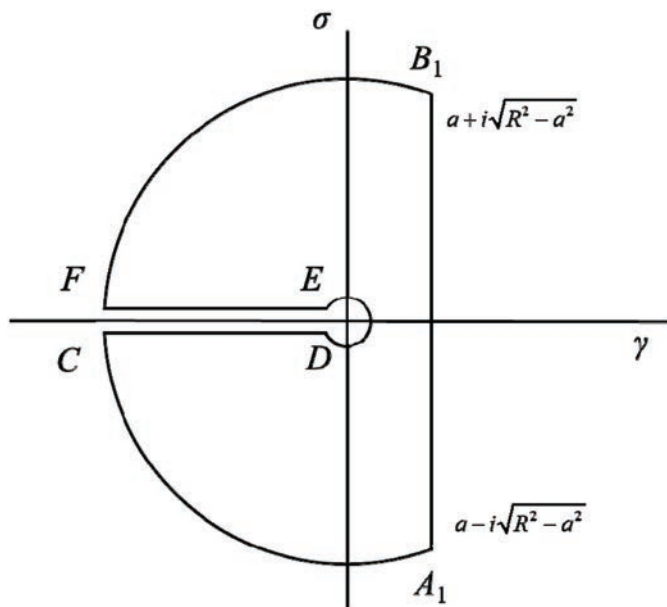


Рис. 2. Контур интегрирования

Внутри рассматриваемого контура и на контуре нет ни точек ветвления, ни полюсов, следовательно, по теореме Коши [8]:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_{C_R^1} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \right. \\ \left. + \int_{C_R^2} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{C_r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \right. \\ \left. + \int_{-R}^{-r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{-r}^{-R} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заметим, что изображения (3.9) стремятся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. По лемме Жордана [8] интегралы по C_R^1 и C_R^2 в (3.12) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$.

На контуре C_r имеем $\omega = re^{i\varphi}$, $\omega^{1/2} = r^{1/2}e^{i\varphi/2}$, $\omega^{1/4} = r^{1/4}e^{i\varphi/4}$. Подстановка этих выражений в интеграл по этому контуру и применение правила Лопиталья дает

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = 2\pi i [\bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2 \bar{x}] \quad (3.13)$$

Остается рассмотреть интегралы на нижнем и верхнем берегах разреза вдоль действительной оси. Заметим, что вдоль нижнего разреза $\omega = \rho e^{-i\pi}$, $\sqrt{\omega} = -i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4}e^{-i\pi/4}$, а вдоль верхнего разреза $\omega = \rho e^{i\pi}$, $\sqrt{\omega} = i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4}e^{i\pi/4}$. Вычисление соответствующих интегралов дает:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-R}^{-r} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho(1 - e^{2\alpha(1-i)})} \left(-\bar{p}_1 e^{\alpha \bar{x}} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x})} + \right. \\ \left. + \bar{p}_2 e^{\alpha(\bar{x}+1)} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(\bar{x}+1))} - \bar{p}_2 e^{\alpha(1-\bar{x})} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1-\bar{x}))} + \bar{p}_1 e^{\alpha(2-\bar{x})} e^{i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2-\bar{x}))} \right) d\rho \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-r}^{-R} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho(1 - e^{2\alpha(1+i)})} \left(\bar{p}_1 e^{\alpha \bar{x}} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x})} - \right. \\ \left. - \bar{p}_2 e^{\alpha(\bar{x}+1)} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(\bar{x}+1))} + \bar{p}_2 e^{\alpha(1-\bar{x})} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1-\bar{x}))} - \bar{p}_1 e^{\alpha(2-\bar{x})} e^{-i(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2-\bar{x}))} \right) d\rho \end{aligned} \quad (3.15)$$

В (3.14) и (3.15) введено обозначение

$$\alpha = \sqrt{AB} \frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \geq 0$$

Из (3.11)–(3.15) после довольно громоздких выкладок, которые здесь не приводятся, следует решение для пластового давления

$$\begin{aligned} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2 \bar{x} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho} \left(\frac{\bar{p}_1(Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho) - Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho) - Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \\ Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha \bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) \right] \\ Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right] \\ Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right]$$

Легко проверяется, что числитель в подынтегральном выражении в (3.16) обращается в нуль на концах трещины. Из (2.13) и (3.16) следует решение для давления в трещине авто-ГРП:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) &= \bar{p}_r(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2\bar{x} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left(\frac{\bar{p}_1(Z_1(\bar{x}, 0, \rho) - Z_2(\bar{x}, 0, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3(\bar{x}, 0, \rho) - Z_4(\bar{x}, 0, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \\ Z_1(\bar{x}, 0, \rho) &= e^{\alpha\bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(2 - \bar{x})) + \sin(\alpha\bar{x}) \right] \\ Z_2(\bar{x}, 0, \rho) &= e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha\bar{x}) + \sin(\alpha(2 - \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$Z_3(\bar{x}, 0, \rho) = e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 + \bar{x})) + \sin(\alpha(1 - \bar{x})) \right]$$

$$Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho) = e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 - \bar{x})) + \sin(\alpha(1 + \bar{x})) \right]$$

Поле скорости в трещине можно получить из (2.11) дифференцированием поля давления (3.17) по безразмерной пространственной координате:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{B} \left\{ \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left(\frac{\bar{p}_1(Z'_1(\bar{x}, 0, \rho) - Z'_2(\bar{x}, 0, \rho)) + \bar{p}_2(Z'_3(\bar{x}, 0, \rho) - Z'_4(\bar{x}, 0, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \right\} \\ Z'_1(\bar{x}, 0, \rho) &= \alpha e^{\alpha\bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(2 - \bar{x})) + \sin(\alpha\bar{x}) - e^{2\alpha} \cos(\alpha(2 - \bar{x})) + \cos(\alpha\bar{x}) \right] \\ Z'_2(\bar{x}, 0, \rho) &= -\alpha e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha\bar{x}) + \sin(\alpha(2 - \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\alpha\bar{x}) + \cos(\alpha(2 - \bar{x})) \right] \\ Z'_3(\bar{x}, 0, \rho) &= -\alpha e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 + \bar{x})) + \sin(\alpha(1 - \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\alpha(1 + \bar{x})) + \cos(\alpha(1 - \bar{x})) \right] \\ Z'_4(\bar{x}, 0, \rho) &= \alpha e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\alpha(1 - \bar{x})) + \sin(\alpha(1 + \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\alpha(1 - \bar{x})) + \cos(\alpha(1 + \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

В (3.18) штрих наверху обозначает производную по безразмерной пространственной координате $\bar{x}$.

Непосредственная проверка показывает, что выражения (3.16)–(3.18) являются точными решениями системы уравнений (2.10)–(2.12). Для полученных решений проверка граничного условия (2.15), по сути, была уже выполнена выше. Граничное условие (2.16) следует из построения ограниченного решения для изображения пластового давления при $y \rightarrow \infty$. Выполнение начальных условий для решений (3.16)–(3.18) следует из теоремы обращения Меллина при $t < 0$ [8].

Из (3.16) можно получить выражения для составляющих размерной скорости фильтрации в пласте

$$W_y(x, y, t) = -C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}}, \quad W_x(x, y, t) = -C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{x}} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho} \left[\frac{\bar{p}_1[(Z_1)'_{\bar{y}} - (Z_2)'_{\bar{y}}] + \bar{p}_2[(Z_3)'_{\bar{y}} - (Z_4)'_{\bar{y}}]}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right] d\rho \\ (Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha \bar{x}} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) \right] \\ (Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha(2 - \bar{x})} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha(1 - \bar{x})} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right] \\ (Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{y}} &= e^{\alpha(1 + \bar{x})} \sqrt{\rho} \left[e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right], \end{aligned}$$

где $(Z_i)'_{\bar{y}}$, $i = \overline{1, 4}$ – производная соответствующей функции по безразмерной пространственной координате $\bar{y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} &= \bar{p}_2 - \bar{p}_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \bar{t}}}{\rho} \left[\frac{\bar{p}_1[(Z_1)'_{\bar{x}} - (Z_2)'_{\bar{x}}] + \bar{p}_2[(Z_3)'_{\bar{x}} - (Z_4)'_{\bar{x}}]}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right] d\rho \\ (Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha \bar{x}} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) + \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha \bar{x}) \right] \\ (Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha(2 - \bar{x})} \left[-e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) + \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) + \right. \\ &\quad \left. + e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha \bar{x}) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right] \\ (Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha(1 - \bar{x})} \left[-e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) + \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) + \right. \\ &\quad \left. + e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right] \\ (Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))'_{\bar{x}} &= \alpha e^{\alpha(1 + \bar{x})} \left[e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\alpha} \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) + \cos(\sqrt{\rho} \bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

В свою очередь из (3.20) следует выражение для размерной утечки в пласт (притока из пласта):

$$u_L(x, t) = C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \quad (3.22)$$

Уравнения прямолинейных траекторий жидкости в пласте имеют вид

$$\frac{dy_r(x, t)}{dt} = \frac{W_y(x, y_r, t)}{m}; \quad y_r(x, 0) = 0, \quad (3.23)$$

где правая часть (3.23) определяется первым уравнением (3.19) и (3.20).

Решение для скорости жидкости в трещине (3.18) определяет закон движения жидкости в трещине

$$\frac{dx_f}{dt} = v_* \bar{v}(\bar{x}_f, \bar{t}); \quad x_f(0) = 0 \quad (3.24)$$

Полученные решения можно использовать для моделирования однофазной фильтрации в реальном ограниченном пласте с трещиной конечной длины при одновременном выполнении двух условий. Первое условие — должен существовать билинейный поток с прямолинейными траекториями в пласте; второе условие — частицы жидкости, определяемые уравнением (3.23), не должны пересекать границ реального пласта. Таким образом, одновременно должны выполняться условия

$$\left| \frac{W_x}{W_y} \right| \ll 1 \text{ и } |y_r(x, t)| < L_y, \quad (3.25)$$

где L_y — протяженность симметричного в направлении координаты y реального пласта.

4. Аналитическое решение упрощенной модели. Если нет необходимости следить за фильтрационным течением в пласте, то можно ограничиться только рассмотрением течения в трещине. Такая задача была решена численно в работе [9], применительно к индикаторным (трассерным) исследованиям пласта, где в уравнении движения были учтены все слагаемые. Утечка (приток) жидкости из трещины в пласт (из пласта) моделировалась выражением

$$u_L = \frac{k}{\mu w} \frac{(p - p_k)}{\sqrt{\pi \chi t}}, \quad (4.1)$$

которое является следствием автомодельного решения при геометрически линейной фильтрации изотермической однофазной жидкости в полуплоскости с заданными постоянными давлениями на добывающей (нагнетательной) галерее и на бесконечности [10]. В зарубежных научных изданиях выражение (4.1) называют утечкой Картера [11] и широко используют в симуляторах при моделировании ГРП в нефтегазовом деле [12].

В трассерных исследованиях в закачиваемую в нагнетательную скважину жидкость добавляется индикатор в небольших концентрациях. Обычно это химические или радиоактивные соединения, не изменяющие реологических свойств жидкости. Трассерные исследования проводятся с целью определения наиболее проницаемых областей пласта по времени прихода первой порции концентрации индикатора, либо времени прихода максимума концентрации индикатора в добывающую скважину. Для самых высокопроницаемых каналов — трещин, можно пренебречь диффузионными процессами.

Если использовать уравнения (2.1), (2.2) и (4.1) то безразмерная система уравнений примет вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = -\frac{D(\bar{p} - \bar{p}_k)}{\sqrt{\bar{t}}}; \quad D = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \quad (4.2)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - B\bar{v} \quad (4.3)$$

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = \bar{p}_1, \quad \bar{p}(1, \bar{t}) = \bar{p}_2 \quad (4.4)$$

В размерных переменных решение задачи (4.2)–(4.4) имеет вид

$$p(x, t) = p_* \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = p_* \left(\bar{p}_k + C_1 e^{\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4}\bar{x}} + C_2 e^{-\sqrt{BD\bar{t}}^{-1/4}\bar{x}} \right) \quad (4.5)$$

$$v(x, t) = v_* \bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = -v_* \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -v_* \sqrt{\frac{D}{B}} \bar{t}^{-1/4} \left(C_1 e^{\sqrt{BD} \bar{t}^{-1/4} \bar{x}} - C_2 e^{-\sqrt{BD} \bar{t}^{-1/4} \bar{x}} \right) \quad (4.6)$$

$$C_1 = \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_k - (\bar{p}_1 - \bar{p}_k) e^{-\sqrt{BD} \bar{t}^{-1/4}}}{2 \operatorname{sh}(\sqrt{BD} \bar{t}^{-1/4})} < 0, \quad C_2 = \bar{p}_1 - \bar{p}_k - C_1 > 0 \quad (4.7)$$

Знаки в (4.7) соответствуют конфигурации, когда левая скважина нагнетательная, а правая – добывающая. Время в (4.5)–(4.7) является параметром. Это решение также применимо, пока выполняются неравенства (3.25). Характерные и безразмерные параметры определяются согласно (2.8), (2.9). Параметр D определяется согласно (4.2).

Из (4.6)–(4.7) можно найти закон движения координаты x_* , при которой мгновенная скорость течения в трещине равна нулю («координата застойной зоны»):

$$x_*(t) = \frac{L t^{1/4}}{2 t_*^{1/4} \sqrt{BD}} \ln \left(-\frac{C_1}{C_2} \right) \quad (4.8)$$

5. Результаты численных расчетов. По полученным аналитическим решениям построим графики для двумерного давления в пласте, давления и скорости в трещине, а также утечек в пласт в некоторые моменты времени. Результаты расчетов показаны на рис. 3–10. При построении графиков использовались следующие параметры. В качестве жидкости бралась вода с плотностью $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ и вязкостью $\mu = 0.001 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Коэффициент упругости воды равен $\beta_l = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$. Коэффициент упругости скелета породы равен $\beta_s = 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$. Пористость пласта равна $m = 0.1$. Проницаемости пород варьировались от 1 мД до 100 мД. Длина трещины равна 200 м. Протяженность пласта в направлении y равна $L_y = 50 \text{ м}$. Ширина трещины w варьировалась от $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ до $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Пластовое давление равно $p_k = 250 \text{ атм}$ ($2.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$). Давления на скважинах симметричны относительно пластового давления и равны $p_l = 350 \text{ атм}$ ($3.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$) и $p_2 = 150 \text{ атм}$ ($1.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$).

Поскольку полученные решения справедливы для пласта бесконечной протяженности, то при практическом применении этих решений к пласту конечной протяженности необходимо контролировать координату фронта жидкости в пласте и время существования билинейного режима согласно (3.25). Эти условия соблюдаются при построении графиков решений.

На рис. 3 показано изменение давления по длине трещины для трех моментов времени $t = 1, 24$ и 72 ч при различных проницаемостях пласта и ширине трещины $w = 0.0001 \text{ м}$. Видно, что чем выше проницаемость пласта, тем выше градиент давле-

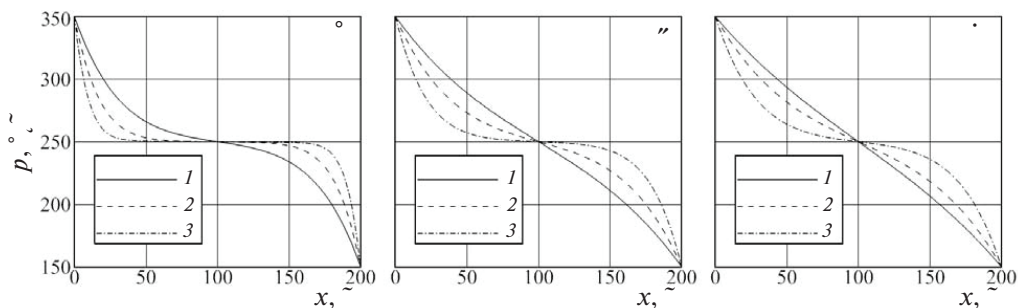


Рис. 3. Изменение давления в трещине в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных проницаемостей пласта k . Ширина трещины равна $w = 10^{-4} \text{ м}$: 1–3 – $k = 1, 10, 100 \text{ мД}$

ния около скважин и, тем более пологий профиль давления в середине трещины. Это является следствием большей скорости утечки жидкости через стенки трещины. Со временем профиль давления в трещине деформируется уменьшая свою кривизну. Для слабопроницаемых пластов профиль давления в трещине стремится к линейному профилю.

На рис. 4 показано изменение давления по длине трещины для тех же моментов времени, что и на рис. 3 для проницаемости пласта $k = 1$ мД при различных ширинах трещин. Видно, что чем меньше ширина трещины, тем выше градиент давления около скважин и, тем более пологий профиль давления в середине трещины. Это также является следствием большей скорости утечки жидкости через стенки трещины при

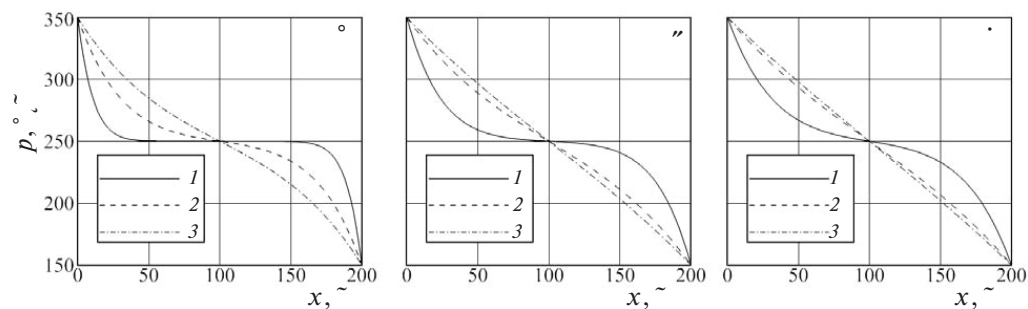


Рис. 4. Изменение давления в трещине в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных значений ширины трещины w . Проницаемость пласта равна $k = 1$ мД: 1–3 – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

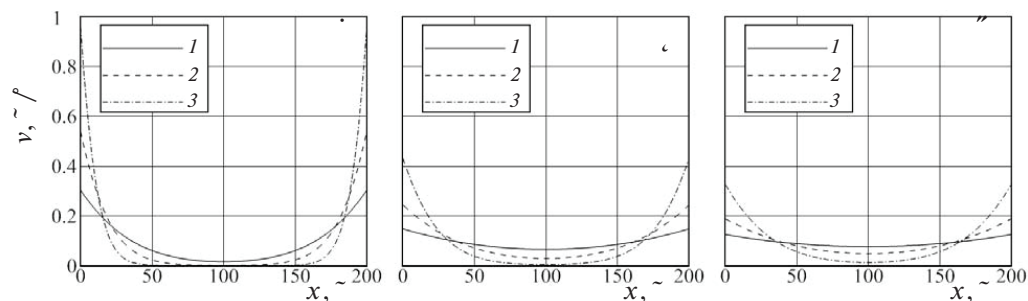


Рис. 5. Изменение скорости в трещине в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных проницаемостей пласта k . Ширина трещины равна $w = 10^{-4}$ м: 1–3 – $k = 1, 10, 100$ мД

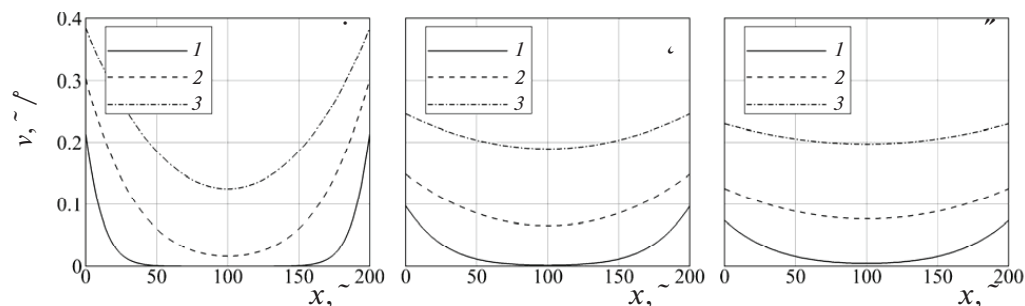


Рис. 6. Изменение скорости в трещине в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных значений ширины трещины w . Проницаемость пласта равна $k = 1$ мД: 1–3 – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

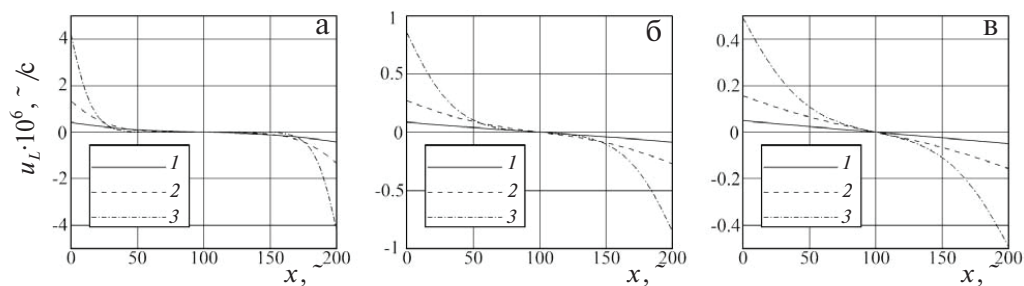


Рис. 7. Изменение скорости утечки жидкости в пласт по длине трещины в моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч для различных проницаемостей пласта k . Ширина трещины равна $w = 10^{-4}$ м:

$$I-3 - k = 1, 10, 100 \text{ мД}$$

меньших ширинах трещин. В этом случае профиль давления в трещине также со временем деформируется уменьшая кривизну.

На рис. 5 представлено изменение скорости течения по длине трещины для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для трещины шириной $w = 0.0001$ м. при различных проницаемостях пласта. Видно, что чем меньше проницаемость пласта, тем ниже скорость течения в трещине у скважин и тем выше вдали от них из-за меньших утечек при течении. Со временем происходит деформация профилей скорости, а максимальные скорости течения уменьшаются.

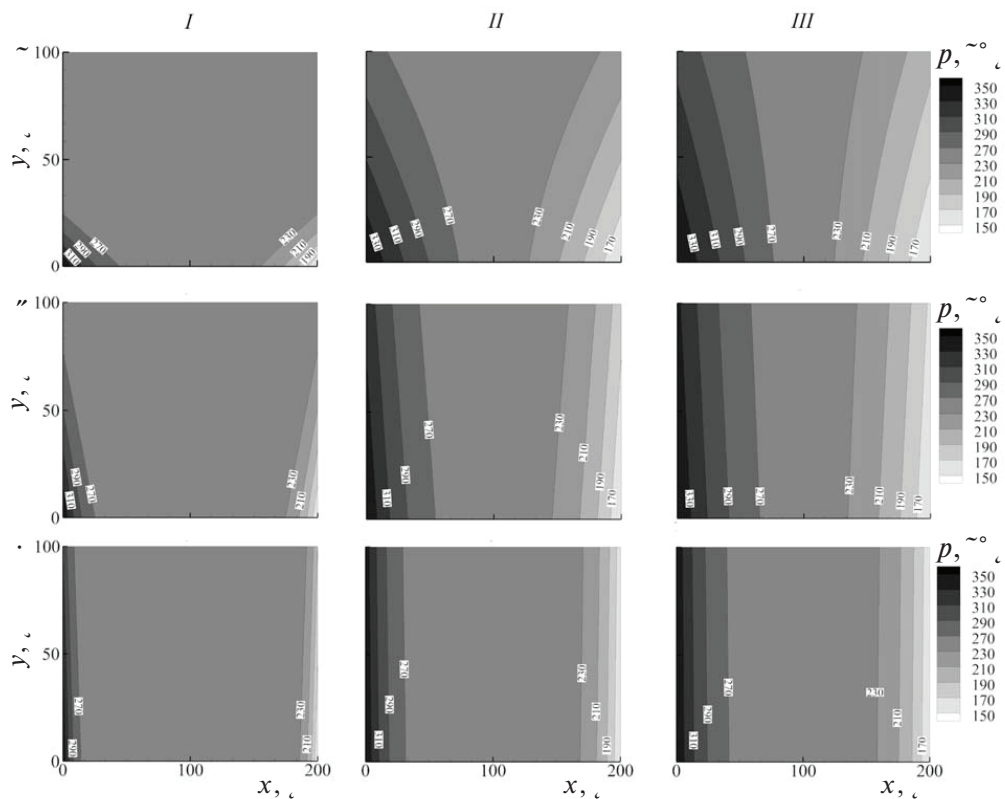


Рис. 8. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 1, 24$ и 72 ч. Ширина трещины равна $w = 10^{-4}$ м: (а–в) – $k = 1, 10, 100$ мД.

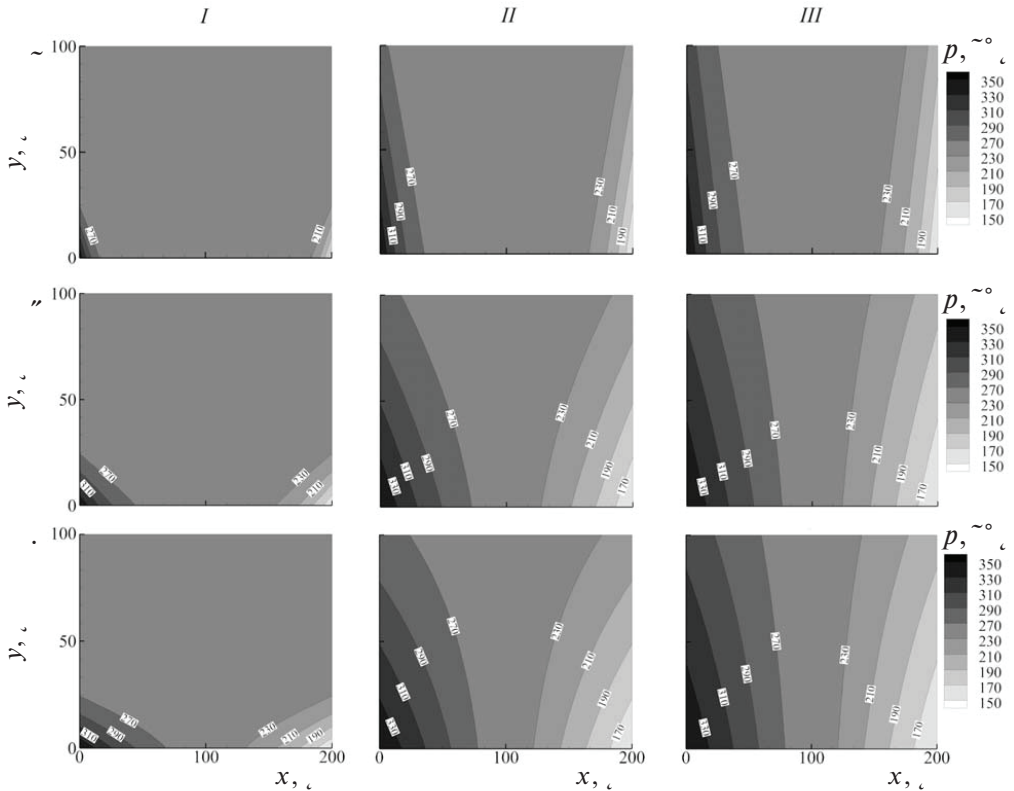


Рис. 9. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 1, 24$ и 72 ч.
Проницаемость пласта равна $k = 1$ мД: (а–в) – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

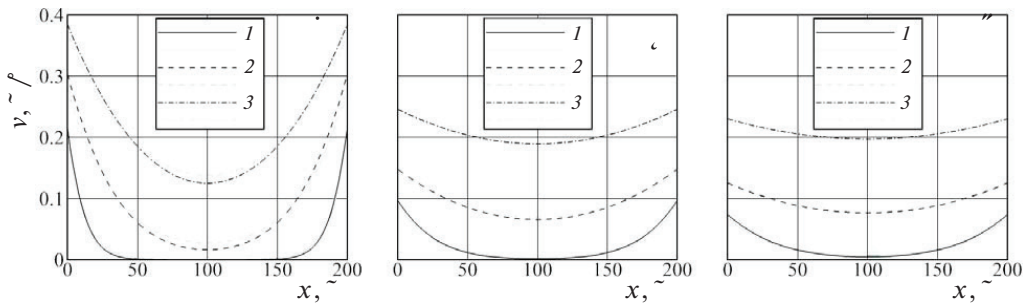


Рис. 10. Сравнение скорости в трещине в различные моменты времени (а–в) – $t = 1, 24$ и 72 ч при различных ширинах трещины: толстые линии – скорость, вычисленная по формуле (3.18), тонкие линии – скорость, вычисленная по упрощенной модели, формула (4.6).
Проницаемость пласта $k = 1$ мД: I–3 – $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-4}$ м

На рис. 6 показано изменение скорости течения по длине трещины для трещин различной ширины и проницаемости пласта $k = 1$ мД. Видно, что чем меньше ширина трещины, тем ниже скорость течения в трещине из-за большего вязкого трения (гидравлического сопротивления) в этом случае. Максимальные скорости также со временем уменьшаются вследствие утечек жидкости в пласт.

На рис. 7 показана деформация со временем профиля скорости утечки по длине трещины с раскрытием $w = 0.0001$ м для различных проницаемостей пласта. Очевидно, что скорость утечки растет с ростом проницаемости пласта. В силу симметрии рассматриваемых граничных условий в центральном сечении трещины утечка жидкости равна нулю. До этого сечения утечка жидкости отрицательная – жидкость утекает в пласт, а после этого сечения утечка становится положительной – жидкость поступает в трещину из пласта.

На рис. 8 показаны изолинии нестационарного двумерного поля давления в пласте для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для различных проницаемостей пласта и ширине трещины равной $w = 0.0001$ м. Видно, что с увеличением проницаемости пласта k наклон изолиний к оси абсцисс уменьшается, изолинии искривляются, а области невозмущенного состояния пласта сокращаются.

На рис. 9 показаны изолинии нестационарного двумерного поля давления в те же моменты времени для трещин различной ширины и фиксированной проницаемости пласта $k = 1$ мД. Видно, что с увеличением проницаемости пласта k наклон изолиний к оси абсцисс уменьшается, изолинии искривляются, а области невозмущенного состояния пласта сокращаются.

Сравнение полей скорости в трещине согласно решению (3.18) и по приближенному решению (4.6)–(4.7) показано на рис. 10. Видно, что для некоторых параметров выполняется хорошее соответствие.

Полученные аналитические решения могут использоваться при тестировании численных схем симуляторов, моделирующих процессы фильтрации в линейно-упругих пластах с вертикальными трещинами авто-ГРП с постоянным раскрытием. В частности, полученные решения могут использоваться при моделировании трассерных исследований.

Заключение. Представлена модель билинейного нестационарного течения в системе трещина конечной длины/водонасыщенный линейно-упругий пласт бесконечной протяженности. Получены аналитические решение для нестационарных полей давления в пласте и трещине, а также скорости течения в трещине при заданных постоянных давлениях на нагнетательной и добывающей скважине. Получено аналитическое выражение для фильтрационных утечек (притока) из трещины в пласт (из пласта), а также уравнения траекторий течения жидкости в трещине и пласте. Для некоторых характерных параметров построены графики решений. Полученные решения позволяют определять времена существования билинейного потока в реальных пластах конечных размеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F.* Transient pressure analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33. № 9. P. 1749–1766.
2. *Нагаева З.М., Шаганов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
3. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14.
4. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 4. С. 116–125.
5. *Ильясов А.М., Киреев В.Н.* Нестационарное течение в пласте с магистральной трещиной, пересекающей нагнетательную или добывающую скважину // ПМТФ. 2023. Т. 60. № 5. С. 124–138.
6. *Ilyasov A.M., Kireev V.N.* Analytical solution to the problem of injection or reduction of the formation pressure in the reservoir with a fracture // Fluid Dyn. 2024. V. 59. № 2. P. 189–201.
7. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.

9. Ильясов А.М., Булгакова Г.Т. Моделирование течения вязкой жидкости в магистральной вертикальной трещине с проницаемыми стенками // Матем. модел. 2016. Т. 28. № 7. С. 65–80.
10. Баренблатт Г.И., Ентов В.И., Рыжик В.М. Движение жидкости и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
11. Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating the extent of fractured area // Drilling&Product. Practice. 1957. P. 261–269.
12. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation. New York;Chichester: Wiley, 2000.

Analytical Solution of the Problem on Bi-Linear Flow in a Formation with a Finite Auto-Fracture

A. M. Il'yasov^{a, #}, V. N. Kireev^{b, ##}

^aRN-BashNIPIneft, LLC, Ufa, Russia

^bUfa University of Science and Technology, Ufa, Russia

[#]e-mail: amilyasov67@gmail.com

^{##}e-mail: kireevvn@uust.ru

The problem of unsteady bilinear flow of a single-phase Newtonian fluid in a formation with a finite auto-fracture connecting an injection and production well is considered. The wells simultaneously begin to operate at constant pressures in an initially undisturbed infinite formation with a vertical main fracture of constant width. Using the Laplace transform method, analytical solutions were obtained for the pressure fields in the fracture and formation, as well as the flow velocity in the fracture. An approximate model is considered that uses a self-similar solution to the problem of filtration of an incompressible fluid in an elastic half-space with constant pressure at the boundary to simulate filtration leaks. It was found that for a number of model parameters a simple analytical solution of the approximate model gives acceptable results.

Keywords: unsteady flow, bilinear flow, finite main fracture, Laplace transform, analytical solution.

REFERENCES

1. Cinco-Ley H., Samaniego V.F. Transient pressure analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol., 1981, vol. 33, no. 9, pp. 1749–1766.
2. Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh. On the elastic regime of flow through a porous medium in the fracture located in an oil or gas reservoir // Prikl. Mat. Mekh., 2017, vol. 81, no. 3, pp. 319–329. (in Russian)
3. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 5, pp. 594–602.
4. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Modeling of unsteady fluid filtration in a reservoir with a hydraulic fracture // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2022, vol. 63, pp. 652–660.
5. Il'yasov A.M., Kireev V.N. Unsteady flow in a reservoir with a main fracture crossing an injection or production well // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2023, vol. 64, no. 5, pp. 840–852.
6. Il'yasov A.M., Kireev V.N. Analytical solution to the problem of injection or reduction of the formation pressure in the reservoir with a fracture // fluid dyn., 2024, vol. 59, no. 2, pp. 189–201.
7. Charnyi I.A. Unsteady Pipe Flow of a Real Fluid. Moscow: Nedra, 1975. (in Russian)
8. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)
9. Il'yasov A.M., Bulgakova G.T. Modeling of viscous fluid flow in a main vertical fracture with permeable walls // Math. Mod., 2016, vol. 28, no.7, pp. 65–80. (in Russian)
10. Barenblatt G.I., Entov V.I., Ryzhik V.M. Movement of Liquids and Gases in Natural Formations. Moscow: Nedra, 1984. (in Russian)
11. Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating the extent of fractured area // Drilling&Product. Practice, 1957, pp. 261–269.
12. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation. N.Y.; Chichester: Wiley, 2000.

УДК 534.16

ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛОВЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© 2024 г. А. В. Ильяшенко^{1,*}¹Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: IlyashenkoAV@mgsu.ru

Поступила в редакцию 07.06.2024 г.

После доработки 05.09.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Анализируются объемные волны в изотропном упругом пространстве, распространяющиеся по линии действия сосредоточенной силовой особенности. Показано, что на линии действия силовой особенности помимо P -волны распространяется также S -волна. Отмечены ошибочные утверждения, обнаруженные в ряде публикаций, об отсутствии S -волн на линии действия силовой особенности.

Ключевые слова: объемная волна, изотропия, силовая особенность, представление Гельмгольца, девиатор деформаций

DOI: 10.31857/S0032823524050069 EDN: JPKIGU

1. Введение. Ниже дается краткий обзор исследований по волнам в изотропном упругом пространстве, в которых исследуются объемные акустические волны, появляющиеся на линии действия силовой особенности.

В одной из первых работ по объемным волнам в изотропной упругой среде [1, 2], где анализировались сейсмограммы, вызванные точечным δ -образным (по временной переменной) силовым воздействием, расположенным в изотропном упругом полупространстве, был отмечен феномен появления всплеска на сейсмограмме, характерного по времени прихода для S -волны (рис. 1).

Факт присутствия на сейсмограммах пика, характерного для прихода S -волны, в дальнейшем неоднократно отмечался как в экспериментальных [3–5], так и в теоретических [6–20] исследованиях волновых процессов, связанных с решением внутренней задачи Лэмба [21], аналогичный эффект наблюдался и при численных исследованиях внутренней задачи Лэмба [22–27]. На рис. 1, б, показана сейсмограмма вертикальной компоненты смещения (в точке на линии действия сосредоточенной силовой особенности), имеющая пик, отвечающий приходу S -волны. Надо отметить, что горизонтальная компонента смещений на линии действия силы нулевая, см. рис. 1, б. В большинстве теоретических исследований [6–9, 16] появление этого пика, объясняется наличием соответствующего полюса в несобственных интегралах, описывающих решение для объемных волн, появляющихся при решении внутренней задачи Лэмба. В этой связи особый интерес представляют работы [28–30], в которых отмечено, что на линии действия силовой особенности, являющейся осью симметрии, поперечные волны не могут возникать, поскольку последние из-за присутствия касательных компонент напряжений и деформаций необходимо кососимметричны в окрестности линии действия силы.

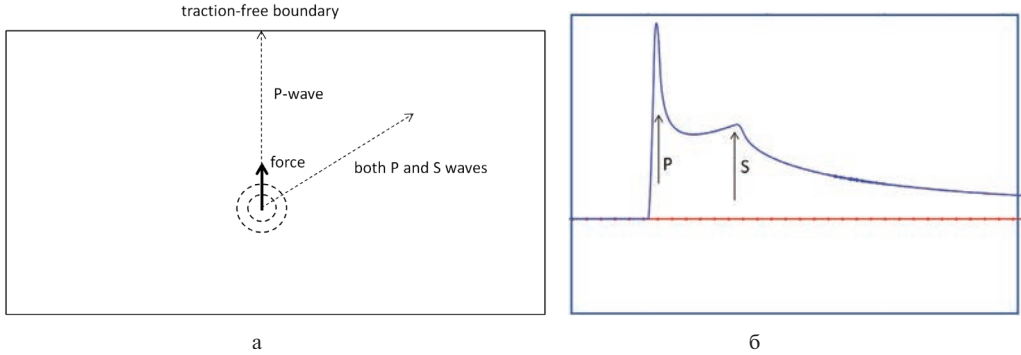


Рис. 1. а) Схема внутренней задачи Лэмба для вертикального силового воздействия в виде временного δ -образного импульса; б) Сейсмограмма на линии действия силовой особенности [25], показывающая наличие пика на сейсмограмме вертикальной компоненты перемещений, отвечающего приходу S волны

Ниже показано, что во внутренней задаче Лэмба для изотропного упругого полупространства или полуплоскости, см. рис. 1,а, на оси симметрии, определяемой линией действия силовой особенности, (i) S-волна существует; (ii) эта волна не содержит касательных компонент тензора напряжений, нормальных к оси симметрии; и (iii) горизонтальные компоненты смещения равны нулю. Решение рассматриваемой задачи связано с представлением Гельмгольца для поля смещений [31] и разложением тензорных полей на девиаторные и шаровые тензоры [32].

2. Уравнения движения

Линейные уравнения движения для изотропной упругой среды могут быть записаны в виде [31]

$$\left(c_p^2 \nabla_x \operatorname{div}_x - c_s^2 \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x - \mathbf{I} \partial_t^2\right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}$ — поле смещений, $\mathbf{x}$ — пространственные координаты, t — время, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, c_p и c_s — скорости объемных P- и S-волн соответственно

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

В этих соотношениях ρ — плотность среды, а λ и μ — параметры Ламе, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3)$$

Представление Гельмгольца для поля смещений имеет вид [31]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_x \varphi(\mathbf{x}, t) + \operatorname{rot}_x \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

где φ — скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ — векторный потенциал. Подстановка представления (2.4) в уравнения движения (2.1) и исключение из рассмотрения линейных (по пространственным координатам) составляющих, дает [32]

$$\left(c_p^2 \Delta_x - \partial_t^2\right) \nabla_x \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \left(c_s^2 \Delta_x - \partial_t^2\right) \operatorname{rot}_x \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) показывают, что скалярным потенциалом φ определяется объемная P волна, а векторным потенциалом $\boldsymbol{\psi}$ — объемная S волна [32].

3. Разложение тензорных полей на девиаторный и шаровой тензоры

Инфинитезимальное поле деформаций определяется по полю смещений соотношениями Коши [32]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^T \right) \quad (3.1)$$

Шаровой тензор, определяемый тензором деформаций, представим в виде [32]

$$\theta \mathbf{I} \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} = (\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \mathbf{I}, \quad (3.2)$$

где θ – объемная деформация. Аналогичным образом определяется девиатор деформаций $\mathbf{e}$ [32]

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \theta \mathbf{I} \quad (3.3)$$

Подстановка представления Гельмгольца (2.4) в выражение (3.2), дает [33]

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

Таким образом, объемная деформация однозначно определяется скалярным потенциалом, однако, девиатор (3.3) определяется как скалярным, так и векторным потенциалом [33, 34]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \left(\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}} \right) \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)^T \right) \quad (3.5)$$

Рассматривая закон Гука для изотропной среды в форме соотношений между девиаторными и шаровыми компонентами [32]

$$p(\mathbf{x}, t) = -K \theta(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{e}(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

где p – давление, $\mathbf{s}$ – девиатор напряжений, а K – объемный модуль,

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad (3.7)$$

получим следующие выражения для объемной и девиаторной составляющей тензора напряжений в терминах соответствующих потенциалов [11]

$$p(\mathbf{x}, t) = -K \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mu \left(\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \varphi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (3.8)$$

где

$$\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) = \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}}^T \right) \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) следует, что в динамических задачах возмущение, связанное с девиатором напряжений, может распространяться либо со скоростью P -волны, если выполнены условия

$$\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \varphi(\mathbf{x}, t) \neq 0 \text{ и } \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.10)$$

либо со скоростью S -волны, если

$$\mathbf{A}_1(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \varphi(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ и } \mathbf{A}_2(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \neq 0, \quad (3.11)$$

либо часть девиатора может двигаться со скоростью P -волны, а другая со скоростью S -волны, если

$$\mathbf{A}_1(\partial_x, \partial_x)\varphi(\mathbf{x}, t) \neq 0 \text{ и } \mathbf{A}_2(\partial_x, \partial_x)\psi(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad (3.12)$$

4. Динамические поля на линии действия силы

В случае пространственной внутренней задачи Лэмба поле напряжений на линии действия силы представимо в виде [14]

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in l} = f(x, t)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + g(x, t)(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (4.1)$$

где l – линия действия силы, $\mathbf{n}$ – единичный вектор, совпадающий с направлением действия силы, $x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ – координата вдоль линии действия силы, $f(x, t)$ – функция, описывающая распространение волнового фронта компоненты напряжений σ_{nn} вдоль оси x , $g(x, t)$ – функция, описывающая распространение волнового фронта, связанного с компонентами, ортогональными к σ_{nn} . Заметим, что в силу осевой симметрии, тензор $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in l}$ в выбранной системе координат не содержит касательных компонент.

Разложение поля напряжений (4.1) на шаровой и девиаторный тензор дает

$$p(x, t) = -\frac{2g(x, t) + f(x, t)}{3}, \quad \mathbf{s}(x, t) = (f(x, t) - g(x, t))(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (4.2)$$

Последнее выражение для девиатора показывает, что условие $\mathbf{s}(x, t) = 0$ возможно только при выполнении условия

$$\forall x, t: \quad f(x, t) = g(x, t) \quad (4.3)$$

Однако, как показывает анализ аналитических выражений для усилий во внутренней задаче Лэмба от сосредоточенного силового источника [14, 16], условие (4.3) не выполняется ни при каких значениях коэффициента Пуассона $\nu \in (-1; 0.5)$ и ни при каких (временных) профилях рассматриваемой силовой нагрузки. Таким образом, на линии действия силовой особенности, вне зависимости от временного профиля волны, всегда присутствует девиаторная компонента $\mathbf{s}(x, t)$, причем эта девиаторная компонента не связана со сдвигами в горизонтальной плоскости.

Далее, остается заметить, что в фундаментальном решении Стокса для уравнений движения изотропной упругой среды присутствует векторный потенциал [35]

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left(t - \frac{r}{c_s} \right) H \left(t - \frac{r}{c_s} \right) \nabla_x r + \frac{\mathbf{x} - \nabla_x r}{4\pi\rho c_s^2 r} \delta \left(t - \frac{r}{c_s} \right), \quad (4.4)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, H – функция Хэвисайда, δ – функция Дирака. Непосредственная подстановка потенциала (4.4) в соответствующий оператор (3.9), показывает, что $\mathbf{A}_2(\partial_x, \partial_x)\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in l} \neq 0$. Таким образом, обеспечивается условие существования S -волны на оси линии действия силы.

Выводы

Показано, что во внутренней задаче Лэмба для изотропного упругого полупространства на оси симметрии, определяемой линией действия силовой особенности, S -волна существует и не содержит касательных компонент тензора напряжений в декартовых координатах, одна из осей которых совпадает с линией действия силы.

Представляется, что полученные результаты могут найти применение, как в аналитических, так и в численных и экспериментальных исследованиях при определении волновых полей на линии действия силовых воздействий. Кроме того, появле-

ние S -волны на линии действия силовой особенности, представляет интерес с точки зрения формирования поверхностных волн и, в частности, волн Рэлея [25, 26], дисперсионных волн Рэлея—Лэмба [34, 36], а так же волн Лява [37, 38].

Благодарность. Работа выполнена за счет гранта 24-49-02002 Российского Научного Фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nakano H.* On Rayleigh waves // Japan J. Astron.&Geophys. 1925. V. 2. P. 233–326.
2. *Nakano H.* Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // Geophys. Mag. 1930. V. 2. P. 189–348.
3. *Fuchs K., Müller G.* Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1971. V. 23. P. 417–433.
4. *Kennett B.L.N., Kerry N.J., Woodhouse J.H.* Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves // Geophys. J.R. Astr. Soc. 1978. V. 52. P. 215–230.
5. *Wang, D. et al.* Ground surface response induced by shallow buried explosions // Earthquake Eng.&Eng. Vib. 2014. V. 13. P. 163–169.
6. *Cagniard L.* Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives. Paris: Gauthier-Villard, 1939.
7. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1949. V. 242. P. 63–100.
8. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. 1955. V. 41. P. 629–639.
9. *Garvin W.W.* Exact transient solution of the buried line source problem // Proc. Roy. Soc. A. 1956. V. 234. P. 528–541.
10. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. P. 1233–1238.
11. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. New York: McGraw-Hill, 1957.
12. *Payton R.G.* Epicenter motion of an elastic half-space due to buried stationary and moving line sources // Int. J. Solids Struct. 1968. V. 4. P. 287–300.
13. *Norwood F.R.* Similarity solutions in plane elastodynamics // Int. J. Solids Struct. 1973. V. 9(7). P. 789–803.
14. *Johnson L.R.* Green's function for Lamb's problem // Geophys. J.R. Astron. Soc. 1974. V. 37. P. 99–131.
15. *Payton R.G.* Epicenter motion of a transversely isotropic elastic half-space due to a suddenly applied buried point source // Int. J. Engng. Sci. 1979. V. 17. P. 879–887.
16. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer. 1993.
17. *Williams D.P., Craster R.V.* Cagniard-de Hoop path perturbations with applications to nongeometric wave arrivals // J. Eng. Math. 2000. V. 37. P. 253–272.
18. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U.* The classic Garvin's problem revisited // Bull. Seismol. Soc. Am. 2006. V. 96(4A). P. 1344–1351.
19. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U., Kausel E.* Garvin's generalized problem revisited // Soil Dyn. Earthquake Eng. 2013. V. 47. P. 4–15.
20. *Feng X., Zhang H.* Exact closed-form solutions for Lamb's problem // Geophys. J. Int. 2018. V. 214. P. 444–459.
21. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 1904. V. 203. P. 1–42.
22. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 87–97.
23. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
24. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // Acoust. Phys. 2011. V. 57. P. 420–426.
25. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 356–367.
26. *Il'yasov K.K. et al.* Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // Mech. of Solids. 2016. V. 51. P. 39–45.

27. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comp. Geotech.* 2021. V. 131. Paper 103808.
28. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. P. 235–245.
29. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Ultrasonic beam focusing characteristics of shear-vertical waves for contact-type linear phased array in solid // *Chinese Phys. B.* 2020. V. 29. Paper 034304.
30. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Research on ultrasonic multi-wave focusing and imaging method for linear phased arrays // *Chinese Phys. B.* 2021. V. 30, Paper 074301.
31. *Auld B.A.* *Acoustic Fields and Waves in Solids.* Malabar (Florida): Krieger Pub., 1990.
32. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by *Truesdell C.* Berlin; Heidelberg: Springer., 1973.
33. *Goldstein R.V. et al.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.* 2016. V. 86. P. 2021–2031.
34. *Pao Y.-H., Gajewski R.R.* The generalized ray theory and transient responses of layered elastic solids // *Phys. Acoust.* 1977. V. 13. P. 183–265.
35. *Kupradze V.D.* *The Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity.* Amsterdam: North-Holland, 1979.
36. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2017. V. 53. P. 243–259.
37. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.* 2004. V. 62. P. 749–766.
38. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *JAMM.* 2006. V. 70. P. 116–127.

Body Waves Induced by a Concentrated Force

A. V. Ilyashenko^{a,*}

^a*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: IlyashenkoAV@mgsu.ru*

Body waves in an isotropic elastic space propagating along the line of action of a concentrated force singularity are analyzed. It is shown that along the line of action of the force singularity, in addition to the *P*-wave, the *S*-wave also propagates. The erroneous statements found in a number of publications about the absence of *S*-waves on the line of action of the force singularity are noted.

Keywords: body wave, isotropy, force singularity, Helmholtz representation, deviator

REFERENCES

1. *Nakano H.* On Rayleigh waves // *Japan J. Astron. & Geophys.*, 1925, vol. 2, pp. 233–326.
2. *Nakano H.* Some problems concerning the propagations of the disturbances in and on semi-infinite elastic solid // *Geophys. Mag.*, 1930, vol. 2, pp. 189–348.
3. *Fuchs K., Müller G.* Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations // *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 1971, vol. 23, pp. 417–433.
4. *Kennett B.L.N., Kerry N.J., Woodhouse J.H.* Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves // *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 1978, vol. 52, pp. 215–230.
5. *Wang, D. et al.* Ground surface response induced by shallow buried explosions // *Earthquake Eng. & Eng. Vib.*, 2014, vol. 13, pp. 163–169.
6. *Cagniard L.* *Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives.* Paris: Gauthier-Villard, 1939.
7. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semiinfinite elastic medium // *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 1949, vol. 242, pp. 63–100.
8. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1955, vol. 41, pp. 629–639.
9. *Garvin W.W.* Exact transient solution of the buried line source problem // *Proc. Roy. Soc. A*, 1956, vol. 234, pp. 528–541.
10. *Pekeris C.L., Lifson H.* Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1957, vol. 29, pp. 1233–1238.

11. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
12. *Payton R.G.* Epicenter motion of an elastic half-space due to buried stationary and moving line sources // *Int. J. Solids Struct.*, 1968, vol.4, pp. 287–300.
13. *Norwood F.R.* Similarity solutions in plane elastodynamics // *Int. J. Solids Struct.*, 1973, vol. 9(7), pp. 789–803.
14. *Johnson L.R.* Green's function for Lamb's problem // *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 1974, vol. 37, pp. 99–131.
15. *Payton R.G.* Epicenter motion of a transversely isotropic elastic half-space due to a suddenly applied buried point source // *Int. J. Engng. Sci.*, 1979, vol. 17, pp. 879–887.
16. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993.
17. *Williams D.P., Craster R.V.* Cagniard-de Hoop path perturbations with applications to nongeometric wave arrivals // *J. Eng. Math.*, 2000, vol. 37, pp. 253–272.
18. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U.* The classic Garvin's problem revisited // *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 2006, vol. 96(4A), pp. 1344–1351.
19. *Sanchez-Sesma F., Iturraran-Viveros U., Kausel E.* Garvin's generalized problem revisited // *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 2013, vol. 47, pp. 4–15.
20. *Feng X., Zhang H.* Exact closed-form solutions for Lamb's problem // *Geophys. J. Int.*, 2018, vol. 214, pp. 444–459.
21. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 1904, vol. 203, pp. 1–42.
22. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // *Quart. Appl. Math.*, 2002, vol. 60, pp. 87–97.
23. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, pp. 952–959.
24. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, pp. 420–426.
25. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 356–367.
26. *Ilyasov K.K. et al.* Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. of Solids*, 2016, vol. 51, pp. 39–45.
27. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comp. Geotech.*, 2021, vol. 131, Paper 103808.
28. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.*, 2019, vol. 65, pp. 235–245.
29. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Ultrasonic beam focusing characteristics of shear-vertical waves for contact-type linear phased array in solid // *Chinese Phys. B*, 2020, vol. 29, Paper 034304.
30. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Research on ultrasonic multi-wave focusing and imaging method for linear phased arrays // *Chinese Phys. B*, 2021, vol. 30, Paper 074301.
31. *Auld B.A.* Acoustic Fields and Waves in Solids. Malabar (Florida): Krieger Pub., 1990.
32. *Gurtin M.E.* The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by *Truesdell C.* Berlin;Heidelberg: Springer, 1973.
33. *Goldstein R.V. et al.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, pp. 2021–2031.
34. *Pao Y.-H., Gajewski R.R.* The generalized ray theory and transient responses of layered elastic solids // *Phys. Acoust.*, 1977, vol. 13, pp. 183–265.
35. *Kupradze V.D.* The Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Amsterdam: North-Holland, 1979.
36. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.*, 2017, vol. 53, pp. 243–259.
37. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.*, 2004, vol. 62, pp. 749–766.
38. *Kuznetsov S.V.* Love waves in layered anisotropic media // *JAMM*, 2006, vol. 70, pp. 116–127.

УДК 532.5.011

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. Д. Ю. Князьков^{1,*}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: knyaz@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 10.09.2024 г.

После доработки 01.10.2024 г.

Принята к публикации 05.10.2024 г.

В работе моделируется поле скорости на свободной поверхности идеальной стратифицированной жидкости, порожденное вышедшими на поверхность внутренними гравитационными волнами. Написана компьютерная программа, позволяющая рассчитывать все компоненты поля скорости на поверхности. Показано, что результаты расчетов для вертикальной компоненты скорости согласуются с известными асимптотиками, полученными в приближении дальнего поля для случаев равномерного и прямолинейного движения точечного массового источника горизонтально (B. Voisin) или под фиксированным углом к горизонту (M.M. Scase и S.B. Dalziel) в равномерно стратифицированной жидкости.

Ключевые слова: поверхностные волны, стратифицированная жидкость, идеальная жидкость, поле скоростей, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0032823524050074 EDN: JPKACG

1. Введение

Внутренние гравитационные волны существуют в толще океана из-за неравномерности плотности воды, вызванной неоднородностями солёности и температуры, загрязнением. Они могут быть вызваны взаимодействием подводных течений с неровностями дна, вершинами подводных хребтов, подводными кабелями или трубопроводами, а также перемещением крупных рыб или косяков промысловой рыбы. Моделирование гравитационных волн важно при изучении океана, наблюдениях за загрязнениями, при прогнозировании погоды [1–3]. Гравитационные волны могут иметь амплитуду более ста метров, могут распространяться на километры от источника возмущений и могут быть обнаружены как непосредственно подводными датчиками [4, 5], которые измеряют колебания солёности, так и с помощью радиометрии [1–3, 6–8]. В последнем случае регистрируется влияние гравитационных волн на ветровую рябь на свободной поверхности океана [9, 10].

Ранее решалась задача расчета поля скоростей в толще равномерно [9] или произвольно стратифицированной [11] жидкости, на поверхности идеальной однородной жидкости [9, 12]. Асимптотические и численные исследования распространения гравитационных волн в толще жидкости проводились для постоянной [13–15] или произвольной (по вертикали) стратификации [16]. В настоящей работе рассматривается задача моделирования поля скорости течений на свободной поверхности идеальной стратифицированной жидкости, сформировавшегося под действием внутренних гравитационных волн, распространяющихся в ее толще. Полученные поля могут быть

далее использованы при расчете результата взаимодействия ветровой ряби с поверхностным течением [17], что важно для моделирования формы возмущения морской поверхности, при радиометрических исследованиях океана [1, 2, 10].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу моделирования распространения внутренних гравитационных волн, порожденных движением точечного массового источника в стратифицированной идеальной жидкости (рис. 1). Изменения плотности жидкости по отношению к базовой стратификации малы, поэтому для записи уравнения движения можно воспользоваться приближением Буссинеска.

Для нахождения вертикальной компоненты скорости жидкости v_z в области $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [-H, H]$ ищется решение уравнения [18, 19]

$$\Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_z + N(z)^2 \Delta_{xy} v_z = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} f(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)); \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega \quad (2.1)$$

с условиями свободной поверхности в плоскости $z = H$:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} v_z = g \Delta_{xy} v_z; z = H, \quad (2.2)$$

и нулевыми условиями на оставшейся части границы области Ω :

$$v_z = 0; \mathbf{x} \in \partial\Omega, z \neq H, \quad (2.3)$$

где $N(z)$ — частота плавучести. Стратификация может быть неравномерной, то есть частота плавучести $N(z)$ может изменяться по глубине по произвольному закону, что соответствует естественной среде, где профиль стратификации может иметь сложную структуру и может меняться, например, в зависимости от сезона. В начальный момент времени

$$v_z|_{t=0} = 0 \quad (2.4)$$

Функция f задает источник:

$$f(x, y, z) = \frac{BA^3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-A^2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

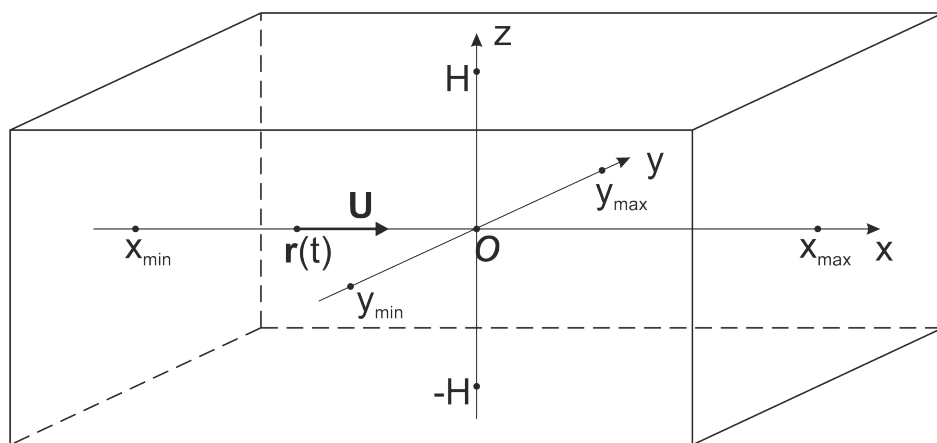


Рис. 1. Область Ω

Заметим, что $\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = B$. В случае равномерного движения источника возмущения его положение определяется функцией $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{U}t$, где $\mathbf{U}$ – скорость прямолинейного движения массового источника.

Можно выписать задачи для остальных компонент скорости [18], а именно, для компоненты v_x :

$$\Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_x + N(z)^2 \Delta_{xy} v_x = \left(\frac{\partial}{\partial t^2} + N(z)^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{U}t); \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.5)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_x = -g \frac{\partial}{\partial x} v_z; \quad z = H \quad (2.6)$$

$$v_x = 0; \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad z \neq H \quad (2.7)$$

начальным условием

$$v_x|_{t=0} = 0, \quad (2.8)$$

и для компоненты v_y :

$$\Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_y + N(z)^2 \Delta_{xy} v_y = \left(\frac{\partial}{\partial t^2} + N(z)^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{U}t); \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_y = -g \frac{\partial}{\partial y} v_z; \quad z = H \quad (2.10)$$

$$v_y = 0; \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad z \neq H \quad (2.11)$$

$$v_y|_{t=0} = 0 \quad (2.12)$$

Для нахождения полей компонент скорости $v_x(\mathbf{x}, t)$ и $v_y(\mathbf{x}, t)$ во всей области Ω нужно решить задачу (2.5)–(2.8) и задачу (2.9)–(2.12), при этом в правых частях условий (2.6) и (2.10) используется функция v_z , найденная ранее в результате решения задачи (2.1)–(2.4).

3. Моделирование поля скоростей на свободной поверхности

Пусть требуется найти горизонтальные компоненты поля скоростей жидкости v_x , v_y не во всей области Ω , а только на свободной поверхности $z = H$. Тогда сначала следует решить задачу (2.1)–(2.4), то есть найти вертикальную компоненту скорости $v_z(x, t)$, на всем временном отрезке $[0, T]$, где T – полное время моделирования. Далее, найденное поле вертикальной компоненты скорости подставляется в правую часть соотношений (2.6) и (2.10) и для каждой точки свободной поверхности (x_m, y_n, H) решаются соответствующие задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2.6) и (2.10), в результате чего определяются горизонтальные компоненты скорости $v_x(x, y, H, t)$ и $v_y(x, y, H, t)$, в точках свободной поверхности на всем интервале времени $t \in [0, T]$.

3.1. Численная схема для нахождения вертикальной компоненты скорости жидкости v_z в области Ω . Для решения краевой задачи (2.1)–(2.4) в области Ω используется не-

явная разностная схема на равномерной расчетной сетке, состоящей из $N_x \times N_y \times N_z$ узлов. Обозначим

$$\psi(s) = v_z(qs)$$

$$\psi_{m,n,k}^s = v_z(x_{\min} + h(m-1), y_{\min} + h(n-1), -H + h(k-1), qs)$$

$$f(m, n, k, s) = f(x_{\min} + h(m-1), y_{\min} + h(n-1), -H + h(k-1), qs),$$

где $m = 1, \dots, N_x$, $n = 1, \dots, N_y$, $k = 1, \dots, N_z$, $s = 2, \dots, T/q$, h – шаг по пространству, q – шаг по времени. На каждом шаге по времени s решается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Q\psi^{s+1} = r^s \quad (3.1)$$

для неизвестных $\psi_{m,n,k}^{s+1}$, $m = 1, \dots, N_x$, $n = 1, \dots, N_y$, $k = 1, \dots, N_z$. Для аппроксимации вторых производных по времени и по пространственным переменным в (2.1) используются центральные разности:

$$\frac{\Delta_{xyz}\psi(s+1) - 2\Delta_{xyz}\psi(s) + \Delta_{xyz}\psi(s-1)}{q^2} + \Delta_{xy}\psi(m, n, k, s) = \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} f(m, n, k, s)$$

Здесь Δ_{xyz} , Δ_{xy} – соответствующие разностные операторы. Таким образом, внутри области Ω , то есть для $1 < m < N_x$, $1 < n < N_y$, $1 < k < N_z$ имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2 q^2} (\psi_{m-1,n,k}^{s+1} + \psi_{m+1,n,k}^{s+1} + \psi_{m,n-1,k}^{s+1} + \psi_{m,n+1,k}^{s+1} + \psi_{m,n,k-1}^{s+1} + \psi_{m,n,k+1}^{s+1} - 6\psi_{m,n,k}^{s+1}) = \\ & = -\frac{-2\Delta_{xyz}\psi(s) + \Delta_{xyz}\psi(s-1)}{q^2} - \Delta_{xy}\psi(s) + \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} f(m, n, k, s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

На свободной поверхности, то есть для $k = N_z$ граничное условие (2.2) аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{1}{2h} \left(3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_{m,n,k} - 4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_{m,n,k-1} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_{m,n,k-2} \right) = g \Delta_{xy} \psi(s), \quad (3.3)$$

где $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_{m,n,k}$ обозначает аппроксимацию центральной разностью второй производной по времени:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_{m,n,k} \equiv (\psi_{m,n,k}^{s+1} - 2\psi_{m,n,k}^s + \psi_{m,n,k}^{s-1}) / q^2$$

На остальной части границы области $\partial\Omega$, то есть для $m = 1$, $m = N_x$, $n = 1$, $n = N_y$, $k = 1$, из условия (2.3) имеем:

$$\psi_{m,n,k}^{s+1} = 0 \quad (3.4)$$

Коэффициенты матрицы Q системы (3.1) определяются левыми частями соотношений (3.2)–(3.4), а вектор правой части r^s – правыми частями этих соотношений.

3.2. Расчет горизонтальных компонент скорости v_x и v_y на свободной поверхности.

Опишем подробнее процедуру нахождения горизонтальной x -компоненты скорости жидкости на свободной поверхности, $v_x(x, y, H, t)$, $(x, y) \in [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$,

$t \in [0, T]$. Выпишем условие (2.6) в точке свободной поверхности (x_m, y_n) , где $x = x_{\min} + h(m-1)$, $y = y_{\min} + h(n-1)$, $m = 1, \dots, N_x$, $n = 1, \dots, N_y$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \zeta(t) = -g \frac{\partial}{\partial x} v_z(x_m, y_n, H, t), \quad (3.5)$$

где обозначено $\zeta(t) = v_z(x_m, y_n, H, t)$. Зададим начальное условие

$$\zeta(0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \zeta(0) = 0 \quad (3.6)$$

Функция v_z правой части (3.5) найдена ранее в результате решения задачи (2.1)–(2.4). Для аппроксимации второй производной по времени используется схема центральных разностей:

$$\zeta^{s+1} = 2\zeta^s - \zeta^{s-1} - q^2 v_z(x_m, y_n, H, (s+1)q); \quad s = 2, \dots, T/q,$$

где $\zeta^s \equiv \zeta(sq)$, $\zeta^0 = \zeta^1 = 0$. Решив задачу Коши (3.5), (3.6) для всех точек (x_m, y_n) , $m = 1, \dots, N_x$, $n = 1, \dots, N_y$ найдем поле v_x на свободной поверхности. Аналогично (с использованием условия (2.9)) рассчитывается поле горизонтальной компоненты скорости на свободной поверхности v_y .

3.3. Компьютерная реализация. Описанный выше алгоритм был реализован в компьютерной программе на языке программирования C++. Разработанная программа позволяет моделировать распространение гравитационных волн от движущегося точечного источника возмущений, рассчитывать изменение во времени поля вертикальной компоненты скорости жидкости v_z во всей области Ω , изменение во времени горизонтальных компонент скорости жидкости v_x и v_y на свободной поверхности жидкости. При решении краевой задачи (2.1)–(2.4) на каждом шаге s по времени решается СЛАУ (3.1) с матрицей Q определенной соотношениями (3.2)–(3.4), задающими численную схему. Матрица Q разреженная: каждая ее строка содержит всего 7 ненулевых элементов (по количеству используемых узлов сетки в шаблоне численного метода), поэтому для ее хранения используется специальный сжатый формат. Это позволяет минимизировать требования к объему оперативной памяти и вести расчет на сетках до $220 \times 220 \times 220$ на персональном компьютере или до $400 \times 400 \times 400$ на одном вычислительном узле суперкомпьютера. Для решения системы (3.1) используется обобщенный метод минимальной невязки (Generalized minimal residual method, GMRES). Этот итерационный проекционный метод решения СЛАУ был предложен в [20]. Расчет одного шага по времени в типовом расчете на сетке $250 \times 250 \times 250$ занимает примерно 30 минут на одном вычислительном узле суперкомпьютера МСЦ РАН (Intel(R) Xeon(R) CPU E5530@2.40GHz, 8Gb O3Y). На s -м шаге по времени выполняется несколько итераций решения системы (3.1), при этом контролируется величина невязки $e(s, j)$,

$$e(s, j) = \frac{\|Q\psi^{s+1,j} - r^s\|}{\|r^s\|},$$

где $\psi^{s+1,j}$ — j -е приближение к ψ^{s+1} . Таким образом, на каждом шаге выполняется 5–10 итераций, в результате чего величина невязки $e(s, j)$ падает на 1–2 порядка до значений около 10^{-2} . Весь такой расчет (до выхода источника возмущений за пределы области Ω) занимает около суток. В программе реализовано периодическое сохранение текущих результатов, что позволяет продолжить счет в случае сбоя или когда требуемое время расчета превышает максимальное допустимое на суперкомпьютере время

непрерывного счета. Таким образом находится v_z во всей области Ω для $t \in [0, T]$. Далее решается набор задач (3.5), (3.6), и в результате получается искомое поле течений (v_x, v_y) на свободной поверхности $z = H$ при $t \in [0, T]$. Для реализации элементарных операций с разреженными матрицами и решения системы (3.1) используется пакет GNU Scientific Library (GSL) [21]. Исходный код программы доступен в интернете по адресу <https://bitbucket.org/Jclash/inwaves>.

4. Сравнение с асимптотиками

Для верификации правильности расчетов было проведено сравнение результатов расчета компьютерной программы с известными асимптотическими решениями. Пусть жидкость равномерно стратифицирована ($N = \text{const}$), а гравитационные волны возбуждаются точечным массовым источником, т.е. функция f правой части уравнений (2.1), (2.5), (2.9) задана как

$$f(x, y, z) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Источник возмущения движется равномерно и прямолинейно со скоростью V в неограниченной области, то есть его движение описывается функцией $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{U}t$, где $|\mathbf{U}| = V$. В этом случае известны асимптотики дальнего поля для скорости жидкости $\mathbf{v}$, когда источник движется горизонтально [13] или под фиксированным углом к горизонту [14].

4.1. Горизонтальное движение. В случае, когда источник движется горизонтально прямолинейно и с постоянной скоростью, скорость жидкости в дальнем поле $r_1 \gg V/N$ для $x > 0$ может быть вычислена с использованием следующей формулы [13] в сферической системе координат (r_1, ξ, φ) с центром в точке текущего положения точечного источника $\mathbf{r}(t)$ (рис. 2):

$$\mathbf{v}(x, y, z) = H(x_1) \frac{NQ}{2\pi V r_1} \frac{\sqrt{\sin^2 \xi + \cos^2 \xi \cos^2 \varphi}}{\sin \xi} \frac{\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|} \cos\left(\frac{N}{V} r_1 |\sin \varphi|\right) \quad (4.1)$$

Здесь

$$\mathbf{W} = (-r_1 \tan \xi \sin \varphi, r_1 \sin \xi \cos \varphi, r_1 \sin \xi \sin \varphi),$$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ – вектор из точки текущего положения источника O_1 в точку M с координатами (x, y, z) в которой рассчитывается поле скоростей, $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $\xi = \arccos x_1/r_1$, $\varphi = \arccos(y_1/\sqrt{y_1^2 + z_1^2})$, $H(x)$ – функция Хевисайда,

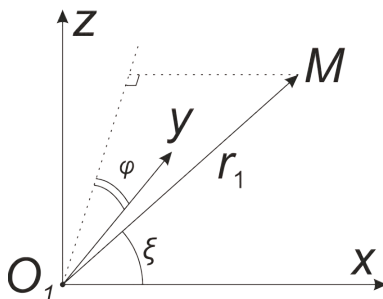


Рис. 2. Схема расчета асимптотики поля скорости при горизонтальном движении массового источника из [13]

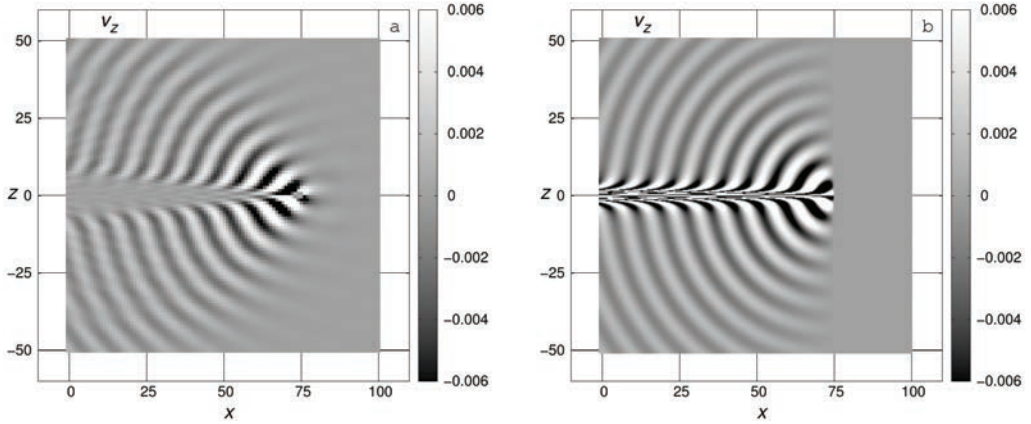


Рис. 3. Моделирование горизонтального движения в идеальной равномерно стратифицированной жидкости, $N = 0.8$. Скорость движения $V = 1$ м/с, вертикальная составляющая скорости жидкости $v_z(x, l, z)$ показана в вертикальном сечении $y = 1$. Время движения $T = 125$ с для (а).

Показано численное решение (а) и аналитическая аппроксимация (б)

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Пример сравнения результата численного моделирования и асимптотики (4.1) показан на рис. 3.

4.2. Движение под фиксированным углом к горизонту. Аналогичная асимптотика может быть выписана в случае, когда источник возмущения движется равномерно под фиксированным углом γ к горизонту, то есть $\mathbf{U} = (V \cos \gamma, 0, V \sin \gamma)$. Асимптотика дальнего поля для скорости в точке M в системе координат (r, θ, ϕ) с центром в точке текущего положения источника O_1 (рис. 4) имеет следующий вид [14]:

$$\mathbf{v} = \frac{NQ}{2\pi c_g} \frac{(R_x^2 + R_y^2)^{1/2}}{R^2} \frac{\mathbf{R} \cos(N |R_z| / c_g + \pi H(A)/2)}{|A|^{1/2}}, \quad (4.2)$$

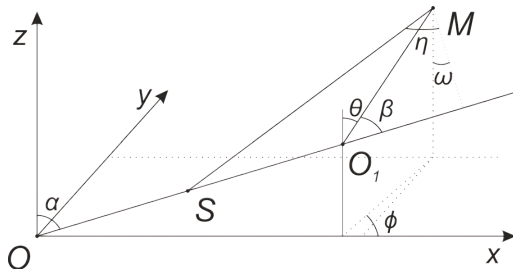


Рис. 4. Схема расчета асимптотики поля скорости при движении массового источника под углом к горизонту из [14]

где

$$\mathbf{c}_g = \mathbf{V} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{R}{R_z} \mathbf{e}_z \right) \frac{\mathbf{R}}{R}, A = - \left(\frac{\mathbf{V}}{c_g} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right)^2 + 2 \frac{\mathbf{V}}{c_g} \cdot \frac{R}{R_z} \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{R} = r_1 \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \cos^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \eta - \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \eta - \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix},$$

$\overline{OM} = (x_1, y_1, z_1)$, $\theta = \arccos(z_1/r_1)$, $\phi = \arccos(x_1/\sqrt{y_1^2 + x_1^2})$, $\alpha = 90^\circ - \gamma$, и тригонометрические функции углов β , ω и η находятся из следующих соотношений:

$$\cot \beta = \frac{\sin \theta \cos \phi \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + (\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \phi \cos \alpha)^2}}$$

$$\cos \omega = \frac{(\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \phi \cos \alpha) \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + (\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \phi \cos \alpha)^2}}$$

$$\operatorname{tg}^3 \eta + \left(\frac{\cos \omega}{\cos \alpha} \operatorname{ctg} \beta + 2 \right) \operatorname{tg} \eta + \frac{\cos \omega}{\cos \alpha} - \operatorname{ctg} \beta = 0 \quad (4.3)$$

Поле скоростей (4.2) вычисляется как сумма волн, соответствующих действительным корням кубического уравнения (4.3), при которых выполнено двустороннее неравенство $0 < \tau_s < T$, где T – полное время движения,

$$\tau_s = T - \frac{r \sin \beta \cos \alpha \operatorname{tg} \eta + \cos \omega}{V \cos^2 \eta \cos \omega \operatorname{tg} \eta - \cos \alpha}$$

Для вычисления асимптотик (4.1) и (4.2) была написана компьютерная программа на языке программирования Python. Было проведено сравнение между численными решениями задачи (2.1)–(2.4) в области Ω и приближениями (4.1) и (4.2). Пример такого сравнения показан на рис. 3 и рис. 5. Установлено, что результаты расчетов программы согласуются с этими асимптотиками на достаточном расстоянии от ис-

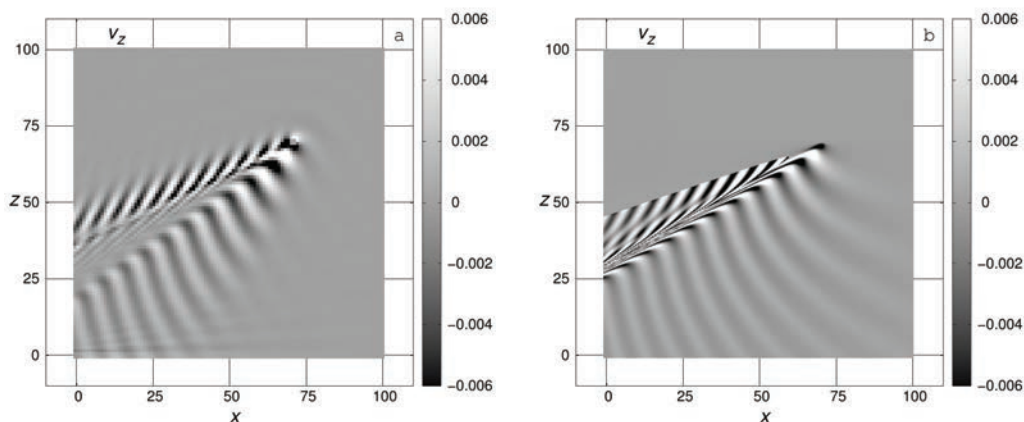


Рис. 5. Моделирование распространения внутренних волн от массового источника, который движется равномерно и прямолинейно под фиксированным углом $\gamma = 30^\circ$ к горизонту, $N = 0.8$. Скорость движения $V = 1$ м/с, вертикальная составляющая скорости жидкости $v_z(x, 1, z)$ показана в вертикальном сечении $y = 1$. Время движения $T = 139.3$ с. Показаны численное решение (а) и аналитическая аппроксимация (б)

точника и линии движения, когда после начала движения прошло достаточно продолжительное время (то есть когда картина возмущений, формирующихся вокруг движущегося источника, принимает установившийся характер).

5. Пример расчета

Пусть область $\bar{U} = [-100, 100] \times [-50, 50] \times [-25, 25]$ с размерами $200.0 \times 100.0 \times 50.0$ заполнена однородно стратифицированной (частота плавучести $N = 0.8$) идеальной жидкостью, глубина $2H = 50.0$ м. Промоделируем распространение внутренних гравитационных волн в области U , в качестве источника возмущения возьмем горизонтально движущий точечный массовый источник. Такая вытянутая вдоль линии движения форма области выбрана для того, чтобы за время движения T картина течений на поверхности (движущаяся вслед за источником возмущения) успела установиться. Ширина области $y_{max} - y_{min}$ выбрана достаточной для того, чтобы края области (на которых к тому же задано нефизическое условие $v_z = 0$) не влияли на картину возмущения поверхности. Глубина области $2H$ выбрана достаточной, чтобы отраженное от дна (где задано условие непротекания $v_z = 0$, см. (2.3)) возмущение достаточно ослабло и не влияло на картину возмущений вблизи поверхности. Источник движется из точки с координатами $(-75, 0, 20)$ со скоростью $\mathbf{U} = (1, 0, 0)$, то есть движение происходит вдоль оси Ox на глубине 5 метров.

При решении задачи (2.1)–(2.4) разностным методом (3.1)–(3.4) использовалась расчетная сетка размером $378 \times 186 \times 63$. Шаг по пространству брался равным $h = 0.79$, шаг по времени $q = 0.079$. Расчет проводился до момента $T = 225$ с, когда источник возмущения достигал границы области Ω . Один расчет занимал около двух суток на одном вычислительном узле суперомпьютера МВС-10П. Результаты расчета вертикальной компоненты скорости $v_z(x, y, z, t)$ приведены на рис. 6. Для момента времени

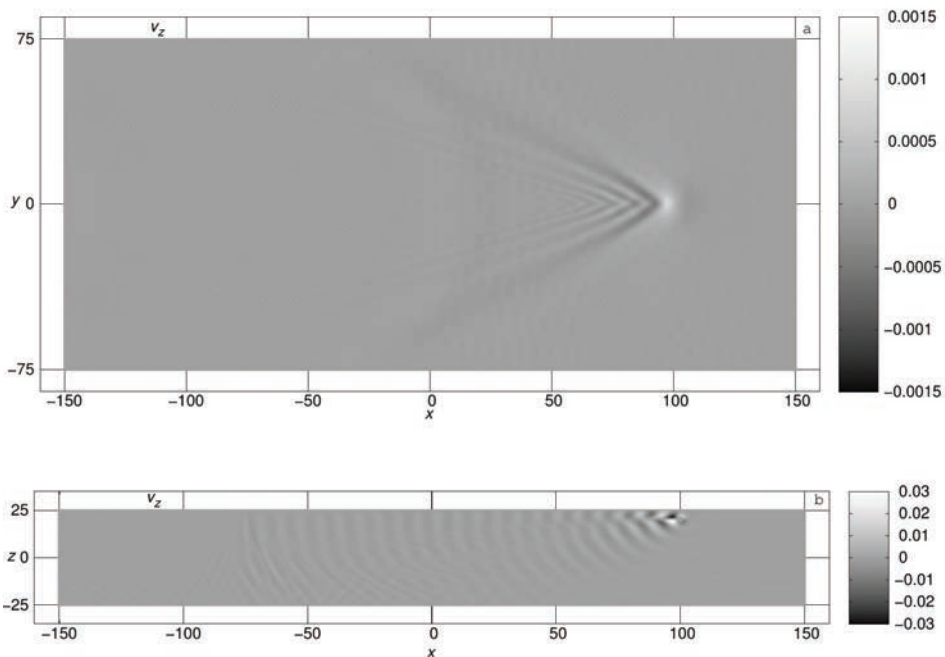


Рис. 6. Величина вертикальной компоненты скорости v_z на свободной поверхности (а) и в толще жидкости (б) в момент времени $t = 175$ с

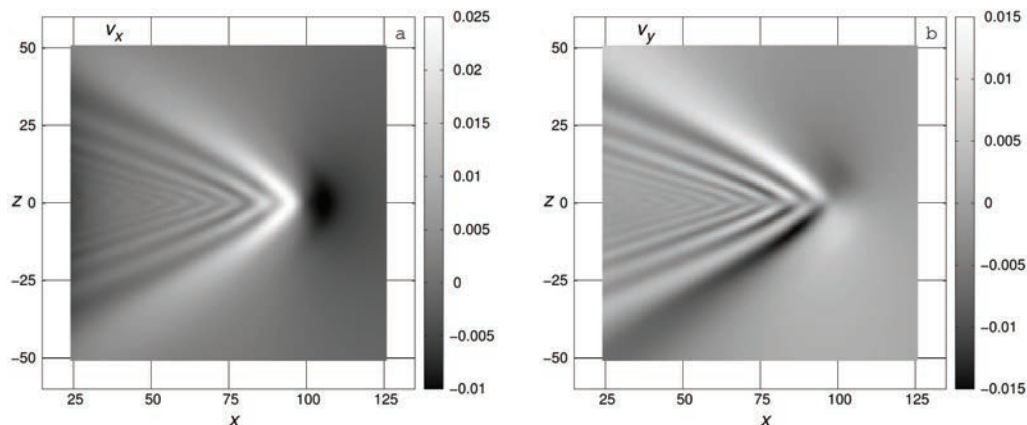


Рис. 7. Поле течений (v_x, v_y) на свободной поверхности $z = H$ в момент времени $t = 175$ с: показаны x -компонента (а) и y -компонента (б)

$t = 175$ с показаны (а) величина вертикальной компоненты $v_z(x, y, H)$ на свободной поверхности $z = H$ и (б) величина вертикальной компоненты $v_z(x, 0, z)$ в вертикальном сечении $y = 0$, проходящем через линию движения источника возмущения.

Результаты решения задачи (2.1)–(2.4) загружались с вычислительного кластера на персональный компьютер, на котором уже решалась существенно менее требовательная к вычислительным ресурсам задача (3.5), (3.6). Таким образом определялись компоненты скорости v_x и v_y на свободной поверхности $z = H$. Эти компоненты показаны на рис. 7, а и б. Для исключения влияния переходных процессов на картину течения, в расчетах взаимодействия течения с ветровым волнением следует брать поля скоростей v_x, v_y на достаточном удалении от точки, находящейся над точкой, из которой начинается движения источника. Например, на рис. 8 показаны поля скоростей не на всей верхней границе области Ω , а только на участке свободной поверхности $[25, 125] \times [-50, 50]$.

Заключение

В настоящей работе решается задача моделирования распространения гравитационных волн от движущегося в идеальной стратифицированной жидкости массового источника. Частота плавучести может изменяться с высотой. Была разработана компьютерная программа, позволяющая рассчитывать изменение во времени поля скорости на свободной поверхности, вертикальной компоненты скорости в толще жидкости. Достоверность расчетов верифицирована сравнением с асимптотическими приближениями дальнего поля для случаев, когда жидкость равномерно стратифицирована, а источник движется равномерно и прямолинейно горизонтально [13] или под углом к горизонту [14]. Результаты расчетов согласуются с экспериментом по обтеканию сферы потоком стратифицированной жидкости [22].

Для отладки численных методов и для сравнения с известными асимптотиками считалось, что гравитационные волны возбуждаются точечным массовым источником. Однако в разработанном методе моделирования поверхностных течений возможно задать более сложные возмущающие воздействия: с помощью осциллирующего источника, нескольких движущихся источников. Например, представляет интерес задача моделирования возмущения от движущейся стаи промысловых рыб. С помощью разработанных компьютерных программ можно моделировать возмуще-

ние от такого сложного объекта: в толще жидкости расчет вести по асимптотическим формулам (4.1) или (4.2), а вблизи свободной поверхности использовать для расчета алгоритм, предложенный в разделе 3.

Результаты расчетов, приведенные выше, были получены как на персональных компьютерах, так и с использованием вычислительных кластеров Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН (МСЦ РАН), г. Москва. Автор выражает глубокую признательность руководству и сотрудникам МСЦ РАН, предоставившим возможность и техническую поддержку этих расчетов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-61-00025, <https://rscf.ru/project/24-61-00025/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров С.В., Шамаев А.С., Шамаев С.И.* Алгоритмы, методы и средства компьютерной радиотомографии приповерхностного слоя Земли. М.: Научный мир, 1996. 296 с.
2. *Ulaby F.T., Long D.G.* Microwave Radar and Radiometric Remote Sensing. Artech, 2015. 1116 p.
3. *Jackson C.R., da Silva J.C.B., Jeans G. et al.* Nonlinear internal waves in synthetic aperture radar imagery // *Oceanography*. 2013. V. 26. № 2. P. 68–79.
4. *Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S.* Motion of mass source in stratified fluid // *J. Phys.: Conf. Ser.* V. 2224. 2021 2nd Int. Symp. on Automation, Information and Computing (ISAIC 2021) December 03 – 06 2021 Online. P. 012038-1–8. 2022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2224/1/012038>
5. *Байдулов В.Г.* О решении обратной задачи движения источника в стратифицированной жидкости // Волны и вихри в сложных средах: 12-ая межд. конф. — школа молодых ученых; 01 — 03 декабря 2021 г. Сб. матер. школы. М.: ООО ИСПОпринт, 2021. С. 31–35.
6. *Ulaby F.T., Moore R.K., Fung A.K.* Microwave Remote Sensing. Active and Passive. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1981. 456 p.
7. *Knyazkov D.* Diffraction of Plane Wave at 3-dimensional Periodic Layer // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1978. P. 470075-1–4. <https://doi.org/10.1063/1.5044145>
8. *Булатов М.Г., Кравцов Ю.А., Лаврова О.Ю. и др.* Физические механизмы формирования аэрокосмических радиолокационных изображений океана // *УФН*. 2003. Т. 173. № 1. С. 69–87.
9. *Князьков Д.Ю., Байдулов В.Г., Савин А.С., Шамаев А.С.* Прямые и обратные задачи динамики поверхностного волнения, вызванного обтеканием подводного препятствия // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 3. С. 442–453. <https://doi.org/10.31857/S0032823523030074>
10. *Гавриков А.А., Князьков Д.Ю., Романова А.В. и др.* Моделирование влияния волнения поверхности на спектр собственного излучения океана // Программные системы: теория и приложения. 2016. Т. 7. Вып. 2(29). С. 73–84.
11. *Knyazkov D., Shamaev A.* Rectilinear motion of mass source in non-uniformly stratified fluid. *AIP Conf. Proc.* 2024. V. 3094(1). P. 500028-1–4. <https://doi.org/10.1063/5.0210166>
12. *Горелов А.М., Носов В.Н., Савин А.С., Савина Е.О.* Метод расчета поверхностных возмущений над точечным источником и диполем // *Изв. РАН. МЖГ*. 2009. № 1. С. 203–207.
13. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 261. P. 333–374.
14. *Scase M.M., Dalziel S.B.* Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 498. P. 289–313.
15. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 3. С. 83–97.
16. *Bulatov V.V.* Mathematical modeling of dynamics of internal gravity waves in the ocean with arbitrary distribution of buoyancy frequency // *Fluid Dyn.* 2023. V. 58 (Suppl 2). P. 274–285. <https://doi.org/10.1134/S0015462823603169>

17. Зарубин Н.А., Шамаев А.С. Исследование взаимодействия поверхностных ветровых волн с течением // Морские интеллек. технol. 2023. Т. 3. № 4. С. 93–99.
18. Bulatov V.V., Vladimirov Yu. V. Wave Dynamics of Stratified Mediums. M.: Наука, 2012. 584 p.
19. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от движущихся источников возмущений // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2018. № 4. С. 73–89.
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-4-73-89>
20. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. on Sci.&Statist. Comput. 1986. V. 7:3. P. 856–869.
21. Galassi M., Davies J., Theiler J. et al. GNU Scientific Library Reference Manual (3rd Ed.). Network Theory Ltd, 2009. 592 p.
22. Чашечкин Ю.Д., Гуменник Е.В., Сысоева Е.Я. Трансформация плотностного поля трехмерным телом, движущимся в непрерывно стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1995. № 1. С. 20–32.

Simulation of the Flow Velocity Field on the Free Surface of a Stratified Fluid

D. Yu. Knyazkov^{a,*}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: knyaz@ipmnet.ru*

The paper considers the problem of simulation of the velocity field on the free surface of an ideal stratified fluid generated by internal gravitational waves that reached the surface. The buoyancy frequency may vary with depth. The computer program has been written that allows calculating all components of the velocity field on the surface. It is shown that the calculation results for the vertical velocity component are consistent with the known asymptotics obtained in the far-field approximation for the cases of uniform and rectilinear motion of a point mass source horizontally (by B. Voisin) or at a fixed angle to the horizon (by M.M. Scase and S.B. Dalziel) in a uniformly stratified fluid.

Keywords: surface waves, stratified fluid, ideal fluid, velocity field, numerical simulation.

REFERENCES

1. Nesterov S.V., Shamaev A.S., Shamaev S.I. Methods, Algorithms and Tools of Aerospace Computer Tomography of Near-Surface Layer of the Earth. Moscow: Nauch. Mir, 1996. 272 p. (in Russian)
2. Ulaby F.T., Long D.G. Microwave Radar and Radiometric Remote Sensing. Artech, 2015. 1116 p.
3. Jackson C.R., da Silva J.C.B., Jeans G. et al. Nonlinear internal waves in synthetic aperture radar imagery // Oceanogr., 2013, vol. 26, no. 2, pp. 68–79.
4. Baydulov V.G., Knyazkov D., Shamaev A.S. Motion of mass source in stratified fluid // J. Phys.: Conf. Ser., 2021, vol. 2224, 2nd Int. Symp. on Automation, Information and Computing (ISAIC 2021), December 03–06 2021 Online. pp. 012038-1–8. 2022.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2224/1/012038>
5. Baydulov V.G. On the solution of the inverse problem of the motion of a source in a stratified fluid // in: Proc. 12th Int. Conf. – School of Young Sci. Waves and Vortices in Complex Media. Moscow, Dec. 01–03, 2021. Moscow: ISPOPrint, 2021. pp. 31–35.
6. Ulaby F.T., Moore R.K., Fung A.K. Microwave Remote Sensing. Active and Passive. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1981. 456 p.
7. Knyazkov D. Diffraction of Plane Wave at 3-dimensional Periodic Layer // AIP Conf. Proc., 2018, vol. 1978, 470075-1–4.
<https://doi.org/10.1063/1.5044145>
8. Bulatov M.G., Kravtsov Yu.A., Lavrova O.Yu. et al. Physical mechanisms of aerospace radar imaging of the ocean // Phys. Usp., 2003, vol. 46, no. 1, pp. 63–79.
9. Knyazkov D.Y., Baydulov V.G., Savin A.S., Shamaev A.S. Direct and inverse problems of the dynamics of surface waves caused by the flow around an underwater obstacle // Fluid Dyn., 2023, vol. 58, pp. 1725–1733.
<https://doi.org/10.1134/S0015462823603030>

10. Gavrikov A., Knyazkov D., Romanova A., Chernik V., Shamaev A. Simulation of influence of the surface disturbance on the ocean self radiation spectrum // *Progr. Syst.: Theory&Appl.*, 2016, vol. 7, iss. 2, pp. 73–84.
<https://doi.org/10.25209/2079-3316-2016-7-2-73-84>
11. Knyazkov D., Shamaev A. Rectilinear motion of mass source in non-uniformly stratified fluid. *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3094(1), pp. 500028-1–4.
<https://doi.org/10.1063/5.0210166>
12. Gorelov, A.M., Nosov, V.N., Savin, A.S. *et al.* Method of calculating surface disturbances over a point source and a dipole // *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, no. 1, pp. 170–174.
<https://doi.org/10.1134/S0015462809010177>
13. Voisin B. Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Part 2. Moving point sources // *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 261, pp. 333–374.
14. Scase M.M., Dalziel S.B. Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 498, pp. 289–313.
15. Matyushin P.V. Process of the formation of internal waves initiated by the start of motion of a body in a stratified viscous fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 374–388.
<https://doi.org/10.1134/S0015462819020095>
16. Bulatov V.V. Mathematical modeling of dynamics of internal gravity waves in the ocean with arbitrary distribution of buoyancy frequency // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58 (Suppl 2), pp. 274–285.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1134/S0015462823603169>
17. Zarubin N.A., Shamaev A.S. Investigation of the model of interaction of wind waves with the sea current // *Marine Intellect. Technol.*, 2023, vol. 62, pp. 93–98. (in Russian)
<https://doi.org/10.37220/MIT.2023.62.4.070>
18. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Wave Dynamics of Stratified Mediums*. Moscow: Nauka, 2012. 584 p.
19. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far fields of internal gravitational waves from moving perturbation sources // *Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.*, 2018, no. 4, pp. 73–89. (in Russian)
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-4-73-89>
20. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // *SIAM J. on Sci.&Statist. Comput.*, 1986, vol. 7:3, pp. 856–869.
21. Galassi M., Davies J., Theiler J. *et al.* *GNU Scientific Library Reference Manual* (3rd Ed.). Network Theory Ltd, 2009. 592 p.
22. Chashechkin Y., Gumennik E., Sysoeva E. Transformation of a density field by a three-dimensional body moving in a continuously stratified fluid // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1995, vol. 36, pp. 19–29.

УДК 534.2,519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРОМОЧНОГО ШУМА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА НА ОСНОВЕ СИНТЕТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ© 2024 г. Н. В. Балакирева^{1,*}, А. С. Суворов¹*¹Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН,
Нижний Новгород, Россия***e-mail: balakireva@ipfran.ru*

Поступила в редакцию 13.02.2024 г.

После доработки 30.08.2024 г.

Принята к публикации 10.09.2024 г.

Представлен подход к численному моделированию широкополосного шума, возбуждаемого турбулентными пульсациями жидкости в присутствии упругого тела, методом на основе синтетической турбулентности. Наиболее распространенные существующие методы решения данной задачи требуют большого объема вычислений, что в случае реальных технических приложений приводит к практически невыполнимым требованиям к вычислительным ресурсам. Сокращение объема вычислений может быть достигнуто для класса задач, в котором реализуется безотрывное обтекание.

В представленном методе пульсации скорости генерируются на основе информации об осредненных гидродинамических полях, путем пространственной фильтрации белого шума с заданными корреляционными характеристиками. Метод позволяет локализовать области с наиболее интенсивным шумоизлучением, а также интерпретировать полученный результат, анализируя особенности гидродинамического потока и свойства упругой конструкции. Представлена верификация метода на примере задачи о шумоизлучении фрагмента реальной технической конструкции, обтекаемой потоком жидкости.

Ключевые слова: гидродинамический шум, синтетическая турбулентность, конечно-элементное моделирование, излучение звука

DOI: 10.31857/S0032823524050084 EDN: JPIRMW

1. Введение

Снижение уровня подводного шума объектов морской техники является актуальной задачей. Акустическое излучение гребного винта, являющегося наиболее существенным источником шума, включает в себя тональную и широкополосную составляющие. Широкополосная часть спектра шума, преобладающая в высокочастотной области, связана с взаимодействием турбулентного пограничного слоя с лопастями движителей [1]. Шум, возникающий при взаимодействии турбулентного пограничного слоя с острыми кромками тела, называется кромочным шумом. При этом большое влияние на гидродинамический кромочный шум оказывают виброакустические характеристики лопастей, что приводит к резонансному усилению излучения звука.

С развитием современных технологий появилась возможность численного прогнозирования шумов обтекания. Чаще всего используется аналогия Лайтхилла [2], концепция которой подразумевает разделение задачи на гидродинамическую и аку-

стическую. К настоящему времени разработан ряд эффективных аналитических и численных методов решения уравнения Лайтхилла с известной правой частью, в том числе и в присутствии отражающих границ [3–5]. Аналогия Фокс Вильямса–Хокингса [5] приобрела большую популярность и широко используется при численном прогнозировании аэроакустических процессов, в том числе шумоизлучения воздушных винтов. Использован [6] метод граничных элементов с уравнениями FW–Н, чтобы понять природу возникновения шума, генерируемого воздушными винтами. Определено [6] ближнее поле воздушного винта и предсказаны его акустические характеристики в дальнем поле. FW–Н активно используется в работах ЦАГИ, в частности обсуждается [7, 8] методология расчета шума воздушных винтов. В ней аэродинамические характеристики винта определяются при помощи численного решения системы уравнений Эйлера на произвольных неструктурированных сетках в рамках конечно-объемного подхода, и затем для расчета акустического излучения применяется метод FW–Н. Проведено [9] исследование кавитирующего и некавитирующего винтов в условиях неоднородной идеальной жидкости и показано, что прогнозы шума FW–Н согласуются с результатами, полученными с помощью классического подхода с уравнениями Бернулли. Использована [10, 11] аналогия FW–Н совместно с методом моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) для оценки точности различных численных методологий при решении уравнения FW–Н и оценки шума, создаваемого квадратным цилиндром конечного размера, погруженного в равномерный поток. Данное исследование показало, что квадрупольные источники звука являются значимыми в широком диапазоне частот. Это приводит к пониманию одного из недостатков метода FW–Н и некорректности его использования в случае пренебрежения квадрупольными источниками.

Стоит отметить и несколько других недостатков аналогии FW–Н. Во-первых, в ней не учитывается упругость обтекаемой конструкции, что делает аналогию неприменимой для прогнозирования гидродинамического кромочного шума. В виде исключения алгоритмы FW–Н для прогнозирования подводного шума морских гребных винтов могут применяться для описания низкочастотных процессов [12, 13] в ситуациях, когда шумоизлучение вызвано дискретными лопастными частотами или кавитацией. Во-вторых, использование LES моделей при описании гидродинамических полей является дорогостоящим, и чаще пользуются гибридными численными методами. В таких методах расчетная область охватывает лишь малое пространство вблизи исследуемой неоднородности обтекаемого тела, и вихревые особенности формируются искусственно на границах перехода между зонами RANS (осредненный поток) и LES (турбулентный поток) в гибридной гидродинамической модели [14, 15]. Процессы формирования таких искусственных вихрей являются широкополосными и искажают величину и распределение нестационарных гидродинамических нагрузок, действующих на поверхность [16]. Соответственно, результаты таких расчетов могут быть некорректны.

Альтернативные FW–Н подходы основаны на методе конечно-элементного моделирования шумоизлучения, например [17–19]. Акустическое излучение в этом случае рассматривается как рассеяние созданной турбулентностью псевдозвуковой волны на поверхности обтекаемого тела. Они лишены основных недостатков FW–Н, однако также требуют определения флуктуаций гидродинамических полей при помощи вихреразрешающего моделирования. Моделирование турбулентных пульсаций скорости продолжает оставаться сложнейшей задачей механики сплошной среды [20, 21].

В последние годы развивается альтернативный подход, открывающий возможность гораздо менее затратного моделирования гидродинамических источников с использованием так называемой синтетической турбулентности. Термином синтетическая турбулентность (*synthetic turbulence*) обозначают случайные пространственно-временные распределения скорости в турбулентном течении, которые гене-

пируются без прямого численного решения точных или приближенных уравнений гидродинамики. Входными данными для такой модели являются статистические данные о турбулентности, которые могут быть получены из менее требовательного к вычислениям CFD-моделирования, например, моделирования Навье–Стокса со средним значением Рейнольдса (Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, RANS) [20, 21]. Алгоритмы генерации синтетической турбулентности должны удовлетворять двум ключевым требованиям: статистические характеристики получаемых распределений скорости должны быть близки к характеристикам реальной турбулентности и численная реализация алгоритма должна быть простой и не требовать значительного объема вычислений. Существуют два основных метода формирования синтетической турбулентности для анализа генерации звука, а именно метод случайных мод Фурье (RFM) и метод пространственной фильтрации.

Впервые идея такого упрощенного моделирования турбулентности, основанная на методе RFM, была предложена в работе Кречнана [22]. Метод был применен [23] для генерации стационарного турбулентного поля скоростей с использованием спектра Фон Кармана–Пао. В [24, 25] его развили, чтобы получить нестационарную турбулентную скорость в однородном конвективном среднем потоке. Затем модель RFM и линеаризованные уравнения Эйлера были объединены [26, 27] в методе генерации стохастического шума и излучения (stochastic noise generation and radiation, SNGR). Метод SNGR был улучшен [28, 29], чтобы представить конвекцию источника звука для прогнозирования шума струи.

Другая отличающаяся категория моделей [30] основана на фильтрации поля белого шума. В англоязычной литературе он известен под аббревиатурой RPM, а его ускоренный вариант обозначается FRPM. Модель основана на выборе функции корреляции турбулентных пульсаций, что неявно означает выбор соответствующего спектра и наоборот. Однако использование функции корреляции в качестве основной характеристики турбулентности позволяет гораздо проще учитывать влияние локальных неоднородностей осредненной скорости потока на генерацию звука. Поэтому при анализе генерации звука турбулентным потоком метод (F)RPM в настоящее время служит основным инструментом моделирования синтетической турбулентности. Идея этого метода реализована и развита в многочисленных работах Р. Эверта с коллегами [31–36]. Однако стоит отметить, что метод RPM больше подходит для решения задач аэроакустики. Во-первых, при больших числах Маха необходимо учитывать нелинейные эффекты, из-за чего алгоритм реализован во временной области. Во-вторых, метод также не учитывает упругость обтекаемого тела, что приемлемо для задач аэроакустики, где велико различие импедансов воздуха и обтекаемого тела.

В воде движение тел происходит с малыми числами Маха, что позволяет не учитывать нелинейные эффекты и перейти в частотную область. При этом импедансы среды и обтекаемого тела становятся сопоставимы, и обязательным становится учет вклада резонансных колебаний несущих поверхностей, возбуждаемых потоком. В данной статье представлен подход к моделированию широкополостного шума, возбуждаемого турбулентными пульсациями жидкости в присутствии упругого тела, на основе фильтрации поля белого шума в частотной области. В качестве входных параметров для описанного алгоритма служат поля кинетической энергии турбулентности, завихренности и модуля осредненной скорости, которые могут быть получены с помощью RANS моделей турбулентности, и производных коэффициента передачи «источник–звуковое давление», определенному по методу взаимности. В рамках алгоритма по известному полю модуля скорости строятся трубки тока вблизи неоднородности обтекаемой поверхности и определяется плотности мощности излучения элементарных струек тока в приближении несжимаемой жидкости. Представлена верификация на примере задачи о шумоизлучении фрагмента реальной технической конструкции, обтекаемой потоком жидкости.

2. Математическая постановка задачи

Математическое описание данного явления может выполняться с использованием уравнений Эйлера, с учетом уравнения неразрывности и уравнения состояния:

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho &= \rho_0 + \frac{p}{c^2},\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}$ — гидродинамическая составляющая поля скорости, p — давление, t — время, ρ — плотность жидкости, ρ_0 — условно выбранное постоянное значение плотности, c — скорость звука. При условии, что средняя скорость обтекающего тело потока существенно превышает уровни турбулентных флуктуаций скорости, а среда, в которой они движутся, акустически неоднородна (коэффициент передачи $K \neq \text{const}$), источники Лайтхилла могут быть линеаризованы. Представим компоненты скорости в виде суммы средней и пульсационной составляющей: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ — детерминированное среднее течение, а $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ — случайная флуктуирующая компонента.

Запишем первые два уравнения системы (2.1) с учетом описанных выше замечаний:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_i \nabla \mathbf{u}' + u'_i \nabla \mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{u}') &= 0,\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $i = 1, 2, 3$.

Предположим, что средняя скорость потока W слабо изменяется вдоль линий тока, а сами линии тока имеют малую кривизну. Введем локальную систему координат связанную с линиями тока, направленными вдоль оси z (рис. 1). Тогда $U, V = 0$. Средние скорости U, V, W направлены вдоль осей x, y, z соответственно. Пульсации скорости u', v', w' также направлены вдоль осей x, y, z соответственно. Поскольку рас-

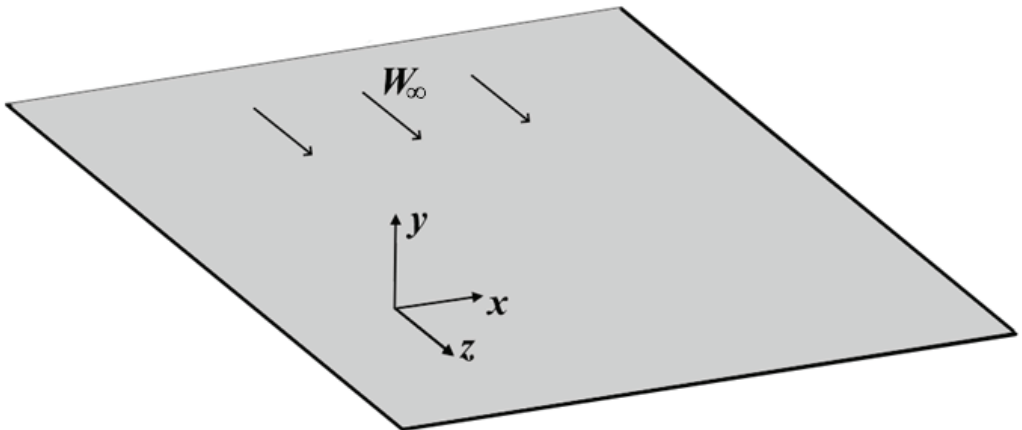


Рис. 1. Постановка задачи

считается течение в пограничном слое, где градиент средней скорости потока в направлении, нормальном к поверхности обтекаемого тела, много больше, чем в направлениях вдоль и поперек потока, это позволяет пренебречь компонентами $\frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial W}{\partial x}$. Применяя операцию дивергенции к первым трем уравнениям системы (2.2) и учитывая описанные замечания, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u}') + 2 \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial z} + W \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{u}') = - \frac{\nabla^2 p}{\rho_0} \quad (2.3)$$

С учетом второго уравнения в системе (2.2), запишем уравнение (2.3) в спектральной области, совместно с граничными условиями на рассеивающей поверхности тела и на бесконечности:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{p} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{p} + \frac{i\omega}{c} M \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} &= -2\rho_0 \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial z} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} + ikR \right) &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial N} = \rho \omega^2 U|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где p – искомое давление, $k = \omega/c$ – волновое число, ω – циклическая частота, R – расстояние от источника, N – нормаль к поверхности обтекаемого тела, U – нормальное перемещение точек обтекаемого тела, Γ – обтекаемая поверхность, знак « $\sim$ » – Фурье-преобразование во временной области (далее этот символ опущен), i – мнимая единица, $M = W/c$ – стремящееся к нулю число Маха, что позволяет пренебречь третьим слагаемым в первом уравнении системы (2.4).

Эту краевую задачу можно решить интегральным методом, введя K – коэффициент передачи «источник объемного ускорения – давление» (функция Грина), который характеризует излучение в заданной точке пространства из другой точки, где стоит источник, и учитывающий неоднородность пространства и упругость обтекаемого тела. Решение можно записать в интегральном виде (2.5)

$$p = -2\rho_0 \int_V K \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial z} dV, \quad (2.5)$$

где V – занятая жидкостью область.

Учитывая, что в пограничном слое производная $\partial W / \partial y$ представляет собой интенсивность осредненной величины завихренности Ω_x и для рассматриваемых случаев слабо зависит от z , в выражении (2.5) можно выполнить интегрирование по частям и получить:

$$p = -2\rho_0 \int_V \frac{\partial K}{\partial z} \Omega_x v' dV \quad (2.6)$$

3. Генерация случайной реализации сигнала

Анализируя выражение (2.6) можно сказать, что акустическое излучение характеризуется наличием неоднородности акустической среды, то есть неоднородность функции Грина, неоднородностью потока, то есть вязкостью и наличием пограничного слоя, и турбулентными пульсациями нормальной компоненты скорости. При этом определение функции Грина (коэффициента передачи) возможно алгоритмами [17–19] с использованием метода взаимности, а осредненную завихренность потока можно получить методами вычислительной гидродинамики с использованием недоргостоящих RANS моделей турбулентности. В выражении (2.6) вычислительную сложность представляет лишь получение реализации пульсации нормальной компоненты скорости. Предлагается ввести модель на основе синтетической турбулентно-

сти, которая генерирует реализацию пульсации нормальной компоненты скорости. В работах [31, 32] описана концепция генерации реализаций однородной случайно функции $\psi(x)$ скалярного аргумента x путем преобразования реализации белого шума $h(x)$ с нулевым средним $\langle h(x) \rangle = 0$ и функцией корреляции

$$\langle h(x')h(x'') \rangle = \delta(x' - x''), \quad (3.1)$$

где угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

Принимая гипотезу о замороженной турбулентности и используя соотношения из [31, 32], статистически стационарный процесс $v'(x, y, z - Wt)$ можно представить совокупностью бегущих вдоль трубок тока гидродинамических волн со случайной комплексной амплитудой в виде:

$$v' = Ce^{ikz} \int \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \varepsilon) G(y - \eta) h(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (3.2)$$

В качестве фильтра по аналогии с [28, 29] используется Гауссов фильтр:

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{r_x r_y}} \exp\left(-\frac{\pi x^2}{2r_x^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi y^2}{2r_y^2}\right), \quad (3.3)$$

где r_y и r_x — радиусы корреляции пульсаций скорости v' в направлении осей y (направление градиента W) и x , и (3.2) примет вид:

$$v' = Ce^{ikz} \frac{1}{\sqrt{r_x r_y}} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi(x - \varepsilon)^2}{2r_x^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi(y - \eta)^2}{2r_y^2}\right) h(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta, \quad (3.4)$$

где C — случайная комплексная амплитуда, $k = \omega/W$ — гидродинамическое волновое число.

Для определения амплитуды пульсации скорости v' вычисляется спектральная плотность мощности пульсации скорости v' :

$$\begin{aligned} \langle v' v'^* \rangle &= C^2 \frac{1}{r_x r_y} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi(x - \varepsilon_1)^2 + \pi(x - \varepsilon_2)^2}{2r_x^2}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\pi(y - \eta_1)^2 + \pi(y - \eta_2)^2}{2r_y^2}\right) \langle h(\varepsilon_1, \eta_1) h^*(\varepsilon_2, \eta_2) \rangle d\varepsilon_1 d\eta_1 d\varepsilon_2 d\eta_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя функцию корреляции (3.1) выражение (3.5) примет вид:

$$\langle v' v'^* \rangle = C^2 \frac{1}{r_x r_y} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi(x - \varepsilon)^2}{r_x^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi(y - \eta)^2}{r_y^2}\right) d\varepsilon d\eta \quad (3.6)$$

Пользуясь интегралом Гаусса $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi/a}$ ($a > 0$) для интегрирования выражения (3.6), получим:

$$C = \overline{v'}, \quad (3.7)$$

где $\overline{v'} = \sqrt{\langle v' v'^* \rangle}$.

Окончательно (3.2) примет вид:

$$v' = \overline{v'} e^{i\kappa z} \frac{1}{\sqrt{r_x r_y}} \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi(x-\varepsilon)^2}{2r_x^2}\right] \exp\left[-\frac{\pi(y-\eta)^2}{2r_y^2}\right] h(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (3.8)$$

С другой стороны, для спектральной плотности мощности пульсаций скорости можно использовать спектр турбулентности фон Кармана [37–39]:

$$\overline{v'} = \frac{A}{(1+B)^{11/12}} \sqrt{1 + \frac{8}{3}B} \quad (3.9)$$

$$A = \sqrt{\frac{4E}{3\pi f_0}} \quad (3.10)$$

$$B = \left(2.678 \frac{f}{f_0}\right)^2 \quad (3.11)$$

$$f_0 = \frac{W}{\pi(r_x + r_y)}, \quad (3.12)$$

где E — кинетическая энергия турбулентности, f — частота. Интегрирование квадрата выражения (3.9) в частотной области приводит к кинетической энергии турбулентности, откуда может быть получено определение для константы A (3.10). Зависимость B (3.11) представлена эмпирической зависимостью [37]. Частота f_0 является эмпирической зависимостью, полученной в ходе численных экспериментов.

Таким образом (2.6) можно переписать в виде:

$$p = -2\rho_0 \int_z \int_s h(\varepsilon, \eta) \int_s \frac{\partial K}{\partial z} \overline{v'} e^{i\kappa z} \frac{\Omega_x}{\sqrt{r_x r_y}} \exp\left[-\frac{\pi(x-\varepsilon)^2}{2r_x^2}\right] \exp\left[-\frac{\pi(y-\eta)^2}{2r_y^2}\right] ds dS dz, \quad (3.13)$$

где s — поверхность перпендикулярная линиям тока по аналогии с S .

В ходе многочисленных численных экспериментов выяснено, что радиусы корреляции r_x и r_y являются в достаточной степени малыми, что позволяет выполнить упрощенное вычисление внутреннего интеграла в (3.13) и представить звуковое давление в виде:

$$p = -4\rho_0 \int_z \int_s h(\varepsilon, \eta) \Omega_x \frac{\partial K}{\partial z} e^{i\kappa z} \overline{v'} \sqrt{r_x r_y} dS dz \quad (3.14)$$

Исходя из (3.14) и того, что h является дельта-коррелированной случайной функцией можно записать следующее выражение для мощности звукового давления:

$$|p| = 4\rho_0 \sqrt{\int_s \left| \int_z \Omega_x \frac{\partial K}{\partial z} e^{i\kappa z} \overline{v'} \sqrt{r_x r_y} dz \right|^2 dS} \quad (3.15)$$

Анализируя физический смысл выражения (3.14) можно сказать, что звуковое поле (3.15) интерпретируется в виде некогерентной вклада в поле турбулентных пульсаций в элементарных струйках тока площадью dS . При этом существенную роль на спектральные характеристики шума оказывает пространственное Фурье — преобразование производной коэффициента передачи K по направлению линии тока.

Таким образом, задача экспресс оценки шума обтекания сводится к формированию семейства линий тока вблизи неоднородности обтекаемой поверхности, нахождению плотности мощности излучения элементарных струек тока, путем вычисления внутреннего интеграла в (3.15) и вычислению звукового давления путем расчета внешнего интеграла в (3.15).

Для обеспечения упрощения вычисления в (3.15) несобственного интеграла вдоль линии тока в подынтегральное выражение можно внести пространственный Гауссов фильтр F , размер которого существенно превышает область больших градиентов величины K и ограничить область интегрирования отрезком линии тока длиной l . Кроме того, внешний интеграл можно привести к дискретному виду и окончательно получить:

$$|p|^2 = 4\rho_0 \sqrt{\sum_j \left| \int_{l_j} \Omega_{xj} \frac{\partial K_j}{\partial z} e^{ik_j l} \overline{v_j'} \sqrt{r_{xj} r_{yj}} dl_j \right|^2} dS_j \quad (3.16)$$

Интегрирование в (3.16) выполняется по заданной сетке линий тока с заданным шагом dl вдоль линии тока. Для радиусов корреляции можно ввести модельные зависимости. Например, радиусы корреляции в приложении к задачам обтекания кромок лопастей движителя можно приблизительно взять в следующем виде:

$$r_{xj} = 0.2\delta_{0.95j}, \quad r_{yj} = \frac{y_j}{2}, \quad (3.17)$$

где $\delta_{0.95}$ — толщина пограничного слоя, определяемая из численного расчета по уровню 95% от скорости W_∞ . Подробнее о получении этих модельных зависимостей изложено в разд. 5.

4. Численная реализация алгоритма

Входными данными для расчета описанным методом является RANS расчет в исследуемом объеме жидкости, включающим обтекаемое тело, и коэффициент передачи (КП) «источник объемного ускорения — давление». Определение КП проводится по методу взаимности на конечно-элементной сетке, согласно методике [17], источник объемного ускорения располагается в точке, где проводится оценка шумоизлучения. Конечно-элементная (КЭ) сетка должна включать в себя водные и структурные элементы, а так же содержать набор узлов начальной линии, от которой будет начинаться построение линий тока.

После построения линий тока, проводится их дискретизация и для каждой расчетной точки из гидродинамической задачи интерполируются компоненты модуля завихренности и кинетическая энергия, а также интерполируется КП при помощи функций форм КЭ исходя из значений КП в узлах КЭ, внутрь которого попала расчетная точка линии тока. Вычисление производной КП проводится по методу конечных разностей.

После этого вычисляется значение интеграла по формуле (3.16). Также пользователь самостоятельно задает модельные зависимости радиусов корреляции.

5. Верификация

Верификация представленного метода проводится на примере задачи о шумоизлучении задней кромки лопасти, обтекаемой потоком жидкости: скорость звука $c = 1500$ м/с, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1.006 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Для возможности верификации по методике, описанной в [17], рассматривается не вся кромка целиком, а несколько фрагментов, вырезанных по радиусу лопасти. То есть рассматривается набор квазидвумерных задач, отличающихся друг от друга углом установки профиля, толщиной профиля и гидродинамическими характеристиками набегающего потока.

На рис. 2 приведена расчетная область для решения гидродинамической задачи. Расчетная область представляет собой объем жидкости в виде параллелепипеда, в котором присутствует часть задней кромки лопасти. На входной границе l задается поле кинетической энергии турбулентности, поле диссипации кинетической

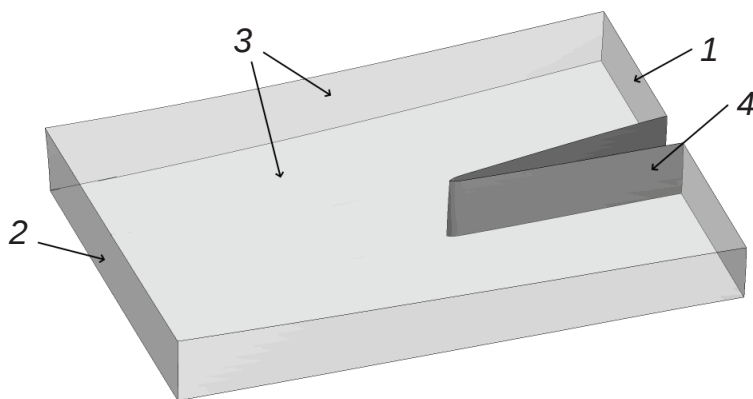


Рис. 2. Расчетная область ГД задачи об обтекании фрагмента задней кромки лопасти

энергии и поля скоростей, полученные в ходе RANS моделирования обтекания всего изделия. На выходной границе 2 выполняется условие обращения в нуль среднего избыточного давления. Нормальная компонента скорости жидкости на боковых поверхностях параллелепипеда 3 и полная скорость на поверхности задней кромки лопасти 4 принимаются равными нулю. Тем самым выполняются условие непротекания жидкости через боковые поверхности расчетной области и условие прилипания на кромке лопасти соответственно.

В гидродинамической части задачи движение жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу с замыканием моделью турбулентности SST Ментера [40]. Жидкость считается вязкой и несжимаемой, а поверхность обтекаемого тела абсолютно твердой. Расчеты выполняются при активированной схеме *High Resolution* по пространству, с использованием неявной схемы интегрирования по времени второго порядка для уравнений переноса массы и импульса и первого порядка для турбулентных характеристик и двумя итерациями на одном временном шаге по рекомендациям, изложенным в работе [41].

На рис. 3 показано пространственное распределение модуля скорости жидкости, кинетической энергии турбулентности и модуля завихренности в районе задней кромки лопасти в фиксированный момент времени.

На рис. 4 показана КЭМ используемая для определения КП в соответствии с [42] в связанной постановке для СЛАУ относительно неизвестных величин потенциала перемещений в жидкости и перемещений в упругом теле. КЭМ представляет собой объем жидкости, ограниченный сферической поверхностью, внутри которой находится исследуемая лопасть целиком. На сферической границе расчетной области специальные КЭ формируют импедансное условие не отражения проходящих по нормали через нее акустических волн, обеспечивая излучение звука по аналогии с бесконечным свободным пространством. На поверхности лопасти задано граничное условие Fluid Solid Interface (FSI), которое связывает степени свободы перемещения в структурных элементах и давления в жидкостных элементах модели. Корневое сечение лопасти жестко зафиксировано по перемещениям. Размер элемента вблизи профиля выбирается исходя из минимизации погрешности интерполяции гидродинамических полей на КЭ сетки по соотношению $l_{\text{ак}} \leq 4l_{\text{гд}}$, где $l_{\text{ак}}$ – размер элемента в акустической КЭМ, а $l_{\text{гд}}$ – размер ячейки в гидродинамической сеточной модели. В остальной области размер элемента соответствует $l_{\text{ак1}} \leq \lambda_{\text{мин}}/3$, где $\lambda_{\text{мин}} = c/f_{\text{max}}$ – наименьшая длина волны соответствующая максимальной моделируемой частоте, c – скорость распространения звука. Используются квадратичные элементы акустической численной модели

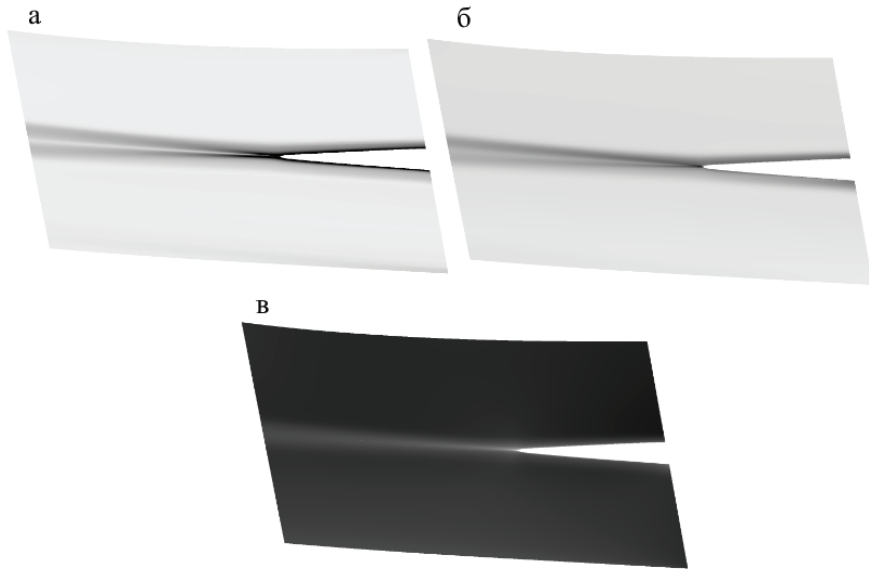


Рис. 3. Осредненное поле модуля завихренности (а), кинетической энергии турбулентности (б) и модуля скорости (в) в сечении вдоль потока

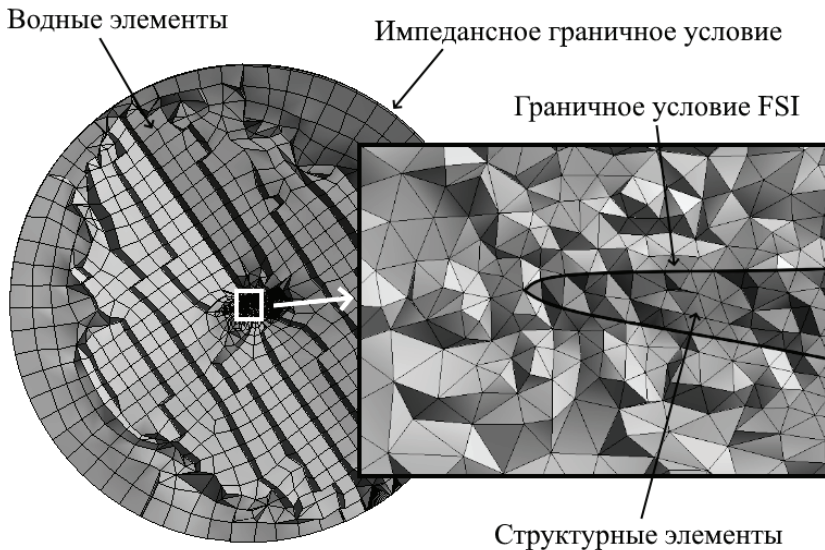


Рис. 4. Конечно-элементная модель для определения коэффициента передачи

для обеспечения достаточной точности вычисления производной КП в (3.16). Количество конечных элементов АКМ составляет ~ 2 млн. Источник объемного ускорения единичной амплитуды необходимый для расчета КП методом взаимности [43] располагается в дальней зоне исследуемого объекта. На рис. 5 показана визуализация КП в сечении поперек размаха лопасти, темный цвет соответствует отрицательным значениям КП, светлый — положительным.

На рис. 6,а показан радиус корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти, на рис. 6,б показан радиус корреляции в нормальном направлении к поверхности лопасти.

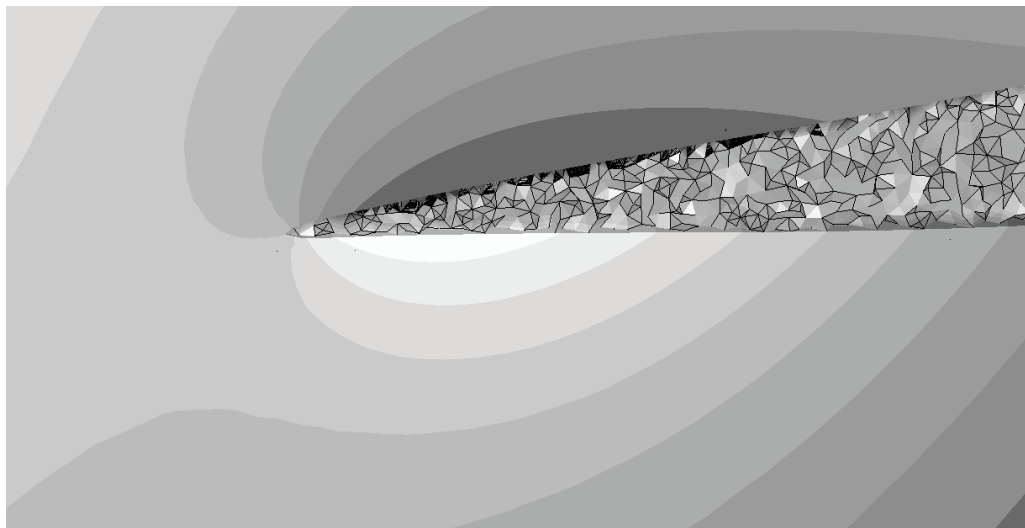


Рис. 5. Реальная часть коэффициента передачи на частоте $\delta_{0.95}f / W_\infty = 0.4$

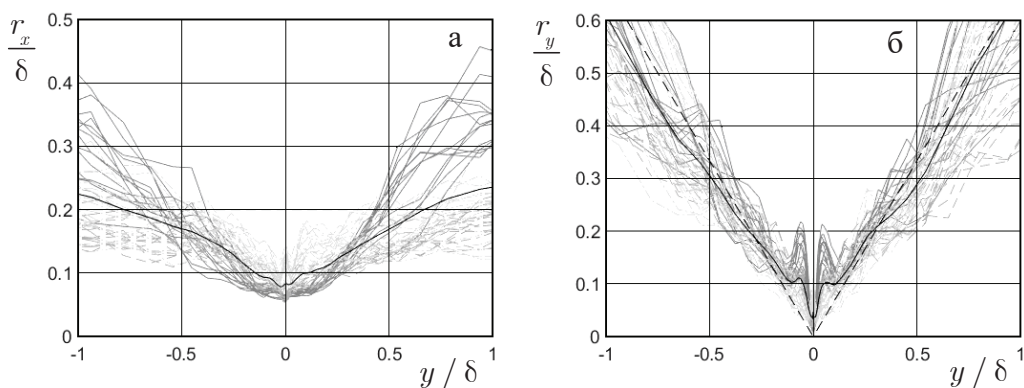


Рис. 6. Радиус корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти (а) и радиус корреляции в нормальном направлении к поверхности лопасти (б) на различных частотах

сти на различных частотах. Серые сплошные линии соответствуют частотам $\frac{\delta_{0.95}f}{W_\infty} < 0.2$, серые пунктирные — $0.2 > \frac{\delta_{0.95}f}{W_\infty} > 0.4$, серые штрихпунктирные — $0.4 > \frac{\delta_{0.95}f}{W_\infty} > 0.7$, черная — усредненная. Предложена модель, согласно которой

осредненный радиус корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти равен 20% от толщины пограничного слоя $r_x = 0.2\delta_{0.95}$, а осредненный радиус корреляции в нормальном направлении к поверхности лопасти равен $r_y = 2y/3$. Модельные зависимости показаны черными пунктирными линиями на рис. 4. Можно заметить, что в случае с радиусом корреляции в направлении вдоль задней кромки лопасти модельная зависимость не совпадает с усредненным радиусом корреляции вблизи поверхности лопасти и больше схожа на модельную зависимость для радиуса корреляции в нормальном направлении к поверхности лопасти. Поэтому другой моделью описа-

ния осредненного радиуса корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти можно дополнительно рассмотреть зависимость $r_x = r_y = 2y/3$.

Расчет среднеквадратичной амплитуды давления p на поверхности сферы большого радиуса R выполнен следующими тремя способами.

(i) Первый способ расчета акустического давления p базируется на прямом суммировании вкладов квадрупольных источников в правой части уравнения Лайтхилла. Используется численная процедура решения данной задачи, детально описанная в работе [17].

(ii) В качестве второго способа расчета давления p используется подход, развитый в данной работе.

На примере одного из фрагментов на рис. 7 показаны результаты исследования модельной зависимости осредненного радиуса корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти. Средняя погрешность во всем рассматриваемом частотном диапазоне в случае использования модели $r_x = 0.2\delta$ составляет 3 дБ, в случае использования модели $r_x = 2y/3$ — 4 дБ. Однако можно видеть, что в диапазоне частот $0.4 > \delta_{0.95}f/W_\infty > 1.3$ использование модели $r_x = 2y/3$ дает заниженный результат в среднем на 5 дБ, тогда как модель $r_x = 0.2\delta_{0.95}$ завышает результат в среднем на 2 дБ в диапазоне частот до $\delta_{0.95}f/W_\infty > 1.3$. Таким образом, наиболее близкий результат возможно получить, используя модельную зависимость $r_x = 0.2\delta_{0.95}$. Во всех представленных расчетах используется эта модель для описания осредненного радиуса корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти.

На рис. 8–10 показана сходимость метода в зависимости от заданных пользователем параметров дискретизации линий тока — шаг вдоль начальной линии da , шаг вдоль линии тока dl , количество точек по нормали N_δ , количество точек вдоль линии тока N_z и коэффициента геометрической прогрессии к поверхности лопасти r . На рис. 8 показана сходимость метода в зависимости от длины линии тока, которая может быть представлена как $N_z dl$, и количества расчетных точек вдоль нее, то есть шага dl . В рамках этого исследования на толщину пограничного слоя приходится 20 слоев расчетных точек ($N_\delta = 20$) со сгущением к поверхности с коэффициентом геометрической прогрессии $r = 1.2$, вдоль задней кромки 10 слоев на толщину погра-

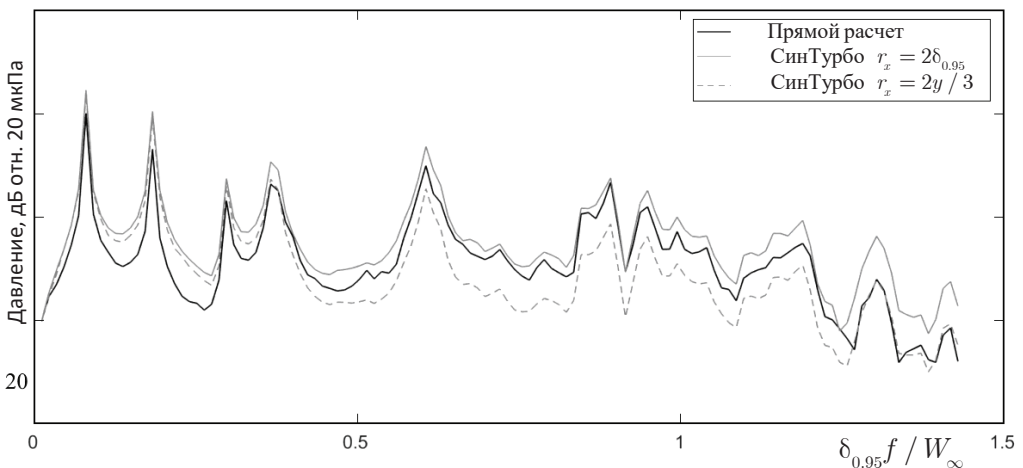


Рис. 7. Зависимость оценки КШ от модели описания осредненного радиуса корреляции в направлении вдоль радиуса лопасти

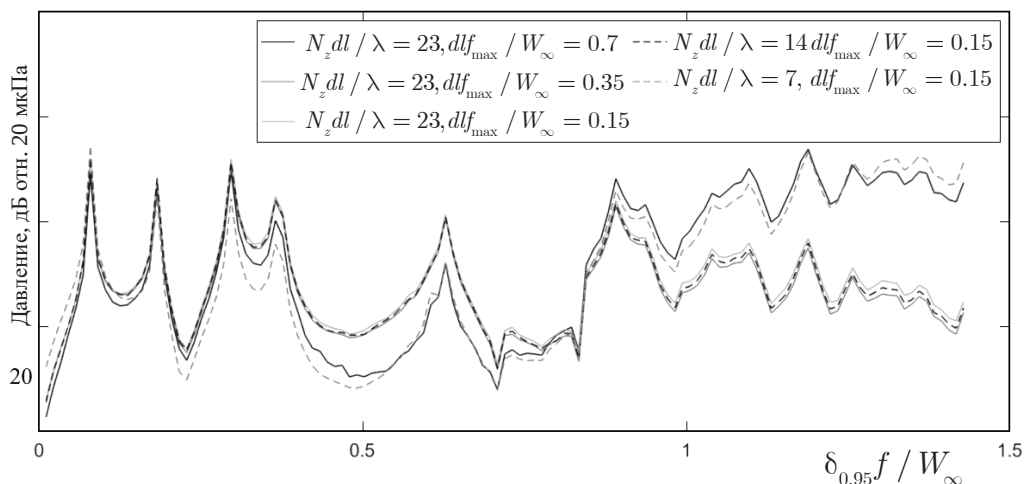


Рис. 8. Исследование сходимости метода от параметров «количество точек вдоль линии тока» и «шаг вдоль линии тока»

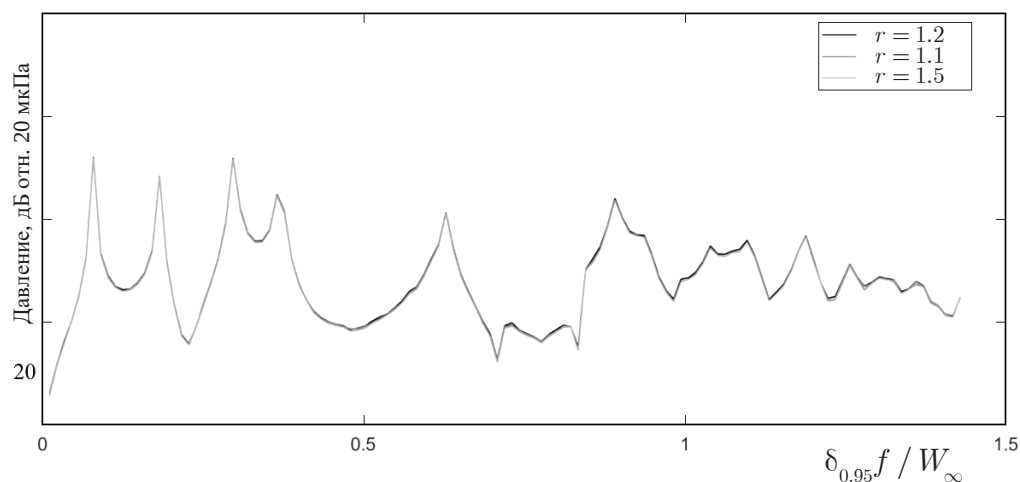


Рис. 9. Исследование сходимости метода от параметра «прогрессия по нормали к поверхности»

ничного слоя ($da = 1$ мм). Увеличение уровня на высоких частотах $\delta_{0.95} f / W_{\infty} > 0.9$ объясняется в одном случае слишком редким шагом вдоль линии тока, а в другом — слишком маленькой длиной линии тока. Таким образом, на длину линии тока должно укладываться хотя бы 14 длин гидродинамических волн, а линия тока должна быть разбита как минимум на 50 частей.

На рис. 9 показана зависимость результата от коэффициента геометрической прогрессии. Можно видеть, что он не влияет на результат. Для построения этих зависимостей на толщину пограничного слоя приходится 20 слоев расчетных точек ($N_{\delta} = 20$) со сгущением к поверхности с коэффициентом геометрической прогрессии $r = 1.2$, вдоль задней кромки 10 слоев на толщину пограничного слоя ($da = 1$ мм), а также соблюдаются требования к длине линии тока и ее дискретизации. Таким образом, коэффициент геометрической прогрессии к поверхности лопасти r можно

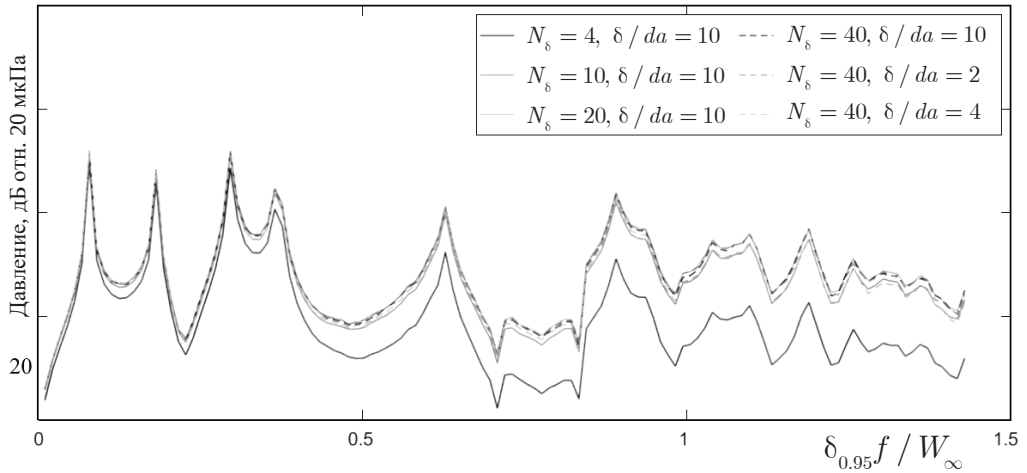


Рис. 10. Исследование сходимости метода от параметра «количество точек по нормали к поверхности» и «шаг вдоль начальной линии»

выбрать произвольно, однако для дальнейших верификационных расчетов принято $r = 1.2$, поскольку этот коэффициент сгущения к стенке рекомендован при построении сеточных гидродинамических моделей для описания пограничного слоя [44].

На рис. 10 показана зависимость результата от количества точек по нормали к поверхности N_δ и шага вдоль начальной линии da . Можно видеть, что на толщину пограничного слоя достаточно двадцати слоев, а вдоль начальной линии достаточно четырех слоев на толщину пограничного слоя. Другие параметры расчета удовлетворяют требованиям, описанным выше.

На рис. 11 показан вклад источников гидродинамического шума по нормали к поверхности лопасти. Расстояние от поверхности лопасти нормировано на толщину пограничного слоя, а вклад источников нормирован на их максимальный уровень

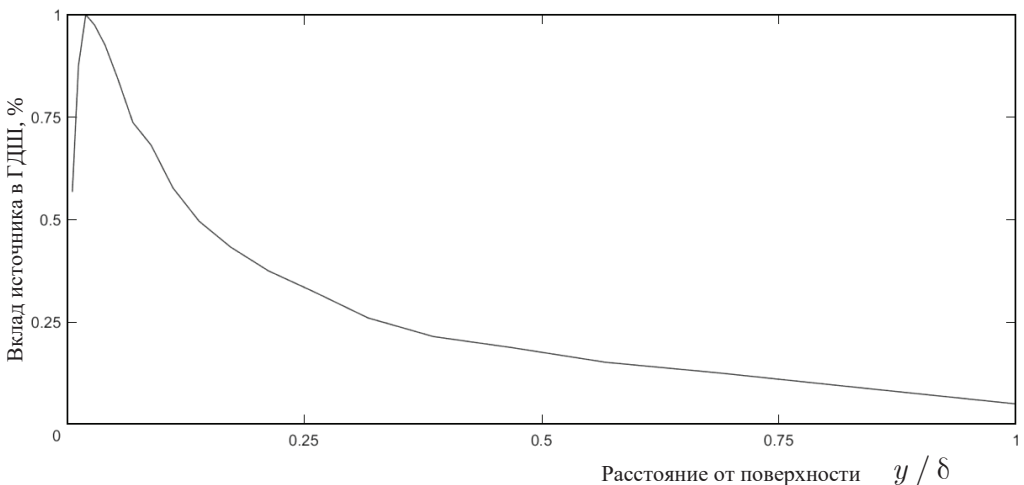


Рис. 11. Вклад источников гидродинамического шума по нормали к поверхности лопасти

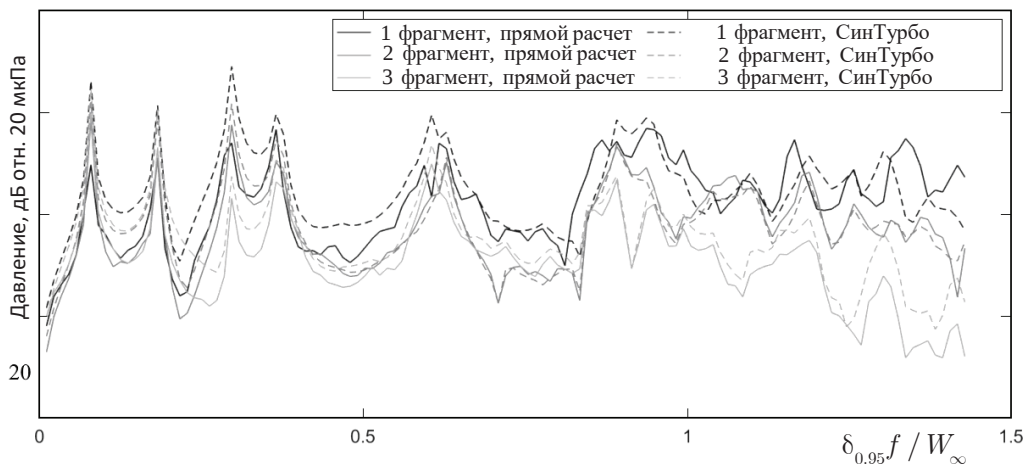


Рис. 12. Звуковое давление в точке на контрольной дистанции от поверхности лопасти

шумоизлучения. Можно видеть, что максимальное излучение наблюдается вблизи поверхности, а затем монотонно спадает при удалении от поверхности.

На рис. 12 сравниваются результаты, полученные указанными двумя способами. На графике представлены зависимости звукового давления в точке на сфере большого радиуса. Сплошные линии соответствуют расчетам прямым методом [17], пунктирные линии получены с помощью метода, предложенного в данной работе. Фрагмент № 1 соответствует торцевой части лопасти, фрагменты № 2 и № 3 располагаются ниже по радиусу соответственно. Для фрагмента № 1 средняя погрешность составляет 4 дБ, для фрагмента № 2 — 1 дБ, для фрагмента № 3 — 3 дБ. Можно при этом отметить качественное совпадение результатов, полученных двумя методами. Приведенные верификационные результаты, демонстрирующие высокую точность разработанного метода подтверждаются валидацией, выполненной по известным экспериментальным данным, с которыми можно ознакомиться в [45].

Заключение

В работе представлен и верифицирован метод моделирования шумоизлучения упругих тел методом на основе синтетической турбулентности. Пульсации скорости генерируются на основе информации об осредненных гидродинамических полях, путем пространственной фильтрации белого шума с заданными корреляционными характеристиками. На примере гребного винта показано, что метод позволяет прогнозировать излучение звука с низкой погрешностью, не превышающей несколько дБ. Метод реализован в ПО «CATEC» и может использоваться в практике акустического проектирования изделий с важностью вклада гидродинамических шумов в широком частотном диапазоне.

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки России №FFUF-2022-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Madsen H.A.* Low frequency noise from wind turbines mechanisms of generation and its modeling // J. Low Freq. Noise Vibr. Active Control. 2010. V. 29. P. 239–251.
2. *Lighthill, M.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Sci. 1952. V. 211. P. 564–587.
3. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. R. Soc. Lond. A. 1955. V. 231. P. 505–514.

4. *Howe M.S.* Trailing edge noise at low mach numbers // *J. of Sound&Vibr.* 1999. V. 225(2). P. 211–238.
5. *Ffowcs Williams J.E., Hall L.H.* Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // *J. of Fluid Mech.* 1970. V. 40(4). P. 657–670.
6. *Seol H., Suh J.C., Lee S.* Prediction of non-cavitating underwater propeller noise // *J. Sound Vibr.* 2002. V. 257. P. 131–156.
7. *Копьев В.Ф., Тумарев В.А., Беляев И.В.* Разработка методологии расчета шума винтов с использованием суперкомпьютеров // Уч. зап. ЦАГИ. 2014. Т. 45(2). С. 78–106.
8. *Kopev V.F., Maslov A.A., Chernyshev S.A.* Prop-fan sound field shielding by the fuselage boundary layer // *DGLR/AIAA Paper 92-02-068.* 1992. P. 5.
9. *Salvatore F., Ianniello S.* Preliminary results on acoustic modelling of cavitating propellers // *Comput. Mech.* 2003. V. 32. P. 291–300.
10. *Cianferra M., Armenio V., Ianniello S.* Hydroacoustic noise from different geometries // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2018. V. 70. P. 348–362.
11. *Cianferra M., Ianniello S., Armenio V.* Assessment of methodologies for the solution of the Fowcs Williams and Hawkings equation using large-eddy simulations of incompressible single-phase flow around a finite-size square cylinder // *J. Sound Vibr.* 2019. V. 453. P. 1–24.
12. *Mohsen G., Hassan G., Jalal M.* Calculation of sound pressure level of marine propeller in low frequency // *J. of Low Freq. Noise, Vibr.&Active Control* 2018. V. 37(1). P. 60–73.
13. *Danio J., Vijayakumar R.* Numerical study of acoustic characteristics of a marine propeller in non-uniform flow // *IEEE*, 2020.
14. *Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.P., Sergeant E.* Specification of LES inlet boundary condition using vortex method // 4th Int. Symp. on Turbulence, Heat&Mass Transfer, Antalya. 2003.
15. *Menter F.R., Garbaruk A., Smirnov P.* Scale adaptive simulation with artificial forcing // in: *Proc. 3rd Symp. on Hybrid RANS-LES Methods*, 2009.
16. *Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л.* Современные подходы к моделированию турбулентности. С.-Пб.: Изд-во Политех. ун-та, 2016.
17. *Суворов А.С., Коротин П.И., Соков Е.М.* Метод конечно-элементного моделирования шумоизлучения, генерируемого неоднородностями тел, движущихся в турбулентном потоке жидкости // *Акустич. ж.* 2018. Т. 64(6). С. 756–757.
18. *Кайнова А.В., Коротин П.И., Соков Е.М., Суворов А.С.* Валидация метода конечно-элементного моделирования акустического переизлучения тел, обтекаемых турбулентным потоком жидкости // *ПММ.* 2019. Т. 83. Вып. 3. С. 384–392.
19. *Суворов А.С., Соков Е.М., Вировлянский А.Л., Еремеев В.О., Балакирева Н.В.* Метод конечно-элементного моделирования гидродинамического шума, возникающего при обтекании упругих тел // *Акустич. ж.* 2023. Т. 69(6). С. 713–721.
20. *Kajishima T., Taira K.* Computational Fluid Dynamics: Incompressible Turbulent Flows. Cham: Springer, 2017.
21. *Sagaut P., Deck S., Terracol M.* Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence. LES, DES and Hybrid RANS/LES Methods: Applications and Guidelines. London: Imperial College Press, 2013.
22. *Kraichnan R.* Diffusion by a random velocity field // *Phys. of Fluids.* 1970. V. 13(1). P. 22–31.
23. *Karweit M., Blanc-Benon P., Juvé D., Comte-Bellot G.* Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: a study of phase variance // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. P. 52–61.
24. *Béchara W., Bailly C., Candel S., Lafon P.* Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.* 1994. V. 32(3). P. 455–463.
<https://doi.org/10.2514/3.12008>
25. *Bailly C., Lafon P., Candel S.* Computation of noise generation and propagation for free and confined turbulent flows // *Aeroacoustics Conf. Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics*, 1996.
26. *Bailly C., Juvé D.* A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler's equations // 5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf.&Exhibit. 1999.
27. *Bailly C., Juvé D.* Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations // *AIAA J.* 2000. V. 38. P. 22–29.
28. *Billson M., Eriksson L.-E., Davidson L.* Jet noise prediction using stochastic turbulence modeling // 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf.&Exhibit. 2003.

29. *Billson M., Eriksson L.-E., Davidson L.* Jet noise modeling using synthetic anisotropic turbulence // 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf. 2004. V. 3.
30. *Careta A., Sagués F., Sanch J.* Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra // Phys. Rev. E. 1993. V. 48(3). P. 2279–2287.
31. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // 13th AIAA/CEAS 28th AIAA Aeroacoustics Conf. 2007.
32. *Ewert R., Emunds R.* CAA slat noise studies applying stochastic sound sources based on solenoidal digital filters // 11th AIAA/CEAS 26th AIAA Aeroacoustics Conf. May 23–25, 2005.
33. *Ewert R.* Slat noise trend predictions using caa with stochastic sound sources from a random particle mesh method (RPM) // 12th AIAA/CEAS 27th AIAA Aeroacoustics Conf. May 8–10, 2006.
34. *Ewert R., Dierke J., Neifeld A., Appel C., Siefert M., Kornow O.* CAA broadband noise prediction for aeroacoustic design // IUTAM Symp. on Comput. Aero-Acoustics for Aircraft Noise Prediction Conf. Paper August 2011.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.014>
35. *Ewert R., Kornow O., Tester B.J., Powles C.J., Delfs J.W., Rose M.* Spectral broadening of jet engine turbine tones // AIAA Pap. 2008-2940. 2008.
36. *Ewert R.* Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a Random-Particle Mesh (RPM) method // Computers&Fluids. 2008. V. 37. V. 369–387.
37. *Flying Qualities of Piloted Aircraft. Vol. MIL-STD-1797A.* United States Department of Defense. 1990.
38. *de Kármán Th., Leslie H.* On the statistical theory of isotropic turbulence // Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Math.&Phys. Sci. 1938. V. 164(917). P. 192–215.
39. *von Kármán T., Lin C.C.* On the statistical theory of isotropic turbulence // in: Advances in Applied Mechanics / ed. by von Mises R.; von Kármán T. Acad. Press, 1951. P. 1–19.
40. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32(8). P. 1598–1605.
41. *Menter F.R., Sechner R.* Best Practice: RANS Turbulence Modeling in Ansys CFD. Ansys Germany GmbH A. Matyushenko, NTS, St. Petersburg, Russia.
42. *Suvorov A.S., Sokov E.M., Artel'nyi P.V.* Numerical simulation of acoustic emission using acoustic contact elements. // Acoust. Phys. 2014. V. 60. № 6. P. 694–703.
43. *Suvorov A.S., Artel'nyi V.V., Artel'nyi P.V., Vyushkina I.A., Korotin P.I., Shlemov Y.F.* Verification of the numerical model in the problem of studying directional characteristics of sound radiation from inhomogeneous shells // Acoust. Phys. 2018. V. 64. № 2. P. 260–265.
44. *Menter F.R.* Best Practice: Scale-Resolving Simulations in ANSYS CFD. ANSYS Germany GmbH A. Matyushenko, NTS, St. Petersburg, Russia.
45. *Суворов А.С., Вьюшкина И.А., Смирнов С.А., Коротин П.И., Балакирева Н.В., Майзель А.Б., Слуцкий Р.Н., Пялов К.Н.* Реализация и верификация численного моделирования шумоизлучения движетельного комплекса // Тр. Крыловского гос. науч. центра. № 410.1с, т. 1, С. 70–80. 2024.

Numerical Simulation of Edge Noise Using a Method Based on Synthetic Turbulence

N. V. Balakireva^{a, #}, A. S. Suvorov^a

^a*Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia*

[#]*e-mail: balakireva@ipfran.ru*

An approach to the numerical modeling of broadband noise excited by turbulent fluid pulsations in the presence of an elastic body using a method based on synthetic turbulence is presented. The most common methods aimed at solving this problem involve determining noise emission as a result of solving the Helmholtz equation with sources in the form of the Lighthill tensor, previously determined in the hydrodynamic part of the problem using eddy-resolving turbulence models. These methods require a large amount of computation, which in

the case of real technical applications leads to almost impossible requirements for computing resources. A reduction in the amount of calculations can be achieved for the class of problems in which continuous flow is implemented. In this case, hydrodynamic fields determined using a relatively simple Reynolds averaging of the Navier–Stokes equations can be used as initial data instead of directly determining velocity fluctuations in the computational domain using eddy-resolving methods.

In the presented method, velocity pulsations are generated based on information about averaged hydrodynamic fields, by spatial filtering of white noise with given correlation characteristics. As a result, an express assessment of the noise flow around a body is reduced to finding the radiation power density of elementary streams of current near the inhomogeneity of the streamlined surface, using data on the velocity vectors obtained as a result of solving a hydrodynamic problem, in the approximation of an incompressible fluid, as well as the transfer coefficient “source of volumetric acceleration – pressure”, which is determined by the reciprocity method. The transmission coefficient characterizes the geometry of the streamlined body, its mechanical properties and the properties of the medium in which acoustic radiation propagates. The method allows you to localize areas with the most intense noise emission, as well as interpret the results obtained by analyzing the features of the hydrodynamic flow and the properties of the elastic structure. A verification of the method is presented using the example of the problem of noise emission from a fragment of a real technical structure flowing around a fluid flow.

Keywords: hydrodynamic noise, synthetic turbulence, finite element modeling, sound radiation.

REFERENCES

1. *Madsen H.A.* Low frequency noise from wind turbines mechanisms of generation and its modeling // J. Low Freq. Noise Vibr. Active Control, 2010, vol. 29, pp. 239–251.
2. *Lighthill M.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. Math. Phys. Sci., 1952, vol. 211, pp. 564–587.
3. *Curle N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. R. Soc. Lond. A, 1955, vol. 231, pp. 505–514.
4. *Howe M.S.* Trailing edge noise at low mach numbers // J. of Sound&Vibr., 1999, vol. 225(2), pp. 211–238.
5. *Ffowcs Williams J.E., Hall L.H.* Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // J. of Fluid Mech., 1970, vol. 40(4), pp. 657–670.
6. *Seol H., Suh J.C., Lee S.* Prediction of non-cavitating underwater propeller noise // J. Sound Vibr., 2002, vol. 257, pp. 131–156.
7. *Kopev V.F., Titarev V.A., Belyaev I.V.* Development of a methodology for calculating screw noise using supercomputers // TsAGI Sci. J., 2014, vol. 45(2), pp. 78–106. (in Russian)
8. *Kopev V.F., Maslov A.A., Chernyshev S.A.* Prop-fan sound field shielding by the fuselage boundary layer // DGLR/AIAA Paper 92-02-068, 1992, p.5.
9. *Salvatore F., Ianniello S.* Preliminary results on acoustic modelling of cavitating propellers // Comput. Mech., 2003, vol. 32, pp. 291–300.
10. *Cianferra M., Armenio V., Ianniello S.* Hydroacoustic noise from different geometries // Int. J. Heat Fluid Flow, 2018, vol. 70, pp. 348–362.
11. *Cianferra M., Ianniello S., Armenio V.* Assessment of methodologies for the solution of the Fowcs Williams and Hawkins equation using large-eddy simulations of incompressible single-phase flow around a finite-size square cylinder // J. Sound Vibr., 2019, vol. 453, pp. 1–24.
12. *Mohsen G., Hassan G., Jalal M.* Calculation of sound pressure level of marine propeller in low frequency // J. of Low Freq. Noise, Vibr.&Active Control 2018, vol. 37(1), pp. 60–73.
13. *Danio J., Vijayakumar R.* Numerical study of acoustic characteristics of a marine propeller in non-uniform flow // IEEE, 2020.
14. *Mathey F., Cokljat D., Bertoglio J.P., Sergent E.* Specification of LES inlet boundary condition using vortex method // 4th Int. Symp. on Turbulence, Heat&Mass Transfer, Antalya. 2003.
15. *Menter F.R., Garbaruk A., Smirnov P.* Scale adaptive simulation with artificial forcing // in: Proc. 3rd Symp. on Hybrid RANS-LES Methods, 2009.
16. *Garbaruk A.V., Strelec M.H., Travin A.K., Shur M.L.* Modern Approaches to Turbulence Modeling. St. Petersburg: Polytechnic Univ., 2016. (in Russian)

17. *Suvorov A.S., Korotin P.I., Sokov E.M.* Finite element method for simulating noise emission generated by inhomogeneities of bodies moving in a turbulent fluid flow // *Acoust. Phys.*, 2018, vol. 64, no. 6, pp. 756–757.
18. *Kainova A.V., Korotin P.I., Sokov E.M., Suvorov A.S.* Validation of the method for finite-element modelling of acoustic reduction of bodies flowed by a turbulent fluid flow // *JAMM*, 2019, vol. 83, no. 3, pp. 384–392. (in Russian)
19. *Suvorov A.S., Sokov E.M., Virovlyansky A.L., Ereemeev V.O., Balakireva N.V.* Finite element modeling of hydrodynamic noise arising in a flow around elastic bodies // *Acoust. Phys.*, 2023, vol. 69, no. 6, pp. 713–721.
20. *Kajishima T., Taira K.* Computational Fluid Dynamics: Incompressible Turbulent Flows. Cham: Springer, 2017.
21. *Sagaut P., Deck S., Terracol M.* Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence. LES, DES and Hybrid RANS/LES Methods: Applications and Guidelines. London: Imperial College Press, 2013.
22. *Kraichnan R.* Diffusion by a random velocity field // *Phys. of Fluids*, 1970, vol. 13(1), pp. 22–31.
23. *Karweit M., Blanc-Benon P., Juvé D., Comte-Bellot G.* Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: a study of phase variance // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, vol. 89, pp. 52–61.
24. *Béchara W., Bailly C., Candel S., Lafon P.* Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.*, 1994, vol. 32(3), pp. 455–463.
<https://doi.org/10.2514/3.12008>
25. *Bailly C., Lafon P., Candel S.* Computation of noise generation and propagation for free and confined turbulent flows // *Aeroacoustics Conf. Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics*, 1996.
26. *Bailly C., Juvé D.* A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler's equations // *5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf.&Exhibit*. 1999.
27. *Bailly C., Juvé D.* Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations // *AIAA J.*, 2000, vol. 38, pp. 22–29.
28. *Billson M., Eriksson L.-E., Davidson L.* Jet noise prediction using stochastic turbulence modeling // *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf.&Exhibit.*, 2003.
29. *Billson M., Eriksson L.-E., Davidson L.* Jet noise modeling using synthetic anisotropic turbulence // *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conf.*, 2004, vol. 3.
30. *Careta A., Sagués F., Sanch J.* Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra // *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48(3), pp. 2279–2287.
31. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // *13th AIAA/CEAS 28th AIAA Aeroacoustics Conf.*, 2007.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.014>
32. *Ewert R., Emunds R.* CAA slat noise studies applying stochastic sound sources based on solenoidal digital filters // *11th AIAA/CEAS 26th AIAA Aeroacoustics Conf.*, May 23–25, 2005.
33. *Ewert R.* Slat noise trend predictions using CAA with stochastic sound sources from a random particle mesh method (RPM) // *12th AIAA/CEAS 27th AIAA Aeroacoustics Conf.*, May 8–10, 2006.
34. *Ewert R., Dierke J., Neifeld A., Appel C., Siefert M., Kornow O.* CAA broadband noise prediction for aeroacoustic design // *IUTAM Symp. on Comput. Aero-Acoustics for Aircraft Noise Prediction Conf. Paper*, 2011.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.014>
35. *Ewert R., Kornow O., Tester B.J., Powles C.J., Delfs J.W., Rose M.* Spectral broadening of jet engine turbine tones // *AIAA Pap.* 2008-2940, 2008.
36. *Ewert R.* Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a Random-Particle Mesh (RPM) method // *Computers&Fluids*. 2008, vol. 37, vol. 369–387.
37. *Flying Qualities of Piloted Aircraft. Vol. MIL-STD-1797A.* United States Department of Defense. 1990.
38. *de Kármán Th., Leslie H.* On the statistical theory of isotropic turbulence // *Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A. Math.&Phys. Sci.*, 1938, vol. 164(917), pp. 192–215.
39. *von Kármán T., Lin C.C.* On the statistical theory of isotropic turbulence // in: *Advances in Applied Mechanics* / ed. by *von Mises R., von Kármán T.* Acad. Press, 1951. pp. 1–19.

40. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J., 1994, vol. 32(8), pp. 1598–1605.
41. *Menter F.R., Sechner R.* Best Practice: RANS Turbulence Modeling in Ansys CFD. Ansys Germany GmbH A. Matyushenko, NTS, St. Petersburg, Russia.
42. *Suvorov A.S., Sokov E.M., Artel'nyi P.V.* Numerical simulation of acoustic emission using acoustic contact elements. // Acoust. Phys., 2014, vol. 60, no. 6, pp. 694–703.
43. *Suvorov A.S., Artel'nyi V.V., Artel'nyi P.V., Vyushkina I.A., Korotin P.I., Shlemov Y.F.* Verification of the numerical model in the problem of studying directional characteristics of sound radiation from inhomogeneous shells // Acoust. Phys., 2018, vol. 64, no. 2, pp. 260–265.
44. *Menter F.R.* Best Practice: Scale-Resolving Simulations in ANSYS CFD. ANSYS Germany GmbH A. Matyushenko, NTS, St. Petersburg, Russia.
45. *Suvorov A.S., Vyushkina I.A., Smirnov S.A., Korotin P.I., Balakireva N.V., Maizel A.B., Slutskii R.N., Pyalov K.N.* Implementation and verification of numerical simulation of noise emission of the propulsion system // Trans. of the Krylov State Res. Centre, 2024, no. 410.1c, vol. 1, pp. 70–80. (in Russian)

УДК 539.3+551.24.02+550.34.01

ГЕОМЕХАНИЧЕСКИЕ МАРКЕРЫ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТРУКТУР В НЕОДНОРОДНЫХ ГЕОСРЕДАХ

© 2024 г. Е. Б. Осипова^{1,*}¹*Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН,
Владивосток, Россия***e-mail: osipov@poi.dvo.ru*

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.

После доработки 04.09.2024 г.

Принята к публикации 04.09.2024 г.

Геодинамика в неоднородной 3D-геосреде, обусловленная гравитационными процессами, характеризуется полями перемещений, поворотов и деформаций. Количественные и пространственные характеристики распределения этих полей обеспечиваются соответствующими полями напряжений. Представлены результаты вычислительных экспериментов, моделирующих напряженно-деформированное состояние двух профилей. Распределение полей по глубине обусловлены плотностной неоднородностью, одним из внутренних источников возникновения тектонических напряжений. Обобщение покомпонентного анализа показало общие свойства напряженно-деформированного состояния, которое характеризуется растяжением на фоне преобладающего сжатия. Для моделирования особенностей взаимодействия неоднородных структур профилей применен параметр интенсивности напряжений. Степень пластичности геосреды моделируется параметром интенсивности деформаций.

Ключевые слова: моделирование напряженно-деформированного состояния неоднородной геосреды, взаимодействие геоструктур, пластичность геосреды

DOI: 10.31857/S0032823524050096 EDN: JPHQOQ

1. Введение

Геодинамические явления в неоднородной 3D-геосреде рассматриваем как деформационные процессы, которые характеризуются полями перемещений, поворотов и деформаций. Количественные и пространственные характеристики распределения этих полей обеспечиваются соответствующими полями напряжений. Напряженность и соответствующее гравитационное поле, обусловленное плотностной неоднородностью Земли, является одним из основных внутренних источников возникновения тектонических напряжений [1]. Гравитационное поле обеспечивает формирование соответствующего усложненного деформирования геосреды, состоящего из перемещений, сдвигов и поворотов текущих точек по всем координатным направлениям.

Механико-математическое моделирование напряженно-деформированного состояния неоднородных геосред основано на теории подобия реологических процессов в неоднородных многослойных средах, подверженных конечным деформациям [2–8]. В трехмерной постановке теории конечных деформаций и линеаризованной теории устойчивости предложена единая 3D-модель для изучения возможных дис-

локаций в неоднородных геосредах. Напряженно-деформированное состояние (НДС) разделяется на основное и возмущенное [4, 8]. Возможность существования основного (невозмущенного) состояния с пренебрежимо малыми напряжениями и деформациями, которое существует до начала действия внутренних сил, действующих в земной коре, и обусловлено пренебрежимо малым гравитационным полем, является гипотетическим предположением. Кинематика возмущенного состояния определяется компонентами тензора конечных деформаций Коши–Грина, поступательными перемещениями и перемещениями линейного поворота, напряженное состояние – компонентами несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа. Аналитический алгоритм основан на получении решений относительно параметров, имеющих физический и геометрический смысл. В данной модели – это радиальное перемещение, перемещение поворота и результирующая по главным направлениям деформация. Предложенная методика позволяет на этапе численно-графического анализа построить неоднородное распределение физико-механических свойств, конкретизировать граничные условия, уравнение состояния, количественно и качественно оценить порядок нелинейности параметров, вклад каждой компоненты в распределение результирующих полей напряженно-деформированного состояния [9–11].

В статье [11] поставлена и решена задача исследования устойчивого равновесия для основного и возмущенного состояний полого шара с граничными условиями на внутреннем основании и на внешней (дневной) поверхности. Внешняя поверхность ($\rho = \rho_2$) полого шара свободна от нагружения. На сферической поверхности ($\rho = \rho_1$) в основании полого шара задается граничное условие в напряжениях с учетом следящего давления $\tilde{p}$. Под внутренним следящим давлением понимается нагрузка, которая направлена по нормали к поверхности и не изменяет направление и величину в процессе деформирования [8]. Его значение соответствует давлению на заданной глубине и тем самым моделирует влияние отсутствующей внутренней части шара [12]. Решение задачи выполнено в системе координат $O_{\text{рфл}}$ (ρ – радиус, $\rho_1 \div \rho_2$ км; φ – широта, $-90^\circ \div 90^\circ$; λ – долгота, $-180^\circ \div 180^\circ$) в физических составляющих компонент тензора деформаций Грина, несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа, компонент векторов перемещений и поворотов. Для основного и возмущенного состояний определяющие уравнения и их решения получены в аналитической форме для закона состояния в форме нелинейного вязкоупругого потенциала

$$\Phi^{ij}(\varepsilon^{ij}, \xi^{ij}) = \vartheta_1 \varepsilon^{ij} + \vartheta_2 \varepsilon^{ik} \varepsilon_k^j + \vartheta_3 \xi^{ij} + \vartheta_4 \xi^{ik} \xi_k^j + \vartheta_5 (\varepsilon^{ik} \xi_k^j + \xi^{ik} \varepsilon_k^j) + \\ + \vartheta_6 \varepsilon^{ik} \xi_k^n \varepsilon_n^j + \vartheta_7 \xi^{ik} \varepsilon_k^n \xi_n^j,$$

где ε^{ij} контравариантные компоненты тензора деформаций Коши–Грина, ξ^{ij} – контравариантные компоненты тензора скоростей деформаций, ϑ_i – функции физических констант (упругости, жесткости, вязкости и других свойств геосред).

Здесь используются результаты построенного решения задачи и комплексы программ для расчета всех компонент и результирующих параметров НДС для закона состояния в форме потенциала Мурнагана [7], физико-механических свойств верхних слоев (мощностью 35 км) океанической версии физической модели Земли РЕМ-О (РЕМ – Parametric Earth Model, О – океаническая модель) [12]. Выбор уравнения состояния и входных данных параметров плотности, упругости и жесткости согласно модели Земли РЕМ-О определяется геофизическим обоснованием данных [12].

Рассматриваем любой вертикальный (горизонтальный) геопрофиль как 2D-фрагмент 3D-шара, каждая точка которого имеет текущие координаты: глубина, широта, долгота. Поэтому на боковых границах 2D-фрагментов дополнительных граничных условий не требуется. Расчет может быть продолжен в любом координатном направлении. Алгоритм предназначен для расчета НДС вертикальных и горизонтальных

сечений 3D-шара по заданным координатам. 2D-фрагменты считаются в рамках 3D-модели, поэтому в расчетных значениях компонент параметров в текущих точках учитывается влияние компонент в смежных точках.

Полученное общее решение задачи устойчивого равновесия в аналитической форме [11], предполагает возможность встраивания параметра плотности $\rho \pm \Delta\rho$ модели [13], для построения которой использованы данные глубинных сейсмических зондирований [14–16], геолого-геофизических экспедиций, выполненных в 2005–2010 гг. на НИС «Академик Лаврентьев» [13, 17]. Плотностная модель задает численное значение плотности по определенной сетке глубины и длины профиля, по текущим координатам (глубина, широта, долгота). Используя аналитическое решение задачи при среднем значении плотности ρ по данным модели РЕМ–О, можем рассчитать значения параметров НДС при значениях плотности $\rho \pm \Delta\rho$ по такой же сетке, где $\pm\Delta\rho$ – приращение плотности. Таким образом, в общее решение, построенное для средних значений плотности, упругости и жесткости среды для модели РЕМ–О «встраивается» распределение плотностей с привязкой к текущим координатам. Вклад осадков и водного слоя, стратификация распределения плотностей по глубине профилей в расчетах компонент и интенсивности напряжений учитывается фактическими значениями заданного поля плотностей.

В статье [18] по этому алгоритму представлены некоторые результаты расчета полей интенсивности гравитационных напряжений в земной коре по двум сейсмическим профилям района Центральных Курил: о. Уруп – о. Симушир – о-ва Ушишир и Охотское море – о. Симушир – Курило-Камчатский желоб (это основная часть профиля 2.1–2.10) по обобщенным данным, которые получены Институтом морской геологии и геофизики ДВО РАН [14–16]. Плотностные модели профилей, построенные на базе этих данных, морской и спутниковой гравиметрии соответствуют «усложненной слоисто-блоковой структуре» земной коры, установленной в результате глубинных сейсмических исследований [13]. Гравитационные силы и соответствующие распределения полей интенсивности напряжений в этих условиях, являются следствием плотностной неоднородности тектоносферы. Концентрация изолиний поля интенсивности напряжений соответствует положению глубинных разломов. Полученные расчетные данные полей интенсивности гравитационных напряжений по указанным профилям дают полное совпадение пространственной структуры плотностной неоднородности и полей интенсивности напряжений с учетом локальных аномалий распределения плотностей [18].

Пространственные изменения и локальные возмущения полей напряжений определяются плотностными границами слоев и блоков, выделенных по сейсмическим и гравитационным данным. В рамках алгоритма [9–11] по входным данным плотностных моделей выполнен детальный расчет, характеризующий напряженно-деформированное состояние двух профилей [13, 17], расположенных в квадрате: $45.0^\circ \div 50.0^\circ$ с.ш., $149.0^\circ \div 156.0^\circ$ в.л. Обобщение компонентного анализа расчетных значений перемещений, поворотов, деформаций и соответствующих значений компонент тензора напряжений по профилям 1.1–1.8 (длиной 700 км, глубиной 30 км) [17] и 2.1–2.10 (длиной 500 км, глубиной 35 км) [13] позволило определить общие свойства НДС всего квадрата, которое характеризуется растяжением на фоне преобладающего сжатия. Применение модельных результирующих параметров интенсивности напряжений и деформаций, как геомеханических маркеров, позволило выявить особенности распределения полей напряжений и возможного распределения свойства пластичности геосреды по профилям.

2. Расчетная модель изучения напряженно-деформированного состояния

Динамика неоднородных упругих сред рассматривается в лагранжевых переменных. Напряженно-деформированное состояние устойчивого равновесия определя-

ется основным (невозмущенным) и возмущенным, каждое из которых описываются соответствующими линейризованными соотношениями [4, 8]. Используем соотношения теории конечных деформаций и их линейризованные выражения в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. В приведенных ниже выражениях и далее все величины, отнесенные к основному состоянию, отмечены индексом “ b ”, величины без индексов относятся к возмущенному состоянию.

Основные соотношения для возмущенного состояния линейризуются в окрестности значений соответствующих величин невозмущенного состояния. Ковариантные составляющие тензора конечных деформаций Коши–Грина основного ε_{ij}^b и возмущенного ε_{ij} состояний имеют вид

$$2\varepsilon_{ij}^b = \nabla_i u_j^b + \nabla_j u_i^b + \nabla_i u_m^b \cdot \nabla_j u_m^b$$

$$2\varepsilon_{ij} = (g_i^m + \nabla_i u_m^b) \cdot \nabla_j u_m + (g_j^m + \nabla_j u_m^b) \cdot \nabla_i u_m,$$

где $\nabla_i u_m^b, \nabla_j u_m^b$ – ковариантные производные от ковариантных и контравариантных составляющих вектора перемещений в основном состоянии, $\nabla_i u_m$ – ковариантная производная от ковариантных составляющих вектора перемещений в возмущенном состоянии, g_i^m – метрический тензор в недеформированном состоянии.

В общем виде компоненты симметричного тензора обобщенных напряжений s^{ij} для сжимаемого нелинейно-упругого тела в невозмущенном s_b^{ij} и возмущенном s^{in} состоянии определены [8] выражениями соответственно

$$\begin{aligned} s_b^{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}^b} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}^b} \right) \Psi^b(A_1^b, A_2^b, A_3^b), \quad s^{in} = \aleph^{in\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha \\ \aleph^{in\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left(g_m^\alpha + \nabla_m u_b^\alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^b} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^b} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^b} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^b} \right) \Psi^b(A_1^b, A_2^b, A_3^b), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\aleph^{in\alpha\beta}$ – тензор четвертого ранга.

Закон состояния $\Psi^b(A_1^b, A_2^b, A_3^b)$ представляет собой упругий потенциал и является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией базисных алгебраических инвариантов A_i^b тензора деформаций Грина в невозмущенном состоянии [11]

$$A_1^b = \varepsilon_n^{nb}, \quad A_2^b = \varepsilon_n^{mb} \varepsilon_m^{nb}, \quad A_3^b = \varepsilon_n^{mb} \varepsilon_m^{kb} \varepsilon_k^{nb}$$

Напряженное состояние описывается несимметричным тензором Пиола–Кирхгофа, который определяется дифференцированием от энергии системы по градиенту вектора перемещений и характеризует элементарную силу, отнесенную к элементарной площадке в отсчетной конфигурации [6, 8]

$$t^{im} = (g_n^m + \nabla_n u^{mb}) \cdot s^{in} + s_b^{in} \cdot \nabla_n u_m^b, \quad (2.2)$$

где тензоры обобщенных напряжений в возмущенном s^{in} и невозмущенном s_b^{in} состояниях определяются соответственно формулой (2.1) и выражением

$$s_b^{in} = \left(g^{in} \frac{\partial}{\partial A_1^b} + 2\varepsilon_b^{in} \frac{\partial}{\partial A_2^b} + 3\varepsilon_b^{ik} \varepsilon_k^{nb} \frac{\partial}{\partial A_3^b} \right) \Psi^b(A_1^b, A_2^b, A_3^b)$$

Линейризованное уравнение равновесия объемного элемента в контравариантных компонентах несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа имеет вид

$$\nabla_i t^{ij} + F^j = 0, \quad (2.3)$$

где F^j — массовые силы.

Решение 3D-задачи получено в аналитической форме в системе координат $O_{\rho\varphi\lambda}$ (ρ — радиус, φ — широта, λ — долгота) в физических составляющих компонент тензора деформаций Грина, несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа, физических составляющих вектора линейных перемещений и поворотов. Физические компоненты параметров имеют индексы, определяющие их ориентацию в системе координат $O_{\rho\varphi\lambda}(\rho, \varphi, \lambda)$.

3. Детализация напряженно-деформированного состояния профилей и обобщение этих результатов на заданный регион

Любая геодинамическая модель в приложении должна следовать из анализа структур, развивающихся в заданном геологическом регионе одновременно.

На рис. 1 приведены два профиля 1.1–1.8 и 2.1–2.10, расположенные в квадрате $149.0^\circ \div 156.0^\circ$ в. д., $45.0^\circ \div 50.0^\circ$ с.ш.

В рамках единой 3D-модели выполнен покомпонентный расчет всех полей, характеризующих напряженно-деформированное состояние заданных профилей. Вычислительный эксперимент выполнен для модели РЕМ-О, в которой выделен слой, моделирующий земную кору мощностью 35 км ($\rho_1 = 6336$ км, $\rho_2 = 6371$ км — верхняя поверхность). В соответствии с геофизическими свойствами РЕМ-О [12] используем

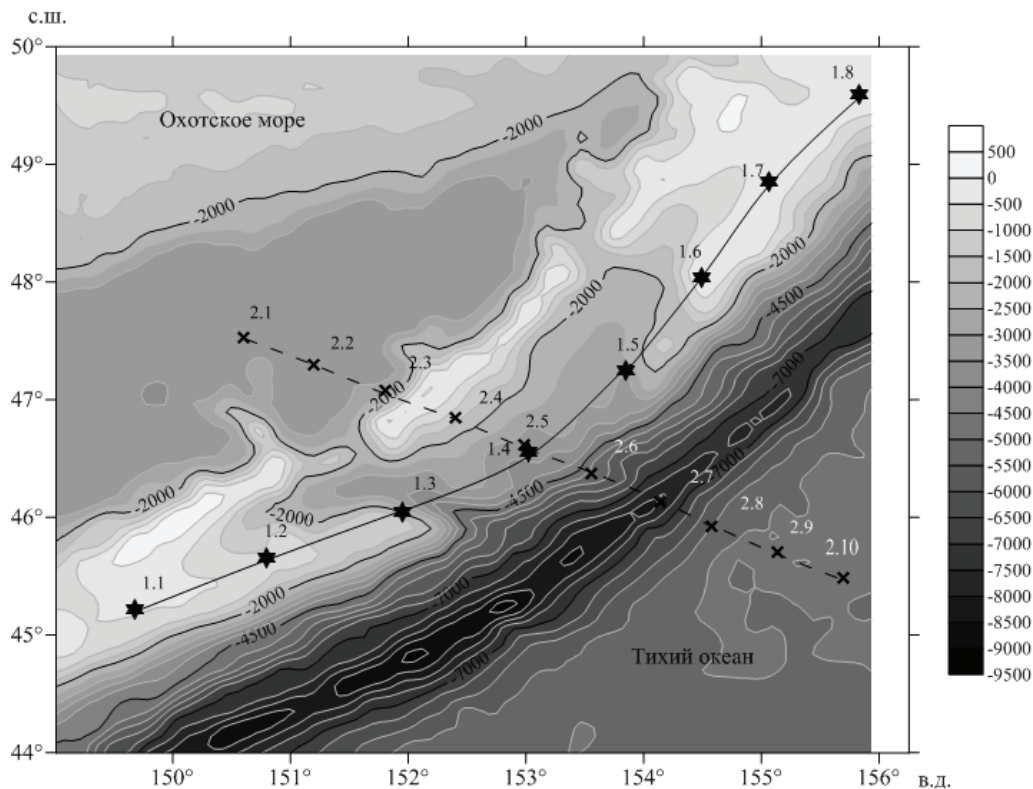


Рис.1. Положение профилей 1.1–1.8 и 2.1–2.10 в квадрате $149.0^\circ \div 156.0^\circ$ в. д., $45.0^\circ \div 50.0^\circ$ с.ш.. Цифровая модель рельефа построена по данным <http://topex.ucsd.edu> [19]

в расчетах средне-взвешенные по мощности слоев значения параметров: упругой постоянной $\eta = 54.777$ ГПа, коэффициента жесткости $\mu = 53.837$ ГПа, плотности $\varphi = 3097.839$ кг/м³, ускорения силы тяжести $g = 9.839$ м/с², внутреннего следающего давления $\tilde{p} = 1.82$ ГПа.

Физический закон состояния, который определяет способность к деформированию в зависимости от свойств упругости и жесткости среды, принят в форме потенциала Мурнагана [7]

$$\Psi = \frac{\eta}{2} A_1^2 + \mu A_2 \quad (3.1)$$

Основное невозмущенное состояние является радиально-симметричным и устойчивым, характеризуется физическими компонентами радиальной деформации $0.0338 \leq \varepsilon_{(pp)}^b \leq 0.0370$, радиальным напряжением 0.00565 ГПа $\leq t_{(pp)}^b \leq 0.0062$ ГПа, удлинением $0.99981 \leq \delta^b \leq 1.0$ и радиальным перемещением -1.2 км $\leq u_p^b \leq 0$ км [11].

На стадии возмущения в общее решение, построенное для модели РЕМ–О, «встраивается» неоднородное распределение плотностей с привязкой к текущим координатам [13, 17]. Кинематика деформированной геосреды описывается поступательными перемещениями, вектором линейного поворота, тензором конечных деформаций Коши–Грина. Компоненты вектора перемещений определяют вектор линейного поворота и компоненты тензора деформаций по известным формулам [5, 8]. В статье [20] опубликованы подробные численные результаты расчета полей перемещений, поворотов, деформаций и гравитационных напряжений по глубине 35 км для профиля 2.1–2.10 длиной 500 км, которые далее используются.

В табл. 1–3 для сравнения представлены интервальные численные значения компонент перемещений, поворотов, деформаций по двум профилям.

В табл. 1 приведены интервальные значения физических компонент u_p , u_φ , u_λ и модуля $|\vec{u}|$ векторов перемещений, определяющих поступательные перемещения текущих точек возмущенного напряженно-деформированного состояния по заданным профилям

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_p^2 + u_\varphi^2 + u_\lambda^2}$$

Таблица 1. Значения физических компонент u_p , u_φ , u_λ и модуля $|\vec{u}|$ векторов перемещений по профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.10

Компоненты и модуль вектора перемещений, км		Профиль 1.1–1.8	Профиль 2.1–2.10
u_p	Max	$-5.8 \cdot 10^{-19}$	$-9.2 \cdot 10^{-10}$
	Min	$-7.2 \cdot 10^{-9}$	$-7.8 \cdot 10^{-9}$
u_φ	Max	-0.009	-0.002
	Min	-0.01	-0.009
u_λ	Max	0.001	0.0009
	Min	0.0007	0.0008
$ \vec{u} $	Max	0.01	0.009
	Min	0.002	0.002

В текущих точках меридиональные компоненты $u_\lambda > 0$ положительные; радиальные и широтные компоненты $u_\rho < 0$ и $u_\phi < 0$ имеют отрицательные направления. Между абсолютными значениями компонент векторов перемещений выявлена зависимость $|u_\rho| \ll u_\lambda < |u_\phi|$ по всей глубине профилей 1.1–1.8 и 2.1–2.10. Перемещения в радиальном направлении являются бесконечно малыми величинами $|u_\rho| \ll 1$, значит, в результате деформирования мощность слоев профилей остается практически без изменения. Поступательные перемещения текущих точек преобладают в латеральных направлениях и обусловлены компонентами u_ϕ и u_λ . При этом, абсолютные значения широтных перемещений u_ϕ больше, чем меридиональные u_λ .

Компоненты w_ρ , w_ϕ , w_λ определяют линейные повороты (табл. 2) в окрестности текущих точек в результате перемещений u_ρ , u_ϕ , u_λ на стадии возмущенного состояния. Расчеты показывают, что поворотные перемещения есть во всех координатных направлениях, отсутствуют нулевые значения, их порядок соизмерим со значениями компонент деформаций.

Компоненты тензора деформаций (табл. 3) полностью характеризуют деформацию среды в окрестности текущей точки в результате перемещений u_ρ , u_ϕ , u_λ , линейных поворотов w_ρ , w_ϕ , w_λ , косвенно определяя значения деформационных удлинений и сдвигов [5] и как результат соответствующие изменения размеров и формы.

Положительным линейным деформациям $\varepsilon_{(\rho\rho)}$ соответствуют удлинения, а отрицательным $\varepsilon_{(\phi\phi)}$ и $\varepsilon_{(\lambda\lambda)}$ – укорочения. Положительные угловые деформации $\varepsilon_{(\rho\phi)}$ и $\varepsilon_{(\phi\lambda)}$ определяют уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей (меньше 90°), а отрицательные значения $\varepsilon_{(\rho\lambda)}$ – увеличение тех же углов (больше 90°).

Учитывая то обстоятельство, что при очень медленных процессах в условиях всестороннего сжатия предполагается возможность пластического деформирования массивов пород [21], введем в рассмотрение положительный параметр интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_{\text{int}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{(\rho\rho)} - \varepsilon_{(\phi\phi)})^2 + (\varepsilon_{(\phi\phi)} - \varepsilon_{(\lambda\lambda)})^2 + (\varepsilon_{(\lambda\lambda)} - \varepsilon_{(\rho\rho)})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{(\rho\phi)}^2 + \varepsilon_{(\phi\lambda)}^2 + \varepsilon_{(\lambda\rho)}^2)} \quad (3.2)$$

Распределение интервальных значений компонент перемещений, поворотов и деформаций по профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.2 имеет одинаковые качественные, но раз-

Таблица 2. Значения физических компонент w_ρ , w_ϕ , w_λ вектора поворота по профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.10

Компоненты и модуль вектора поворота	Профиль 1.1–1.8	Профиль 2.1–2.10
w_ρ Max	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$
w_ρ Min	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$
w_ϕ Max	$3.6 \cdot 10^{-8}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$
w_ϕ Min	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$3.0 \cdot 10^{-8}$
w_λ Max	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$
w_λ Min	$7.2 \cdot 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-8}$

Таблица 3. Значения интенсивности ϵ_{int} и физических компонент тензора деформаций Коши-Грина по профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.10

Компоненты интенсивности и тензора деформаций		Профиль 1.1–1.8	Профиль 2.1–2.10
ϵ_{int}	Max	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$2.44 \cdot 10^{-5}$
	Min	$2.07 \cdot 10^{-5}$	$2.04 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon_{(\rho\rho)}$	Max	$2.51 \cdot 10^{-10}$	$2.55 \cdot 10^{-10}$
	Min	$2.04 \cdot 10^{-10}$	$2.33 \cdot 10^{-10}$
$\epsilon_{(\varphi\varphi)}$	Max	$-8.66 \cdot 10^{-7}$	$-4.81 \cdot 10^{-7}$
	Min	$-2.95 \cdot 10^{-6}$	$-3.21 \cdot 10^{-6}$
$\epsilon_{(\lambda\lambda)}$	Max	$-2.62 \cdot 10^{-7}$	$-2.91 \cdot 10^{-7}$
	Min	$-1.34 \cdot 10^{-6}$	$-1.16 \cdot 10^{-6}$
$\epsilon_{(\rho\varphi)}$	Max	$1.43 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$
	Min	$2.56 \cdot 10^{-7}$	$2.30 \cdot 10^{-7}$
$\epsilon_{(\rho\lambda)}$	Max	$-9.21 \cdot 10^{-8}$	$-1.02 \cdot 10^{-7}$
	Min	$-1.29 \cdot 10^{-7}$	$-1.18 \cdot 10^{-7}$
$\epsilon_{(\varphi\lambda)}$	Max	$8.82 \cdot 10^{-6}$	$9.34 \cdot 10^{-6}$
	Min	$7.37 \cdot 10^{-6}$	$7.55 \cdot 10^{-6}$

ные количественные характеристики. Максимальные перемещения и максимальные углы поворота в окрестности текущих точек характеризуют и определяют жесткость среды, способность сопротивляться деформации. Компоненты деформации, характеризуют удлинения и сдвиги бесконечно малого объемного элемента и определяют прочность среды, способность выдерживать без разрушения заданную нагрузку [5]. В данных условиях параметр перемещения $|u_\rho| \ll 1$ определяет большую жесткость в радиальном направлении, угол поворота φ_φ определяет большую сопротивляемость деформации при повороте в плоскости $O_{\rho\lambda}$, компонента деформации $\epsilon_{(\rho\rho)} \ll 1$ определяет большую прочность и способность выдерживать нагрузки в радиальном направлении. Весь комплекс перемещений, поворотов и деформаций обеспечивается соответствующим полем напряжений t^{im} (2.2).

Для изучения напряженного состояния заданного квадрата разложим симметричную часть s^{im} (2.1) несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа t^{im} (2.2). Для поверхности второго порядка в каждой текущей точке всегда можно выбрать такие направления координатных осей, для которых на трех взаимно перпендикулярных плоскостях касательные компоненты симметричного тензора напряжений s^{im} обращаются в нуль. Эти плоскости называются главными плоскостями, а напряжения $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$, действующие на них – главными напряжениями, т.е. в каждой текущей точке вместо девяти компонент тензора напряжений получаем три компоненты с важным физическим свойством. Главные напряжения определяют экстремальные направления всего комплекса напряжений. На главных площадках главные напряжения принимают свои экстремальные значения – максимум σ_I , минимум σ_{III} и минимакс σ_{II} ($\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$) [22]. Если в текущей точке известны все компоненты

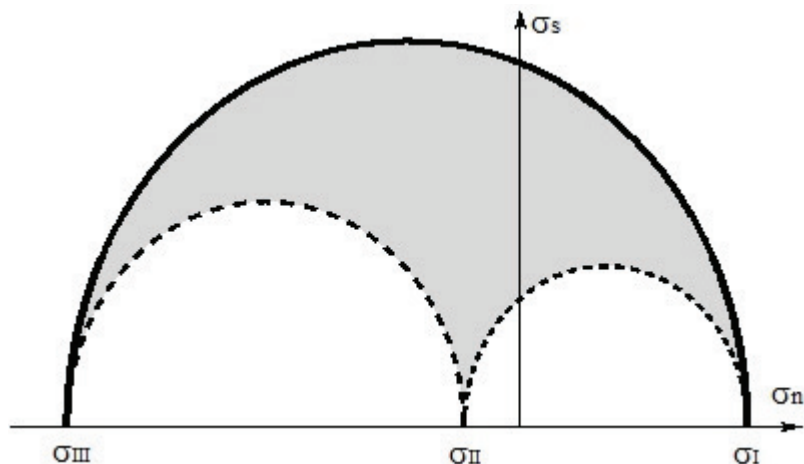


Рис.2. Круги Мора в текущих точках по профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.10

тензора напряжений, то соответствующие главные направления и главные напряжения вычисляются через решение кубического характеристического уравнения, составленного на основе определителя компонент тензора s^{in} [5]. По определению, растягивающее напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным.

На рис. 2 представлено двумерное графическое представление трехмерного напряженного состояния в текущих точках по профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.10 (круги Мора).

Предполагаем, что возможно обобщение численного анализа результатов решения характеристического уравнения по определению главных напряжений по двум заданным профилям на весь заданный квадрат. По результатам расчетов напряженное состояние в заданном квадрате характеризуется в одном направлении растяжением на фоне двухосного сжатия: максимальное растяжение ($\sigma_I > 0$), сжатие ($\sigma_{II} < 0$), максимальное сжатие ($\sigma_{III} < 0$).

При этом абсолютные значения главных напряжений относительно пропорциональны: $\sigma_I \approx \frac{1}{2}|\sigma_{III}|$, $|\sigma_{II}| \approx \frac{1}{8}|\sigma_{III}|$. Главное напряжение в зоне сжатия почти в 2 раза превышает такой же параметр в зоне растяжения. Таким образом, можно предположить, что общим свойством напряженно-деформированного состояния всего квадрата $149.0^\circ \div 156.0^\circ$ в. л., $45.0^\circ \div 50.0^\circ$ с.ш. является растяжение на фоне преобладающего сжатия.

4. Детализация и особенности напряженно-деформированного состояния профилей

Кинематика деформированной геосреды по сечению профилей 1.1–1.8 и 2.1–2.10 (табл. 1–3) обеспечивается соответствующим полем напряжений, при этом должна быть выражена согласованность с данными о глубинном строении земной коры, положением плотностных границ и разломов.

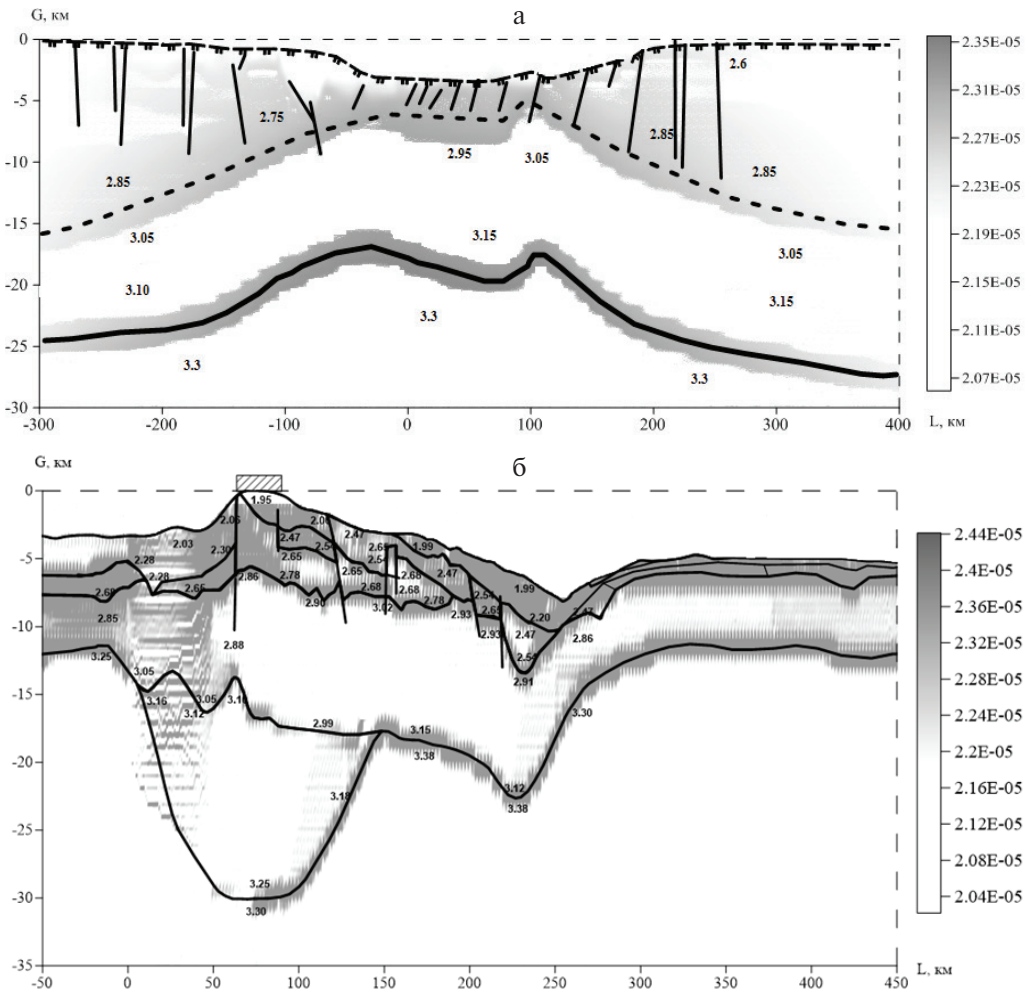
Для анализа особенностей распределения полей деформаций и гравитационных напряжений по заданным профилям, рассмотрим распределение модельных положительных параметров интенсивности деформаций (3.2) и интенсивности напряжений (4.1):

$$T_{int} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(t_{(pp)} - t_{(qp)})^2 + (t_{(qp)} - t_{(\lambda\lambda)})^2 + (t_{(\lambda\lambda)} - t_{(pp)})^2 + 3(t_{(pp)}^2 + t_{(qp)}^2 + t_{(\lambda\lambda)}^2 + t_{(pp)}^2 + t_{(\lambda\lambda)}^2 + t_{(pp)}^2)} \quad (4.1)$$

На рис. 3 показаны графики градиентного распределения интенсивности деформаций ϵ_{int} по плоскости профилей 1.1–1.8 (рис. 3,а) и 2.1–2.10 (рис. 3,б). Распределение интенсивности деформаций моделирует степень пластического состояния геосреды профилей согласно заданной плотностной дифференциации.

Максимальные значения интенсивности деформаций ϵ_{int} концентрируются в зонах (окрашены в серый градиентный цвет), в которых возможность перехода в пластическое состояние обусловлена напряженно-деформированным состоянием геосреды.

В плоскости профиля 1.1–1.8 (рис. 3,а) степень пластичности преобладает в верхних слоях срединной части земной коры в окрестности разломов и горизонтальных



границ раздела: мантия нижняя кора – верхняя кора [17]. В плоскости профиля 2.1–2.10 (рис. 3,б) степень пластичности преобладает в верхних слоях земной коры в окрестности разломов. Распределение максимальных значений поля ϵ_{int} оконтуривает окрестности разломов, плотностных границ и определяет их зону влияния. Изменения значений интенсивности деформаций по всей плоскости профиля 1.1–1.8 определяются интервалом $2.07 \cdot 10^{-5} \leq \epsilon_{\text{int}} \leq 2.35 \cdot 10^{-5}$; профиля 2.1–2.10 – интервалом $2.04 \cdot 10^{-5} \leq \epsilon_{\text{int}} \leq 2.44 \cdot 10^{-5}$. Максимальное значение интенсивности деформаций по сечению профиля 2.1–2.10 равно $2.44 \cdot 10^{-5}$. Оно больше максимального значения интенсивности деформаций по сечению профиля 1.1–1.8, но порядок значения тот же, $2.44 \cdot 10^{-5} > 2.35 \cdot 10^{-5}$. Учитывая характеристики главных напряжений, это сравнение, возможно, косвенно определяет положение профиля 2.1–2.10 в зоне сжатия, а профиля 1.1–1.8 в зоне растяжения.

В зоне дальневосточных морей и северо-западном секторе Тихого океана массивы горных пород находятся в зоне повышенной сейсмичности и характеризуются сложностью строения за счет структурных неоднородностей. Общеизвестные критерии пластичности и прочности горных пород предполагают, что все компоненты среды достигают предельного состояния при разрушении одновременно, что, в общем случае неоднородных сред, маловероятно. Горные породы неодинаково сопротивляются растяжению, сжатию и отрыву и не могут достигать предельного состояния одновременно. Кроме этого, в расчетные формулы, как правило, входят операторы усреднения физических и механических характеристик среды, что приводит к размыванию локализации плотностных разломов и особенностей неоднородной геоструктуры. Поэтому предположенный параметр интенсивности деформаций, может быть рассмотрен как геомеханический маркер пластического деформирования, так как его распределение моделирует совпадение с заданным плотностным распределением типов вещества и разломов по всей плоскости профилей (рис. 3).

На рис. 4 показаны графики изолиний и градиентного распределения интенсивности напряжений T_{int} по плоскости профилей 1.1–1.8 (рис. 4,а) и 2.1–2.10 (рис. 4,б), которые согласуются с положением глубинных разломов и плотностных границ слоев [13,18].

Изолинии концентрируются и преломляются там, где локализованы зоны раздела плотностей и разломы. Максимальное значение поля интенсивности напряжений по профилю 2.1–2.10 (рис. 4,б) достигает 1790 ГПа на юго-востоке на уровне мантии. Максимальное значение поля интенсивности напряжений по профилю 1.1–1.8 (рис. 4,а) достигает 1690 ГПа на уровне мантии в средней части разреза. Пересечение профилей обозначено белой сплошной линией. Интервальные значения интенсивности напряжений для профиля 1.1–1.8 (рис. 4,а) составляют $1516 \text{ ГПа} \leq T_{\text{int}} \leq 1690 \text{ ГПа}$, они меньше значений этого же параметра для профиля 2.1–2.10 (рис. 4,б) $1530 \text{ ГПа} \leq T_{\text{int}} \leq 1790 \text{ ГПа}$. Характеристики главных напряжений σ_i , значения параметров интенсивности напряжений и градиентное распределение интенсивности напряжений (рис. 4) определяют положение профиля 2.1–2.10 в зоне сжатия, а профиля 1.1–1.8 в зоне растяжения. Возможно, что на рис. 4,а на глубине ниже отметки –20 км на протяжении –40 км < L < 200 км моделируется часть океанической плиты профиля 2.1–2.10, НДС которой характеризуется сжатием с юго-востока на северо-запад (рис. 4,б).

Предполагаем, что динамика возможных структурных изменений обусловлена не только значениями интенсивности напряжений, но и распределением градиентов ΔT_{int} этой функции относительно смежных точек. На рис. 5 приведены графики полей градиентов интенсивности напряжений ΔT_{int} по плоскостям профиля 1.1–1.8 (рис. 5,а) и фрагменту профиля 2.1–2.10 длиной $100 \text{ км} \leq L \leq 350 \text{ км}$ (рис. 5,б).

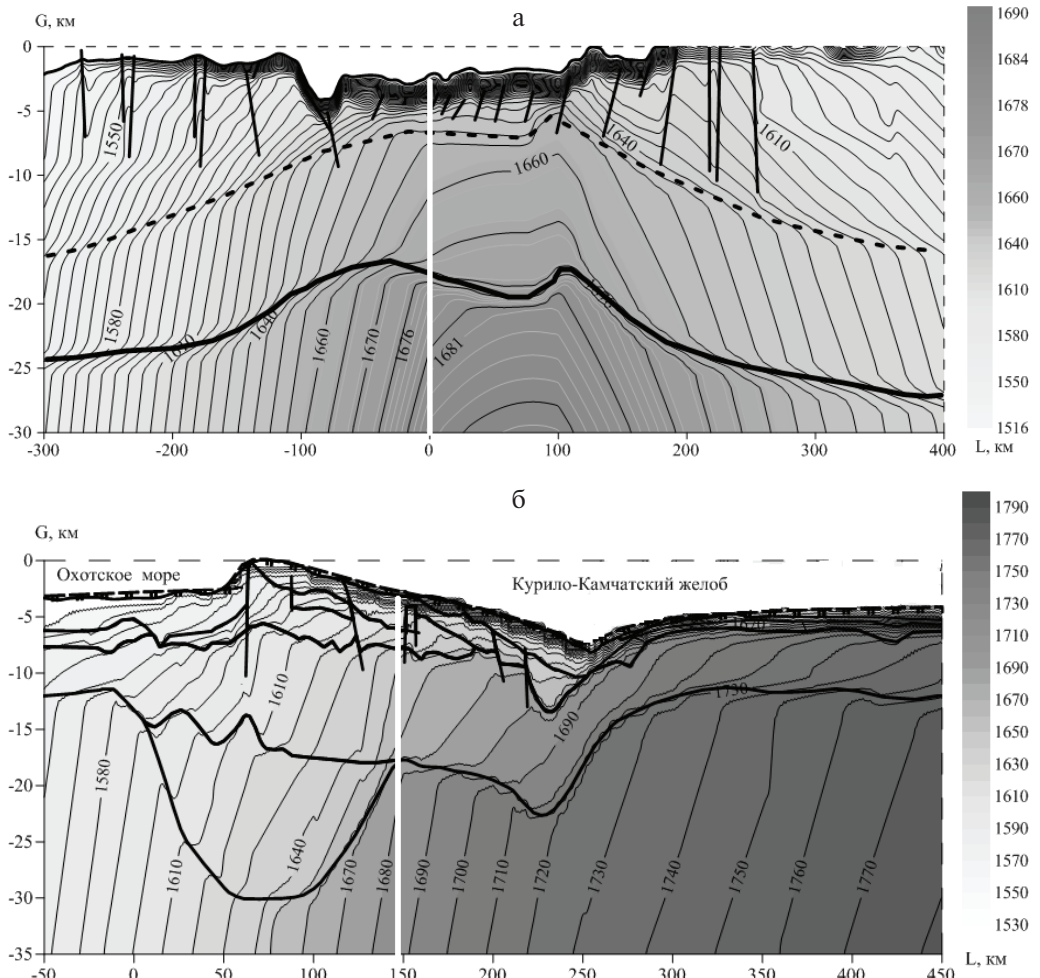


Рис. 4. Распределение изолиний и градиентных полей интенсивности напряжений T_{int} по профилям: а: 1.1–1.8 (длиной 700 км, глубиной 30 км), горизонтальные границы раздела плотностей обозначены штриховой и сплошной линиями, в верхней части разломы отмечены сплошной линией, соответствуют модели [17]; б: 2.1–2.10 (длиной 500 км, глубиной 35 км), границы плотностных блоков и разломы соответствуют модели [13]. Пересечение профилей 1.1–1.8 и 2.1–2.10 обозначено белой сплошной линией

Векторные поля градиентов интенсивности напряжений определяют направление и величину наискорейшего изменения интенсивности $\Delta T_{int_{max}}$ в расчетных точках профилей.

Предполагаем, что малые значения градиентов интенсивности напряжения в смежных точках определяют более плотную и менее подвижную часть геосреды. На рис. 5 контуром I выделены «пустоты» в векторной сетке – модельные «блоки», внутри которых $\Delta T_{int} \leq 2.5$ ГПа/км. И наоборот, менее плотная и более подвижная часть геосреды, например, разломные зоны, характеризуются градиентами интенсивности напряжений $\Delta T_{int} \geq 2.5$ ГПа/км.

Межблоковое пространство является неустойчивой составляющей геосреды, характеризуется бо́льшими значениями градиентов интенсивности напряжений, кото-

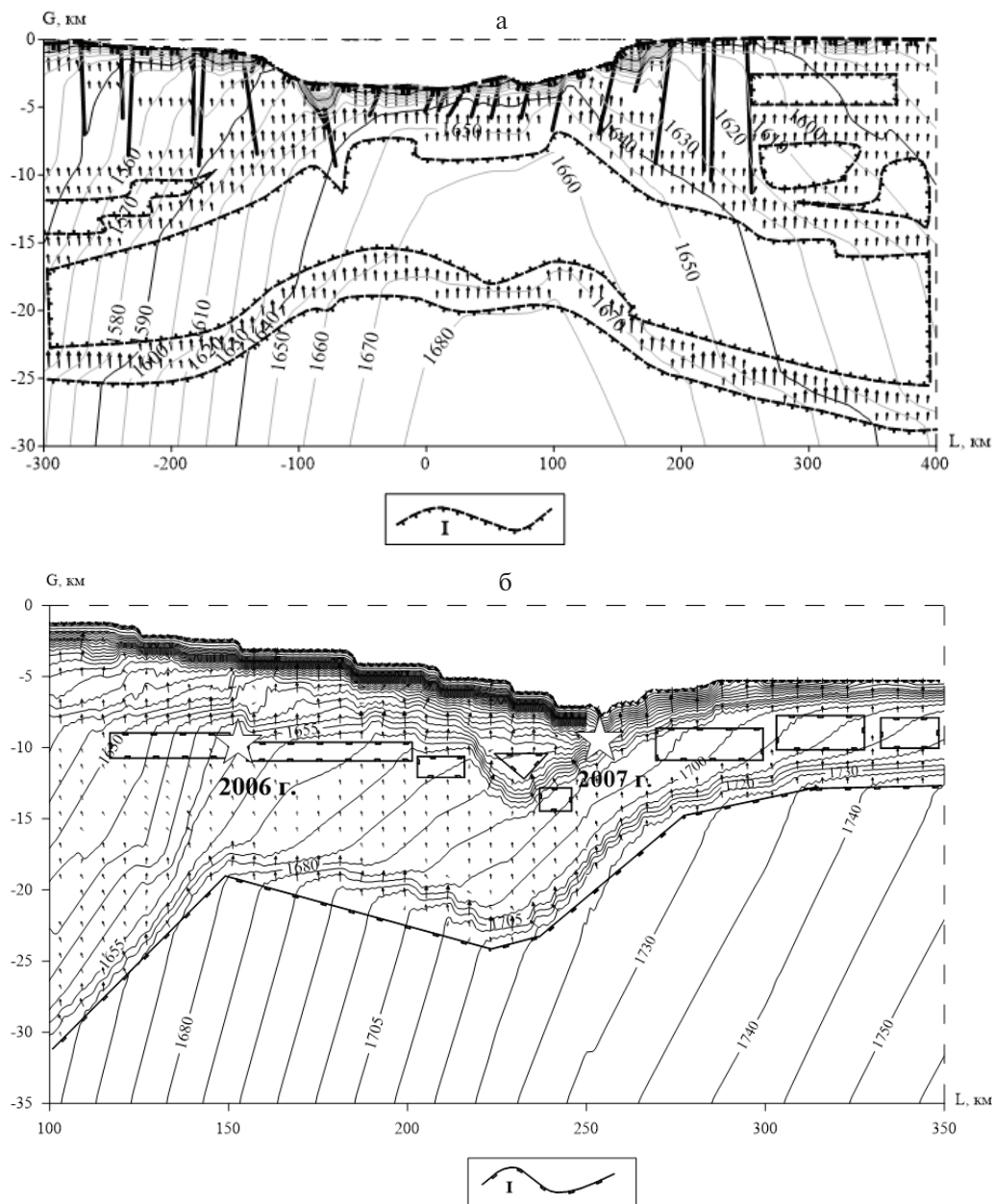


Рис.5. Распределение изолиний, градиентов ΔT_{int} поля интенсивности напряжений ΔT_{int} и оконтуренных линией I модельных «блоков», внутри которых $\Delta T_{\text{int}} \leq 2.5$ ГПа/км, по профилям:
а: 1.1–1.8, в верхней части разломы отмечены сплошной линией и соответствуют модели [17];
б: фрагмент профиля 2.1–2.10 длиной $100 \text{ км} \leq L \leq 350 \text{ км}$,
границы плотностных блоков и разломы соответствуют модели [13].
Звездочками обозначены гипоцентры Симуширских землетрясений 2006, 2007 гг.

рые изменяются по величине и направлению. При этом моделируются зоны гравитационной неустойчивости с повышенной способностью к структурообразованию, которые могут изменять границы глубинных разломов и раздела плотностей [23].

На рис. 5,а распределение векторного поля градиентов интенсивности напряжений моделирует систему из двух горизонтальных массивных модельных «блоков» по длине 700 км, разделенных горизонтальной искривленной границей. Возможно, что это граница раздела плотностей геоструктуры профиля 1.1–1.8. При дополнительном тектоническом воздействии на эту модельную систему: «блок» — межблоковое пространство — «блок» (рис. 5,а) в условиях растяжения, возмущения геосреды и развитие гравитационной неустойчивости затруднительно.

На рис. 5,б представлен наиболее информативный, с точки зрения зафиксированных геособытий, фрагмент 2.1–2.10 длиной $100 \text{ км} \leq L \leq 350 \text{ км}$. Распределение векторного поля градиентов интенсивности напряжений моделирует систему из восьми соразмерных модельных блоков, расположенных на глубине $-10 \pm 3 \text{ км}$ вдоль протяженных разломных зон. Они разделены вертикальными межблоковыми пространствами. При дополнительном тектоническом воздействии на эту модельную систему: «блок» — межблоковое пространство — «блок» (рис. 5,б), которая находится в зоне сжатия, возможно ожидать возмущений геосреды и развития гравитационной неустойчивости. Эти возмущения может служить механизмом, определяющих ход различных геодинамических процессов, в том числе и триггером землетрясений. На рис. 5,а гипоцентры землетрясений (обозначены звездочками) моделируются между соразмерными блоками, в зоне влияния разломов и плотностных границ, которые характеризуются восходящими и нисходящими пиками изолиний интенсивности напряжений, что способствует развитию здесь изгибов слоев с нарушением сплошности или формированием систем трещин и могут быть зоной повышенной сейсмичности. По опубликованным данным гипоцентры Симуширских землетрясений 2006, 2007 гг. располагались на глубине порядка 10 км в зоне разломов основания коры [15, 16].

Параметр интенсивности напряжений предложен как геомеханический маркер возможного взаимодействия неоднородных геоструктур, так как распределение относительно малых по величине градиентов интенсивности напряжений позволяют смоделировать геосреду как систему элементов взаимодействия: «блок» — межблоковое пространство — «блок», где «блок» относительно (локально) устойчивая часть, «межблоковое пространство» — неустойчивая часть геоструктуры. При этом распределение градиентов интенсивности напряжений, которые характеризуются большими значениями, моделируют направление и величину наискорейшего изменения поля интенсивности и последующие возможные геодинамические изменения.

5. Обсуждение результатов и выводы

В едином 3D-пространстве, структурированного соотношениями (2.1)–(2.3), представлено исследование НДС усложненных сред с заданной способностью к деформированию [7], неоднородным распределением физико-механических свойств по данным параметрической модели РЕМ–О [12], распределением плотностей, полученных на основании обобщения данных мониторинга геологической обстановки Центральных Курил [13,17]. Введенные в рассмотрение положительные параметры интенсивности деформаций ϵ_{int} и напряжений T_{int} являются модельными результирующими характеристиками компонент тензора деформаций и напряжений в текущей точке. Очевидно, что в естественных условиях работает иной механизм определения результирующих характеристик деформирования и напряжений. Но уместность применения в моделировании результирующих параметров деформирования и напряжений обусловлена возможностью получения пространственного распределения параметров, характеризующих особенности НДС в профилях.

Количественное и качественное распределение возможных полей напряжений и деформаций обусловлено расчетной моделью (2.1)–(2.3), граничными условиями, уравнением состояния (4), входными данными полей физико-механических свойств геосреды [12, 13, 17]. Получены согласованные поля распределения значений и градиентов компонент тензоров, результирующих параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние.

Здесь представлены результаты расчетов по двум профилям в квадрате Центральных Курил, в условиях плотностной неоднородности. Использованы результаты структурно-плотностного моделирования земной коры [13, 17]. Плотностная модель определяет важные свойства типов геовещества в текущих точках, распределенных по всей плоскости профилей. Входными данными являются значения плотности в зависимости от распределения давления, температуры и текущих координат. Встраивая эти данные плотностей в расчетную механико-математическую модель, в которой учтены распределения упругости и жесткости получаем реконструкцию возможного динамического 3D-взаимодействия из системы элементов неоднородной геосреды: «блок» – межблоковое пространство – «блок». Вклад осадков и водного слоя, стратификация распределения плотностей по глубине в расчетах компонент НДС учитывается фактическими значениями заданного поля плотностей. На основании обобщения численного анализа результатов НДС по двум профилям 1.1–1.8 (длиной 700 км, глубиной 30 км) и 2.1–2.10 (длиной 500 км, глубиной 35 км) на весь квадрат $149.0^\circ \div 156.0^\circ$ в. л., $45.0^\circ \div 50.0^\circ$ с.ш. установлены следующие общие характеристики НДС всего квадрата:

1. Перемещения в радиальном направлении являются бесконечно малыми величинами $|u_r| \ll 1$, значит, в результате деформирования мощность слоев заданного региона остается практически без изменения. Поступательные перемещения по глубине обусловлены компонентами u_ϕ и u_λ в латеральных направлениях, при этом преобладают широтные компоненты перемещений;

2. Компоненты линейных поворотов в результате перемещений фиксируются во всех координатных направлениях (отсутствуют нулевые значения), их порядок соизмерим со значениями компонент деформаций;

3. Компоненты тензора деформаций Коши–Грина полностью характеризуют деформацию среды в окрестности текущей точки в результате перемещений, линейных поворотов, косвенно определяя значения деформационных удлинений и сдвигов и как результат соответствующие изменения размеров и формы. Положительным линейным деформациям $\epsilon_{(pp)}$ соответствуют удлинения, а отрицательным $\epsilon_{(\phi\phi)}$ и $\epsilon_{(\lambda\lambda)}$ – укорочения. Положительные угловые деформации $\epsilon_{(p\phi)}$ и $\epsilon_{(\phi\lambda)}$ определяют угол между положительными направлениями координатных осей меньше 90° , а отрицательные значения $\epsilon_{(p\lambda)}$ – тот же угол больше 90° ;

4. Компоненты несимметричного тензора напряжений Пиола–Кирхгофа полностью обеспечивают кинематику, описанную в пп. 1–3 этого списка. Предложенный параметр интенсивности напряжений является результирующей положительной функцией всех девяти компонент тензора напряжений Пиола–Кирхгофа в текущей точке. Чем больше значение параметра интенсивности напряжений в определенном направлении, тем более вероятно в этом месте относительное усиление движения и сопутствующего деформирования. Направление усиления/ослабления движения определяется вкладом компонент тензора $t_{(\phi\lambda)}$ и $t_{(\lambda\phi)}$. Вклад касательных $t_{(p\lambda)}$ и $t_{(\lambda p)}$ значительно меньше, чем значения компонент $t_{(\phi\lambda)}$, $t_{(\lambda\phi)}$, $t_{(pp)}$, $t_{(\phi\phi)}$, $t_{(\lambda\lambda)}$, $t_{(p\phi)}$ и $t_{(\phi p)}$ [20, 23];

5. На основании алгоритма построения главных напряжений по данным расчетов текущих значений компонент тензора напряжений Пиола–Кирхгофа по двум профилям, получена общая характеристика напряженного состояния всего квадрата

149.0° ÷ 156.0° в. , 45.0° ÷ 50.0° с.ш.: растяжение на фоне преобладающего сжатия (максимальное растяжение—сжатие—максимальное сжатие).

Для выявления особенностей распределения НДС по двум профилям 1.1–1.8 и 2.1–2.10 используем те же расчетные данные компонент перемещений, поворотов, деформаций и напряжений. Эти данные информативны в плане общих характеристик НДС заданного квадрата, при этом особенности распределения полей НДС по геоструктуре профилей согласуются и обеспечиваются общими характеристиками, приведенными в списке пп. 1–5.

Установлены следующие особенности распределения НДС по профилю 1.1–1.8:

1. Рельеф поверхности профиля определяется напряженно-деформированным состоянием глубинных структур.

2. На рис. 4а пространственное распределение изолиний интенсивности напряжений моделирует положение профиля в зоне растяжения, на глубине ниже –20 км на протяжении $-40 \text{ км} < L < 200 \text{ км}$ моделируется часть океанической плиты профиля 2.1–2.10, НДС которой характеризуется сжатием с юго-востока на северо-запад.

3. Распределение маркера интенсивности напряжений моделирует устойчивую слоисто-блоковую структуру по плоскости всего профиля.

4. Распределения кинематических параметров определяют возможные качественные изменения вещественных элементов геосреды профиля (список пп. 1–5). Параметр интенсивности деформаций, как геомеханический маркер степени пластического деформирования неоднородной геосреды по глубине профиля, моделирует концентрацию максимальных значений в зонах локализации разломов и плотностных границ.

Установлены следующие особенности распределения НДС по профилю 2.1–2.10:

1. На рис. 4,б пространственное распределение изолиний интенсивности напряжений и более насыщенная окраска на юго-восточной границе профиля моделирует потенциальную возможность бокового давления «поддвигающейся Тихоокеанской плиты, создающей зону сжатия, повышение плотности геологической среды в пределах уклона Курильского желоба и, как следствие, возникновение зоны повышенных напряжений. По мере удаления от указанной зоны в сторону Охотского моря, величина интенсивности напряжений, естественно, должна уменьшаться...» [18], что подтверждается более светлой окраской верхней части вдоль всего профиля на рис. 4,б.

2. Распределение градиентов маркера интенсивности напряжений моделирует устойчивые/неустойчивые структурные элементы в плоскости профиля относительно возможного динамического взаимодействия: устойчивые структурные элементы – «блоки», которые разделены зонами с повышенной активностью – «межблоковыми пространствами». Динамическое воздействие на межблоковые пространства в системе из восьми соразмерных модельных блоков, расположенных на глубине $-10 \pm 3 \text{ км}$ (рис. 5,б), моделирует возможность сейсмических деформаций. Распределение, детализация слоисто-блоковой структуры (расположение, соизмеримость блоков взаимодействия) в гипоцентрах Симуширских землетрясений, а также концентрация полей деформаций и напряжений согласуются с плотностной дифференциацией земной коры и свидетельствуют о прошлой и возможной в будущем сейсмической активности в этом регионе.

3. Рельеф поверхности профиля определяется напряженно-деформированным состоянием глубинных структур.

4. Распределения кинематических параметров определяют возможные качественные изменения вещественных элементов геосреды профиля (список пп. 1–5). Применен параметр интенсивности деформаций, как геомеханический маркер степени пластического деформирования неоднородной геосреды по глубине профиля. Максимальные значения маркера концентрируются в зонах локализации разломов по

всей плоскости профиля, при этом распределение максимальных значений оконтуривают окрестности разломов, плотностных границ и определяют их зону влияния.

Полученные результаты позволяют реконструировать и объяснить особенности структурной эволюции неоднородных геосред в поле собственной гравитации.

В рамках расчетной 3D-модели неоднородность свойств (упругость, жесткость) геосреды может быть учтена через приращение $\pm\Delta$. Закон состояния, определяющий способность к усложненному деформированию, учитывающий взаимодействие компонент деформаций и скоростей деформаций, может быть принят в форме $\Phi^{ij}(\varepsilon^{ij}, \dot{\varepsilon}^{ij})$.

Но автор не располагает данными неоднородного распределения свойств упругости, жесткости, вязкости и других свойств геосред.

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы «Изучение структуры, физических и вещественных характеристик и геодинамики литосферы, сейсмической активности и закономерностей размещения полезных ископаемых в регионе дальневосточных морей и северо-западном секторе Тихого океана», регистрационный номер: 124022100082-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ребецкий Ю.Л., Михайлова А.В. Роль силы гравитации в формировании глубинной структуры сдвиговых зон // Геодинам. и тектонофиз. 2011. Т. 2. № 1. С. 45–68.
2. Гзовский М.В. Метод моделирования в тектонофизике // Сов. геол. 1958. № 4. С. 53–72.
3. Гуревич Г.И. Об исходных предпосылках подхода к моделированию в тектонике // в кн.: Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 75–144.
4. Biot M.A. Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // Phil. Mag. 1939. V. 27. P. 89–115.
5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.;Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
6. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. Murnaghan F.D. Finite Deformation of an Elastic Solid. New York: Wiley, 1951. 140 p.
8. Гузь А.Н. Основы теории упругой устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.
9. Осипова Е.Б. Устойчивость равновесия сжимаемого шара // Вычисл. технол. 2015. Т. 20. № 6. С. 59 – 71.
10. Осипова Е.Б. Исследование устойчивости равновесия сжимаемого гиперупругого полого шара // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 4. С. 160 – 169.
<https://doi.org/10.15372/PMTF.20150415>
11. Осипова Е.Б. Модельное исследование внутреннего распределения неоднородных полей напряжений в земной коре // Физич. мезомех. 2016. Т. 19. № 6. С. 94 – 100.
12. Dziewonski A.M., Hales A.L., Lapwood E.R. Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data // Phys. Earth Planet. Inter. 1975. V. 10. № 1. P. 12–48.
13. Кулинич Р.Г., Валитов М.Г., Прошкина З.Н. Сравнительный анализ сейсмических и плотностных моделей земной коры Центральных Курил // Тихоокеанская геол. 2015. Т. 34. № 6. С. 45–56.
14. Злобин Т.К., Пискунов Б.Н., Фролова Т.И. Новые данные о строении земной коры центральной части Курильской основной дуги // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 185–188.
15. Злобин Т.К., Левин Б.В., Полец А.Ю. Первые результаты сопоставления катастрофических Симуширских землетрясений 15 ноября 2006 г. ($M = 8.3$) и 13 января 2007 г. ($M = 8.1$) и глубинного строения земной коры центральных Курил // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 1. С. 111–115.
16. Злобин Т.К., Полец А.Ю. Очаговые зоны сопоставления катастрофических Симуширских землетрясений 15 ноября 2006 г. ($M_w = 8.3$) и 13 января 2007 г. ($M_w = 8.1$) и глубинное строение земной коры Средних Курил // Тихоокеанская геол. 2009. Т. 28. № 5. С. 54–63.
17. Прошкина З.Н. О глубинном строении зоны разрушения хребта Витязя (Центральные Курилы) // Вестн. ДВО РАН. 2016. № 5. С. 36–42.

18. Кулинич Р.Г., Осипова Е.Б., Валитов М.Г. Плотностные неоднородности и напряжения в земной коре Центральных Курил // Тихоокеанская геол. 2020. Т. 39. № 2. С. 21–28. DOI:10.30911/0207-4028-2020-39-2-21-28
19. Цифровая модель рельефа (Satellite Geodesy, Global Topography) // <http://topex.ucsd.edu> 02.06.2023 г.
20. Осипова Е.Б. Численная реконструкция напряженно-деформированного состояния в земной коре // Вычисл. технол. 2023. Т. 28. № 5. С. 15–32. <https://doi.org/10.25743/ICT.2023.28.5.003>
21. Трубицын В.П. Реология мантии и тектоника океанических литосферных плит // Физика Земли. 2012. № 6. С. 3–22.
22. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 319 с.
23. Осипова Е.Б. Гравитационные напряжения и слоисто-блоковые структуры в земной коре // Физич. мезомех. 2021. Т. 24. № 6. С. 105–115. <https://doi.org/10.24412/1683-805X-2021-6-105-115>

Geomechanical Markers of Stress and Strain State, and Interaction of Structures in Inhomogeneous Geoenvironment

E. B. Osipova^{a, #}

^a*Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEBRAS, Vladivostok, Russia*

[#]*e-mail: osipov@poi.dvo.ru*

Geodynamics in an inhomogeneous 3D-geoenvironment, due to gravitational processes, is characterized by fields of displacement, rotations and deformations. The quantitative and dimensional characteristics of the distribution of these fields are provided by the corresponding stress fields. The results of computational experiments modeling the stress and strain state of two profiles are presented. The distribution of fields in depth is due to density inhomogeneity, one of the internal sources of tectonic stresses. The generalization of the component analysis showed the general properties of the stress and strain state, which is characterized by stretching against the background of prevailing compression. The stress intensity parameter is used to model the interaction features of inhomogeneous profile structures. The degree of plasticity of the geoenvironment is modeled by the deformation intensity parameter.

Keywords: modeling of the stress and strain state of an inhomogeneous geoenvironment, interaction of geostructures, plasticity of the geoenvironment

REFERENCES

1. Rebetskiy Yu.L., Mikhaylova A.V. The role of gravity in formation of the deep structure for shear zones // Geodin.&Tektonofiz., 2011, vol. 2, no. 1, pp. 45–68. (in Russian)
2. Gzovskiy M.V. Modelling method in tectonophysics // Sov. Geol., 1958, no. 4, pp. 53–72. (in Russian)
3. Gurevich G.I. On the initial prerequisites of the approach to modeling in tectonics // in: Some Questions of Mechanics of Deformable Media. Moscow: AN SSSR Pub., 1959, pp. 75–144. (in Russian)
4. Biot M.A. Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // Phil. Mag., 1939, vol.27, pp. 89–115.
5. Novozhilov V.V. Fundamentals of the Nonlinear Theory of Elasticity. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1948. 211 p. (in Russian)
6. Lure A.I. Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 939 p. (in Russian)
7. Murnaghan F.D. Finite Deformation of an Elastic Solid. N.Y.: Wiley, 1951. 140 p.
8. Guz A.N. Fundamentals of the Theory of Elastic Stability of Deformable Bodies. Kiev: Vishcha shkola, 1986. 511 p. (in Russian)
9. Osipova E.B. On the stability of equilibrium in a compressed sphere // Comput. Technol., 2015, vol. 20, no. 6, pp. 59–71 (in Russian)
10. Osipova E.B. Stability of equilibrium of a compressible hyperelastic hollow sphere // J. of Appl. Mech.&Tech. Phys., 2015, vol. 56, no. 4, pp. 679–687. <https://doi.org/10.1134/S002189441504015X>

11. *Osipova E.B.* Modelling of the field distribution for inhomogeneous stress in the Earth's crust // Fizich. Mezomekh., 2016, vol. 19, no. 6, pp. 94–100. (in Russian)
12. *Dziewonski A.M., Hales A.L., Lapwood E.R.* Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data // Phys. Earth Planet. Inter., 1975, vol.10, no. 1, pp. 12–48.
13. *Kulinich R.G., Valitov M.G., Proshkina Z.N.* A comparative analysis of the seismic and density models for the Earth's crust of the Central Kurils // Rus. J. of Pacific Geology, 2015, vol. 9, no. 6, pp. 439–450.
<https://doi.org/10.1134/S1819714015060068>
14. *Zlobin T.K., Piskunov B.N., Frolova T. I.* New data on the structure of the Earth's crust of the central part for the arc of Kuril Island // Dokl. AN SSSR, 1987; vol. 293, no. 2, pp. 185–188. (in Russian)
15. *Zlobin T.K., Levin B.V., Polets A.Yu* The first results of comparing the catastrophic Simushir earthquakes of November 15, 2006 ($M = 8.3$) and January 13, 2007 ($M = 8.1$) and the deep structure of the Earth's crust of the central Kuriles // Dokl. RAN, 2008, vol.420, no. 1, pp. 111–115 (in Russian)
16. *Zlobin T.K., Polets A.Yu.* Source zones of the catastrophic Simushir earthquakes on November 15, 2006 ($M_w = 8.3$) and January 13, 2007 ($M_w = 8.1$) and the deep crust structure beneath the Middle Kuril segment // Rus. J. of Pacific Geology, 2009, vol. 3, no. 5, pp. 460–469.
<https://doi.org/10.1134/S181971400905008X>
17. *Proshkina Z.N.* On the deep structure of the Vityaz Ridge destruction zone (Central Kuriles) // Vestn. of Far Eastern Branch of RAS, 2016, no. 5, pp. 36–42. (in Russian)
18. *Kulinich R.G., Osipova E.B., Valitov M.G.* The Earth's crust density inhomogeneities and stresses in the Central Kuriles // Rus. J. of Pacific Geology, 2020, vol. 14, no. 2, pp. 114–120.
<https://doi.org/10.1134/S1819714020020037>
19. Digital relief model (Satellite Geodesy, Global Topography) Electron. resource. Access mode: <http://topex.ucsd.edu> 02.06.2023 r. (in Russian)
20. *Osipova E.B.* Numerical reconstruction of the stress and strain state in the Earth's crust // Comput. Technol., 2023, vol. 28, no. 5, pp.15–32.
<https://doi.org/10.25743/ICT.2023.28.5.003>. (in Russian)
21. *Trubitsyn V.P.* Rheology of the mantle and tectonics of the oceanic lithospheric plates // Izv. Phys. of the Solid Earth, 2012, no. 6, pp. 467–485. (in Russian)
22. *Mase George E.* Theory and Problems of Continuum Mechanics. MCGraw-Hill Book Co., 1970. 319 p.
23. *Osipova E.B.* Gravity stresses and block-layer structures in the Earth's crust // Phys. Meso-mech., 2022, vol. 25, no. 2, pp. 187–194.
<https://doi.org/10.1134/S1029959922020102>

УДК 539.3

ТРЕХПОЛЬНЫЙ МКЭ В РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК С ВАРИАНТАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН

© 2024 г. М. Ю. Клочков^{1,*}, В. А. Пшеничкина^{1,**}, А. П. Николаев^{2,***},
Ю. В. Клочков^{2,****}, О. В. Вахнина^{2,*****}, А. С. Андреев^{2,*****}

¹Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

²Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия

e-mail: m.klo4koff@yandex.ru*, vap_hm@list.ru**, anpetr40@yandex.ru***, klotchkov@bk.ru****,
ovahnina@bk.ru*****, aandreev.07.1988@gmail.com*****

Поступила в редакцию 24.02.2024 г.

После доработки 12.09.2024 г.

Принята к публикации 15.09.2024 г.

Разработан трехпольный конечный элемент четырехугольной формы тонкой оболочки с узловыми неизвестными в виде: перемещений и их первых производных; деформаций и искривлений срединной поверхности; усилий и моментов срединной поверхности.

Аппроксимация искомых величин осуществлялась в двух вариантах. В первом варианте компоненты вектора перемещений и компоненты тензоров деформаций и кривизн, а также тензоров усилий и моментов аппроксимировались с использованием традиционных функций формы как составляющие скалярных полей. Во втором варианте тензорные величины аппроксимировались через соответствующие тензоры узловых точек, и только после координатных преобразований на основе соотношений используемой криволинейной системы координат были получены аппроксимирующие выражения компонент соответствующих тензоров.

На конкретных примерах показана эффективность использования второго варианта аппроксимирующих выражений в расчетах оболочки.

Ключевые слова: вектор перемещения, тензор деформаций, тензор напряжений, тензор усилий, тензор искривлений, трехпольный конечный элемент, тензорно-векторная интерполяция

DOI: 10.31857/S0032823524050109 EDN: JPFVTH

1. Введение

Оболочки различных конфигураций в последнее время получают все более широкое распространение во многих инженерных сооружениях (трубопроводы, резервуары, покрытия, перекрытия, летательные аппараты, архитектурные формы и другие).

Теория расчета тонких оболочек в настоящее время является достаточно развитой [1–4] при различных видах нагружения. Аналитические решения уравнений теории тонких оболочек оказались возможными лишь в некоторых частных случаях, далеких от инженерной практики. Поэтому актуальными оказались разработки численных методов решения уравнений теории оболочек. Среди численных методов решения задач деформирования инженерных конструкций получил развитие и широкое использование метод конечных элементов (МКЭ) [5–7]. Наиболее широкое исполь-

зование при расчете оболочек получил МКЭ в формулировке метода перемещений [8–14]. МКЭ в формулировке метода перемещений использовался в расчетах трехслойных оболочек [15–22]. Для обоснования разработанной методики расчета трехслойных оболочек в [21, 22] выполнено сравнение полученных результатов с аналитическими решениями других исследователей.

В расчетах оболочек МКЭ широко использовался и в смешанной формулировке [23–26]. В последние годы разрабатывается виртуальный МКЭ с объемными конечными элементами на пространственных сетках дискретизации [27, 28].

При использовании МКЭ в формулировке метода перемещений применялись в конечных элементах кинематические узловые неизвестные. При смешанной формулировке МКЭ в конечных элементах узловыми неизвестными принимались перемещения и напряжения с выполнением условий совместности между конечными элементами в сетке дискретизации.

При проектировании тонкостенных оболочек необходимо знать численные значения компонент векторов перемещений, а также компонент тензоров напряжений. Достижению этой цели служит развитие численных методов расчета, в частности МКЭ в виде трехпольной формулировки, которая позволяет без дополнительных вычислительных процедур одновременно получать численные значения компонент вектора перемещения, изгибающих моментов, продольных сил, деформаций и искривлений срединной поверхности рассчитываемой оболочки. При этом следует применять вычислительные технологии, позволяющие учитывать смещение конечного элемента как твердого целого.

Получение аппроксимирующих выражений искомых величин с учетом смещения как твердого тела для конечного элемента в форме цилиндрической панели показано в [29, 30], для трехслойных оболочек в [15, 16].

Проблеме учета жестких смещений в МКЭ в векторной формулировке посвящены работы [31, 32].

С целью решения проблем численного анализа НДС оболочек в настоящей работе излагается разработанный трехпольный вариант МКЭ со следующими полями узловых неизвестных:

- перемещения и их первые производные;
- деформации и искривления срединной поверхности;
- усилия и моменты срединной поверхности.

Аппроксимация искомых величин использована в двух вариантах.

В первом варианте традиционные аппроксимирующие выражения использовались для аппроксимации непосредственно компонент векторов перемещений и компонент тензоров деформаций, искривлений, усилий и моментов.

Во втором варианте традиционные аппроксимирующие процедуры применялись к искомым векторам и тензорам, и после координатных преобразований в используемой криволинейной системе координат определялись аппроксимирующие выражения для компонент искомых векторов и тензоров.

Используемая векторно-тензорная форма интерполяционной процедуры позволяет эффективно решить проблему учета смещений оболочек как абсолютно твердых тел.

2. Геометрия оболочки

Параметризация срединной поверхности оболочки является важным аспектом процесса разработки вычислительного алгоритма расчета тонкостенных объектов. В представленном исследовании в качестве криволинейных координат срединной поверхности были использованы осевая координата x и полярный угол θ . Таким образом, радиус-вектор срединной поверхности оболочки может быть задан векторной функцией следующего вида

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta)\sin\theta\vec{j} + r(x, \theta)\cos\theta\vec{k}, \quad (2.1)$$

где θ – полярный угол, отсчитываемый в плоскости yOz от оси Oz против хода часовой стрелки; $r = r(x, \theta)$ – функция, зависящая от конкретного типа поверхности.

Так, например, для оболочки в форме эллипсоида данная функция имеет вид

$$r(x, \theta) = \frac{bc\sqrt{a^2 - x^2}}{a\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.2)$$

где a, b, c – параметры эллипсоида.

Для эллиптического цилиндра эта формула зависит только от полярного угла

$$r(\theta) = \frac{bc}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.3)$$

Базисные векторы точки M^0 срединной поверхности оболочки в исходном состоянии можно получить стандартным образом с использованием формул дифференциальной геометрии

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0, \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0, \quad \vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a^0}, \quad (2.4)$$

где $a^0 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0)(\vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0) - (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0)^2$.

Векторы базиса точки $M^{0\zeta}$, расположенной в произвольном слое оболочки на расстоянии ζ от точки M^0 в исходном состоянии определяются по формулам

$$\vec{g}_1^0 = \vec{R}_{,x}^{0\zeta}, \quad \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^{0\zeta}, \quad (2.5)$$

где $\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta\vec{a}^0$.

В процессе деформирования оболочки под действием приложенной внешней нагрузки точки M^0 и $M^{0\zeta}$ займут новые положения M и M^ζ , определяемые векторами перемещений $\vec{v}$ и $\vec{V}$ соответственно

$$\vec{v} = v^1\vec{a}_1^0 + v^2\vec{a}_2^0 + v\vec{a}^0, \quad \vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0) \quad (2.6)$$

Входящий в структуру формулы вектора $\vec{V}$ орт нормали к деформированной срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a}, \quad (2.7)$$

где $\vec{a}_1 = \vec{R}_{,x}^0 + \vec{v}_{,x}$, $\vec{a}_2 = \vec{R}_{,\theta}^0 + \vec{v}_{,\theta}$, $\vec{a} = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2$

Векторы базиса в точке M^ζ деформированного состояния оболочки определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^\zeta &= \vec{R}_{,x}^\zeta = (\vec{R}^{0\zeta} + \vec{V})_{,x} = \vec{g}_1^0 + \vec{v}_{,x} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0)_{,x} \\ \vec{g}_2^\zeta &= \vec{R}_{,\theta}^\zeta = (\vec{R}^{0\zeta} + \vec{V})_{,\theta} = \vec{g}_2^0 + \vec{v}_{,\theta} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0)_{,\theta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Метрические тензоры точек $M^{0\zeta}$ и M^ζ определяются компонентами

$$g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0, \quad g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta, \quad (2.9)$$

где нижние индексы α и β последовательно принимают значения 1, 2.

Ковариантные компоненты тензора деформаций в точке M^ζ могут быть получены посредством использования соотношения механики сплошной среды

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0) / 2 \quad (2.10)$$

При использовании гипотезы тонких оболочек Кирхгофа–Лява [1] соотношения (2.10) могут быть представлены суммой

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1} = \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} + \zeta \left\{ \aleph_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1}, \quad (2.11)$$

где $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \varepsilon_{11}^\zeta \ \varepsilon_{22}^\zeta \ 2\varepsilon_{12}^\zeta \right\}$, $\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12} \right\}$, $\left\{ \aleph_{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \aleph_{11} \ \aleph_{22} \ 2\aleph_{12} \right\}$ – деформации и искривления в точках M^ζ и M оболочки.

3. Дискретная модель объекта

Для построения дискретной модели оболочки был выбран четырехузловой конечный элемент в виде фрагмента срединной поверхности с узлами i, j, k, l .

Криволинейные координаты x и θ дискретного элемента определяются с использованием билинейных функций через координаты узлов посредством матричных соотношений

$$x = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ x_y \right\}_{4 \times 1}, \quad \theta = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \theta_y \right\}_{4 \times 1}, \quad (3.1)$$

$$\text{где } \left\{ x_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ x^i \ x^j \ x^k \ x^l \right\}, \quad \left\{ \theta_y \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \theta^i \ \theta^j \ \theta^k \ \theta^l \right\}.$$

В качестве искоемых кинематических и силовых параметров конечного элемента выбираются следующие столбцы узловых неизвестных: $\left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^{2L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 12}^T \right\}^T$ –

строки узловых перемещений, каждая из которых имеет вид $\left\{ q_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ q^i \ q^j \ q^k \ q^l \ q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l \ q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l \right\}$, где под q понимается компонента вектора пере-

мещения v^1, v^2 или v ; $\left\{ \varepsilon \aleph_y \right\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_y \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \aleph_y \right\}_{1 \times 12}^T \right\}^T$ – строки узловых деформаций и искривлений срединной поверхности $\left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \lambda_{11}^i \ \lambda_{11}^j \ \lambda_{11}^k \ \lambda_{11}^l \ \lambda_{22}^i \dots \lambda_{22}^l \ 2\lambda_{12}^i \dots 2\lambda_{12}^l \right\}$, где под $\lambda_{\alpha\beta}$

понимается деформация $\varepsilon_{\alpha\beta}$ или искривления $\aleph_{\alpha\beta}$ срединной поверхности;

$\left\{ NM_y \right\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \left\{ N_y \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ M_y \right\}_{1 \times 12}^T \right\}^T$ – строки узловых продольных сил и изгибающих моментов

$\left\{ T_y \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ T^{11i} \ T^{11j} \ T^{11k} \ T^{11l} \ T^{22i} \dots T^{22l} \ T^{12i} \dots T^{12l} \right\}$. Здесь под $T^{\alpha\beta}$ понимается контравариантная компонента тензора внутренних усилий или тензора моментов.

В разработанных к настоящему времени вычислительных комплексах (ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и других) и конечно-элементных алгоритмах традиционно используется покомпонентная интерполяционная процедура, отличительной особенностью которой является применение интерполяционного выражения отдельно к каждой компоненте вектора перемещения или к каждой компоненте тензорных величин, таких как тензор деформаций, искривлений, сил и моментов. Согласно этой интерполяционной процедуре, можно записать следующие интерполяционные выражения

$$q = \{\psi\}_{1 \times 12}^T \{q_y^L\}_{12 \times 1}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \{\lambda_{\alpha\beta y}\}_{4 \times 1}, \quad T^{\alpha\beta} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \{T_y^{\alpha\beta}\}_{4 \times 1}, \quad (3.2)$$

где $\{\psi\}_{1 \times 12}^T$ – матрица-строка, содержащая произведения полиномов Эрмита третьей степени [24, 25].

При использовании билинейных функций формы для аппроксимации деформаций условия неразрывности деформаций не выполняются из-за наличия деформаций сдвига ε_{xy} в узле k конечного элемента.

С использованием интерполяционных зависимостей (3.2) формируются аппроксимирующие матричные выражения

$$\{\varepsilon N\}_{6 \times 1} = [H_1]_{6 \times 24} \{\varepsilon N_y\}_{24 \times 1}, \quad \{NM\}_{6 \times 1} = [H_1]_{6 \times 24} \{NM_y\}_{24 \times 1}, \quad \{v\}_{3 \times 1} = [A_1]_{3 \times 36} \{v_y\}_{36 \times 1}, \quad \{\varepsilon N^k\}_{6 \times 1} = [B_1]_{6 \times 36} \{v_y\}_{36 \times 1}, \quad (3.3)$$

где $\{\varepsilon N\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T \{N_{\alpha\beta}\}_{1 \times 3}^T \right\}$ – строка деформаций и искривлений внутренней точки конечного элемента; $\{NM\}_{1 \times 6}^T = \{N^{11} N^{22} N^{12} M^{11} M^{22} M^{12}\}$ – строка усилий и моментов внутренней точки конечного элемента; $\{\varepsilon N^k\}_{1 \times 6}$ – строка деформаций и искривлений внутренней точки, определяемых функциями перемещений.

Как следует из (3.2), каждая из компонент вектора и тензора интерполируется через узловые значения этой же самой компоненты. Данная аппроксимация является корректной, если векторы и тензоры определены в декартовой системе координат.

Если векторы и тензоры определены в криволинейной системе координат, то необходимо использовать тензорно-векторную форму интерполяционной процедуры, при которой выполняется интерполирование не отдельных компонентов вектора или отдельных компонент тензоров деформаций, искривлений, усилий или моментов, а непосредственно самого вектора перемещения и вышеупомянутых тензоров посредством узловых значений векторов и тензоров.

При реализации трехпольного варианта МКЭ применительно к анализу НДС оболочек тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры предусматривает использование следующих интерполяционных выражений

$$\tilde{\varepsilon} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{\varepsilon}_y\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{N} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{N}_y\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{N} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{N}_y\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{M} = \{\varphi\}_{1 \times 4}^T \{\tilde{M}_y\}_{4 \times 1}, \quad \tilde{v} = \{\psi\}_{1 \times 12}^T \{\tilde{v}_y^L\}_{12 \times 1}, \quad (3.4)$$

где $\{\tilde{\varepsilon}_y\}_{1 \times 4}^T = \{\tilde{\varepsilon}^i \tilde{\varepsilon}^j \tilde{\varepsilon}^k \tilde{\varepsilon}^l\}$; $\{\tilde{N}_y\}_{1 \times 4}^T = \{\tilde{N}^i \tilde{N}^j \tilde{N}^k \tilde{N}^l\}$ – строки узловых тензоров деформаций и искривлений срединной поверхности; $\{\tilde{M}_y\}_{1 \times 4}^T = \{\tilde{M}^i \tilde{M}^j \tilde{M}^k \tilde{M}^l\}$ – строки узловых тензоров продольных сил и изгибающих моментов; $\{\tilde{v}_y^L\}_{1 \times 12}^T = \{\tilde{v}^i \tilde{v}^j \tilde{v}^k \tilde{v}^l \tilde{v}_{,\xi}^i \tilde{v}_{,\xi}^j \dots \tilde{v}_{,\xi}^l \tilde{v}_{,\eta}^i \dots \tilde{v}_{,\eta}^l\}$ – строка узловых векторов перемещения и их производных первого порядка.

Тензоры деформаций и искривлений, усилий и моментов, входящих в (3.4), можно представить компонентами диадных произведений соответствующих векторов локальных базисов, например

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} &= \varepsilon_{11} \vec{a}^{01} \cdot \vec{a}^{01} + \varepsilon_{22} \vec{a}^{02} \cdot \vec{a}^{02} + 2\varepsilon_{12} \vec{a}^{01} \cdot \vec{a}^{02} = \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1}, \tilde{\aleph} = \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \aleph_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} \\
\tilde{N} &= N^{11} \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0 + N^{22} \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0 + N^{12} \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0 = \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ N^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1}, \tilde{M} = \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ M^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} \quad (3.5) \\
\left\{ \tilde{\varepsilon}_y \right\}_{4 \times 1} &= \left[\vec{\tilde{D}} \right]_{4 \times 12} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1}, \left\{ \tilde{\aleph}_y \right\}_{4 \times 1} = \left[\vec{\tilde{D}} \right]_{4 \times 12} \left\{ \aleph_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1}, \left\{ \tilde{N}_y \right\}_{4 \times 1} = \left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12} \left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1}, \left\{ \tilde{M}_y \right\}_{4 \times 1} = \left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12} \left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1},
\end{aligned}$$

где

$$\left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12} = \begin{bmatrix} \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^i \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^i \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^j \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^j \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^k \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^k \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \right)^l \left(\vec{a}_2^0 \vec{a}_2^0 \right)^l \left(\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right)^l & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица $\left[\vec{\tilde{D}} \right]_{4 \times 12}$ имеет вид $\left[\vec{\tilde{L}} \right]_{4 \times 12}$, но ее компоненты, отличные от нуля, являются диадными произведениями контравариантных векторов базисов узловых точек;

$$\begin{aligned}
\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ \varepsilon_{11}^i \varepsilon_{22}^i 2\varepsilon_{12}^i \right\}_{1 \times 3} \left\{ \varepsilon_{11}^j \varepsilon_{22}^j 2\varepsilon_{12}^j \right\}_{1 \times 3} \left\{ \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{22}^k 2\varepsilon_{12}^k \right\}_{1 \times 3} \left\{ \varepsilon_{11}^l \varepsilon_{22}^l 2\varepsilon_{12}^l \right\}_{1 \times 3} \right\} \\
\left\{ \aleph_{\alpha\beta y} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ \aleph_{11}^i \aleph_{22}^i 2\aleph_{12}^i \right\}_{1 \times 3} \left\{ \aleph_{11}^j \aleph_{22}^j 2\aleph_{12}^j \right\}_{1 \times 3} \left\{ \aleph_{11}^k \aleph_{22}^k 2\aleph_{12}^k \right\}_{1 \times 3} \left\{ \aleph_{11}^l \aleph_{22}^l 2\aleph_{12}^l \right\}_{1 \times 3} \right\} \\
\left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ N^{11i} N^{22i} N^{12i} \right\}_{1 \times 3} \left\{ N^{11j} N^{22j} N^{12j} \right\}_{1 \times 3} \left\{ N^{11k} N^{22k} N^{12k} \right\}_{1 \times 3} \left\{ N^{11l} N^{22l} N^{12l} \right\}_{1 \times 3} \right\} \\
\left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \left\{ M^{11i} M^{22i} M^{12i} \right\}_{1 \times 3} \left\{ M^{11j} M^{22j} M^{12j} \right\}_{1 \times 3} \left\{ M^{11k} M^{22k} M^{12k} \right\}_{1 \times 3} \left\{ M^{11l} M^{22l} M^{12l} \right\}_{1 \times 3} \right\}
\end{aligned}$$

Векторы базисов внутренних и узловых точек конечного элемента выражаются через орты декартовой системы координат посредством следующих матричных соотношений

$$\left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[m^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}, \left\{ \vec{a}_\alpha^{0p} \right\}_{3 \times 1} = \left[m^{0p} \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}, \quad (3.6)$$

где $\left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \vec{a}_1^0 \vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \right\}_{1 \times 3}$, $\left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \vec{i} \vec{j} \vec{k} \right\}_{1 \times 3}$, $\left\{ \vec{a}_\alpha^{0p} \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \vec{a}_1^{0p} \vec{a}_2^{0p} \vec{a}^{0p} \right\}_{1 \times 3}$. Верхний индекс p обозначает конкретный из узлов КЭ i, j, k, l .

В результате обращения первого соотношения (3.6) и подстановки его во второе соотношение (3.6) базисные векторы узлов конечного элемента выражаются через базисные векторы его внутренней точки

$$\left\{ \vec{a}_\alpha^{0p} \right\}_{3 \times 1} = \left[m^{0p} \right]_{3 \times 3} \left[m^0 \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[\omega^p \right]_{3 \times 3} \left\{ \vec{a}_\alpha^0 \right\}_{3 \times 1} \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) диадные произведения узлов КЭ также могут быть выражены через диадные произведения точки, принадлежащей внутренней области конечного элемента

$$\left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^{0p} \right\} = \left[b^{0p} \right] \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}, \quad \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta p} \right\} = \left[d^{0p} \right] \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}, \quad (3.8)$$

$$\text{где } \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^{0p} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \left(\vec{a}_1^{0p} \vec{a}_1^{0p} \right) \left(\vec{a}_2^{0p} \vec{a}_2^{0p} \right) \left(\vec{a}_1^{0p} \vec{a}_2^{0p} \right) \right\}, \quad \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta p} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \left(\vec{a}^{01} \vec{a}^{01} \right) \left(\vec{a}^{02} \vec{a}^{02} \right) \left(\vec{a}^{01} \vec{a}^{02} \right) \right\}$$

Принимая во внимание (3.8), матрица $\left[\vec{L} \right]$ примет вид

$$\left[\vec{L} \right]_{4 \times 12} = \begin{bmatrix} \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0i} \right]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0j} \right]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0k} \right]^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}^T \left[b^{0l} \right]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

При учете (3.5)–(3.9) соотношения (3.4) могут быть представлены выражениями

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \kappa_{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}^{0\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ \kappa_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ N^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \\ \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ M^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \vec{a}_{\alpha\beta}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left[\phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right]_{3 \times 3} \left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.10) можно получить необходимые интерполяционные зависимости для компонент тензоров деформаций, искривлений, продольных сил и изгибающих моментов, например

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[d^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[d^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[d^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[d^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \kappa_{\alpha\beta y} \right\}_{12 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ N_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \end{Bmatrix} &= \left\{ \phi_1 \left[b^{0i} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_2 \left[b^{0j} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_3 \left[b^{0k} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ \phi_4 \left[b^{0l} \right]^T \right\}_{3 \times 3} \left\{ M_y^{\alpha\beta} \right\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Получение интерполяционных соотношений для компонент вектора перемещения в соответствие с векторной формой интерполяционной процедуры изложено [24, 25].

На основе интерполяционных зависимостей (3.11) формируются аппроксимирующие выражения

$$\{\varepsilon \mathbb{N}\} = \begin{bmatrix} H_2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}_y\} \\ 6 \times 24 \end{bmatrix}, \{NM\} = \begin{bmatrix} H_2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{NM_y\} \\ 6 \times 24 \end{bmatrix}, \{v\} = \begin{bmatrix} A_2 \\ 3 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_y\} \\ 3 \times 36 \end{bmatrix}, \{\xi \mathbb{N}^k\} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_y\} \\ 6 \times 36 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Анализируя (3.11), можно констатировать, что отдельная компонента любого тензора (деформаций, искривлений, усилий и моментов) в точке, принадлежащей внутренней области используемого элемента дискретизации, зависит от узловых значений всех его компонент, то есть от полного набора узловых варьируемых параметров соответствующего тензора.

При общепринятой форме интерполяционной процедуры (3.2) отдельная компонента тензора, например, компонента тензора искривлений $\mathbb{N}_{11}$ является функцией узловых значений только этой же самой компоненты, т.е. $\mathbb{N}_{11} = f(\mathbb{N}_{11}^i, \mathbb{N}_{11}^j, \mathbb{N}_{11}^k, \mathbb{N}_{11}^l)$ и не зависит от узловых значений остальных компонент данного тензора $\mathbb{N}_{22}^p, \mathbb{N}_{12}^p$.

Также особенностью новых интерполяционных зависимостей (3.11) является присутствие в них параметров применяемой в конкретном расчете оболочки криволинейной системы координат, что не наблюдается в традиционных интерполяционных соотношениях (3.2).

4. Матрица жесткости конечного элемента

Для получения матрицы жесткости конечного элемента используется функционал [24, 25], основанный на равенстве работ заданных сил на перемещениях и внутренних усилий на деформациях и искривлениях, дополненный условием равенства нулю работы на деформациях и искривлениях невязки, определяемой как разность между внутренними усилиями, вводимыми по определению, и внутренними усилиями, выражаемыми через деформации и искривления

$$\Pi_L = \int_F \{NM\} \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}\} \\ 1 \times 6 \end{bmatrix} dF - \int_F \{ \begin{bmatrix} \varepsilon \mathbb{N} \\ 1 \times 6 \end{bmatrix} \{NM\} - [C] \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}^k\} \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \} dF - \int_F \{U\} \begin{bmatrix} \{P\} \\ 1 \times 3 \end{bmatrix} dF, \quad (4.1)$$

где $\{NM\} = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{22} & N^{12} & M^{11} & M^{22} & M^{12} \end{bmatrix}$, $\{\varepsilon \mathbb{N}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{12} & \mathbb{N}_{11} & \mathbb{N}_{22} & 2\mathbb{N}_{12} \end{bmatrix}$ – матрицы-строки продольных сил и изгибающих моментов, а также деформационных параметров в точке срединной поверхности оболочки; $\{\varepsilon \mathbb{N}^k\}$ – столбец, элементы которого определяются соотношениями Коши; $\{U\}^T = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix}$; $\{P\}^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$ – матрицы-строки компонент вектора перемещения и вектора внешней поверхностной нагрузки.

Входящая в (4.1) матрица $[C]$ определяет связь между столбцами $\{NM\}$ и $\{\varepsilon \mathbb{N}\}$

$$\{NM\} = \begin{bmatrix} C \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon \mathbb{N}\} \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

При учете аппроксимирующих выражений для кинематических $\{U\}$, $\{\varepsilon \mathbb{N}\}$ и силовых $\{NM\}$ искомым неизвестным в зависимости от используемого варианта аппро-

ксимации (3.2) или (3.11) функционал (4.1) с учетом (4.2) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \Pi = & \left\{ NM_y \right\} \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right]^{-1} \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} - \left\{ \varepsilon N_y \right\} \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} + \\ & + \left\{ \varepsilon N_y \right\} \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right] \left[B_\gamma \right] dF \left[P_R \right] \left\{ v_y^G \right\} - \left\{ v_y^G \right\} \left[P_R \right] \int_F \left[A_\gamma \right] \left\{ P \right\} dF, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где матрицы $\left[H_\gamma \right]$, $\left[B_\gamma \right]$ и $\left[A_\gamma \right]$ компонуется на основе интерполяционных выражений (3.3) или (3.12), нижний индекс γ принимает значения 1, 2, причем $\gamma=1$ соответствует использованию общепринятой покомпонентной интерполяционной процедуре (3.2), а $\gamma=2$ соответствует применению разработанной тензорно-векторной форме интерполяции искомых величин (3.11) в трехпольном варианте МКЭ.

Входящая в (4.3) матрица $\left[P_R \right]$ определяет связь между столбцами кинематических узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат.

Осуществляя минимизацию (4.3) по кинематическим $\left\{ v_y^G \right\}^T$, $\left\{ \varepsilon N_y \right\}^T$ и силовым $\left\{ NM_y \right\}^T$ искомым неизвестным, можно записать систему матричных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \left\{ v_y^G \right\}^T} &= \left[P_R \right] \int_F \left[B \right] \left[C \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ \varepsilon N_y \right\} - \left[P_R \right] \int_F \left[A_\gamma \right] \left\{ P \right\} dF = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \left\{ \varepsilon N_y \right\}^T} &= \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right] \left[B \right] dF \left[P_R \right] \left\{ v_y^G \right\} - \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \left\{ NM_y \right\}^T} &= \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right]^{-1} \left[H_\gamma \right] dF \left\{ NM_y \right\} - \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF \left\{ \varepsilon N_y \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

или в более компактном виде

$$\begin{aligned} \left[S \right] \left\{ \varepsilon N_y \right\} - \left\{ f \right\} &= 0 \\ \left[S \right] \left\{ v_y^G \right\} - \left[G \right] \left\{ NM_y \right\} &= 0 \\ \left[W \right] \left\{ NM_y \right\} - \left[G \right] \left\{ \varepsilon N_y \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\text{где } \left[S \right] = \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right] \left[B \right] dF \left[P_R \right], \left[G \right] = \int_F \left[H_\gamma \right] \left[H_\gamma \right] dF, \left[W \right] = \int_F \left[H_\gamma \right] \left[C \right]^{-1} \left[H_\gamma \right] dF$$

Выражая из третьего и второго уравнений (4.5) столбцы $\left\{ \varepsilon N_y \right\}$ и $\left\{ NM_y \right\}$, можно получить следующие матричные зависимости

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon N_y \right\}_{24 \times 1} &= \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[W \right]_{24 \times 24} \left\{ NM_y \right\}_{24 \times 1}, \left\{ NM_y \right\}_{24 \times 1} = \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[S \right]_{24 \times 24 \times 36} \left\{ v_y^G \right\}_{36 \times 1} \\ \left\{ \varepsilon N_y \right\}_{24 \times 1} &= \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[W \right]_{24 \times 24} \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[S \right]_{24 \times 24 \times 36} \left\{ v_y^G \right\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Осуществляя подстановку (4.6) в первое уравнение (4.5), можно записать следующее матричное выражение

$$\left[K \right]_{36 \times 36} \left\{ v_y^G \right\}_{36 \times 1} = \left\{ f \right\}_{36 \times 1}, \quad (4.7)$$

где $\left[K \right] = \left[S \right]_{36 \times 24}^T \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[W \right]_{24 \times 24} \left[G \right]_{24 \times 24}^{-1} \left[S \right]_{24 \times 36}$ — искомая матрица жесткости размером 36×36 конечного элемента, используемого для построения дискретной модели оболочки.

Глобальная матрица жесткости всей исследуемой оболочки, представляющая собой матрицу системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), компонуется из отдельных матриц жесткостей $\left[K \right]$ посредством использования матрицы индексов [5].

Полученные в результате решения методом Гаусса глобальной СЛАУ столбцы $\left\{ v_y^G \right\}$ посредством (4.6), позволяют вычислять требуемые для анализа НДС оболочки столбцы продольных сил и изгибающих моментов $\left\{ NM_y \right\}$, а также столбцы деформаций и искривлений $\left\{ \varepsilon N_y \right\}$ в любой интересующей исследователя узловой точке рассчитываемой конструкции.

5. Вычислительные эксперименты

Эксперимент 1. В качестве тестовой задачи был выполнен расчет двухшарнирной арки эллиптического очертания (рис. 1), загруженной линейной нагрузкой интенсивности $q = 0.1 \text{ Н/см}$.

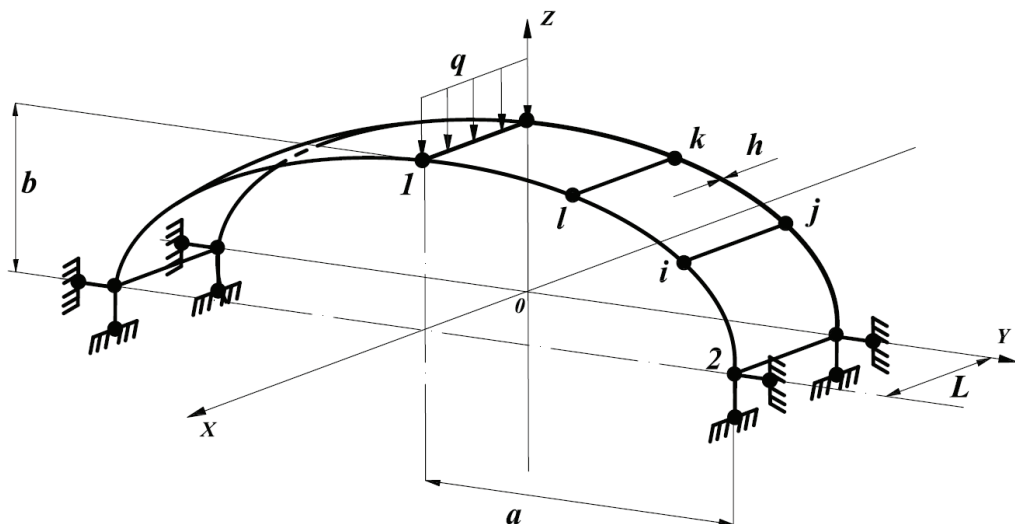


Рис. 1. Расчетная схема эллиптического кольца при шарнирном опирании

Таблица 1. Значения нормальных напряжений, изгибающих моментов и продольных сил в точке приложения нагрузки и в точке шарнирного опирания

Координаты точек, $y, m; \theta, \text{рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа};$ $M, \text{ Н}\cdot\text{см};$ $N, \text{ Н}$	Способ интерполяции										Значения $M^{22}, N^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{mid}$ из условия равновесия
		Общепринятый					Тензорно-векторный					
		Сетка узлов										
		121×2	151×2	181×2	211×2	241×2	271×2	301×2	331×2	361×2	391×2	
$y = 0.0; \theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	971.4	971.4	971.4	971.4	971.4	971.3	971.3	971.3	971.4	971.4	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	−977.75	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	−977.7	—
	M^{22}	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	−1.624	—
	σ_{xx}^{in}	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	—
	σ_{xx}^{out}	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	−293.3	—
$y = 0.5; \theta = \frac{\pi}{2}$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	0.319	−0.405	−0.703	−0.840	−0.840	0.949	−0.091	−0.524	−0.728	—	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	−2.151	−1.508	−1.247	−1.129	−1.129	−2.834	−1.849	−1.441	−1.250	—	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{mid}$	−0.974	−0.983	−0.988	−0.992	−0.992	−1.035	−1.013	−1.005	−1.002	−1.000	—
	M^{22}	−0.002	−0.001	−0.001	−0.0003	−0.0003	−0.003	−0.0016	−0.001	−0.0005	0.000	—
	N^{22}	−0.097	−0.098	−0.099	−0.099	−0.099	−0.1035	−0.101	−0.100	−0.100	−0.100	—
	σ_{xx}^{in}	1.825	0.612	0.157	−0.041	−0.041	2.135	0.993	0.475	0.214	—	—
	σ_{xx}^{out}	0.540	0.061	−0.110	−0.183	−0.183	0.664	0.258	0.067	−0.039	—	—

По условиям симметрии рассматривалась половина арки. Использовались следующие исходные данные: $L = 1$ см; $a = 50$ см; $b = 10$ см; $h = 0.1$ см; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте искомые величины аппроксимировались как составляющие скалярных полей; во втором варианте интерполяционные функции применялись к векторным и тензорным полям и только после координатных преобразований определялись аппроксимирующие выражения искомых величин. Результаты повариантных расчетов приведены в табл. 1, где в зависимости от степени сгущения сетки дискретизации даются значения нормальных напряжений на внутренней $\sigma_{\theta\theta}^{in}$, наружной $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ и срединной $\sigma_{\theta\theta}^{midl}$ поверхностях оболочки, а также моментов и продольных сил в точках арки. В правой колонке табл. 1 даются значения M_{ϕ}^{22} и N_{ϕ}^{22} , определенные соотношениями

$$N_{\phi}^{22} = -q \cdot L = -0.1 \cdot 1 = -0.100 \text{ Н}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{midl} = -N_{\phi}^{22} / (L \cdot h) = -0.100 \text{ Н} / (1 \text{ см} \cdot 0.1 \text{ см}) = -1.000 \text{ Н/см}^2$$

$$M_{\phi}^{22} = 0.000 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

Анализ данных табл. 1 показывает сходимость вычислительного процесса при использовании трехпольного конечного элемента и адекватное совпадение параметров НДС со значениями, полученными аналитическим путем. Сравнение повариантных значений нормальных напряжений, продольных сил и изгибающих моментов показывает их примерное совпадение.

При замене шарнирной опоры на пружинную (рис. 2) оболочка получает возможность смещаться в вертикальном направлении при неизменном НДС.

В табл. 2 приведены значения параметров НДС оболочки при различных смещениях арки по вертикали. При выполнении повариантных расчетов была использована сетка дискретизации 211×2 .

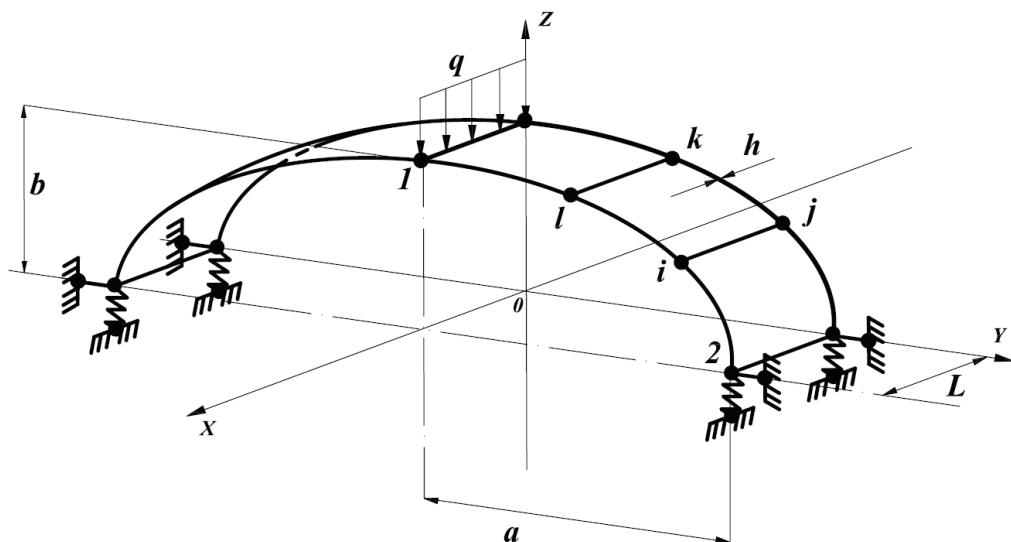


Рис. 2. Расчетная схема эллиптического кольца при пружинном опирании

Таблица 2. Значения нормальных напряжений, изгибающих моментов и продольных сил в точке приложения нагрузки и в точке пружинного опирания

Координаты точек, $y, m; \theta, \text{рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа};$ $M, 10^{-2} \text{ Н·см};$ $N, \text{ Н}$	Величина жесткого смещения, м						Значения $M^{22}, N^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{midl}$ из условия равновесия
		0.00	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	
Общепринятый способ интерполяции								
$y = 0.0;$ $\theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	971.4	971.2	971.1	970.6	969.8	969.0	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	—977.75	—977.6	—977.4	—976.9	—976.1	—975.3	—
	M^{22}	—1.624	—1.624	—1.624	—1.623	—1.622	—1.620	—
	σ_{xx}^{in}	291.4	291.4	291.35	291.25	291.1	290.9	—
	σ_{xx}^{out}	—293.3	—293.3	—293.2	—293.0	—292.7	—292.4	—
$y = 0.5;$ $\theta=\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	—0.840	—0.246	0.346	2.107	4.994	7.825	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	—1.129	—0.770	—0.414	0.648	2.390	4.098	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	—0.992	—1.046	—1.100	—1.261	—1.526	—1.785	—1.000
	M^{22}	—0.000	0.002	0.004	0.011	0.023	0.034	0.000
	N^{22}	—0.099	—0.105	—0.110	—0.126	—0.153	—0.178	—0.100
	σ_{xx}^{in}	—0.041	—124.2	—247.9	—615.9	—1219.5	—1811.3	—
	σ_{xx}^{out}	—0.183	—58.45	—116.5	—289.2	—572.4	—850.1	—

Таблица 2. Окончание

Координаты точек, $y, \text{ м}; \theta, \text{ рад.}$	$\sigma, 10^{-2} \text{ МПа};$ $M, 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{см};$ $N, \text{ Н}$	Величина жесткого смещения, м						Значения $M^{22}, N^{22}, \sigma_{\theta\theta}^{midl}$ из условия равновесия
		Тензорно-векторный способ интерполяции						
		0.00	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	
$y = 0.0;$ $\theta=0.0$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	971.4	971.4	971.4	971.4	971.3	971.3	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	—977.7	—977.7	—977.7	—977.7	—977.7	—977.7	—
	M^{22}	—1.624	—1.624	—1.624	—1.624	—1.624	—1.624	—
	σ_{xx}^{in}	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	291.4	—
	σ_{xx}^{out}	—293.3	—293.3	—293.3	—293.3	—293.3	—293.3	—
$y = 0.5;$ $\theta=\frac{\pi}{2}$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	—0.728	—0.728	—0.728	—0.728	—0.728	—0.728	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	—1.250	—1.250	—1.250	—1.250	—1.250	—1.250	—
	$\sigma_{\theta\theta}^{midl}$	—1.002	—1.002	—1.002	—1.002	—1.002	—1.002	—1.000
	M^{22}	—0.001	—0.001	—0.001	—0.001	—0.001	—0.001	0.000
	N^{22}	—0.100	—0.100	—0.100	—0.100	—0.100	—0.100	—0.100
	σ_{xx}^{in}	0.214	0.214	0.214	0.214	0.214	0.214	—
	σ_{xx}^{out}	—0.039	—0.039	—0.039	—0.039	—0.039	—0.039	—

Анализ данных табл. 2 показывает, что в первом варианте расчета параметры НДС оболочки в точке пружинного опирания претерпевают весьма значительные изменения, которые возрастают по мере увеличения смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Так, при смещении оболочки на величину 0.10 м напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{in}$ уже меняют свой знак, а σ_{xx} возрастают на несколько порядков. На основе этого можно отметить, что использование общепринятой в МКЭ интерполяции компонент вектора перемещения, компонент тензоров усилий и моментов, деформаций и искривлений не позволяет учитывать смещения оболочки как абсолютно твердого тела. И напротив, использование разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры в трехпольной формулировке МКЭ позволяет в полной мере учитывать смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Подтверждением этого факта является анализ значений параметров НДС оболочки, полученных во втором варианте расчета. Анализ данных, представленных в правой половине таблицы 2 показывает, что численные значения нормальных напряжений, продольных сил и изгибающих моментов остаются неизменными даже при существенной величине жестких смещений, что доказывает несомненные преимущества разработанного трехпольного конечного элемента с тензорно-векторной формой интерполяционной процедуры.

Эксперимент 2. Определено НДС эллиптической цилиндрической оболочки, имеющей первоначально шарнирное опирание по торцам (рис. 3).

Вдоль верхней образующей была приложена линейно распределенная нагрузка интенсивности $q = 10$ Н/см. Геометрические размеры оболочки были приняты равными: $L = 2.0$ м; толщина стенки $h = 0.015$ м; параметры эллипса поперечного сечения: $b = 1.0$ м; $c = 0.3$ м. Физические характеристики: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$.

Как и в эксперименте 1 определение НДС оболочки выполнялось при двух вариантах аппроксимации искомых величин. Результаты повариантных расчетов при шарнирном способе опирания оболочки приведены в табл. 3, в которой даются численные значения физических напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} на внутренней и наружной поверхностях оболочки в точках A, B, C и D (рис. 3) при различных размерах сетки дис-

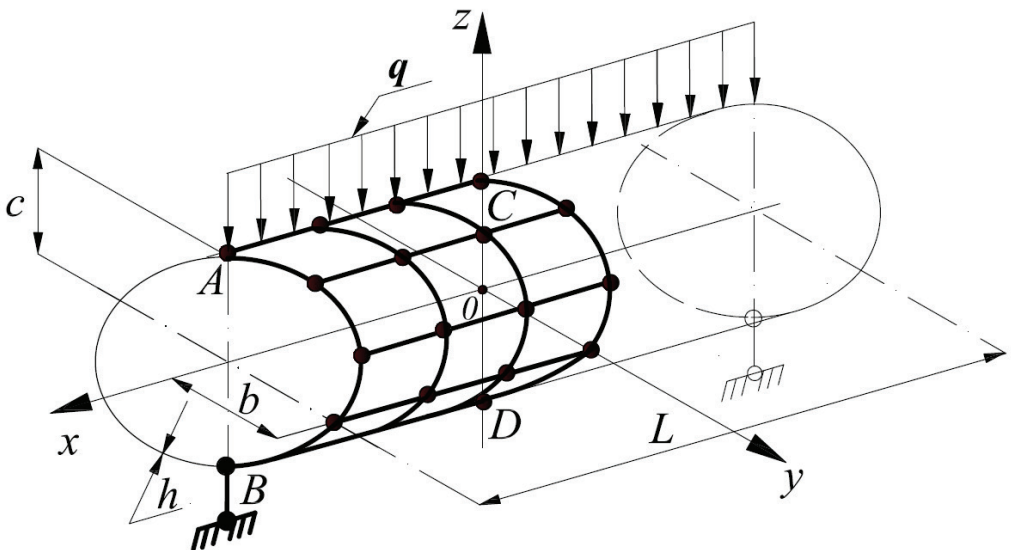


Рис. 3. Расчетная схема эллиптического цилиндра при шарнирном опирании

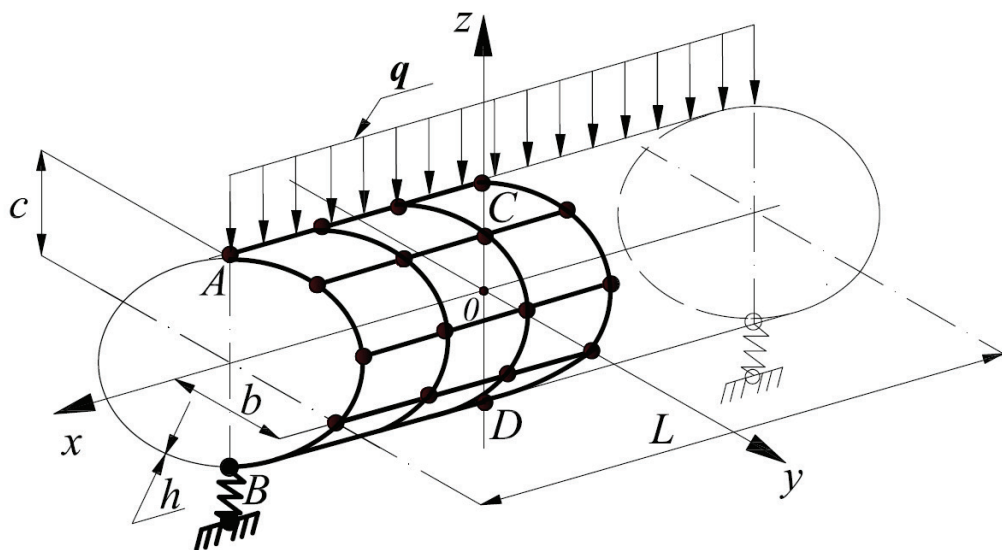


Рис. 4. Расчетная схема эллиптического цилиндра при пружинном опирании

кретизации $\frac{1}{4}$ части эллиптического цилиндра (была рассчитана только четвертая часть оболочки вследствие симметрии расчетной схемы).

Анализ данных, приведенных в табл. 3, показывает, что при использовании обоих вариантов аппроксимации искомых величин наблюдается сходимость вычислительного процесса, но во втором варианте аппроксимации искомых величин сходимость выше. Значения параметров НДС в обоих вариантах весьма близки между собой.

При замене шарнирных опор оболочки на пружинные при действии той же нагрузки она получает возможность смещаться по вертикали как твердое тело (рис. 4).

Результаты определения НДС оболочки при фиксированной сетке узлов 51×51 и различных смещениях оболочки как твердого тела приведены в табл. 4.

Как следует из анализа данных табл. 4, в первом варианте расчета наблюдается существенное изменение параметров НДС, причем фиксируемые изменения пропорциональны величине жесткого смещения оболочки в вертикальном направлении. Так, например, σ_{xx}^{in} в точке *B* уменьшились в 4.3 раза, а $\sigma_{\theta\theta}^{out}$ — в 3.2 раза.

Для наглядности полученных вычислений на рис. 5, 6 представлены повариантные графические зависимости изменения значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} в точке *B* в зависимости от величины жесткого вертикального смещения.

На графиках отчетливо прослеживается тенденция к увеличению погрешности вычисления напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} в первом варианте расчета по мере увеличения жесткого вертикального смещения оболочки. Во втором варианте расчета параметры НДС остаются неизменными, чему свидетельствуют строго горизонтальные графики $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} .

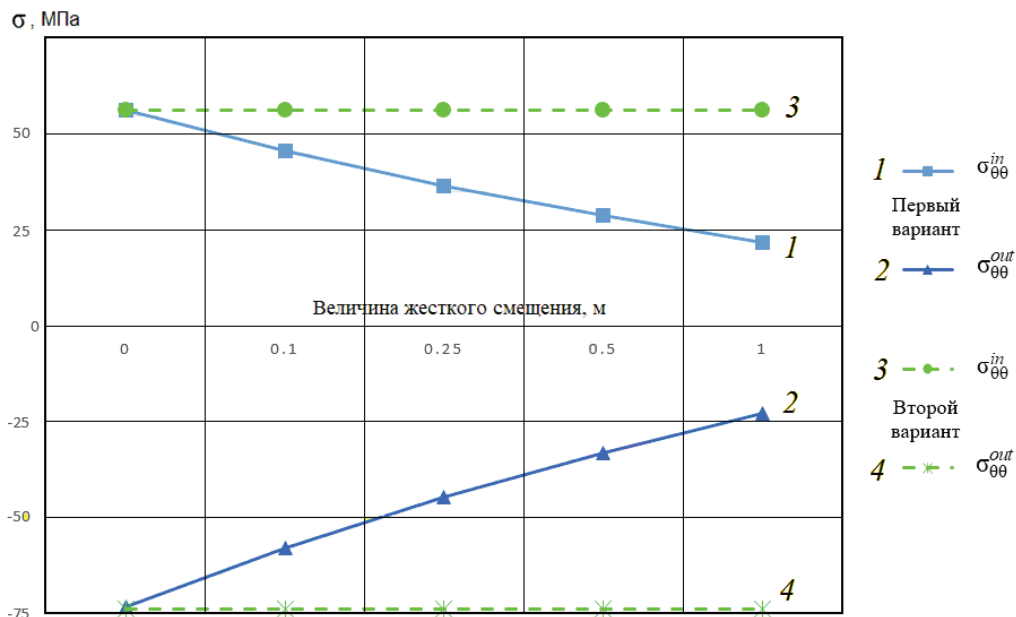
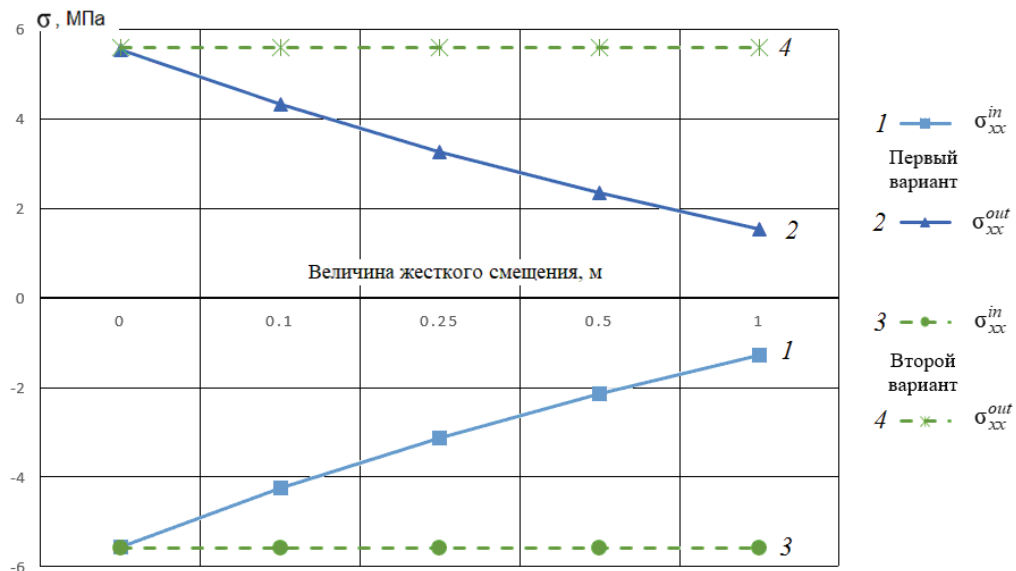
Из анализа данных табл. 4 видно, что во втором варианте расчета параметры НДС оставались абсолютно неизменными при любом значении величины вертикального жесткого смещения, что приводит к выводу о том, что разработанная тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры искомых величин в трехпольном варианте МКЭ позволяет полностью учитывать смещения исследуемых оболочек как абсолютно твердых тел.

Таблица 4. Значения нормальных напряжений в точках при пружинном опирании

Координаты точек, x, м; θ , рад.	Напряжения σ , МПа	Величина жесткого смещения в вертикальном направлении, м					
		0.00	0.10	0.25	0.50	1.0	
Первый вариант							
т. A, $x = 1.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{jn}$	12.63	10.31	8.312	6.568	5.035	
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-15.75	-14.41	-13.24	-12.23	-11.34	
т. B, $x = 1.00; \theta = \pi$	$\sigma_{\theta\theta}^{jn}$	56.33	45.80	36.72	28.79	21.83	
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-73.47	-58.06	-44.76	-33.16	-22.96	
	σ_{xx}^{jn}	-5.552	-4.251	-3.128	-2.149	-1.288	
	σ_{xx}^{out}	5.549	4.328	3.273	2.353	1.544	
т. C, $x = 0.00; \theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{jn}$	14.22	12.34	10.71	9.287	8.039	
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-14.38	-12.50	-10.87	-9.447	-8.198	
	σ_{xx}^{jn}	4.35	3.953	3.609	3.310	3.046	
	σ_{xx}^{out}	-4.177	-3.253	-2.454	-1.758	-1.146	
т. D, $x = 0.00; \theta = \pi$	σ_{xx}^{jn}	4.098	3.571	3.117	2.721	2.372	
	σ_{xx}^{out}	-0.663	-1.432	-2.095	-2.6740	-3.183	

Таблица 4. Окончание

Координаты точек, x, м; θ , рад.	Напряжения σ , МПа	Величина жесткого смещения в вертикальном направлении, м				
		0.00	0.10	0.25	0.50	1.0
Второй вариант						
т. A, x = 1.00; $\theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	12.66	12.66	12.66	12.66	12.66
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-15.76	-15.76	-15.76	-15.76	-15.76
т. B, x = 1.00; $\theta = \pi$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	56.33	56.33	56.33	56.33	56.33
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-74.08	-74.08	-74.08	-74.08	-74.08
	σ_{xx}^{in}	-5.584	-5.584	-5.584	-5.584	-5.584
	σ_{xx}^{out}	5.584	5.584	5.584	5.584	5.584
т. C, x = 0.00; $\theta = 0.00$	$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	4.358	4.358	4.358	4.358	4.358
	$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	-4.188	-4.188	-4.188	-4.188	-4.188
	σ_{xx}^{in}	14.24	14.24	14.24	14.24	14.24
	σ_{xx}^{out}	-14.40	-14.40	-14.40	-14.40	-14.40
т. D, x = 0.00; $\theta = \pi$	σ_{xx}^{in}	4.111	4.111	4.111	4.111	4.111
	σ_{xx}^{out}	-0.618	-0.618	-0.618	-0.618	-0.618

Рис. 5. Графики значений нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в точке BРис. 6. Графики значений нормальных напряжений σ_{xx} в точке B

Заключение

Разработан векторно-тензорный способ интерполяционной процедуры для трехпольного варианта МКЭ, позволяющий выразить компоненты силовых (продольных сил и изгибающих моментов) и кинематических (деформаций и искривлений срединной поверхности) искомых неизвестных через полный набор узловых силовых или кинематических параметров.

Выполненные численные эксперименты по расчету оболочек с эллиптическим поперечным сечением, имеющих возможность под действием заданной нагрузки смещаться как абсолютно твердые тела, показали, что применение разработанной тензорно-векторной формы интерполяционной процедуры позволяет корректным образом учитывать жесткие смещения оболочек и вычислять искомые параметры НДС без какой-либо погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилев В.В. Теория тонких оболочек. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.
2. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. Строительная механика ракет. М.: Высшая школа, 1984. 391 с.
3. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С. и др. Основы строительной механики ракет. М.: Высшая школа, 1969. 494 с.
4. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Булычев Л.И. и др. Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.
5. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
6. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зннатне, 1988. 284 с.
7. Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
8. Schöllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells // Numer. Methods in Engng. 2021. № 122(5). P. 1217–1238.
9. Yeongbin Ko, Phill-Seung Lee, Klaus-Jürgen Bathe. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element // Comput.&Struct. 2017. V. 192. P. 34–49.
10. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. of Math. 2021. № 42(9). P. 2263–2271.
11. Nguyen Nhung, Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. // ZAMP. Z. Angew. Math.&Phys. 2016. V. 67. № 9. P. 35/1–35/24.
12. Gao L., Wang C., Liu Z. et al. Theoretical aspects of selecting repeated unit cell model in micromechanical analysis using displacement-based finite element method // Chinese J. of Aeronautics. 2017. V. 30. № 4. P. 1417–1426.
13. Jin He, Jiaxi Zhao, Chenbo Yin. Constitutive equations and stiffness related properties for elastic and hyperelastic solid surfaces: Theories and finite element implementations // Int. J. of Solids & Struct. 2020. V. 202. № 1. P. 660–671.
14. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Клочков Ю.В. и др. Конечно-элементный алгоритм расчета эллипсоидальной оболочки при учете смещения как жесткого целого // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 251–262.
15. Бакулин В.Н. Эффективная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных оболочек вращения цилиндрической формы // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 148–152.
16. Бакулин В.Н. Модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных оболочек вращения двойной кривизны // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 112–122.
17. Бакулин В.Н. Эффективная модель несущих слоев для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических нерегулярных оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 82–92.
18. Бакулин В.Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // ПММ. 2021. Т. 85. № 1. С. 89–105.
19. Бакулин В.Н. Блочно-послойный подход для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 383–395.

20. Бакулин В.Н. Модель для анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 1. С. 122–132.
21. Бакулин В.Н. Уточненная модель послойного анализа трехслойных нерегулярных конических оболочек // Докл. РАН. 2017. Т. 472. № 3. С. 272–277.
22. Бакулин В.Н. Тестирование конечно-элементной модели, предназначенной для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых нерегулярных оболочек // Матем. моделир. 2009. Т. 21. № 8. С. 121–128.
23. Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S. et al. Mixed finite-element method in V. I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Mag. of Civil Engng. 2019. № 5(89). P. 79–93.
24. Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A. et al. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element // Mag. of Civil Engng. 2023. № 4(120). P. 12003.
25. Клочков Ю.В., Пшеничкина В.А., Николаев А.П. и др. Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения // Строит. мех. инж. констр. и сооруж. 2023. Т. 19. № 1. С. 64–72.
26. Magisano D., Liang K., Garcea G. et al. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // Int. J. for Numer. Meth. in Engng. 2018. № 113(4). P. 634–655.
27. Antonietti P.F., Beirao da Veiga L., Scacchi S. et al. A C1 Virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes // SIAM J. Numer. Anal. 2016. V. 54. № 1. P. 34–56.
28. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. et al. A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2016. V. 306. P. 216–251.
29. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шугабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
30. Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
31. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A. et al. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // Lobachevskii J. of Math. 2020. № 41 (3). P. 373–381.
32. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Клочков Ю.В. и др. Учет смещения как твердого тела в алгоритме МКЭ при расчете оболочек вращения // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 23–38.

Three-Field FEM in Shell Calculations with Options for Interpolation of the Sought Values

Yu. V. Klochkov^{a, #}, A. P. Nikolaev^{a, ##}, V. A. Pshenichkina^{b, ###}, O. V. Vakhnina^{a, ####},
A. S. Andreev^{a, #####}, M. Yu. Klochkov^{b, #####}

^a*Volgograd State Agricultural University, Volgograd, Russia*

^b*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

e-mail: klotchkov@bk.ru[#], anpetr40@yandex.ru^{##}, vap_hm@list.ru^{###},
ovahnina@bk.ru^{####}, aandreev.07.1988@gmail.com^{#####}, m.klo4koff@yandex.ru^{#####}

A three-field finite element of a quadrangular shape of a thin shell with nodal unknowns in the form of: displacements and their first derivatives has been developed; deformations and curvatures of the median surface; forces and moments of the middle surface.

The approximation of the required quantities was carried out in two versions. In the first version, the components of the displacement vector and the components of the strain and curvature tensors, as well as the force and moment tensors, were approximated using traditional shape functions as components of scalar fields. In the second version, tensor quantities were

approximated through the corresponding tensors of nodal points, and only after coordinate transformations based on the relations of the used curvilinear coordinate system were approximating expressions for the components of the corresponding tensors obtained.

Specific examples show the effectiveness of using the second version of approximating expressions in shell calculations.

Keywords: displacement vector, strain tensor, stress tensor, force tensor, curvature tensor, three-field finite element, tensor-vector interpolation

REFERENCES

1. *Novozhilov V.V.* Theory of Thin Shells. St. Petersburg: St. Petersburg Univ. Pub. House, 2010. 378 p. (in Russian)
2. *Balabukh L.I., Alfutov N.A., Usyukin V.I.* Structural Mechanics of Rockets. Moscow: Higher School, 1984. 391 p. (in Russian)
3. *Balabukh L.I., Kolesnikov K.S., Zarubin V.S. et al.* Fundamentals of Structural Mechanics of Rockets. Moscow: Higher School, 1969. 494 p. (in Russian)
4. *Obratsov I.F., Vasiliev V.V., Bulychev L.I. et al.* Structural mechanics of aircraft. Moscow: Mechanical Engineering, 1986. 536 p. (in Russian)
5. *Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya.* Finite Element Method in Calculations of Ship Structures. Leningrad: Shipbuilding, 1974. 342 p. (in Russian)
6. *Rickards R.B.* Finite Element Method in the Theory of Shells and Plates. Riga: Zinatne, 1988. 284 p. (in Russian)
7. *Sekulovich M.* Finite Element Method. Moscow: Stroyizdat, 1993. 664 p. (in Russian)
8. *Schöllhammer D., Fries T.P.* A Higher-order trace finite element method for shells // Numerical Methods in Engineering, 2021, vol. 122, no. 5. P. 1217–1238.
9. *Yeongbin Ko, Phill-Seung Lee, Klaus-Jürgen Bathe.* A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element // Computers & Structures, 2017, vol. 192, pp. 34–49.
10. *Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M.* Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. of Mathematics, 2021, vol. 42, no 9, pp. 2263–2271.
11. *Nguyen Nhung, Waas Anthony.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // ZAMP. Z. Angew. Math. and Phys, 2016, vol. 67, no. 9, pp. 35/1–35/24.
12. *Gao L., Wang C., Liu Z. et al.* Theoretical aspects of selecting repeated unit cell model in micromechanical analysis using displacement-based finite element method // Chinese Journal of Aeronautics, 2017, vol. 30, no. 4, pp. 1417–1426.
13. *Jin He, Jiaxi Zhao, Chenbo Yin.* Constitutive equations and stiffness related properties for elastic and hyperelastic solid surfaces: Theories and finite element implementations // International J. of Solids & Structures, 2020, vol. 202, no. 1, pp. 660–671.
14. *Dzhabrailov A.Sh., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. et al.* Finite element algorithm for calculating an ellipsoidal shell taking into account the displacement as a rigid whole // Appl. Math. & Mech., 2022, vol. 86, no. 2, pp. 251–262.
15. *Bakulin V.N.* An effective model for layer-by-layer analysis of three-layer irregular shells of rotation of a cylindrical shape // Reports of the Academy of Sci., 2018, vol. 478, no. 2, pp. 148–152.
16. *Bakulin V.N.* Model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular shells of rotation of double curvature // Izv. RAS. MTT, 2020, no. 2, pp. 112–122.
17. *Bakulin V.N.* An effective model of load-bearing layers for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer cylindrical irregular shells of revolution // Izv. RAS. MTT, 2020, no. 3, pp. 82–92.
18. *Bakulin V.N.* Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of irregular three-layer shells of rotation of non-zero Gaussian curvature // Appl. Math. & Mech., 2021, vol. 85, no. 1, pp. 89–105.
19. *Bakulin V.N.* Block-layer approach for analyzing the stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells of revolution // Appl. Math. & Mech., 2021, vol. 85, no. 3, pp. 383–395.
20. *Bakulin V.N.* Model for analyzing the stress-strain state of three-layer cylindrical shells with rectangular cutouts // Izv. RAS. MTT, 2022, no. 1, pp. 122–132.

21. *Bakulin V.N.* Refined model of layer-by-layer analysis of three-layer irregular conical shells // Reports of the Academy of Sciences, 2017, vol. 472, no. 3, pp. 272–277.
22. *Bakulin V.N.* Testing a finite element model designed to study the stress-strain state of layered irregular shells // Math. Modeling, 2009, vol. 21, no. 8, pp. 121–128.
23. *Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S. et al.* Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Magazine of Civil Engineering, 2019, vol. 5, no. 89, pp. 79–93.
24. *Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A. et al.* Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element // Magazine of Civil Eng., 2023, vol. 4, no. 120, pp. 12003.
25. *Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P. et al.* Quadrangular finite element in a mixed FEM formulation for the calculation of thin shells of rotation // Structural Mechanics of Engineering Structures and Structures, 2023, vol. 19, no. 1, pp. 64–72.
26. *Magisano D., Liang K., Garcea G. et al.* An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International J. for Numerical Methods in Engineering, 2018, vol. 113, no. 4, pp. 634–655.
27. *Antonietti P.F., Beirao da Veiga L., Scacchi S. et al.* A C1 Virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes // SIAM J. Numer. Anal, 2016, vol. 54, no. 1, pp. 34–56.
28. *Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. et al.* A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2016, vol. 306, pp. 216–251.
29. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.* Finite Element Method in the Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures. Moscow: Fizmatlit, 2006. 392 p. (in Russian)
30. *Skopinsky V.N.* Stresses in Intersecting Shells. Moscow: Fizmatlit, 2008. 400 p. (in Russian)
31. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A. et al.* The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 373–381.
32. *Dzhabrailov A.Sh., Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V. et al.* Taking into account displacement as a rigid body in the FEM algorithm when calculating shells of revolution // Izv. RAS. MTT, 2023, no. 6, pp. 23–38.