

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 88, вып. 2



Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 88. Iss. 2

EDITORIAL BOARD

I.G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V.G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Łódź, Poland),

N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Russia),

V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),

Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,

Technische Universität München, Munich, Germany),

V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.E. Udvardi (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian,
I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов — отв. секретарь

Е.В. Есина — зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала «Прикладная математика и механика» в каталоге Роспечати 39388

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov — executive secretary

E.V. Esina — head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 39388

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Юрий Николаевич Работнов (к 110-летию со дня рождения)	169
Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферическим включением <i>А.А. Буров, В.И. Никонов, Е.С. Шалимова</i>	172
О первом интеграле в классической задаче внешней баллистики <i>Б.Я. Локишин, В.А. Самсонов</i>	190
Развитие взглядов Ю.Н. Работнова на критерии прочности композитов <i>А.Н. Полилов</i>	198
Задача трехточечного изгиба упругой балки из пористого металла <i>Б.Д. Аннин, В.М. Садовский, О.В. Садовская</i>	217
Эффект перераспределения напряжений в толстостенной сфере из сплава с памятью формы при прямом фазовом превращении под действием постоянного давления <i>А.А. Мовчан, А.В. Шарунов</i>	228
Сжатие и сдвиг идеально-пластического клина шероховатым штампом (модель фрикционного контакта) <i>А.Н. Сахаров, А.Ю. Рябинина</i>	245
Критерии разрушения волокон и матрицы при статическом нагружении однонаправленных полимерных композитов <i>А.И. Олейников</i>	255
Развитие концепции поврежденности в механике материалов <i>Р.Р. Саитова, Ф.М. Бородич, А.Р. Арутюнян</i>	271
Рассеяние акустических волн неоднородной упругой цилиндрической оболочкой конечной длины в полупространстве <i>Д.Ю. Ефимов</i>	299
Большие упруго-пластические деформации кругового сдвига в изотропно упрочняющемся материале <i>Г.М. Севастьянов, А.С. Бегун, А.А. Буренин</i>	313

CONTENTS

Rabotnov Yu.N. (on 110-th birthday)	169
On the Motion of a Point Particle on a Homogeneous Gravitating Ball with a Spherical Inclusion <i>A. A. Burov, V. I. Nikonov, E. S. Shalimova</i>	172
About the First Integral in the Classical Problem of External Ballistics <i>B. Ya. Lokshin, V. A. Samsonov</i>	190
Development of the Looks of Yu.N. Rabotnov on Strength Criteria of Composites <i>A. N. Polilov</i>	198
Problem of Three-Point Bending of an Elastic Beam from Porous Metal <i>B. D. Annin, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya</i>	217
The Effect of Stress Redistribution in a Thick-Walled Sphere Made of Shape Memory Alloy at Direct Phase Transformation under Constant Pressure <i>A. A. Movchan, A. V. Sharunov</i>	228
Compression and Shear of an Ideal-plastic Wedge with a Rough Stamp (Frictional Contact Model) <i>A. N. Sakharov, A. U. Riabinina</i>	245
Fracture Criteria for Matrix and Fibers in Unidirectional Polymeric Composites at Static Loadings <i>A. I. Oleinikov</i>	255
Development of the Damage Concept in Mechanics of Materials <i>R. R. Saitova, F. M. Borodich, A. R. Arutyunyan</i>	271
Scattering Of Acoustic Waves By An Inhomogeneous Elastic Cylindrical Shell Of Finite Length In A Half-Space <i>D. Yu. Efimov</i>	299
Finite-Strain Elastic-Plastic Circular Shear in Materials with Isotropic Hardening <i>G. M. Sevastyanov, A. S. Begun, A. A. Burenin</i>	313

АКАДЕМИК Ю.Н. РАБОТНОВ**К 110-летию со дня рождения**

Юрий Николаевич Работнов – выдающийся ученый в области механики деформируемых тел, создавший новые направления почти во всех разделах этой науки: в теориях упругости, вязкоупругости, ползучести, пластичности, разрушения и композитов.

Юрий Николаевич Работнов родился 24 февраля 1914 г. в Нижнем Новгороде. В 1930 г., в возрасте 16 лет, он поступил в Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. После окончания университета, с 1935 по 1941 гг., он работал в должности преподавателя в МГУ, а с 1943 по 1947 гг. в должности профессора Московского энергетического института.

В 1943–1958 гг. Ю.Н. Работнов работал в МГУ им. М.В. Ломоносова, сначала в должности доцента, а с 1947 г. в должности профессора кафедры теории упругости. В 1947–1958 гг. он работал заведующим лаборатории прочности в Институте механики АН СССР (сейчас Институт проблем механики РАН). В 1952 г. Работнов был назначен деканом механико-математического факультета МГУ, который возглавлял в 1952–1954 гг. В 1953 г. Ю.Н. Работнов основал кафедру теории пластичности на механико-математическом факультете Московского университета, которую возглавлял до последних дней жизни. Он принимал участие в проектировании и создании Института механики МГУ. В 1953 г. Ю.Н. Работнов был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР и в 1958 г. – действительным членом Академии наук СССР. В 1956 г., когда создавался Национальный комитет по теоретической и прикладной механике СССР, был членом его учредительного совета.

С 1958 по 1964 гг. его жизнь была связана с Новосибирским научным центром Сибирского отделения АН СССР, где он работал заместителем директора Новосибирского научного центра, руководителем лаборатории в Институте гидродинамики и заведующим кафедрой теории упругости и пластичности Новосибирского государственного университета. Он был автором многих важных работ по теории упругости, ползучести, пластичности и организовал в Новосибирске экспериментальные и теоретические исследования по этим научным направлениям, которые были успешно продолжены его учениками.

В 1965 г. Ю.Н. Работнов вернулся в Москву и руководил кафедрой теории пластичности механико-математического факультета МГУ и исследовательской лабораторией прочности конструкционных материалов в Институте машиноведения АН СССР, которая впоследствии по его инициативе переименовывалась в лабораторию механики разрушения, а затем в лабораторию механики композитных материалов, что было связано с научными проблемами, которые казались ему наиболее интересными на каждом этапе развития науки. Под его руководством в лаборатории была проведена программа экспериментальных исследований характеристик разрушения сплавов при криогенных температурах (в то время он возглавлял Национальный комитет по хрупкой прочности при низких температурах), были исследованы вязкоупругие свойства композитных материалов, сформулирована феноменологическая наследственная теория ползучести, проведены многие другие экспериментальные и теоретические исследования.

Ю.Н. Работнов — один из создателей отечественной теории ползучести металлов. Разработал общую феноменологию ползучести, позволяющую описать как процессы длительного разрушения, так и мгновенную нелинейную деформацию. Общую теорию дополнил методами решения задач и проверил экспериментально. В теории упругости разработал эффективную при практическом использовании алгебру дробно-экспоненциальных операторов, которые хорошо описывают реальные свойства многих сред, что предопределило дальнейшие успехи в изучении деформирования полимерных и композитных материалов. Получил важные результаты о деформировании упругопластических композитных структур и влиянии концентрации напряжений на разрушение композитов. Под его руководством выполнены обширные исследования статистической природы разрушения углеродных волокон и установлены принципы реализации их прочности в конструкционных материалах; разработаны новые критерии прочности композитов, обусловленные особым направленным характером разрушения этих материалов; получены фундаментальные результаты в теории определяющих уравнений. Работнов указал наиболее перспективные направления механики деформируемого твердого тела (проблема разрушения крупногабаритных конструкций, механика докритического развития трещин).

Во время работы на кафедре теории пластичности им подготовлены и прочитаны оригинальные курсы лекций по различным дисциплинам, такие как механика сплошных сред, механика разрушения, теория вязко-упругости, ползучесть конструкционных материалов, механика повреждений, динамика упругопластических тел, теория упругости и теория пластичности. В этот период многие из его коллег защитили докторские диссертации, научным руководителем которых он был. Он приглашался много раз в качестве лектора в университеты разных стран, в частности Китая, Уругвая, Италии, Франции, Японии, США.

Ю.Н. Работнов возглавлял редколлегии нескольких академических журналов, Научно-технический совет по конструкционной прочности. Многие годы он входил в состав редколлегии журнала “Прикладная математика и механика”. Ю.Н. Работнов был одним из организаторов (вице-президентом) Международного конгресса

по разрушению в 1961 г., впоследствии он был удостоен звания Почетного члена Международных конгрессов по разрушению. Признание его научных результатов было чрезвычайно велико и в нашей стране, и во всем мире.

Ю.Н. Работнову была присуща высокая внутренняя культура и в жизни, и в науке, он был по-настоящему интеллигентным человеком и выдающимся ученым, очень заботился о молодежи, которая только вступала на путь науки. Двери дома академика Юрия Николаевича Работнова всегда были открыты для коллег, друзей, учеников, которые были желанными гостями.

Светлый образ Юрия Николаевича Работнова, выдающегося ученого и педагога, человека высокой интеллигентности, культуры и личного обаяния, живет в сердцах тех, кому посчастливилось работать и общаться с ним, а его труды продолжают воспитывать молодых ученых-механиков нашей страны.

УДК 531.36

**ДВИЖЕНИЕ МАССИВНОЙ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ
ОДНОРОДНОГО ШАРА СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**© 2024 г. А. А. Буров^{1,*}, В. И. Никонов^{1,**}, Е. С. Шалимова^{2,***}¹ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия²МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru,

**e-mail: nikon_y@list.ru,

***e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.10.2023г.

После доработки 02.03.2024 г.

Принята к публикации 10.04.2024 г.

Рассматривается задача о движении частицы по поверхности гравитирующего тела, представляющего собой однородный шар со сферическим включением, плотность которого может отличаться от плотности шара. Предполагается, что тело совершает равномерное вращение вокруг своей оси симметрии, а движение частицы происходит под действием силы притяжения со стороны тела, а также нормальной и касательной реакции со стороны поверхности тела.

Изучаются условия существования, устойчивости и бифуркаций относительных равновесий частицы на поверхности тела в зависимости от геометрических и динамических параметров задачи. Полученные как аналитически, так и численно результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм.

Ключевые слова: динамика на поверхностях небесных тел, небесные тела с массивными включениями, относительные равновесия, сухое трение, движение частицы в нецентральной гравитационном поле, обобщение гравитирующей гантели, масконы

DOI: 10.31857/S0032823524020016 EDN: XVNMMG

1. Введение. При исследовании движения по поверхности достаточно быстро вращающегося малого небесного тела приходится принимать во внимание не только сложную геометрию этой поверхности и неоднородность поля притяжения, но и сопоставимость по величине силы притяжения с центробежной и кориолисовой силами (см., например, [1–5]). При этом особое внимание уделяют тому обстоятельству, что на поверхности тела могут существовать области, в которых реакция поверхности не компенсирует силу притяжения и центробежную силу и потому не удерживает незакрепленную частицу на самой этой поверхности ([6]).

При наличии сухого трения относительные равновесия на поверхности тела, вообще говоря, неизолированы. Области, заполненные относительными равновесиями, зависят от параметров. При их изучении применяют общие методы исследования существования, устойчивости и бифуркаций, развитые в работах [7–12]. Такие методы опробованы ранее на ряде механических систем [13–21].

В настоящей работе рассматривается тело в виде однородного шара со сферическим включением, плотность которого отличается от плотности шара и центр которого, вообще говоря, не совпадает с центром шара. Наличием массивного включения обусловлена нецентральность порождаемого телом поля притяжения. Тело с таким распределением масс динамически симметрично: оно может как равномерно вращаться вокруг одной из своих центральных осей инерции, так и совершать прецессионное движение. В работе предполагается, что тело вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Ставится и изучается вопрос о том, останется ли материальная точка, расположенная на поверхности шара, в покое под действием силы притяжения, нормальной реакции, силы сухого трения и центробежной силы.

Исследуемое в работе тело – особенный случай гантелеобразного тела, представляющего собой удобную модель для изучения движения частиц в поле притяжения тел с нерегулярным распределением масс. Различные свойства таких движений без контакта с поверхностью тела, в частности, точки либрации, исследовались в [22–27].

Заметим, что влияние вкраплений массы в небесное тело, известных как *масконы*, на траектории космических аппаратов и на коэффициенты в разложении потенциала притяжения хорошо известно. Возникающие динамические эффекты были предметом тщательного изучения (см., напр., [28–30]).

2. Постановка задачи и основные обозначения. Прежде всего заметим, что рассматриваемая задача по постановке близка к задачам, рассмотренным авторами ранее в [17] (см. также [18]). Поэтому обозначения, а также изложение, по крайней мере на уровне основополагающих уравнений, остаются близкими к обозначениям и стилю повествования в упомянутых работах.

Рассмотрим твердое тело \mathcal{A} , получающееся изъятием содержимого сферической полости \mathcal{C} с центром C радиуса r_C с поверхностью $\partial\mathcal{C}$ из однородного шара \mathcal{B} с центром B радиуса r_B с поверхностью $\partial\mathcal{B}$ и последующим заполнением этой полости однородной средой, плотность которой ρ_C в общем случае отличается от плотности шара \mathcal{B} , равной ρ_B . Предположим, что тело \mathcal{A} совершает вращение вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω , а по его поверхности $\partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{B} \cup \partial\mathcal{C}$ движется частичка P . Ее движение осуществляется под действием силы притяжения со стороны тела \mathcal{A} , а также реакции со стороны поверхности тела, имеющей нормальную составляющую, препятствующую проникновению под поверхность тела, и касательную составляющую, представленную силой сухого трения. В дальнейшем предполагается, что частичка пренебрежимо мала по сравнению с телом и не оказывает влияния на его движение.

Введем вращающуюся вместе с телом правую систему отсчета $Bx_1x_2x_3$ с началом в точке B так, что ось Bx_3 совпадает с осью вращения. В первую очередь нас интересуют относительные равновесия частички P на поверхности вращающегося тела, и поскольку тело динамически и геометрически симметрично, то достаточно изучить положения относительного равновесия в любом из осевых сечений тела, например, в сечении плоскостью Bx_3x_1 .

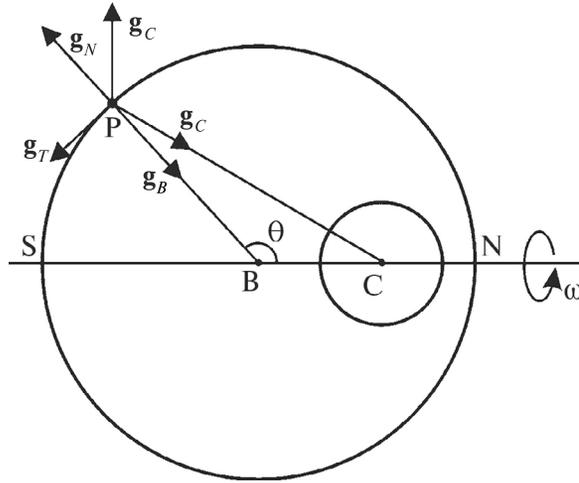


Рис. 1

Положение частички в этой плоскости будем задавать углом θ (рис. 1). Тогда, если $|BC| = d$, то $d + r_C \leq r_B$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{BP} &= (r_B \sin \theta, 0, r_B \cos \theta)^T, \quad \mathbf{CP} = (r_B \sin \theta, 0, r_B \cos \theta - d)^T \\ |\mathbf{CP}| &= \left((r_B \sin \theta)^2 + (r_B \cos \theta - d)^2 \right)^{1/2} = \left(r_B^2 - 2r_B d \cos \theta + d^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Единичные векторы внешней нормали и касательной к поверхности, расположенные в рассматриваемой плоскости задаются как

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T, \quad \boldsymbol{\tau} = (-\cos \theta, 0, \sin \theta)^T$$

соответственно.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда точка P располагается на поверхности ∂B – внешней поверхности тела. Точки этой поверхности, наименее и наиболее удаленные от сферического включения (СВ), назовем для удобства полюсами и обозначим N и S (рис. 1). Им отвечают углы $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно. Также для удобства части тела, прилегающие к полюсам N и S соответственно, будем называть северным и южным полушариями. Будем считать, что центр СВ располагается в северном полушарии. Тогда в возможном случае касания СВ и внешней поверхности тела такое касание происходит в полюсе N .

Пусть $M = 4\pi r_B^3 \rho_B / 3$ – масса всего шара B без изъятой полости, $m = 4\pi(\rho_C - \rho_B)r_C^3 / 3$ – “дополнительная масса включения”, которая может быть отрицательной, если плотность включения меньше плотности шара B . Напряженность силы притяжения (“ускорение силы тяжести”, зависящее от точки, в котором оно определяется) со стороны тела A записывается как

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{g}_B + \mathbf{g}_C$$

$$\mathbf{g}_B = -g_B (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T, \quad \mathbf{g}_C = -g_C \frac{r_C^2}{|\mathbf{CP}|^3} (r_B \sin \theta, 0, r_B \cos \theta - d)^T,$$

где напряженность g_B порождается шаром без включения, а напряженность g_C – “дополнительной массой” включения. При этом

$$g_B = \frac{MG}{r_B^2}, g_C = \frac{mG}{r_C^2} \quad (2.2)$$

Напряженность центробежной силы, а также нормальная и касательная составляющие реакции связи, отнесенные к массе точки, записываются как

$$\mathbf{g}_c = \omega^2 (r_B \sin \theta, 0, 0)^T, \quad \mathbf{g}_N = g_N (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T, \quad \mathbf{g}_T = g_T (-\cos \theta, 0, \sin \theta)^T$$

соответственно.

Уравнения относительного равновесия точки P на сфере ∂B под действием приложенных сил в проекциях на нормаль и на касательную в точке P , соответственно, имеют вид

$$0 = g_N - g_B - g_C \frac{r_C^2}{|PC|^3} (r_B - d \cos \theta) + \omega^2 r_B \sin^2 \theta \quad (2.3)$$

$$0 = g_T + g_C \frac{r_C^2}{|PC|^3} d \sin \theta - \omega^2 r_B \sin \theta \cos \theta \quad (2.4)$$

Условие существования относительных равновесий, в данном случае имеющее вид

$$|g_T| \leq \mu |g_N|,$$

после подстановки выражений для g_N и g_T из (2.3) и (2.4) и преобразований записывается как

$$\begin{aligned} & \left| -g_C r_C^2 d \sin \theta + \omega^2 r_B |PC|^3 \sin \theta \cos \theta \right| \leq \\ & \leq \mu \left((g_B - \omega^2 r_B \sin^2 \theta) |PC|^3 + g_C r_C^2 (r_B - d \cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь и далее μ – коэффициент трения, α : $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ – угол трения.

После подстановки в (2.5) соотношений (2.1), (2.2), введения обозначений

$$\Omega^2 = \omega^2 \left(\frac{MG}{r_B^3} \right)^{-1}, \quad K = \frac{m}{M}$$

и преобразований, это неравенство может быть представлено в виде

$$|f_T| \leq \mu |f_N| \quad (2.6)$$

$$f_T = \sin \theta \times \left(-K \times r_B^2 \times d + \Omega^2 \times (r_B^2 + d^2 - 2dr_B \cos \theta)^{3/2} \cos \theta \right) \quad (2.7)$$

$$f_N = (r_B^2 + d^2 - 2dr_B \cos \theta)^{3/2} \times (1 - \Omega^2 \sin^2 \theta) + K \times r_B^2 (r_B - d \cos \theta) \quad (2.8)$$

Таким образом, при $K > 0$ плотность СВ больше плотности шара, при $K = 0$ шар однородный (случай, изученный в [17]), а при $-1 < K < 0$ плотность СВ меньше плотности шара. Наличие в теле сферической полости также соответствует различным отрицательным значениям K , в зависимости от ее радиуса r_C . Случай $K = -1$ – вырожденный, он соответствует изъятию всей массы шара (см. [18, 19, 27]).

Замечание 1. Можно предложить и более точную оценку величины параметра K . На самом деле, так как $r_C \leq r_B - d$, то

$$K = \frac{(\rho_C - \rho_B)r_C^3}{\rho_B r_B^3} \geq \frac{(-\rho_B)r_C^3}{\rho_B r_B^3} = -\frac{r_C^3}{r_B^3} \geq -\frac{(r_B - d)^3}{r_B^3} = K_* \quad (2.9)$$

Замечание 2. Неравенство (2.6), вообще говоря, отличается от аналогичного неравенства (2.3) из работы [18] за счет наличия дополнительного параметра K . При $K = K_*$ полость пуста, и имеет место постановка задачи, изучавшаяся в [18].

Знак функции f_N определяет направление нормальной реакции: если выполнено условие

$$f_N > 0, \quad (2.10)$$

то нормальная реакция направлена вовне тела A . Иными словами, физически осмысленное относительное равновесие существует, если помимо неравенства (2.6) выполняется неравенство (2.10). В дальнейшем считается, что размерные единицы выбраны таким образом, что $r_B = 1$.

3. Равновесия на поверхности неподвижного тела. Решение неравенства (2.6) зависит от параметров $\mu > 0$, $\Omega \geq 0$, $0 \leq d \leq 1$, а также от параметра K , стесненного в силу неравенства (2.9) соотношением $K \geq -(1-d)^3 = K_*$.

Изучение зависимостей областей, заполненных равновесиями, от перечисленных параметров начнем со случая, когда тело не вращается, т.е. $\Omega = 0$.

Прежде всего, заметим, что на равновесиях $f_N > 0$, так как сила притяжения в точках поверхности всегда направлена внутрь шара. Тогда условие существования относительных равновесий принимает вид:

$$|K \cdot d \cdot \sin \theta| \leq \mu \left((1 + d^2 - 2d \cos \theta)^{3/2} + K(1 - d \cos \theta) \right) \quad (3.1)$$

В этом случае множество равновесий зависит от параметров μ , d и K .

3.1. Зависимость от μ . Сначала изучим влияние на эти области коэффициента сухого трения μ . Для этого рассмотрим функцию

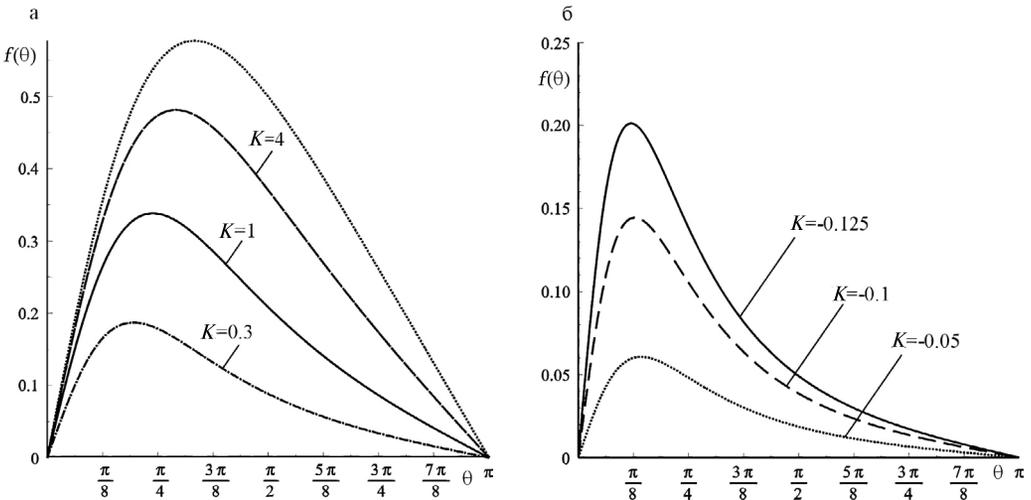


Рис. 2

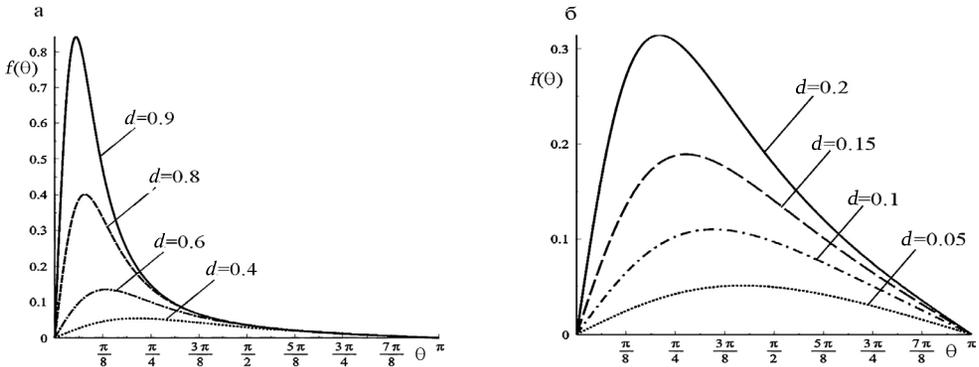


Рис. 3

$$f(\theta) = \left| \frac{Kd \times \sin \theta}{(1 + d^2 - 2d \cos \theta)^{3/2} + K(1 - d \cos \theta)} \right| \quad (3.2)$$

Функция (3.2) – непрерывная, периодическая, четная функция аргумента θ . Она достигает на своем периоде максимального значения μ_* , зависящего от d и K , которые предполагаются фиксированными. Если $\mu \geq \mu_*$, то вся поверхность тела заполнена равновесиями. При $\mu < \mu_*$ на поверхности тела выделяется кольцеобразная область с границами, параллельными экватору (“пояс”), внутри которого равновесий нет. Эти равновесия сосредоточены в северной и южной “шапочках”, прилегающих к полюсам N и S . При $\mu \rightarrow 0$ эти шапочки стягиваются к соответствующим полюсам.

Пусть $K > 0$. На рис. 2, а изображены графики функции $f(\theta)$ при $d = 0.5$ и различных значениях параметра K . При больших значениях “дополнительной массы” включения, т.е. при $K \rightarrow \infty$, график функции $f(\theta)$ стремится к кривой $\frac{d \sin \theta}{1 - d \cos \theta}$ (на рис. 2, а она обозначена пунктиром).

Замечание 3. При $\mu > \frac{d}{\sqrt{1 - d^2}}$ поверхность тела будет заполнена равновесиями при любых положительных значениях параметра K .

Случай $K = 0$ тривиален: все тело однородно, и его поверхность заполнена равновесиями.

Пусть теперь плотность СВ меньше плотности тела, т.е. $K_* \leq K < 0$. При фиксированном расстоянии между центрами шара и СВ $d = 0.5$ и различных отрицательных значениях параметра K графики функции $f(\theta)$ изображены на рис. 2, б (ср. рис. 2 из [18]). Как и в случае положительных K , при $\mu \geq \mu_*$ поверхность целиком заполнена равновесиями, а если $\mu < \mu_*$, то существует “пояс” без равновесий, разделяющий приполярные области, заполненные равновесиями.

3.2. Зависимость от d . Функция $f(\theta)$ также зависит от параметра d . На рис. 3, а изображены примеры графика функции $f(\theta)$ при положительном значении “дополнительной массы” (параметр $K = 0.1$), а на рис. 3, б – при ее отрицательном значении (параметр $K = -0.5$) и различных значениях расстояния d между центром шара и центром включения. Отметим, что в случае $K < 0$ величина d ограничена сверху значением $1 - \sqrt[3]{|K|}$. Можно видеть, что в обоих случаях максимальное значение $\hat{\mu}$, достигаемое функцией f на периоде, растет с увеличением расстояния d . При $\mu \geq \hat{\mu}$ равновесиями заполнена вся ограничивающая шар сферическая поверхность, а при $\mu < \hat{\mu}$ на сфере имеется разделяющий приполярные области равновесий “пояс”, на котором равновесий нет.

3.3. Зависимость от K . Для исследования указанной зависимости перепишем неравенство (11) в виде

$$\begin{aligned} |K \times d \times \sin \theta| - \mu \left((1 + d^2 - 2d \cos \theta)^{3/2} + K(1 - d \cos \theta) \right) &\leq 0 \\ (K \times d \times \sin \theta)^2 - \mu^2 \left((1 + d^2 - 2d \cos \theta)^3 + K(1 - d \cos \theta) \right) &\leq 0 \\ aK^2 + 2bK + c &= \Phi \leq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$a = d^2 \sin^2 \theta - \mu^2 (1 - d \cos \theta)^2, \quad b = -\mu^2 (1 + d^2 - 2d \cos \theta)^2 (1 - d \cos \theta)$$

$$c = -\mu^2 (1 + d^2 - 2d \cos \theta)^3$$

Четвертая часть дискриминанта D' функции Φ , рассмотренной как многочлен по K , имеет вид

$$D' = b^2 - ac = d^2 \sin^2 \theta \mu^2 (d^2 + 1 - 2d \cos \theta)^3$$

Нетрудно видеть, что в рамках сделанных допущений сам дискриминант неотрицателен и обращается в нуль лишь при $\theta = 0$. Тогда у многочлена $\Phi(K)$ имеется пара вещественных корней

$$K_- = \frac{-b - \sqrt{D'}}{a}, \quad K_+ = \frac{-b + \sqrt{D'}}{a} \quad (3.4)$$

На плоскости (θ, K) эти корни отвечают двум ветвям двухзначной функции $K = K_{\pm}(\theta)$. Обозначим их Γ_- и Γ_+ соответственно. Там, где $a > 0$, ветвь Γ_+ находится над ветвью Γ_- . И, наоборот, там, где $a < 0$, ветвь Γ_+ находится под ветвью Γ_- .

Используя угол трения α вместо коэффициента трения μ , заметим, что

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} = \frac{2 \sin \theta d (d \cos \theta - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

Таким образом, эта производная обращается в нуль при

$$\begin{aligned} 1) \theta_0 &= 0 \\ 2) \theta_{\pi} &= \pi \\ 3) \theta_{\pm} &= \pm \arccos \left(\frac{\sin^2 \alpha}{d} \right) \end{aligned}$$

причем два последних нуля существуют лишь в случае, когда

$$\frac{\sin^2 \alpha}{d} \leq 1$$

При этом

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= -\mu^2 (1 - d)^2, \quad \alpha(\pi) = -\mu^2 (1 + d)^2 \\ a(\theta_{\pm}) &= d^2 - \sin^2 \alpha = d^2 (1 - \delta^2), \quad \delta = \sin \alpha / d \end{aligned}$$

Таким образом, если $\delta > 1$, то $a < 0$. Если $\delta = 1$, то $a = 0$ при $\theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

Если $\delta < 1$, то $a = 0$ при

$$\theta \text{ таких, что } \cos \theta = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \pm (-\operatorname{tg}^2 \alpha + d^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha d^2)^{1/2}}{d(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sin^2 \alpha \pm \cos \alpha (d^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}}{d}$$

Изучим взаимное расположение кривых Γ_+ и Γ_- , а также их свойства. Рассматривая K в качестве параметра, определим точки бифуркации. Для этого исследуем корни уравнений

$$\frac{\partial K_-}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial K_+}{\partial \theta} = 0 \quad (3.5)$$

По-другому эти уравнения находятся так

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{\partial a}{\partial \theta} K^2 + 2 \frac{\partial b}{\partial \theta} K + \frac{\partial c}{\partial \theta} + 2aK \frac{\partial K}{\partial \theta} + 2b \frac{\partial K}{\partial \theta} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial a}{\partial \theta} K^2 + 2 \frac{\partial b}{\partial \theta} K + \frac{\partial c}{\partial \theta} + 2(aK + b) \frac{\partial K}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Поскольку в точках бифуркации $\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$, то эти точки определяются из уравнения

$$\frac{\partial a}{\partial \theta} K^2 + 2 \frac{\partial b}{\partial \theta} K + \frac{\partial c}{\partial \theta} = 0$$

Подставляя в это соотношение величины K_{\pm} из (3.4), находим требуемые уравнения. Эти весьма громоздкие уравнения после преобразований приводятся к виду

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \theta)d^2 - (-3\sin\theta\sin(\alpha - \theta) + 2\cos\theta\cos(\alpha - \theta))d - \\ - 3\sin\theta\sin\alpha + \cos(\alpha - \theta) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

для ветви Γ_- и к виду

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \alpha)d^2 + (-3\sin\theta\sin(\theta + \alpha) - 2\cos\theta\cos(\theta + \alpha))d + \\ + 3\sin\theta\sin\alpha + \cos(\theta + \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

для ветви Γ_+ соответственно.

Замечание 4. Дискриминант выражения (3.6), рассмотренного как многочлен относительно d , оказывается неотрицательным: $D_- = \frac{1}{2}\sin^2\theta(17 - \cos 2(\theta - \alpha))$.

Он обращается в нуль при $\theta = 0$, чему отвечает двукратный корень $d = 1$.

Корни уравнений (3.6) и (3.7) существенно зависят от параметров задачи. Рассмотрим некоторые случаи.

а) Пусть выполнено неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}, d^2 \geq \sin^2 \alpha, \quad (3.8)$$

т.е. $\delta < 1$, и у уравнения (3.6) имеется корень $\theta = \theta_1$, которому отвечает значение $K = K_1$, при этом $K_1 > K_*$. Пара (θ_1, K_1) на плоскости (θ, K) задает точку бифуркации, принадлежащую кривой Γ_- . Кроме того, у уравнения (3.7) имеется корень $\theta = \theta_2$, ему отвечает значение $K = K_2$. Пара (θ_2, K_2) на плоскости (θ, K) задает точку бифуркации, принадлежащую кривой Γ_+ . Для $d = 0.5$ и $\mu = \operatorname{tg} \alpha = 0.1$ такая ситуация изображена на рис. 4, а. Здесь и далее на рисунках области, на которых выполнено неравенство (2.6), выделены темно-серым цветом.

Пусть K возрастает от предельного значения K_* , при котором равновесия существуют в северной $\theta \in [0, \theta_{*N}]$ и южной $\theta \in [\theta_{*S}, \pi]$ приполярных областях. С ростом

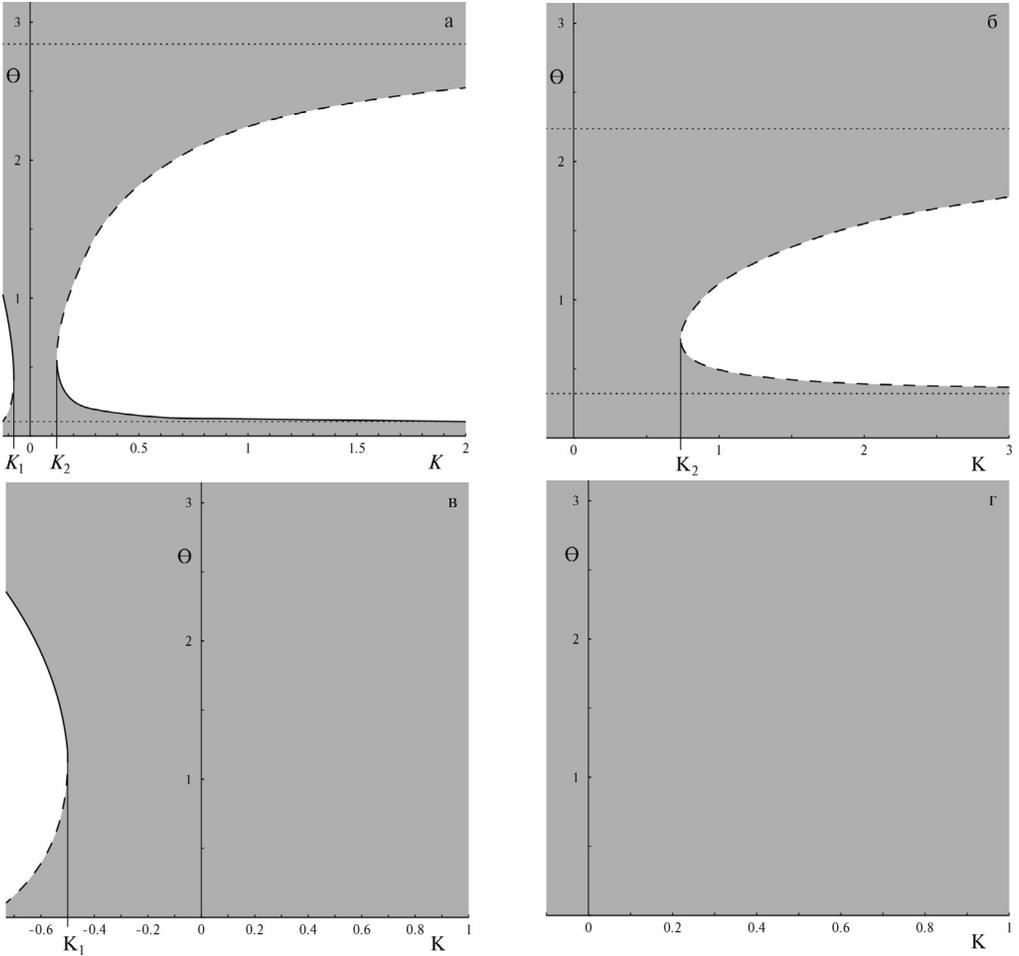


Рис. 4

K приполярные области расширяются и соединяются в точке (θ_1, K_1) , полностью заполняя поверхность сферы при $K \in (K_1, K_2)$. При дальнейшем росте K в точке (θ_2, K_2) область, заполненная равновесиями, вновь расщепляется на две приполярные области, каждая из которых сужается с ростом K . В пределе, при $K \rightarrow \infty$, границы северной и южной приполярных областей стягиваются к окружностям, задаваемым соотношениями

$$\begin{aligned} \theta_N &= \arccos \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{d^2 - \sin^2 \alpha}}{d} \right) \\ \theta_S &= \pi - \arccos \left(\frac{-\sin^2 \alpha + \cos \alpha \sqrt{d^2 - \sin^2 \alpha}}{d} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

соответственно. На рисунках эти асимптоты обозначены пунктирной линией.

б) Пусть снова выполнено неравенство (3.8), т.е. $\delta < 1$, но значение K_1 , которому отвечает корень уравнения (3.6) такое, что $K_1 < K_*$. Кроме того, пусть у уравнения (3.7) имеется корень $\theta = \theta_2$, ему отвечает значение $K = K_2$. Пара (θ_2, K_2) на плоскости

(θ, K) задает точку бифуркации, принадлежащую кривой Γ_+ . Такой случай для $d = 0.5$ и $\mu = 0.3$ изображен на рис. 4, б.

В этом случае при $K < K_2$ вся сфера заполнена равновесиями, а привпроисходит бифуркация: на сфере есть две области равновесий, содержащие полюса N и S , разделенных “поясом”, на котором равновесий нет. Его границы с увеличением параметра K стремятся к тем же значениям θ_N у области, содержащей полюс N , и к θ_S у области, содержащей полюс S , что и в предыдущем случае.

в) Пусть теперь неравенство (3.8) не выполнено, т.е. $\delta > 1$, и у уравнения (3.6) имеется корень $\theta = \theta_1$, которому отвечает значение $K = K_1$, при этом $K_1 > K_*$. Пара (θ_1, K_1) на плоскости (θ, K) задает точку бифуркации, принадлежащую кривой Γ_- . Тогда, если $K \in (K_*, K_1)$, то на сфере имеются две приполярных области равновесий, разделенные “поясом”, на котором равновесий нет, и при этом область, содержащая полюс N , более узкая, чем область, содержащая полюс S . При $K = K_1$ эти области соединяются, и при $K \in (K_1, +\infty)$ вся сфера оказывается заполненной равновесиями. Пример такого случая приведен на рис. 4, в, здесь выбраны параметры $d = 0.1$ и $\mu = 0.11$.

г) Пусть, наконец, неравенство (3.8) снова не выполнено, т.е. $\delta > 1$, но значение K_1 , которому соответствует корень уравнения (3.6), таково, что $K_1 < K_*$. В этом случае вся сфера заполнена равновесиями при любых возможных допустимых значениях параметра K . Соответствующий пример при $d = 0.5$ и $\mu = 0.6$ приведен на рис. 4, г.

4. Равновесия на поверхности вращающегося тела. Теперь рассмотрим случай, когда тело равномерно вращается вокруг своей оси симметрии. Здесь решающая роль принадлежит игре между силой притяжения, силами реакции и центробежной силой. Изучим зависимость областей, заполненных относительными равновесиями от величины угловой скорости такого вращения Ω . Посмотрим, как с увеличением угловой скорости будут меняться бифуркационные диаграммы, описанные в предыдущем разделе. Во избежание введения дополнительных сокращений в этом разделе для краткости относительные равновесия именуется равновесиями.

На рис. 5 изображено изменение областей относительных равновесий при расстоянии между центрами сферы и СВ $d = 0.5$ и коэффициенте трения $\mu = \text{tg } \alpha = 0.3$ (тогда $\delta < 1$, и значение K_1 , которому отвечает корень уравнения (3.6), таково, что $K_1 < K_*$, см. пункт б) предыдущего раздела). В этом случае с увеличением угловой скорости от нуля (рис. 5, а) при некотором Ω_1 появится такое $K_1: K_* < K_1 < 0$, что при $K \in (K_*, K_1)$ на сфере имеются две приполярные области равновесий, разделенные “поясом”, при $K \in (K_1, K_2)$ вся сфера заполнена равновесиями, а при $K > K_2$ область, заполненная равновесиями, вновь расщепляется на две приполярные области, каждая из которых сужается с ростом K (рис. 5, б).

С ростом Ω бифуркационная диаграмма (рис. 5, б) деформируется, и при некотором Ω_2 имеются три значения $K_{2M} > K_{2S} > K_{2N}$ такие, что при $K \in (K_{2S}, K_{2M})$ на сфере имеются не только две области равновесий, содержащие полюса N и S , но и третья область, а именно, “пояс” равновесий между ними, который сужается с ростом K (рис. 5, в). При $K \in (K_{2M}, \infty)$ на сфере есть только две приполярные области, каждая из которых сужается с ростом K . При этом, как и ранее, для $K \in (K_*, K_1)$ на сфере имеются две приполярных области равновесий, при $K \in (K_1, K_{2N})$ сфера полностью заполнена равновесиями, а при $K \in (K_{2N}, K_{2S})$ снова остаются две приполярные области.

С дальнейшим увеличением угловой скорости бифуркационная диаграмма продолжает деформироваться. Значение $K > 0$, при котором на сфере, заполненной равновесиями, появляется “пояс” без равновесий, будет уменьшаться, при этом, если сперва этот “пояс” появлялся ближе к полюсу N , то начиная с некоторого значения Ω он будет появляться ближе к полюсу S . При прохождении угловой скорости

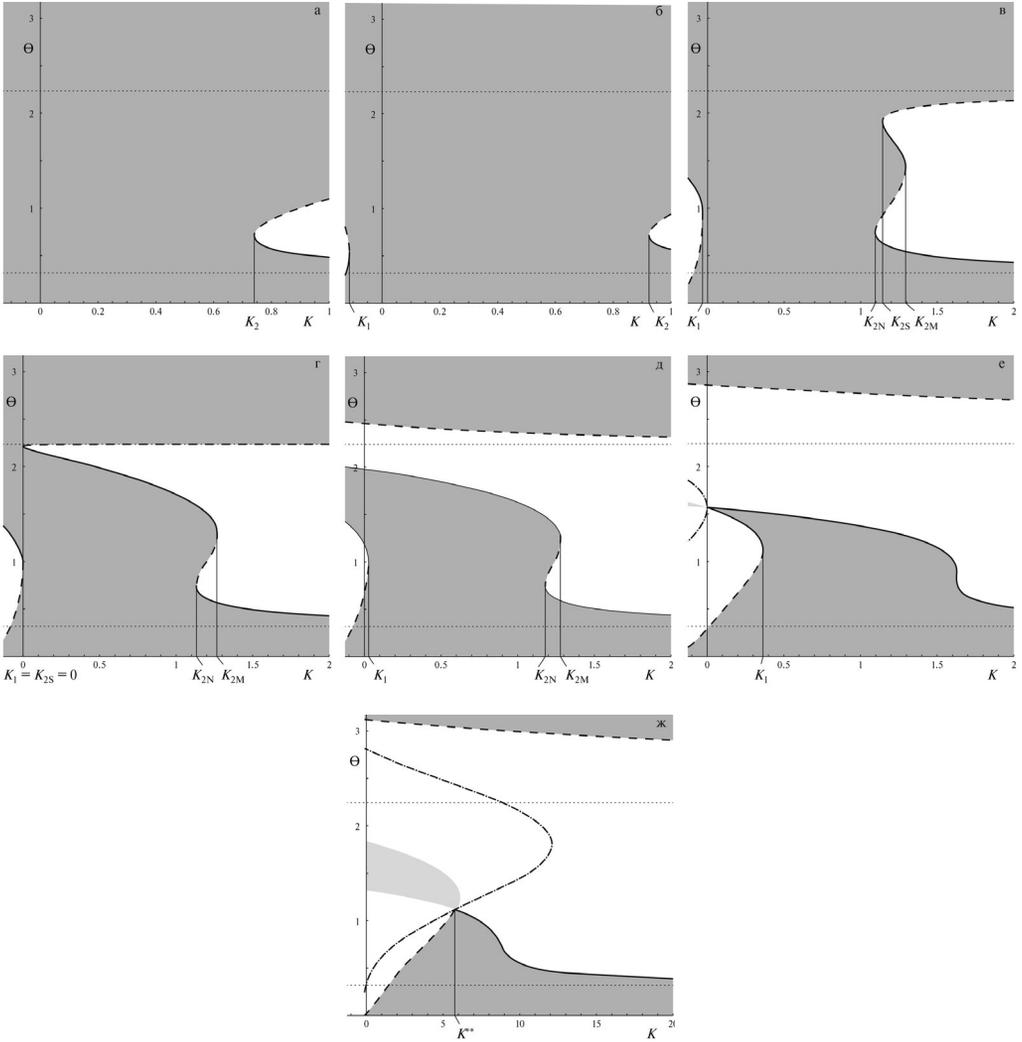


Рис. 5

через критическое значение $\Omega_* = \sqrt{\frac{2\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$ на сфере появляются области, в которых точка не может находиться в равновесии для всех допустимых значений K (рис. 5, г). При $K \in (K_*, 0)$ на сфере имеются две приполярных области, заполненных равновесиями, разделенных “поясом”, причем область равновесий, содержащая полюс N , более узкая. При переходе через значение $K = K_1 = K_{2S} = 0$ этот “пояс” стягивается в окружность, отвечающую значению $\theta_{N*} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4}$, и исчезает с дальнейшим ростом значений K . При этом из окружности, задаваемой значением $\theta_{S*} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ расходится другой “пояс” без равновесий. Таким образом, при $K \in (0, K_{2N})$ на сфере снова наблюдаются две приполярные области равновесий, но теперь область, содержащая полюс N , оказывается более широкой. При $K \in (K_{2N}, K_{2M})$ на сфере имеются три области равновесий: две приполярных обла-

сти и “пояс” равновесий между ними. При $K > K_{2M}$ этот “пояс” исчезает, и снова остаются только две приполярные области.

При дальнейшем возрастании угловой скорости появляются и отрицательные значения K , при которых на сфере имеются не только две приполярные области равновесий, но и заполненный равновесиями “пояс” между ними. Начиная с некоторого значения Ω_3 , такая картина наблюдается при всех возможных отрицательных значениях параметра K (рис. 5, д).

С ростом Ω , начиная с некоторого Ω_4 , появятся такие отрицательные значения K , что нормальная реакция на этом “поясе” имеет другой знак, то есть при этих K точка не покоится на сфере, а отрывается от ее поверхности. При $\Omega = 1$ нормальная реакция на “поясе” равновесий меняет знак при всех отрицательных значениях K . При этом для положительных K отрыва от поверхности на “поясе” не происходит. Таким образом, при $K \in (K_*, 0)$ точка находится в равновесии только в двух приполярных областях, при $K \in (0, K_1)$ на сфере имеются три области равновесий – две приполярные и “пояс” равновесий между ними, и, наконец, при $K > K_1$ вновь имеются только две приполярные области (рис. 5, е). Здесь и далее на рисунках граница смены знака нормальной реакции обозначена штрихпунктирной линией, а области, на которых неравенство (2.6) выполнено, но происходит отрыв от поверхности, выделены светло-серым цветом. Понятно, что равновесия из этого класса не имеют физического смысла в данной постановке задачи.

При $\Omega > 1$ нормальная реакция на поясе равновесий меняет знак и при некоторых положительных значениях параметра K . Значение $K = K^{**}$, при котором происходит смена знака, возрастает с ростом угловой скорости. При достаточно больших значениях Ω на сфере всегда имеются две области равновесий, содержащие полюсы N и S соответственно (рис. 5, ж).

Замечание 5. В пределе, при $K \rightarrow \infty$, границы северной и южной приполярных областей также асимптотически стремятся к окружностям, задаваемым соотношениями (3.9) вне зависимости от значений угловой скорости Ω .

Замечание 6. Бифуркационная диаграмма, построенная для случая, когда $\delta > 1$, и значение K_1 , которому отвечает корень уравнения (3.6) таково, что $K_1 > K_*$ (рис. 4, а), при росте угловой скорости изменяется по схеме, схожей со схемой, примененной на рис. 5, б–ж.

Теперь рассмотрим изменение бифуркационной диаграммы для $\delta > 1$ и значения K_1 , соответствующего корню уравнения (3.6) такового, что $K_1 < K_*$ (случай г) предыдущего раздела). Посмотрим, как с увеличением угловой скорости меняется диаграмма, построенная для расстояния между центрами сферы и СВ $d = 0.5$, коэффициента трения $\mu = \operatorname{tg} \alpha = 0.6$ и $\Omega = 0$ (рис. 6, а). При достижении угловой скоростью некоторого значения Ω_1 появляется такое $K_1 < 0$, что при $K \in (K_*, K_1)$ на сфере имеются две приполярные области, заполненные равновесиями, а при $K > K_1$ равновесиями заполнена вся сфера (рис. 6, б).

Затем при некотором $\Omega_2 > \Omega_1$ появляются такие значения $K_{1S} < K_{1N} < 0$, что при $K \in (K_*, K_{1S})$ области, заполненные равновесиями, представляют собой две приполярные области и “пояс” между ними, при $K \in (K_{1S}, K_{1N})$ равновесиями заполнены лишь приполярные области, а при $K > K_{1N}$ равновесия заполняют всю сферу (рис. 6, в).

При $\Omega = \Omega_* = \sqrt{\frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$ для всех возможных отрицательных K на сфере будут

две приполярные области равновесий и “пояс” равновесий между ними. При этом для всех положительных K вся сфера будет заполнена относительными равновесиями (рис. 6, г). Кроме того, при стремлении $K \rightarrow 0$ границы областей стремятся к окружностям, задаваемым углами $\theta_{N*} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4}$ и $\theta_{S*} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$, соответственно.

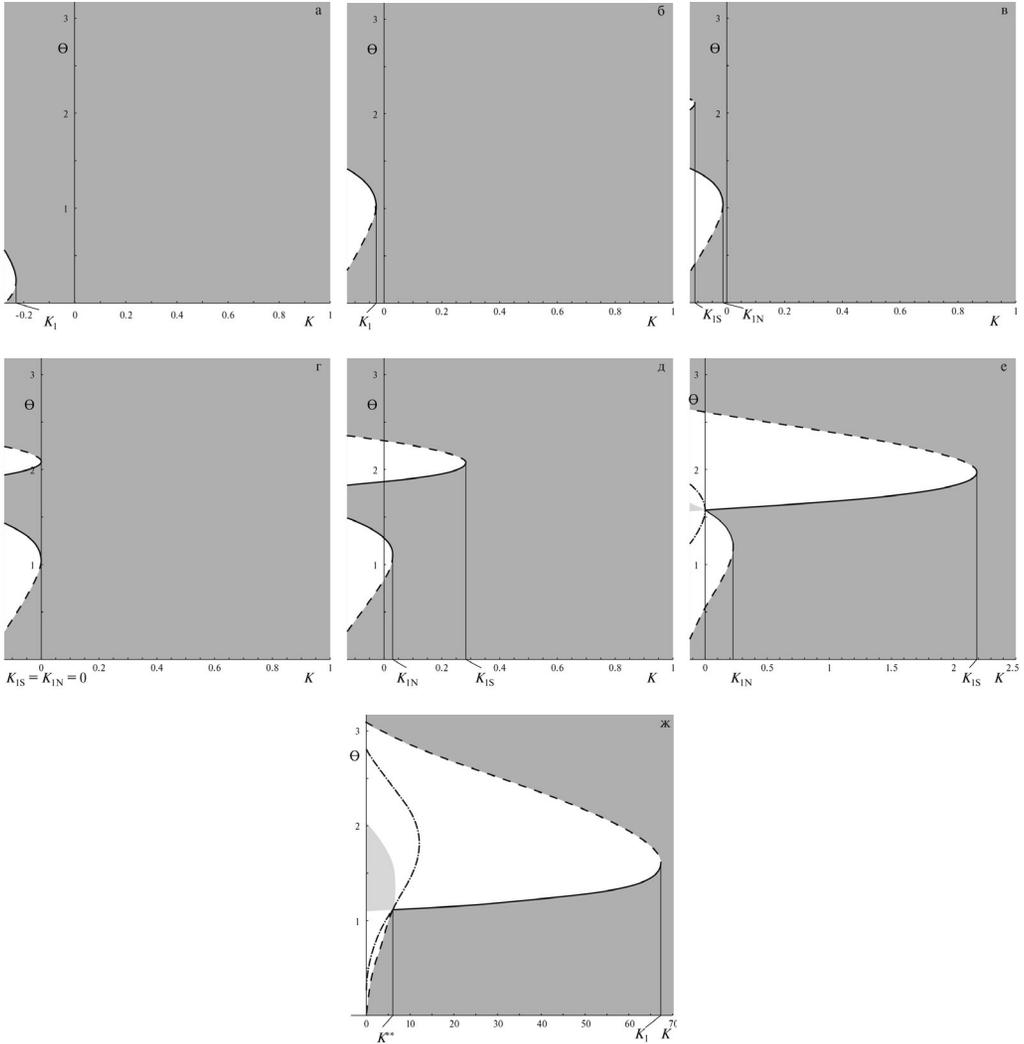


Рис. 6

С дальнейшим увеличением угловой скорости области без равновесий появляются и при положительных значениях K . Таким образом, при таких значениях Ω существуют $K_{1N}, K_{1S} : 0 < K_{1N} < K_{1S}$, что при $K \in (K_*, K_{1N})$ на сфере имеются три области равновесий, а именно, две приполярные области и “пояс” равновесий между ними. При $K \in (K_{1N}, K_{1S})$ на сфере остаются только две области, содержащие полюса N и S , при этом область, содержащая полюс N , будет шире. Наконец, при $K > K_{1S}$ вся сфера оказывается заполненной равновесиями (рис. 6, д).

Так же, как и в прошлом случае, с ростом Ω , начиная с некоторого Ω_3 , появятся такие отрицательные значения K , что нормальная реакция на “поясе” равновесий имеет другой знак.

Пусть $\Omega = 1$ (рис. 6, е). Тогда уже при всех $K < 0$ для равновесий, принадлежащих “поясу” нормальная реакция отрицательна, и такие равновесия не имеют физического смысла. В то же время при $K > 0$ нормальная реакция в точках пояса положительна, и соответствующие равновесия физически осмысленны. Таким

образом, при отрицательных K точка находится в равновесии лишь в двух приполярных областях. Далее, найдется $K_{1N} > 0$, такое, что при $0 < K < K_{1N}$ области, заполненные равновесиями, состоят из двух приполярных областей и “пояса” между ними. Кроме того, найдется $K_{1S} > K_{1N}$, такое, что при $K_{1N} < K < K_{1S}$ вновь останутся только две приполярные области равновесий, причем северная приполярная область шире южной. Наконец, при $K > K_{1S}$ вся сфера будет заполнена равновесиями.

При $\Omega > 1$ обращение нормальной реакции в нуль и отвечающий такому обращению отрыв от поверхности для равновесий из пояса происходит и при положительных значениях параметра K , при этом значение $K = K^{**}$, при котором происходит смена знака нормальной реакции, растет с ростом угловой скорости. Понятно, что такие “оторвавшиеся” равновесия физического смысла не имеют. Иными словами, при больших значениях Ω существует значение $K_1 > 0$, такое, что при $K < K_1$ равновесия заполняют лишь две приполярные области, а при $K > K_1$ вся сфера будет заполнена равновесиями (рис. 6, ж).

Замечание 7. Бифуркационная диаграмма, построенная для случая $\delta > 1$ и корня уравнения (3.6), отвечающему значению $K = K_1$ такому, что $K_1 > K_*$ (рис. 4, в) будет изменяться по схеме, схожей с изображенной на рис. 6, б–ж.

5. Об устойчивости относительных равновесий. Положения относительного равновесия, расположенные внутри найденных областей, устойчивы по Ляпунову, что следует из результатов Г.К. Пожарицкого [31]. Можно, как и в [16, 18, 19], поставить вопрос об устойчивости связанных компонент областей, заполненных равновесиями, в следующем смысле: связанная компонента считается *устойчивой*, если для каждой точки ее границы проекция суммы активных сил и центробежной силы на плоскость, касательную к поверхности в этой точке, направлена внутрь рассматриваемой связанной компоненты. Если найдется хотя бы одна точка границы связанной компоненты, для которой эта проекция будет направлена во внешнюю часть рассматриваемой компоненты, то будем считать компоненту *неустойчивой*.

Замечание 8. В рассматриваемой задаче благодаря осевой симметрии это свойство достаточно проверить для любого сечения поверхности тела вдоль меридиана.

Введенное таким образом определение устойчивости проверяется путем анализа знака функции f_T в точках границы области, заполненной равновесиями. На бифуркационных диаграммах (рис. 4–6) точки границ областей равновесия, в которых упомянутая проекция суммы сил направлена вовне соответствующей связанной компоненты, прорисованы пунктиром, а точки границ, в которых эта проекция суммы сил направлена внутрь соответствующей связанной компоненты, прорисованы сплошной линией.

В качестве примера обсудим устойчивость компонент областей относительных равновесий в случае, приведенном на рис. 4, а. Так, при $K < K_1$ приполярная компонента, содержащая полюс N , неустойчива, а противоположная приполярная компонента – устойчива. При $K \in (K_1, K_2)$ имеется единственная связанная компонента, совпадающая со всей сферой. Она не имеет границ, т.е. устойчива. При $K > K_2$ приполярная компонента, содержащая полюс N , будет устойчивой, а компонента, содержащая полюс S – неустойчивой.

Выводы. Исследование показало, что области, заполненные неизолрованными относительными равновесиями, на поверхности сферического тела с включением существенно зависят от параметров системы. Выявлены существенные отличия от рассмотренного ранее случая [18], когда рассматривается не массивное включение, а незаполненная полость. В частности, при любом значении угловой скорости вращения тела существует такое значение дополнительной массы включения K , что на сфере есть или две приполярные области равновесий, причем северная компонента устойчива, а южная неустойчива, или вся сфера заполнена равновесиями. В случае

незаполненной полости подобного не наблюдается.

Заметим, что вид функции напряженности силы притяжения со стороны тела позволяет получить выражение для напряженности силы притяжения в случае, когда в сферическом теле есть несколько сферических включений различной плотности. Таким образом, и в этом более сложном случае можно выполнить исследование относительных равновесий на поверхности тела.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 22–21–00297).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2003. V. 87. P. 263–290.
2. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and control of surface exploration. Robots on Asteroids // in: *Optimization & Cooperative Control Strategies. LNCIS381 / Ed by Hirsch M.J. et al.* Heidelberg: Springer, 2009. P. 135–150.
3. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // *Planetary&Space Sci.* 2016. V. 127. P. 33–43.
4. *Tardivel S., Scheeres D.J., Michel P. et al.* Contact motion on surface of asteroid // *J. of Spacecraft&Rockets.* 2015. V. 51. № 6. P. 1857–1871.
5. *Zhang Y., Zeng X., Circi C. et al.* The motion of surface particles for the asteroid 101955 Bennu // *Acta Astronaut.* 2019. V. 163. Part B. P. 3–10.
6. *Рябова Г. О.* Астероид 1620 Географ. I. Вращение // *Астрон. вестн. Исслед. солнечной сист.* 2002. Т. 36. № 2. С. 186–192.
7. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006), San Diego, USA, 2006.* P. 3765–3770.
8. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // *Lecture Notes in Appl.&Comput. Mech.* 2008. V. 36. 236 p.
9. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A/Solids.* 2006. V. 25. P. 595–616.
10. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D.* 2006. V. 223. P. 121–137.
11. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *R&C Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.
12. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 304 с.
13. *Буров А.А., Якушев И.А.* Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающемся обруче с сухим трением // *ПММ.* 2014. Т. 78. Вып. 5. С. 645–655.
14. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *R&C Dyn.* 2015. V. 20. № 3. P. 225–233.
15. *Буров А.А., Шалимова Е.С.* Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболаидальной чаше с сухим трением // *Изв. РАН. МТТ.* 2016. № 4. С. 30–42.
16. *Шалимова Е.С.* О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // *Нелин. дин.* 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.
17. *Буров А.А., Косенко И.И., Шалимова Е.С.* Об относительных равновесиях массивной точки на равномерно вращающемся астероиде // *Докл. РАН.* 2017. Т. 475. № 3. С. 269–272.
18. *Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.* Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 4. С. 528–543.
19. *Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.* Об относительных равновесиях на поверхности сферической полости равномерно вращающегося гравитирующего шара // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 6. С. 857–871.
20. *Буров А.А., Никонов В.И.* Относительные равновесия тяжелой точки на равномерно вращающейся наклонной плоскости // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 1. С. 156–165.
21. *Буров А.А., Никонов В.И.* Об относительных равновесиях тяжелой бусинки на равномерно вращающейся шероховатой спице // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 3. С. 99–105.

22. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космич. исслед.* 2007. Т. 45. № 6. С. 435–442.
23. *Beletsky V.V., Rodnikov A.V.* On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // *J. Vibroengng.* 2008. V. 10. № 4. P. 550–556.
24. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космич. исслед.* 2008. Т. 46. № 1. С. 42–50.
25. *Муниципына М.А.* Относительные равновесия точки в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твердого тела // в сб.: *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения.* М: ВЦ РАН, 2009. С. 14–19.
26. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Нелин. дин.* 2011. Т. 7. № 3. С. 569–576.
27. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Libration points inside a spherical cavity of a uniformly rotating gravitating ball // *Rus. J. of Nonlin. Dyn.* 2021. V. 17. № 4. P. 413–427.
28. *Лидов М.Л., Гордеева Ю.Ф.* Влияние масконов на прогнозирование движения ИСЛ // *Космич. исслед.* 1974. Т. 12. № 4. С. 491–507.
29. *Лидов М.Л., Ляхова В.А., Соловьев А.А.* Полуаналитический метод расчета движения искусственного спутника Луны // *Космич. исслед.* 1975. Т. 13. № 3. С. 303–310.
30. *Лидов М.Л., Гордеева Ю.Ф.* Влияние “масконов” на определение коэффициентов гравитационного поля Луны // в кн.: *Наблюдения искусственных небесных тел.* М.: Астр. Совет АН СССР. 1976. № 15. С. 564–587.
31. *Пожарицкий Г.К.* Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением // *ПММ.* 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 5–14.

On the Motion of a Point Particle on a Homogeneous Gravitating Ball with a Spherical Inclusion

A. A. Burov ^{a, #}, V. I. Nikonov ^{a, ##}, E. S. Shalimova ^{a, ###}

^a*FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: jtm@narod.ru,*

^{##}*e-mail: nikon_v@list.ru,*

^{###}*e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru*

A problem of motion of a point particle on a surface of a homogeneous gravitating ball with a spherical inclusion of a differing density is considered. It is assumed that the body rotates uniformly around its symmetry axis. It is supposed that "besides the gravitation force, the particle is subjected to dry friction. The gravitational properties outside the ball are described. The dependence of existence, bifurcations, and stability of relative equilibria of the point particle on the body surface on the parameters of the problem is studied. The results are represented both analytically and as numerically obtained bifurcation diagrams.

Keywords: dynamics on surfaces of celestial bodies, celestial bodies with cavities, relative equilibria, dry friction, motion of a point particle in a noncentral gravity field, generalization of a gravitating dumbbell, mascons

REFERENCES

1. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2003, vol. 87, pp. 263–290.
2. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and Control of Surface Exploration. Robots on Asteroids // in: *Optimization & Cooperative Control Strategies. LNCIS381.* / Ed. by *Hirsch M.J. et al.* Heidelberg: Springer, 2009. pp. 135–150.

3. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // *Planetary&Space Sci.*, 2016, vol. 127, pp. 33–43.
4. *Tardivel S., Scheeres D. J., Michel P. et al.* Contact motion on surface of asteroid // *J. Spacecraft&Rockets*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 1857–1871.
5. *Zhang Y., Zeng X., Circi C. et al.* The motion of surface particles for the asteroid 101955 Bennu // *Acta Astronaut.*, 2019, vol. 163, pt. B, pp. 3–10.
6. *Ryabova, G.O.* Asteroid 1620 Geographos: I. Rotation. // *Solar System Res.*, 2002, vol. 36, pp. 168–174.
7. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006)*, San Diego, USA, 2006, pp. 3765–3770.
8. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // *Lecture Notes in Appl.&Comput. Mech.*, 2008, vol. 36, 236 p.
9. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A/Solids*, 2006, vol. 25, pp. 595–616.
10. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*, 2006, vol. 223, pp. 121–137.
11. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *R&C Dyn.*, 2009, vol. 14, no. 6, pp. 656–672.
12. *Ivanov A.P.* Fundamentals of the Theory of Systems with Friction. Moscow; Izhevsk: Izhevsk Inst. of Comput. Sci., 2011, 304 p. (in Russian)
13. *Burov A.A., Yakushev I.A.* Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bead on a rotating hoop with dry friction // *JAMM*, 2014, vol. 78, iss. 5, pp. 460–467.
14. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *R&C Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 225–233.
15. *Burov A.A., Shalimova E.S.* Bifurcations of relative equilibria of a heavy bead on a rotating parabolic bowl with dry friction // *Mech. of Solids*, 2016, vol. 51, no. 4, pp. 395–405.
16. *Shalimova E.S.* On the motion of a material point on a rotating sphere with dry friction (the case of the vertical axis) // *Nelin. Din.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 369–383. (in Russian)
17. *Burov A.A., Kosenko I.I., Shalimova E.S.* Relative equilibria of a massive point on a uniformly rotating asteroid // *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 7, pp. 359–362.
18. *Burov A.A., Nikonov V.I., Shalimova E.S.* On the motion of a point particle on a homogeneous gravitating ball with a spherical cavity in the presence of dry friction // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1587–1598.
19. *Burov A.A., Nikonov V.I., Shalimova E.S.* On relative equilibria on the surface of a spherical cavity inside a uniformly rotating gravitating sphere // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 1862–1872.
20. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Relative equilibria of a heavy point on a uniformly rotating inclined plane // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 131–139.
21. *Burov A.A., Nikonov V.I.* On the relative equilibria of a heavy bead on a uniformly rotating rough spoke // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 748–753.
22. *Beletsky V.V.* Generalized restricted circular three-body problem as a model for dynamics of binary asteroids // *Cosmic Res.*, 2007, vol. 45, pp. 408–416.
23. *Beletsky V.V., Rodnikov A.V.* On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // *J. Vibroengng.*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
24. *Beletsky V.V., Rodnikov A.V.* Stability of triangle libration points in generalized restricted circular three-body problem // *Cosmic Res.*, 2008, vol. 46, pp. 40–48.
25. *Munitsyna M.A.* Relative equilibria of a point in a gravity field of a symmetrical solid body // in: *Problems of Investigating the Stability and Stabilization of Motion*. Moscow: Computing Center of the RAS, 2009. pp. 14–19. (in Russian)

26. *Beletsky V.V., Rodnikov A.V.* Coplanar libration points in the generalized restricted circular problem of three bodies // *Nelin. Din.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 569–576. (in Russian)
27. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Libration points inside a spherical cavity of a uniformly rotating gravitating ball // *Rus. J. of Nonlin. Dyn.*, 2021, vol. 17, no. 4, pp. 413–427.
28. *Lidov M.L., Gordeeva Y.F.* Effect of mascons on prediction of the motion of artificial lunar satellites // *Cosmic Res.*, 1974, vol. 12, pp. 449.
29. *Lidov M.L., Lyakhova V.A., Solov'ev A.A.* Semi-analytical calculation of the motion of an artificial satellite of the Moon // *Cosmic Res.*, 1975, vol. 13, pp. 249–274.
30. *Lidov M.L., Gordeeva Yu.F.* Influence of “mascons” on the determination of the coefficients of the gravitational field of the moon // in: *New Methods of Satellite Geodesy*, 1977, pp. 564–586.
31. *Pozharitsky G.K.* Stability of equilibria for the systems with dry friction // *JAMM*, 1962, vol. 26, iss. 1, pp. 5–14.

УДК 531.36

О ПЕРВОМ ИНТЕГРАЛЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

© 2024 г. Б. Я. Локшин^{1,*}, В. А. Самсонов^{1,**}¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

*e-mail: blokshin@imec.msu.ru,

**e-mail: samson@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 02.02.2024 г.

После доработки 29.02.2024 г.

Принята к публикации 10.03.2024 г.

Обсуждается хорошо забытый специалистами трансцендентный первый интеграл классической задачи внешней баллистики. Подобрана замена переменных, придавшая ему компактный вид, позволивший довести анализ до конструктивных квадратур.

Ключевые слова: внешняя баллистика, первый интеграл, новые переменные, фазовый портрет

DOI: 10.31857/S0032823524020024 EDN: XVFMFK

1. Введение. Классическая задача внешней баллистики – задача о движении тяжелой материальной точки с учетом сопротивления, квадратично зависящего от скорости (рис. 1), сформулирована еще И. Ньютоном. Но уже Л. Эйлер, сообщая об установлении И. Бернулли в этой задаче первого интеграла, выразил удивление тому, что искусный математик Ньютон не заметил этого интеграла [1]. Однако оба они формулировали задачу в декартовых координатах, и соответствующий интеграл имел весьма громоздкий вид, не позволивший ни самому Эйлеру, ни его многочисленным последователям получить конструктивных следствий.

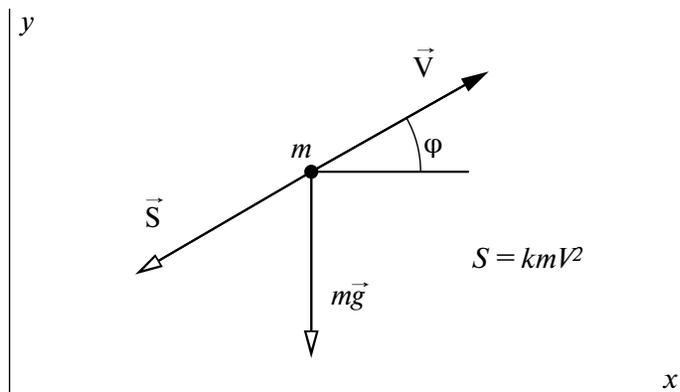


Рис. 1

Обсуждаемая задача редуцируется до системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -g \sin \varphi - kV^2 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{g}{V} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где V – скорость материальной точки, φ – угол наклона вектора ее скорости к горизонтали, g – ускорение свободного падения, k – размерный коэффициент сопротивления среды, отнесенный к массе; параметры g и k считаются постоянными.

Прежде всего, обратим внимание, что система (1.1) содержит лишь два параметра: g и k . За счет перехода к нормированным переменным можно избавиться и от этих параметров. Действительно, пусть

$$V = \bar{V}v, \quad t = \frac{\bar{V}}{g}\tau, \quad \bar{V} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (1.2)$$

(Отметим, что значение \bar{V} задает величину установившейся скорости вертикального спуска тела). Тогда уравнения (1.1) примут вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= -\sin \varphi - v^2 \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{v} \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти уравнения допускают вышеупомянутый трансцендентный первый интеграл в форме

$$\frac{1}{v^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = C \quad (1.4)$$

Аналогичный вид, но содержащий параметры g и k , был получен уже к концу XIX века, что отражено в учебнике П. Аппеля [3].

Отметим также, что в [4] хотя бы упоминается об этом интеграле, но в некоторых учебниках (например, в [5]) о нем нет и речи.

2. Замена переменных. Введем в системе (1.3) естественную (на взгляд авторов) замену переменных [6], хотя до сих пор ее использование в известной литературе авторы не нашли:

$$z = 1/v^2, \quad s = \sin \varphi \quad (2.1)$$

Тогда уравнения (1.3) в области $|s| < 1$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= 2\sqrt{z}(1 + sz) \\ \frac{ds}{d\tau} &= -\sqrt{z}(1 - s^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эта система имеет одну неподвижную точку $s = -1, z = 1$, отвечающую аналогичной неподвижной точке в системе (1.3). Однако в ней существует дополнительное множество неподвижных точек $z = 0$, которые не имеют физического смысла.

Обратим внимание на следствие из второго уравнения системы (2.2) – координата s монотонно уменьшается от своего начального значения до -1 .

Дальнейший анализ будем проводить в фазовом пространстве переменных (s, z) . Из системы (2.2) следует, казалось бы, уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{2(1+sz)}{1-s^2} \quad (2.3)$$

Именно в этих переменных можно увидеть некоторые замечательные свойства фазовых траекторий. Прежде всего, выпишем общее решение уравнения (2.3) (первый интеграл системы (2.2) в неявном виде)

$$z = (1-s^2) \left(C - \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s} \right) - s \quad (2.4)$$

Как и в (1.4), оно представляет собой семейство функций $z = z(s, s_*, z_*)$, зависящих от координат (s_*, z_*) некоторой начальной точки. Строго говоря, (2.4) содержит лишь один параметр C , и интересно раскрыть его смысл. Видно, что если положить $s_* = 0$, то $C = z_*$. Постоянная интеграла в (2.4) может иметь любой знак, а переменная z — только положительна. Оказывается, что в уравнении (2.3) был потерян множитель \sqrt{z} . Поэтому в его решении (2.4) исчезло множество равновесий $z = 0$. Нижняя полуплоскость области $|s| < 1$ тоже заполнена интегральными кривыми, симметричными относительно начала координат, но эти кривые отражают, так сказать, “мнимую реальность”, поскольку вдоль этих кривых не определен физический смысл изменения координат!

Если в качестве одного из начальных значений принять $z_* = z_0 = 0$ (что отвечает бесконечно большой скорости), то, обозначая соответствующее значение $s_* = s_\infty$, константа C будет зависеть только от параметра s_∞ :

$$C = \frac{s_\infty}{1-s_\infty^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+s_\infty}{1-s_\infty}$$

На рис. 2 представлено это семейство (фазовый портрет), кривые которого образуют универсальную номограмму зависимости фазовых траекторий от s_∞ , не зависящую от параметров исходной задачи.

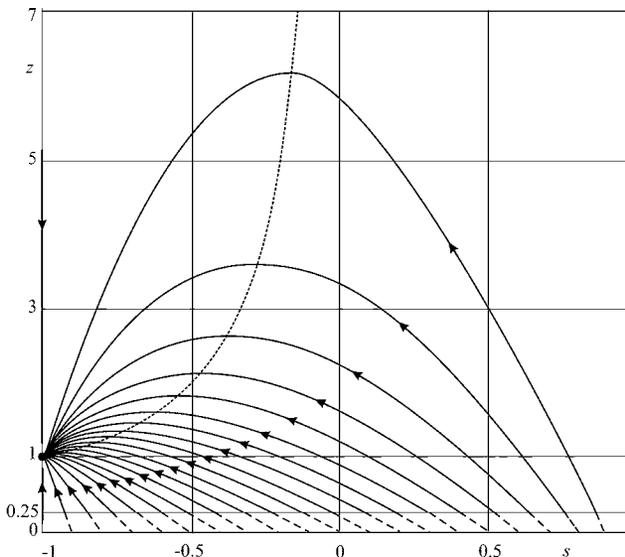


Рис. 2

3. Некоторые свойства фазового портрета. Прежде всего, отметим на этом портрете множества точек, в которых производные фазовых переменных обращаются в ноль. Первое множество, отвечающее равенству $\frac{ds}{d\tau} = 0$, состоит из неподвижной точки $(s = -1, z = 1)$ и трех прямолинейных фазовых траекторий: $(s = 1, z > 0)$, $(s = -1, z > 1)$, $(s = -1, s = -1, 0 < z < 1)$. Второе множество, отвечающее равенству $\frac{dz}{d\tau} = 0$, состоит из множества точек (отмеченного частым пунктиром), отвечающих достижению максимального значения z_m координаты z (минимальному значению скорости V в исходных переменных). Из первого уравнения системы (2.2) следует, что точки последнего множества удовлетворяют уравнению $s_m z_m = -1$.

Отметим, что указанные максимальные значения достигаются при отрицательных значениях s . Это означает, что минимальное значение скорости V достигается только *после* прохождения материальной точкой вершины своей траектории в вертикальной плоскости (на вершине, очевидно, $s = 0$).

На рисунке хорошо видно, что изображающая точка, двигаясь по любой фазовой траектории, войдет в точку $s = -1, z = 1$, то есть все движения материальной точки завершаются на стационарном вертикальном спуске с постоянной скоростью.

Предположим, что (s_*, z_*) — это начальные условия старта. Тогда, очевидно, что отрезок кривой от этой точки до $(0, s_\infty)$ существует лишь виртуально, так сказать, на предыстории движения. На рис. 2 в качестве начальной точки принято значение $z_* = 1/4$ ($v(0) = 2$), соответствующая виртуальная часть выделена пунктиром. Точки с координатами $(0, s_\infty)$ оказываются полезными для анализа. В частности, из рис. 2 следует, что каждому значению $s_m = -1/z_m$ отвечает единственная точка s_∞ , так что s_m является некоторой монотонной функцией от s_∞ . Отметим, что эта функция не зависит от начальных условий и исходных параметров, она носит универсальный характер.

Еще одно удобство состоит в том, что при построении фазового портрета системы (1.3) возникает вопрос [2] определения предельных значений угла φ при $t \rightarrow -\infty$. В предложенном варианте можно задать значение s_∞ и к нему “пристроить” фазовую траекторию, что облегчает проведение глобального параметрического анализа.

Из уравнения (2.3) видно, что наклон $\frac{dz}{ds}$ фазовых траекторий при $z = 0$ не зависит от знака s_∞ . Этот факт легко наблюдается и на рис. 2. Нетрудно показать, что при $z = 0$ вторая производная по s тождественно равна нулю. Это означает, что для достаточно малых значений z имеет место приближенное равенство

$$z \approx -\frac{2(s - s_\infty)}{1 - s_\infty^2}$$

Как можно использовать построенную номограмму? Пусть, например, нам нужна траектория системы (1.1), проходящая через точку (V_1, φ_1) (в частности, это могут быть начальные стартовые условия). Вычисляем по ним значения $z_1 = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{V_1}$, $s_1 = \arcsin \varphi_1$, находим на номограмме эту точку, соответствующую ей кривую и соответствующее значение параметра s_∞ , после чего вычисляем значение $C(s_\infty)$, определяем искомую траекторию из (2.3) сначала в переменных s, z , а затем в исходных переменных V, φ . Рассмотрим для иллюстрации числовой пример. Пусть параметры тела таковы, что $k = 0.00011$, и нас интересует фазовая траектория, проходящая через точку $V_1 = 210$, $\varphi_1 = 0.411$ ($\approx 23^\circ - 24^\circ$). Вычисляем значения

$$z_1 = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{V_1} = 2.04, s_1 = \arcsin \varphi_1 = 0.4$$

На номограмме находим эту точку, соответствующую ей кривую и значение $s_\infty = 0.8$ на ней. Вычисляем $C(s_\infty) \approx 3.32$ и получаем аналитическое выражение $z = (1 - s^2) \left(3.32 - \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s} \right) - s$ искомой фазовой траектории в новых переменных или, если это необходимо, в исходных переменных

$$V^2 = \frac{g}{k} \frac{1}{\cos^2 \varphi \left(3.32 - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) - \sin \varphi}$$

Эту формулу можно было бы получить и непосредственно из (1.1), если воспользоваться первым интегралом в исходных переменных [3]. Такой подход менее удобен для дальнейшего анализа.

4. О траекториях в вертикальной плоскости. Рассмотрим теперь вопрос о траектории материальной точки в вертикальной плоскости. Известно, что эта траектория может быть найдена с помощью квадратур после решения основной задачи внешней баллистики. Соответствующие уравнения в исходных переменных V, φ, t имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \cos \varphi \\ \frac{dY}{dt} &= V \sin \varphi \end{aligned} \tag{4.1}$$

Введем наряду с (1.2) еще нормированные переменные

$$x = \frac{gX}{V^2} = kX, \quad y = \frac{gY}{V^2} = kY,$$

и кинематические уравнения (4.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= v \cos \varphi \\ \frac{dy}{d\tau} &= v \sin \varphi \end{aligned} \tag{4.2}$$

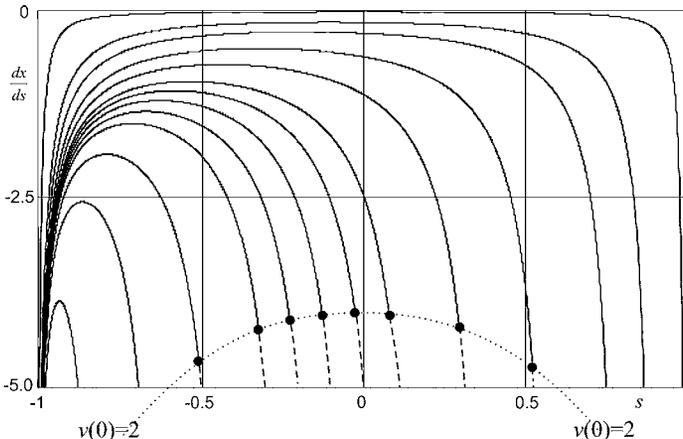


Рис. 3

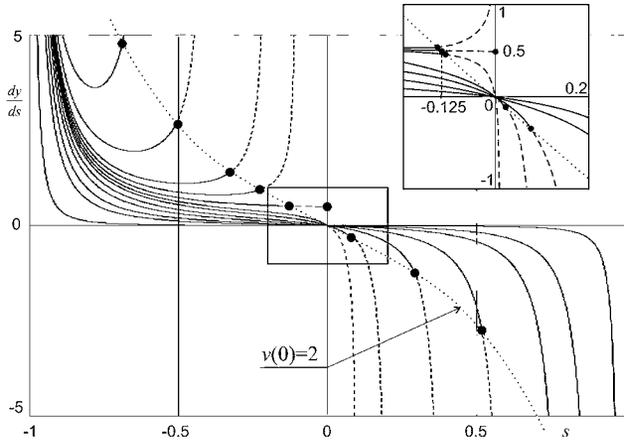


Рис. 4

Нетрудно преобразовать зависимость $z(s)$ в графики зависимостей $v_x(s) = v \cos \varphi = \frac{\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{z(s)}}$ и $v_y(s) = v \sin \varphi = \frac{s}{\sqrt{z(s)}}$, но они непригодны для вычисления квадратур в (4.2).

После замены (2.1) кинематические уравнения примут окончательную форму

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\frac{1}{z(s)\sqrt{1-s^2}} \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{s}{z(s)(1-s^2)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $z(s)$ определяется выражением (2.4); функция $z(s)$ зависит не только от переменной s , но также и от параметра C .

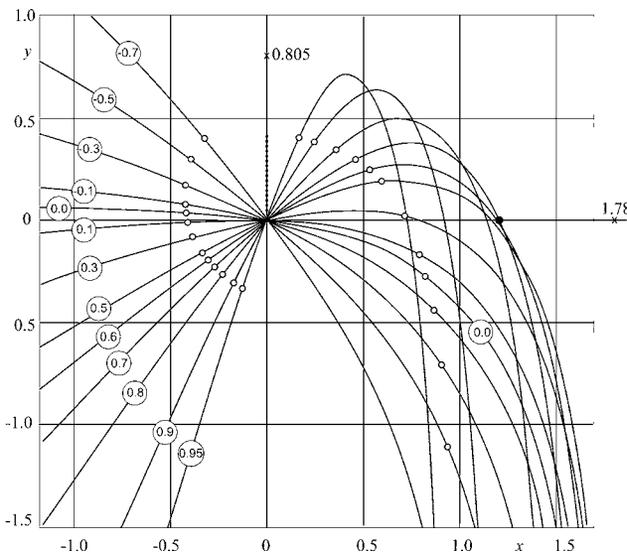


Рис. 5

На рис. 3, 4. приведены графики правых частей системы (4.2).

Эти графики позволяют в принципе осуществлять квадратуры (4.3), так сказать, даже вручную качественно и численно!

Отметим необычное распределение знаков соответствующих величин. Дело в том, что интегрирование этих функций будет осуществляться, так сказать, в обратном направлении, от большего предела к меньшему.

Соответствующие квадратуры вычисляются в любую сторону от любой выбранной начальной точки. Это свойство было использовано авторами настоящей статьи для аппроксимации траектории полета [6] тела даже с учетом переменности коэффициента сопротивления.

Наконец, построим “веер” траекторий движения точки с начальной скоростью $v = 2$ и с различными начальными углами бросания (рис. 5). На левых участках траекторий в кружочках указаны соответствующие значения параметра s_∞ . Кроме того, на траекториях маленькими кружками отмечены точки, в которых скорость v принимает значение 3 (слева) и 1 (справа). Если мы захотим построить такой же веер, но для другой начальной скорости, надо просто сдвинуть каждую траекторию так, чтобы все нужные кружочки собрались в начале координат! Для перевода нормированных значений x и y в натуральные X, Y необходимо использовать коэффициент k .

На осях выделены две точки, на оси y точка $y \approx 0.805$, соответствующая максимальной высоте подъема материальной точки при $s_0 = 1$, на оси x — точка $x \approx 1.2$, обозначающая максимальную горизонтальную дальность, ей отвечает $s_\infty \approx 0.7$, при этом $\varphi(0) \approx 0.689$ ($\approx 39^\circ$).

Очевидно, что каждая траектория имеет две асимптоты, одна — “в прошлом”, слева — выше траекторий, вторая — в будущем, вертикальная справа. В [3] основное внимание уделялось именно обоснованию существования этой правой асимптоты. Самая правая из них имеет координату $x_\infty \approx 1.78$, и ей соответствует $s_\infty \approx 0.2$. Все левые асимптоты — прямые, по которым двигалась бы материальная точка при отсутствии тяжести. Они пересекают ось y , на этой оси **полужирными** точками выделен тот ее участок, который пересекается асимптотами построенных траекторий.

Выводы. Представленные в настоящей статье свойства классической задачи внешней баллистики позволяют использовать их для построения оценок траекторий движения объекта в различных практических задачах. В принципе все отмеченные вычислительные процедуры могли быть реализованы вручную уже во времена Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонард Эйлер.* Исследования по баллистике. М.: ГИФМЛ, 1961. 590 с.
2. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. М.: Изд-во МГУ, 2012. 237 с.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1960, 515 с.
4. *Чернозубов А.Д., Кириченко В.Д., Разин И.И. и др.* Внешняя баллистика. Т. 1. М.: ВАИА им. Ф.Э. Держинского, 1954. 463 с.
5. *Гуськов А.В., Милевский К.Е., Сотенко А.В.* Внешняя баллистика. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 188 с.
6. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Об аппроксимации траектории полета баллистического объекта // Изв. РА РАН. 2023. № 3. С. 38–43.

About the First Integral in the Classical Problem of External Ballistics**B. Ya. Lokshin^{a,#}, V. A. Samsonov^{a,##}**^a*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*[#]*e-mail: blokshin@imec.msu.ru,*^{##}*e-mail: samson@imec.msu.ru*

The transcendental first integral of the classical problem of external ballistics has been retrieved from oblivion. A change of variables was proposed that transformed the integral to a compact form. This allowed for reducing the solution of the problem to constructive quadratures.

Keywords: external ballistics, first integral, new variables, phase portrait

REFERENCES

1. *Leonhard Euler*: Ballistics Studies. Moscow: GIFML, 1961. 590 p. (in Russian)
2. *Lokshin B.Ya., Samsonov V.A.* The Problem of the Motion of a Body in a Resisting Medium. Qualitative Analysis. Moscow: MSU, 2012. (in Russian)
3. *Appell P.* Theoretical Mechanics. Vol. 1. Moscow: Fizmatlit, 1960.
4. *Chernozubov A.D., Kirichenko V.D., Razin I.I. et al.* External Ballistics. Vol. 1. Moscow: Dzerzhinsky VAIA Pub., 1954. 463 p.
5. *Guskov A.V., Milevsky K.E., Sotenko A.V.* External Ballistics. Novosibirsk: NSTU Pub., 2010. 188 p.
6. *Lokshin B.Ya., Samsonov V.A.* On the approximation of the flight path of a ballistic object // *Izv. RAN*, 2023, no. 3, pp. 38–43.

УДК 539.3

**РАЗВИТИЕ ВЗГЛЯДОВ Ю.Н. РАБОТНОВА НА КРИТЕРИИ
ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ**© 2024 г. А. Н. Полилов^{1,*}¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

*e-mail: polilovan@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2023 г.

После доработки 31.01.2024 г.

Принята к публикации 10.02.2024 г.

Кроме известных фундаментальных работ Ю.Н. Работнова в области наследственной упругости и теории ползучести, одной из сторон его научной деятельности стала механика композитов и, в частности, предложенный им новый класс критериев прочности конструктивно анизотропных композитов. Главная особенность подхода Юрия Николаевича – это не попытка построить единую гладкую предельную поверхность в пространстве напряжений, а учет реальных механизмов разрушения, носящих, как правило, направленный характер. Сейчас подобные подходы становятся определяющими в расчетных алгоритмах, моделирующих процесс разрушения с учетом деградации упругих и прочностных свойств, но в период первых публикаций Ю.Н. Работнова они были пионерскими и вызывали определенные дискуссии. Развитие и применение некоторых предложенных Работновым типов критериев прочности волокнистых композитов при растяжении, сжатии и сложном напряженном состоянии обсуждены в данной юбилейной статье.

Ключевые слова: композитный материал, армированные волокнами пластики, механика разрушения, усталость, расслоение, расщепление

DOI: .10.31857/S0032823524020034 EDN: XVBJVI

1. Введение. Академик Юрий Николаевич Работнов, безусловно, относится к плеяде выдающихся ученых-механиков XX столетия [1]. К наиболее известным областям, в которых Ю.Н. Работновым были получены классические фундаментальные результаты, относятся техническая теория оболочек (с анализом краевого эффекта), теория наследственной упругости (1948 г.) [2–4] в приложении к проблеме ползучести и механика повреждаемости, введение параметра поврежденности [5]. Полученные им результаты мирового уровня привели к тому, что Такео Ёкобори, создавая Международный конгресс по разрушению (ICF), пригласил Работнова на должность одного из директоров Конгресса в ранге вице-президента. В конце жизни Юрий Николаевич получил выкованное на медном листе свидетельство признания его Почетным президентом этого Конгресса.

После одной из конференций Конгресса в Мюнхене (1972 г.) Юрий Николаевич окончательно увлекся механикой разрушения [6], и на Международной конференции в МГУ заявил, что не теории упругости, пластичности, ползучести, а именно – механика разрушения и механика композитов являются наиболее интересными и перспективными областями механики твердого тела. Тогда же по инициативе Работнова

начался перевод и издание фундаментальных коллективных монографий [7,8], сыгравших огромную роль в развитии этих областей науки в нашей стране.

Нельзя не отметить педагогическую ценность его учебников [9,10], первый из которых Валентин Валентинович Новожилов в приветственном письме назвал “жемчужиной среди многочисленных учебников по сопротивлению материалов”, а второй по праву можно считать лучшей (вероятно, в мире) энциклопедической монографией по механике твердого тела.

Возможно, это счастливая случайность, но привезенная С.Т. Милейко из Англии книга [11] чрезвычайно понравилась Юрию Николаевичу и была мгновенно переведена и издана. Его заинтересовала задача Гордона об остановке трещины границей раздела [12], и он включил полученный результат в монографию [10]. А далее — развивался интерес к особым механизмам расслоения и расщепления композитов [13,14], и последняя его прижизненная статья [15] была посвящена новой модели множественного расщепления с выпучиванием, приводящим сжимаемое звено бамбука (или композитную трубу) к форме, напоминающей “китайский фонарик”.

Оригинальный взгляд имел Юрий Николаевич и на методы построения предельных поверхностей в пространстве напряжений, приводя иногда строчку Павла Когана “Я с детства не любил овал, я с детства — угол рисовал”. Работнов обосновал новый тип критериев прочности [16] (разд. 1–3), отличающийся от популярных в то время тензорно-полиномиальных критериев, и с обоснованием новых критериев он выступал и на Съезде по механике в Киеве [17], и на Конгрессе в Канаде [18], и на советско-японском симпозиуме в МГУ [19]. Это была еще одна область, которая занимала его в последние годы — механика разрушения композитов, обоснование особых видов критериев прочности конструктивно анизотропных материалов [20–23].

Последняя книга Юрия Николаевича по механике разрушения [24] была издана (и позднее — переиздана) на основе перевода его лекций с французского, которым он блестяще владел еще с детства. В 1979 г. Юрий Николаевич читал во Франции по приглашению университета Пуатье цикл лекций по механике разрушения металлов и композитов. Лекции были столь увлекательными и блестящими, что, по воспоминаниям очевидцев, слушатели (большой частью профессора, а не только студенты) часами не отпускали лектора, засыпая его бесконечными вопросами и просьбами рассказать еще, на которые Юрий Николаевич откликался, не считаясь со временем. Возможно, именно эти перегрузки и привели в скором времени к тяжелому удару, от которого он так и не смог полностью оправиться.

Книгу научного наследия [25] мы составляли только из статей, написанных его рукой (без соавторов), и поэтому все мы можем вновь и вновь насладиться не только глубокими идеями, но и его блестящим русским языком.

Цель данной юбилейной статьи — изложить некоторые идеи Ю.Н. Работнова в области механики разрушения композитов и показать их развитие в современной научной литературе.

2. Предельные поверхности для совместно работающих упруго-пластических структур.

Многие известные авторы (Мизес—Хилл, Малмейстер, Цай-Ву, Гольденблат—Копнов и др.) формулировали критерии прочности анизотропных материалов в виде полинома от инвариантов, представляющих собой свертки тензора напряжений σ_{ij} с “тензорами прочности” четных рангов: $I_1 = A_{rs}\sigma_{rs}$, $I_2 = B_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$, $I = C_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}$ и т.д.

Если ограничиться вторым инвариантом, критерий приобретает вид:

$$I_1^\alpha + I_2^\beta (+I_3^\gamma + \dots) = 1 \quad (2.1)$$

Число констант A_{rs} даже для плоского случая равно трем, B_{ijkl} — шести (в трехмерном случае 6 и 14, соответственно), и нахождение такого большого числа констант прочности из ограниченного числа опытов оказывается неустойчивым: экспериментальные данные описываются одинаково хорошо совершенно различным набором констант, и некоторые из них по произволу приходится назначать равными нулю.

Параметры полиномиальных критериев типа (2.1) можно было бы считать просто коэффициентами регрессионного анализа, подбираемыми по критерию наилучшего соответствия доступному набору экспериментальных данных. Тогда, казалось бы, снимаются вопросы: какие параметры полагать равными нулю, взаимодействием между какими напряжениями можно пренебречь, и просто нужно отбрасывать некоторые прочностные параметры за их малостью. Но основное противоречие при этом не исчезает. Определяемые параметры остаются, по сути, не свойствами материала, а функционалами от имеющихся экспериментальных данных и метода их обработки, и определение большого числа параметров остается неустойчивым.

С другой стороны, критерии типа (2.1) определяют гладкую предельную поверхность (эллипсоид) в пространстве напряжений, и формально по достижению предельной поверхности нельзя ничего сказать о виде разрушения, а это важно при послойных расчетах с учетом деградации свойств монослоев.

Альтернативный подход к построению критериев разрушения был предложен Ю.Н. Работновым [10,16,24] на основе модели совместно работающих упруго-пластических структур, в данном случае — волокон и матрицы. Приближение предельной кривой в плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$ эллипсом для однонаправленного (рис. 1, а) или ортогонально армированного (рис. 1, б) пластика со слабой матрицей вряд ли может считаться удовлетворительным. Действительно, пренебрегая прочностью матрицы, мы получаем ортогональную решетку, которая может выдерживать только напряжения вдоль волокон, но не под углом к ним, и предельная поверхность в координатах $\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_{12}$ представляет собой прямоугольник в плоскости $\sigma_1 - \sigma_2$. Учет ненулевого предела текучести матрицы превращает плоский прямоугольник в “диванную подушку” (рис. 1, б). Разумеется, вводя в уравнение (2.1) инварианты более высоких порядков, можно эту поверхность с плоскими гранями аппроксимировать с любой степенью точности, но число констант и соответствующие трудности их экспериментального определения при этом неизмеримо возрастут. Отсылая читателя за математическими формулировками к статьям [10, 16, 24, 25] Ю.Н. Работнова, можно для волокнистых композитов пояснить геометрию построения сложной предельной

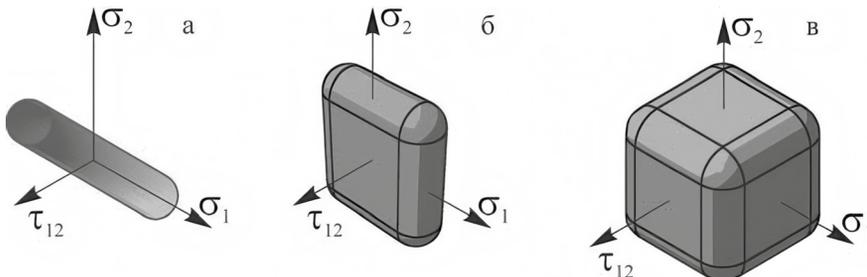


Рис. 1. Предельные поверхности в виде: а — закругленного цилиндра для однонаправленного композита, б — “диванной подушки” (*ottoman cushion*) для ортогонально армированного пластика; в — трехмерного косоугольного параллелепипеда для армирования в трех и более направлениях.

поверхности, которая получается движением центра предельной поверхности для одного компонента по предельной поверхности для другого компонента.

Например, предельная поверхность для ряда параллельных волокон имеет вид отрезка вдоль оси σ_1 (рис. 1, а). Добавляя предельную поверхность для изотропной матрицы в виде эллипсоида, получаем предельную поверхность для однонаправленного пластика в виде цилиндра с закругленными концами. Добавление ортогонального семейства волокон, для которого предельная “поверхность” представляет собой отрезок вдоль оси σ_2 , эквивалентно движению цилиндра вдоль этой оси и превращению поверхности в “диванную подушку” (рис. 1, а) с плоскими гранями и закругленными краями. Добавление третьего семейства волокон, то есть движение этой “подушки” вдоль третьего направления приведет к поверхности в виде существенно трехмерного косоугольного параллелепипеда с закругленными ребрами (рис. 1, в). Такая структура армирования (с тремя и более семействами волокон) лишена главного недостатка ортогонально армированных и однонаправленных пластиков – слабого сопротивления сдвигу и растяжению под углом к волокнам.

Применительно к представленным на рис. 1 предельным поверхностям легко вывести, например, зависимость критического напряжения $\sigma^*(\varphi)$ от угла φ между направлением растяжения и направлением укладки волокон (ось 1). Проекция “вектора” нагружения в координатах $\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_{12}$ выражаются в виде:

$$\sigma_1 = \sigma(\varphi)\cos^2 \varphi, \quad \sigma_2 = \sigma(\varphi)\sin^2 \varphi, \quad \tau_{12} = \sigma(\varphi)\sin \varphi \cos \varphi \quad (2.2)$$

Термин “вектор” используется для наглядности и взят в кавычки, так как компоненты тензора второго ранга преобразуются при повороте системы координат не по векторному правилу. Этот “вектор” (2.2) может “протыкать” боковую поверхность цилиндра на рис. 1, а, уравнение которой имеет вид:

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma^*(90)} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau^*(0)} \right)^2 = 1, \quad (2.3)$$

где $\sigma^*(90)$, $\tau^*(0)$ – прочности при растяжении ортогонально волокнам и на сдвиг вдоль волокон. Условие такого “протыкания” при подстановке (2.2) в (2.3) определяет выражение критерия прочности по условию разрушения матрицы при растяжении под углом к волокнам:

$$\sigma^*(\varphi) = \left[\sin^4 \varphi / \sigma^*(90)^2 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi / \tau^*(0)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.4)$$

Если для наглядности принять прочности матрицы на сдвиг и на растяжение одинаковыми: $\sigma^*(90) = \tau^*(0) = \tau^*$, то из (2.4) получится совершенно простая зависимость, которая подтверждалась в экспериментах:

$$\sigma^*(\varphi) = \frac{\tau^*}{\sin \varphi} \quad (2.5)$$

“Вектор” нагружения может протыкать также сферическую (при $\sigma^*(90) = \tau^*(0) = \tau^*$) концевую часть цилиндра, уравнение которой имеет вид:

$$\left(\sigma_1 - \sigma^*(0) \right)^2 + (\sigma_2)^2 + (\tau_{12})^2 = \tau^*, \quad (2.6)$$

где $\sigma^*(0) (\gg \tau^*)$ – прочность при растяжении вдоль волокон. Подстановкой (2.2) получим из (2.6) квадратное уравнение для определения $\sigma^*(\varphi)$:

$$A\sigma^2(\varphi) - 2B\sigma(\varphi) + C = 0, \quad (2.7)$$

где $A = c^2 + s^4$, $B = c^2 \sigma^*(0)$, $C = \sigma^{*2}(0) - \tau^{*2}$, $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$.

Решение уравнения (1.7) получается довольно громоздким, но поскольку разрыв волокон происходит лишь при весьма малых углах φ , легко показать, что $\sigma^*(\varphi) \rightarrow \sigma^*(0)$ при $\varphi \rightarrow 0$, и для малых углов φ можно с достаточной точностью считать:

$$\sigma^*(\varphi) \approx \sigma^*(0) \quad (2.8)$$

Равенство напряжений (2.5) и (2.8) определяет угол φ^* перехода от разрыва волокон к разрушению матрицы, и можно получить удобную оценку рационального угла малой разориентации: $\varphi^* \approx \arcsin \left| \sigma^*(90) / \sigma^*(0) \right|$, при котором продольная прочность практически не снижается, а сопротивление расщеплению резко растет. Подобная разориентация волокон создается в стволе дерева, и поэтому свилеватая древесина, оставаясь прочной в продольном направлении, имеет гораздо более высокую, чем прямослойная древесина, прочность в поперечном направлении, и поэтому ее очень трудно расколоть.

Для ортогонально армированного пластика (рис. 1, б) “вектор” нагружения может “протыкать” предельную поверхность либо по плоскости $\tau_{12} = \tau^*(0)$, и тогда зависимость прочности имеет вид

$$\sigma^*(\varphi) = \tau^*(0) / (\sin \varphi \cos \varphi), \quad (2.9)$$

либо по скругленному краю, и тогда приближенно можно считать (в зависимости от стороны “подушки”):

$$\sigma^*(\varphi) \approx \sigma^*(0) \text{ или } \sigma^*(\varphi) \approx \sigma^*(90) \quad (2.10)$$

Угол φ^* смены площадки разрушения определяется равенством выражений (2.9) и (2.10):

$$\varphi^* \approx \frac{1}{2} \arcsin \left(2\tau^*(0) / \sigma^*(0) \right) \quad (2.11)$$

Полученные на основе подхода Ю.Н. Работнова выражения критериев прочности однонаправленных и ортогонально армированных пластиков оказываются чрезвычайно простыми по сравнению с тензорно-полиномиальными критериями и достаточно хорошо согласуются с экспериментами по определению прочности в различных направлениях.

3. Критерии прочности типа Кулона – Мора. Ю.Н. Работнов предложил [17–19] формулировать критерии прочности, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов, в виде предельного соотношения между нормальным σ_n и касательным τ_n напряжениями на площадке возможного разрушения, содержащей направление одного из семейств волокон:

$$\Phi(\sigma_n, \tau_n) = 1 \quad (3.1)$$

Простейшее предположение [24,26] о виде функции Φ в (3.1) состоит в том, что она линейна, и тогда, например, для ортогонально армированного пластика можно выписать два критерия на одной (n_1) или на другой (n_2) плоскости возможного разрушения:

$$\sigma_{n_i} + m_i \tau_{n_i} = c_i; \quad i = 1, 2, \quad c_1 = \sigma^*(0), \quad c_2 = \sigma^*(90) \quad (3.2)$$

Используя формулы (2.2) преобразования тензора напряжений при повороте координатных осей на угол φ , получаем из (3.2) для случая одноосного растяжения две зависимости прочности $\sigma^*(\varphi)$ от угла вырезки образца φ :

$$\sigma^*(\varphi) = \frac{c_1}{\cos^2 \varphi + m_1 \sin \varphi \cos \varphi} \text{ при } \varphi \leq \varphi^* \quad (3.3)$$

$$\sigma^*(\varphi) = \frac{c_2}{\sin^2 \varphi + m_2 \sin \varphi \cos \varphi} \text{ при } \varphi > \varphi^* \quad (3.4)$$

При угле φ^* происходит переход от одной плоскости разрушения к другой, и этот угол находится из равенства (3.3) и (3.4), приводящего к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \varphi^*$, из которого находится:

$$\varphi^* = \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{2} \left(m_1 \varepsilon - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_1 \varepsilon)^2 + 4\varepsilon} \right) \right] \approx \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{m_2} \leftarrow \varepsilon \ll 1 \end{cases}; \varepsilon = \frac{c_2}{c_1} \quad (3.5)$$

Зависимости (3.3) и (3.4) представлены на рис. 2 для разных соотношений между числами волокон в ортогональных направлениях и, в частности, для однонаправленного композита, для которого сохраняется и оказывается наиболее естественным тот же подход в предположении, что число волокон в ортогональном направлении равно нулю. Из (3.5) при малых углах $\varphi < \varphi^*$ происходит разрыв волокон, и зависимость

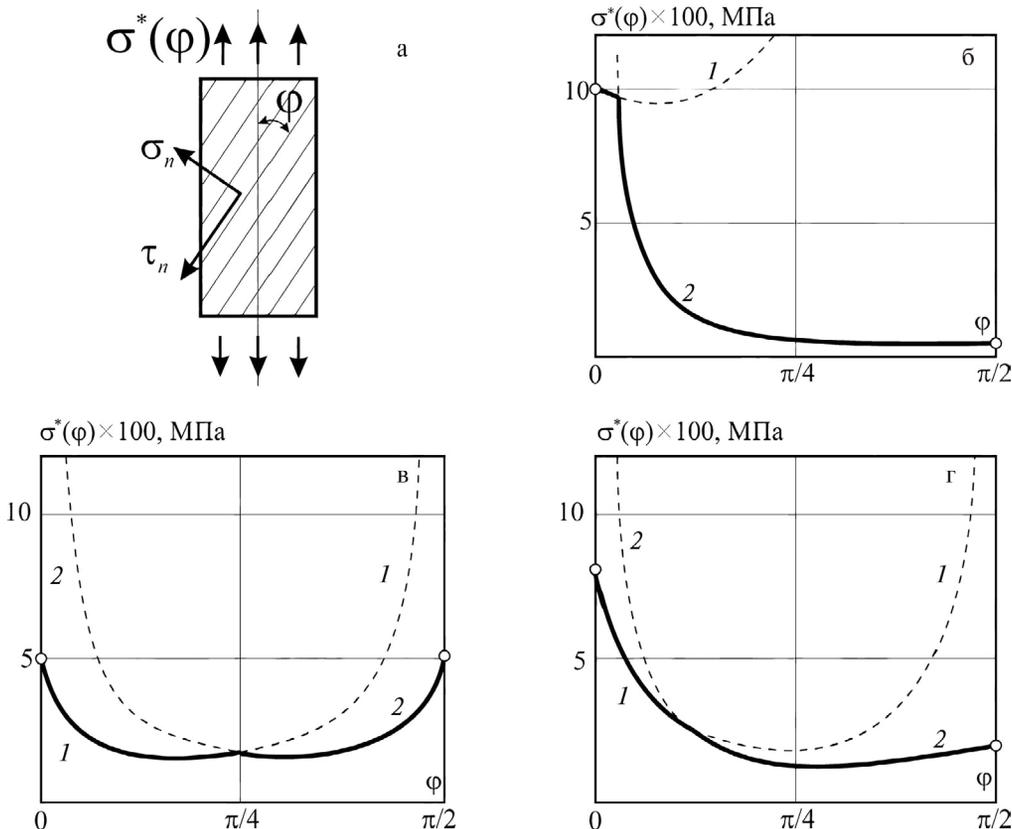


Рис. 2. Схема нагружения (а) и зависимости прочности ортогонально армированных композитов от направления вырезки образцов: б – однонаправленный (0); в – “равнопрочный” (0/90); г – (0₄/90₁). Линия 1 – (2.3); 2 – (2.4).

прочности имеет вид (3.3). При $\varphi \geq \varphi^*$ происходит разрушение матрицы по критерию (3.4).

Для однонаправленных композитов угол φ^* очень мал, например, для углепластиков: $\sigma^*(0) \approx 1000$ МПа, $\sigma^*(90) \approx 25 \div 40$ МПа, $m_2 \approx 0,5 \Rightarrow \varphi^* = 3^\circ \div 4^\circ$. Надежное экспериментальное определение m_1 в таком крайне узком диапазоне углов вряд ли возможно, поэтому для инженерных приложений удобно упростить зависимость (3.3), полагая $\sigma^*(\varphi) = \sigma^*(0)$ при $\varphi \leq \varphi^*$. Погрешность при таком вычислении $\sigma^*(\varphi)$ по сравнению с (3.3) в диапазоне $\varphi < \varphi^*$ не превышает 4%, что вполне допустимо с учетом точности эксперимента и разброса свойств композитов.

На рис. 3 проиллюстрирован метод определения параметров линейных критериев прочности: экспериментальные данные для ортогонально армированного углепластика нанесены в координатах $\sigma_n = \sigma^*(\varphi)\cos^2\varphi$, $\tau_n = \sigma^*(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$.

Прямая линия (3.2) в этих координатах одинаково хорошо согласуется с экспериментом, как и участок эллипса:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma^*(0)}\right)^2 + \left(\frac{\tau_n}{\tau^*}\right)^2 = 1, \quad (3.6)$$

соответствующий следующей зависимости прочности:

$$\sigma^*(\varphi) = \left(\cos^4\varphi / \sigma^{*2}(0) + \sin^2\varphi\cos^2\varphi / \tau^{*2}(0)\right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

Но проведение прямой линии через экспериментальные точки в координатах $\sigma_n - \tau_n$ всегда нагляднее и надежнее, поэтому предпочтение следует отдать линейным критериям (3.2), приводящим к расчетным зависимостям (3.3), (3.4). Напомним, что критическое соотношение между нормальным и касательным напряжением в теориях Кулона и Мора тоже, как правило, предполагалось линейным, но в теории Мора угол площадки разрушения требует определения, а для композитов эта площадка должна содержать направление одного из семейств волокон, и она определяется простым перебором.

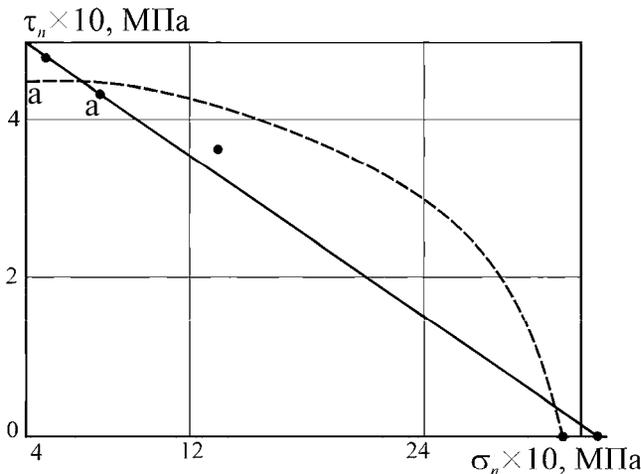


Рис. 3. Предельные кривые для углепластика (0/90) в координатах $\sigma_n - \tau_n$.

Естественно считать φ^* (3.5) оптимальным углом малой разориентации волокон (аналог свилеватой, и потому нерасщепляющейся древесины). При таком угле разориентации прочность вдоль волокон практически не снижается, а сопротивление росту продольных трещин возрастает многократно, исключая расщепления композитного материала при циклических нагрузках и вблизи концентраторов напряжений. Подобным образом поступает и природа: древесные волокна растут не строго вдоль ствола, а совершают полный оборот вокруг ствола на длине примерно 6–10 м. При этом угол разориентации ($\approx 3^\circ \div 5^\circ$) оказывается весьма близким к полученным выше оценкам.

Простота критерия (3.2) позволяет легко распространить его на область усталостного разрушения [20,21], полагая параметры критерия функционалами от истории нагружения или – при постоянной амплитуде – функциями от числа циклов.

С помощью критериев, учитывающих направленный характер разрушения, можно объяснить и описать немонотонные и негладкие поверхности прочности: в простейшем случае – зависимости прочности от направления нагружения. Традиционные тензорно-полиномиальные критерии описывают гладкую предельную поверхность в пространстве напряжений (многомерный эллипсоид), поэтому сложно установить условия возникновения того или иного вида разрушения, что является известным недостатком для послойного анализа, когда в зависимости от вида разрушения моно слоя надо либо полностью исключать его из рассмотрения (после разрыва волокон), либо полагать практически нулем характеристики матрицы (после выполнения условия разрушения поверхности раздела). Сейчас подобные критерии Хашина с установлением коэффициентов деградации свойств в зависимости от вида разрушения считаются общепризнанными, но Ю.Н. Работнов обратил на это внимание еще 50 лет назад.

4. Модель ромба для косоугольно армированных труб. Ю.Н. Работнов предложил [23] модель разрушения композитной ячейки в виде ромба из нерастяжимых нитей (рис. 4), повороту которых препятствует момент $M = 2\mu^2 \sin\alpha \cos\alpha$, возникающий из-за сдвига матрицы и пропорциональный площади ромба.

Сила осевого растяжения, приложенная к вершине ромба, пропорциональна длине малой диагонали $P_z = 2\sigma_z l \sin\alpha$. Толщину ромба можно принять за единицу: она сокращается в конечном уравнении энергетического баланса. Смещение вершины при изменении угла: $\Delta = (2l \cos\alpha)' d\alpha = -2l \sin\alpha d\alpha$. Знак “минус” означает, что с ростом осевых напряжений σ_z угол α убывает. Приравнявая работу осевой силы $\frac{1}{2}P_z \Delta$ работе момента $M d\alpha$, препятствующего изменению угла $d\alpha$, получим

$$\sigma_z^*(\alpha) = \mu^* \operatorname{ctg}\alpha = \sigma_z^*(45) \operatorname{ctg}\alpha = \sigma_z^*(45) / t, \tag{4.1}$$

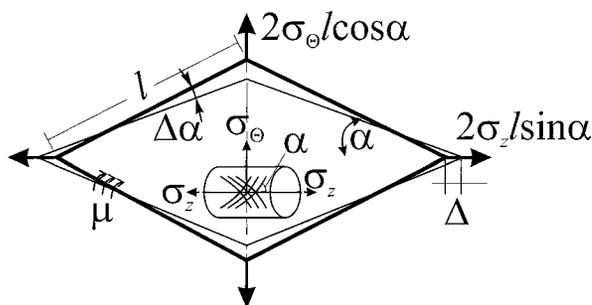


Рис. 4. Схема деформирования элемента косоугольно армированного композита.

где критическое значение распределенного момента μ^* соответствует прочности на растяжение трубы с намоткой $\pm 45^\circ$: $\sigma_z^*(45) = \mu^*$. Удивительно, но модель Ю.Н. Работнова привела в точности к такому же соотношению (4.1), полученному ранее в [22] чисто феноменологически при обработке экспериментов по растяжению стеклопластиковых трубок.

Наиболее интересно применение данной модели для двухосного растяжения. Окружная сила $P_\theta = 2\sigma_\theta l / \cos \alpha$ от действия окружных напряжений σ_θ стремится, напротив, увеличить α , и приведенный выше анализ остается в силе с точностью до замены α на $90^\circ - \alpha$. Как видно на рис. 4, осевые σ_z и окружные σ_θ напряжения пытаются исказить ромб в разных направлениях, что дает (рис. 5) значительный упрочняющий эффект и приводит к следующему условию разрушения:

$$|\sigma_z \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\theta \operatorname{ctg} \alpha| = \sigma_z^*(45) \tag{4.2}$$

Прямые скобки – обозначение абсолютной величины – говорят о смене знака выражения в скобках в зависимости от того, какой член в этой разности больше, что приводит на плоскости $\sigma_\theta - \sigma_z$ к двум параллельным предельным прямым линиям 1, 2 (рис. 5), проходящим через точки $\sigma_z^*(\alpha)$, $\sigma_\theta^*(\alpha)$ на осях.

Для заданного отношения приложенных напряжений, как показано в [26], легко указать оптимальный угол намотки, обращающий в ноль разность в прямых скобках в (3.2). Это означает невозможность перекашивания ромба и перенесение всех усилий только на волокна. Например, в цилиндрической части баллона для сжатого газа (“труба с заглушками”) окружные напряжения примерно вдвое превышают осевые $\sigma_\theta = 2\sigma_z$, и оптимальный угол намотки α^* имеет известное из “нитяной аналогии” значение: $\operatorname{tg}^2 \alpha^* = 2 \Rightarrow \alpha^* = \operatorname{arctg} \sqrt{2} = 54^\circ 44'$.

Отрезок прямой 3 замыкает прямоугольную предельную поверхность, и при углах, близких к оптимальному, когда перекашивание ромба невозможно, происходит разрыв волокон, и реализуется наибольшая прочность. Критерий Работнова, приводящий к кусочно-линейной предельной поверхности, несмотря на свою удивительную простоту, хорошо согласуется с экспериментами (рис. 5) и позволяет легко проектировать оптимальную структуру армирования сосудов давления, намотанных симметричными парами слоев под углами $\pm \alpha_i$.

5. Этюд об образовании кинка при сжатии. Обычно считают, что полосы сдвига (линии Чернова–Людерса) располагаются в плоском образце при сжатии (или растяжении) под углом 45° – по направлению наибольших касательных напряже-

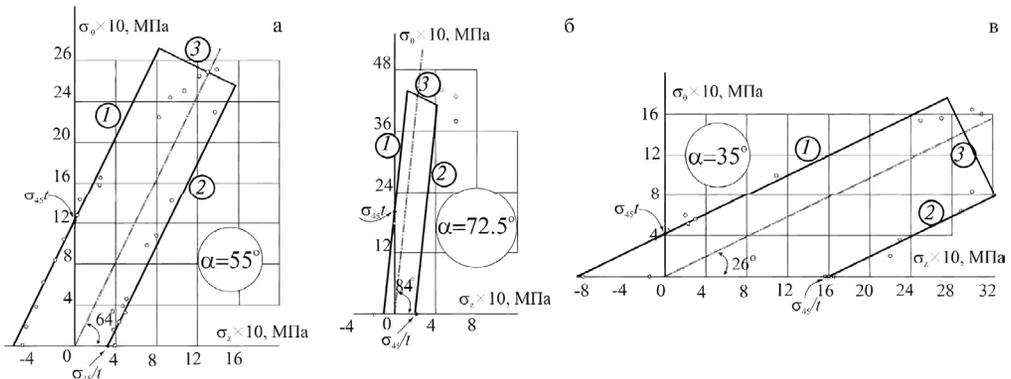


Рис. 5. Предельные поверхности для двухосного нагружения стеклопластиковых труб: с намоткой: $\pm 55^\circ$ (а), $\pm 72.5^\circ$ (б), $\pm 35^\circ$ (в).

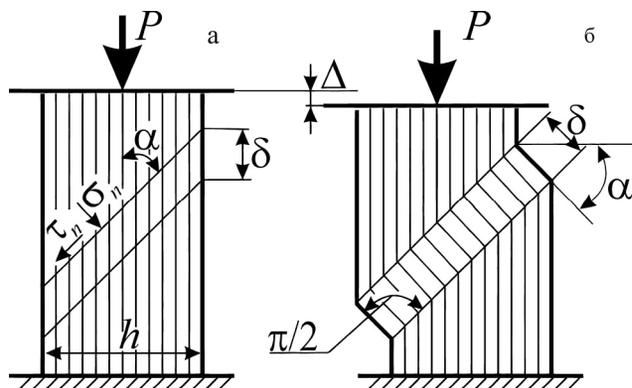


Рис. 6. Схема образования кинка при сжатии.

ний. Но Юрий Николаевич увидел, что в экспериментах на сжатие стеклопластиков возникает совершенно другой угол направленного разрушения. Он сформулировал изящную модель, результат которой до изумления точно совпал с экспериментом. Согласно примененному Работновым энергетическому критерию, кинк должен возникнуть (и возникает) под углом $\alpha = 30^\circ$ к продольной оси [26]. Правда, он решил эту задачу не публиковать, посчитав ее неким частным случаем.

Термин кинк (*kink* – полоса сдвига) уже и в отечественной литературе применяется без кавычек. Образование кинка представляет одну из новых и очень, как выяснилось, важных проблем расчета композитных конструкций. Например, в металлах при действии сжимающих напряжений рост трещин около отверстий не происходит, и надрезы, перпендикулярные направлению сжатия, считаются неопасными. Но в волокнистых композитах, именно при сжатии, возможно появление кинка около отверстий. Кинк – опасный вид растущей (линейной) зоны разрушения, но методы оценки несущей способности волокнистых композитов при сжатии обоснованы все еще недостаточно. И связано это в первую очередь со сложностью и многообразием механизмов разрушения.

Простая модель образования кинка при сжатии композитов (или древесины), проиллюстрированная на рис. 6, основана на следующих допущениях.

Считается, что при повороте волокон в кинке высотой δ , сопровождаемом разрушением матрицы, несущая способность сохраняется до тех пор, пока потерявшие устойчивость волокна не станут перпендикулярны прямолинейной границе кинка. Это предельное состояние показано на рис. 6, б. При образовании кинка происходит уменьшение высоты образца на величину $\Delta = \delta(1 - \sin \alpha)$, и работа внешней приложенной силы сжатия $P = \sigma hw$ (где h и w – толщина и ширина образца) на этом перемещении затрачивается на работу разрушения матрицы, пропорциональную произведению объема кинка $\delta hw / \sin \alpha$ на некоторую (неизвестную) удельную работу разрушения G^* . Приравнявая работу силы и работу разрушения, получим

$$\sigma \delta hw (1 - \sin \alpha) = G^* \delta w \frac{h}{\sin \alpha} \quad (5.1)$$

Из условия минимума напряжения в (5.1): $\partial \sigma / \partial \alpha = 0 \Rightarrow [(1 - \sin \alpha) \sin \alpha]' = 0$ находится угол α^* , под которым энергетически выгодно образование кинка: это либо $\alpha^* = 90^\circ$, что соответствует смятию по торцу, либо $\sin \alpha^* = 1/2$, $\alpha^* = 30^\circ$ – и это значение с высокой точностью подтверждается в опытах на сжатие тканых стеклопластиков.

Кроме удовлетворения чисто познавательного интереса, определение угла кинка α^* позволяет выбрать допустимую длину L рабочей части образца на сжатие, что-

бы разрушение происходило в пределах рабочей зоны: $L > h \operatorname{ctg} \alpha^* \approx 1.7h$. Модель, предложенная Работновым, лишь открывает путь к созданию расчетных методик, может быть, поэтому он решил, что ее еще рано публиковать.

6. Замедленное разрушение композитов при сжатии в результате потери устойчивости волокон. Один из характерных видов разрушения волокнистых композитов при сжатии – это внутренняя потеря устойчивости волокон.

В нулевом приближении из уравнения продольного изгиба шарнирно опертой пластины толщиной h и длиной L (ширину полагаем равной единице, так как она во все соотношения входит линейно и сокращается в окончательных выражениях)

$$B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Pv = 0, \quad B = \frac{1}{12} E_f h^3, \quad P = \sigma h \quad (6.1)$$

можно найти эйлерово напряжение при потере устойчивости, принимая прогиб в виде $v(x) = v_0 \sin(\pi x / L)$,

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E_f h^2}{12 L^2} \quad (6.2)$$

В композите без поддержки матрицы длинные и тонкие волокна теряли бы устойчивость при очень низких сжимающих напряжениях, поэтому для оценки прочности волокнистых композитов на сжатие Работновым принята модель композитной среды в виде чередующихся слоев из материалов волокон и матрицы, и слои волокон толщиной h_f предполагаются идеально упругими с модулем Юнга E_f .

В первом приближении слои матрицы толщиной h_m предполагаются подчиняющимися при сдвиге линейному закону Гука: $\tau = G_m \gamma$. Считается, что вся сжимающая нагрузка P воспринимается упругими волокнами и напряжение в них: $\sigma_f = \sigma_c (1 + h_m / h_f) = \sigma_c / \psi_f$, где σ_c – среднее напряжение в композите, ψ_f – объемная доля волокон. Направив ось x по средней линии одного из слоев, рассмотрим возможность симметричного выпучивания слоев в одну сторону (рис. 7).

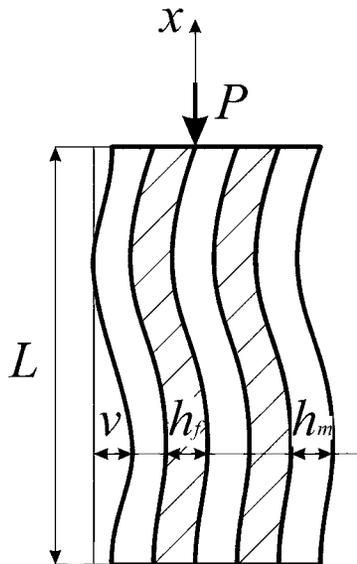


Рис. 7. Схема внутренней потери устойчивости волокон (слоев) при сжатии.

Находящиеся между ними слои более слабой матрицы получают сдвиговую деформацию $\gamma = \partial v(x) / \partial x$, где $v(x) = v_0 \sin \lambda x$ – прогиб упругих слоев. В результате сдвига возникают касательные напряжения τ с двух сторон изогнутого слоя, действие которых препятствует выпучиванию и сводится к распределенному по длине моменту $m = \tau h_f = G_m \gamma h_f$ на единицу ширины. Распределенный момент действует с обратным знаком относительно момента от приложенной продольной силы P , и уравнение изгиба (6.1) принимает вид:

$$B \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + P \frac{\partial v}{\partial x} - m = 0 \tag{6.3}$$

После подстановки прогиба и сокращения на $\lambda \cos \lambda x$ получим $P_e = B \lambda^2 + G_m h_f$, и по аналогии с (6.2)

$$\sigma_{ce} = \frac{1}{12} \lambda^2 \psi_f E_f h_f^2 + G_m \psi_f \tag{6.4}$$

Из (6.4) видно, что при линейном законе упругости для матрицы минимум критического напряжения обеспечивает наибольшая длина волны выпучивания $L = \pi / \lambda$, и основной вклад в эйлерово напряжение для композита дает модуль сдвига матрицы, так как он намного больше эйлерова напряжения (6.2) для волокон.

Во втором приближении принимается нелинейное соотношение между сдвиговыми деформациями и касательными напряжениями в матрице: $\tau = \tau_0 \gamma^{1/m}$. При этом уравнение (6.3) принимает вид:

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + k^2 \frac{dv}{dx} - \beta^m \left(\frac{dv}{dx} \right)^m = 0, \tag{6.5}$$

где $k^2 = P / B$, $\beta^{1/m} = \tau_0 h_f / B$. Степень $1 / m$ в выражении для β выбрана для удобства интегрирования уравнения (6.5).

Чем больше прогиб слоев, тем выше сдвиговая деформация матрицы и возникающие в ней касательные напряжения. Поэтому можно амплитуду прогиба принять пропорциональной касательному напряжению: $v = \tau \sin \lambda x$.

Тогда уравнение (6.5) перепишется в виде:

$$\tau \lambda \cos \lambda x (k^2 - \lambda^2) = (\beta \tau \lambda \cos \lambda x)^{1/m} \tag{6.6}$$

Домножая обе части уравнения (6.6) на $\cos \lambda x d\lambda x$ и интегрируя по λx от $-\pi / 2$ до $+\pi / 2$, получим, что интеграл от левой части (6.6) пропорционален $\pi / 2$, а от правой – числовому коэффициенту – интегралу от дробной степени косинуса:

$$\mu^{1/m} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{m+1}(\lambda x) d(\lambda x). \text{ Тогда уравнение (6.6) примет более простой вид}$$

$$k^2 = \lambda^2 + K \lambda^{-1+1/m}; \quad K = (\beta \mu \tau^{1-m})^{1/m} \tag{6.7}$$

Напомним, что m больше единицы, k^2 пропорционален эйлеровой нагрузке P_e , и из (6.7) следует, что существует критическое значение длины волны выпучивания, реализующее минимум эйлеровой нагрузки:

$$\lambda^* = \left[\frac{K(m-1)}{2m} \right]^{m/(m-1)}$$

Подставляя λ^* в (6.7), можно найти минимальное эйлерово напряжение для критической длины волны при внутреннем выпучивании слоистой структуры.

В третьем приближении Работновым была рассмотрена модель длительной прочности (запаздывающего разрушения – *delayed fracture*). Предполагалось, что волокна

нечувствительны ко времени нагружения, а деформирование матрицы при сдвиге подчиняется закону установившейся ползучести

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{|\dot{\gamma}|}{\dot{\gamma}_0} \right)^{1/n} \quad (6.8)$$

Здесь τ_0 и $\dot{\gamma}_0$ – константы ползучести, одна из которых может быть выбрана по произволу. При симметричном выпучивании слои матрицы получают сдвиговую деформацию $\gamma = \partial v(x,t) / \partial x$, где $v(x,t)$ – прогиб упругих слоев. Принимая за безразмерное время t истинное время, умноженное на $\dot{\gamma}_0$, получаем из (6.8)

$$m = \tau h_f = \tau_0 h_f \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^{1/n}, \text{ и уравнение (6.5) преобразуется к виду}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + k^2 \frac{\partial v}{\partial x} - \beta^{1/n} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^{1/n} = 0 \quad (6.9)$$

После разделения переменных:

$$\tau^{-n} \mu \beta dt = \lambda^{n-1} (k^2 - \lambda^2)^n dt, \quad (6.10)$$

где обозначено $\mu^n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos z)^{\frac{1}{n}+1} dz$; $z = \lambda x$. Если в начальном состоянии ось сжимаемого слоя описывалась уравнением $v_0 = \tau_0 \sin \lambda x$, то из (6.10):

$(\tau^{1-n} - \tau_0^{1-n})(1-n)^{-1} \mu \beta = \lambda^{n-1} (k^2 - \lambda^2)^n t$, и можно найти критическое время, при котором прогиб v и напряжение τ обращаются в бесконечность:

$$t_c = \frac{\mu \beta}{(\lambda \tau_0)^{n-1} (k^2 - \lambda^2)^n (n-1)} \quad (6.11)$$

В реальной структуре композита всегда имеются начальные искривления волокон с разными длинами волн, поэтому для оценки долговечности следует выбрать такое значение λ^* , которому соответствует минимальное критическое время из (6.11). Условие $\partial t_c / \partial \lambda = 0$ дает:

$$\lambda^{*2} = \frac{n-1}{3n-1} k^2 \quad (6.12)$$

Если обозначить L_0 критическую длину шарнирно опертых упругих слоев (без матрицы), для которых данная сила P является эйлеровой, то длина L^* полуволны потери устойчивости композита с матрицей, находящейся в условиях ползучести, дается формулой

$$L^* = L_0 \sqrt{\frac{3n-1}{n-1}} \quad (6.13)$$

Минимальное значение критического времени получается при постановке λ^* из (6.12) в (6.11):

$$t_{\min} = \left[(3n-1) \frac{B}{P} \right]^{\frac{3n-1}{2}} \frac{\mu \beta \tau_0}{(2n \tau_0)^n (n-1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (6.14)$$

Предложенная Работновым довольно простая модель длительного разрушения композита при сжатии позволяет оценить влияние ползучести матрицы на критическое время (6.14) и предсказывает наличие характерной длины (6.13) волны внутреннего выпучивания волокон.

7. Современное развитие идей Ю.Н. Работнова. Фундаментальные результаты Работнова в области механики композитов, в частности, изложенные в [10, 24] и в посвященной 100-летию Учителя книге [26] известны как в нашей стране, так и за рубежом. Его непосредственные ученики: академики И.Г. Горячева, Б.Д. Аннин, чл.-корр. РАН С.А. Шестериков, Е.В. Ломакин, доктора наук С.Т. Милейко, Ю.В. Немировский, Г.И. Брызгалин, А.В. Березин, Ю.В. Суворова, А.А. Мовчан, В.И. Астафьев, А.М. Думанский, А.Н. Полилов — передавали и передают идеи Юрия Николаевича ученикам второго поколения: С.И. Алексеева, И.В. Викторова, Н.А. Татусь, К.А. Хвостунков — всех не перечислишь.

Анализ литературы последних лет показывает огромное число ссылок на основополагающие монографии Работнова [2, 4, 10]. В списке литературы приведены некоторые статьи последних лет: по нелинейному деформированию и ползучести [27–30], по длительной прочности [31,32], по применению и развитию моделей наследственной упругости [33–37]. В свое время Работнов интересовался задачами о концентрации напряжений [5, 13], и его модели получали развитие [12, 38]. В частности, он предложил модель “сдвигового анализа” для оценки концентрации напряжений около захватов при растяжении плоских образцов из композитов со слабой полимерной матрицей, и со временем эта модель была доведена до конкретных расчетных оценок [39, 40].

Неоднократно высказывал Юрий Николаевич соображения о сходстве композитов и биологических материалов типа древесины, но лишь с освоением мощных компьютеров удалось решить интересные задачи моделирования системы криволинейного армирования в зоне сучка [41–43], что позволяет с применением аддитивных технологий [44] проектировать принципиально новые, биоподобные (*bio-inspired*) виды соединений композитных деталей. Статьи [13, 15, 21] породили многие работы, посвященные механизмам разрушения композитов в виде образования трещин расщепления или расщепления [45, 46].

Вслед за Ю.Н. Работновым его ученики обратили свой интерес к биомеханике [47, 48], и в частности, к возможности создания ветвящихся упругих элементов, напоминающих крону дерева с постоянной суммарной площадью ветвей (правило Леонардо) [49, 50].

И наконец, маленькая заметка с идеей формулировки простого критерия прочности для модели ромба из нерастяжимых стержней [23] оказалась чрезвычайно плодотворной и нашла свое развитие в серии работ по рациональному армированию композитных сосудов давления [51–54].

Не только прямые ученики Юрия Николаевича (и их аспиранты) развивали его идеи. Многие известные представители Сибирской и Якутской научных школ были подготовлены в Новосибирском Академгородке и в аспирантуре Института машиноведения РАН и по-прежнему считают академика Ю.Н. Работнова одним из своих Учителей, что неоднократно отмечается в их публикациях [55].

Отметим, что только по базе Scopus за последние 5 лет (2018–2023 гг.) число ссылок на труды Ю.Н. Работнова в мире превышает 800, а за все прошедшие годы — сотни тысяч. Малая часть из них отмечена в приведенном кратком обзоре.

Заключение. Изложить в одной юбилейной статье все оригинальные результаты, полученные Ю.Н. Работновым, и их развитие в сравнительно новой области механики разрушения композитов вряд ли возможно. Задача данной публикации была лишь в том, чтобы показать пять красивых, предложенных Юрием Николаевичем моделей, которые служат основой новых научных направлений, развиваемых его многочисленными учениками.

Вместо эпилога. Незаменимых людей нет, но бывают люди, потеря которых кажется невозможной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломакин Е.В., Полилов А.Н.* Наследственность в науке и в жизни (К столетию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова) // Вестн. РАН. 2014. Т. 84. № 4. С. 60–64.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 с.
3. *Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 223 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
5. *Работнов Ю.Н.* Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3. С. 36–41.
6. *Работнов Ю.Н., Полилов А.Н.* Проблемы разрушения материалов // Механика. 1974. № 5. С. 17–32.
7. Разрушение. Т. 7 / пер. с англ. под ред. *Работнова Ю.Н.* М.: Мир, 1976. 636 с.
8. Композиционные материалы. Том 5. Разрушение и усталость. М.: Мир, 1978. 486 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. М.: Физматлит, 1962. 455 с.
10. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
11. *Гордон Дж.* Почему мы не проваливаемся сквозь пол. М.: Мир, 1971. 272 с.
12. *Полилов А.Н.* Торможение трещины поверхностью раздела // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 68–72.
13. *Полилов А.Н., Работнов Ю.Н.* Разрушение около боковых выточек композитов с низкой сдвиговой прочностью // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 112–119.
14. *Полилов А.Н., Работнов Ю.Н.* Развитие расслоений при сжатии композитов // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 166–171.
15. *Работнов Ю.Н., Полилов А.Н.* О разрушении композитных труб по форме китайского фонарика // Механ. композ. матер. 1983. № 3. С. 548–550.
16. *Работнов Ю.Н.* Уруглопластическое состояние композитной структуры // в сб.: Пробл. гидродин. и механ. сплошн. среды. (к 60-лет. Л.И. Седова) М.: Наука, 1969. С. 411–415.
17. *Полилов А.Н., Работнов Ю.Н.* Критерий прочности для армированных волокнами пластиков // Аннот. докл. на IV Всесоюзн. съезде по теор. и прикл. мех. Киев: 1976. С. 104.
18. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Strength criteria for fiber reinforced plastics // Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials. 4th Int. Conf. Fract. (ICF 4), Waterloo, Canada, June 1977. Vol. 3B. Applications and non-metals. Sess. 3. Composites / Ed. by *Taplın D.M.R.* New York: Pergamon, 1978. P. 1059–1067.
19. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Strength criteria for reinforced plastics // в кн.: “Композиционные материалы”. Докл. Первого советско-японского симпозиума. 1977. М.: МГУ, 1979. С. 375–384.
20. *Работнов Ю.Н., Когаев В.П., Полилов А.Н. и др.* Усталостная прочность однонаправленных углепластиков при растяжении под углом к направлению армирования // Механ. композ. матер. 1985. № 1. С. 44–47.
21. *Работнов Ю.Н., Когаев В.П., Полилов А.Н., Стрекалов В.Б.* Критерий межслойной прочности углепластиков при циклических нагрузках // Механ. композ. матер. 1982. № 6. С. 983–986.
22. *Работнов Ю.Н., Данилова И.Н., Полилов А.Н. и др.* Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе // Механ. полим. 1978. № 2. С. 219–225.
23. *Работнов Ю.Н.* О прочности композитов, армированных в двух направлениях // Механ. полим. 1978. № 5. С. 832–834.
24. *Работнов Ю.Н.* Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
25. *Работнов Ю.Н.* Избр. тр. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
26. *Полилов А.Н.* Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2015. 320 с.
27. *Dumanski A.M., Alimov M.A., Terekhin A.V.* Experiment- and computation-based identification of mechanical properties of fiber reinforced polymer composites // J. Phys. Conf. Ser. 2019. Iss. 1. Art. No. 1158.
28. *Ашпиз Е.С., Суворова Ю.В., Алексеева С.И., Курпьянов Д.Ю., Татусь Н.А.* Моделирование процесса ползучести георешеток при длительных временах нагружения // Завод. лаб. Диагн. матер. 2006. № 1. С. 49–54.
29. *Хохлов А.В.* Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругих материалов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естеств. науки. 2017. № 3. С. 93–123.

30. *Маслов Б.П.* Нелинейная наследственная ползучесть изотропных композитов со случайной структурой армирования // Прикл. механ. 2022. Т. 58. № 1. С. 85–101.
31. *Локощенко А.М., Фомин Л.И., Ларин Т.С.* Прочность при ползучести стержня, растягиваемого в агрессивной среде и имеющего различные двусвязные формы поперечного сечения // ПММ. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–88.
32. *Радченко И.П., Афанасьева Е.А., Саушкин М.Н.* Предсказание высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязко-пластического материала с использованием предварительно нагруженного образца // Вестн. Самар. ГУ. Сер. Физ.-мат. Науки. 2023. Т. 27. № 2. С. 292–308.
33. *Суворова Ю.В.* О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 174–181.
34. *Хохлов А.В.* Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гауп-деформирования, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова // Механ. композ. матер. 2018. № 4. С. 687–708.
35. *Шитикова М.В.* Удар жесткого шара по бесконечной пластинке Кирхгоффа–Лява с учетом объемной и сдвиговой релаксации // Вестн. СПбГУ. Матем. Механ. Астрон. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 139–154.
36. *Власов Д.Д., Полилов А.Н., Татусь Н.А.* О проблемах восстановления кривых ползучести полимерных композитов по результатам вибрационных испытаний // Машин. и инж. образ. 2021. № 3–4. С. 37–48.
37. *Власов Д.Д., Полилов А.Н.* О возможности восстановления ядра ползучести вязкоупругих полимерных композитов на основе частотных зависимостей компонент комплексного модуля // Механ. композ. матер. 2022. № 1. С. 43–58.
38. *Татусь Н.А., Полилов А.Н., Власов Д.Д.* Влияние отверстий на снижение прочности композитных образцов с различной укладкой волокон // Завод. лаб. Диагн. матер. 2022. Т. 88. № 4. С. 58–65.
<https://doi.org/10.26896/1028-6861-2022-88-4-58-65>
39. *Полилов А.Н., Арутюнова А.С., Татусь Н.А.* Влияние концентрации напряжений вблизи захватов на реализацию прочности композитов при растяжении // Завод. лаб. Диагн. матер. 2020. Т. 86. № 11. С. 48–59.
<https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-11-48-59>
40. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Оценка концентрации напряжений вблизи захватов при растяжении образцов из полимерных композитов // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2020. № 5. С. 95–107.
41. *Malakhov A.V., Polilov A.N.* Design of composite structures reinforced curvilinear fibres // Composites Pt. A. Appl. Sci. & Manufact. 2016. Т. 87. С. 23.
42. *Малахов А.В., Полилов А.Н.* Алгоритм построения рациональных траекторий волокон в произвольно нагруженной композитной пластине // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2017. № 5. С. 71–80.
43. *Малахов А.В., Полилов А.Н., Ли Д., Тянь Ш.* Увеличение несущей способности композитных пластин в зоне болтового соединения за счет применения криволинейных траекторий и переменного объемного содержания волокон // Механ. композ. матер. 2021. Т. 57. № 3. С. 411–428.
44. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Технологическая механика композитов, основанная на изучении опыта Природы в создании прочных биологических материалов-конструкций // Пробл. машиностр. и автомат. 2021. № 1. С. 59–85.
45. *Плитов И.С., Полилов А.Н.* Рациональные размеры звена бамбука и композитной трубы, подверженной сжатию, изгибу и кручению // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2015. № 3. С. 58–69.
46. *Полилов А.Н., Власов Д.Д., Татусь Н.А.* Уточненный критерий расслоения при изгибе композитной балки // Завод. лаб. Диагн. матер. 2023. Т. 89. № 10. С. 63–73.
<https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-10-63-73>
47. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Биомеханические принципы оптимального проектирования композитных конструкций // Машиностр. и инж. образ. 2018. № 3 (56). С. 19–26.
48. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Биомеханика прочности волокнистых композитов. М.: Физматлит, 2018. 328 с.

49. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Проектирование разветвляющихся или профилированных композитных элементов по аналогии со структурой кроны дерева // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2017. № 4. С. 76–84.
50. *Полилов А.Н., Татусь Н.А., Тяп Ш., Арутюнова А.С.* Равнопрочные ветвящиеся композитные балки с постоянной суммарной площадью переменных эллиптических сечений // Механ. композ. матер. 2019. Т. 55. № 3. С. 465–482.
51. *Полилов А.Н., Склёмина О.Ю., Татусь Н.А.* Послойный метод расчета и критерии прочности композитных сосудов давления, намотанных симметричными парами слоев. Ч. 1. Особенности послойного метода расчета композитной структуры из симметричных пар слоев // Машиностр. и инж. образ. 2020. № 3 (64). С. 21–30. Ч. 2. Простые критерии прочности для двухосного растяжения косоугольно армированных труб // Машиностр. и инж. образ. 2020. № 4 (65). С. 14–25.
52. *Полилов А.Н., Власов Д.Д., Склёмина О.Ю., Татусь Н.А.* Критерии прочности косоугольно намотанных композитных труб при двухосном растяжении // Пробл. прочн. 2021. № 5. С. 79–88.
53. *Полилов А.Н., Склёмина О.Ю., Татусь Н.А.* Метод проектирования структуры армирования симметричными парами слоев на примере композитного баллона для сжатого газа // Механ. композ. матер. 2021. Т. 57. № 6. С. 1093–1114.
54. *Полилов А.Н., Власов Д.Д., Склёмина О.Ю., Татусь Н.А.* Оценка прочности композитного баллона для сжатого газа // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2022. № 1. С. 57–67.
55. Несущая способность и безопасность металлокомпозитных баков космических аппаратов / под ред. *Москвичёва В.В., Тестоедова Н.А.* Новосибирск: Наука, 2021. 440 с.

Development of the Looks of Yu.N. Rabotnov on Strength Criteria of Composites

A. N. Polilov^{a, #}

^a*Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: polilovan@mail.ru*

Besides the well-known fundamental works of Yu.N. Rabotnov in the field of hereditary elasticity and creep theory, one of the aspects of his scientific activity was the mechanics of composite materials and, in particular, a new class of strength criteria for structurally anisotropic composites proposed by him.

The main feature of Yuri Rabotnov's approach was not an attempt to construct a uniform smooth limiting surface in the stress-space, but taking into account real fracture mechanisms, which, as a rule, are directional in nature.

Now such approaches become crucial in calculation algorithms modeling the fracture process with taking into account the degradation of elastic and strength properties, but in the period of the first Yu. N. Rabotnov's papers they were pioneering and caused certain discussions. Development and application of some of Rabotnov's proposed types of strength criteria for fiber-reinforced composites in tension, compression and complex stress state are discussed in this anniversary paper.

Keywords: composite material, FRP, strength criteria, fracture mechanics, fatigue, delamination, splitting

REFERENCES

1. *Lomakin E.V., Polilov A.N.* Hereditary in science and in living (to 100-years jubilee of Yu.N. Rabotnov // Vestn. RAS, 2014, vol. 84, no. 4, pp. 60–64 (in Russian)
2. *Rabotnov Yu.N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 2014. 752 p. (in Russian)
3. *Rabotnov Yu.N., Mileiko S.T.* Low-Time Creep. Moscow: Nauka, 1970. 223 p. (in Russian)
4. *Rabotnov Yu.N.* Elements of Hereditary Mechanics of Solids. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (in Russian)
5. *Rabotnov Yu.N.* Effect of stress concentration on long-time strength // Mech. of Solids, 1967, no. 3, pp. 36–41. (in Russian)
6. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Problems of fracture of materials // Mehanika, 1974, no. 5, pp. 17–32. (in Russian)

7. *Fracture. Vol. 7.* / Transl. ed. *Rabotnov Yu.N.* Moscow: Mir, 1976. 636 p. (in Russian)
8. *Composite Materials. Vol. 5.* Fracture and Fatigue. Moscow: Mir, 1978. 486 p. (in Russian)
9. *Rabotnov Yu.N.* Materials Resistance. Moscow: Fizmatlit, 1962. 455 p.
10. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of Deformable Solids. Moscow: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
11. *Gordon J.* New Strength Theory. Moscow: Mir, 1971. 272 p. (in Russian)
12. *Polilov A.N.* Crack arrest by weak interface // *Mech. of Solids*, 1974, no. 1, pp. 68–72. (in Russian)
13. *Polilov A.N., Rabotnov Yu.N.* Fracture of low shear strength composites near edge notches // *Mech. of Solids*, 1976, no. 6, pp. 112–119. (in Russian)
14. *Polilov A.N., Rabotnov Yu.N.* The development of delaminations under compression of composites // *Mech. of Solids*, 1983, no. 4, pp. 166–171. (in Russian)
15. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* On the fracture of composite pipes by shape of Chinese lantern // *Mech. of Compos. Mater.*, 1983, no. 3, pp. 548–550. (in Russian)
16. *Rabotnov Yu.N.* Elasto-plastic state of composite structure // in: *Problems of Hydro-Dynamics and Mechanics of Continuous Media*. Moscow: Nauka, 1969. pp. 411–415. (in Russian)
17. *Polilov A.N., Rabotnov Yu.N.* Strength criterion for FRP // in: *Proc. IV All-Union Conf. on Theor.&Appl. Mech.* Kiev: 1976. p. 104. (in Russian)
18. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Strength criteria for fiber reinforced plastics // *Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*. 4th Int. Conf. Fract. (ICF 4), Waterloo, Canada, June 1977. Vol. 3B. Applications and Non-Metals. Sess. 3. Composites / Ed. by *Taplin D.M.R.* N.Y.: Pergamon, 1978. pp. 1059–1067.
19. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Strength criteria for reinforced plastics // in: *Composite Materials. First USSR–Japanese Symp.*, 1977, Moscow, MSU, 1979, pp. 375–384.
20. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N., Kogaev V.P., et al.* Fatigue strength of unidirectional CFRP under tension at the angle to direction of reinforcement // *Mech. Compos. Mater.*, 1985, no. 1, pp. 44–47. (in Russian)
21. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N., Kogaev V.P. et al.* Interlaminar strength criterion for CFRP under cyclic loading // *Mech. Compos. Mater.*, 1982, no. 6, pp. 983–986. (in Russian)
22. *Rabotnov Yu.N., Danilova I.N., Polilov A.N. et al.* Strength investigation of wounded epoxy CFRP and GFRP under torsion, tensile and 3-point bending load // *Mech. Polym.*, 1978, no. 2, pp. 219–225. (in Russian)
23. *Rabotnov Yu.N.* On strength of two-directions reinforced composites // *Mech. Polym.*, 1978, no. 5, pp. 832–834 (in Russian)
24. *Rabotnov Yu.N.* Introduction into Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1987, 80 p. (in Russian)
25. *Rabotnov Yu.N.* Problems of Deformable Solids Mechanics. Selected Papers. Moscow: Nauka, 1991. 196 p. (in Russian)
26. *Polilov A.N.* Etudes on Mechanics of Composites. Moscow: Nauka, 2015. 320 p. (in Russian)
27. *Dumanski A. M., Alimov M.A., Terekhin A.V.* Experiment- and computation-based identification of mechanical properties of fiber reinforced polymer composites // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, iss. 1, art. no. 1158.
28. *Ashpiz E.S., Suvorova Yu.V., Alexeeva S.I. et al.* Modelling of creep process of geo-grids at long-time loading // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2006, no. 1, pp. 49–54. (in Russian)
29. *Khokhlov A.V.* The analysis of own properties of creep curves under step loading, being born from non-linear Rabotnov's equations for visco-elastic materials // *Vestn. Bauman MSTU. Natural Sci.*, 2017, no. 3, pp. 93–123. (in Russian)
30. *Maslov B.P.* Nonlinear hereditary creep of isotropic composites of random structure // *Int. J. Appl. Mech.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 75–90.
31. *Lokoshenko A.V., Fomin L.V., Larin N.S.* Creep rupture strength of rod stretched in an aggressive medium with various two-connected forms of their cross-section // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1277–1294.
32. *Radchenko V.P., Afanas'eva E.A., Saushkin M.N.* Prediction high temperature and long-term strength of visco-plastic material using a leader sample // *Vestn. Samar. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 27, no. 2, pp. 292–308. (in Russian)
33. *Suvorova Yu.V.* On Rabotnov's non-linear hereditary-type equation and its applications // *Mech. of Solids*, 2004, no. 1, pp. 174–181. (in Russian)
34. *Khokhlov A.V.* The analysis of properties of relaxation curves with initial stage of ramp-deformation, being born from Rabotnov's non-linear hereditary theory // *Mech. Compos. Mater.*, 2018, no. 4, pp. 687–708.

35. *Shitikova M.V.* Impact of rigid sphere on an infinite viscoelastic Kirchhoff-Love plate considering volume and shear relaxations // *Vestn. St. Pb. Gos. Univ. Ser. Math., Mech., Astron.*, 2023, vol. 10 (68), no. 1, pp. 139–154. (in Russian)
36. *Vlasov D.D., Polilov A.N., Tatus N.A.* On the problems of creep curves prediction for polymeric composites using vibration tests // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2021, no. 3–4, pp. 37–48. (in Russian)
37. *Vlasov D.D., Polilov A.N.* The possibility of creep prediction of viscoelastic polymer composites using frequency dependences of complex modulus components // *Mech. Compos. Mater.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 274–289.
38. *Tatus N.A., Polilov A.N., Vlasov D.D.* The effect of holes on the strength reduction of composite specimens with different structure of fiber reinforcement // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2022, vol. 88, no. 4, pp. 58–65. (in Russian)
39. *Polilov A.N., Arutunova A.S., Tatus' N.A.* Effect of stress concentration near grips on composite strength realization under tension // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2020, vol. 86, no. 11, pp. 48–59.
40. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Estimating stress concentration near grips under tension of polymer composite samples // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2020, vol. 49, no. 5, pp. 446–456.
41. *Malakhov A.V., Polilov A.N.* Design of composite structures reinforced curvilinear fibres // *Compos. Pt. A. Appl. Sci.&Manuf.*, 2016, vol. 87, pp. 23–31.
42. *Malakhov A.V., Polilov A.N.* Design algorithm of rational fiber trajectories in arbitrarily loaded composite plate // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 5, pp. 479–487.
43. *Malakhov A.V., Polilov A.N., Li D, Tian X.* Increasing the bearing capacity of composite plates in the zone of bolted joints by using curvilinear trajectories and a variable fiber volume fraction // *Mech. Compos. Mater.*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 287–300.
44. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Technological mechanics of composites, based on learning of Nature experience in design of bio-materials&structures // *Probl. Mashinostr. i Avtomat.*, 2021, no. 1, pp. 59–85. (in Russian)
45. *Plitov I.S., Polilov A.N.* Rational dimensions of segments of bamboo stems and composite tubes subjected to compression, flexure, and torsion // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2015, vol. 44, no. 3, pp. 239–248.
46. *Polilov A.N., Vlasov D.D., Tatus' N.A.* Precise criterion of delamination of composite beam under bending // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2023, vol. 89, no. 10, pp. 63–73.
47. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Biomechanical principles of optimum design of composite constructions // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2018, no. 3 (56), pp. 19–26. (in Russian)
48. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Biomechanics of Strength of Fibrous Composites. Moscow: Fizmatlit, 2018. 328 p. (in Russian)
49. *Polilov A.N., Tatus N.A.* Designing branching or shaped composite elements by analogy with the structure of treetops // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 385–393.
50. *Polilov A.N., Tatus N.A., Tian X., Arutjunova A.S.* Equistrong branchy composite beams with a constant total area of variable elliptic cross sections // *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 465–482.
51. *Polilov A.N., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A.* Ply-by-ply calculation method and failure criteria of composite pressure vessels wounded with symmetric pair of layers. Pt. 1. Features of ply-by-ply design method for composite structure made of symmetric pair of layers // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2020, no. 3 (64), pp. 21–30.
Pt. 2. Simple strength criteria for angle-ply reinforced tubes under two-axis tension // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2020, no. 4 (65), pp. 14–25. (in Russian)
52. *Polilov A.N., Vlasov D.D., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A.* Strength criteria of obliquely wound composite tubes under biaxial tension // *Strength of Mater.*, 2021, vol. 53, no. 5, pp. 765–774. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00342-7>
53. *Polilov A.N., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A.* Design method of reinforcement structure with symmetric pairs of layers by the example of composite gas tank // *Mech. Compos. Mater.*, 2022, vol. 57, no. 6, pp. 769–784. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-09998-x>
54. *Polilov A.N., Vlasov D.D., Sklemina O.Yu. Tatus' N.A.* Evaluation of the strength of a composite cylinder for compressed gas // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2022, vol. 51, no. 1, pp. 46–54. <https://doi.org/10.3103/S1052618822010083>
55. *Load Capacity and Safety of Metal-Composite Gas Tanks for Space Apparatus / Ed. by Moskvichev V.V., Testoedov N.A.* Novosibirsk. Nauka, 2021. 440 p. (in Russian)

УДК 539.3

ЗАДАЧА ТРЕХТОЧЕЧНОГО ИЗГИБА УПРУГОЙ БАЛКИ ИЗ ПОРИСТОГО МЕТАЛЛА

© 2024 г. Б. Д. Аннин^{1,*}, В. М. Садовский^{2,**}, О. В. Садовская^{2,***}¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия²Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

*e-mail: bdannin@mail.ru,

**e-mail: sadov@icm.krasn.ru,

***e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru

Поступила в реакцию 30.01.2024 г.

После доработки 10.03.2024 г.

Принята к публикации 20.03.2024 г.

С помощью численных методов строится решение физически и геометрически нелинейной задачи трехточечного изгиба упругой балки прямоугольного сечения из пористого металла. В отличие от классического варианта задачи для однородной балки учитывается неоднородность по сечению из-за уплотнения материала за счет схлопывания пор, которое происходит в зоне сжатия при достаточно больших прогибах. Для описания упругого состояния пористого металла применяется диаграмма «напряжение – деформация» бимодульной среды. Приводятся результаты расчетов сильного изгиба балки из пеноалюминия низкой пористости, демонстрирующие отличие решения в сравнении с аналогичными решениями для балок из однородного пористого и уплотненного материала.

Ключевые слова: металлическая пена, упругость, пористость, трехточечный изгиб

DOI: 10.31857/S0032823524020043 EDN: XUTZSL

1. Введение. Пористые металлы (металлические пены) – новые искусственные материалы, которые обладают рядом важных свойств, таких как низкая плотность и теплопроводность, хорошие демпфирующие и звукопоглощающие свойства [1–3]. Они имеют широкую область применения в автомобилестроении, авиастроении, аэрокосмической и других отраслях промышленности [4, 5]. В электронике используются ультраалегкие металлические пены, плотность которых ниже 10 мг/см^3 [6]. В судостроении применяются сферопласты – композитные материалы с включениями в виде тонкостенных пустотелых стеклянных сфер и другие хаотически армированные композиты на эпоксидной основе, обладающие аналогичными деформационными характеристиками [7].

Способность пористых металлов эффективно поглощать энергию в процессе пластической деформации открывает перспективы их применения для изготовления бамперов автомобилей и элементов кабин и кузовов, так называемых «сминаемых зон». Их можно использовать в технических устройствах в качестве разрушаемых предохранителей, которые рассеивают энергию динамического удара, предотвращая разрушение механической системы, а также для хранения и транспортировки материалов, чувствительных к изменению температуры, взрывоопасных веществ и радиоактивных материалов. Еще одна перспективная область применения, развиваемая

в последнее время – баллистическая защита. Экспериментальные исследования [8] показали, что пористые металлы имеют хороший потенциал при изготовлении демпфирующих прослоек легкой брони.

К математическому моделированию пористых металлов в задачах статики широко применяется метод конечных элементов [9]. Большое число работ посвящено построению и численному исследованию дискретных моделей (см. список цитируемой литературы [10]). Математическая модель для описания динамического деформирования, учитывающая пороговое повышение прочности материала при схлопывании пор в рамках механики сплошной среды, предложена в [11]. На основе этой модели был разработан программный комплекс для численного решения краевых задач и проведены тестовые расчеты. Рассматривалась задача об одномерных движениях с ударными волнами, вызванными внезапным приложением равномерно распределенного давления на границе пористого полупространства, имеющая точное решение. Было показано, что в зависимости от начальной пористости, давления и механических параметров среды реализуются одноволновая конфигурация из упругой волны уплотнения или одна из двухволновых конфигураций. В первой из них схлопывание пор и упругое сжатие уплотненного материала до предельного упругого состояния происходит на фронте предвестника, за которым следует пластическая ударная волна. Такое поведение характерно для низкопористых металлов. Во второй конфигурации, характерной для высокопористых металлов, на фронте упругого предвестника материал переходит в предельное состояние, в котором происходит пластическая потеря устойчивости пористого скелета. Поры схлопываются на узком фронте пластической волны уплотнения, движущейся с меньшей скоростью, чем скорость пластической волны в уплотненном материале. Решались также задачи в двумерной постановке. В частности, проводилось сравнение результатов расчетов с точным решением задачи о квазистатическом расширении цилиндрической полости в пористой среде, которое построено в [12].

В настоящей работе решается задача трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения при малых деформациях и больших прогибах, обусловленных конечными поворотами ее элементов. Такое приближение в случае чистого изгиба приводит к уравнению элаستيки Эйлера [13]. Рассматриваемая схема нагружения достаточно просто реализуется в эксперименте при наличии минимального оборудования, и на ее основе можно разработать простой способ определения феноменологических параметров пористых металлов. В математической модели учитывается пороговое повышение жесткости материала при схлопывании пор. Особенность полученного решения связана с тем, что нейтральная линия при изгибе смещается относительно срединной линии в сторону уплотненной части сечения балки, причем величина смещения меняется вдоль ее оси.

2. Постановка задачи. Балка прямоугольного сечения из пористого металла установлена на двух опорах, как это показано на рис. 1, и находится под действием сосредоточенной силы $2P$. Длина балки равна $2l$, опоры удалены от середины (точки приложения силы) на расстояние $l_1 < l$. Опоры могут быть неподвижными (рис. 1, а) или скользящими (рис. 1, б). В первом случае балка соскальзывает с них

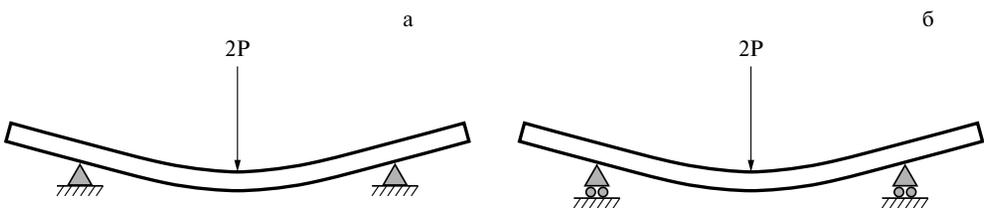


Рис. 1. Схемы нагружения балки.

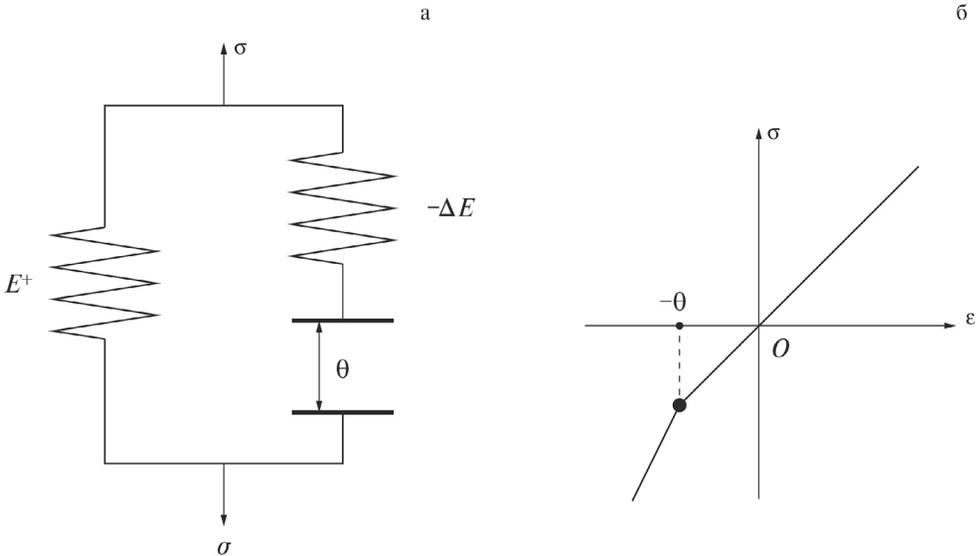


Рис. 2. Реологическая схема (а) и σ — ε диаграмма (б) низкопористого металла.

в точках контакта. Во втором случае скольжения не происходит и опоры перемещаются вместе с изгибаемой балкой. Предполагается, что толщина балки $h \ll l$ многократно превышает характерный размер пор. Материал считается билинейным. Модуль упругости при растяжении и при сжатии до момента схлопывания пор обозначается через E^+ , после схлопывания — через E^- . Если значение действующей силы ниже некоторого критического значения $P < P_0$, то схлопывания пор пористого скелета не происходит, и реализуется классическое решение задачи трехточечного изгиба с модулем упругости E^+ . Если значение выше критического, то в окрестности точки приложения силы образуется зона схлопывания пор, которая увеличивается с ростом P , распространяясь по направлению к срединной оси балки и к опорам. Зоны схлопывания могут образовываться также в окрестности опор за счет сжатия под действием сил реакции, но этот эффект в математической модели не рассматривается.

2.1. *Цилиндрический изгиб.* Реологическая схема и диаграмма одноосной деформации пористого металла с начальной пористостью θ представлены на рис. 2. Определяющее уравнение, учитывающее эффект схлопывания пор, принимает вид [14]:

$$\sigma = \begin{cases} E^+\varepsilon, & \text{если } \varepsilon \geq -\theta \\ E^-\varepsilon - \Delta E\theta, & \text{если } \varepsilon < -\theta \end{cases}, \Delta E = E^+ - E^- < 0 \quad (2.1)$$

При цилиндрическом изгибе деформация определяется по формуле $\varepsilon = y / R$, где R — радиус кривизны, y — координата точки поперечного сечения балки, отсчитываемая от нейтральной линии, продольная деформация которой равна нулю. Всюду ниже через h_+ и h_- обозначены толщины сечений (слоев) с раскрытыми и сжатыми порами, $h = h_+ + h_-$ — толщина балки, h_0 — расстояние от нейтральной линии $y = 0$ до линии схлопывания пор (рис. 3).

Из непрерывности напряжения при $y = -h_0$ следует равенство $h_0 = \theta R$, которое справедливо только если $R < R_0 = h / (2\theta)$. Если $R \geq R_0$, то изгибная жесткость балки вычисляется по формуле $D^+ = E^+h^3 / 12$ для цилиндрического изгиба однородной балки с модулем упругости E^+ .

Далее рассмотрим случай $R < R_0$, когда вблизи нижней стороны балки при цилиндрическом изгибе образуется зона схлопывания пор. Из условия равенства нулю осевого усилия получим уравнение для вычисления величин h_{\pm} :

$$\int_{-h_0}^{h_+ - h_0} E^+ y dy + \int_{-h_- - h_0}^{-h_0} (E^- y - \Delta E h_0) dy = 0 \Rightarrow \Delta E h_+^2 + 2E^- h h_- E^- h^2 - 2E^+ h h_0 = 0$$

Отсюда

$$h_+ = \frac{\sqrt{E^+ E^- h^2 - 2\Delta E E^+ h_0 - E^- h}}{\Delta E}, \quad h_- = h - h_+ \quad (2.2)$$

Формула для изгибной жесткости с учетом неоднородности распределения модуля упругости по сечению балки принимает вид:

$$D = \int_{-h_0}^{h_+ - h_0} E^+ y^2 dy + \int_{-h_- - h_0}^{-h_0} (E^- y - \Delta E h_0 y) dy$$

После вычисления интегралов и простых преобразований получим

$$\frac{D}{D^+} = \frac{4}{E^+ h^3} (E^+ h_+^3 + E^- h_-^3) + \frac{12h_0}{h^3} (h h_0 - h_+^2) + \frac{6}{E^+ h^3} (E^+ + E^-) h_-^2 h_0$$

Удобно представить отношение изгибных жесткостей через безразмерные параметры $\xi = 2h_0 / h < 1$ и $\psi = E^- / E^+ > 1$:

$$\frac{D}{D^+} = 4 \left(\frac{h_+}{h} \right)^3 + 4\psi \left(\frac{h_-}{h} \right)^3 + 3\xi^2 - 6\xi \left(\frac{h_+}{h} \right)^2 + 3\xi(1 + \psi) \left(\frac{h_-}{h} \right)^2$$

В силу (2.2)

$$\frac{h_+}{h} = \frac{\psi - \sqrt{\psi + (1 - \xi)\psi}}{\psi - 1}, \quad \frac{h_-}{h} = \frac{\sqrt{\psi + (1 - \xi)\psi} - 1}{\psi - 1}$$

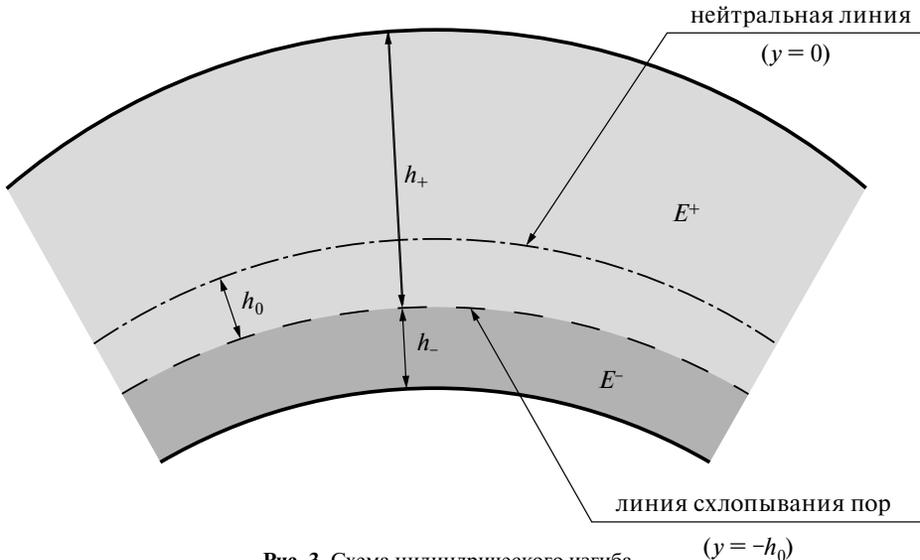


Рис. 3. Схема цилиндрического изгиба.

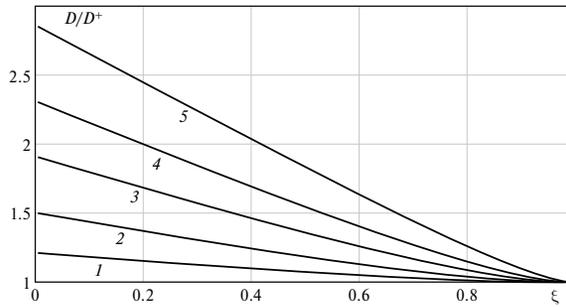


Рис. 4. Зависимость безразмерной изгибной жесткости D / D^+ от параметра ξ для $\psi = 1.5, 2.5, 5, 10, 30$ (кривые 1–5, соответственно).

Подстановка этих формул в предыдущее выражение приводит к окончательному результату:

$$\frac{D}{D^+} = \frac{(4 - 3\xi)\psi^2 + 3\xi + 4\psi + 2(\xi(\psi - 1) - 4\psi)\sqrt{\psi - \xi(\psi - 1)}}{(\psi - 1)^2} \quad (2.3)$$

Зависимость отношения жесткостей (2.3) от параметра ξ , пропорционального радиусу кривизны, представлена графически на рис. 4 для различных значений ψ . На рис. 5 приведены графики зависимости h_+ / h от ξ для таких же значений ψ .

Заметим, что предельное значение отношения D / D^+ при больших значениях параметра ψ , когда $E^- \gg E^+$, равно $4 - 3\xi \leq 4$. Толщина слоя с раскрытыми порами h_+ при $\psi \rightarrow \infty$ стремится к h , а толщина уплотненного слоя убывает к нулю.

2.2. *Задача трехточечного изгиба.* Уравнение, описывающее плоский изгиб тонкой балки прямоугольного сечения при произвольной величине прогиба, выводится из вариационного принципа Лагранжа, согласно которому в состоянии равновесия достигается минимум интеграла упругой энергии:

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l D(s) |\varphi'(s)|^2 ds + 2P y(0) \quad (2.4)$$

Здесь $\varphi(s)$ – угол наклона изогнутой оси балки к оси x , s – длина дуги, отсчитываемая от середины. Координаты точки на изогнутой оси определяются через угол по формулам

$$x(s) = \int_0^s \cos \varphi(s_1) ds_1, \quad 2y(s) = \int_{-l_0}^s \sin \varphi(s_1) ds_1 - \int_s^{l_0} \sin \varphi(s_1) ds_1, \quad (2.5)$$

учитывающим симметрию задачи и граничные условия на опорах. Здесь l_0 – расстояние от середины балки до точки контакта с опорой вдоль изогнутой оси балки, которое в случае неподвижных опор зависит от стрелы прогиба из-за проскальзывания и отличается от l_1 . В случае скользящих опор расстояние l_1 меняется с изгибом, в то время как l_0 остается постоянным. Вариационное уравнение Эйлера для задачи минимизации имеет вид:

$$(D(s)\varphi'(s))' = -P \cos \varphi \begin{cases} 1, & \text{если } -l_0 < s < l_0 \\ 0, & \text{если } l_0 < |s| < l \end{cases} \quad (2.6)$$

Полученное уравнение соответствует физически и геометрически нелинейной модели изгиба. Форма изогнутой оси балки определяется через решение задачи (2.5), (2.6) с учетом граничных условий симметрии относительно середины: $\varphi(0) = 0$ и отсутствия изгибающего момента на правом конце: $\varphi'(l) = 0$. Зависимость изгибной жесткости от длины дуги задается формулой (2.3) совместно

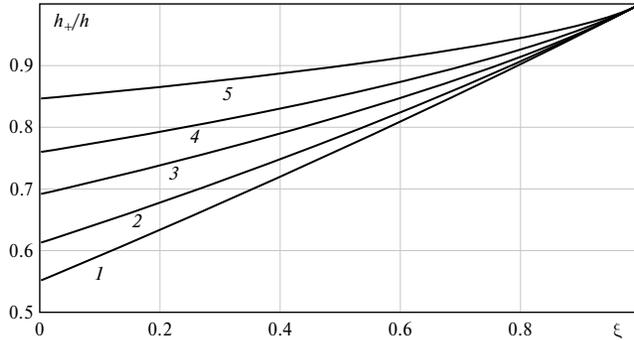


Рис. 5. Зависимость безразмерной толщины h_+ / h от параметра ξ для $\psi = 1.5, 2.5, 5, 10, 30$ (кривые 1–5, соответственно).

с уравнением: $h_0 = \theta / \varphi'(s)$, которое следует из определения кривизны. Если опоры неподвижны, то величина l_0 находится из условия: $y(l_0) = 0$ при $x(l_0) = l_1$. Если опоры скользящие, то из этого же условия определяется расстояние l_1 при фиксированном значении l_0 . В безыгбном положении балки l_0 принимается равным половине расстояния между опорами.

2.3. Точное решение задачи при $\theta = 0$. Уравнение (2.6) интегрируется в квадратурах в случае разномодульного материала, определяющее уравнение которого совпадает с (2.1), если положить $\theta = 0$. Для такого материала изгибная жесткость постоянна – не зависит от s

$$h_+ = \frac{\sqrt{E^-} h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}, \quad h_- = \frac{\sqrt{E^+} h}{\sqrt{E^-} + \sqrt{E^+}}$$

$$D = \frac{1}{3} (E^+ h_+^3 + E^- h_-^3)$$

Получаемое решение имеет самостоятельный интерес, его можно использовать в качестве теста при верификации вычислительного алгоритма и компьютерной программы.

Так как $\varphi''(s) = 0$ при $s > l_0$ и $\varphi'(l) = 0$, то в силу (2.6) за опорами $\varphi(s) = \varphi_0 = \text{const}$. Умножение обеих частей (2.6) на φ' позволяет получить первый интеграл:

$$D(\varphi')^2 = 2P(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \text{ при } s < l_0$$

Разделение переменных и последующее интегрирование приводят к уравнению

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1}} = \sqrt{\frac{2P}{D}} s,$$

решение которого выражается через эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода и записывается в неявной форме:

$$F\left(\sqrt{\frac{\sin \varphi_0}{1 + \sin \varphi_0}}, k\right) - F\left(\sqrt{\frac{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi_0}}, k\right) = \frac{\sqrt{1 - \sin \varphi_0}}{2} \sqrt{\frac{2P}{D}} s, \quad (2.7)$$

где $k = i\sqrt{(1 + \sin \varphi_0)/(1 - \sin \varphi_0)}$, i – мнимая единица. Постоянный угол φ_0 определяется из уравнения (2.7) после подстановки $s = l_0$ и $\varphi = \varphi_0$.

При решении уравнений (2.7) и (2.8) использовались библиотечные процедуры компьютерной платформы Matlab. Сопоставление прогибов балки, полученных

с помощью описанного ниже алгоритма, с точным решением показало совпадение результатов в пределах погрешности, которая соответствует теоретической точности применяемой разностной схемы.

2.4. *Учет осевой деформации и поперечных сдвигов.* Уравнение (2.6) описывает чистый изгиб, при котором нейтральная линия изогнутой балки совпадает со срединной линией. Однако при учете схлопывания пор она смещается в сторону зоны уплотнения. Чтобы получить более точное уравнение изгиба, вектор положения точки балки представим в виде линейного разложения по толщине:

$$X(s,t) = x(s) + t\psi_x(s), \quad Y(s,t) = y(s) + t\psi_y(s),$$

где s, t – лагранжевы координаты точки относительно декартовой координатной системы, связанной с центральной линией. В соответствии с теоремой о полярном разложении Кэли тензор дисторсии на этой линии

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} x' & \psi_x \\ y' & \psi_y \end{pmatrix}$$

равен произведению ортогонального тензора \mathbf{R} , описывающего поворот окрестности точки, и симметричного тензора – меры деформации Коши:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & \gamma \\ \gamma & 1 - \nu\varepsilon \end{pmatrix}$$

В этом разложении приняты следующие обозначения: ε – продольная деформация, γ – деформация сдвига. На поверхности балки отсутствуют внешние распределенные усилия, поэтому деформация обжатия по толщине равна $-\nu\varepsilon$, где ν – коэффициент Пуассона. Деформация обжатия поперек плоскости изгиба также равна $-\nu\varepsilon$.

Полярное разложение позволяет получить уравнения, обобщающие (2.5):

$$\begin{aligned} x' &= (1 + \varepsilon)\cos \varphi - \gamma \sin \varphi \\ y' &= (1 + \varepsilon)\sin \varphi + \gamma \cos \varphi \end{aligned} \tag{2.8}$$

Кроме того, из него же получаются формулы, которые служат для определения положения точки, отстоящей от оси:

$$\psi_x = \gamma \cos \varphi - (1 - \nu\varepsilon)\sin \varphi, \quad \psi_y = \gamma \sin \varphi + (1 - \nu\varepsilon)\cos \varphi$$

Интеграл энергии с учетом осевой деформации и поперечного сдвига принимает вид:

$$J(\varepsilon, \gamma, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(A\varepsilon^2 + B\gamma^2 + D|\varphi'|^2 \right) ds + 2Py(0),$$

где $A = (1 + 2\nu^2)(E^+ h_+ + E^- h_-)$, $B = G^+ h_+ + G^- h_-$ ($G^\pm / (2 + 2\nu^\pm)$ – модули сдвига). Из второго уравнения (2.8) следует, что

$$y(0) = \frac{1}{2} \left(\int_{-l_0}^0 - \int_0^{l_0} \right) \left((1 + \varepsilon)\sin \varphi + \gamma \cos \varphi \right) ds$$

Варьированием интеграла энергии по ε, γ и φ с учетом выражения для $y(0)$ получим уравнения для деформаций

$$A\varepsilon = P \sin \varphi, \quad B\gamma = P \cos \varphi$$

и уравнение упругой линии

$$\left(D(s)\varphi'(s) \right)' = -P(\cos \varphi - a \sin 2\varphi) \begin{cases} 1, & \text{если } -l_0 < s < l_0 \\ 0, & \text{если } l_0 < |s| < l \end{cases} \tag{2.9}$$

где $a = (1/B - 1/A)P/2$, с граничными условиями $\varphi(0) = \varphi'(\pm l) = 0$.

Судя по уравнению (2.9), влиянием поперечных сдвигов и осевой деформации при расчете прогиба балки можно пренебречь, если входящий в правую часть безразмерный параметр a (функция от s) много меньше единицы. Если же величина a сравнима с единицей, то при больших прогибах такое пренебрежение неправомерно.

3. Результаты методических расчетов. Краевая задача для уравнения (2.9) решалась численно на основе разностной схемы второго порядка точности. При этом распределение изгибной жесткости и модулей упругости по сечению балки находилось с помощью метода последовательных приближений (метода переменных параметров упругости).

С учетом симметрии половина балки разбивалась вдоль оси равномерной сеткой $s_j = (j + 1/2)\Delta s$ из n узлов с шагом $\Delta s = l/(n - 0.5)$. Нелинейная правая часть в уравнении изгиба учитывалась итерационно по методу Ньютона. В качестве начального приближения принималось безызгибное состояние балки с узловыми значениями $\varphi_j = 0$. Новое приближение φ^j определялось через предыдущее φ_j из системы линеаризованных уравнений ($j = 1, \dots, n - 1$):

$$D_{j+1/2}(\varphi^{j+1} - \varphi^j) - D_{j-1/2}(\varphi^j - \varphi^{j-1}) = -P b^j \Delta s^2 \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < s_j < l_0 \\ 0, & \text{если } l_0 < s_j < l \end{cases},$$

где $b^j = \cos \varphi_j - a_j \sin 2\varphi_j - (\sin \varphi_j + 2a_j \cos 2\varphi_j)(\varphi^j - \varphi_j)$.

Совместно с граничными условиями $\varphi^0 = 0$, $\varphi^{n+1} = \varphi^n$ эта система решалась методом трехдиагональной прогонки. Для окончания итерационного процесса использовалось условие: $\max |\varphi^j - \varphi_j| \leq \delta \max |\varphi^j|$, в котором δ – заданная погрешность вычислений.

Эйлеровы координаты узловых точек балки рассчитывались по разностной схеме, аппроксимирующей уравнения (2.8):

$$\frac{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}}{\Delta s} = \cos \varphi_j + a_j \sin 2\varphi_j$$

$$\frac{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}}{\Delta s} = \sin \varphi_j + \frac{P}{A} \sin^2 \varphi_j + \frac{P}{B} \cos^2 \varphi_j,$$

с граничными условиями $x_{1/2} = x_{-1/2}$, $y_{j_0+1/2} + y_{j_0-1/2} = 0$, где j_0 – номер ближайшего узла к опоре, который определяется через расстояние до опор l_0 вдоль изогнутой оси балки.

На рис. 6 приведены расчетные прогибы балки для низкопористого пеноалюминия с параметрами $\theta = 5\%$, $E^+ = 50$ ГПа, $\nu^\pm = 0.33$ в случае неподвижных опор. Для высокопористого материала (металлической пены) уравнения упругой балки неприменимы, так как схлопывание пор происходит после перехода прослоек пористого скелета в необратимое пластическое состояние, что необходимо учитывать при построении математической модели. Модуль упругости уплотненного

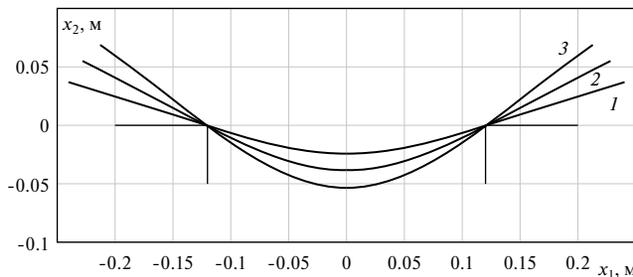


Рис. 6. Расчетные прогибы балки: 1 – алюминий; 2 – пористый алюминий; 3 – пористый алюминий, без учета уплотнения.

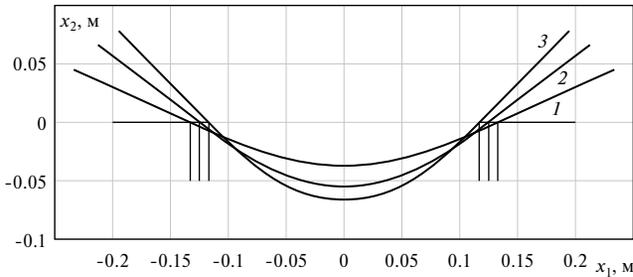


Рис. 7. Расчетные прогибы балки: 1 – алюминий; 2 – пористый алюминий; 3 – пористый алюминий, без учета уплотнения.

материала принимался равным модулю Юнга для обычного (плотного) алюминия: $E^- = 70$ ГПа. В расчетах варианта задачи для неподвижных опор $l = 0.25$, $l_1 = 0.12$, $h = 0.05$ м, $P = 26$ МН/м. В варианте со скользящими опорами $l_0 = 0.14$ м.

На рис. 7 приведены аналогичные результаты расчетов для задачи со скользящими опорами. Заметим, что учет продольной деформации и сдвига вносит изменения порядка одного процента в распределение изгибных деформаций, но при рассматриваемых условиях закрепления и нагружения балки слабо влияет на стрелу прогиба. Однако уточненная математическая модель применима к расчету изгиба балок при других типах граничных условий.

Анализ результатов в целом показывает, что эффект уплотнения пористого металла при схлопывании пор под действием сжимающих напряжений оказывает существенное влияние на стрелу прогиба балки.

Заключение. Разработана математическая модель и вычислительный алгоритм для решения нелинейной задачи трехточечного изгиба балки из пористого металла. При больших прогибах проведено сравнение результатов расчетов с учетом и без учета уплотнения материала. Предлагаемая методика легко обобщается на случай многослойной балки, один или несколько слоев которой изготовлены из пористого металла.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075–02–2024–1378).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gibson L.J. Mechanical behavior of metallic foams // Annu. Rev. Mater. Sci. 2000. V. 30. № 1. P. 191–227.
2. Banhart J. Manufacturing routes for metallic foams // JOM. 2000. V. 52. № 12. P. 22–27.
3. Ashby M.F. Plastic deformation of cellular materials // Encyclopedia of Materials: Science and Technology. P. 7068–7071. Oxford: Pergamon Press, 2001.
4. Леушин И.О., Грачев А.Н., Назаров В.Н., Горюхов П.А. Пеноалюминий – перспективный материал для производства литых изделий ответственного назначения // Теория и технол. металл. пр-ва. 2020. № 4 (35). С. 35–38.
5. Прохорчук Е.А., Леонов А.А., Власова К.А. и др. Перспектива применения пеноалюминия для изделий авиакосмической техники (обзор) // Труды ВИАМ. 2021. № 12 (106). С. 21–30.
6. Schaedler T.A., Jacobsen A.J., Torrents A. et al. Ultralight metallic microlattices // Science. 2011. V. 334. № 6058. P. 962–965.
7. Аннин Б.Д. Механика деформируемого твердого тела: Избр. тр. Новосибирск: СО РАН, 2022. 288 с.
8. Garcia-Avila M., Portanova M., Rabiei A. Ballistic performance of composite metal foams // Compos. Struct. 2015. V. 125. P. 202–211.
9. Czekanski A., Elbestawi M.A., Meguid S.A. On the FE modeling of closed-cell aluminum foam // Int. J. Mech. Mater. Des. 2005. V. 2. № 1–2. P. 23–34.

10. *Völlmecke C., Todt M., Yiatros S.* Buckling and postbuckling of architected materials: A review of methods for lattice structures and metal foams // *Compos. Adv. Mater.* 2021. V. 30. P. 1–12.
11. *Садовский В.М., Садовская О.В.* Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор // *ПМТФ.* 2016. Т. 57. № 5. С. 53–65.
12. *Садовский В.М., Садовская О.В., Лукьянов А.А.* Радиальное расширение сферической и цилиндрической полостей в безграничной пористой среде // *ПМТФ.* 2014. Т. 55. № 4. С. 160–173.
13. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008. 368 с.

Problem of Three-Point Bending of an Elastic Beam from Porous Metal

B. D. Annin^{a,#}, V. M. Sadovskii^{b,##}, O. V. Sadovskaya^{b,###}

^a*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

^b*Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia*

[#]*e-mail: bdannin@mail.ru,*

^{##}*e-mail: sadov@icm.krasn.ru,*

^{###}*e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru*

Using numerical methods, we construct a solution to a physically and geometrically nonlinear problem of three-point bending of an elastic beam, made of porous metal, with rectangular cross-section. Unlike the classical version of the problem for a homogeneous beam, the heterogeneity over the cross-section due to material compaction because of the collapse of pores, which occurs in the compression zone at sufficiently large deflections, is taken into account. To describe the elastic state of a porous metal, the stress – strain diagram of a bimodular medium is used. The results of computations of strong bending of a beam, made of the low-porosity aluminum foam, are presented. These results demonstrate the difference between the obtained solution and similar solutions for beams, made of homogeneous porous and compacted material.

Keywords: metal foam, elasticity, porosity, three-point bending

REFERENCES

1. *Gibson L.J.* Mechanical behavior of metallic foams // *Annu. Rev. Mater. Sci.*, 2000, vol. 30, no. 1, pp. 191–227.
2. *Banhart J.* Manufacturing routes for metallic foams // *JOM*, 2000, vol. 52, no. 12, pp. 22–27.
3. *Ashby M.F.* Plastic deformation of cellular materials // *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, pp. 7068–7071. Oxford: Pergamon, 2001.
4. *Leushin I.O., Grachev A.N., Nazarov V.N., Gorokhov P.A.* Aluminum foam is a promising material for the production of cast products for responsible purposes // *The Theory&Proc. Engng. of Metall. Prod.*, 2020, vol. 35, no. 4, pp. 35–38. (in Russian)
5. *Prokhorchuk E.A., Leonov A.A., Vlasova K.A. et al.* Prospects for the use of hot isostatic pressing in cast aluminum alloys (review) // *Proc. VIAM*, 2021, vol. 106, no. 12, pp. 21–30. (in Russian)
6. *Schaedler T.A., Jacobsen A.J., Torrents A. et al.* Ultralight metallic microlattices // *Science*, 2011, vol. 334, no. 6058, pp. 962–965.
7. *Annin B.D.* Mechanics of Deformable Solids: Sel. works. Novosibirsk: SB RAS, 2022. 288 p. (in Russian)
8. *Garcia-Avila M., Portanova M., Rabiei A.* Ballistic performance of composite metal foams // *Compos. Struct.*, 2015, vol. 125, pp. 202–211.
9. *Czekanski A., Elbestawi M.A., Meguid S.A.* On the FE modeling of closed-cell aluminum foam // *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2005, vol. 2, no. 1–2, pp. 23–34.

10. *Völlmecke C., Todt M., Yiatros S.* Buckling and postbuckling of architected materials: A review of methods for lattice structures and metal foams // *Compos. Adv. Mater.*, 2021, vol. 30, pp. 1–12.
11. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Analyzing the deformation of a porous medium with account for the collapse of pores // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 808–818.
12. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Luk'yanov A.A.* Radial expansion of a cylindrical or spherical cavity in an infinite porous medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 4, pp. 689–700.
13. *Rabotnov Yu.N.* *Mechanics of Deformable Solids.* Moscow: Nauka, 1979. 744 p. (in Russian)
14. *Sadovskaya O., Sadovskii V.* *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials. Ser.: Advanced Structured Materials*, vol. 21. Heidelberg: Springer, 2012. 390 p.

УДК 539.4

ЭФФЕКТ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ПРЯМОМ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ДАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А. А. Мовчан^{1,*}, А. В. Шарунов^{2,**}¹Институт Прикладной механики РАН, Москва, Россия²Московский Авиационный институт, Москва, Россия

*e-mail: movchan47@mail.ru,

**aleksej-sharunov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024г.

После доработки 29.01.2024 г.

Принята к публикации 15.02.2024 г.

Решены связанные задачи об изменении напряженно-деформированного и фазового состояния в толстостенной сферической оболочке из сплава с памятью формы, материал которой претерпевает прямое термоупругое фазовое превращение, связанное с уменьшением температуры, равномерно распределенной по всему объему материала, под действием постоянных внутреннего или внешнего давления. Обнаружены эффекты существенного перенапряжения примыкающих к внутренней границе слоев тела и существенной разгрузки примыкающих к внешней границе слоев, связанные с движением по материалу фронта завершения фазового перехода.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы, толстостенная сфера, прямое превращение, перераспределение напряжений

DOI: 10.31857/S0032823524020057 EDN: XULYKA

1. Введение. Сплавы с памятью формы (СПФ) [1–3], благодаря происходящим в них термоупругим фазовым превращениям [4], являются представителями нелинейных наследственных деформируемых твердых тел, изучению которых посвящены труды Ю. Н. Работнова и его учеников [5–9]. Процесс накопления деформации прямого термоупругого фазового превращения [10,11] в статически неопределимых элементах из СПФ, даже если он происходит под действием постоянной механической нагрузки, и при равномерном распределении температур по телу может приводить к перераспределению напряжений. Тот факт, что в наследственных деформируемых твердых телах, находящихся под действием постоянной нагрузки, может происходить перераспределение напряжений, отмечен в работе [12]. В работах [13,14] при решении в рамках микроструктурной модели поведения СПФ [15] задачи о прямом превращении в бесконечном цилиндре из СПФ, вызываемом охлаждением через поверхность, т.е. при неравномерном распределении температур по точкам тела, были обнаружены существенные перенапряжения этой поверхности. Эффекты перераспределения напряжений при равномерном распределении температуры по телу ранее были обнаружены при решении задач о прямом превращении в связанной постановке (т.е. с учетом влияния действующих напря-

жений на фазовый переход) для балки прямоугольного поперечного сечения из СПФ, находящейся под действием постоянного изгибающего момента или постоянной поперечной силы [16], и стержня из СПФ круглого поперечного сечения, находящегося под действием постоянного крутящего момента [17]. Обнаружено, что форма эпюры напряжений, которая в начальном аустенитном состоянии нагруженного материала была прямолинейной, при фазовом переходе значительно искривляется. При этом области материала, прилегающие к нейтральной плоскости или оси кручения, разгружаются почти до нуля, а внешние слои существенно перегружаются, так что действующие в них напряжения могут в два и более раз превышать напряжение в той же точке в упругом аустенитном состоянии материала. Связано такое перенапряжение с движением по материалу фронта завершения фазового перехода.

В упомянутых выше работах [16,17] эффект перераспределения напряжений рассмотрен при одномерном напряженном состоянии, причем механические свойства СПФ описывались в рамках простейшей модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [18], которая эффект структурного деформирования вообще не учитывала. В данной работе исследованы процессы перераспределения напряжений, связанные с прямым фазовым превращением в толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием постоянных внутреннего или внешнего давления, т.е. в случае двумерного напряженного состояния. Учитывается как нелинейный по напряжениям эффект прямого фазового превращения, так и нелинейное влияние структурного перехода.

2. Постановка задачи. Рассматривается толстостенная сфера из СПФ с внутренним радиусом a и внешним радиусом b в сферической системе координат (r, ϕ, ψ) , нагруженная постоянным внутренним или внешним давлением P , не зависящим от угловых координат. Температура в каждый момент времени равномерно распределена по материалу сферы и монотонно убывает через интервал температур прямого мартенситного превращения. Упругие и фазово-структурные свойства материала считаются изотропными. В силу сферически симметричного распределения нагрузки и температуры, а также изотропии термомеханических свойств, напряженно-деформированное состояние также является сферически симметричным. Поэтому в сферической системе координат отличны от нуля только радиальная компонента смещений w , нормальные компоненты напряжений $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_\psi$ и деформаций $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_\psi$, причем $\sigma_\phi = \sigma_\psi, \varepsilon_\phi = \varepsilon_\psi$.

СПФ являются типичным представителем деформируемых твердых тел, поведение которых зависит от вида напряженного состояния (свойство “разносопротивляемости”) [19–21]. Определяющие соотношения, для упругого поведения тел, обладающих этим свойством, предложены в [22]. Согласно [19, 20], приращение деформаций СПФ как по фазовому, так и по структурному механизмам,

зависят от параметра вида напряженного состояния $\mu_\sigma = \frac{27 I_{3\sigma'}}{2 \sigma_i^3}$. Здесь

σ_i, σ'_{ij} – интенсивность и девиатор напряжений, $I_{3\sigma'}$ – третий инвариант девиатора напряжений, который в декартовой системе координат определяется по формуле $I_{3\sigma'} = \det(\sigma'_{ij})$. В случае действия внутреннего давления $\sigma_r < 0, \sigma_\phi = \sigma_\psi > 0, \sigma_i = \sigma_\phi - \sigma_r, \mu_\sigma = -1$. Для случая внешнего давления $\sigma_r > 0, \sigma_\phi = \sigma_\psi < 0, \sigma_i = \sigma_r - \sigma_\phi, \mu_\sigma = 1$, т.е. в обоих случаях параметр вида девиатора напряжений μ_σ сохраняет одно и то же значение (+1 для внешнего давления и -1 для внутреннего) во всех точках тела и для всех моментов процесса прямого превращения. Это обстоятельство существенно упрощает вывод разрешающих соотношений, поскольку при дифференцировании величину μ_σ в этом случае можно считать постоянной.

3. Определяющие соотношения модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Известен целый ряд моделей деформирования СПФ, учитывающих нелинейность соответствующего процесса и как фазовый, так и структурный механизмы деформирования [23–26]. Ниже алгоритм решения краевой задачи строится в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенной в [27], распространенной на случай учета влияния на поведение СПФ вида напряженного состояния и сводящейся для случая прямого фазового перехода и структурного превращения к следующим соотношениям:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{phst}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{e'}$$

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K(q)}, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G(q)}, \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_m} + \frac{1-q}{K_a}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_m} + \frac{1-q}{G_a} \quad (3.1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{phst} = d\varepsilon_{ij}^{ph} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_0 \delta_{ij} dq + \frac{3}{2} \rho_{D1}(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) dq \quad (3.2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_{D2}(\sigma_i, \mu_\sigma) q \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \frac{\partial \varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma)}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \quad (3.3)$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi t_\sigma) \quad (3.4)$$

$$t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} \quad (3.5)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma_i \rho_{D1}(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S} \quad (3.6)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_a K_m} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_a G_m}, \quad \Delta K = K_a - K_m, \quad \Delta G = G_a - G_m$$

Здесь ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^{phst} – тензоры полных, упругих и фазово-структурных деформаций; штрихом у тензоров обозначены компоненты дивергента; q – объемная доля мартенсита; $K(q)$, $G(q)$ – зависящие от параметра фазового состава утроенный объемный модуль и модуль сдвига, K_a , K_m , G_a , G_m – значения этих модулей в аустенитном и мартенситном состояниях соответственно; ε_0 – линейная деформация объемного эффекта прямого фазового превращения; $d\varepsilon_{ij}^{ph}$, $d\varepsilon_{ij}^{st}$ – приращения тензора фазово-структурных деформаций за счет фазового и структурного механизмов; формула (3.3) для приращения деформации по структурному механизму справедлива, в случае если интенсивность напряжений в рассматриваемый момент равна максимальному за всю предшествующую историю процесса значению этой величины и, кроме того, должно выполняться дифференциальное условие активного нагружения:

$$\sigma_i(q_1) = \max_{q \in (0, q_1)} \sigma_i(q), \quad d\sigma_i > 0 \quad (3.7)$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то $d\mu_{ij}^{st} = 0$;

$\rho_{D1}(\mu_\sigma)$, $\varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma)$, $\rho_{D2}(\mu_\sigma)$, $\varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma)$ – материальные функции, определяющие уравнение диаграммы прямого превращения

$$\varepsilon_i^{ph} = \rho_{D1}(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) \quad (3.8)$$

и диаграммы мартенситной неупругости

$$\varepsilon_i^{st} = \rho_{D2}(\mu_\sigma) \varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma) \quad (3.9)$$

В (3.5) T, t, t_σ – температура и безразмерные параметры температуры, соответственно, независящий и зависящий от действующих напряжений; в (3.5), (3.6) M_s^0, M_f^0 – характерные температуры начала и окончания прямого фазового превращения в отсутствие напряжений, M_s^σ – температура начала прямого фазового превращения при наличии напряжений; ΔS – объемная плотность энтропии перехода из мартенситной в аустенитную фазу.

4. Материальные функции и постоянные для никелида титана. Зависимость входящих в приведенную выше систему определяющих соотношений материальных функций от параметра вида напряженного состояния μ_σ исследована в настоящее время недостаточно. Однако для решения рассматриваемой задачи надо знать значения функций только для двух значений $\mu_\sigma = -1$ (внутреннее давление) и $\mu_\sigma = 1$ (внешнее давление). Такие же значения параметра μ_σ характерны для случая одноосного нагружения, соответственно при сжатии и растяжении. Поскольку величина μ_σ является в рамках рассматриваемой модели единственным параметром вида напряженного состояния, от которого зависит процесс прямого превращения, то для решения поставленных задач достаточно иметь значения всех материальных функций только для случаев одноосного растяжения и сжатия. Рассматривается равноатомный поликристаллический изотропный никелид титана, модули Юнга и коэффициент Пуассона которого имеют значения [28]

$$E_a = 84 \text{ ГПа}, \quad E_m = 28 \text{ ГПа}, \quad \nu_a = \nu_m = 0.3$$

В [29] приведены результаты экспериментального исследования образцов из никелида титана на прямое превращение под действием постоянных напряжений и на нагружение в режиме мартенситной неупругости для случаев одноосного растяжения и сжатия. Получены аппроксимации диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости. Установлено, что для аппроксимации диаграммы прямого превращения (3.8) вполне приемлемой по точности и в то же время достаточно простой является экспоненциальная зависимость:

$$\varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_i}{\sigma_{10}(\mu_\sigma)}\right), \quad (4.1)$$

причем для равноатомного никелида титана при одноосном сжатии $\sigma_{10}(-1) = 185.7$ МПа, $\rho_{D1}(-1) = 0.0742$, а при одноосном растяжении $\sigma_{10}(+1) = 322.6$ МПа, $\rho_{D1}(+1) = 0.1047$.

Наилучшей аппроксимацией диаграммы мартенситной неупругости никелида титана (3.9) в [29] признана зависимость, использующая интегральную функцию гамма-распределения:

$$\varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma) = \Phi\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{20}(\mu_\sigma)}, \alpha(\mu_\sigma)\right), \quad \Phi(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \xi^{\alpha(\mu_\sigma)-1} \exp(-\xi) d\xi, \quad (4.2)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция. Для равноатомного никелида титана методом наименьших квадратов найдены следующие значения параметров зависимостей (3.9), (4.2):

$$\begin{aligned} \rho_{D2}(-1) &= 0.02, \quad \sigma_{20}(-1) = 18 \text{ МПа}, \quad \alpha(-1) = 16.08 \\ \rho_{D2}(+1) &= 0.0608, \quad \sigma_{20}(+1) = 27.4 \text{ МПа}, \quad \alpha(+1) = 6.45 \end{aligned}$$

Характерные температуры прямого превращения принимались равными $M_s^0 = 313 \text{ К}$, $M_f^0 = 293 \text{ К}$, величина энтропии перехода $\Delta S = 0.32$ МПа/К, что соответствует равноатомному никелиду титана. Функции (4.1), (4.2) и приведенные выше

значения параметров использовались для получения описанных ниже результатов решения задач.

5. Система определяющих соотношений, разрешенная относительно приращений напряжений. Приведенная выше система определяющих соотношений СПФ разрешена относительно приращений деформаций. Для получения матрицы жесткости отдельных конечных элементов и их ансамбля необходимо разрешить эту систему относительно приращений напряжений. В работах [30–32] для конечно-элементного анализа поведения элементов из СПФ при прямом фазовом превращении использовалась численная методика такого обращения, что приводит к увеличению времени счета. В [33] изложена методика аналитического обращения определяющих соотношений объединенной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [34], не учитывающей свойства зависимости процесса деформирования СПФ от вида напряженного состояния. В данной работе с использованием аналогичного подхода получены следующие формулы аналитического обращения определяющих соотношений варианта (3.1) – (3.6) модели нелинейного деформирования СПФ [27], учитывающей влияние вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ:

$$d\sigma_{ij} = \frac{1}{3}K\delta_{ij}d\varepsilon_{kk} + 2Gd\varepsilon'_{ij} - (2GA_{ij} + k\delta_{ij})(mdt + pd\varepsilon_{kk}) - \frac{3G(\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} - f_3(mdt + pd\varepsilon_{kk}))}{\sigma_i + 3G(mf_5 + f_4)} \times [2G(A_{ij}n + B_{ij}) + nk\delta_{ij}] \quad (5.1)$$

$$\text{Здесь } k = KB, f_3 = \frac{1}{3} \frac{\Delta G \sigma_i^2}{G_a G_m} + \rho_{D1} \sigma_i \varphi_1, f_4 = \rho_{D2} \sigma_i q \varphi_2', f_5 = f_1 f_3,$$

$$A_{ij} = \sigma'_{ij} \left(\frac{\Delta G}{2G_a G_m} + \frac{3}{2} \frac{\rho_{D1} \varphi_1}{\sigma_i} \right), B_{ij} = \frac{3}{2} \rho_{D2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q \varphi_2',$$

$$m = \frac{M}{R}, n = \frac{N}{R}, p = \frac{PK}{R}, R = \frac{1 + 3B^2 K(q)M}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)},$$

$$M = \pi(1 - q) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t \sigma}{2} \right), N = Mf_1(\sigma_i), P = Mf_2(\sigma_{kk}),$$

$$f_1(\sigma_i) = \frac{\rho_{D1}(\varphi_1 + \sigma_i \varphi_1') + \Delta G \sigma_i / (3G_a G_m)}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)}, f_2(\sigma_{kk}) = \frac{B}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)}$$

В приведенных выше формулах штрихом функций φ_1 и φ_2 обозначены их производные по первому аргументу σ_i .

Дифференциальное условие осуществления прямого фазового превращения, проверяемое на каждом шаге процесса, сводится к выполнению неравенства

$$dq = mdt + pd\varepsilon_{kk} + n \frac{3G(\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} - mf_3 dt - pf_3 d\varepsilon_{kk})}{\sigma_i + 3G(mf_5 + f_4)} > 0$$

Дифференциальное условие осуществления структурного перехода, проверяемое на каждом шаге процесса, сводится к выполнению неравенства

$$\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} > mdt + pd\varepsilon_{kk}$$

Соотношения (5.1) позволяют обычным путем получить матрицы жесткости конечных элементов, связывающие приращения узловых смещений и приращения уз-

ловых сил, а также общую матрицу жесткости системы конечных элементов, позволяющую решить задачу на каждом шаге уменьшения температуры процесса прямого превращения.

На основе определяющих соотношений (5.1) построена пользовательская модель, интегрированная в конечно-элементный комплекс Simulia Abaqus посредством процедуры UMAT [30,35,36]

6. Верификация численной процедуры. Верификация численной процедуры проведена на модельных задачах с однородным напряженно-деформируемым состоянием, имеющих решение, сводящееся к одномерной квадратуре. Рассматривается общее линейное по времени пропорциональное нагружение

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* (1 + \lambda_1 t) \quad (6.1)$$

В (6.1) σ_{ij}^* – постоянный тензор, $\lambda_1 > 0$. Тогда для девиатора напряжения σ'_{ij} выполняется

$$\sigma'_{ij} = (1 + \lambda_1) \sigma_{ij}^{*'}, \quad \sigma_{ij}^{*'} = \sigma_{ij}^* - \frac{1}{3} \sigma_{kk}^* \delta_{ij} \quad (6.2)$$

Вводя постоянный девиатор единичной интенсивности $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{*'} / \sigma_i^*$, где $\sigma_i^* = \sqrt{3\sigma_{ij}^{*'} \sigma_{ij}^{*'}/2}$, получаем

$$\sigma'_{ij} = \sigma_i^* (1 + \lambda_1 t) \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_i = \sigma_i^* (1 + \lambda_1 t) \quad (6.3)$$

Объемным эффектом реакции термоупругого фазового превращения пренебрегается, фазово-структурная деформация является девиатором, который также (в силу изложенной в разд. 2 системы определяющих соотношений) меняется пропорционально:

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon \varepsilon_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0, \quad \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1, \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i^{phst} \quad (6.4)$$

Одновременно с изменением напряжений (6.1) происходит линейное по времени уменьшение температуры через интервал температур прямого термоупругого фазового превращения

$$T = M_s^{\sigma_i^*} - kt \quad (6.5)$$

Процесс заканчивается в тот момент времени t_f , когда снижающаяся температура достигает значения температуры конца прямого фазового перехода, соответствующей интенсивности напряжения σ_{ij} , определяемой по второй формуле (6.3) для $t = t_f$.

Задача решается в рамках системы определяющих соотношений для СПФ, приведенной в разд. 2 и с материальными функциями и константами, значение которых приведено в разд. 3. Подстановка (6.2) и (6.4) в (3.2), (3.3) дает дифференциальное соотношение, связывающее σ , ε и q .

$$d\varepsilon = \text{sgn}(\sigma) [\rho_{D1} \varphi_1(|\sigma|) dq + \rho_{D2} q_{st} \varphi_2'(|\sigma|) d(|\sigma|)] \quad (6.6)$$

Для любого процесса пропорционального изменения девиатора напряжений (6.2) знак постоянного направляющего девиатора σ_{ij}^0 можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\sigma > 0$, то есть $\sigma_i = \sigma$. При этом, согласно (6.4) (6.6), с учетом того, что $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2' \geq 0$, $\rho_{D1} > 0$, $\rho_{D2} > 0$, а для прямого превращения $dq > 0$ получается $d\varepsilon \geq 0$, можно считать, что $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. В дальнейшем будут рассматриваться процессы, в которых интенсивность напряжений монотонно возрастает, то есть выполняется условие активного нагружения $d\sigma_i > 0$. Тогда соотношение (6.6) можно переписать в виде

$$d\varepsilon_i^{phst} = \rho_{D1} \varphi_1(\sigma_i) dq + \rho_{D2} q \varphi_2'(\sigma_i) d(\sigma_i) \quad (6.7)$$

Для сведения вычислений к определению одного интеграла в правой части (6.7) проводятся следующие преобразования

$$d\varepsilon_i^{phst} = [\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_i) - \rho_{D2}\varphi_2(\sigma_i)]dq + d[\rho_{D2}q\varphi_2(\sigma_i)] \quad (6.8)$$

Интегрируя (6.8) для описания процесса прямого превращения из полностью мартенситного состояния при монотонно возрастающем значении σ_i , с учетом того, что в начальной точке процесса $q = 0$, получаем

$$\varepsilon_i^{phst} = \int_0^q [\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_i) - \rho_{D2}\varphi_2(\sigma_i)]dq_1 + \rho_{D2}q\varphi_2(\sigma_i) \quad (6.9)$$

Поскольку в силу рассматриваемого процесса все функции, входящие в (6.9), являются функциями времени, то в интеграле производится замена переменной интегрирования q_1 на функцию времени

$$\varepsilon_i^{phst} = \int_0^{q(t)} [\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_i(t)) - \rho_{D2}\varphi_2(\sigma_i(t))] \frac{dq}{dt} dt + \rho_{D2}q(t)\varphi_2(\sigma_i(t)) \quad (6.10)$$

Формула для производной dq/dt получается с учетом зависимостей (6.3) и (6.5), а также определяющих соотношений (3.4) и (3.6). После определения зависимости от времени интенсивности фазово-структурной деформации по формуле (6.10), компоненты фазово-структурной деформации вычислялись по формуле (6.4), упругие деформации определялись по закону Гука с учетом переменности модулей при фазовом переходе по формулам (3.1). На рис. 1 сплошными линиями представлены графики полученных таким образом зависимостей деформаций $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ и ε_z от температуры для случая $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = -100$ МПа, $\sigma_{xf} = \sigma_{yf} = -150$ МПа, $\sigma_{r0} = \sigma_{rf} = 0$, $\sigma_{z0} = \sigma_{zf} = 0$, что соответствует значению параметра вида напряженного состояния $\mu_\sigma = 1$. Там же штриховыми линиями изображены результаты полученного с помощью разработанной процедуры численного решения задачи о деформировании цилиндра, находящегося в состоянии равнодвухосного сжатия по граням, перпендикулярным осям x и y в отсутствии внешней нагрузки по граням, перпендикулярным оси z . Как видно, получено неплохое совпадение результатов численного решения и решения в квадратурах.

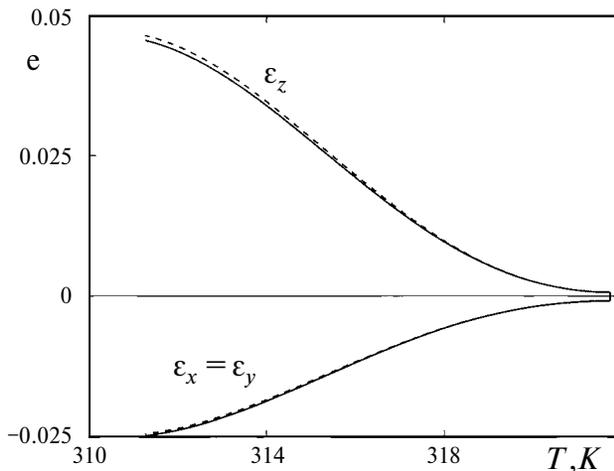


Рис. 1.

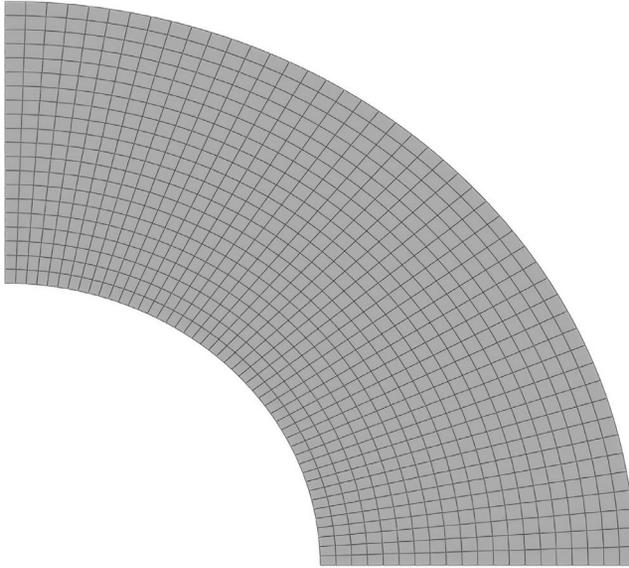


Рис. 2.

7. Результаты решения задач для толстостенной сферы. С помощью разработанной пользовательской модели материала получены решения задач об изменении напряженно-деформированного и фазового состояния толстостенной сферы из СПФ при охлаждении через интервал прямого термоупругого фазового превращения под действием внутреннего или внешнего постоянного давления. Внешний радиус рассматриваемой сферической оболочки принят равным $b = 10$ мм, внутренний – $a = 5$ мм, величина давления $P = 100$ МПа. Температура сферической оболочки снижается с 336 К до 293 К. Считается, что охлаждение сферы происходит медленно, и выделяющееся латентное тепло прямого фазового превращения успевает рассеяться в окружающую среду. Поэтому температура в каждый момент времени равномерно распределена по сечению оболочки. Решение задачи получено с учетом влияния действующих напряжений на характерные температуры фазовых переходов.

При решении задачи рассматривались следующие термомеханические процессы:

1. Изотермическое упругое деформирование сферической оболочки из СПФ монотонно возрастающим внутренним или внешним давлением в аустенитном фазовом состоянии. Значение достигнутого давления фиксируется. Фиксированная температура T_0 и максимальное значение внешней нагрузки подобраны таким образом, чтобы величина T_0 была в точности равна M_s^σ для напряженного состояния, внутренней поверхности оболочки в момент приложения максимального давления. Таким образом, эффект сверхупругости [1,10,11] при начальном нагружении места не имеет.
2. Пошаговое охлаждение сферической оболочки под действием постоянного давления через интервал температур прямого мартенситного превращения от температуры начала прямого превращения на внутренней поверхности оболочки до температуры окончания прямого превращения в точках внешней поверхности оболочки. В процессе охлаждения происходит изменение упругих деформаций, связанное с изменением упругих модулей при фазовом переходе, накопление деформаций прямого превращения по фазовому механизму, подчиняющееся второму уравнению (3.2), и накопление деформаций по структурному механизму, подчиняющееся уравнению (3.3) в случае выполнения условий активного нагружения

(3.7), проверяемых на каждом шаге процесса охлаждения.

Задача решается в осесимметричной конечно-элементной постановке с конечными элементами в форме торов (двумерные осесимметричные конечные элементы типа КЭ СЗХ4Н [37]). На рис. 2 приведена расчетная область в виде одной четвертой части сечения сферы, которая разделена на четырехугольники, каждый из которых является сечением соответствующего торообразного осесимметричного конечного элемента. На горизонтальной и вертикальной границах области выполняются условия симметрии.

Ранее задачи о перераспределении напряжений при прямом превращении в случае действия изгибающих или крутящих моментов [16,17] решались без учета структурного механизма деформирования. Поэтому далее особое внимание обращается на влияние учета структурного деформирования на результат решения. Поэтому в приведенных ниже графиках сплошные кривые соответствуют учету упругого, фазового и структурного деформирования, а штриховые – решению, где учитывается, наряду с упругим, только фазовый механизм. Из каждой пары приведенных ниже рисунков: а соответствует случаю действия внутреннего давления; б – внешнего давления. Напряжения отложены по осям графиков в МПа, температура – в Кельвинах.

На рис. 3–5 линии 1 построены для точек, находящихся на внешней поверхности сферы, линии 2 – для $r = 0.5(a + b)$, линии 3 – для точек внутренней поверхности. На рис. 3 приведены графики зависимости интенсивности напряжений от температуры, иллюстрирующие процедуру принятия решения о включении или выключении структурного механизма деформирования. Наибольшая интенсивность напряжений в каждый момент времени как при внутреннем, так и при внешнем давлении наблюдается в точках внутренней границы тела. Однако ни при начальном нагружении в аустенитном состоянии до значения интенсивности напряжения σ_{\max} (правые вертикальные отрезки на рис. 3), ни в последующем процессе падения σ_i и последующем возрастании этой величины до значения σ_{\max} структурный механизм деформации вблизи внутренней поверхности (кривые 3) не работает из-за нарушения условий (3.7). Структурный механизм включается в той точке процесса прямого превращения, в которой возрастающая интенсивность напряжений достигает значения σ_{\max} (точка излома на линии 3 рис. 3, б). В то же время для точек внешней поверхности и промежуточной (линии 1 и 2) интенсивность напряжений возрастает с самого начала прямого превращения и до точек максимума напряжений, после этого монотонно убывает. Поэтому на участке монотонного роста σ_i от начала фазового перехода и до точки максимума на линиях 1 и 2 рис. 3 структурный переход имеет место, а после точки максимума и до завершения фазового перехода отсутствует. Наблюдаемая

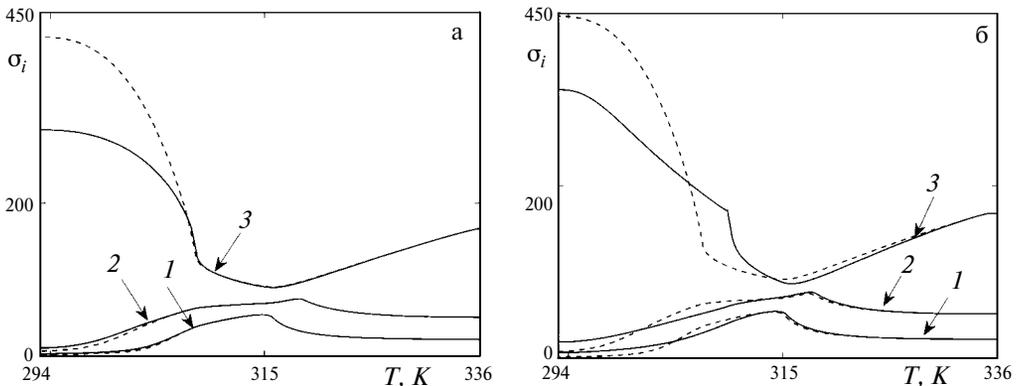


Рис. 3.

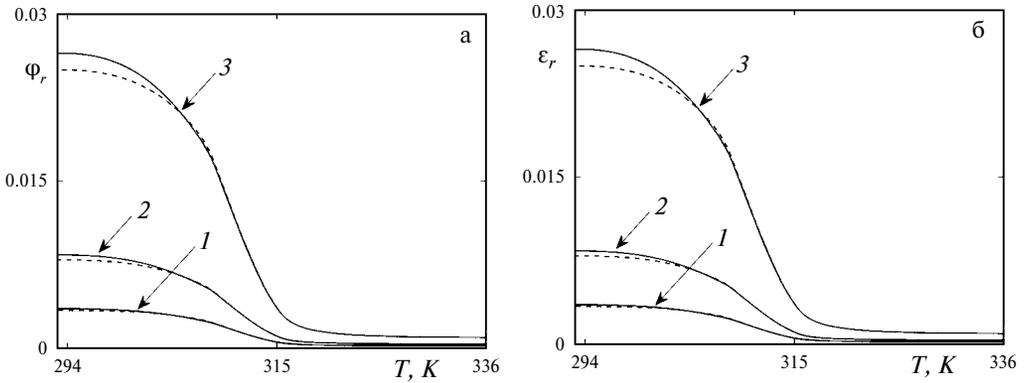


Рис. 4.

разница между сплошными и пунктирными линиями 1 и 2 после точек максимума связана с тем обстоятельством, что структурный переход происходит в точках с большими значениями радиальной координаты (линии 3).

На рис. 4, а, б и 5, а, б представлены графики зависимостей модулей кольцевых (рис. 4) и радиальных (рис. 5) деформаций для случая (а) – внутреннего и (б) – внешнего давления от температуры. Согласно приведенным рисункам, в процессе прямого превращения во всех сечениях наблюдается существенный рост модулей деформаций и модулей значений радиальных смещений, отнесенных к радиальной координате соответствующих точек, особенно заметный на внутренней поверхности оболочки. Учет структурного перехода приводит к дополнительному росту деформаций и смещений, особенно существенному на завершающей стадии прямого превращения и наиболее значительному в случае действия внешнего давления. Влияние структурного перехода более значительно для радиальных деформаций, чем для кольцевых.

На рис. 6, а, б и 7, а, б приведены эпюры радиальных σ_r и кольцевых σ_φ напряжений соответственно. Здесь $\xi = r / b$ – безразмерная радиальная координата. Кривые 1 соответствуют упругому решению задачи (материал оболочки находится в аустенитном фазовом состоянии), кривые 2 – этапу охлаждения в тот момент, когда фронт начала фазового перехода достиг внешней поверхности муфты, кривые 3 – этапу охлаждения, когда все сечение оболочки полностью перешло в мартенситную фазу

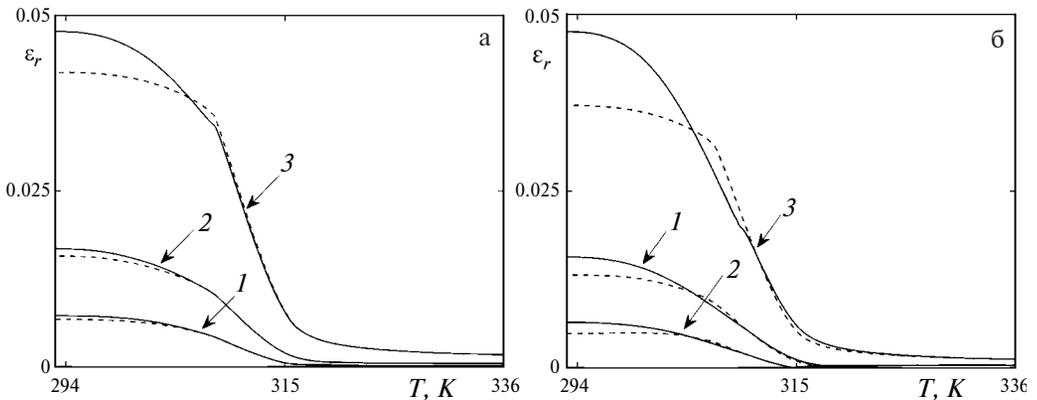


Рис. 5.

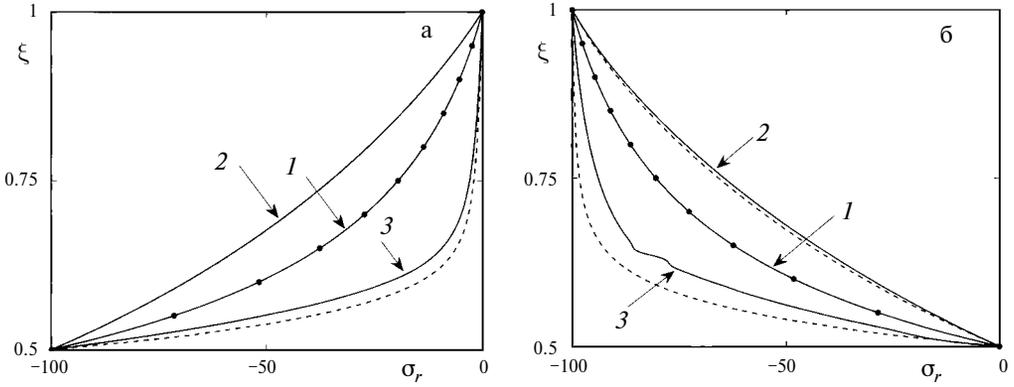


Рис. 6.

и прямое превращение завершено, точки – аналитическому решению для упругого поведения (нанесены для проверки численного решения).

Перераспределение радиальных напряжений ограничено заданным внешним давлением на нагруженном конце интервала изменения радиальной координаты и нулевым значением на ненагруженном конце. На всех этапах фазового перехода зависимость σ_r от ξ является монотонной. На первом этапе процесса фазового перехода от его начала и до выхода фронта начала фазового превращения на внешнюю границу сферы величина $|\sigma_r|$ во всех точках тела в случае внутреннего давления растет (рис. 6, а), а в случае внешнего давления падает (рис. 6, б). На втором этапе фазового перехода, от выхода фронта начала превращения на внешнюю поверхность и до выхода на ту же поверхность фронта завершения фазового перехода, величина $|\sigma_r|$ уменьшается для случая внутреннего давления (увеличивается для случая внешнего давления), принимая в последней точке этого интервала наименьшее (наибольшее) из всех ранее достигнутых в этой точке значений. В случае неучета структурного перехода эта последняя тенденция усиливается.

Перераспределение кольцевых напряжений по сечению (рис. 7) при фазовом переходе не ограничено фиксированными величинами граничных значений этой величины и поэтому более существенно, чем у радиальных напряжений. Если распределение упругих кольцевых напряжений является достаточно равномерным (различие крайних значений не превосходит 50 МПа), то к моменту выхода фронта начала превращения на внешнюю границу тела модули кольцевых напряжений в точках

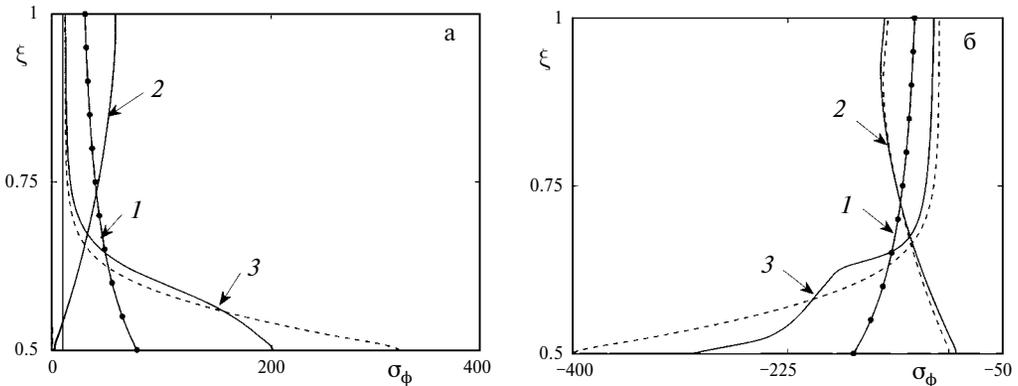


Рис. 7.

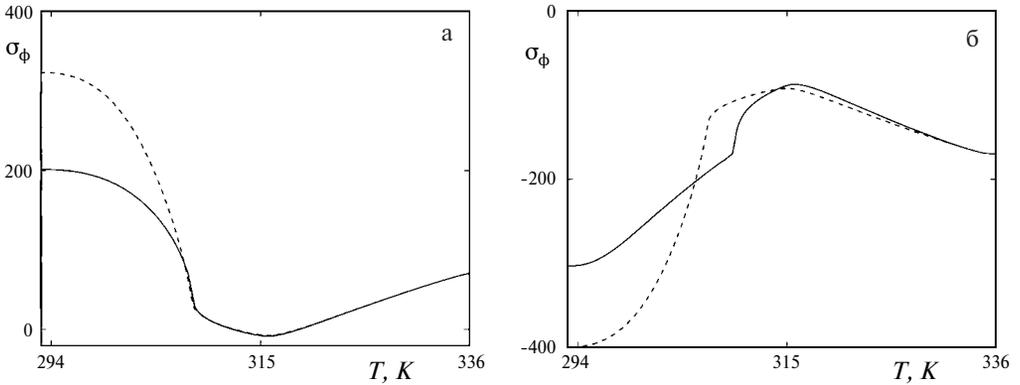


Рис. 8.

этой границы несколько возрастают, а в точках внутренней границы существенно убывают, так что для случая действия внутреннего давления величина σ_ϕ даже меняет знак. Это изменение знака не приводит к изменению значения μ_σ , поскольку знак меняют одновременно два одинаковых значения напряжения $\sigma_\phi = \sigma_\psi$, а знак $\sigma_r < \sigma_\phi$ (рис. 6, а и 7, а), которое было справедливо и до изменения знака кольцевых напряжений. После этого, на втором этапе фазового перехода, наблюдается противоположная тенденция – модули кольцевых напряжений на внутренней границе резко возрастают, а на внешней умеренно убывают. В момент, когда фронт завершения фазового перехода достигает внешней границы тела, значения σ_ϕ на внутренней границе превосходят те же значения для упругого решения в аустенитном состоянии более чем в два раза для случая внутреннего давления (рис. 7, а). Для случая прямого превращения под действием внешнего давления величина $|\sigma_\phi|$ на внутренней границе тела в момент завершения фазового перехода превосходит ту же величину для упругого решения, соответствующую началу процесса, чуть меньше чем в два раза. Этот эффект можно квалифицировать, как перенапряжение, вызванное фазовым переходом. Если не учитывать структурный механизм деформирования, эффект перенапряжения почти удваивается.

На рис. 8 и 9 эффекты изменения кольцевых напряжений на внутренней поверхности тела (рис. 8) сопоставлены с распределением по сечению тела параметра фазового состава (рис. 9). Согласно рис. 8, после упругого нагружения в аустенитном

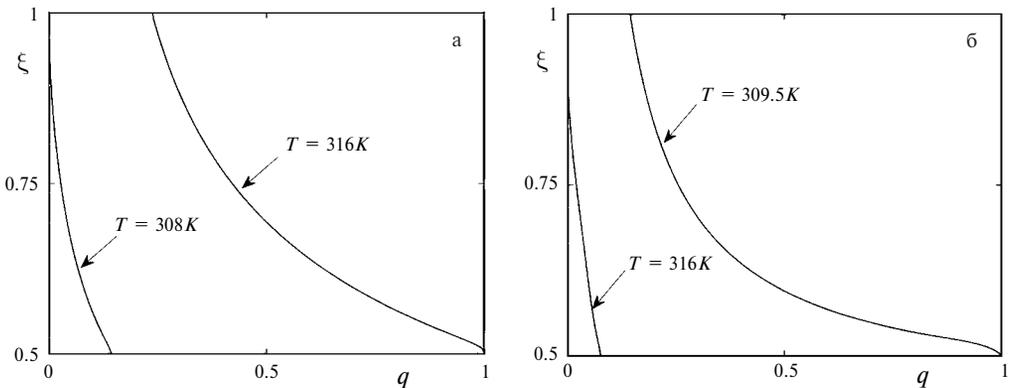


Рис. 9.

состоянии (вертикальные отрезки справа для рис. 8, а и 8, б), с начала фазового перехода и до достижения температурой значения $T = 316$ К, соответствующего выходу (рис. 9) фронта начала фазового перехода на внешнюю границу тела, величина $|\sigma_\phi|$ монотонно уменьшается до минимального значения.

При дальнейшем снижении температуры до значения $T^* = 308$ К в случае внутреннего давления или до значений $T^* = 309.5$ К в случае внешнего давления, соответствующих моменту завершения прямого превращения на внутренней границе тела, происходит умеренный рост σ_ϕ для случая внутреннего давления или ускоренный рост $|\sigma_\phi|$ для случая внешнего давления. При дальнейшем охлаждении происходит движение по материалу от внутренней границы тела к внешней границе фронта завершения фазового перехода, на котором выполняется условие $q = 1$. График зависимости σ_ϕ от T резко меняется. Для случая действия внутреннего давления медленное возрастание σ_ϕ сменяется быстрым ростом этой величины. На соответствующем графике для случая действия внешнего давления в точке $T = T^*$ наблюдается точка с резким изменением производной. В обоих случаях движение по материалу фронта завершения фазового перехода вызывает весьма существенное увеличение модуля кольцевого напряжения, которое становится еще больше, если не учитывать структурный механизм деформирования СПФ. Согласно рис. 3, в процессе движения по материалу фронта завершения фазового перехода на внутренней границе тела наблюдается резкий рост интенсивности напряжений. В то же время на внешней границе тела как в случае внутреннего, так и в случае внешнего давления в том же процессе наблюдается монотонное уменьшение интенсивности напряжений.

Заключение. На примере решения задачи о прямом термоупругом фазовом превращении в толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием внутреннего или внешнего давления, показано, что при прямом превращении под действием постоянной внешней нагрузки происходит существенное перераспределение кольцевых напряжений и интенсивности напряжений. Кольцевые напряжения на внутренней границе сферы при полном фазовом переходе возрастают примерно в два раза по сравнению со значениями в упругом аустенином состоянии до начала фазового перехода. В случае внутреннего давления эффект перенапряжения несколько выше, чем в случае внешнего давления. Этот эффект связан с движением по материалу фронта завершения фазового перехода. Эффект перенапряжения опасен, поскольку он наблюдается в низкопрочном мартенситном фазовом состоянии. На внешней границе тела этот процесс приводит к существенному падению кольцевых напряжений по сравнению с упругими значениями в аустенитном состоянии. Учет структурного механизма деформирования СПФ несколько уменьшает эффект перенапряжения и в то же время приводит к росту деформаций и радиальных смещений, особенно на внутренней границе сферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. Л.: Изд.-во ЛГУ, 1987. 216 с.
2. *Lexcellent C. Shape-Memory Alloys Handbook*. ISTE Ltd.&Wiley&Sons Inc., 2013. 379 p.
3. *Lagoudas D. S. Shape Memory Alloys Modeling and Engineering Applications*. Springer, 2008. 435 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47685-8>.
4. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. Вып. 2. С. 211–215.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

7. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // *Механика полимеров*. 1971. № 1. С. 74–87.
8. *Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н.* Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // *ПМТФ*. 1971. № 2. С. 76–82.
9. *Rabotnov Yu. N. Savorova J. V.* The non-linear hereditary-type stress-strain relations for metals // *Int. J. Solids&Struct.* 1978. V. 14. № 3. P. 173–185.
10. *Материалы с эффектом памяти формы. Т. 2 / Под ред. Лихачева В. А.* СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. 374 с.
11. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
12. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1988. 712 с.
13. *Волков А.Е., Кухарева А. С.* Расчет напряженно-деформированного состояния в цилиндре из TiNi при охлаждении под нагрузкой и разгрузке // *Изв. РАН. Сер. физич.* 2008. Т. 72. № 9. С. 1337–1340.
14. *Волков А.Е., Кухарева А. С.* Расчет напряженно-деформированного состояния в бесконечном цилиндре из сплава с памятью формы при охлаждении и нагреве с различными скоростями // *Мех. композ. матер. и констр.* 2009. Т. 15. № 1. С. 128–136.
15. *Волков А. Е.* Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // *Изв. РАН. Сер. физич.* 2002. Т. 66. № 9. С. 1290–1297.
16. *Мовчан А. А.* Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // *ПМТФ*. 1998. Т. 39. № 1. С. 164–173.
17. *Мовчан А.А.* Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы // *Изв. РАН. МТТ*. 2000. № 6. С. 143–154.
18. *Мовчан А.А.* Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // *ПМТФ*. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
19. *Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A.* Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state // *Material Sci. Res. Int. Special Tech. Pub.* 2001. V. 2. P. 327–334.
20. *Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P.* Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys // *J. Mech.&Phys. Solids*. 2002. V. 50. P. 2717–2735.
21. *Volkov A.E., Emelyanova E. V., Evard M. E., Volkova N.A.* An explanation of phase deformation tension–compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling // *J. Alloys&Comp.* 2013. V. 577. P. 127–130.
22. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1978. № 6. С. 29–34.
23. *Cisse C., Zaki W., Zineb T. B.* A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // *Int. J. Plasticity*. 2016. V. 76. P. 244–284.
24. *Gu X., Zhang W., Zaki W., Moumni Z.* An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading // *Smart Mater. Struct.* 2017. V. 26. Art. No. 095047.
25. *Tikhomirova K.* Computation of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional model // *Materials Today: Proc.* 2017. № 4. P. 4626–4630.
26. *Тихомирова К.А.* Феноменологическое моделирование фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы. Одномерный случай // *Выч. мех. сплошн. сред*. 2018. Т. 11. № 1. С. 36–50.
27. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л. Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 3. С. 118–130.
28. *Хачин В.Н., Пушин В. Г., Кондратьев В. В.* Никелид титана: структура и свойства. М.: Наука, 1992. 160 с.
29. *Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л.* Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Деформ. и разруш. матер.* 2018. № 12. С. 2–11.
30. *Nushtaev D. V., Zhavoronok S. I.* Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions // *IFAC Papers OnLine*. 2018. V. 51. № .2. P. 873–878.
31. *Nushtaev D.V., Zhavoronok S. I.* Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions // *Adv. Struct. Mater.* 2019. V. 110. P. 493–524.

32. Zhavoronok S.I. On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements // AIP Conf. Proc. Ser. "Int. Conf. Comput. Meths. in Sci.&Engng. 2020". 2021. P. 120004. <https://doi.org/10.1063/5.0047900>
33. Movchan A.A. Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys // AIP Conf. Proc. 2022. V. 2611. Iss. 1. Art. No. 100005. <https://doi.org/10.1063/5.0120427>
34. Мовчан А.А. Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 140–151.
35. Banderia E., Savi M., Monteiro P. Jr. Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 7. P. 133–144.
36. Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A. Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection // J. Intell. Mater. Syst.&Struct. 2015. V. 26. № 5. P. 1–19.
37. Золочевский А.А., Беккер А.А. Введение в ABAQUS. Харьков: 2011. 49 с.

The Effect of Stress Redistribution in a Thick-Walled Sphere Made of Shape Memory Alloy at Direct Phase Transformation under Constant Pressure

A. A. Movchan^{a,#}, A. V. Sharunov^{b,##}

^a*Institute of Applied Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^b*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: movchan47@mail.ru,*

^{##}*e-mail: aleksej-sharunov@yandex.ru*

The coupled problems of changing the stress-strain and phase state in a thick-walled spherical shell made of a shape memory alloy, the material of which undergoes a direct thermoelastic phase transformation associated with a decrease in temperature uniformly distributed over the entire volume of the material under the action of constant internal or external pressure, are solved. The effects of significant overstressing of the body layers adjacent to the inner boundary and significant unloading of the layers adjacent to the outer boundary associated with the movement of the phase transition completion front through the material were found.

Keywords: shape memory alloys, thick walled sphere, direct transformation, stress redistribution

REFERENCES

1. Lihachev V.A., Kuz'min S.L., Kamenceva Z.P. Shape Memory Effect. Leningrad: Izd.-vo LGU, 1987. 216 p. (in Russian)
2. Lexcellent C. Shape-Memory Alloys Handbook. ISTE Ltd.; Wiley&Sons Inc., 2013. 379 p.
3. Lagoudas D. S. Shape Memory Alloys Modeling and Engineering Applications. Springer, 2008. 435 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47685-8>.
4. Kurdyumov G.V., Handros L. G. On thermoelastic equilibrium in martensitic transformation // Dokl. Phys., 1949, vol. 66, iss. 2, pp. 211–215. (in Russian)
5. Rabotnov Yu. N. Creep Problems in Structural Members. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
6. Rabotnov Yu. N. Introduction to Hereditary Mechanics of Solids. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (in Russian)
7. Rabotnov Yu.N., Papernik L. Kh., Stepanychev E.I. Application of nonlinear theory of heredity to the description of temporal effects in polymeric materials. // Polimer Mech., 1971, vol. 7, no. 1, pp. 63–73.
8. Dergunov N.N., Papernik L. Kh., Rabotnov Yu. N. Analysis of behavior of graphite on the basis of nonlinear heredity theory // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1971, no. 1, pp. 235–240.
9. Rabotnov Yu. N. Suvorova J. V. The non-linear hereditary-type stress-strain relations for metals // Int.

- J. Solids&Struct., 1978, vol. 14, no. 3, pp. 173–185.
10. Materials with Shape Memory Effect: Vol. 2 / Ed. by Likhachev V.A. St. Petersburg: Izd-vo NIIH SPbGU, 1998. 374 p. (in Russian)
 11. *Lihachev V.A., Malinin V.G.* Structural and Analytical Theory of Strength. St. Petersburg: Nauka, 1993. 471 p. (in Russian)
 12. *Rabotnov Yu. N.* Mechanics of a Straining Solid. Moscow: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
 13. *Volkov A.E., Kukhareva A. S.* Calculation of the stress-strain state of a TiNi cylinder subjected to cooling under axial force and unloading // Bull. of the RAS: Physics, 2008, no. 11, pp. 1267–1270.
 14. *Volkov A.E., Kukhareva A. S.* Calculation of the stress-strain state in an infinite shape memory alloy cylinder during cooling and heating at different speeds // Mech. Compos. Mater.&Const., 2009, vol. 15, no.1, pp. 128–136. (in Russian)
 15. *Volkov A. E.* Microstructural modeling of alloy deformation under repeated martensitic transformations // Izv. RAS. Ser. Phys., 2002, vol. 66, no. 9, pp. 1290–1297. (in Russian)
 16. *Movchan A. A.* Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1998, vol. 39, no. 1, pp. 143–151.
 17. *Movchan A. A.* Torsion of prismatic beams from shape memory alloys // Mech. of Solids, 2000, no. 6, pp. 119–128.
 18. *Movchan A. A.* The Selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1995, vol. 36, no. 2, pp. 300–306.
 19. *Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A.* Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state // Mater. Sci. Res. Int. Spec. Techn. Pub., 2001, vol. 2, pp. 327–334.
 20. *Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P.* Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys // J. Mech.&Phys. Solids, 2002, vol. 50, pp. 2717–2735.
 21. *Volkov A.E., Emelyanova E. V., Evard M.E., Volkova N.A.* An explanation of phase deformation tension-compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling // J. Alloys&Comp., 2013, vol. 577, pp. 127–130.
 22. *Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N.* A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression // Mech. of Solids, 1978, vol. 13, no. 6, pp. 825–831.
 23. *Cisse C., Zaki W., Zineb T.B.* A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // Int. J. Plasticity, 2016, vol. 76, pp. 244–284.
 24. *Gu X., Zhang W., Zaki W., Mounni Z.* An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading // Smart Mater. Struct., 2017, vol. 26, art. no. 095047.
 25. *Tikhomirova K.* Computation of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional model // Mater. Today: Proc., 2017, no. 4, pp. 4626–4630.
 26. *Tikhomirova K. A.* Phenomenological modeling of phase and structural deformations in shape memory alloys. The one-dimensional case // Comput. Mech. Contin. Media, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 36–50. (in Russian)
 27. *Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L. G.* Micromechanical model of non-linear deformation of shape memory alloys under phase and structure transformation // Mech. of Solids, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 406–416.
 28. *Hachin V.N., Pushin V.G., Kondrat'ev V.V.* Titanium Nickelide: Structure and Properties. Moscow: Nauka, 1992. 160 p. (in Russian)
 29. *Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A. L.* Experimental identification of a nonlinear deformation model for a shape memory alloy during phase and structural transformations // Russ. Metall., 2019, no. 4, pp. 301–308.
 30. *Nushtaev D.V., Zhavoronok S. I.* Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions // IFAC Papers OnLine, 2018, vol. 51, no. 2, pp. 873–878.
 31. *Nushtaev D.V., Zhavoronok S. I.* Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions // Adv. Struct. Mater., 2019, vol. 110, pp. 493–524.
 32. *Zhavoronok S. I.* On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements // AIP Conf. Proc. Ser. "Int. Conf. of Comput. Meths. in Sci.&Engng. 2020", 2021, pp. 120004. <https://doi.org/10.1063/5.0047900>

33. *Movchan A. A.* Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys // AIP Conf. Proc., 2022, vol. 2611, iss. 1, art. no. 100005.
<https://doi.org/10.1063/5.0120427>
34. *Movchan A. A.* Phenomenological model of changes in phase-structural deformations in shape memory alloys // Mech. of Solids, 2020, vol. 55, no. 4, pp. 573–583.
35. *Banderia E., Savi M., Monteiro P. Jr.* Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities // Arch. Appl. Mech., 2006, vol. 76, pp. 133–144.
36. *Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A.* Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection // J. Intell. Mater. Syst.&Struct., 2015, vol. 26, iss. 5, pp. 1–19.
37. *Zolocheskiy A.A., Bekker A.A.* Introduction to ABAQUS. Har'kov: 2011. 49 p. (in Russian)

УДК 531.4

СЖАТИЕ И СДВИГ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КЛИНА ШЕРОХОВАТЫМ ШТАМПОМ (МОДЕЛЬ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА)

© 2024 г. А. Н. Сахаров^{1,*}, А. Ю. Рябинина^{1,**}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

*e-mail: alexandr.sakharov@math.msu.ru,

**e-mail: alina.riabinina@math.msu.ru

Поступила в редакцию 12.02.2024 г.

После доработки 15.03.2024г.

Принята к публикации 20.03.2024г.

Исследуется передача сдвигового усилия посредством фрикционного контакта на шероховатых поверхностях предварительно сжатых пластических тел. В качестве модели контакта рассматривается задача пластического смятия клина шероховатым плоским штампом с условием трения Прандтля на контактной поверхности. Предложена методика определения предельной сдвиговой нагрузки, воспринимаемой фрикционным контактом.

Ключевые слова: фрикционный контакт, сдвигоустойчивое соединение, идеально-пластический клин, трение

DOI: 10.31857/S0032823524020069 EDN: XUKAVH

1. Введение. При проектировании соединений деталей, где нагрузка сдвига передается только силами трения через контакт предварительно сжатых металлических поверхностей (фрикционные соединения) важную роль играет задача определения предельного значения сдвиговой нагрузки. Несущая способность фрикционных соединений зависит как от способа получения шероховатости поверхности, так и от адгезионных свойств, которые могут изменяться вследствие возникновения и разрушения окисных пленок на поверхности металлических деталей [1, 2]. В соответствии с классификацией И. В. Крагельского для таких условий может использоваться теория сухого или граничного трения, когда наряду с силами межмолекулярного взаимодействия между контактирующими поверхностями важную роль играют процессы преодоления механического сопротивления при пропахивании или взаимном внедрении отдельных выступов шероховатой поверхности [3].

При достижении предельной нагрузки такое соединение на макроуровне обнаруживает типичные черты идеальнопластического поведения, а на микроуровне происходит пластический срез выступов на контактной поверхности, поэтому модели пластического поведения при описании такого контактного взаимодействия могут оказаться весьма полезны. Строгое математическое исследование задачи затрудняется как статистическим характером шероховатости обработанной поверхности детали, так и сложностью решения самой контактной задачи с учетом множества

факторов (геометрии сопрягаемых поверхностей, учета условий контакта, необратимого деформирования при начальном сжатии и т.д.). В данной работе предложена модель неровностей в виде двугранного клина из идеальнопластического материала, контактирующего с плоским шероховатым штампом. Такая модель может показаться излишне упрощенной, однако по выражению Ю. Н. Работнова “механик вынужден блуждать между Сциллой и Харибдой; с одной стороны, его уравнения должны достаточно точно отражать действительность, с другой – быть доступными для интегрирования” [4].

Другой подход для решения контактных задач для шероховатых тел используется в рамках упругой или нелинейно упругой модели при моделировании шероховатости в виде регулярных структур [5, 6] или самоподобных (фрактальных) объектов [7].

Однако для целей нашего исследования несущей способности фрикционного контакта модель идеально-пластического тела представляется наиболее подходящей. Еще одним полезным свойством такой модели является локальный характер пластического деформирования, когда поля напряжений от дискретных контактов не взаимодействуют. В этом случае для исследования поведения ансамбля контактов уже не нужно решать краевую задачу МДТТ, а только вероятностную [8, 9].

Известное геометрически подобное (автомодельное) решение Хилла о сжатии идеально-пластического клина гладким штампом в условиях плоской деформации [10, 11] лежит в основе модели локально пластически деформируемого тела при анализе контактных задач для шероховатых тел [12], а также для описания образования физического контакта между компонентами в твердом состоянии при получении композиционных материалов.

Особенностью решения Хилла является неограниченность усилия, приложенного к штампу, поскольку пластическое смятие вершины клина приводит к росту контактной площадки, так возникает первый параметр – осадка штампа, связанная с усилием сжатия. Для определения несущей способности фрикционного соединения, необходимо учесть трение, возникающее на контактных площадках. В качестве закона трения используется условие Прандтля взамен закона Кулона, поскольку требование ограниченности касательного напряжения $|\tau_n| \leq k$ пределом текучести k является определяющим. Соколовским предложен параметр ω , $\tau_n = k \cos 2\omega$, который характеризует трение при смятии клина шероховатым штампом [13], с одной стороны, а с другой, равен углу между нормалью к поверхности и линией скольжения вблизи границы. Задание углового параметра ω позволяет рассматривать как реактивные силы трения $\omega = \omega_0$, препятствующие выпиранию материала клина, так и активные $\omega = \frac{\pi}{2} - \omega_0$, когда силы трения совершают работу по выпиранию (выпахивание).

Угол $\omega \in \left[\omega_0, \frac{\pi}{2} - \omega_0 \right]$ является вторым параметром, характеризующим условия

на контактной площадке. Таким образом, силовым параметрам (P, T) сжатия и сдвига отвечают параметры (c, ω) , подобный подход позволяет рассматривать различные сценарии нагружения клина.

2. Смятие клина шероховатым штампом при пропорциональном нагружении. Построим геометрически подобное (автомодельное) решение смятия несжимаемого жестко-идеально-пластического клина плоским шероховатым штампом, когда на площадке контакта наряду с нормальными σ_n действуют касательные напряжения τ_n , не превосходящие предела текучести материала на сдвиг ($\tau_n \leq k$). В соответствии с [12] введем угол ω (рис. 1), характеризующий адгезионное взаимодействие: $\pi/4 \leq \omega < \pi/2$

$$\tau_n = k \cos 2\omega \quad (2.1)$$

4. Случай одностороннего смятия при реактивной силе трения. Рассмотрим дальнейшее обобщение задачи Хилла на случай одностороннего смятия клина шероховатым штампом (рис. 3, а), при упрощающем предположении равенства наклона граней $\gamma^+ = \gamma^- = \gamma$. Геометрическое подобие задачи сохраняется и в этом случае. Вначале рассмотрим случай ($\omega = \omega_0 > \pi / 4$), когда сила сдвига, равная силе трения, является реакцией и препятствует скольжению материала.

С учетом уже принятых обозначений из геометрического подобия и равенства площадей соответствующих треугольников следуют равенства

$$2cx = h \cos \delta \left(\frac{h}{\sqrt{2} \sin \omega} - 2x \right), \quad \frac{c}{x} = \frac{h \cos \delta}{\frac{h}{\sqrt{2} \sin \omega} - 2x + h \sin \delta} \quad (4.1)$$

Разрешая (4.1), получаем квадратное уравнение на h/c

$$\left(\frac{h}{c} \right)^2 \frac{\cos \delta}{\sqrt{2} \sin \omega} - \frac{2h}{c} \sin \delta - \frac{2(1 + \sqrt{2} \sin \omega \sin \delta)}{\cos \delta} = 0 \quad (4.2)$$

Положительный корень уравнения (4.2)

$$\left(\frac{h}{c} \right) = \frac{\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + \sqrt{(\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + 1)^2 + 1}}{\cos \delta}$$

Откуда получаем зависимость между h/c и углом γ в параметрической форме

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(h/c)^2 \cos \delta}{2\sqrt{2} \sin \omega (1 + (h/c) \cos \delta)}$$

Усилие P одностороннего смятия линейно связано с осадкой штампа и равно

$$\frac{P_*(c)}{c} = \frac{pa}{c} = k \frac{(1 + 2\psi + \sin 2\omega) \left(\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + \sqrt{(\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + 1)^2 + 1} \right)}{\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta}, \quad (4.3)$$

где $a = NA = h / (\sqrt{2} \sin \omega)$ – ширина площадки контакта.

Важным свойством полученного решения для симметричного клина с учетом трения является устойчивость процесса одностороннего смятия. Действительно, поскольку в силу геометрического подобия $\delta < \gamma$, то возникновение скольжения в противоположную сторону приводит к сетке линий скольжения, доставляющих большее значение сжимающей силы P . В силу экстремальных теорем для жестко-пластического тела действительное решение должно приводить к наименьшему значению

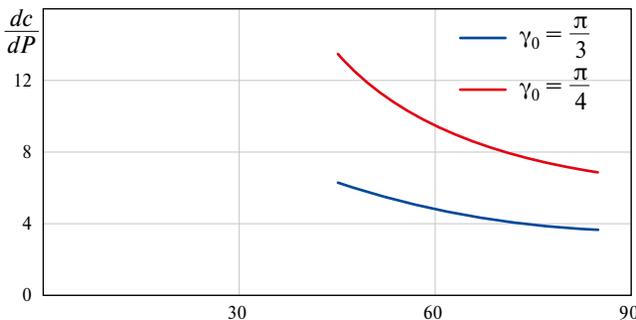


Рис. 2. Зависимость dc/dP податливости от ω для клина с углом раствора.

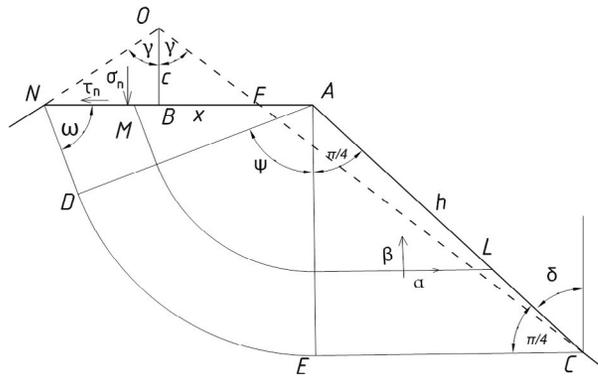


Рис. 3. Несимметричное смятие клина.

предельной нагрузки среди всех кинематически возможных полей скоростей, т.е. в условиях квазистатики одностороннее смятие клина оказывается несменяемой формой деформирования. В случае одностороннего смятия равновесие возможно лишь при реактивной силе равной $T = k \cos 2\omega a$.

5. Случай одностороннего смятия при активной силе трения (пропорциональное нагружение). Рассмотрим случай, когда штамп передает на клин усилия сжатия $P(\lambda)$ и сдвига $T(\lambda)$, изменяющихся монотонно и пропорционально одному параметру. Усилие сдвига передается к клину также посредством сил трения, но теперь сила трения является источником движения среды. Схема линий скольжения для этого случая $\omega = \pi/2 - \omega_0$ показана на рис. 4.

Для реализации такой схемы деформирования необходимо, чтобы выполнялись геометрические условия: а) $\gamma > \delta$; б) $\delta + \omega \geq \pi/4$. Очевидно, что решение задачи, следующее из соображений геометрического подобия, будет таким же, как и в предыдущем случае.

Представляет интерес определение оптимальной скорости движения штампа, соответствующего минимальным затратам механической энергии в процессе смятия по этой схеме деформирования. Действительно, поскольку направление действия касательного напряжения всегда направлено в сторону, противоположную движению частиц среды относительно штампа, то для реализации схемы, изображенной на рис. 4, необходимо $U \geq \max u(x,0), \forall x \in AN$.

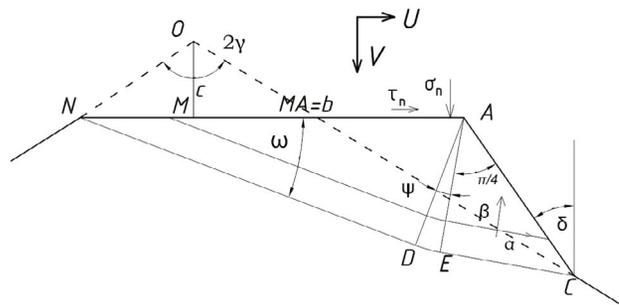


Рис. 4. Схема линий скольжения при активном сдвигающем усилии.

Из геометрического подобия следует, что горизонтальная проекция скорости движения частицы на физической плоскости Oxy

$$U \geq \eta V = \frac{b}{c} V = \frac{\sqrt{2} \cos \omega_0 \sin \delta + 1}{\sqrt{2} \cos \omega_0 \cos \delta} V,$$

т.е. работа, отнесенная к единичному смятию, с учетом работы сил трения равна

$$\frac{dA_p}{dc} = k \left(1 + 2\psi + \sin 2\omega_0 + \cos \omega_0 \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{\sqrt{2} \cos \delta} \right) \quad (5.1)$$

Сравнение механической работы по схеме 3 (реактивная сила трения $\omega_0 < \pi / 4$) и по схеме 4 (активная сила трения $\omega_0 > \pi / 4$) к механической работе для гладкого штампа ($\omega = \pi / 4$) дано на рис. 5.

Видно, что смятие шероховатым штампом более затратное, чем гладким, и если для случая реактивного трения этот результат предсказуем, то для активного сдвига неочевиден.

6. Двухзвенный процесс нагружения клина шероховатым штампом при действии усилий сжатия и сдвига. Фрикционный контакт характеризуют два состояния: 1-я стадия – прикладывается и фиксируется усилие сжатия $P = P_0$, 2-я стадия – нагружение касательным усилием $T < T^*$, где T^* – несущая способность фрикционного контакта. Для определения T^* рассмотрим двухзвенный процесс нагружения клина. Когда к клину прикладывается вертикальная нагрузка P , возникающие под штампом касательные напряжения являются реактивными, ($\omega = \omega_0$) определены решением автомодельной задачи одностороннего смятия (в силу замечания о минимальном значении). Действие активного сдвига T может быть направлено как в сторону действия реактивных касательных напряжений, так и в противоположную. Однако в сторону действия реактивных касательных напряжений увеличение T невозможно без увеличения контактной площадки и сжимающей силы, следовательно, при $P = P_0$ возможно действие активного сдвига только в противоположную сторону. Прежнее положение равновесия штампа при этом нарушается, происходит процесс увеличения площадки контакта и продолжающаяся осадка клина. Т.е. задача о смятии клина комбинацией сжимающей P и сдвигающей T сил оказывается связанной. Процесс осаживания клина и распределение напряжений на площадке контакта определяются параметрами (c, ω) . В каждый момент процессу деформирования отвечает процесс нагружения – значения равнодействующих усилий сжатия и сдвига (P, T) , определяемых интегрированием напряжений с учетом условия предельного равновесия.

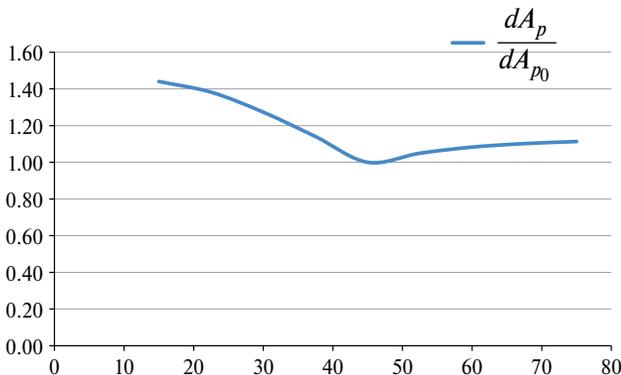


Рис. 5. Сравнение механической работы для обеих схем действия силы трения.

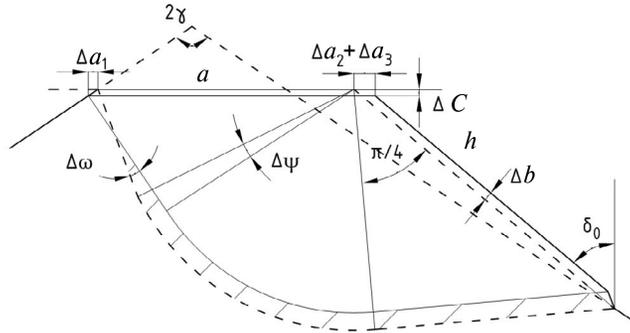


Рис. 6. Изменение ширины площадки на 2-м этапе.

При передаче на клин усилия сдвига T посредством шероховатого штампа происходит изменение угла ω и смена схемы деформирования (рис. 6), заключающейся в исчезновении геометрического подобия. Однако выполняется следующее более частное геометрическое свойство: в любой момент процесса сдвига, определяемого углом ω , выполнено: $d\delta = 0$, откуда $d\psi = d\omega$. В силу постоянства силы $P = P_0$ необходимо выполнение условия интегрального равновесия:

$$p(\omega)\Delta a + \Delta p(\omega)a = 0 \quad (6.1)$$

Горизонтальная составляющая усилия T равна разности интегралов от действующих касательных напряжений на площадке контакта и от реактивных касательных напряжений 1-й стадии нагружения $\tau_n(\omega)a - \tau_n(\omega_0)a_0 = T(\omega)$, где a_0 – ширина площадки смятия при $c = c_0$, откуда следует $T(\omega_0) = 0$ в качестве начального условия для 2-й стадии нагружения.

Найдем изменение нормального давления и касательных напряжений, связанное с $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_n &= \Delta(k \cos 2\omega) = -2k \sin 2\omega \Delta\omega \\ \Delta p &= k\Delta(1 + \sin 2\omega + 2\psi) = 2k(\cos 2\omega \Delta\omega + \Delta\omega) = 2k \cos^2 \omega \Delta\omega \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что изменение напряжений не зависит от исходной геометрии клина и определяется только углом ω , их отношение равно:

$$\Delta\tau_n = -\operatorname{tg} \omega \Delta p \quad (6.3)$$

Заметим, что полученное соотношение, хотя внешне схоже, отличается от закона Кулона, поскольку ω – переменная величина.

Найдем изменение ширины площадки контакта. Из (6.1) и (6.2) следует $\Delta a/a = -\Delta p/p$ или

$$\frac{\Delta a}{a^2} = -\frac{\Delta p}{pa} = -\frac{2k(\cos 2\omega + 1)}{P_0} \Delta\omega \quad (6.4)$$

Интегрируя (6.4) $\frac{1}{a} = \frac{k}{P_0}(2\omega + \sin 2\omega + D)$, найдем постоянную D из условия $a(\omega_0) = a_0 = P_0/k(1 - \pi/2 + 2\delta_0 + 2\omega_0 + \sin 2\omega_0)$, откуда $D = 1 - \pi/2 + 2\delta_0$.

Тогда ширина контактной площадки в каждый момент перехода равна

$$a(\omega) = a_0 \frac{1 - \pi / 2 + 2\delta_0 + 2\omega_0 + \sin 2\omega_0}{1 - \pi / 2 + 2\delta_0 + 2\omega + \sin 2\omega} \quad (6.5)$$

Связь приращения площадки Δa с осадкой штампа Δc может быть найдена из геометрических соображений (рис. 6) по изменению составляющих ширины площадки контакта $\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3$, где $\Delta a_1 = \Delta c \operatorname{tg} \gamma$, $\Delta a_2 = \Delta c \operatorname{tg} \delta_0$, $\Delta a_3 = \Delta b / \cos \delta_0$.

Из условия сохранения объема следует $a\Delta c = h\Delta b$, откуда

$$\Delta b = \frac{\Delta c}{\sqrt{2} \sin \omega} \text{ и } \Delta a_3 = \frac{\Delta b}{\cos \delta_0} = \frac{\Delta c}{\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta_0},$$

следовательно

$$\Delta a = A(\omega)\Delta c, \quad (6.6)$$

где $A(\omega) = \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta_0 + (\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta_0)^{-1}$.

Из (6.6) следует уравнение $\Delta c = a'(\omega)\Delta\omega/A(\omega)$, интегрируя которое при условии $c(\omega_0) = c_0$, получим величину осадки штампа при действии сдвиговой нагрузки

$$c(\omega) - c_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{a'(\omega)d\omega}{A(\omega)} \quad (6.7)$$

Найдем предельное усилие сдвига T^* , зная касательные напряжения, действующие на площадке контакта.

Из (6.5) при $\omega = \frac{\pi}{2} - \omega_0$ следует, что ширина площадки в конце этапа нагружения активной сдвиговой нагрузкой равна

$$a_1 = a\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0\right) = a_0 \frac{1 - \frac{\pi}{2} + 2\delta_0 + 2\omega_0 + \sin 2\omega_0}{1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta_0 - 2\omega_0 + \sin 2\omega_0}$$

Откуда

$$T_* = k \cos 2\omega_0 (a_1 + a_0) = 2k \cos 2\omega_0 \frac{1 + 2\delta_0 + \sin 2\omega_0}{1 + 2\delta_0 + \sin 2\omega_0 + \pi / 2 - 2\omega_0} \quad (6.8)$$

С учетом $\omega_0 > \pi / 4$ из (6.8) следует, что $T_* > 2|T(\omega_0)|$, т.е. предельное значение сдвиговой нагрузки более чем двукратно превышает реактивное усилие.

Найдем пластическую податливость на 2-м этапе нагружения при продолжающемся смятии сдвигом

$$\left. \frac{dc}{dT} \right|_{P=P_0} = \frac{1}{(p(\omega)\operatorname{ctg} \gamma + k \cos 2\omega)A(\omega)} \quad (6.9)$$

На диаграмме (рис. 7) построена зависимость (6.9) для частного случая ($2\gamma = 2\pi / 3$, $\omega_0 = 5\pi / 12$) в интервале изменения угла $\omega \in (\pi / 12, 5\pi / 12)$. Из расчетов, проведенных также и для других значений параметров, следует, что зависимость пластической осадки штампа при сдвиге близка к линейной.

Заключение. Понятие предельного значения усилия сдвига для дискретного контакта введено из следующих соображений физического характера. Силы трения всегда направлены в сторону, противоположную движению частиц относительно штам-

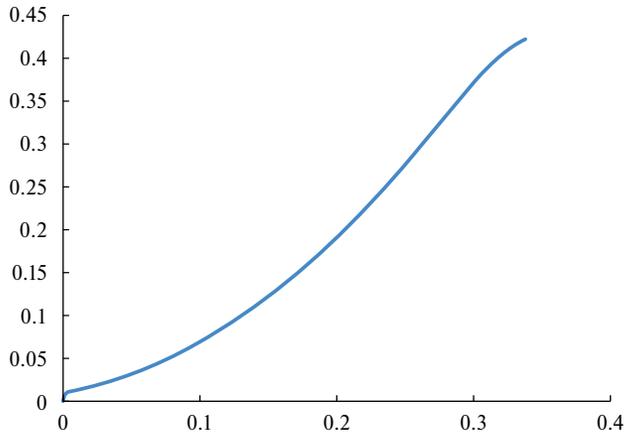


Рис. 7. Диаграмма зависимости $\frac{\Delta c}{c_0} \left(\frac{T}{P_0} \right)$.

па, поэтому максимальные касательные напряжения при действии активной силы сдвига будут такими же по величине, что и реактивные, и противоположны им по знаку, т.е. $\tau_n(\omega_0) = -\tau_n \left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 \right)$. Следовательно, предельное значение силы сдвига – это максимальное значение силы сдвига, равное

$$T_* = \max T = k \cos 2\omega_0 (a_0 + a_1)$$

Если ввести условную величину $\mu = T_*/P_0$, которую можно назвать коэффициентом трения пары «тело-штамп», то можно заметить, что коэффициент трения пары не зависит от усилия предварительного сжатия P_0 и от предела текучести материала на сдвиг.

Применительно к задаче о несущей способности сжатых шероховатых поверхностей использование линейной аппроксимации $\frac{\Delta c}{c_0} \left(\frac{T}{P_0} \right)$ открывает возможность перехода к расчету статистического ансамбля неровностей. В случае насыщенного пластического контакта шероховатых поверхностей, можно использовать модель упругого основания, жесткость которого неоднородна и определяется профилем шероховатости и адгезионными свойствами поверхности. В отличие от классической модели вертикальное перемещение вызывается как сжатием, так и сдвигом; зависит от их комбинации и истории нагружения.

Работа выполнена в рамках НИР «Феноменологические модели деформирования и разрушения перспективных материалов и конструкций» и НИР «Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений, критериев прочности и устойчивости процессов деформирования».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саввин А.П. О расчете стыков на высокопрочных болтах по состоянию предельного трения // Строит. механика и расчет сооруж. 1965. № 3.
2. Kulak G.L. et al. Measurement of slip coefficient for grade // ASTM A588 Steel. Univ. of Alberta. 2009. Rep. No. 268. 168 p.
3. Крагельский И. В. Трение, изнашивание и смазка. М.: Машиностроение, 1978.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

5. *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
6. *Горячева И. Г., Чекина О. Г.* Механика дискретного контакта // в сб.: Механика контактных взаимодействий / под. ред. *Воровича И. И., Александрова В. М.* М.: Физматлит, 2001. С. 419–437
7. *Бородич Ф. М., Мосолов А. Б.* Фрактальная шероховатость в контактных задачах// ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 786–795.
8. *Демкин И. Б.* Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970.
9. *Крагельский И. В.* О расчете коэффициента сухого трения по профилограмме поверхностей // Трение и износ в машинах. 1948. Вып. 3. С. 24–36.
10. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. *Прагер В., Ходж Ф. Г.* Теория идеально-пластических тел. М.: Иностран. лит., 1956. 398 с.
12. *Ушицкий М. У.* Пластическое деформирование шероховатой поверхности // ПМТФ. 1978. № 4. С. 183–187.
13. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

Compression and Shear of an Ideal-plastic Wedge with a Rough Stamp (Frictional Contact Model)

A. N. Sakharov^{a,#}, A. U. Riabinina^{a,##}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: alexandr.sakharov@math.msu.ru,*

^{##}*e-mail: alina.riabinina@math.msu.ru*

The transfer of shear force through frictional contact on rough surfaces of precompressed plastic bodies is studied. As a contact model, we consider the problem of plastic compression of a wedge by a rough flat stamp with the condition of Prandtl friction on the contact surface. A technique is proposed for determining the maximum shear load perceived by frictional contact

Keywords: frictional contact, slip-critical connection, ideal plastic wedge, Prandtl's friction law

REFERENCES

1. *Savvin A. P.* On the calculation of joints on high-strength bolts based on the state of ultimate friction // Struct. Mech.&Anal. of Constr., 1965, no. 3.
2. *Kulak G.L. et al.* Measurement of slip coefficient for grade // ASTM A588 Steel. Univ. of Alberta, 2009, Rep. no. 268, 168 p.
3. *Kragel'skij I. V.* Friction, Wear and Lubrication. Moscow: Mech. Engng, 1978. (in Russian)
4. *Rabotnov Yu. N.* Solid Mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 744 p. (in Russian)
5. *Goriacheva I. G.* The Mechanics of Frictional Interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
6. *Gorjacheva I.G., Chekina O.G.* Mechanics of discrete contact // in: Mechanics of Contact Interactions / ed. by *Vorovich I.I., Alexandrova V.M.* Moscow: Fizmatlit, 2001. pp. 419–437. (in Russian)
7. *Borodich F.M., Mosolov A. B.* Fractal roughness in contact problems // AMM, 1992, vol. 56, no. 5, pp. 786–795.
8. *Demkin I. B.* Contacting of Rough Surfaces. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)
9. *Kragelsky I. V.* On calculating the coefficient of dry friction according to the surfaces' profilogram // Friction&Wear in Machines, 1948, iss. 3, pp.24–36.
10. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon, 1950. 407 p.
11. *Prager W., Hodge Ph. G.* Theory of Perfectly Plastic Solids. N.Y.: Wiley, 1951. 398 p.
12. *Ushitsky M. U.* Plastic deformation of a rough surface // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1978, no. 4, pp. 183–187.
13. *Sokolovskiy V. V.* Theory of Plasticity. Moscow: Vysshaya Shkola, 1969. 608 p.

УДК 539.4:678.067

КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ВОЛОКОН И МАТРИЦЫ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

© 2024 г. А. И. Олейников^{1,2,*}¹Центральный аэрогидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ), Жуковский, Россия²Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
*e-mail: alexander.oleinikov@tsagi.ru, * e-mail: oleinikov.ai@mipt.ru

Поступила в редакцию 03.11.2023 г.

После доработки 29.01.2024 г.

Принята к публикации 15.02.2024 г.

При анализе прочности конструкций из слоистых волокнистых полимерных композиционных материалов используются критерии разрушения монослоя — однонаправленно армированного композита. Формулируется критерий прочности по условиям разрушения матрицы, соответствующий коническим предельным поверхностям и наименьшим разрушающим нагрузкам. Приводится критерий прочности по условию разрушения волокон, не допускающего парадокса увеличения прочности в области перехода от разрушения волокон к разрушению матрицы. Проводится экспериментальная проверка критериев при объемном, плоском и одномерном нагружениях. Показывается их лучшее соответствие опытным данным и отмечаются их преимущества. Небольшое число легко определяемых параметров данных критериев способствует их надежности и устойчивости в расчетах на прочность элементов композитных конструкций.

Ключевые слова: разрушение, прочность, композиты, полимеры, однонаправленный материал

DOI: 10.31857/S0032823524020078 EDN: XUILPU

1. Введение. Необходимым условием достижения современных прочностно-весовых и эксплуатационных характеристик несущих конструкций является максимальное применение в них непрерывно-волоконных слоистых полимерных композиционных материалов (ПКМ). Полное чисто экспериментальное обоснование прочности новых изделий из ПКМ является чрезвычайно многоуровневым и слишком ресурсозатратным. Расчетные исследования конструктивных решений и сопровождение всех уровней испытаний на основе более надежных теорий позволяет существенно сократить объем необходимых испытаний и повысить эффективность обработки прочности изделия.

Расчеты на прочность конструкций из ПКМ во многом основываются на критериях прочности составляющих его слоев (монослоев) — однонаправленно армированных композитов. К настоящему времени предложено довольно много критериев прочности монослоев. Однако проблема повышения надежности и устойчивости условий прочности остается до сих пор актуальной. Различные критерии дают значи-

тельный разброс в оценках прочности. Большое число параметров критерия обуславливает не единственность их набора. Сильная нелинейность критериев приводит к их неустойчивости по входным данным и не позволяет определить их параметры в составе конструкции. Коэффициент запаса прочности на данные ограничения все еще назначается очень большим.

Нарушение прочности композита вообще может иметь разный характер и происходить по различным механизмам разрушения и неустойчивости. Механически обоснованные условия прочности учитывают характер и механизмы разрушения и соответствуют наименьшей разрушающей нагрузке. Потеря прочности однонаправленного композита происходит частично из-за разрушения волокон, частично из-за разрушения матрицы.

Широкая экспериментальная проверка многих предложенных критериев разрушения матрицы (и/или ее границы с волокном) показывает, что в настоящее время перспективными выглядят критерии, определяемые условием достижения на некоторой площадке вдоль волокон критической величины заданной комбинации касательных и нормальных напряжений [1–10]. Если на этой площадке критериальная комбинация напряжений достигает наибольшей величины, то критерий определяет разрушение при наименьшей нагрузке. Таким, например, является известный критерий [5–7]. В пространстве касательных и нормальных напряжений, действующих на площадке, данный критерий описывает предельную поверхность, которая является строго выпуклой. Она состоит из смежных поверхностей эллипсоида и эллиптического параболоида. Хотя вид предельной поверхности выбирается с учетом опыта, но, очевидно, что в первом приближении всегда можно выпуклую поверхность аппроксимировать невогнутой, например, конической поверхностью второго порядка. Нестрогая выпуклость, очевидно, пойдет в запас прочности, не изменяя при этом характера и механизма разрушения. С другой стороны, такое упрощение критерия способствует повышению его надежности и устойчивости. Подобная аппроксимация также рассматривалась в [5]. Однако на тот момент для конической предельной поверхности не было решения, позволяющего аналитически определить площадку с наибольшей величиной критериальной комбинации напряжений. Для плоского напряженного состояния это решение дано в [11]. Оно имеет вид простой конечной формулы.

Однако для случаев объемного напряженного состояния аналитического определения такой критической площадки критерия [5–7] к настоящему времени не получено, ее находят численными методами [12–13]. Но именно аналитическое решение после его подстановки в выражение критерия позволяет записать последний в виде соотношения лишь между компонентами тензора напряжений. Благодаря этому отпадает необходимость отдельно решать задачу на экстремум для определения площадки с наибольшей величиной критериальной комбинации напряжений.

В критерии [5–7] в качестве характеристических констант входят некоторые геометрические параметры предельной поверхности, величины которых даются авторами. Однако постоянные материала обычно должны определяться независимо из стандартизованных и общепринятых испытаний.

При наличии нормального растяжения на критической площадке обычно предполагается, что она всегда перпендикулярна плоскости волокон, является фиксированной и не меняется с изменением напряженного состояния. Однако при этом предположении остается открытым вопрос, достигает ли критериальное соотношение наибольшей величины именно и всегда на этой площадке. Относительно применения критериев при наличии нормального растяжения на критической площадке могут быть высказаны такие же, как и высказываемые для условия Мора, определенные сомнения. Однако хорошо известно, что чистый отрыв, по-видимому, не наблюдается, отрыв сопровождается деформациями сдвига. Поэтому нельзя исключать того, что, например, при чистом растяжении поперек

волокон максимум критерия реализуется на площадке, не ортогональной к направлению растяжения.

Что касается критерия прочности однонаправленного композита по условию разрушения волокон, то в качестве такового часто принимается равенство компоненты тензора напряжений вдоль волокон пределу продольной прочности [1,4,7]. Однако такой критерий может приводить к результату, который противоречит опыту. Например, согласно этому критерию, прочность в направлении одноосной нагрузки под углом к оси волокон возрастает с увеличением этого угла [10].

Целью настоящей работы является:

- формулировка на основе конических предельных поверхностей критерия прочности однонаправленных композитов по условию разрушения матрицы, надежно определяющего наименьшую разрушающую нагрузку;
- формулировка критерия прочности по условию разрушения волокон, непротиворечащего опыту при внеосевом нагружении;
- вывод уравнения и получение его аналитических решений, определяющих площадки с наибольшей величиной критериальной комбинации напряжений при объемном напряженном состоянии;
- определение системы уравнений и нахождение ее решений, определяющих смену механизмов потери прочности композита от разрушения волокон к разрушению матрицы, и наоборот;
- получение соотношений для определения характеристических параметров критериев прочности из стандартизованных и общепринятых установочных испытаний;
- экспериментальная проверка предложенных критериев и их сравнение с известными критериями прочности при объемном, плоском и одномерном нагружениях.

Некоторые основные результаты этой работы были анонсированы в [14].

2. Критерий прочности по условию разрушения матрицы. Пусть σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в декартовой прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) , оси x_1, x_2 которой лежат в плоскости волокон и направлены соответственно вдоль и поперек волокон, $i, j = 1, 3$. Составляющие вектора напряжения, действующего на площадке с нормалью $n = (0, \cos \alpha, \sin \alpha)$ [4], даются формулами

$$\sigma_{nn}(\alpha) = \sigma_{ij}n_jn_i, \quad \sigma_{nt}(\alpha) = \sigma_{ij}n_jt_i, \quad \sigma_{nl}(\alpha) = \sigma_{ij}n_jl_i, \quad (2.1)$$

где σ_{nn} – нормальное напряжение, σ_{nt} – касательное напряжение поперек волокон в направлении вектора $t = (0, -\sin \alpha, \cos \alpha)$, σ_{nl} – касательное напряжение вдоль волокон в направлении вектора $l = (1, 0, 0)$.

Критерий прочности однонаправленного композита по условию адгезионного разрушения интерфейса волокно–матрица или/и когезионного разрушения матрицы между волокнами записывается в виде [11]

$$F_*^\pm \equiv \sigma_{nn}(\alpha_*^\pm) + \sqrt{\left[m_t^\pm \sigma_{nt}(\alpha_*^\pm)\right]^2 + \left[m_l^\pm \sigma_{nl}(\alpha_*^\pm)\right]^2} = Y_*^\pm, \quad (2.2)$$

где угол α_*^\pm соответствует критической площадке, на которой функция критерия $F_*^\pm \left[\sigma_{ns}(\alpha^\pm) \right]$, $(s = n, t, l)$, при данном напряженном состоянии (σ_{ij}) достигает своей наибольшей величины,

$$F_*^\pm \equiv F_*^\pm \left[\sigma_{ns}(\alpha_*^\pm) \right] = \sup_{\alpha^\pm} F_*^\pm \left[\sigma_{ns}(\alpha^\pm) \right] \quad (2.3)$$

В (2.2), (2.3) индекс «+» отвечает случаю $\sigma_{nn} \geq 0$, индекс «-» – $\sigma_{nn} \leq 0$. В обеих частях равенств эти индексы берутся одинаковыми. В частном случае $\sigma_{nn} = 0$ и

$\alpha_*^\pm = 0$ критерий (2.2) совпадает с [2,3]. Функция F^\pm является неаналитической первой степени однородности относительно компонент тензора напряжений. Очевидно, что (2.2) также можно представить квадратичным критерием [11].

Для фиксированной критической площадки $\alpha_*^\pm = \text{const}^\pm$ уравнение (2.2) в пространстве напряжений $(\sigma_{nl}, \sigma_{nl}, \sigma_{nn})$ при $\sigma_{nn} \leq 0$ описывает усеченную плоскостью $\sigma_{nn} = 0$ эллиптическую коническую поверхность второго порядка $F_*^- = 0$, при $\sigma_{nn} \geq 0$ – отделенную той же плоскостью вершинную часть эллиптической конической поверхности $F_*^+ = 0$. Ось σ_{nn} является общей осью симметрии для обеих поверхностей. В сечении плоскостью $\sigma_{nl} = 0$ углы полураствора этих конусов равны

$$\arctg(-1/m_t^\pm), \text{ а в сечении } \sigma_{nl} = 0 - \arctg(-1/m_t^\pm)$$

Из (2.2) при $\sigma_{nl} = 0$ можно получить, что $1/m_t^\pm = -(d\sigma_{nl}/d\sigma_{nn})$, а при $\sigma_{nl} = 0$ получаем $1/m_t^\pm = -(d\sigma_{nl}/d\sigma_{nn})$. Величина вектора касательного напряжения на площадке n есть $\sigma_{n\psi} = \sqrt{\sigma_{nl}^2 + \sigma_{nn}^2}$. Этот вектор направлен под углом $\psi = \arctg(\sigma_{nl}/\sigma_{nn})$ к направлению его составляющей σ_{nl} . Обозначим $\bar{S}_\psi = \sigma_{n\psi}$ при $\sigma_{nn} = \text{const}$, тогда $\sigma_{nl} = \bar{S}_\psi \cos \psi$, $\sigma_{nn} = \bar{S}_\psi \sin \psi$ и (2.2) записывается в виде

$$\sigma_{nn} + \bar{S}_\psi \sqrt{m_t^{\pm 2} \cos^2 \psi + m_t^{\pm 2} \sin^2 \psi} = Y^\pm \quad (2.4)$$

Пусть далее $S_\psi = \sigma_{n\psi}$ при $\sigma_{nn} = 0$, тогда из (2.4) имеем

$S_\psi = Y^\pm / \sqrt{m_t^{\pm 2} \cos^2 \psi + m_t^{\pm 2} \sin^2 \psi}$, поэтому (2.4) можно переписать в виде

$$\sigma_{nn} + \frac{\bar{S}_\psi}{S_\psi} Y^\pm = Y^\pm, \quad (2.5)$$

откуда, обозначив $1/m_\psi^\pm = -(d\bar{S}_\psi/d\sigma_{nn})_{\sigma_{nn}=0}$, получаем, что

$$m_\psi^\pm = \sqrt{m_t^{\pm 2} \cos^2 \psi + m_t^{\pm 2} \sin^2 \psi}, \quad (2.6)$$

и критерий (2.2) можно записать в виде

$$F_*^\pm \equiv \sigma_{nn}(\alpha_*^\pm) + m_\psi^\pm(\psi) \times \sqrt{[\sigma_{nl}(\alpha_*^\pm)]^2 + [\sigma_{nn}(\alpha_*^\pm)]^2} = Y^\pm \quad (2.7)$$

С другой стороны, зависимость (2.6) следует из эквивалентности (2.2) и (2.7) с учетом выражения для угла $\psi = \arctg(\sigma_{nl}/\sigma_{nn})$.

Вследствие (2.3) предельная поверхность (2.2) является огибающей для α_*^\pm – семейств конических поверхностей $F_*^\pm[\sigma_{ns}(\alpha_*^\pm)]$, что обуславливает ограниченность (2.2) [11].

3. Материальные параметры критерия (2.2). Постоянные m_t^\pm , m_ψ^\pm и Y^\pm могут быть найдены по результатам стандартизованных и общепринятых испытаний образцов на разрушение. В испытаниях при одноосном растяжении-сжатии перпендикулярно волокнам при разрушении $\sigma_{22} = S_{22}^\pm$, $\alpha_*^\pm = \alpha_{* \perp}^\pm$. В испытаниях при сдвиге вдоль волокон при разрушении $\sigma_{21} = S_{21}$ и $\alpha_* = \alpha_0$. По данным этих испытаний из (2.2) (2.3) и формул (2.1) следуют соотношения для определения параметров критерия по характеристическим константам материала:

$$m_t^\pm = (\text{sgn } \sigma_{nn}) \text{tg} 2\alpha_{* \perp}^\pm, \quad Y^\pm = \frac{1}{2} S_{22}^\pm (1 + 1/\cos 2\alpha_{* \perp}^\pm), \quad \alpha_0 = 0, \quad m_\psi^\pm = \frac{Y^\pm}{S_{21}} \quad (3.1)$$

В сечении $\sigma_{nn} = 0$ критерий (2.2) непрерывен и является эллипсом с полуосями:

$$\frac{Y^+}{m_t^+} = \frac{Y^-}{m_t^-}, \quad \frac{Y^+}{m_l^+} = \frac{Y^-}{m_l^-} \quad (3.2)$$

Согласно (3.1), второе равенство (3.2) выполняется тождественно, первое же равносильно соотношению

$$\alpha_{* \perp}^+ = \operatorname{arctg} \left(-\frac{S_{22}^+}{S_{22}^-} \operatorname{tg} \alpha_{* \perp}^- \right) \quad (3.3)$$

Благодаря этой формуле из опыта достаточно определить один из углов, например, $\alpha_{* \perp}^-$, тогда $\alpha_{* \perp}^+$ находится по (3.3).

К настоящему времени отсутствует общепринятый стандарт на испытания по определению углов $\alpha_{* \perp}^\pm$. В опытах получали узкий диапазон значений угла $\alpha_{* \perp}^-$ для стекло- и углепластиков, $\alpha_{* \perp}^- = 53^\circ \pm 3^\circ$ [5, 15, 16]. В расчетной практике обычно используют $\alpha_{* \perp}^-$ из этого диапазона [17]. Тогда по (3.3) соответствующий диапазон $\alpha_{* \perp}^+ = 15^\circ \pm 1.5^\circ$, если принять, например, что $S_{22}^+ / |S_{22}^-| = 0.2$, как в углепластике T700S/2592.

В случае равенства параметров $m_t^\pm = m_l^\pm$ вообще нет необходимости определять и $\alpha_{* \perp}^-$ из опыта. В этом случае поверхность $F_*^\pm = 0$ в сечении $\sigma_{nn} = 0$ является окружностью и угол $\alpha_{* \perp}^-$ можно определить по характеристическим прочностям S_{22}^- и S_{21} согласно формуле [11]:

$$\alpha_{* \perp}^- = -\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{4S_{12}^2 / S_{22}^- - 1}{4S_{12}^2 / S_{22}^- + 1} \right) \quad (3.4)$$

Если известны разрушающие напряжения при поперечном растяжении-сжатии S_{22}^\pm и при продольном сдвиге S_{21} , а также параметр $\alpha_{* \perp}^-$, то можно построить предельную поверхность критерия (2.2), которая позволяет с достаточной надежностью и минимальным риском судить о прочности в и других случаях напряженного состояния. Это обусловлено с одной стороны тем, что предельная поверхность является лишь невогнутой, а не строго выпуклой, а с другой – она определяет наименьшую разрушающую нагрузку. Небольшое число параметров критерия (2.2) также способствует их надежному определению.

Из натуральных изделий, обладающих существенной кривизной, бывает невозможно вырезать композитные образцы эталонной формы. В этом случае для определения разрушающих напряжений можно использовать криволинейные образцы [18].

При достаточном числе имеющихся экспериментальных точек параметры критерия могут также определяться методом наименьших квадратов с учетом связей (3.1).

4. Объемное напряженное состояние. Угол α_*^\pm , который фигурирует в критерии (2.2) или (2.7), является, согласно (2.3), решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[m_t^{\pm 2} + 1 \right] \left\{ \frac{1}{4} (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - \sigma_{23}^2 \right\} \sin 4\alpha_*^\pm + \sigma_{23} (\sigma_{33} - \sigma_{22}) \cos 4\alpha_*^\pm + \\ & + \frac{1}{2} m_t^{\pm 2} \left[(\sigma_{31}^2 - \sigma_{21}^2) \sin 2\alpha_*^\pm + 2\sigma_{21}\sigma_{31} \cos 2\alpha_*^\pm \right] + \\ & + \left[Y^\pm - \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] \left[(\sigma_{33} - \sigma_{22}) \sin 2\alpha_*^\pm + \right. \\ & \left. + 2\sigma_{23} \cos 2\alpha_*^\pm \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

При лишь $\sigma_{21} \neq 0$ (а все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю), решение (4.1) есть угол $\alpha_*^\pm = \alpha_0 = 0$. Это решение совпадает с соотношением из (3.1), полученным ранее другим путем непосредственно из (2.1), (2.2). Аналогично, при лишь $\sigma_{31} \neq 0$ из (4.1) имеем $\alpha_*^\pm = \pi/2$, которое также является механически очевидным. При лишь $\sigma_{22} \neq 0$, $\sigma_{22} = S_{22}^\pm$ с использованием соотношения для Y в (3.1) из (4.1) получаем углы $\alpha_*^\pm = \alpha_{* \perp}^\pm$, которые соответствуют данному установочному нагружению.

Для некоторых видов сложного объемного напряженного состояния также можно получить аналитические решения уравнения (4.1). В случае когда $\psi = \pi/2$, имеем напряженное состояние в плоскости $\sigma_{nl} = 0$, которое, например, имеет место при $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ и $\sigma_{23} = 0$. Тогда из (4.1) с использованием (2.1) и (2.3) найдем, что

$$\alpha_*^\pm = \arctg \frac{\sigma_{31}}{\sigma_{21}} \quad (4.2)$$

Подставив (4.2) в (2.2), можем записать этот критерий прочности в виде соотношения, определяемого лишь компонентами тензора напряжений,

$$\frac{\sigma_{22}\sigma_{21}^2 + \sigma_{33}\sigma_{31}^2 + 4\sigma_{21}\sigma_{31}\sigma_{23}}{\sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2} + m_l^\pm \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2} = Y^\pm \quad (4.3)$$

При $\sigma_{31} = 0$ или $\sigma_{21} = 0$ этот критерий является линейным.

Аналогично, в случае, когда $\psi = 0$, имеем напряженное состояние в плоскости $\sigma_{nl} = 0$, которое, например, реализуется при $\sigma_{21} = \sigma_{31} = 0$ и при котором решение (4.1)

$$\alpha_*^\pm = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\sigma_{23} - m_r^\pm (\sigma_{22} - \sigma_{33})}{\sigma_{22} - \sigma_{33} + 2m_r^\pm \sigma_{23}}, \quad (4.4)$$

и критерий (2.2) записывается в следующем виде:

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} + \sqrt{\left[m_r^{\pm 2} + 1 \right] \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{23}^2 \right]} = 2Y^\pm \quad (4.5)$$

Этот критерий является линейным при условии равенства $\sigma_{22} = \sigma_{33}$.

В общем случае объемного напряженного состояния решения уравнения (4.1) для определения углов α_*^\pm легко достигаются элементарными численными методами.

Отметим, что преимущество критериев (4.3) и (4.5) обусловлено учетом в них зависимости прочности от направления площадки разрушения – угла α_*^+ при наличии поперечного растяжения. Например, для критерия (4.3) это может проявиться в экспериментах при $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, $\sigma_{23} = 0$ и $\sigma_{31} \gg \sigma_{21}$. Аналогично, для критерия (4.5) – при $2\sigma_{23} - m_r^+ (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \gg \sigma_{22} - \sigma_{33} + 2m_r^+ \sigma_{23}$. Опыт с данными объемными напряженными состояниями трудно реализовать в лаборатории, но они нередко встречаются на практике, причем в весьма ответственных местах конструкций из полимерных композитов. Таковыми, например, являются области сопряжения ребер жесткости с плоскостью обшивки крыла.

Одновременно в области растягивающих нормальных напряжений критерии (4.3) и (4.5) позволяют описать разрушения, которые имеют направления, отличные от направления армирования.

5. Плоское напряженное состояние. Рассмотрим тонкостенные тела, например пластины или оболочки из однонаправленных ПКМ, нагруженных силами, лежащими в их срединной плоскости, когда средние напряжения $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$. Тогда уравнение (4.1) также позволяет получить решение в виде формулы

$$\alpha_*^\pm = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{m_t^{\pm 2} \sigma_{21}^2 - \sigma_{22}^2 + 2Y\sigma_{22}}{\left[m_t^{\pm 2} + 1 \right] \sigma_{22}^2} \right), \quad (5.1)$$

которая после преобразований с учетом (2.2) приобретает вид

$$\alpha_*^\pm = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{1}{\sqrt{1+m_t^{\pm 2}}} \frac{Y^\pm}{|\sigma_{22}|} \geq 1 \\ \arccos \left(\frac{Y^{\pm 2}}{\sigma_{22}^2 (1+m_t^{\pm 2})} \right)^{\frac{1}{4}} & \text{при } \frac{1}{\sqrt{1+m_t^{\pm 2}}} \frac{Y^\pm}{|\sigma_{22}|} \leq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Формула (5.2) для случая $\sigma_{nn} \leq 0$ совпадает с формулой, которая была получена ранее другим путем [11].

Подставив (5.2) в (2.2), с учетом (2.1) и (3.1) окончательно получим критерий прочности в виде следующих двух критериальных равенств:

$$\frac{\sigma_{21}}{S_{21}} + \frac{\sigma_{22}}{S_{22}^\pm} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_{* \perp}^\pm) = 1, \text{ при } 0 \leq \sigma_{22} \leq S_{22}^+ \cos^2 \alpha_{* \perp}^+, S_{22}^- \cos^2 \alpha_{* \perp}^- \leq \sigma_{22} \leq 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{S_{22}^\pm} + \frac{\sigma_{21}^2 S_{22}^\pm}{\sigma_{22} S_{21}^2} \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha_{* \perp}^\pm} = 1, \text{ при } S_{22}^+ \cos^2 \alpha_{* \perp}^+ \leq \sigma_{22} \leq S_{22}^+, S_{22}^- \leq \sigma_{22} \leq S_{22}^- \cos^2 \alpha_{* \perp}^- \quad (5.4)$$

Указанные в (5.3) отрезки поперечного напряжения σ_{22} соответствуют верхней строке решения (5.2) для α_*^\pm , а отрезки в (5.4) – нижней строке этого решения. Первому решению $\alpha_*^\pm = \operatorname{const} = 0$ отвечает линейный критерий (5.3), второму решению $\alpha_*^\pm = \alpha_*^\pm(\sigma_{22})$ – квадратичный критерий (5.4). Используя (2.2), (2.1) и (3.1), можно также получить отрезки для напряжения σ_{21} , соответствующие данным отрезкам для σ_{22} .

На координатной плоскости $(\sigma_{22}, \sigma_{21})$ критерий (5.3) описывает ломаную с вершиной в точке $(0, S_{21})$ и звеньями, расположенными в двух смежных вертикальных полосах, граница которых есть ось σ_{21} и ширины равны соответствующим отрезкам (5.3). Критерий (5.4) описывает части кривой эллипсов, расположенных также в двух вертикальных полосах, которые разделены предыдущими полосами и имеющие ширины, равные соответствующим отрезкам (5.4). Одни концы этих кривых примыкают к соответствующему краям ломаной (5.3), а другие – лежат на оси σ_{22} в соответствующих точках $(S_{22}^\pm, 0)$.

6. Критерий прочности по условию разрушения волокон, смена механизмов разрушения. Если в качестве критерия прочности по условию разрушения (неустойчивости) волокон принять часто используемое равенство компоненты σ_{11} тензора напряжений вдоль волокон пределу S_{11}^\pm продольной прочности

$$\sigma_{11} = S_{11}^\pm, \quad (6.1)$$

то, например, при одноосном растяжении-сжатии под углом β к оси волокон прочность σ_β в направлении приложенной нагрузки растет с ростом β согласно зависимости

$$\sigma_\beta = \frac{S_{11}^\pm}{\cos^2 \beta} \quad (6.2)$$

Это очевидно противоречит опыту, в действительности σ_β снижается с возрастанием β [10].

В конструкционных пластиках смена механизмов потери прочности от разрушения волокон к разрушению матрицы, и обратно, вообще происходит лишь при весьма малых углах $\beta = \beta_*^\pm$, ($\beta_*^\pm \leq 5^\circ$) [10,19]. Простейший критерий прочности по условию разрушения волокон можно записать в виде

$$\sigma_{mm}^\pm = S_{11}^\pm \text{ при } |\beta^\pm| \leq |\beta_*^\pm|, \quad (6.3)$$

где $m = (m_1, m_2, m_3)$, $m_1 = \cos\beta$, $m_2^2 + m_3^2 = \sin^2\beta$.

При $\beta = 0$ (6.3) совпадает с равенством (6.1). При одноосном нагружении (6.3) совпадает с критерием [10].

Угол β в (6.3) определяется этим равенством. При плоском напряженном состоянии, с учетом малости β и пренебрегая его квадратом, получим, что

$$|\beta^\pm| = \left| \frac{S_{11}^\pm - \sigma_{11}}{2\sigma_{21}} \right| \quad (6.4)$$

Угол β_*^\pm смены механизмов потери прочности в принципе можно определить по данным испытаний на разрушение, например, при растяжении-сжатии под различными углами β . Однако из-за узкого диапазона β_*^\pm и разброса измеряемых данных такое определение β_*^\pm вряд ли надежно. С другой стороны, β_*^\pm является решением системы двух уравнений, (6.3) и (2.2). При плоском напряженном состоянии эта система сводится, согласно (5.3) и (6.3), к одному уравнению

$$\frac{S_{11}^\pm}{2S_{21}} \sin 2\beta_*^\pm + \frac{S_{11}^\pm}{S_{22}^\pm} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_{* \perp}^\pm) \sin^2 \beta_*^\pm = 1 \quad (6.5)$$

С учетом малости угла β_*^\pm приблизительно $\sin 2\beta_*^\pm = 2\beta_*^\pm$, $\sin^2 \beta_*^\pm = \beta_*^{\pm 2}$. Тогда, пренебрегая квадратом β_*^\pm , уравнение (6.5) дает простую формулу

$$|\beta_*^\pm| = \left| \frac{S_{21}}{S_{11}^\pm} \right| \quad (6.6)$$

Из (6.6) и (6.4) следует, что нарушение прочности от разрушения волокон не произойдет в том случае, когда

$$\left| \sigma_{11} S_{11}^\pm - S_{11}^{\pm 2} \right| > 2 |\sigma_{21}| S_{21} \quad (6.7)$$

Для углепластика T700S/2592 $S_{11}^+ = 1887.1$ МПа, $S_{11}^- = -806.5$ МПа и $S_{21} = 56.1$ МПа [20], и согласно (6.6) при $\sigma_{mm}^+ > 0$, $\beta_*^+ \approx 1.7^\circ$, а при $\sigma_{mm}^- < 0$ $-\beta_*^- \approx 4^\circ$.

Также из (6.6) следует, что диапазон β_*^\pm работы волокон в композите возрастает вместе с сопротивлением матрицы сдвигу вдоль волокон. С другой стороны, прочность волокна не должна быть слишком велика.

7. Экспериментальная проверка критериев прочности, сравнение с известными условиями разрушения

7.1. Объемное напряженное состояние. На рис. 1 представлены экспериментальные данные по разрушению однонаправленного углепластика T300/PR319 в двух случаях объемного напряженного состояния, которые реализуются в толстостенных трубчатых слоистых образцах приложением к ним давления p и торцевого крутящего момента [21,22]. Эти состояния отвечают действию комбинации нормальных сжимающих напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$ и одного из касательных напряжений: либо σ_{21} (90° -трубка, монослои (волокна) уложены в окружном направлении, (кружки)), либо σ_{31} (0° -трубка, монослои (волокна) уложены в осевом направлении, (квадрати-

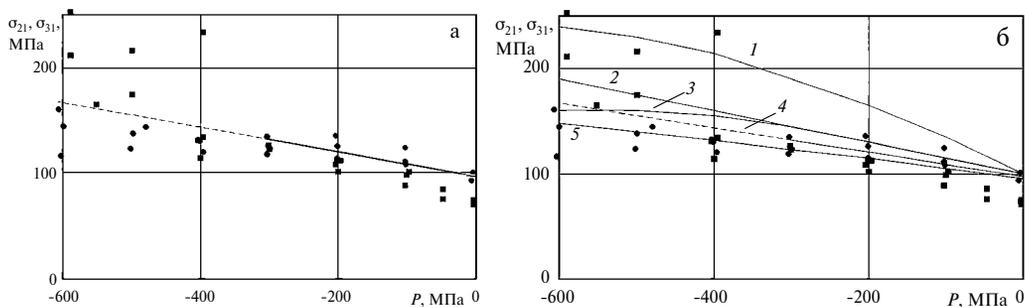


Рис. 1

ки) [21, 22]. В обоих случаях исходный материал слоев (препрег) и геометрия образцов были идентичны, однако технологии их изготовления были различны. Поэтому авторы предупредили о том, что соответствующие измеренные механические величины этих образцов нельзя сопоставлять. Для сравнения с теорией мы будем использовать данные по разрушению 90°-трубки.

Данные нагружения соответствуют случаю объемного напряженного состояния с $\psi = \pi/2$, $\sigma_{rr} = 0$, для которого получен критерий (4.3). Используем эти опытные данные для проверки критерия (4.3).

Прочностные константы материала $S_{21} = S_{31} = 97$ МПа, $S_{22}^- = -125$ МПа [23]. Величина $m_l^- \cong 8.55$ была найдена при обработке экспериментальных данных $\sigma_{21} - p$ в диапазоне умеренных давлений $p \leq 300$ МПа методом наименьших квадратов с учетом связей (3.1). Тогда также из (3.1) был определен характеристический угол материала $\alpha_{* \perp}^- \cong 47^\circ$, который оказался близок к значению 50° , принятому для этого же материала в [24].

Для рассматриваемых объемных напряженных состояний критерий (4.3) является линейным соотношением между σ_{21} и p в 90°-трубке или σ_{31} и p в 0°-трубке

$$p + m_l^- \sigma_{21} = Y^-, \quad p + m_l^- \sigma_{31} = Y^- \quad (7.1)$$

Согласно (4.2), в обоих состояниях угол α_*^- является постоянным, а именно, в 90°-трубке $\alpha_*^- = 0$, в 0°-трубке $\alpha_*^- = \pi/2$.

Уравнения (7.1) на плоскости (p, σ_{21}) или (p, σ_{31}) описывают одну и ту же прямую, отрезок которой в диапазоне умеренных давлений изображен на рис. 1 а и б сплошной, а при $p > 300$ МПа – пунктирной линией. Судя по экспериментальным данным, при больших давлениях $p > 300$ МПа существенную роль, по-видимому, играет величина пластической деформации [21, 22], которая в критерий не входит. Поэтому применимость критерия (4.3) здесь ограничена диапазоном давлений $p < 300$ МПа. В этом диапазоне критерий (7.1) хорошо соответствует опытным данным по разрушению 90°-трубки и качественно соответствует данным для 0°-трубки.

Сравнение графиков прочности $\sigma_{21}(p)$, рассчитанных по (7.1) – прямая 4, и по критериям [25] – кривая 1, [24] – кривая 2, [26] – кривая 3, [27] – кривая 5, представлено на рис. 1 б. В отличие от критерия (4.3), который имеет всего два параметра, число характеристических постоянных материала в этих критериях достигает девяти и даже тридцати констант и материальных функций. При умеренных напряжениях в условиях объемного напряженного состояния линейный более простой критерий (7.1) оказался в лучшем соответствии с опытными данными.

7.2. Плоское напряженное состояние. На рис. 2 а и рис. 3 представлены экспериментальные данные (кружки) по разрушению однонаправленного стеклопластика Gevetex/LY556-НТ907-DY063 при двухкомпонентном плоском напряженном состоянии, которое реализуется в намотанном послойно по окружности тонкостенном

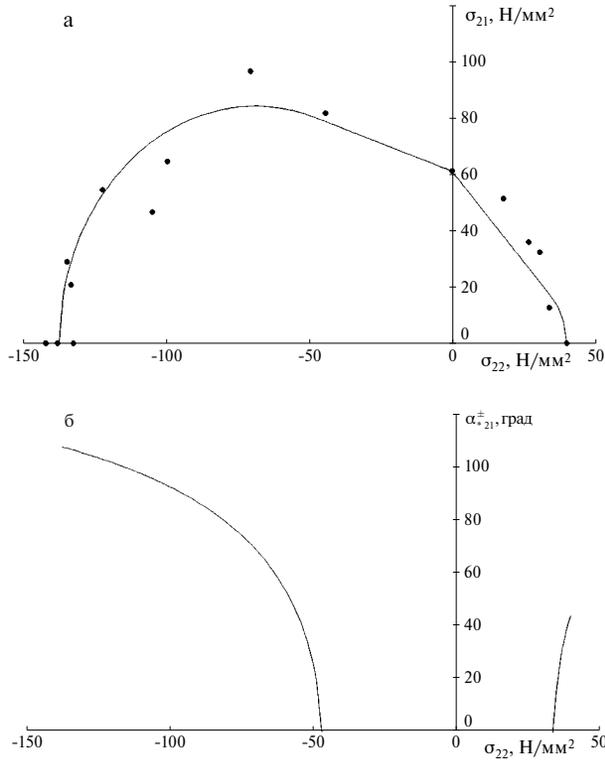


Рис. 2

трубчатом образце приложением к нему торцевого крутящего момента и внутреннего или внешнего давления [28, 29]. Эти состояния отвечают действию нормальных сжимающих или растягивающих напряжений σ_{22} и касательного напряжения σ_{21} .

Используем данные этого эксперимента для проверки критериев (5.3), (5.4). Прочностные константы материала $S_{21} = 61.2$ МПа, $S_{22}^+ = 40$ МПа, $S_{22}^- = -137.8$ МПа, $\alpha_{* \perp}^- = 54^\circ$.

Рассчитанный по (5.3), (5.4) предел прочности данного композита описывается на плоскости $(\sigma_{21}, \sigma_{22})$ линией, хорошо согласующейся с массивом экспериментальных точек, имеющих определенный разброс (рис. 2, а). Рассчитанный по формуле (5.2) график изменения угла α_*^- , α_*^+ наклона критической площадки в зависимости от поперечного напряжения σ_{22} приведен на рис. 2 б. На нем видно, что эта зависимость непрерывна, а также то, что на отрезке $-47 \leq \sigma_{22} \leq 34$ МПа ($17.5 \leq \sigma_{21} \leq 79.9$) критическая площадка перпендикулярна плоскости волокон – $\alpha_*^\pm = 0$. На этом отрезке применялся критерий (5.3), вне его – критерий (5.4). Вне данного отрезка наклон площадки меняется от нуля до $\alpha_*^- = \alpha_{* \perp}^- = 54^\circ$ при увеличении поперечного сжатия, и также от нуля до $\alpha_*^+ = \alpha_{* \perp}^+ \approx 22^\circ$ при росте поперечного растяжения. Непрерывный переход от скола матрицы в плоскости ортогональной к плоскости волокон, который описывается линейным критерием (5.3), к сколу вдоль волокон в наклонной плоскости, который описывается квадратичным критерием (5.4), происходит при отношении касательных напряжений к сжимающим поперечным $\sigma_{21}/\sigma_{22} \approx -1.7$ и при $\sigma_{21}/\sigma_{22} \approx 0.5$ при растягивающих поперечных напряжениях.

Графики прочности $\sigma_{21}(\sigma_{22})$, рассчитанных по (5.3), (5.4) (сплошная линия) и по критериям [30, 31] – линия длинных пунктиров, [32] – точечная линия, [7] – линия

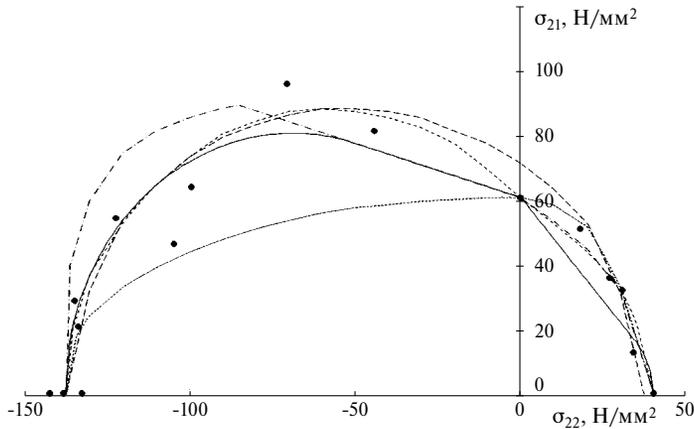


Рис. 3

коротких пунктиров, [33] – штрихпунктирная линия, представлены на рис. 3. На этом рисунке видно, что в области сжимающих напряжений σ_{22} более простой критерий (5.3), (5.4) оказался в лучшем соответствии с опытными данными, чем критерии [30–33], и примерно в таком же соответствии, как и критерий [7]. При наличии растягивающих напряжений σ_{22} критерии (5.3), (5.4) и [30,31] также примерно одинаково соответствуют опыту. Критерий (5.3), (5.4), как и ожидалось, обеспечивая запас прочности, здесь дает более консервативную оценку прочности, чем критерии [7, 32, 33].

Кроме того, на примере этих опытов можно отметить преимущество критерия (5.4). В диапазоне $S_{22}^+ \cos^2 \alpha_{*+} \leq \sigma_{22} \leq S_{22}^+$ другие критерии не учитывают зависимость прочности от направления площадки разрушения, угол которого здесь возрастает от 0 до значения α_{*+} , определяемого формулой (3.3). На рис. 3 видно, что учет этой зависимости позволяет внутри данного диапазона немного снизить коэффициент запаса. Согласно (3.3), это снижение может достигать существенных значений для материалов, в которых повышено отношение прочностей при растяжении и сжатии поперек волокон.

7.3. Одноосное осевое и внеосевое растяжение-сжатие. Данные испытаний статической прочности σ_{β}^{\pm} плоских образцов, вырезанных из слоистого однонаправленного углепластика T700S/2592 в шести направлениях под углами $\beta = 0, 10^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ к оси волокон, представлены на рис. 4, а, б (кружки) [20].

Проверим критерии (5.3), (5.4), (6.3) и в этом эксперименте. Характеристические прочности $S_{11}^+ = 1887.1$ МПа, $S_{11}^- = -806.5$ МПа, $S_{22}^+ = 30.1$ МПа, $S_{22}^- = -154.0$ МПа, $S_{21} = 56.1$ МПа, $\alpha_{*+} = 54^\circ$.

На рис. 4, а проведены теоретические кривые зависимости между пределом прочности σ_{β}^{\pm} и углом β , рассчитанные по формулам (5.3), (5.4), (6.3). На рисунке видно хорошее соответствие теории и эксперимента как при растяжении, так и при сжатии.

Графики зависимости $\sigma_{\beta}^{\pm}(\beta)$, рассчитанные по критерию (5.3), (5.4), (6.3) – сплошная линия, а также по критерию [1,4] – точечная линия, [5–7] – линия коротких пунктиров, [30] – линия длинных пунктиров и [10] – штрихпунктирная линия, приведены на рис. 4, а.

На этом рисунке видно, что по данным критериям пределы прочности при растяжении различаются незначительно, а кривые по (5.3), (5.4), (6.3) и по [5–7] практически полностью совпадают. Смена механизма потери прочности композита от разрыва волокон к сколу матрицы происходит уже при $\beta^+ = \beta_*^+ = 1.70^\circ$ согласно (6.6), для критерия [5–7] – при 1.69° и для [1,4] – при 7.2° . Наибольшее различие видно с критерием [1,4] – примерно 35% при $\beta^+ = \beta_*^+$.

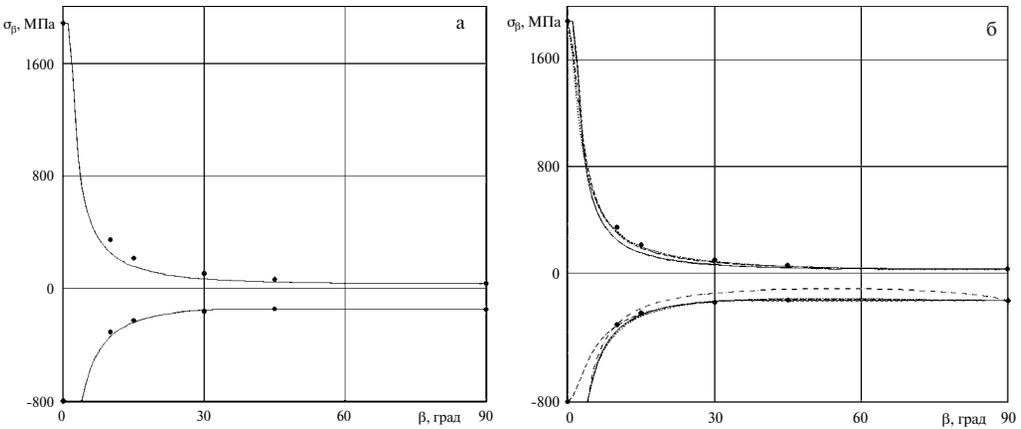


Рис. 4

При сжатии $\beta^- = \beta_*^- = 3.98^\circ$, для [1, 4, 5–7] – 4.17° и 4.08° , соответственно. Однако по этим критериям при возрастании угла β^- от нуля до β_*^- величина прочности композита парадоксально возрастает, хотя и незначительно с 806.7 до 810.4 МПа для [5–7] и с 806.7 до 808.5 МПа для [1,4]. Визуально кривые по (5.3), (5.4), (6.3) и по [1, 4, 5–7] практически полностью совпадают. Наибольшее различие имеет место с критерием [30] – более 46%, в точке смены механизмов разрушения. Также существенное различие с критерием [10] видно в интервале $15^\circ < \beta^- < 80^\circ$ с максимумом, равным 49% в окрестности $\beta^- = 55^\circ$.

Переход от скола матрицы по плоскости ортогональной к плоскости волокон, который описывается линейным критерием (5.3), к сколу вдоль волокон в наклонной плоскости, который описывается квадратичным критерием (5.4), происходит при $\beta^+ \approx 75^\circ$ при растягивающих поперечных напряжениях и уже при $\beta^- \approx 36^\circ$ при сжимающих напряжениях.

При одноосных нагружениях под углом к направлению волокон критерии (5.3), (5.4), (6.3) оказались в лучшем или в таком же соответствии с опытными данными, как и критерии [1, 4–7, 10, 30].

Заключение. Сформулирован критерий прочности однонаправленных компози- тов по условию адгезионного разрушения интерфейса волокно–матрица или/и ко- гезионного разрушения матрицы между волокнами, соответствующий наименьшей разрушающей нагрузке. Найдены соотношения для определения параметров дан- ного критерия из стандартизованных и общепринятых установочных испытаний. При объемном напряженном состоянии получено уравнение для нахождения ори- ентации критической площадки и приведены аналитические решения. Для случаев отсутствия касательных напряжений поперек или вдоль волокон критерии прочно- сти даны в окончательном виде, лишь через компоненты тензора напряжений. При плоском напряженном состоянии определены диапазоны напряжений, соответствую- щие критической площадке, ортогональной или наклонной к плоскости волокон. Показано, что для ортогональной ориентации критической площадки полученный критерий прочности является линейным, для наклонных площадок – квадратичным.

Приведен критерий прочности по условию разрушения волокон, не допускающего парадокса увеличения прочности в области перехода от разрушения волокон к разру- шению матрицы. Получены соотношения, определяющие смену механизмов потери прочности композита от разрушения волокон к разрушению матрицы, и наоборот.

Проведена экспериментальная проверка предложенных критериев и их сравнение с известными критериями прочности при объемном, плоском и одномерном нагру-

жениях. Показано их лучшее или такое же соответствие опытным данным, как и для многих более сложных критериев. Отмечены преимущества данных критериев, обусловленные учетом в них зависимости прочности от направления площадки разрушения при наличии поперечного растяжения. Небольшое число параметров данных критериев обуславливает их надежность и устойчивость и позволяет определить их действительные значения в составе конструкции из испытаний образцов-свидетелей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hashin Z., Rotem A. A.* Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *J. Compos. Mater.* 1973. V. 7. P. 448–464.
2. *Rabotnov Yu.N., Polilov A. N.* Strength criteria for fibre-reinforced plastics // *Fracture.* 1977. Vol. 3, Pp. 1059–1065.
3. *Полилов А. Н.* Критерии разрушения поверхности раздела в однонаправленных композитах // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1978. № 2. С. 115–119.
4. *Hashin Z.* Failure criteria for unidirectional fiber composites // *J. Appl. Mech.* 1980. V. 47. P. 329–334.
5. *Puck A.* Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis. München; Wien: Hanser, 1996. 212 s.
6. *Puck A., Schürmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci.&Technol.* 1998. V. 58. P. 1045–1067.
7. *Puck A., Schürmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci.&Technol.* 2002. V. 62. P. 1633–1662.
8. *Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S.* A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates // *Compos. Sci.&Technol.* 1998. V. 58. P. 1225–1254.
9. *Kaddour A.S., Hinton, M.J., Soden P.D.* A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: additional contributions // *Compos. Sci.&Technol.* 2004. V. 64. P. 449–476.
10. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* 2012. № 2. С. 140–166.
11. *Олейников А.И.* Варианты критерия прочности однонаправленных полимерных композитов по условию разрушения связующего при наличии сжатия перпендикулярно волокнам // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 2. С. 223–234.
12. *Thomson D.M., Cui H., Erice B., Hoffmann J., Wiegand J., Petrinic N.* Experimental and numerical study of strain-rate effects on the IFF fracture angle using a new efficient implementation of Puck's criterion // *Compos. Struct.* 2017. V. 181. P. 325–335.
13. *Gong Y., Huang T., Zhang X., Jia P., Suo Y., Zhao S.* A reliable fracture angle determination algorithm for extended Puck's 3D inter-fiber failure criterion for unidirectional composites // *Mater.* 2021. V. 14/6325. P. 1–14.
14. *Олейников А.И.* Критерий прочности элементов моделей ЛА из однонаправленных композитов // *Матер. XXXIII научно-технич. Конф. по аэродин. ЦАГИ.* 2022. С. 84–85.
15. *Cuntze R., Deska R., Szelinski B., et al.* Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbundunter mehrachsiger Beanspruchung – Modellbildung und Experimente. Düsseldorf: VDI Verlag, 1997. 262 s.
16. *Kaiser C., Kuhnel E., Obst A.* Failure criteria for FRP and CMC: theory, experiments and guidelines // *Europ. Conf. on Spacecr. Struct. Mater. Mech. Testing.* Noordwijk, ESA, 2005. 12 p.
17. *Dávila C.G., Camanho P.P.* Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress. Hampton: NASA Langley Res. Center. NASA/TM–2003–212663, 2003. 28 p.
18. *Полилов А.Н.* Определение прочности при изгибе криволинейных образцов // *Машиновед.* 1984. № 1. С. 54–60.
19. *Олейников А.И.* Оценка статической прочности слоистых композитов // *Уч. зап. ЦАГИ.* 2019. Т. L. № 4. С. 53–66.
20. *Kawai M., Itoh N.* A failure-mode based anisomorphic constant life diagram for a unidirectional carbon/epoxy laminate under off-axis fatigue loading at room temperature // *J. Compos. Mater.* 2014. V. 48(5). P. 571–592.

21. *Shin E.S., Pae K. D.* Effects of hydrostatic pressure on the torsional shear behaviour of graphite/epoxy composites // *J. Compos. Mater.* 1992. V. 26. P. 462–485.
22. *Shin E.S., Pae K. D.* Effects of hydrostatic pressure on in-plane shear properties of graphite/epoxy composites // *J. Compos. Mater.* 1992. V. 26. P. 828–868.
23. *Hinton M.J., Kaddour A. S.* Benchmark data triaxial test results for fibre-reinforced composites: the second world-wide failure exercise // *J. Compos. Mater.* 2012. V. 47. P. 633–678.
24. *Cuntze R.* The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of unidirectional laminae under static triaxial stress states // *J. Compos. Mater.* 2012. V. 46. P. 2563–2594.
25. *Deuschle H. M., Puck A.* Application of the Puck failure theory for fibre reinforced composites under 3D-Stress: comparison with experimental results // *J. Compos. Mater.* 2013. V. 47. P. 827–846.
26. *Carrere N., Laurin F., Maire J-F.* Micromechanical based hybrid mesoscopic 3D approach for non-linear progressive failure analysis of composite structures // *J. Compos. Mater.* 2012. V. 46. P. 2389–2415.
27. *Pinho S.T., Darvizeh R., Robinson P., et al.* Material and structural response of polymer-matrix fibre-reinforced composites // *J. Compos. Mater.* 2012. V. 46. P. 2313–2341.
28. *Hütter U., Schelling H., Krauss H.* An experimental study to determine the failure envelope of composite materials with tubular specimens under combined loads and comparison between several classical criteria // in: *Failure Modes of Composite Materials with Organic Matrices and Other Consequences on Design.* Munich: NATO. AGRAD. Conf. Proc. № 163. 1974. P. 13–19.
29. *Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A. S.* Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data // *Compos. Sci.&Technol.* 2002. V. 62. P. 1489–1514.
30. *Tsai S.W., Wu E. M.* A general theory of strength for anisotropic materials // *J. Compos. Mater.* 1971. V. 5. P. 58–80.
31. *Liu K.-S., Tsai S. W.* A progressive quadratic failure criterion for a laminate // *Compos. Sci. Technol.* 1998. V. 58. P. 1023–1032.
32. *Rotem A.* The Rotem failure criterion: theory and practice // *Compos. Sci. Technol.* 2002. V. 62. P. 1663–1671.
33. *Davila C.G., Camanho P. P., Rose C. A.* Failure criteria for FRP laminates // *J. Compos. Mater.* 2005. V. 39. P. 323–345.

Fracture Criteria for Matrix and Fibers in Unidirectional Polymeric Composites at Static Loadings

A. I. Oleinikov^{a, b, #}

^a*Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovskiy, Moscow oblast, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russia*

[#]*e-mail: alexander.oleinikov@tsagi.ru, oleinikov.ai@mipt.ru*

When analyzing the strength of structures made of layered fibrous polymer composite materials; the criteria for failure of a monolayer – a unidirectional reinforced composite – are used. A criterion of strength according to the conditions of matrix fracture is formulated, corresponding to conical limiting surfaces and the lowest destructive loads. The criterion of strength according to the condition of fiber failure, which does not allow the paradox of increasing strength in the region of transition from fiber destruction to matrix failure, is given. Experimental verification of the criteria for volumetric, planar, and one-dimensional loads is carried out. Their better correspondence to empirical data is shown and their advantages in comparison with known criteria are marked. A small number of easily detectable parameters of these criteria contribute to their reliability and stability in strength calculations of composite structural elements.

Keywords: fibrous polymeric composites, unidirectional material, criteria of fracture of a matrix and fibers

REFERENCES

1. Hashin Z., Rotem A. A. Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // J. Compos. Mater., 1973, vol. 7, pp. 448–464.
2. Rabotnov Yu.N., Polilov A. N. Strength criteria for fibre-reinforced plastics // Fracture, 1977, vol. 3, pp. 1059–1065.
3. Polilov A. N. Fracture criteria for interface in unidirectional composites // Izv. AN SSSR. MTT, 1978, no. 2, pp. 115–119.
4. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech., 1980, vol. 47, pp. 329–334.
5. Puck A. Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis. München; Wien: Hanser, 1996.
6. Puck A., Schurmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Compos. Sci. Technol., 1998, vol. 58, pp. 1045–1067.
7. Puck A., Schurmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Compos. Sci. Technol., 2002, vol. 62, pp. 1633–1662.
8. Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates // Compos. Sci. Technol., 1998, vol. 58, pp. 1225–1254.
9. Kaddour A.S., Hinton M.J., Soden P.D. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: additional contributions // Compos. Sci. Technol., 2004, vol. 64, pp. 449–476.
10. Polilov A.N., Tatus N.A. Experimental substantiation of strength criteria for FRP showing directional type of fracture // PNRPU Mech. Bul., 2012, no. 2, pp. 140–166.
11. Oleinikov A. I. Strength criterion variants for unidirectional polymer composites by the fracture condition of the inter-fibre when there is compression perpendicular to the fibers // Mech. of Solids, 2022, vol. 57, pp. 1740–1748.
12. Thomson D.M., Cui H., Erice B., Hoffmann J., Wiegand J., Petrinic N. Experimental and numerical study of strain-rate effects on the IFF fracture angle using a new efficient implementation of Puck's criterion // Compos. Struct., 2017, vol. 181, pp. 325–335.
13. Gong Y., Huang T., Zhang X., Jia P., Suo Y., Zhao S. A reliable fracture angle determination algorithm for extended Puck's 3D inter-fiber failure criterion for unidirectional composites // Materials, 2021, vol. 14/6325, pp. 1–14.
14. Oleinikov A. I. Strength criterion for parts of aircraft models with unidirectional composites // in: Proc. XXXIII Conf. on Aerodyn. (TsAGI, Volodarka), 2022, pp. 84–85.
15. Cuntze R., Deska R., Szelinski B. et al. Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbundunter mehrachsiger Beanspruchung – Modellbildung und Experimente. Düsseldorf: VDI Verlag, 1997. 262 s.
16. Kaiser C., Kuhnel E., Obst A. Failure criteria for FRP and CMC: theory, experiments and guidelines // Europ. Conf. on Spacecr. Struct. Mater. Mech. Testing. Noordwijk, ESA, 2005, 12 p.
17. Dávila C.G., Camanho P.P. Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress. Hampton: NASA Langley Res. Center. NASA/TM-2003–212663, 2003. 28 p.
18. Polilov A. N. Determination of strengths at bending of curvilinear specimens // Mashinoved., 1984, no. 1, pp. 54–60.
19. Oleinikov A. I. Assessment of static load strength of laminated composites // TsAGI Sci. J., 2019, vol. 50 (4), pp. 411–427.
20. Kawai M., Itoh N. A failure-mode based anisomorphic constant life diagram for a unidirectional carbon/epoxy laminate under off-axis fatigue loading at room temperature // J. Compos. Mater., 2014, vol. 48(5), pp. 571–592.
21. Shin E.S., Pae K. D. Effects of hydrostatic pressure on the torsional shear behaviour of graphite/epoxy composites // J. Compos. Mater., 1992, vol. 26, pp. 462–485.
22. Shin E.S., Pae K. D. Effects of hydrostatic pressure on in-plane shear properties of graphite/epoxy composites // J. Compos. Mater., 1992, vol. 26, pp. 828–868.
23. Hinton M.J., Kaddour A. S. Benchmark data triaxial test results for fibre-reinforced composites: the second world-wide failure exercise // J. Compos. Mater., 2012, vol. 47, pp. 633–678.
24. Cuntze R. The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of unidirectional laminae under static triaxial stress states // J. Compos. Mater., 2012, vol. 46, pp. 2563–2594.

25. *Deuschle H.M., Puck A.* Application of the Puck failure theory for fibre reinforced composites under 3D-Stress: comparison with experimental results // *J. Compos. Mater.*, 2013, vol. 47, pp. 827–846.
26. *Carrere N., Laurin F., Maire J.-F.* Micromechanical based hybrid mesoscopic 3D approach for non-linear progressive failure analysis of composite structures // *J. Compos. Mater.*, 2012, vol. 46, 2389–2415.
27. *Pinho S.T., Darvizeh R., Robinson P., et al.* Material and structural response of polymer-matrix fibre-reinforced composites // *J. Compos. Mater.*, 2012, vol. 46, pp. 2313–2341.
28. *Hütter U., Schelling H., Krauss H.* An experimental study to determine the failure envelope of composite materials with tubular specimens under combined loads and comparison between several classical criteria // in: *Failure Modes of Composite Materials with Organic Matrices and Other Consequences on Design*. Munich: NATO. AGRAD. Conf. Proc., no. 163, 1974, pp. 13–19.
29. *Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A. S.* Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data // *Compos. Sci.&Technol.*, 2002, vol. 62, pp. 1489–1514.
30. *Tsai S.W., Wu E. M.* A general theory of strength for anisotropic materials // *J. Compos. Mater.*, 1971, vol. 5, pp. 58–80.
31. *Liu K.-S., Tsai S.W.* A progressive quadratic failure criterion for a laminate // *Compos. Sci. Technol.*, 1998, vol. 58, pp. 1023–1032.
32. *Rotem A.* The Rotem failure criterion: theory and practice // *Compos. Sci. Technol.*, 2002, vol. 62, pp. 1663–1671.
33. *Davila C.G., Camanho P.P., Rose C.A.* Failure Criteria for FRP Laminates // *J. Compos. Mater.*, 2005, vol. 39, pp. 323–345.

УДК 539.376

РАЗВИТИЕ КОНЦЕПЦИИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

© 2024 г. Р. Р. Саитова^{1,*}, Ф. М. Бородич^{2,**}, А. Р. Арутюнян^{1,***}¹Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия²Чунцинский университет, Чунцин, Китай

*e-mail: rigastr@yandex.ru

**e-mail: borodichfm@cqu.edu.cn

***e-mail: a.arutyunyan@spbu.ru

Поступила в редакцию 06.12.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 01.02.2024 г.

В обзоре освещено современное состояние исследований в области механики континуального разрушения и механики рассеянного разрушения, включая основные подходы к постановке задач, конкретные результаты и области их практического использования. Статья ориентирована на специалистов по ползучести, длительной прочности и механике разрушений, а также может быть интересна исследователям, занимающимся вопросами прочности и разрушения материалов и конструкций в условиях повышенных температур.

Ключевые слова: ползучесть, длительная прочность, поврежденность, механика разрушений, параметр поврежденности, параметр сплошности

DOI: 10.31857/S0032823524020084 EDN: XUGRQI

1. Введение. Ю. Н. Работнов был выдающимся ученым, внесшим вклад в различные области механики, включая теорию ползучести [1], механику разрушения [2] и наследственную теорию упругости [3]. В данном обзоре рассматривается развитие концепции поврежденности.

Впервые понятие поврежденности материала ω было представлено Ю. Н. Работновым на научном семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, а через пару лет им была опубликована статья, приводившая примеры использования этой концепции в теории ползучести металлов [4]. Практически одновременно Л. М. Качанов ввел понятие параметра сплошности материала ψ [5]. Учитывая, что ω лежит в интервале $0 \leq \omega \leq 1$, а ψ может принимать значения в диапазоне $1 \geq \psi \geq 0$, то нетрудно видеть, что $\omega = 1 - \psi$. Впоследствии обе концепции и их приложения в механике материалов обсуждались в монографиях и учебниках авторов [1–3, 6, 7].

В качестве простейшего примера задачи с параметром поврежденности ω рассмотрим одноосное растяжение силой P поликристаллического стержня площади F [6]. Развитие межзеренных микро- и нанометровых трещин эквивалентно уменьшению эффективной площади поперечного сечения образца. Поэтому эффективное напряжение $\tilde{\sigma}$, вычисляемое как отношение растягивающей силы P к эффективной площади поперечного сечения, не равно номинальному напряже-

нию $\sigma = P / F$, а определяется по формуле $\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - \omega)$. Когда значение параметра поврежденности ω достигает единицы, эффективная площадь стремится к нулю, и образец разрушается.

Таким образом, здесь параметр ω вводится отношением $\omega = F_T / F_0$ и характеризует степень уменьшения площади поперечного сечения, где F_T — это площадь трещин, располагающихся к моменту времени t в поперечном сечении стержня, а F_0 — начальная площадь поперечного сечения.

К настоящему времени концепция поврежденности получила дальнейшее развитие, является основой механики континуального разрушения и механики рассеянного разрушения, а также обсуждается в ряде специальных монографий и справочников [8–10].

Данная статья содержит обзор работ, посвященных развитию концепции поврежденности в механике материалов и близких областях, а также многочисленным приложениям этой концепции. Основное внимание в ней уделено анализу результатов, полученных в СССР и России.

2. Скалярное и тензорное определение поврежденности. В механическом смысле повреждения твердых тел проявляются посредством образования и роста микропустот или микротрещин, которые представляют собой разрывы в среде, считающейся непрерывной в более крупном масштабе.

2.1. Скалярный параметр поврежденности. В общем случае возникающие повреждения можно разделить на объемные дефекты, такие как микрополости, и поверхностные дефекты, такие как микротрещины. В связи с этим вводятся различные определения переменной поврежденности. Для их описания удобно ввести понятие представительного элемента объема (ПЭО), в котором все свойства представлены усредненными переменными.

При рассмотрении только пластического повреждения параметр можно определить как объемную плотность микропустот

$$\omega_V = \frac{\delta V_{\text{пустот}}}{\delta V_{\text{пэо}}} \quad (2.1)$$

В более широком смысле, если возможно одновременное существование в материале микрополостей и микротрещин, переменная поврежденности физически определяется поверхностной плотностью микротрещин и сечений микропустот, лежащих в плоскости, пересекающей ПЭО сечения δS (рис. 1). Для плоскости с нормалью \vec{n} , где эта плотность максимальна, имеем

$$\omega_{(\vec{n})} = \frac{\delta S_{\omega}}{\delta S} \quad (2.2)$$

Если повреждение изотропное, то скалярная переменная $\omega_{(\vec{n})}$ не зависит от нормали и является скаляром [5], и можно записать

$$\omega = \frac{\delta S_{\omega}}{\delta S} \quad (2.3)$$

Такое определение удобно использовать для случая одномерных задач, а также для простой оценки приблизительного повреждения в трехмерных задачах (особенно при пропорциональной нагрузке).

Определяющие уравнения деформации и повреждения характеризуют материал без объемных или поверхностных неоднородностей. Рассмотрим эффективное напряжение, действующее на сопротивляющуюся область $\delta S = \delta S - \delta S_{\omega}$ (рис. 1).

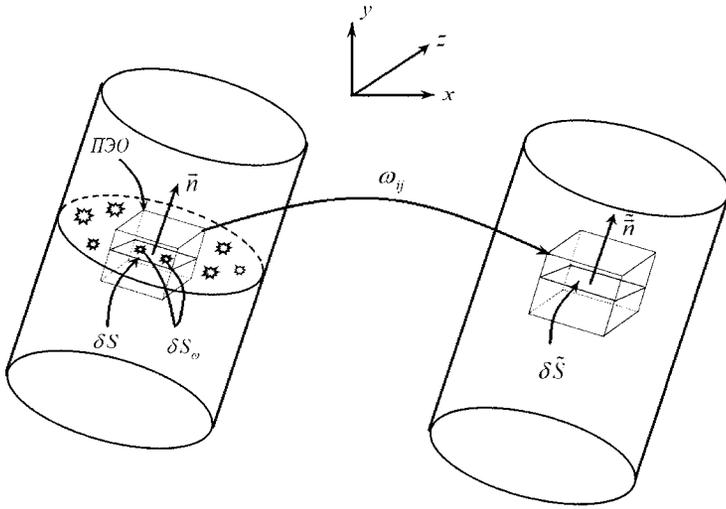


Рис. 1. Физическая поврежденность и математическая непрерывная поврежденность.

В одноосном случае изотропного разрушения, без эффекта закрытия микротрещин при сжатии, это среднее значение микронапряжений просто задается силовым равновесием [11]:

$$\tilde{\sigma} \delta \tilde{S} = \sigma \delta S$$

Записывая (2.3) как

$$\omega = \frac{\delta S_{\omega}}{\delta S} = \frac{\delta S - \delta \tilde{S}}{\delta S}, \tag{2.4}$$

получим

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \tag{2.5}$$

В многоосном случае изотропного повреждения все компоненты напряжений действуют на одну и ту же эффективную площадь. Аналогично одномерному случаю, эффективный тензор напряжений представляется в следующем виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \omega} \tag{2.6}$$

2.2. Тензорный параметр поврежденности. Для случая анизотропного повреждения гораздо сложнее обеспечить хорошее физическое представление, а также совместимость с термодинамикой. Фактически эффективное напряжение с представлением тензора повреждения второго порядка является аппроксимацией точного эффективного напряжения, выведенного из общего представления повреждения с помощью тензора ω четвертого порядка [12–15]. Это эффективное напряжение определяется так же, как и ранее, но здесь через проекцию вектора напряжения на опорный вектор \vec{v} (рис. 2):

$$v_i \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{n}_j \delta \tilde{S} = v_i \sigma_{ij} n_j \delta S \tag{2.7}$$

или

$$\tilde{\sigma}_{ij} (I_{ijkl} - \omega_{ijkl}) v_k n_l \delta S = \sigma_{kl} v_k n_l \delta S \tag{2.8}$$

Фактически наиболее общим для переменной повреждения является ее представление тензором четвертого порядка, что можно показать несколькими способами [12–15]. Такой тензор сложен в использовании и не нужен для случая повреждений, вызванных мезо- или микропластичностью.

Как и выше, рассмотрим область плоскости повреждения δS с нормалью \vec{n} и опорным вектором \vec{v} , такую, что тензор $v_i n_j \delta S$ определяет геометрическую опорную конфигурацию. Механика континуального разрушения определяет эффективную непрерывную конфигурацию с помощью модифицированной области $\delta \tilde{S}$ и модифицированной нормали $\vec{\tilde{n}}$, как показано на рис. 2.

Повреждение $\underline{\omega}$ представляет собой оператор, преобразующий тензор второго порядка $v_i n_j \delta S$ эталонной конфигурации в тензор эффективной конфигурации $\tilde{v}_i \tilde{n}_j \delta \tilde{S}$. Это тензор четвертого порядка, где

$$(I_{ijkl} - \omega_{ijkl}) v_k n_l \delta S = v_i \tilde{n}_j \delta \tilde{S} \quad (2.9)$$

со следующими симметриями: $\omega_{ijkl} = \omega_{jikl} = \omega_{klij} = \omega_{jilk}$.

3. Применение концепции поврежденности при исследовании ползучести металлов.

Описывая разрушение металлов вследствие ползучести, обычно выделяют два основных механизма разрушения: вязкий и хрупкий. Вязкое разрушение наступает в результате ползучести, характеризующейся большими сдвиговыми деформациями, хрупкое же разрушение связано с возникновением микропор и микротрещин и их постепенным слиянием. Под воздействием относительно малых напряжений и высоких температур (близких к половине температуры плавления) в металлических материалах накапливается межкристаллитная пористость, способствующая переходу материала в хрупкое состояние.

Высокотемпературная ползучесть металлов характерна тем, что в теле наряду с накоплением необратимых деформаций ползучести происходит образование и развитие дефектов (пор, микро- и макротрещин), приводящее к разрушению. Возникающая при высокотемпературной ползучести металлов поврежденность приводит к изменению различных механических и физических характеристик материалов, в частности, происходит: уменьшение модуля упругости; уменьшение предела текучести до или после закалки; уменьшение твердости; увеличение скорости деформации ползучести; уменьшение скорости прохождения ультразвуковых волн; уменьшение плотности материала и увеличение электрического сопротивления.

Одна из основных проблем при оценке прочности конструкций, работающих в условиях высоких температур, заключается в определении длительности работы этих конструкций до разрушения. Тогда поврежденность зависит от времени t , и параметр $\omega(t)$ характеризует степень поврежденности материала, накапливающейся в процессе ползучести.

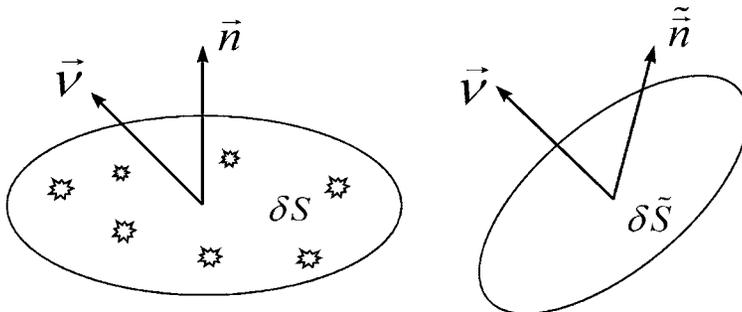


Рис. 2. Эталонные и эффективные конфигурации.

Работнов [1] впервые использовал этот параметр для аналитического описания разупрочняющейся стадии процесса ползучести, завершающейся разрушением. В качестве начала отсчета времени принимается момент приложения внешней нагрузки t ($t = 0$). Согласно [4, 5], в начале процесса ползучести принимается условие $\omega(0) = 0$, разрушению образца при $t = t^*$ соответствует значение $\omega^* = \omega(t^*) = 1$. Для описания ползучести и длительной прочности конструкционных металлов Работнов [11] предложил использовать уравнение механического состояния, в которое входят несколько структурных параметров, а также систему кинетических уравнений для их определения. Впоследствии этот метод позволил описать многие особенности процесса ползучести вплоть до разрушения. Различные варианты определяющих соотношений теории ползучести со структурными параметрами предложены в работах многих отечественных и зарубежных ученых (в частности [8, 16–27]). Более подробно полученные результаты описаны в следующем разделе.

4. Концепция рассеянной поврежденности и разрушения.

4.1. Скалярный случай. Формальное введение параметра поврежденности не может решить проблему прогнозирования процесса ползучести и характеристик длительного разрушения. В большинстве теоретических исследований [4, 5] введение параметра поврежденности ω имеет чисто феноменологический характер, при этом связь параметра ω с фактическим изменением структуры металла не рассматривается. Однако наряду с ними известно немало экспериментальных работ [28–32], в которых параметр поврежденности связывается с реальным нарушением структуры материала: исследование структуры обычно проводится металлографическими или физическими методами. В некоторых работах исследовалась взаимосвязь между степенью поврежденности и различными физическими величинами: скоростью звука, электрическим сопротивлением, модулем упругости и др. Однако наиболее распространенными можно считать работы, в которых изучаются количество, размеры и распределение пор в процессе ползучести.

Варианты кинетической теории со скалярным параметром поврежденности актуальны и в наше время, поскольку использование скалярного параметра поврежденности позволяет моделировать поведение металлов наиболее простым способом.

Так, относительный размер пор или необратимое изменение объема (разрыхление по терминологии В. В. Новожилова) рассматривалось в [33]. Предложены всевозможные типы кинетических уравнений при моделировании длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния.

В работах О. В. Соснина и его учеников [34–38] предложен энергетический подход для описания изучаемых явлений. В качестве скалярного параметра поврежденности ω принята величина рассеянной энергии $A(t)$, в качестве условия длительной

прочности рассматривается равенство $A(t^*) = A_* = \text{const}$, где $A_* = \int_0^{t^*} \sigma_{ij} \eta_{ij} dt$ –

рассеянная энергия деформаций ползучести в момент разрушения t^* , которая для многих материалов является характеристикой и сохраняет свое значение в широком диапазоне температур, η – скорость деформаций ползучести, σ – напряжение [34, 35]. Этот подход позволяет сформулировать постановку проблемы для стационарного и нестационарного пространственных напряженных состояний. В данных работах показано хорошее соответствие экспериментальных и теоретических кривых ползучести вплоть до разрушения. Одним из преимуществ энергетического варианта теории ползучести является совмещение двух следующих задач: нахождение напряженно-деформированного состояния и определение долговечности конструкций. Энергетический подход обсуждался и развивался также в работах других ученых [39, 40].

В статье Д. А. Кулагина и А. М. Локощенко [41] для рассмотрения исследуемого явления авторами предложена вероятностная теория. Предложен новый подход к опи-

санию деформирования и длительного разрушения металлов при одновременном воздействии внешних механических нагрузок при сложном напряженном состоянии в агрессивной окружающей среде. Для моделирования этого воздействия используется структурно-феноменологический подход, при котором материал представляется состоящим из большого количества структурных элементов. Для описания явления длительной прочности вводится понятие вероятности разрушения отдельных элементов, на основании которого выводится кинетическое уравнение для плотности неразрушенных структурных элементов.

В работах F. A. Leckie с соавторами [42–44] проведены исследования, в которых определялись нижняя и верхняя оценки времени до разрушения, устанавливалась связь феноменологического понятия поврежденности с параметрами структуры. При анализе структуры в [44] использовали два параметра: плотность пор и их средний объем.

В ряде статей особенности рассматриваемых явлений моделируются путем введения нескольких скалярных кинетических параметров. Авторы этих исследований рассматривают в качестве кинетических параметров различные характеристики эволюции структуры металлов в процессе ползучести [45, 46]. При моделировании ползучести вплоть до разрушения Q. Xu и D. R. Nayhurst использовали кинетическую теорию с двумя скалярными параметрами, один из которых необходим для описания неустановившейся ползучести, а другой — для описания ускоряющейся стадии ползучести [45]. Z. L. Kowalewski с соавторами рассмотрели обобщение теории Работнова с тремя скалярными параметрами поврежденности [46].

А. Р. Ржаницын [47] вместо общепринятого скалярного параметра поврежденности ω ввел скалярный параметр объективной прочности r , характеризующий мгновенную прочность материала в заданный момент времени. Предполагалось, что параметр r удовлетворяет некоторому кинетическому уравнению, связывающему скорость изменения прочности с самой прочностью и эквивалентным напряжением σ_e , зависящим от σ_{\max} — максимального главного напряжения и σ_{ii} — интенсивности напряжений. Также было показано, что параметры ω и r связаны конечным соотношением.

J. Lemaître с соавторами изучили накопление повреждений в теле с использованием скалярных параметров состояния в рамках термодинамики необратимых процессов, при этом основное внимание уделялось взаимодействию процессов ползучести и усталости [12, 48].

С. А. Шестериков с соавторами применили подход Работнова для учета дробной модели ползучести и получили условие длительного разрушения, при котором предельное значение параметра поврежденности меньше единицы [49].

M. Chrzanowski и J. Madej [50] в случае плоского напряженного состояния при построении изохорных кривых длительной прочности использовали кинетическое уравнение, с помощью которого можно оценить прочность при кратковременном нагружении и остаточную кратковременную прочность в произвольный момент времени.

S. Murakami и M. Mizuno [51] обобщили теорию Работнова для учета разрыхления металлов при нейтронном облучении и описали ползучесть нержавеющей стали при различных условиях облучения и переменных напряжениях.

В работе [52] В. F. Dyson и D. Taplin за меру поврежденности ω принимали длину трещины, а за время разрушения t^* — время образования трещины длиной в одно зерно. В. F. Dyson и M. S. Loveday [53] при анализе результатов испытаний цилиндрических образцов с выточками показали, что при малых напряжениях межзеренные трещины возникают в окрестности шейки и распространяются к центру образца, при больших напряжениях распространение трещин происходит в противоположном направлении.

В ряде работ не только приведены результаты феноменологического исследования ползучести и длительной прочности металлов, но и выполнен анализ изменения структуры металлов в процессе ползучести [53, 54].

В статьях [14, 54–57] приведены результаты исследований трубчатых образцов при постоянном растягивающем нормальном напряжении и знакопеременном касательном напряжении в условиях ползучести вплоть до разрушения.

F. Trivaudey и P. Delobelle провели статический анализ ориентаций трещин в разрушенных образцах [54, 56]. В качестве предельного значения параметра поврежденности при растяжении принимается отношение суммы длин всех поперечных трещин на фиксированной площади образца к сумме длин всех поперечных межзеренных границ на той же площади. В [54] показано, что вблизи области места разрушения значение $\omega^* \approx 0.3$. V. Tvergaard [55] при анализе влияния вида напряженного состояния на длительную прочность поликристаллов учитывал диффузионный рост пор на границах зерен и скольжение вдоль границ зерен. В [57] W. Trąpczyński и D. R. Hayhurst рассматривают феноменологическую модель ползучести при сложном напряженном состоянии. Описаны ползучесть и длительная прочность тонкостенных трубок, которые испытывались в условиях сложного напряженного состояния (растягивающее напряжение во время каждого опыта оставалось постоянным, касательное напряжение в некоторый момент времени меняло знак). В работе F. A. Leckie и E. T. Onat [14] рассматривается анизотропное распределение пор в деформируемом элементе.

Л. Б. Гецов в [58] предложил кинетическое уравнение деформационного типа, состоящее из четырех слагаемых, каждое из которых учитывает повреждения и деформации разного типа. Это уравнение позволяет определять условия разрушения при произвольной программе нагружения и нагрева. Показано, что результаты опытов, проведенных разными авторами в условиях различных программ нагружения, корректно описываются в рамках частных случаев предложенного критерия длительной прочности.

Т. Maruyama и Т. Nosaka [59] измеряли поврежденность материала на основе микрощлифов с помощью использования прозрачной эталонной квадратной сетки; при этом рассматривалось отношение количества узлов, попадающих в область пор и микротрещин, к общему количеству узлов в сетке.

В некоторых статьях (Р. И. Нигматулин и Н. Н. Холин [60], Y. Estrin и Н. Mecking [61]) в качестве структурного параметра анализируется плотность дислокаций.

В работах А. М. Локощенко [62, 63] рассмотрен метод измерения структурных изменений в металле непосредственно при высокотемпературной ползучести, без охлаждения и выгрузки образцов. Предлагается проводить измерения электрического сопротивления образцов при растяжении и сравнивать эти данные с результатами измерения длины образцов при одинаковых значениях времени.

Многие исследователи объясняют протекание процесса ползучести накоплением пор и образованием микротрещин (А. J. Perry [64], Н. Грант [65] и др.). В результате объединения мелких разобщенных трещин возникает разрушающая магистральная трещина. Поврежденность материала можно оценить, как долю суммарного объема пор и трещин в единице объема. Т. Г. Березина и И. И. Трунин [66] пришли к выводу, что поврежденность, полученная указанным способом, практически такая же, как и поврежденность, определенная с помощью измерения плотности.

М. Horiguchi и Т. Kawasaki [67] в качестве ω рассматривали размер одиночной поры, а в качестве t^* — время достижения этим размером критической величины. Н. Riedel [68] за меру поврежденности ω принимал отношение радиуса поры к половине расстояния между порами, за t^* — время, при котором происходит слияние пор.

В работе [69] под ω понимается отношение суммарной длины поперечных границ между зернами, занятых порами и микротрещинами, к общей длине всех поперечных межзеренных границ.

Многие авторы [28–32] считают плотность материала наиболее представительной характеристикой пористости и поврежденности. Исследования по изменению плотности в условиях ползучести были представлены во многих публикациях второй половины XX века. Возникновение пор по результатам измерения плотности было обнаружено на самом начальном этапе ползучести. Более того, было показано [30], что залечивание пор наложением гидростатического давления приводит к резкому торможению деформации ползучести и значительному увеличению времени до разрушения. Эти опыты убедительно показали, что разрыхление (необратимое изменение плотности) является основным фактором поврежденности, определяющим работоспособность металлических материалов в процессе ползучести. Дальнейшие исследования [28], в которых процедура наложения гидростатического давления в процессе ползучести повторялась многократно, полностью подтвердили выводы работы [30].

Пористость является основной характеристикой поврежденности, а в качестве интегральной меры пористости принимается изменение плотности вследствие разрыхления материала. Имеющиеся в литературе результаты, полученные для различных металлов и сплавов, указывают на существование единой закономерности накопления разрыхления [31]. Наиболее благоприятная ситуация для разрыхления создается напряжениями, близкими к пределу текучести, когда взаимосвязанные процессы зернограницного проскальзывания и диффузии вакансий создают максимальный эффект для разрыхления. В работе [28] отмечается особая роль предела текучести в процессах пластической деформации и разрушения, анализ которых проводится с позиции фазовых переходов. Показано, что при достижении напряжений, равных пределу текучести, в сплавах происходит фазовый переход в процессе деформирования.

Р. А. Арутюнян [31] в результате детальных исследований на основе анализа ряда экспериментальных данных показал немонотонную зависимость функций разрыхления от напряжения и температуры. С помощью предложенного единого критерия вязко-хрупкого разрушения были описаны все области кривой длительной прочности.

В ряде работ [31, 32, 70–75] описано уменьшение плотности металлов в процессе испытаний на ползучесть. Оно вызывается локальными разрушениями вследствие концентрации напряжений у включений и вблизи стыка трех зерен. Измерение плотности производится, в частности, с помощью метода гидростатического взвешивания (на воздухе и в жидкости). Кинетическое уравнение для определения разрыхления выводится из условия сохранения массы. В. И. Куманин и др. [76] считают, что разрушение материала наступает при накоплении критического количества микроповреждений, которое они определяют по данным измерения плотности и микротвердости. G. Belloni и G. Bernasconi [77] привели подробный обзор литературных данных по исследованию зависимости относительного изменения плотности от деформации, напряжения, температуры и времени.

В монографии Л. Р. Ботвиной [78] основное внимание уделено стадии накопления несплошностей в зоне локализации разрушения и взаимосвязи накопленной поврежденности с изменением акустических свойств материала. Для описания кинетики разрушения под действием различных факторов использована теория фазовых переходов и предложен единый подход к анализу кинетических процессов в разных средах и на различных масштабных уровнях.

В монографии Й. Чадека [79] дано математическое описание рассматриваемых процессов и проанализирован физический смысл параметров уравнений. Рассмотрены результаты изучения дефектной структуры, формирующейся при ползучести, ее роли в подготовке и развитии процессов разрушения. Обсуждены различные теоретические модели и механизмы ползучести.

В работах Р. А. Арутюняна, А. Р. Арутюняна, Р. Р. Саитовой используются физико-механические методы для описания деградационных процессов металлических материалов при длительных температурно-силовых воздействиях [80–84]. Работоспособность металлов определяется процессами поврежденности, которые способствуют охрупчиванию материала и возникновению эффекта тепловой хрупкости. Физическими методами исследований установлено, что явление тепловой хрупкости свойственно всем металлическим материалам и связано с процессами накопления пористости по границам зерен по механизму диффузии вакансий и зернограничного проскальзывания. В работах эти процессы рассматриваются феноменологически, методами механики рассеянного повреждения и разрушения. При формулировке уравнений ползучести и критерия длительной прочности в области хрупких разрушений учтено условие сжимаемости и сформулированы реологические соотношения ползучести и критерии длительной прочности, основанные на законе сохранения массы. В этом случае в качестве параметра поврежденности рассмотрено необратимое изменение плотности (разрыхление) материала.

4.2. Векторный случай. Очевидно, что наиболее простые соотношения имеют место при использовании скалярного параметра поврежденности. Однако дефекты, определяющие накопление повреждений (полости, микропоры, микротрещины), обусловлены нагрузками, под действием которых эти дефекты возникают. Как известно, микротрещины обычно развиваются приблизительно перпендикулярно максимальному из главных напряжений. Увеличение этих микротрещин приводит к разрушению межзеренных связей в поликристалле, в результате чего происходит разрушение. Для описания такого типа разрушений недостаточно использовать скалярный параметр поврежденности, необходимо применять векторный или тензорный параметры поврежденности. Применение этого подхода, как правило, приводит к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

В первую очередь среди ученых, работавших в данном направлении, следует отметить Л. М. Качанова [85–87], который предложил учитывать, как величину повреждения ω , так и его направление. Скорость накопления поврежденности в каждой плоскости зависит от нормального напряжения, действующего в этой плоскости; локальное разрушение происходит, когда величина ω в каком-либо направлении достигает предельного значения; полное разрушение наступает после прохождения фронта разрушения через рассматриваемый объем.

Также в разработке этого направления принимали участие И. В. Наместникова и С. А. Шестериков [88]. Ими был предложен следующий подход. В качестве параметра

поврежденности принимается величина $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, где величины ω_i связаны с главными напряжениями σ_i , $i = 1, 2, 3$ следующими зависимостями:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \begin{cases} f(\sigma_i, \omega_i), & \sigma_i > 0 \\ 0, & \sigma_i \leq 0 \end{cases}$$

Эти зависимости описывают накопление проекций вектора поврежденности на направления главных напряжений в процессе ползучести. Величина вектора поврежденности удовлетворяет следующим условиям: $\omega(0) = 0$, $\omega(t^*) = 1$.

В работе [89] В. А. Пелешко задает поврежденность для каждого направления в векторном пространстве напряжений. С. L. Chow, X. J. Yang, E. Chu [90] с помощью векторного подхода описали явление анизотропной поврежденности.

В цикле работ А. М. Локощенко с В. В. Назаровым [91–95] выполнено обобщение модели, предложенной в статье [88]. С этой целью вводится коэффициент прочностной анизотропии материала α_0 и учитываются компоненты вектора поврежденности, накапливаемые в процессе кратковременного квазистатического нагружения,

а также учитывается взаимная зависимость компонент ω . Коэффициент прочностной анизотропии α_0 определяется для трубчатых образцов как отношение осевого и поперечного нормальных напряжений, приводящих при растяжении в этих направлениях к разрушению образца за одно и то же время t^* .

В [96] получен анализ серии испытаний с использованием различных критериев длительной прочности и приведены значения α_0 . Впервые экспериментально получено [91] и впоследствии с помощью предложенной модели [95] определено время до разрушения при стационарном сложном напряженном состоянии при различных программах кратковременного нагружения t^* . Предложен ряд кинетических уравнений, описывающих этот результат. Получено, что при одних и тех же значениях σ_{\max} и σ_u , т.е. при одних и тех же значениях эквивалентного напряжения σ_e , различным видам напряженного состояния могут соответствовать различные значения времени до разрушения.

В некоторых работах используются и скалярный, и векторный параметры поврежденности.

С. А. Шестериков с соавторами [97] отметили, что в процессе ползучести при сложном напряженном состоянии фактически появляется анизотропия свойств материала с накопленной поврежденностью, и предложили модель, в которой комбинируются скалярный и векторный подходы. Для моделирования поведения материалов, в которых либо расширяются сферические поры, либо максимальное главное напряжение значительно больше остальных главных напряжений, может быть использован скалярный параметр. В случае развития трещиновидных дефектов при описании длительного разрушения следует использовать векторный подход.

В свою очередь, А. А. Чижик и Ю. К. Петреня [98] считают, что в области микропор параметр поврежденности является векторной величиной, а в области клиновидных трещин – скаляром.

О. К. Морачковский [99] использует скалярный параметр для описания установившейся и ускоряющейся стадий ползучести, а векторный параметр для описания процесса ползучести на неустановившейся стадии.

М. Chrzanowski, J. Madej [100] при описании изохронных кривых используют скалярный или векторный подход в зависимости от времени до разрушения.

Г. М. Хажинский [101] использует в качестве скалярного параметра внутризеренную поврежденность, а в качестве векторного параметра – межзеренную поврежденность.

Д. Nayhurst с соавторами при моделировании длительного разрушения различных сплавов при сложном напряженном состоянии в качестве параметра ω рассматривают часть объема, занятую порами [57, 102]. При этом для описания поведения алюминиевого сплава используется скалярный параметр, а при описании медных образцов следует учитывать изменение направления (векторный параметр) максимального главного напряжения при изломе траектории нагружения.

В статьях [103, 104] рассматривается ползучесть до разрушения трубчатых образцов при касательных напряжениях, которые однократно или периодически меняют знак. В [103] рассмотрены результаты известных испытаний трубчатых образцов при постоянном осевом напряжении и постоянном или знакопеременном касательном напряжении [54], моделирование полученных экспериментальных результатов проведено с помощью подхода Качанова. Циклическое изменение знака касательных напряжений приводит в экспериментах к значительному увеличению времени до разрушения. В [104] выполнено моделирование известных результатов испытаний на длительную прочность в условиях нестационарного сложного напряженного состояния. При описании экспериментальных данных [105] используется векторный параметр поврежденности с кусочно-постоянной скоростью накопления поврежденности. Моделируется длительная прочность трубчатых образцов при одновременном

действию постоянного осевого напряжения и касательного напряжения, однократно или циклически меняющего знак. Моделирование длительной прочности при скачкообразном изменении интенсивности напряжений проведено двумя способами — с помощью метода Л. М. Качанова и метода И. В. Наместниковой и С. А. Шестерикова. Все варианты предложенных кинетических уравнений приводят к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

4.3. Тензорный вариант. Многие авторы используют тензорный параметр поврежденности при исследовании зависимости времени до разрушения от различных характеристик анизотропии материала (как исходной, так и приобретенной). При этом рассматриваются тензоры второго, четвертого и восьмого рангов.

Впервые тензорный параметр поврежденности был предложен в классической монографии Ю. Н. Работнова [11]. В работах [11, 106] в качестве характеристики напряженного состояния принимается линейная комбинация σ_{\max} и σ_u , где σ_{\max} — максимальное главное напряжение и σ_u — интенсивность напряжений.

Также первые систематические исследования ползучести металлов при сложном напряженном состоянии были опубликованы в Великобритании в работе А. Е. Johnson [107]. В качестве основной связи компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести (скоростей деформации ползучести) принимается гипотеза пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести. В работе А. Е. Johnson [108] коэффициент пропорциональности в этих соотношениях включает вторые инварианты тензора напряжений и тензора скоростей деформаций ползучести.

В работе [109] В. П. Тамуж рассмотрел возможности построения теории длительной прочности при сложном напряженном состоянии, используя скалярный, векторный и тензорный параметры поврежденности. В. П. Тамуж и А. Ж. Лагзыньш применили тензорный подход при моделировании накопления повреждений в виде круглых мелких трещин различной ориентации в изотропных [110] и анизотропных [111] средах.

Н. Altenbach и Р. Schieße [112, 113] указали основные типы параметра поврежденности и рассмотрели возможность описания связи условий нагружения с поврежденностью на уровне структуры материала, а также учета различия свойств при растяжении и сжатии и анизотропии процесса накопления поврежденности. В работе [114] Н. Altenbach с соавторами представили модель ползучести, зависящую от диапазона напряжений. При низких уровнях напряжений описывается ползучесть диффузионного типа, а при умеренных уровнях напряжений рассматривается ползучесть степенного типа. Конструктивная модель неупругих процессов при высокой температуре, включая ползучесть, вязкопластичность и термомеханическую усталость, представлена К. Naumenko с соавторами [115]. Конструктивная модель с тензором поврежденности разработана и применена для анализа тонкостенных конструкций в работе Н. Altenbach с соавторами [116]. К. Naumenko и Н. Altenbach предложили разработать и идентифицировать модель анизотропной ползучести для металла многопроходного шва [117].

В 1967 г. А. А. Ильюшин [118] ввел понятия тензоров и мер повреждений, которые определяются с помощью функционалов для заданных процессов изменения во времени тензоров напряжений и моментов. Данный подход был развит в монографии Э. Б. Завойчинской и И. А. Кийко [119]. Введен оператор повреждений, предложено обобщение механических теорий прочности, исследованы предельные процессы нагружения в пространстве А. А. Ильюшина.

В работе Б. Е. Победри [120] рассмотрены операторные определяющие соотношения среды, включающие меру поврежденности А. А. Ильюшина, введены моментные напряжения для учета возможных несовершенств материала, проведен термодинамический анализ процесса эволюционного разрушения материала.

В.А. Копнов использовал предложенные в статье [118] интегральные операторы для получения феноменологических критериев длительной прочности анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии [121].

А.А. Лебедев и В.М. Михалевич с использованием разработанного математического аппарата сформулировали критериальные соотношения для накопленных повреждений в виде уравнения наследственного типа с разностным ядром [122–125].

J. Betten [126, 127] выделяет деформационную анизотропию и анизотропию, вызываемую накоплением повреждений.

C. Chow, J. Wang [15] предложили тензорное уравнение для накопленных повреждений для анизотропной среды с учетом больших деформаций.

S. Bodner [128] предложил использовать в определяющем уравнении для анизотропной среды параметр поврежденности в виде тензора второго порядка.

S. Murakami с соавторами [17, 19, 129, 130] использовали сочетание методов механики сплошной среды и материаловедения для исследования анизотропного характера тензорного параметра поврежденности. Параметр поврежденности в виде тензора второго ранга характеризует плотность пор в трех главных плоскостях. В качестве основных причин появления поврежденности материала рассматриваются зарождение и рост межзеренных пор, полостей и микротрещин. Для проверки полученных результатов проведены испытания для перфорированных пластин с различной ориентацией перфорации. Показано, что при малой плотности пор длительное разрушение можно описывать с помощью скалярного параметра поврежденности.

В.И. Астафьев [131] использовал тензорную меру поврежденности для описания развития пор, их слияния и превращения пор в микротрещины, расположенные на площадках, ортогональных направлению наибольшего главного напряжения.

D. Krajcinovic с соавторами [132–134] построили теорию длительной прочности металлов с использованием параметра поврежденности в виде антисимметричного тензора второго ранга.

В.А. Маньковский [135] при исследовании изменения поврежденности во времени учитывает ее случайный характер. В результате исключения фактора случайности и использования тензорного подхода получен новый критерий длительного разрушения при сложном напряженном состоянии.

P. Delobelle с соавторами [56, 136], анализируя результаты испытаний, проведенных при сложном нагружении, показали необходимость учета механизмов как изотропного, так и кинематического упрочнения материала. Также приведены подробные данные об ориентации микротрещин, образующихся в ходе испытаний.

J. Lemaître [137] применил кинетическую теорию при решении задач обработки металлов, в частности, задачи о глубокой вытяжке полос. Также Lemaître установил, что при произвольном пути нагружения возможны различные предельные кривые разрушения.

В работах А.М. Локощенко [138, 139] приведены обзоры экспериментально-теоретических исследований длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния с помощью кинетической теории. В этих обзорах показано, что большинство публикаций направлены на разработку новых теоретических моделей, однако основное внимание должно быть уделено экспериментальной проверке этих моделей.

В статье К.А. Агахи и Д.В. Георгиевского [140] дается обзор известных вариантов определяющих соотношений теории ползучести изотропного тела с учетом поврежденности материала в процессе деформирования. Обсуждается кинетический смысл скалярной функции и тензорной меры поврежденности. Предлагается обобщение на трехмерный случай определяющих соотношений теории ползучести с поврежденностью, куда входят две материальные нелинейные тензор-функции двух тензорных аргументов.

5. Поврежденность и нелокальные критерии разрушения. В дальнейшем идеи Ю. Н. Работнова были использованы при развитии критериев разрушения. Одним из самых известных критериев можно считать критерий нелокальной механики разрушения Нейбера-Леонова-Новожилова [141–143]. В разное время и на основе различного уровня рассмотрений Г. Нейбером [141], М. Я. Леоновым [142] и В. В. Новожиловым [143] был предложен критерий разрушения $\frac{1}{d} \int_0^d \sigma dr \leq \sigma_c$,

где σ – главное растягивающее напряжение в окрестности вершины трещины ($r = 0$) и σ_c – предел прочности бездефектного материала. Главной особенностью критерия является явное введение некоторого структурного размера d .

Большое распространение получил критерий раскрытия трещины. Этот критерий независимо друг от друга был введен М. Я. Леоновым и В. В. Панасюком в 1959 г. [144] и D. S. Dugdale в 1960 г. [145]. Подходы и физическое обоснование у этих авторов различны, но приводят к одной и той же математической формализации. “Критерий раскрытия трещины” может быть сформулирован следующим образом: трещина начнет распространяться тогда, когда раскрытие трещины достигнет критического значения. Также классическим критерием является критерий Г. И. Баренблатта [146].

Основываясь на экспериментальных работах С. Н. Журкова, В. С. Куксенко и А. И. Слуцкера [147, 148], Ю. Н. Работнов [3] отметил, что в тонких пленках из некоторых полимерных материалов при действии растягивающей нагрузки возникают субмикроскопические трещины с размером порядка от 10 до 100 нм, а при критической концентрации расстояния между трещинами оказывается того же порядка, что размер трещины. Можно предположить, что рост трещины происходит, когда плотность микротрещин на ее кончике или степень поврежденности достигает критического значения. Модель А. И. Зобнина [149] посвящена описанию такого процесса и тесно связана с теорией пластического разрыхления В. В. Новожилова.

С. Н. Журков [150] ввел концентрационный критерий разрушения, который гласит, что микротрещины имеют одинаковый размер l_* , и они накапливаются в объеме напряженного материала до тех пор, пока средняя дистанция между трещинами $\langle l \rangle$ не превышает некоторого критического значения l_c . Когда $\langle l \rangle = l_c$, микротрещины сливаются, и это приводит к глобальному разрушению образца. Как показали эксперименты [150], для многих материалов критическая дистанция l_c примерно равна $3l_*$.

Ф. М. Бородич [151] отметил, что в полифазных материалах поврежденность может иметь различные масштабные уровни и развитие глобальной трещины сопровождается каскадным накоплением поврежденности и слияния трещин на этих масштабах $L(m)$, где m – номер масштабного уровня. Развивая концентрационный критерий разрушения, Ф. М. Бородич сформулировал принцип онтогенеза множественного разрушения: для создания трещины масштабного уровня $L(m)$ в объеме неповрежденного материала, процесс разрушения должен пройти все предыдущие стадии накопления повреждений и слияния трещин более низкого масштабного уровня.

Позже было предложено сочетать идею каскадного накопления поврежденности на различных масштабных уровнях с многомасштабным подходом Вавакина–Салганика и использовать такой подход к моделированию свойств пороупругих материалов, используемых в порошковой металлургии [152].

В работах Е. В. Ломакина и соавторов [153, 154] предполагается использование концепции поврежденности для описания прочности и поврежденности полимерных композиционных материалов. Вводятся два параметра поврежденности, первый связан с разрушением волокон, второй – с разрушением матрицы композита. В на-

чальном состоянии поврежденность 1, в момент разрушения 0. Предполагается, что характеристики прочности композита являются функциями двух скалярных параметров ψ_1, ψ_2 и их скоростей $\{\psi_1, \psi_2, d\psi_1 / dt, d\psi_2 / dt\}$.

6. Концепция поврежденности в задачах трибологии. Понятие поврежденности используется также при изучении различных задач трибологии [155]. И. Г. Горячева и О. Г. Чекина [156] ввели модель накопления поврежденности и усталостного износа в упругом полупространстве. Разнообразные модели дискретного контакта подробно описаны И. Г. Горячевой [157]. Эти модели были использованы в моделях накопления поврежденности и усталостного износа покрытий [158, 159]. И. Г. Горячева и Е. В. Торская разработали модель для подсчета накопления поврежденности в покрытиях при фрикционном контакте [160]. Дальнейшее развитие эта модель получила в работах [155, 158, 159], в частности, рассматривались мономолекулярные антиадгезионные покрытия микроэлектромеханических систем.

Заключение. Многие оригинальные идеи и результаты Ю. Н. Работнова послужили основой для новых научных направлений, развиваемых его учениками и последователями. Широчайший научный кругозор и научное предвидение позволили Ю. Н. Работнову точно оценить перспективность тех или иных научных направлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 80 с.
3. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
4. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5–7.
5. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
6. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 743 с.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 420 с.
8. Krajcinovic D. Damage Mechanics. Elsevier, 1996. Т. 41.
9. Lemaître J., Desmorat R. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, 2005.
10. Voyiadjis G. Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Springer, 2015. 1635 p.
11. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1963. № 2. С. 113–123.
12. Lemaître J., Chaboche J.-L. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement // J. Méc. Appl. 1978. V. 2. № 3. P. 317–365.
13. Krajcinovic D., Fonseka G. U. The Continuous damage theory of brittle materials. Pt. 1: General theory // J. Appl. Mech. 1981. V. 48 (4). P. 809–815.
<https://doi.org/10.1115/1.3157739>
14. Leckie F.A., Onat E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables // in: Physical Non-Linearities in Structural Analysis. IUTAM / Ed. by Hult J., Lemaître J. Berlin; Heidelberg: Springer, 1981. P. 140–155.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_20
15. Chow C.L., Wang J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture // Eng. Fract. Mech. 1987. V. 27. № 5. P. 547–558.
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90108-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90108-1)
16. Hao L., Ke P., June W. An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates // Engng. Fract. Mech. 1985. V. 21. № 5. P. 1031–1054.
17. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // ASME Trans. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 2. P. 280–286.
<https://doi.org/10.1115/1.3173673>
18. Murakami S., Kamiya K. Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics // Int. J. Mech. Sci. 1997. V. 39. № 4. P. 473–486.
19. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // in: Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R. Berlin; Heidelberg: Springer. 1981. P. 422–444.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_28

20. *Najar J.* Continuous damage of brittle solids // in: Continuum Damage Mechanics Theory and Application. Vienna: Springer, 1987. P. 233–294.
21. *Hutchinson J. W.* Linking scales in fracture mechanics // Adv. in Fract. Res. 1997. V. 1. P. 1–14.
22. *Pardoen T., Hutchinson J. W.* An extended model for void growth and coalescence // J. Mech. & Phys. of Solids. 2000. V. 48. № 12. P. 2467–2512.
23. *Hult J.* Continuum damage mechanics—capabilities, limitations and promises // Mech. Deform. & Fract. 1979. P. 233–347.
24. *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics. Springer, Sci. & Business Media, 2012.
25. *Cocks A. C. F., Leckie F. A.* Creep constitutive equations for damaged materials // Adv. in Appl. Mech. 1987. V. 25. P. 239–294.
26. *Leckie F. A., Murrell S. A. F.* The constitutive equations of continuum creep damage mechanics // Phil. Trans Roy. Soc. London A: Math., Phys. & Engng. Sci. 1978. V. 288. № 1350. P. 27–47.
27. *Evans A. G., Wilshaw T. R.* Quasi-static solid particle damage in brittle solids—I. Observations analysis and implications // Acta Metall. 1976. V. 24. № 10. P. 939–956.
28. *Betekhtin V. I.* Porosity of solids // Trans. St.-Petersburg Acad. Sci. for Strength Probl. 1997. V. 1. P. 202–210.
29. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2015. 506 с.
30. *Ratcliffe R. T., Greenwood G. W.* Mechanism of cavitation in magnesium during creep // Phil. Mag. 1965. V. 12. P. 59–69.
31. *Арутюнян Р. А.* Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 252 с.
32. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // Mech. of Solids. 2015. V. 50. Iss. 2. P. 191–197.
33. *Новожилов В. В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. № 4. С. 681–689.
34. *Соснин О. В.* О варианте теории ползучести с энергетическими параметрами упрочнения // в сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение. 1975. С. 460–463.
35. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Ин-т гидроин. им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 1986. 96 с.
36. *Соснин О. В., Любашевская И. В., Новоселя И. В.* Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // ПМТФ, 2008. Т. 49. № 2. С. 123–130.
37. *Соснин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // Пробл. прочн. 1973. № 5. С. 45–49.
38. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести // Пробл. прочн. 1976. № 11. С. 3–8.
39. *Павлов П. А., Неделько Е. Ю.* Экспериментальное определение работы необратимой деформации при разрушении некоторых металлов // Изв. вузов. Стр-во и архит. 1981. № 9. С. 55–58.
40. *Золочевский А. А.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Изв. вузов. Машиностр. 1986. № 12. С. 7–10.
41. *Кулагин Д. А., Локощенко А. М.* Моделирование влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов при сложном напряженном состоянии // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 188–199.
42. *Leckie F. A., Hayhurst D. R.* Creep rupture of structures // Proc. R. Soc. Lond. A. 1974. V. 340. № 1622. P. 323–347.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0155>
43. *Leckie F. A., Wojewodzki W.* Estimates of rupture life—constant load // Int. J. Solids Struct. 1975. V. 11. № 12. P. 1357–1365.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90063-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90063-3)
44. *Leckie F. A., Hayhurst D. R.* Constitutive equations for creep rupture // Acta Metall. 1977. V. 25. № 9. P. 1059–1070.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(77\)90135-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90135-3)
45. *Xu Q., Hayhurst D. R.* The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550 °C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels // Int. J. Pres. Ves. Pip. 2003. V. 80. № 10. P. 689–694.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2003.08.005>

46. *Kowalewski Z. L., Lin J., Hayhurst D. R.* Investigation of a high accuracy uniaxial creep testpiece with slit extensometer ridges // Arch. Mech. 1995. V. 47. № 2. P. 261–279.
47. *Ржаницын А. П.* Теория длительной прочности при произвольном одноосном и двухосном нагружении // Строит. мех. и расчет сооруж. 1975. № 4. С. 25–29.
48. *Lemaître J., Sermage J. P.* One damage law for different mechanisms // Comput. Mech. 1997. V. 20. № 1–2. P. 84–88.
<https://doi.org/10.1007/s004660050221>
49. *Шестериков С.А., Лебедев С.Ю., Юмашева М.А.* Новые функциональные соотношения для описания процессов ползучести и длительной прочности // в сб: Тр. IX конф. по прочности и пластичности. Т. 3 (22.01–26.01.1996, Москва). М.: ИПМ РАН, 1996. С. 130–134.
50. *Chrzanowski M., Madej J.* Isochronous creep rupture curves in plane stress // Mech. Res. Commun. 1980. V. 7. № 1. P. 39–40.
[https://doi.org/10.1016/0093-6413\(80\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0093-6413(80)90023-3).
51. *Murakami S., Mizuno M.* A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress // Int. J. Solids Struct. 1992. V. 29. № 19. P. 2319–2328.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90218-I](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90218-I).
52. *Dyson B.F., Taplin D.* Creep damage accumulation // Grain Bound. Inst. Met. Spring. Resident. Conf. 1976. Ser. 3. № 5. P. E/23–E/28.
53. *Dyson B.F., Loveday M. S.* Creep fracture in Nimonic 80A under triaxial tensile stressing // Creep in Structures. IUTAM / Ed. by *Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, 1981. P. 406–421.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_27
54. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading—Part I: Experiments // J. Eng. Mater. Technol. 1990. V. 112. № 4. P. 442–449.
<https://doi.org/10.1115/1.2903355>
55. *Tvergaard V.* On the stress state dependence of creep rupture // Acta Metall. 1986. V. 34. № 2. P. 243–256.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(86\)90195-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(86)90195-1)
56. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading—Part II: Model and simulations // J. Eng. Mater. Technol. 1990. V. 112. № 4. P. 450–455.
<https://doi.org/10.1115/1.2903356>
57. *Trąmpczyński W., Hayhurst D. R.* Creep deformation and rupture under non-proportional loading // Creep in Structures. IUTAM / Ed. by *Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, P. 388–405.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_26
58. *Getsov L. B.* Kinetic equations of failure in complex programs of cyclic loading // Strength of Materials. Springer Nature. 1978. V. 10. Iss. 7. P. 767–775.
<https://doi.org/10.1007/BF01521098>
59. *Maruyama T., Nosaka T.* Estimation of Creep Damage from Observation of Creep Voids in Centrifugal Cast Tube Alloys // J. Soc. Mater. Sci. (Jap.) 1979. V. 28. № 308. P. 372–378.
<https://doi.org/10.2472/jmsms.28.372>
60. *Нигматуллин Р.И., Холин Н.Н.* Дислокационная кинетика сверхпластичности и ползучести металлов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 2. С. 303–306.
61. *Estrin Y., Mecking H.* A unified phenomenological description of work hardening and creep based one-parameter models // Acta Met. 1984. V. 32. № 1. P. 57–70.
62. *Lokoshchenko A. M.* The investigation of the metal damage at the creep by the method of electrical resistance measuring // Acta Mech. Sinica. V. 7, Iss. 2. 1991. P. 157–161.
63. *Lokoshchenko A. M.* A new method for measuring creep damage in metals // Mech. of Solids. V. 40. Iss. 5. 2005. P. 82–92.
64. *Perry A. J.* Review cavitation in creep // J. Mater. Sci. 1974. V. 9. P. 1016–1039.
65. *Грант Н.* Разрушение в условиях высокотемпературной ползучести // Разрушение. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 538–578.
66. *Березина Т.Г., Трунин И.И.* Взаимодействие предельно допустимой деформации ползучести с поврежденностью материала паропроводов // Металлшвед. и термич. обработка металл. 1980. № 12. С. 34–37.
67. *Horiguchi M., Kawasaki T.* Creep rupture of stainless steels at high temperatures // J. Jap. Soc., Strength&Fract. Mat. 1977. V. 12. № 1. P. 34–43. (in Japan)

68. *Riedel H.* The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // Creep in Structures: Proc. 3rd IUTAM Symp., Leicester, 1980. Berlin: 1981. P. 504–515.
69. *Локощенко А. М.* Исследование поврежденности материала при ползучести и длительной прочности // ПМТФ. 1982. № 6. С. 129–133.
70. *Розенберг В. М., Шалимова А. В., Зверева Т. С.* Влияние температуры и напряжений на образование пор при ползучести // Физика металл. и металловед. 1968. Т. 25. Вып. 2. С. 326–332.
71. *Cane V. J.* Deformation induced intergranular creep cavitation in alpha-iron // Metal Sci. 1978. V. 12. № 2. P. 102–108.
72. *Гойхенберг Ю. Н., Березина Т. Т., Ашихмина Л. А., Ерагер С. И., Шербакова А. Ф.* Исследование разрушения теплоустойчивых сталей в процессе ползучести // Сб. науч. тр. Челябин. Политехн. ин-т. 1979. Т. 89. № 229. С. 72–77.
73. *Бетехтин В. И., Кадомцев А. Г., Петров А. И.* Особенности микроразрушения металлов при высокотемпературной ползучести // Металловед. и термич. обработка металл. 1980. № 12. С. 24–26.
74. *Арутюнян Р. А.* О критериях разрушения в условиях ползучести // Пробл. прочн. 1982. № 9. С. 42–45.
75. *Арутюнян Р. А.* Высокотемпературное охрупчивание и длительная прочность металлических материалов // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 96–104.
76. *Куманин В. И., Трунин И. И., Богомольная Р. Б.* Изучение процесса накопления повреждаемости в условиях высокотемпературной ползучести // Научн. тр. Всес. заочн. машиностр. ин-т (ВЗМИ). 1973. Т. 1. С. 55–65.
77. *Belloni G., Bernasconi G.* Creep damage models // Creep Eng. Mater.&Struct. Proc. Semin. Ispra (Varese). 1979. P. 195–227.
78. *Ботвина Л. Р.* Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. М.: Наука, 2008. 334 с.
79. *Чадек Й.* Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 302 с.
80. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R.* The Criterion of High-Temperature Creep of Metals Based on Relative Changes of Density // WSEAS Trans. on Appl.&Theor. Mech. 2019. V. 14. P. 140–144.
81. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R.* High-temperature creep and damage of metallic materials // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1474. Iss. 1. № : 012005.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012005>
82. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A., Saitova R.R.* The Definition of Damage Parameter Changes from the Experimental High-Temperature Creep Curves // Lecture Notes in Mech. Engng. 2020. P. 53–59.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5_5
83. *Arutyunyan A.R., Saitova R.R.* Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength // J. Phys. Conf. Ser. 2022. V. 2231. Iss. 1. № : 012001.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012001>
84. *Arutyunyan A.R., Saitova R.R.* Exact and approximate solutions of the modified system of interrelated kinetic equations for damage parameter and creep deformation // Lecture Notes in Mech. Engng. 2023. P. 196–201.
85. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
86. *Качанов Л. М.* К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 1. С. 92–96.
87. *Качанов Л. М.* Разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 11–15.
88. *Наместникова И. В., Шестериков С. А.* Векторное представление параметра поврежденности // в сб.: Тр. Ин-та механики МГУ им. М. В. Ломоносова. Деформирование и разрушение твердых тел. М.: МГУ, 1985. С. 43–52.
89. *Пелешко В. А.* Использование поверхности поврежденности для описания ползучести и длительной прочности при сложном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 124–138.
90. *Chow C.L., Yang X.J., Chu E.* Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading // J. Eng. Mater. Technol., 2001. V. 123. № 4. P. 403–408.
<https://doi.org/10.1115/1.1395575>

91. Локощенко А. М. Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // в сб.: Тр. Центр. котлотурбин. ин-та. 1986. № 230. С. 107–109.
92. Локощенко А. М. Методы моделирования длительной прочности металлов при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях // Упругость и неупругость: Матер. междуна. научн. симпоз., посвящ. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (20–21.01.2011, Москва). М.: Моск. ун-т, 2011. С. 389–393.
93. Локощенко А. М., Назаров В. В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двусосном растяжении // Авиац.-косм. техн. и технол., 2005. № 10. С. 73–78.
94. Локощенко А. М., Назаров В. В. Анализ длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии с помощью критериального и кинетического подходов // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. 3 (Нижегород, 22–28.08.2006): Нижегород. гос. ун-т. 2006. С. 135–136.
95. Локощенко А. М., Назаров В. В. Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // ПМТФ. 2009. № 4. С. 150–157.
96. Lokoshchenko A. M., Platonov D. O. Creep rupture of anisotropic tubes under complex stress state // Proc. of the 7th Int. Conf. "Biaxial/Multiaxial Fatigue and fracture", Berlin, June 28 – July 1, 2004. Berlin: DVM. 2004. P. 567–571.
97. Дачева М. Д., Шестериков С. А., Юмашева М. А. Поврежденность при сложном нестационарном напряженном состоянии // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 44–47.
98. Петреня Ю. К., Чижик А. А. Разрушение вследствие ползучести и механизмы микроразрушения // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 6. С. 1331–1333.
99. Морачковский О. К. К вопросу о разрушении при ползучести анизотропных материалов // Пробл. машиностр., 1978. № 6. С. 41–43.
100. Chrzanowski M., Madej J. Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzenia // Mech. Teor. Stosow., 1980. V. 18. № 4. P. 587–601. (in Polish)
101. Хажинский Г. М. Деформирование и длительная прочность металлов. М.: Научный мир, 2008. 136 с.
102. Hayhurst D. R., Trąmpczyński W., Leckie F. A. Creep rupture under non-proportional loading // Acta Metall. 1980. V. 28. № 9. P. 1171–1183.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(80\)90072-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(80)90072-3)
103. Локощенко А. М. Применение векторного параметра поврежденности при моделировании длительной прочности металлов // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 93–99.
104. Локощенко А. М. Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии // ПММ. 2018. Т. 82. № 1. С. 84–97.
105. Murakami S., Sanomura I., Saitoh K. Formulation of cross-hardening in creep and its effects on the creep damage process of copper // J. Eng. Mater. Technol. 1986. V. 108, № 2. P. 167–173.
<https://doi.org/10.1115/1.3225856>
106. Rabotnov Y. N. Creep rupture // in: Applied Mechanics. IUTAM / Ed. by Hetényi M., Vincenti W. G., Heidelberg: Springer, P. 342–349.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2_26
107. Johnson A. E., Khan B. Creep under changing complex-stress systems in copper at 250 °C // Int. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 12. P. 791–810.
[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(65\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(65)90033-0)
108. Johnson A. E. Complex stress creep of metals // Int. Met. Rev., 1985. V. 30. № 1. P. 447–506.
<https://doi.org/10.1179/mftr.1960.5.1.447>
109. Тамуж В. П. Об одной возможности построения теории длительного разрушения // Пробл. прочн. 1971. № 2. С. 59–64.
110. Тамуж В. П., Лагздыньш А. Ж. Вариант построения феноменологической теории разрушения // Мех. полим. 1968. № 4. С. 638–647.
111. Лагздыньш А. Ж., Тамуж В. П. К построению феноменологической теории разрушения анизотропной среды // Мех. полим. 1971. № 4. С. 634–644.
112. Altenbach H., Schießle P. Modelling of the constitutive behavior of damaged materials // in: Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selec. Pap. 8th Int. Conf. Fract. Kyiv, June 8–14, 1993. Oxford: Pergamon, 1994. P. 51–57.
113. Altenbach H., Schießle P., Zolochovsky A. A. Zum Kriechen isotroper Werkstoffe mit komplizierten Eigenschaften // Rheologica Acta. 1991. V. 30(4). P. 388–399.

<https://doi.org/10.1007/BF00404197>

114. *Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K.* Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges // *Acta Mech.* 2008. V. 195 (1–4). P. 263–274.
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5>
115. *Naumenko K., Kutschke A., Kostenko Y., Rudolf T.* Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9–12% Cr steels at high temperature // *Engng. Fract. Mech.* V. 78. 2011. P. 1657–1668.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.002>
116. *Altenbach H., Huang C., Naumenko K.* Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // *J. Strain Anal. for Engng. Design.* 2002. V. 37. P. 265–275.
<https://doi.org/10.1243/0309324021515023>
117. *Naumenko K., Altenbach H.* A phenomenological model for anisotropic creep in a multipass weld metal // *Arch. Appl. Mech.* 2005. V. 74. P. 808–819.
<https://doi.org/10.1007/s00419-005-0409-2>
118. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности // *Инж. ж. Механ. тверд. тела.* 1967. № 3. С. 21–35.
119. *Завойчинская Э. Б., Куйко И. А.* Введение в теорию процессов разрушения твердых тел. М.: МГУ, 2004. 168 с.
120. *Победря Б. Е.* О моделях повреждаемости реономных сред // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 4. С. 128–148.
121. *Копнов В. А.* Длительная прочность анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии // *Пробл. прочн.* 1982. № 2. С. 40–44.
122. *Михалевич В. М.* Тензорні моделі накопичання пошкоджень. Вінниця: Універсум-Вінниця, 1998. 195 с. <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/13977>
123. *Михалевич В. М.* Тензорные модели длительной прочности. Сообщ. 3. Критериальные зависимости при нагружении с изменением напряженного состояния и направлений главных напряжений // *Пробл. прочн.* 1996. № 3. С. 101–112.
124. *Лебедев А. О., Михалевич В. М.* До теорії тривалої міцності // *Доп. НАНУ.* 1998. № 5. С. 57–62.
125. *Лебедев А. А., Михалевич В. М.* Критериальные соотношения для определения остаточного ресурса материалов // *Пробл. прочн.* 2006. № 4. С. 31–38.
126. *Betten J.* Net-stress analysis in creep mechanics // *Ing. Arch.* 1982. V. 52. № 6. P. 405–419.
<https://doi.org/10.1007/BF00536211>
127. *Betten J.* Damage tensors in continuum mechanics // *J. Mec. Theor. Appl.* 1983. V. 2. № 1. P. 13–22.
128. *Bodner S.R.* A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials // in: *Physical Non-Linearities in Structural Analysis.* IUTAM / Ed. by *Hult J., Lemaitre J.* Heidelberg: Springer, 1981. P. 21–28.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_4
129. *Liu Y., Kageyama Y., Murakami S.* Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity // *Int. J. Mech. Sci.* 1998. V. 40. № 2–3. P. 147–158.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00045-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00045-3)
130. *Murakami S., Imaizumi T.* Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Mec. Theor. Appl.* 1982. V. 1. № 5. P. 743–761.
131. *Астафьев В. И.* Описание процесса разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1986. № 4. С. 164–169.
132. *Krajcinovic D.* Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. № 4. P. 829–834.
<https://doi.org/10.1115/1.3169154>
133. *Krajcinovic D., Rinaldi A.* Statistical damage mechanics—Part I: Theory // *J. Appl. Mech.* 2005. V. 72. № 1. P. 76–85.
<https://doi.org/10.1115/1.1825434>
134. *Krajcinovic D., Selvaraj S.* Creep rupture of metals—An analytical model // *J. Eng. Mater. Techn.* 1984. V. 106. № 4. P. 405–409.
<https://doi.org/10.1115/1.3225738>
135. *Маньковский В. А.* Критерии поврежденности и длительной прочности конструкционных материалов // *Машиновед.* 1985. № 1. С. 87–94.

136. *Delobelle P., Trivaudey F., Oytana C.* High temperature creep damage under biaxial loading: INCO 718 and 316 (17–12 SPH) steels // Nucl. Eng. Des., 1989. V. 114. № 3. P. 365–377.
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90114-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90114-3)
137. *Lemaître J.* A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits // Mech. Behav. Mater.: Proc. of the 4th Int. Conf. Stockholm, Sweden, August 15–19, 1983. Oxford: Pergamon, 1984. P. 1047–1053.
<https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-8372-2.50132-9>
138. Локощенко А. М. Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 4. С. 149–164.
139. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Терауд В. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 2. С. 275–318.
140. Агахи К. А., Георгиевский Д. В. Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // Изв. Тульск. гос. ун-та. Естеств. науки. 2013. № 2. С. 2–9.
141. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
142. Леонов М. Я. Основы механики упругого тела. Фрунзе: Изд-во АН Киргизской ССР, 1963. 328 с.
143. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
144. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. мех. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
145. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
146. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
147. Журков С. Н., Куксенко В. С., Слуцкер А. И. Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой // Физика твердого тела. 1969. Т. 11. Вып. 1. С. 296–302.
148. Журков С. Н., Куксенко В. С., Слуцкер А. И. Микромеханика разрушения полимеров // Пробл. прочн.. 1971. № 2. С. 45–50.
149. Зобнин А. И. Распространение трещин в полимерном материале // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 53–56.
150. Журков С. Н., Куксенко В. С., Петров В. А., Савельев В. Н., Султанов У. О прогнозировании разрушения горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 6. С. 11–18.
151. Borodich F. M. Self-similar models and size effect of multiple fracture // Fractals. 2001. V. 9 (1). P. 17–30.
152. Manoylov A. V., Borodich F. M., Evans H. P. Modelling of elastic properties of sintered porous materials // Proc. R. Soc. A. 2013. V. 469. Iss. 2154. Art. No. 20120689.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0689>
153. Lomakin E., Fedulov B., Fedorenko A. Strain rate influence on hardening and damage characteristics of composite materials // Acta Mech. 2021. V. 232. P. 1875–1887.
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02806-4>
154. Fedulov B., Fedorenko A., Safonov A., Lomakin E. Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions // Acta Mech. 2017. V. 228. P. 2033–2040.
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1817-4>
155. Almuramady N., Borodich F. M., Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // Tribol. Int. 2019. V. 129. P. 202–213.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.07.049>
156. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Модель усталостного разрушения поверхностей // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 3. С. 1–11.
157. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Kluwer. 1998. V. 61. 346 p.
<https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>
158. Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. V. 268 (11). P. 1417–1422.

159. *Торская Е. В.* Моделирование усталостного изнашивания тел с покрытиями при фрикционном нагружении // Физич. мезомех. 2016. Т. 19 (1). С. 68–74.
160. *Goryacheva I. G., Torskaya E. V.* Stress and fracture analysis in periodic contact problem for coated bodies // *Fatig.&Fract. Engng. Mater.&Struct.* 2003. V. 26. № 4. P. 343–348.

Development of the Damage Concept in Mechanics of Materials

R. R. Saitova^{a, #}, F. M. Borodich^{b, ##}, A. R. Arutyunyan^{a, ###}

^a*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

^b*Chongqing University, Chongqing, China*

[#]*e-mail: rigastr@yandex.ru*

^{##}*e-mail: borodichfm@cqu.edu.cn*

^{###}*e-mail: a.arutyunyan@spbu.ru*

The review highlights the current state of research in the field of continuum fracture mechanics and dispersed fracture mechanics, including the main approaches to problem formulation, specific results and areas of their practical use. The article is aimed at specialists in creep, long-term strength and fracture mechanics, and may also be of interest to researchers in the field of issues of strength and fracture of materials and structures at high temperatures.

Keywords: creep, long-term strength, damage, fracture mechanics, damage parameter, continuity parameter

REFERENCES

1. *Rabotnov Y. N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
2. *Rabotnov Y. N.* Introduction to Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1987. 80 p. (in Russian)
3. *Rabotnov Y. N.* Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (in Russian)
4. *Rabotnov Y. N.* On the mechanism of long-term fracture // in: Questions of the Strength of Materials and Structures. Moscow: Acad. Sci. Pub., 1959. pp. 5–7. (in Russian)
5. *Kachanov L. M.* On the fracture time under creep conditions // *Izv. AN SSSR. Dep. Tech. Sci.*, 1958, no. 8. pp. 26–31. (in Russian)
6. *Rabotnov Y. N.* Deformable Solid Mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 743 p. (in Russian)
7. *Kachanov L. M.* Fundamentals of the Theory of Plasticity. Moscow: Nauka, 1969. 420 p. (in Russian)
8. *Krajcinovic D.* Damage Mechanics. Elsevier, 1996. T. 41.
9. *Lemaitre J., Desmorat R.* Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, 2005.
10. *Voyiadjis G.* Handbook of Damage Mechanics: Nano to Macro Scale for Materials and Structures. Springer, 2015. 1635 p.
11. *Rabotnov Y. N.* On fracture due to creep // *App. Mech.&Tech. Phys.*, 1963, no. 2. pp. 113–123. (in Russian)
12. *Lemaitre J., Chaboche J.-L.* Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement // *J. Méc. Appl.*, 1978, vol. 2, no. 3, pp. 317–365.
13. *Krajcinovic D., Fonseka G. U.* The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part 1: General Theory // *J. Appl. Mech.*, 1981, vol. 48 (4), pp. 809–815.
<https://doi.org/10.1115/1.3157739>
14. *Leckie F.A., Onat E. T.* Tensorial nature of damage measuring internal variables // in: Physical Non-Linearities in Structural Analysis. IUTAM / Ed. by *Hult J., Lemaitre J.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. pp. 140–155.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_20
15. *Chow C.L., Wang J.* An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture // *Eng. Fract. Mech.*, 1987, vol. 27, no. 5, pp. 547–558.
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90108-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90108-1)

16. *Hao L., Ke P., June W.* An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates // *Engng. Fract. Mech.*, 1985, vol. 21, no. 5, pp. 1031–1054.
17. *Murakami S.* Mechanical modeling of material damage // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, no. 2, pp. 280–286.
<https://doi.org/10.1115/1.3173673>
18. *Murakami S., Kamiya K.* Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics // *Int. J. Mech. Sci.*, 1997, vol. 39, no. 4, pp. 473–486.
19. *Murakami S., Ohno N.* A continuum theory of creep and creep damage // in: *Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, 1981. pp. 422–444.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_28
20. *Najar J.* Continuous damage of brittle solids // in: *Cont. Damage Mech. Theory&Appl.* Vienna: Springer, 1987. pp. 233–294.
21. *Hutchinson J. W.* Linking scales in fracture mechanics // *Adv. in Fract. Res.*, 1997, vol. 1. pp. 1–14.
22. *Pardoen T., Hutchinson J. W.* An extended model for void growth and coalescence // *J. Mech.&Phys. of Solids*, 2000, vol. 48, no. 12, pp. 2467–2512.
23. *Hult J.* Continuum damage mechanics-capabilities, limitations and promises // *Mech. Deform.&Fract.*, 1979, pp. 233–347.
24. *Lemaitre J.* *A Course on Damage Mechanics.* Springer Sci.&Business Media, 2012.
25. *Cocks A.C.F., Leckie F.A.* Creep constitutive equations for damaged materials // *Adv. in Appl. Mech.*, 1987, vol. 25, pp. 239–294.
26. *Leckie F.A., Murrell S.A.F.* The constitutive equations of continuum creep damage mechanics // *Phil. Trans. Roy. Soc. London A: Math., Phys.&Engng. Sci.*, 1978, vol. 288, no. 1350, pp. 27–47.
27. *Evans A.G., Wilshaw T. R.* Quasi-static solid particle damage in brittle solids. I. Observations analysis and implications // *Acta Metall.*, 1976, vol. 24, no. 10, pp. 939–956.
28. *Betekhtin V.I.* Porosity of solids // *Trans. St.-Petersburg Acad. Sci. for Strength Probl.*, 1997, vol. 1, pp. 202–210.
29. *Lokoshchenko A. M.* *Creep and Long-Term Strength of Metals.* Moscow: Fizmatlit, 2015. 506 p. (in Russian)
30. *Ratcliffe R. T., Greenwood G. W.* Mechanism of cavitation in magnesium during creep // *Phil. Mag.*, 1965, vol. 12, pp. 59–69.
31. *Arutyunyan R. A.* The problem of strain aging and long-term fracture in the mechanics of materials. St. Petersburg: St. Petersburg State Univ. Pub., 2004. 252 p. (in Russian)
32. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // *Mech. of Solids*, 2015, vol. 50, iss. 2, pp. 191–197.
33. *Novozhilov V. V.* On plastic loosening // *Appl. Math.&Mech.*, 1965, no. 4, pp. 681–689. (in Russian)
34. *Sosnin O. V.* On a variant of the theory of creep with energy parameters of hardening // in: *Mechanics of Deformable Bodies and Structures.* Moscow: Mashinostroenie, 1975. pp. 460–463. (in Russian)
35. *Sosnin O.V., Gorev B. V., Nikitenko A. F.* Energy Variant of the Theory of Creep. Novosibirsk: Lavrentiev Hydrodyne. Inst., 1986. 96 p. (in Russian)
36. *Sosnin O.V., Lyubashevskaya I. V., Novoselya I. V.* Comparative estimation of high-temperature creep and fracture of structural materials // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 123–130. (in Russian)
37. *Sosnin O. V.* Energy variant of the theory of creep and long-term strength. Creep and fracture of non-hardening materials. Message 1 // *Problemi Prochnosti*, 1973, no. 5, pp. 45–49. (in Russian)
38. *Sosnin O.V., Gorev B. V., Nikitenko A. F.* On the substantiation of the energy version of the theory of creep // *Probl. Strength*, 1976, no. 11, pp. 3–8. (in Russian)
39. *Pavlov P.A., Nedelko E. Y.* Experimental determination of the work of irreversible deformation during the fracture of some metals // *Izv. vuzov. Constr.&Arch.*, 1981, no. 9, pp. 55–58. (in Russian)
40. *Zolochevsky A. A.* Energy variant of the theory of creep and long-term strength of materials that resist tension and compression differently // *Izv. vuzov. Engng.*, 1986, no. 12, pp. 7–10. (in Russian)
41. *Kulagin D.A., Lokoshchenko A. M.* Modeling the influence of an aggressive environment on the creep and long-term strength of metals under a complex stress state // *Izv. RAN. MTT*, 2004, no. 1, pp. 188–199. (in Russian)
42. *Leckie F.A., Hayhurst D. R.* Creep rupture of structures // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1974, vol. 340, no. 1622, pp. 323–347.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0155>

43. *Leckie F.A., Wojewodzki W.* Estimates of rupture life-constant load // *Int. J. Solids Struct.*, 1975, vol. 11, no. 12, pp. 1357–1365.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90063-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90063-3)
44. *Leckie F.A., Hayhurst D.R.* Constitutive equations for creep rupture // *Acta Metall.*, 1977, vol. 25, no. 9, pp. 1059–1070.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(77\)90135-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90135-3)
45. *Xu Q., Hayhurst D.R.* The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550 °C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2003, vol. 80, no. 10, pp. 689–694.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2003.08.00546>
46. *Kowalewski Z.L., Lin J., Hayhurst D.R.* Investigation of a high accuracy uniaxial creep testpiece with slit extensometer ridges // *Arch. Mech.*, 1995, vol. 47, no. 2, pp. 261–279.
47. *Rzhanitsyn A.R.* Theory of long-term strength under arbitrary uniaxial and biaxial loading // *Stroit. Mekh. & Calc. Constr.*, 1975, no. 4, pp. 25–29. (in Russian)
48. *Lemaître J., Sermage J.P.* One damage law for different mechanisms // *Comput. Mech.*, 1997, vol. 20, no. 1–2, pp. 84–88.
<https://doi.org/10.1007/s004660050221>
49. *Shesterikov S.A., Lebedev S. Yu., Yumasheva M.A.* New functional relations for describing the processes of creep and long-term strength // *Proc. IX Conf. on Strength and Plasticity. Vol. 3 (22.01–26.01.1996, Moscow)*. Moscow: IPM RAN, 1996. pp. 130–134. (in Russian)
50. *Chrzanowski M., Madej J.* Isochronous creep rupture curves in plane stress // *Mech. Res. Commun.*, 1980, vol. 7, no. 1, pp. 39–40.
[https://doi.org/10.1016/0093-6413\(80\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0093-6413(80)90023-3)
51. *Murakami S., Mizuno M.* A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress // *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, no. 19, pp. 2319–2328.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90218-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90218-1)
52. *Dyson B.F., Taplin D.* Creep damage accumulation // *Grain Bound. Inst. Met. Spring. Resident. Conf.*, 1976, Ser. 3, no. 5, pp. E/23–E/28.
53. *Dyson B.F., Loveday M.S.* Creep fracture in Nimonic 80A under triaxial tensile stressing // in: *Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, 1981. pp. 406–421.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_27
54. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading. Pt. I: Experiments // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 442–449.
<https://doi.org/10.1115/1.2903355>
55. *Tvergaard V.* On the stress state dependence of creep rupture // *Acta Metall.*, 1986, vol. 34, no. 2, pp. 243–256.
[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(86\)90195-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(86)90195-1)
56. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading. Pt. II: Model and simulations // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 450–455.
<https://doi.org/10.1115/1.2903356>
57. *Trąpczyński W., Hayhurst D.R.* Creep deformation and rupture under non-proportional loading // in: *Creep in Structures. IUTAM / Ed. by Ponter A. R.S., Hayhurst D. R.* Heidelberg: Springer, pp. 388–405.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81598-0_26
58. *Getsov L.B.* Kinetic equations of failure in complex programs of cyclic loading // in: *Strength of Materials. Springer Nature*, 1978. Vol. 10, Iss. 7, pp. 767–775.
<https://doi.org/10.1007/BF01521098>
59. *Maruyama T., Nosaka T.* Estimation of creep damage from observation of creep voids in centrifugal cast tube alloys // *J. Soc. Mater. Sci. (Jap.)*, 1979, vol. 28, no. 308, pp. 372–378.
<https://doi.org/10.2472/jsms.28.372>
60. *Nigmatullin R.I., Kholin N.N.* Dislocation kinetics of superplasticity and creep of metals // *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1976, vol. 231, no. 2, pp. 303–306. (in Russian)
61. *Estrin Y., Mecking H.* A unified phenomenological description of work hardening and creep based one-parameter models // *Acta met.*, 1984, vol. 32, no. 1, pp. 57–70.

62. *Lokoshchenko A. M.* The investigation of the metal damage at the creep by the method of electrical resistance measuring // *Acta Mech. Sinica*, vol. 7, iss. 2, 1991, pp. 157–161.
63. *Lokoshchenko A. M.* A new method for measuring creep damage in metals // *Mech. Solids*, vol. 40, iss. 5, 2005, pp. 82–92.
64. *Perry A. J.* Review cavitation in creep // *J. Mater. Sci.*, 1974, vol. 9, pp. 1016–1039.
65. *Grant N.* Fracture under conditions of high-temperature creep // in: *Destruction*. Vol. 3. Moscow: Mir, 1976. pp. 538–578. (in Russian)
66. *Berezina T.G., Trunin I. I.* Interaction of the maximum allowable creep strain with damage for the material of steam pipelines // *Metal Sci.&Thermal Proces. Metals*, 1980, no. 12, pp. 34–37. (in Russian)
67. *Horiguhi M., Kawasaki T.* Creep rupture of stainless steels at high temperatures // *J. Jap. Soc. Strength&Fract. Mat.*, 1977, vol. 12, no. 1, pp. 34–43. (in Japan)
68. *Riedel H.* The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // *Creep in Struct. Proc. 3rd IUTAM Symp., Leicester, 1980*. Berlin: 1981. pp. 504–515.
69. *Lokoshchenko A. M.* Investigation of material damage during creep and long-term strength // *Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1982, no. 6, pp. 129–133. (in Russian)
70. *Rosenberg V.M., Shalimova A. V., Zvereva T. S.* Influence of temperature and stresses on the formation of pores during creep // *Phys. Metals&Metall.*, 1968, vol. 25, iss. 2, pp. 326–332. (in Russian)
71. *Cane B. J.* Deformation induced intergranular creep cavitation in alpha-iron // *Metal. Sci.*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 102–108.
72. *Goykhenberg Y.N., Berezina T. T., Ashikhmina L. A., Erager S. I., Shcherbakova A. F.* Investigation of the fracture of heat-resistant steels in the process of creep // *Coll. Sci. Works of Chelyabinsk Polytech. Inst.*, 1979, vol. 89, no. 229, pp. 72–77. (in Russian)
73. *Betekhtin V.I., Kadomtsev A. G., Petrov A. I.* Features of microfracture of metals during high-temperature creep // *Metal Sci.&Therm. Proc. Metals*, 1980, no. 12, pp. 24–26. (in Russian)
74. *Arutyunyan R. A.* On the criteria of fracture under creep conditions // *Strength Probl.*, 1982, no. 9, pp. 42–45. (in Russian)
75. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // *Solid State Mech.*, 2015, no. 2, pp. 96–104. (in Russian)
76. *Kumanin V.I., Trunin I. I., Bogomolnaya R. B.* Study of the process of damage accumulation under conditions of high-temperature creep // *Nauch. Tr. VZMI*, 1973, vol. 1, pp. 55–65. (in Russian)
77. *Belloni G., Bernasconi G.* Creep damage models // *Creep Eng. Mater.&Struct., Proc. Sem. Ispra (Varese)*, 1979. pp. 195–227.
78. *Borvina L. R.* *Destruction: Kinetics, Mechanisms, General Rules*. Moscow: Nauka, 2008. 334 p. (in Russian)
79. *Chadek J.* *Creep of Metallic Materials*. Moscow: Mir, 1987. 302 p. (in Russian)
80. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R. A., Saitova R. R.* The criterion of high-temperature creep of metals based on relative changes of density // *WSEAS Trans. on Appl.&Theor. Mech.*, 2019, vol. 14, pp. 140–144.
81. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R. A., Saitova R. R.* High-temperature creep and damage of metallic materials // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, vol. 1474, iss. 1, art. no. 012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012005>
82. *Arutyunyan A.R., Arutyunyan R. A., Saitova R. R.* The definition of damage parameter changes from the experimental high-temperature creep curves // *Lect. Notes in Mech. Engng.*, 2020. pp. 53–59. https://doi.org/10.1007/978-3-030-49882-5_5
83. *Arutyunyan A.R., Saitova R. R.* Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2022, vol. 2231, iss. 1. art. no. 012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012001>
84. *Arutyunyan A.R., Saitova R. R.* Exact and approximate solutions of the modified system of inter-related kinetic equations for damage parameter and creep deformation // *Lect. Notes in Mech. Engng.*, 2023, pp. 196–201.
85. *Kachanov L. M.* *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Moscow: Nauka, 1974. 312 p. (in Russian)
86. *Kachanov L. M.* On the issue of brittle fractures under creep conditions under complex loading // *Vestn. Leningrad. Univ.*, 1972, no. 1, pp. 92–96. (in Russian)

87. *Kachanov L. M.* Fracture under creep conditions under complex loading // *Izv. Acad. Sci. USSR. MTT*, 1972, no. 5, pp. 11–15. (in Russian)
88. *Namestnikova I. V., Shesterikov S. A.* Vector representation of the damage parameter // *Deform.&Destr. Solids. Coll. Works Inst. of Mech. Lomonosov Moscow State Univ. Moscow: Moscow Univ. Pub.*, 1985. pp. 43–52. (in Russian)
89. *Peleshko V. A.* Using the damage surface to describe creep and long-term strength under complex loading // *Izv. RAN. MTT*, 2003, no. 2, pp. 124–138. (in Russian)
90. *Chow C. L., Yang X. J., Chu E.* Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under non-proportional loading // *J. Eng. Mater. Technol.*, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 403–408. <https://doi.org/10.1115/1.1395575>
91. *Lokoshchenko A. M.* Investigation of long-term strength under complex stress state using the kinetic approach // *Tr. Centr. Kotloturb. Inst.*, 1986, no. 230, pp. 107–109. (in Russian)
92. *Lokoshchenko A. M.* Methods for modeling the long-term strength of metals in stationary and non-stationary complex stress states // in: *Elast.&Inelast. Mater. Int. Sci. Symp. Dedic. 100th Aniv. Birth of A. A. Ilyushin Jan. 20–21, 2011, Moscow: Moscow State Univ. Pub.*, 2011. pp. 389–393. (in Russian)
93. *Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V.* Kinetic approach to studying the long-term strength of metals under biaxial tension // *Aerosp. Enginng.&Techn.*, 2005, no. 10, pp. 73–78. (in Russian)
94. *Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V.* Analysis of the long-term strength of metals under a complex stress state using the criterion and kinetic approaches // *IX All-Russ. Congr. on Theor.&Appl. Mech. Nizhny Novgorod, August 22–28, 2006, Annot. Rep.*, vol. 3, 2006, pp. 135–136. (in Russian)
95. *Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V.* Long-term strength of metals under equiaxed plane stress state // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2009, no. 4, pp. 150–157. (in Russian)
96. *Lokoshchenko A. M., Platonov D. O.* Creep rupture of anisotropic tubes under complex stress state // *Proc. 7th Int. Conf. Biaxial/Multi-ax. Fatig.&Fract.*, Berlin, June 28 – July 1, 2004. Berlin: DVM, 2004. pp. 567–571.
97. *Dacheva M. D., Shesterikov S. A., Yumasheva M. A.* Damage under complex non-stationary stress state // *Izv. RAN. MTT*, 1998, no. 1, pp. 44–47. (in Russian)
98. *Petrenya Y. K., Chizhik A. A.* Fracture due to creep and mechanisms of microfracture // *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1987, vol. 297, no. 6, pp. 1331–1333. (in Russian)
99. *Morachkovsky O. K.* On creep fracture of anisotropic materials // *Probl. Engng.*, 1978, no. 6, pp. 41–43. (in Russian)
100. *Chrzanowski M., Madej J.* The construction of failure limit curves by means of a damage // *J. Theor. Appl. Mech.*, 1980, vol. 18, no. 4, pp. 587–601. (in Polish)
101. *Khazhinsky G. M.* Deformation and Long-Term Strength of Metals. Moscow: Sci. World, 2008. 136 p. (in Russian)
102. *Hayhurst D. R., Trzampczyński W., Leckie F. A.* Creep rupture under non-proportional loading // *Acta Metall.*, 1980, vol. 28, no. 9, pp. 1171–1183. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(80\)90072-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(80)90072-3)
103. *Lokoshchenko A. M.* Application of the damage vector parameter in modeling the long-term strength of metals // *Izv. RAN. MTT*, 2016, no. 3, pp. 93–99. (in Russian)
104. *Lokoshchenko A. M.* Modeling of the long-term strength of metals in a non-stationary complex stress state // *PMM*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 84–97. (in Russian)
105. *Murakami S., Sanomura I., Saitoh K.* Formulation of cross-hardening in creep and its effects on the creep damage process of copper // *J. Eng. Mater. Techn.*, 1986, vol. 108, no. 2, pp. 167–173. <https://doi.org/10.1115/1.3225856>
106. *Rabotnov Y. N.* Creep rupture // in: *Applied Mechanics. IUTAM / Ed. by Hetényi M., Vincenzi W. G.* Heidelberg: Springer, pp. 342–349. https://doi.org/10.1007/978-3-642-85640-2_26
107. *Johnson A. E., Khan B.* Creep under changing complex-stress systems in copper at 250 °C // *Int. J. Mech. Sci.*, 1965, vol. 7, no. 12, pp. 791–810. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(65\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(65)90033-0)
108. *Johnson A. E.* Complex stress creep of metals // *Int. Met. Rev.*, 1985, vol. 30, no. 1, pp. 447–506. <https://doi.org/10.1179/mlr.1960.5.1.447>
109. *Tamuzh V. P.* On a possibility of constructing a theory of long-term fracture // *Probl. Strength*, 1971, no. 2, pp. 59–64. (in Russian)

110. *Tamuzh V.P., Lagzdynsh A. Zh.* A variant of constructing a phenomenological theory of fracture // *Mech. Polym.*, 1968, no. 4, pp. 638–647. (in Russian)
111. *Lagzdynsh A. Zh., Tamuzh V.P.* On the construction of a phenomenological theory of fracture of an anisotropic medium // *Mech. Polym.*, 1971, no. 4, pp. 634–644. (in Russian)
112. *Altenbach H., Schieße P.* Modelling of the constitutive behavior of damaged materials // *Adv. in Fract. Resist.&Struct. Integr.: Select. Pap. 8th Int. Conf. Fract. June 8–14, 1993, Kyiv. Oxford: Pergamon, 1994.* pp. 51–57.
113. *Altenbach H., Schieße P., Zolochovsky A.A.* Zum Kriechen isotroper Werkstoffe mit komplizierten Eigenschaften // *Rheol. Acta*, 1991, vol. 30(4), pp. 388–399.
<https://doi.org/10.1007/BF00404197>
114. *Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K.* Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges // *Acta Mech.*, 2008, vol. 195, pp. 263–274.
<https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5>
115. *Naumenko K., Kutschke A., Kostenko Y., Rudolf T.* Multi-axial thermo-mechanical analysis of power plant components from 9–12% Cr steels at high temperature // *Engng. Fract. Mech.*, 2011, vol. 78, pp. 1657–1668.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.002>
116. *Altenbach H., Huang C., Naumenko K.* Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // *J. Strain Anal. for Engng. Design*, 2002, vol. 37, pp. 265–275.
<https://doi.org/10.1243/0309324021515023>
117. *Naumenko K., Altenbach H.* A phenomenological model for anisotropic creep in a multipass weld metal // *Arch. Appl. Mech.*, 2005, vol. 74, pp. 808–819.
<https://doi.org/10.1007/s00419-005-0409-2>
118. *Ilyushin A.A.* On a theory of long-term strength // *Eng. J. Mech. Solid Bodies*, 1967, no. 3, pp. 21–35. (in Russian)
119. *Zavoychinskaya E.B., Kiyko I.A.* Introduction to the Theory Fracture Processes of Solids. Moscow: Moscow State Univ. Pub., 2004. 168 p. (in Russian)
120. *Pobedrya B.E.* On damage models of rheonomic media // *Izv. RAN. MTT*, 1998, no. 4, pp. 128–148. (in Russian)
121. *Kopnov V.A.* Long-term strength of anisotropic materials under complex stress state // *Probl. Strength*, 1982, no. 2, pp. 40–44. (in Russian)
122. *Mikhalevich V.M.* Tensor Models of Damage Accumulation. Vinnytsia: Vinnytsia Univ. Pub., 1998. 195 p. (in Ukrainian) <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/13977>
123. *Mikhalevich V.M.* Tensor models of long-term strength. Message 3. Criteria dependences under loading with a change in the stress state and directions of principal stresses // *Probl. of Strength*, 1996, no. 3, pp. 101–112. (in Russian)
124. *Lebedev A.O., Mikhalevich V.M.* To the theory of long-term strength // *Add. NASU*, 1998, no. 5, pp. 57–62. (in Ukrainian)
125. *Lebedev A.A., Mikhalevich V.M.* Criteria relations for determining the residual resource of materials // *Probl. of Strength*, 2006, no. 4, pp. 31–38. (in Russian)
126. *Betten J.* Net-stress analysis in creep mechanics // *Ing. Arch.*, 1982, vol. 52, no. 6, pp. 405–419.
<https://doi.org/10.1007/BF00536211>
127. *Betten J.* Damage tensors in continuum mechanics // *J. Mech. Theor. Appl.*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–22.
128. *Bodner S.R.* A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials // in: *Physical Non-Linearities in Structural Analysis. IUTAM / Ed. by Hult J., Lemaitre J.* Heidelberg: Springer, 1981. pp. 21–28.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-81582-9_4
129. *Liu Y., Kageyama Y., Murakami S.* Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity // *Int. J. Mech. Sci.*, 1998, vol. 40, no. 2–3, pp. 147–158.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00045-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00045-3)
130. *Murakami S., Imaizumi T.* Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982, vol. 1, no. 5, pp. 743–761.
131. *Astafiev V.I.* Description of the fracture process under creep conditions // *Izv. Acad. Sci. USSR. MTT*, 1986, no. 4, pp. 164–169. (in Russian)

132. *Krajcinovic D.* Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.*, 1985, vol. 52, no. 4, pp. 829–834.
<https://doi.org/10.1115/1.3169154>
133. *Krajcinovic D., Rinaldi A.* Statistical damage mechanics. Pt. I: Theory // *J. Appl. Mech.*, 2005, vol. 72, no. 1, pp. 76–85.
<https://doi.org/10.1115/1.1825434>
134. *Krajcinovic D., Selvaraj S.* Creep rupture of metals. An analytical model // *J. Eng. Mater. Tech.*, 1984, vol. 106, no. 4, pp. 405–409.
<https://doi.org/10.1115/1.3225738>
135. *Mankovsky V.A.* Criteria for damage and long-term strength of structural materials // *Mashinovedenie*, 1985, no. 1, pp. 87–94. (in Russian)
136. *Delobelle P., Trivaudey F., Oytana C.* High temperature creep damage under biaxial loading: INCO 718 and 316 (17–12 SPH) steels // *Nucl. Eng. Des.*, 1989, vol. 114, no. 3, pp. 365–377.
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(89\)90114-3](https://doi.org/10.1016/0029-5493(89)90114-3)
137. *Lemaître J.* A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits // *Mech. Behav. Mater. Proc. 4th Int. Conf. Stockholm, Sweden, Aug. 15–19, 1983.* Oxford: Pergamon, 1984. pp. 1047–1053.
<https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-8372-2.50132-9>
138. *Lokoshchenko A.M.* Application of kinetic theory in the analysis of long-term high-temperature fracture of metals under conditions of a complex stress state (Review) // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 4, pp. 149–164. (in Russian)
139. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Teraud V.V., Basalov Yu.G., Agababyan V.S.* Creep and long-term strength of metals under non-stationary complex stress states (Review) // *Vestn. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.&Math. Sci.*, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318. (in Russian)
140. *Agakhi K.A., Georgievsky D.V.* Tensorial nonlinear constitutive relations of isotropic creep theory with tensor damage measure // *Izv. Tula State Univ. Natural Sci.*, 2013, no. 2, pp. 2–9. (in Russian)
141. *Neuber G.* Stress Concentration. Moscow; Leningrad: Gostekhteorizdat, 1947. (in Russian)
142. *Leonov M. Ya.* Fundamentals of Elastic Body Mechanics. Frunze: Acad. Sci. Kirghiz SSR Pub., 1963. 328 p. (in Russian)
143. *Novozhilov V.V.* On the necessary and sufficient criterion of brittle strength // *Appl. Math.&Mech.*, 1969, vol. 33, no. 2, pp. 212–222. (in Russian)
144. *Leonov M. Ya., Panasyuk V.V.* Development of the smallest cracks in a solid // *Appl. Mech.*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391–401. (in Russian)
145. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, pp. 100–104.
146. *Barenblatt G.I.* Mathematical theory of equilibrium cracks formed during brittle fracture // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 1961, no. 4, pp. 3–56. (in Russian)
147. *Zhurkov S.N., Kuksenko V.S., Slutsker A.I.* Formation of submicroscopic cracks in polymers under load // *Phys. Solid State*, 1969, vol. 11, iss. 1, pp. 296–302. (in Russian)
148. *Zhurkov S.N., Kuksenko V.S., Slutsker A.I.* Micromechanics of polymer fracture // *Journal Strength of Materials*. 1971. no. 2. pp. 45–50. (in Russian)
149. *Zobnin A.I.* Propagation of cracks in a polymer material // *Izv. Acad. Sci. USSR. MTT*, 1974, no. 1, pp. 53–56. (in Russian)
150. *Zhurkov S.N., Kuksenko V.S., Petrov V.A., Savelyev V.N., Sultanov U.* On predicting the destruction of rocks // *Izv. Acad. Sci. USSR. Phys. of the Earth*, 1977, no. 6, pp. 11–18. (in Russian)
151. *Borodich F.M.* Self-similar models and size effect of multiple fracture // *Fractals*, 2001, vol. 9 (1), pp. 17–30.
152. *Manoylov A.V., Borodich F.M., Evans H.P.* Modelling of elastic properties of sintered porous materials // *Proc. R. Soc. A*, 2013, vol. 469, iss. 2154, art. no. 20120689.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0689>
153. *Lomakin E., Fedulov B., Fedorenko A.* Strain rate influence on hardening and damage characteristics of composite materials // *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, pp. 1875–1887.
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02806-4>

154. *Fedulov B., Fedorenko A., Safonov A., Lomakin E.* Nonlinear shear behavior and failure of composite materials under plane stress conditions // *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, pp. 2033–2040.
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1817-4>
155. *Almuramady N., Borodich F. M., Goryacheva I. G., Torskaya E. V.* Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // *Tribol. Int.*, 2019, vol. 129, pp. 202–213.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.07.049>
156. *Goryacheva I. G., Chekina O. G.* Surface fatigue damage model // *Frict. & Wear*, 1990, vol. 11, no. 3, pp. 1–11. (in Russian)
157. *Goryacheva I. G.* Contact Mechanics in Tribology. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Kluwer, 1998. vol. 61. 346 p.
<https://doi.org/10.1007/978-94-015-9048-8>
158. *Goryacheva I. G., Torskaya E. V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half space in contact with periodic system of indenters // *Wear*, 2010, vol. 268 (11), pp. 1417–1422.
159. *Torskaya E. V.* Modeling of fatigue damage of coated bodies under frictional loading // *Phys. Meso-mech.*, 2016, vol. 19 (1), pp. 68–74. (in Russian)
160. *Goryacheva I. G., Torskaya E. V.* Stress and fracture analysis in periodic contact problem for coated bodies // *Fatig. & Fract. Engng. Mater. & Struct.*, 2003, vol. 26, no. 4, pp. 343–348.

УДК 539.3:534.26

РАССЕЯНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2024 г. Д. Ю. Ефимов^{1,*}

¹Тульский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята к публикации 20.04.2024

Получено аналитическое решение задачи дифракции плоской акустической волны на радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины. Цилиндрическая оболочка находится в акустическом полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. Граница полупространства является акустически жесткой или акустически мягкой поверхностью. Представлены результаты расчетов акустического поля в дальней зоне.

Ключевые слова: дифракция акустических волн, неоднородная упругая оболочка, плоская поверхность

DOI: 10.31857/S0032823524020096 EDN: XUEOPA

1. Введение. Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. С помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Рассеиватели, имеющие форму кругового цилиндра, представляют значительный практический интерес, так как хорошо аппроксимируют многие реальные объекты и элементы конструкций.

Задачи дифракции на сплошном упругом цилиндре бесконечной длины с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, расположенном в безграничном пространстве, исследовались в [1–3], при этом в качестве источников первичного волнового возмущения полагались плоская акустическая волна [1], бесконечно длинный линейный [2] и сферический [3] источники первичного акустического возмущения. При дифракции акустических волн на цилиндрическом рассеивателе в последнем возникают как стационарные (установившиеся) моды, так и распространяющиеся волновые моды, определяемые уравнениями Похгаммера-Кри. Возникающие при этом эффекты описаны в работах [4, 5].

Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В [6] было рассмотрено рассеяние наклонно падающей плоской акустической волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, расположенным вблизи идеальной поверхности. В [7] решалась задача дифракции сферических и цилиндрических акустических волн абсолютно жестким цилиндром, находящимся вблизи импедансной

границы. В [8, 9] с использованием интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа решалась задача дифракции звука однородным упругим цилиндром, находящимся вблизи границы упругого полупространства. При этом в [9] полагалось, что цилиндр имеет непрерывно-неоднородное покрытие.

В упомянутых выше работах полагалось, что цилиндрический рассеиватель имеет бесконечную длину. Дифракция акустических волн на телах цилиндрической формы конечной длины исследовалась гораздо в меньшей степени. Приближенное решение задачи дифракции плоской гармонической акустической волны на жестком цилиндре конечной длины было предложено в [10]. В [11, 12] получена формула для акустического давления поля, рассеянного абсолютно жестким конечным цилиндром, в дальней зоне. Дифракция акустических волн на тонкостенной цилиндрической оболочке исследовалась в [13], а акустическое рассеяние сплошным тонким упругим ограниченным стержнем изучено в [14]. В [15] в качестве рассеивателя рассматривался цилиндр с полусферическими законцовками, а решение задачи было получено с использованием метода Т-матриц. Работы [16–19] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской акустической волны упругой тонкостенной цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [16] получено приближенное аналитическое выражение для амплитуды рассеяния в дальней зоне поля с помощью интеграла Кирхгофа. В [17] исследованы особенности рассеяния в случае низких частот. В [18] для определения амплитуды обратного рассеяния применяется импеданс излучения ограниченной цилиндрической области. В [19] рассматривается итерационный метод решения задачи. В [20] изучено рассеяние плоской акустической волны конечным упругим сплошным цилиндром с неоднородным упругим покрытием. В каждой из перечисленных работ о дифракции звука на цилиндрическом теле конечной длины полагалось, что рассеиватель расположен в свободном безграничном пространстве.

В настоящей работе рассматривается задача установившихся колебаний при рассеянии наклонно падающей плоской акустической волны радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочкой конечной длины в присутствии идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) плоской поверхности.

2. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную изотропную упругую цилиндрическую оболочку конечной длины L . Оболочка имеет произвольную толщину. Ее внешний радиус — r_1 ($r_1 < L$), а внутренний — r_0 . Тело находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Плоская подстилающая поверхность Γ является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось оболочки параллельна плоскости Γ и отстоит от нее на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$. В системе координат x, y, z граница полупространства Γ определяется уравнением $y = -d$ (рис. 1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты r . Будем считать, что в полости цилиндрической оболочки — вакуум.

Пусть из внешнего пространства на оболочку падает плоская гармоническая акустическая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} .

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = \tilde{A}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t],$$

где \tilde{A}_0 — амплитуда волны, ω — круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор; $k_x = k \cos \varphi_0 \sin \theta_0$, $k_y = k \sin \varphi_0 \sin \theta_0$, $k_z = k \cos \theta_0$; $k = \omega / c$ — волновое число жидкости; θ_0, φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской акустической волны; $k = |\mathbf{k}|$, t — время. В дальней-

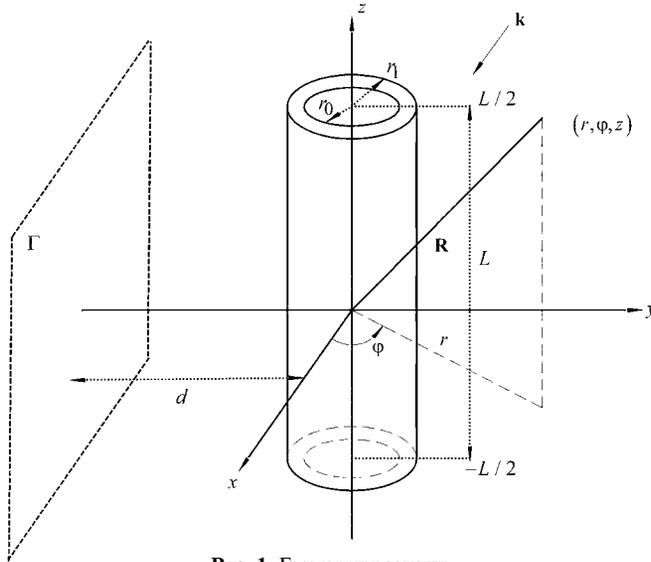


Рис. 1. Геометрия задачи.

шем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой в присутствии идеальной плоскости.

3. Аналитическое решение задачи. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [21]

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \tag{3.1}$$

где Ψ – потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1\omega\Psi$$

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2\rho u_r \\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} &= -\omega^2\rho u_\varphi \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} &= -\omega^2\rho u_z, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора смещения \mathbf{u} частиц неоднородного слоя; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Используя обобщенный закон Гука [22], соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \\
\sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \\
\sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi z} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Получим приближенное решение задачи, пренебрегая отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние цилиндрической оболочкой волны, образующейся при отражении падающей плоской волны от плоскости. Чтобы отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, можно было пренебречь, следует полагать, что $d \gg r_1$. В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_S, \tag{3.4}$$

где Ψ_1 – потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости Γ ; Ψ_S – потенциал скорости волн, рассеянных цилиндрической оболочкой при воздействии на нее волн с потенциалами Ψ_0 и Ψ_1 .

Потенциал Ψ_1 описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (3.1) и граничному условию на поверхности Γ , которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Psi_0 + \Psi_1) \Big|_{y=-d} = 0, \tag{3.5}$$

если плоскость Γ является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления

$$(\Psi_0 + \Psi_1) \Big|_{y=-d} = 0, \tag{3.6}$$

если плоскость Γ является акустически мягкой.

Потенциал Ψ_1 имеет вид

$$\Psi_1 = \tilde{A}_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R})], \tag{3.7}$$

где \tilde{A}_1 – амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = (k_{1x}, k_{1y}, k_{1z})$ – волновой вектор отраженной от плоскости волны; $k_{1x} = k \cos \varphi_1 \sin \theta_0$; $k_{1y} = k \sin \varphi_1 \sin \theta_0$; φ_1 – угол, образованный вектором \mathbf{k}_1 с положительным направлением оси x . Согласно закону Снеллиуса [23], $k_{1x} = k_x$, $k_{1z} = k_z$ и $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$.

Подставляя (3.7) в граничные условия (3.5) и (3.6), находим

$$\tilde{A}_1 = \pm \tilde{A}_0 \exp(i2k_y d),$$

где знаки «+» и «-» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающих поверхностей соответственно.

В цилиндрической системе координат падающая и отраженная плоские волны представляются разложением [24]

$$\Psi_j = \tilde{A}_j \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \varphi_j)]; \quad j = 0, 1, \tag{3.8}$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное оболочкой поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (3.9)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$. При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im} k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности [19] для потенциала Ψ_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (3.10)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

при $r = r_0$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (3.11)$$

Полагаем, что конечная упругая неоднородная оболочка шарнирно закреплена по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при $z = \pm L/2$ должны выполняться краевые условия [25]

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad M_z = 0, \quad N_z = 0, \quad (3.12)$$

что означает равенство нулю радиального смещения u_r , углового смещения u_φ , изгибающего момента в продольном направлении M_z и продольной силы N_z оболочки. При этом

$$M_z = \int_{r_0}^{r_1} \sigma_{zz} r dr, \quad N_z = \int_{r_0}^{r_1} \sigma_{zz} dr$$

Поэтому условия (3.12) сводятся к следующим краевым условиям при $z = \pm L/2$:

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (3.13)$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi) \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi) \\ u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $k_q = \pi q / L$. Выбор функций u_r, u_φ, u_z в виде (3.14) обеспечивает выполнение условий (3.13).

Подставляя разложения (3.14) в уравнения (3.2) с учетом (3.3), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r)$ для каждого n и q

$$\mathbf{A}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \mathbf{B}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \mathbf{C}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu)r^2, & a_{nq22} &= a_{nq33} = \mu r^2, & a_{nqpm} &= 0 \quad (p \neq m) \\ b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, & b_{nq12} &= b_{nq21} = in(\lambda + \mu)r \\ b_{nq13} &= -k_q(\lambda + \mu)r^2, & b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0 \\ b_{nq31} &= k_q(\lambda + \mu)r^2, & c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda \\ c_{nq12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2, & c_{nq21} &= in(\mu' r + \lambda + 3\mu) \\ c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu' r - n^2 \lambda - \mu(2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), & c_{nq23} &= -ink_q(\lambda + \mu)r \\ c_{nq31} &= k_q(\mu' r + \lambda + \mu)r, & c_{nq32} &= ink_q(\lambda + \mu)r \\ c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2 \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу. Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh$$

Используя формулу [26]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака $\delta(x)$, найдем преобразования Фурье по z потенциала падающей акустической волны Ψ_0 и отраженной от поверхности акустической волны Ψ_1 , определяемых (3.8)

$$\tilde{\Psi}_j(h) = \tilde{A}_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \varphi_j)] \delta(h - \alpha) \quad (3.16)$$

$$\Psi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_j(h) dh; \quad j = 0, 1$$

Учитывая то, что $u_r = 0$ при $|z| > L/2$, преобразование Фурье по z радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\tilde{u}_r(h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi) \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh, \\ g_q(h) &= (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[\frac{\sin k_q^{(+)} L}{k_q^{(+)}} - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)} L}{k_q^{(-)}} \right] \end{aligned}$$

$$k_q^{(+)} = (hL + \pi q) / 2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q) / 2$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ (первое условие (3.10)) с учетом (3.16), (3.17), принимая во внимание соотношение $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$, находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r_1)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \times \left[i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) \times (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0}) + i\omega \sum_{\sigma=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_\sigma(h) \right] \quad (3.18)$$

Подставим во второе граничное условие (3.10) выражения (3.8), (3.9) и (3.14), домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1))U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} \times [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n g_q(\alpha) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где
$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh$$

Подробный анализ последнего интеграла приведен в работе [20]. Из третьего и четвертого граничных условий (3.10) находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0 \\ k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из граничных условий (3.11) получим следующие краевые условия для системы (3.15):

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (3.21)$$

где $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} f_{nq11} &= \lambda(r) / r, \quad f_{nq12} = in\lambda(r) / r, \quad f_{nq13} = -\lambda(r)k_q, \quad f_{nq21} = in\mu(r) / r \\ f_{nq22} &= -\mu(r) / r, \quad f_{nq23} = f_{nq32} = f_{nq33} = 0, \quad f_{nq31} = k_q \mu(r) \end{aligned}$$

Построенная краевая задача (3.15), (3.19) – (3.21) может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя [27]

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (3.22)$$

где \mathbf{R}_2 – радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ – функция Грина для свободного пространства; Ω – боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$.

Применение формулы (3.22) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [24]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(\xi) d\xi, \quad (3.23)$$

где

$$\tilde{G}_o(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_m(\eta r) H_m(\eta r_2), & r < r_2 \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2 \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$$

Подставляя в (3.22) полное поле, определяемое выражением (3.4), с использованием (3.8), (3.9), (3.18), с учетом (3.23) и формулы [27]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha),$$

если α лежит внутри $[a, b]$, а также осуществляя интегрирование по переменной φ_2 с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала Ψ_S , рассеянного оболочкой

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (3.24)$$

где

$$W_{1n} = -\frac{i^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})}{H'_n(\beta r_1)}$$

$$W_{2n} = i^n \beta J'_n(\beta r_1) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \times \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \times J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} \times g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] \times g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение (3.24) удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, аналогично выражению (3.9), в интегралах

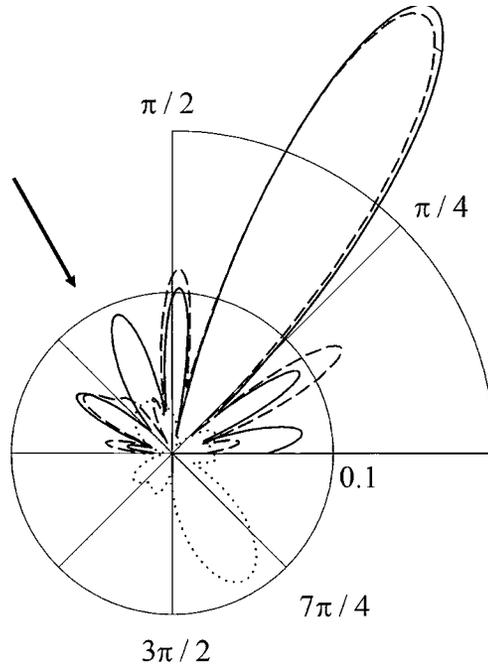


Рис. 2. Диаграммы направленности рассеянного поля, $kr_1 = 4$, $L / r_1 = 5$.

$I_{1n}, I_{2n}, I_{3nq}, I_{4nq}$ следует полагать $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Потенциал скорости полного рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_{S1} = \Psi_1 + \Psi_S, \tag{3.25}$$

где Ψ_S определяется выражением (3.24).

4. Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости безразмерной амплитуды рассеянного поля $|\Psi_{S1}(\varphi) / \tilde{A}_0|$ от угловой координаты φ и зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния $|\Psi_{S1}(\pi + \varphi_0) / \tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$. В этом случае интегралы из (3.24) принимают вид

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi \\ I_{2n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} I_{3nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} \times g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi \\ I_{4nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] \times g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi \end{aligned}$$

Полагалось, что толстостенная цилиндрическая оболочка из поливинилбутираля ($r_1 = 1$ м, $r_0 = 0.5$ м) располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Расстояние от оси цилиндра до границы полупространства оценивалось величиной $d / r_1 = 20$. Рассматривалась как однородная цилиндрическая оболочка с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ н/м², так и неоднородная, физические механические характеристики которой изменялись по закону

$$\lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad \rho = \rho^0 f(r)$$

$$f(r) = 0.75 \left[(r_1 - r)^2 / (r_1 - r_0)^2 + 1 \right]; \quad r_0 \leq r \leq r_1$$

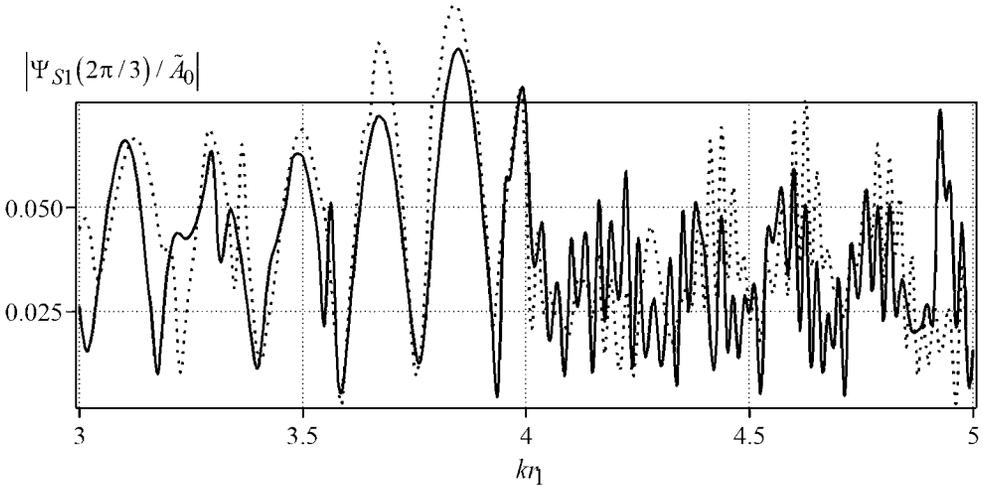


Рис. 3. Частотная зависимость коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L / r_1 = 5$.

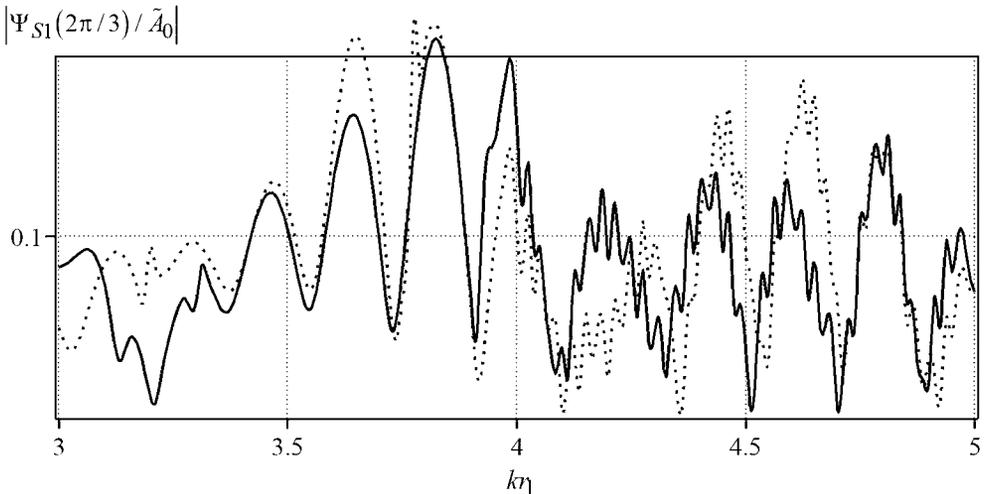


Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L / r_1 = 100$.

Полагалось, что плоская акустическая волна единичной амплитуды падает на цилиндрическую оболочку под углами падения $(\varphi_0, \theta_0) = (-\pi/3, \pi/2)$ для значений $L/r_1 = 5, 100$ и $r_* = 100$ м.

Решение краевой задачи (3.15), (3.19) – (3.21) получено методом сплайн-коллокации [28].

Суммирование в (3.25) проводилось в диапазоне от $-N$ до N по индексу n и от 1 до N по индексу q , где $N = 2[kr_1] + 1$ [·] – целая часть числа.

Интегралы (4.1) вычислялись по квадратурным формулам, построенным на параллелепипедальных сетках Коробова [29, 30]. При этом к несобственным интегралам I-го рода применялся прием обрезания бесконечных пределов [31].

На рис. 2 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля в случае неоднородной цилиндрической оболочки для значений $kr_1 = 4$, $L/r_1 = 5$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Сплошная линия соответствует случаю абсолютно жесткой поверхности, штриховая – акустически мягкой, пунктирная – оболочке, расположенной в свободном пространстве.

На рис. 3, 4 представлены частотные зависимости коэффициента обратного рассеяния звука $|\Psi_{S1}(2\pi/3)/\tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в интервале $3 \leq kr_1 \leq 5$ для значений $L/r_1 = 5, 100$. Поверхность полагалась абсолютно жесткой. Пунктирные линии соответствуют однородной цилиндрической оболочке, сплошные линии – неоднородной оболочке.

Заключение. На основе полученного аналитического решения задачи проведены численные расчеты, которые позволили выявить существенное влияние присутствия идеальной плоскости вблизи цилиндрического рассеивателя конечной длины на рассеянное поле. Показано, что неоднородность материала оболочки позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Л. А. Толоконникову за постоянное внимание и полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ, соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024, тема научного исследования “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 265–274.
2. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460–472.
3. Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сб. 2018. Т.19. Вып. 4. С. 215–226.
4. Кузнецов С.В., Ильяшенко А.В. Поляризация волн Похгаммера–Кри: аксиально симметричные продольные моды // Акуст. ж. 2018. Т. 64. № 6. С. 657–663.
5. Ильяшенко А.В. Продольные волны Похгаммера–Кри: аномальная поляризация // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 136–146.
6. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сб. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369–381.

7. *Wai Keung Lui, Kai Ming Li* The scattering of sound by a long cylinder above an impedance boundary // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2010. V. 127. № 2. P. 664–674.
8. *Шендеров Е.Л.* Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *Акуст. ж.* 2002. Т. 48. № 2. С. 266–276.
9. *Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю.* Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
10. *Williams W.E.* Diffraction by a cylinder of finite length // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1956. V. 52. № 2. P. 322–335.
11. *Косарев О.И.* Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // *Пробл. машин. и автомат.* 2015. № 4. С. 99–103.
12. *Косарев О.И.* Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // *Вестн. научно-техн. развития.* 2017. № 3. С. 30–37.
13. *Лямшев Л.М.* Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // *Докл. АН СССР.* 1957. Т. 115. № 2. С. 271–273.
14. *Лямшев Л.М.* Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // *Акуст. ж.* 1958. Т. 4. № 1. С. 51–58.
15. *Su J.-H., Varadan V.V., Varadan V.K., Flax L.* Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68. № 2. P. 686–691.
16. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // *Акуст. ж.* 1986. Т. 32. № 1. С. 129–131.
17. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // *Акуст. ж.* 1986. Т. 32. № 5. С. 699–701.
18. *Белогорцев А.С., Музыкаченко В.В.* Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // *Акуст. ж.* 1991. Т. 37. № 2. С. 228–234.
19. *Доценко И.Е., Музыкаченко В.В., Рыбак С.А.* Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // *Акуст. ж.* 1991. Т. 37. № 5. С. 922–932.
20. *Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю.* Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // *Матем. модел.* 2023. Т. 35. № 4. С. 3–23.
21. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
22. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
23. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
24. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
25. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
26. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
27. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
28. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
29. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
30. *Добровольский Н.Н., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А., Ларин Н.В.* О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // *Чебышевский сб.* 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368–382.
31. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.

Scattering of Acoustic Waves by an Inhomogeneous Elastic Cylindrical Shell of Finite Length in a Half-Space

D. Yu. Efimov^{a, #}

^a*Tula State University, Tula, Russia*

[#]*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

An analytical solution to the problem of diffraction of a plane acoustic wave on a radially inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length is obtained. The cylindrical shell is located in an acoustic half-space filled with an ideal liquid. The boundary of the half-space is an acoustically rigid or acoustically soft surface. The results of calculations of the acoustic field in the far zone are presented.

Keywords: sound diffraction, inhomogeneous elastic shell, flat surface

REFERENCES

1. Tolokonnikov L.A. Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, 2013, no. 2–2, pp. 265–274. (in Russian)
2. Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu. Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with a radially inhomogeneous coating // *Chebyshev. sb.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 460–472. (in Russian)
3. Tolokonnikov L.A. Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform coating // *Chebyshev. sb.*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 215–226. (in Russian)
4. Kuznetsov S.V., Ilyashenko A.V. Polarization of Pochhammer–Chree waves: axisymmetric longitudinal modes // *Acoust. Phys.*, 2018, vol. 64, no. 6, pp. 659–664.
5. Ilyashenko A.V. Pochhammer–Cree longitudinal waves: Anomalous polarization // *Mech. Solids*. 2019. vol. 54. pp. 598–606.
6. Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu. Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface // *Chebyshev. sb.*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 369–381. (in Russian)
7. Wai Keung Lui, Kai Ming Li The scattering of sound by a long cylinder above an impedance boundary // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2010, vol. 127, no. 2, pp. 664–674.
8. Shenderov E.L. Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace // *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 2, pp. 225–234.
9. Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu. Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1657–1667.
10. Williams W.E. Diffraction by a cylinder of finite length // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1956, vol. 52, no. 2, pp. 322–335.
11. Kosarev O.I. Secondary hydroacoustic field generated by a solid finite cylinder in the far field // *Probl. Mashinostr. Avtom.*, 2015, no. 4, pp. 99–103. (in Russian)
12. Kosarev O.I. Diffraction of sound by a hard cylinder of finite length in the far field // *Vestn. Nauchno-Tekh. Razvit.*, 2017, no. 3 (115), pp. 30–37. (in Russian)
13. Lyamshev L.M. Sound diffraction on a thin bounded elastic cylindrical shell // *Dokl. AN SSSR*, 1957, vol. 115, no. 2, pp. 271–273. (in Russian)
14. Lyamshev L.M. Sound scattering by a thin rod of finite length // *Akust. zh.*, 1958, vol. 4, no. 1, pp. 51–58. (in Russian)
15. Su J.-H., Varadan V.V., Varadan V.K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1980, vol. 68, no. 2, pp. 686–691.

16. *Muzychenko V.V., Rybak S.A.* Amplituda rezonansnogo rasseyaniya zvuka ogranichennoy tsilindricheskoy obolochkoy v zhidkosti // Akust. zh., 1986, vol. 32, no. 1, pp. 129–131. (in Russian)
17. *Muzychenko V.V., Rybak S.A.* Nekotoryye osobennosti rasseyaniya zvuka ogranichennymi tsilindricheskimi obolochkami // Akust. zh., 1986, vol. 32, no. 5, pp. 699–701. (in Russian)
18. *Belogortsev A.S., Muzychenko V.V.* Vliyaniye ogranichennosti tsilindricheskoy skorosti na velichinu obratnogo rasseyaniya // Akust. zh., 1991, vol. 37, no. 2, pp. 228–234. (in Russian)
19. *Dotsenko I.E., Muzychenko V.V., Rybak S.A.* Rasseyaniye zvuka na ogranichennoy tsilindricheskoy uprugoy obolochke s polusfericheskimi zaglushkami // Akust. zh., 1991, vol. 37, no. 5, pp. 922–932. (in Russian)
20. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu.* Scattering of sound waves by a finite length elastic cylinder with an inhomogeneous coating // Math. Models&Comput. Simul., 2023, vol. 15, no. 5, pp. 863–876.
21. *Shenderov E.L.* Wave Problems of Hydroacoustics. Leningrad: Sudostroenie, 1972. (in Russian)
22. *Nowacki W.* Teoria sprezystosci. Warszawa: PWN, 1973.
23. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973. 344 p. (in Russian)
24. *Ivanov E.A.* Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1968. 584 p. (in Russian)
25. *Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kruger S.* Plastiny i obolochki. Moscow: Nauka, 1966. 636 p. (in Russian)
26. *Kurant R.* Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1964. 830 p. (in Russian)
27. *Shenderov E.L.* Radiation and Scattering of Sound. Leningrad: Sudostroenie, 1989. 302 p. (in Russian)
28. *Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* Spline Function Methods. Moscow: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian)
29. *Korobov N.M.* Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis. Moscow: MTSNMO, 2004. 288 p. (in Russian)
30. *Dobrovol'skii N.N., Skobel'tsyn S.A., Tolokonnikov L.A., Larin N.V.* About application of number-theoretic grids in problems of acoustics // Chebyshev. sb., 2021, vol. 22, no. 3, pp. 368–382. (in Russian)
31. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Moscow: Fizmatgiz, 1978. 512 p. (in Russian)

УДК 539.374

БОЛЬШИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ КРУГОВОГО СДВИГА В ИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕМСЯ МАТЕРИАЛЕ

© 2024 г. Г. М. Севастьянов^{1,*}, А. С. Бегун^{1,**}, А. А. Буренин^{1,***}

¹Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: akela.86@mail.ru,

**e-mail: ustanova@iacp.dvo.ru,

***e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024 г.

После доработки 28.02.2024 г.

Принята к публикации 10.03.2024 г.

В исследовании получено аналитическое решение задачи об азимутальном сдвиге в полом круговом цилиндре, изотропном и несжимаемом, упругие свойства которого описываются моделью Муни – Ривлина, а пластические – моделью Треска с произвольным монотонным упрочнением. Как упругие, так и пластические деформации полагаются конечными. Приведены достаточные условия существования полученного решения.

Ключевые слова: пластичность, гиперупругость, круговой сдвиг, конечные деформации, изотропное упрочнение

DOI: 10.31857/S0032823524020108 EDN: XUAKYF

1. Введение. С целью составления математической модели деформирования, учитывающей необратимые изменения в геометрии тела, вводятся [1] понятия обратимых и необратимых деформаций, которые считаются составляющими полных деформаций в теле. Однако если полные деформации в любой момент процесса деформирования возможно измерить инструментально, то их составляющие опытно неизмеримы. При этом именно эти гипотетически введенные параметры, следуя формализму термодинамики, оказываются термодинамическими параметрами изотермического процесса деформирования и для них необходимо записать дифференциальные уравнения изменения (переноса) [2]. Для этого не возникает затруднений, когда деформации можно считать малыми, в случае же больших деформаций встречаются принципиальные трудности. Необратимыми деформациями могут выступать как деформации ползучести, так и пластические деформации, для которых формулируются соответствующие определяющие законы [3–5]. При этом в деформированном теле могут одновременно существовать области, где изменение необратимых деформаций подчинено разным определяющим законам [6, 7]. Длительную прочность и разрушение деформируемого тела часто связывают с вводимым дополнительным термодинамическим параметром состояния, который отвечает за эволюцию дефек-

тной структуры. Такой структурный параметр, следуя [3, 8], называют “поврежденностью”. Для него, также следуя термодинамическому формализму, записываются дифференциальные уравнения изменения, учитывающие в той или иной степени структурные изменения в теле. Такой подход продемонстрирован в пионерских работах Ю.Н. Работнова [8–10]; он остается значимым и развивается в настоящее время [11, 12]. Отметим достаточно полный обзор работ этого направления [13].

Касаясь путей развития теории пластичности, Ю.Н. Работнов замечает [14], что “гипотезы, лежащие в основе... теорий пластичности, носят формальный характер, а экспериментальные данные недостаточно ясны... и допускают различные истолкования”. Подобные суждения повторялись Ю.Н. Работновым неоднократно [15]. Доступной базой для них являлся обстоятельный обзор [16]. Классические условия текучести дополняются функциональными зависимостями от накопленной пластической деформации, коэффициенты таких зависимостей определяются исходя из специальных опытов; таким способом устанавливаются определяющие законы теории пластичности, учитывающие изотропное, трансляционное или комбинированное упрочнение [17–20]. Ю.Н. Работновым [14] подчеркивается важность наличия точных решений соответствующих опытам краевых задач, на основе которых можно сделать какой-то осмысленный выбор тех или иных функциональных зависимостей упрочнения.

В настоящей работе получено точное решение для одной из достаточно простых схем нагружения, которая может использоваться как самостоятельно, так и в составе синтетических тестов для конкретизации законов изотропного упрочнения, а именно для задачи о больших деформациях кругового сдвига (вискозиметрической деформации).

Одномерные сдвиговые деформации – круговой сдвиг (известный также как течение Куэтта в реологии жидкостей или деформация в цилиндрическом вискозиметре), кручение, антиплоский осесимметричный сдвиг – являются наиболее простыми для исследования в механике деформируемых тел. Для этих типов деформации были получены некоторые аналитические и численно-аналитические решения. Так, в рамках модели больших упруго-пластических деформаций [21], впервые были получены [22, 23] аналитические решения о вискозиметрическом течении в цилиндрическом слое; задача обобщена на случай учета ползучести материала до наступления пластического течения [24, 25]. Учитывается [26–28] производство тепла за счет необратимого деформирования. Проводились [26, 29–31] аналитические исследования кручения упругопластических материалов, в т.ч. для материалов с изотропным упрочнением.

Деформированное состояние, близкое к круговому сдвигу, реализуется в недавно предложенных схемах обработки материалов при высоком давлении [32–38]. Предложенное далее аналитическое решение может быть использовано для оценки напряженно-деформированного состояния при указанных схемах деформирования, с тем условием, что приложенное поле давления однородно и однородны механические свойства материала.

2. Постановка задачи. На рис. 1 представлена схема кругового сдвига в условиях плоской деформации. Полый цилиндр с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_1 деформирован так, что внешняя поверхность $r = r_1$ оказывается повернутой относительно оси симметрии на угол α^* . Внутренняя поверхность $r = r_0$ остается неподвижной. Для этого к внешней поверхности прикладывается крутящая нагрузка, которая создает на поверхности $r = r_1$ касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1}$ в цилиндрической системе координат, с продольной осью z , совпадающей с осью симметрии. То есть функция угла поворота материальных точек α удовлетворяет граничным условиям:

$$\alpha|_{r=r_1} = \alpha^*, \quad \alpha|_{r=r_0} = 0$$

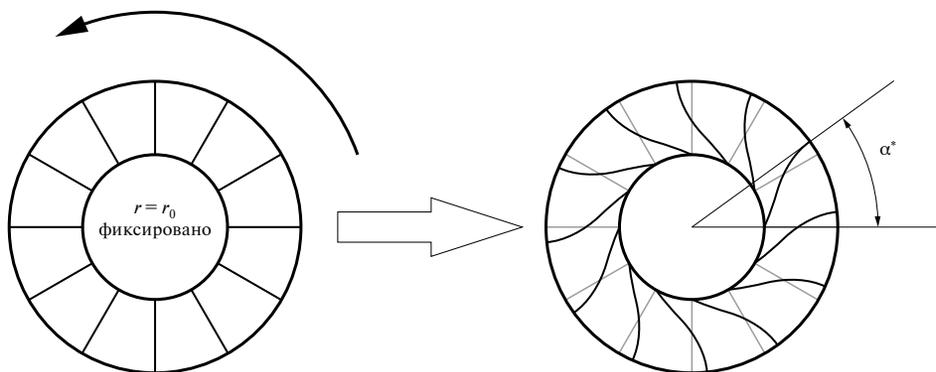


Рис. 1. Круговой сдвиг в условиях плоской деформации.

Целью исследования ставится задача определения следующих характеристик процесса:

- зависимость нагрузки $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1}$ от угла поворота α^* ;
- распределение пластической деформации в образце;
- искривление материальных волокон в деформированном образце в виде функции угла поворота α .

3. Модель материала. Кинематика конечных деформаций. Пусть положение точки сплошной среды в трехмерном пространстве в недеформированном состоянии описывается радиус-вектором $\mathbf{X} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3$, а в деформированном состоянии радиус-вектором $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Координатные системы с ортонормированными базами $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеют общее начало. Двухточечные тензоры \mathbf{F} (материальный градиент деформации) и \mathbf{F}^{-1} (пространственный градиент деформации) определяются как $\mathbf{F} = (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{x})^T$ и $\mathbf{F}^{-1} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{X})^T$. Здесь $\nabla_{\mathbf{x}}$ есть оператор Гамильтона в координатах деформированного состояния, $\nabla_{\mathbf{X}}$ – в исходных координатах. Для \mathbf{F} , как и для любого невырожденного тензора второго ранга, единственным образом может быть записано полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.

Здесь \mathbf{R} ортогональный тензор, представляющий вращение, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\det \mathbf{R} = 1$; симметричные тензоры \mathbf{U} и \mathbf{V} есть соответственно правый и левый тензоры растяжений. Далее будут использоваться симметричные эйлеровы тензоры деформаций: левый тензор Коши–Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$, а также тензор Фингера (или левый тензор Пиолы [39]) $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$.

3.1. Разделение полной деформации на обратимую и необратимую составляющие. Кинематика конечного упруго-пластического деформирования может быть построена на основе мультипликативного разложения тензора деформации Фингера $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$ на обратимую и необратимую составляющие [40,41]:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{c}^p (\mathbf{c}^e)^{1/2} \quad (3.1)$$

Здесь и далее индексом «e» обозначены упругие составляющие тензоров, индексом «p» – пластические составляющие, появление которых обусловлено диссипативным процессом пластического течения. Упругие составляющие тензоров деформации вводятся равенствами $\mathbf{V}^e = \mathbf{F}^e(\mathbf{F}^e)^T$, $\mathbf{c}^e = (\mathbf{V}^e)^{-1} = (\mathbf{F}^e)^{-T}(\mathbf{F}^e)^{-1}$. Если тело деформируется чисто упруго, то $\mathbf{c}^e = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}^p = \mathbf{I}$; если упругие деформации пренебрежимо малы, то $\mathbf{c}^p \approx \mathbf{c}$, $\mathbf{c}^e \approx \mathbf{I}$; здесь \mathbf{I} есть единичный тензор. Далее будет кратко

изложен этот подход. Предлагается следующее представление обратного градиента деформации:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{Y}(\mathbf{c}^e)^{1/2}, \quad (3.2)$$

где \mathbf{Y} есть некоторый тензор второго ранга, не обязательно ортогональный, поэтому (3.2) не есть полярное разложение.

Используя известное равенство для обратного градиента деформации

$$\{\dot{\mathbf{F}}^{-1}\} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{L} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^T$ есть пространственный тензор градиента скорости, можно получить с учетом (3.2) равенство

$$\left\{ \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \right\} = \mathbf{Q} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} - \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{L}; \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{Y}^{-1} \dot{\mathbf{Y}} \quad (3.3)$$

Здесь и далее точка над величиной означает ее полную производную по времени t , т.е. $\{\dot{}\} = \partial\{\}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla_x)\{\}$; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{u}$ – скорость, \mathbf{u} – перемещение.

Далее, возвращаясь к представлению (3.1), можно записать

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} = \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{c}^p \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2}, \text{ откуда } \mathbf{c}^p = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$$

Находя полную производную по времени от последнего равенства, имеем

$$\dot{\mathbf{c}}^p = \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{Y}} + (\dot{\mathbf{Y}})^T \mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = -\mathbf{c}^p \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{c}^p \quad (3.4)$$

Условие симметрии правой части равенства (3.3) (т.е. условие симметрии тензора \mathbf{c}^e и, следовательно, его полной производной) дает

$$\mathbf{Q} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} - \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{L} = \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{Q}^T - \mathbf{L}^T \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{S}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{W} = (\mathbf{L})_a$ есть тензор спина, индексом «а» обозначена антисимметричная часть тензора, $2(\)_a = (\) - (\)^T$; \mathbf{S} – симметричный, а \mathbf{A} – антисимметричный тензоры. Подставляя (3.6) в (3.5), имеем

$$\left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{A} + \mathbf{A} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} = \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{D} = (\mathbf{L})_s$ – тензор деформации скорости, индексом «s» обозначена симметричная часть тензора, $2(\)_s = (\) + (\)^T$; равенство (3.7) не содержит тензор \mathbf{S} , который, следовательно, может быть произвольным симметричным. Последнее тензорное уравнение относительно \mathbf{A} имеет следующее решение [42]:

$$\mathbf{A} = \frac{I_1^2 \left[\left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \right] - I_1 \left[\mathbf{c}^e \mathbf{D} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e \right] + \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \left[\left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2} \right] \left(\mathbf{c}^e \right)^{1/2}}{I_1 I_2 - I_3}$$

Здесь $I_1 = \text{tr}(\mathbf{c}^e)^{1/2}$, $I_2 = (1/2)\left[\text{tr}^2(\mathbf{c}^e)^{1/2} - \text{tr}\mathbf{c}^e\right]$, $I_3 = \det(\mathbf{c}^e)^{1/2}$.

Кратко это равенство может быть записано в виде [26]

$$\mathbf{A} = \frac{\Sigma (\mathbf{D}\Sigma - \Sigma \mathbf{D})\Sigma}{\det \Sigma} = \frac{\Sigma \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] \Sigma}{\det \Sigma}, \quad \Sigma = \text{tr}(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{I} - (\mathbf{c}^e)^{1/2}$$

Далее можно получить уравнение эволюции тензора упругой деформации. Воспользовавшись (3.3), (3.6) и (3.7):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}^e &= \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right\} \dot{\left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right\}} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left\{ \dot{(\mathbf{c}^e)^{1/2}} \right\} = \mathbf{Q}\mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{L} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} (\mathbf{Q} - \mathbf{L}) (\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\ &= \left[\mathbf{W} + 2\mathbf{A} + \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right\} \right] \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{L} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \times \left[-\mathbf{D} + 2\mathbf{A} + \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right\} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\ &= -\mathbf{L}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{L} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \times \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] \mathbf{c}^e \end{aligned}$$

Или с учетом (3.7):

$$\begin{aligned} \partial_{CR} \left\{ \mathbf{c}^e \right\}^{\text{def}} &= \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{L}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{L} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] \times \\ &\quad \times (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] \mathbf{c}^e = \mathbf{c}^e \mathbf{S} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{c}^e \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $\partial_{CR} \{ \}$ – производная Коттер – Ривлина.

Подставляя представление (3.6) в уравнение (3.4) имеем

$$\dot{\mathbf{c}}^p = -\mathbf{c}^p \left[\mathbf{W} + \mathbf{A} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] + \left[\mathbf{W} + \mathbf{A} - \mathbf{S} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] \mathbf{c}^p \quad (3.9)$$

Для замыкания (3.9) следует определить симметричный тензор \mathbf{S} . Это определение выходит за рамки кинематики и дано в следующем подразделе.

3.2. Определяющие соотношения. Второй закон термодинамики в виде неравенства Планка для мощности диссипации на единицу деформированного объема P есть

$$P = \sigma : \mathbf{D} - J^{-1} \dot{\Psi} \geq 0$$

Здесь и далее символ «:» означает свертку тензоров второго ранга, а именно $\sigma : \mathbf{D} = \text{tr}(\sigma \mathbf{D}^T)$; σ – тензор напряжений Коши; $J = \det \mathbf{F} = \rho_0 / \rho$; ρ_0 и ρ – плотность среды в недеформированном и деформированном состоянии соответственно. Если упругий потенциал Ψ изотропной среды есть функция только упругой деформации ($\Psi = \Psi(\mathbf{c}^e)$), то можно записать

$$P = \sigma : \mathbf{D} - J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \dot{\mathbf{c}}^e \geq 0$$

Исходя из соотношения (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \dot{\mathbf{c}}^e &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \left[-\mathbf{L}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{L} + \mathbf{c}^e \mathbf{S} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{c}^e \right] = \\ &= -2 \left(\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \right) : \mathbf{D} + 2 \left(\mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \right) : \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] \end{aligned}$$

Здесь учтена соосность тензоров \mathbf{c}^e и $\partial\Psi/\partial\mathbf{c}^e$, а также инвариантность оператора tr относительно кругового сдвига сомножителей аргумента.

Тогда неравенство Планка может быть записано в виде

$$P = \left[\sigma + 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e} \right] : \mathbf{D} - 2J^{-1} \left(\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e} \right) : \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] \geq 0$$

и может быть выполнено, когда:

$$\text{— упругий закон } \sigma = \begin{cases} -2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e \neq 1 \\ -p\mathbf{I} - 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e = 1 \end{cases}$$

— остаточное диссипативное неравенство $P = \sigma : \left[(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] \geq 0$

Требую, чтобы остаточное диссипативное неравенство принимало вид $P = \sigma : \mathbf{D}^p \geq 0$, определим симметричный тензор \mathbf{S} как $\mathbf{S} = (\mathbf{c}^e)^{-1/2} \mathbf{D}^p$, полагая, что тензоры \mathbf{c}^e и \mathbf{D}^p сосны, то есть $\mathbf{c}^e \mathbf{D}^p = \mathbf{D}^p \mathbf{c}^e$. (Для изотропной среды с упругим потенциалом $\Psi = \Psi(\mathbf{c}^e)$ тензоры \mathbf{c}^e и σ соосны; для того, чтобы были соосны \mathbf{c}^e и \mathbf{D}^p , нужно чтобы были соосны тензор напряжений Коши σ и тензор скорости пластической деформации, что является распространенным допущением в теории пластичности, в частности, это выполняется для обычного ассоциированного закона пластического течения).

Возвращаясь теперь к формулам (3.8) и (3.9), имеем:

$$\begin{aligned} \partial_J \{ \mathbf{c}^p \} &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{c}}^p - \mathbf{W} \mathbf{c}^p + \mathbf{c}^p \mathbf{W} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}^p) \mathbf{c}^p - \mathbf{c}^p (\mathbf{A} + \mathbf{D}^p) = \\ &= -2\mathbf{c}^p \mathbf{D}^p + \mathbf{A} \mathbf{c}^p - \mathbf{c}^p \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\partial_{CR} \{ \mathbf{c}^e \} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{L}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{L} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D}^p (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \mathbf{D}^p \mathbf{c}^e = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^p$$

Здесь $\partial_J \{ \}$ есть производная Яуманна.

Вместо (3.10) можно записать равенство для производной Олдройда тензора \mathbf{B}^e

$$\partial_{Old} \{ \mathbf{B}^e \} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{L} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{L}^T = -2\mathbf{B}^e \mathbf{D}^p \quad (3.11)$$

Для изотропной среды мультипликативное разделение тензора градиента деформации на упругую и пластическую составляющие $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ при $\mathbf{F}^p = (\mathbf{F}^p)^T$ [43,44] приводит к уравнению, по форме совпадающему с (3.11) [45]. Последнее равенство означает, что пластическая деформация осуществляется без вращения (подробнее см. [43, 46, 47]). Это кажется нам заслуживающим внимания, поскольку, вообще говоря, разделение полной деформации (3.1) и разложение градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ не эквивалентны. Отметим, что в [46, 47] также строится эволюционное определяющее соотношение на базе мультипликативного разделения градиента деформации на упругую и неупругую части и при этом подходе тензор деформации скорости представляет собой сумму своих упругой и неупругой частей.

Уравнение (3.10) описывает эволюцию тензора упругой деформации в области пластического течения, при этом начальные значения компонент этого тензора определяются решением соответствующей упругой задачи.

4. Модель материала. Конкретизация физических соотношений. Для изначально изотропной упругой несжимаемой среды мы будем использовать упругий закон Муни–Ривлина, связывающий тензор напряжений Коши с тензором упругой дефор-

мации [39]:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \quad \Psi = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

$$I_1 = I_1(\mathbf{B}^e) = \text{tr} \mathbf{B}^e, \quad I_2 = I_2(\mathbf{B}^e) = \frac{1}{2} \left[\text{tr}^2 \mathbf{B}^e - \text{tr}(\mathbf{B}^e)^2 \right]; \quad \det \mathbf{B}^e = 1$$

Здесь $C_1, C_2 \geq 0$ – материальные константы; модуль сдвига есть $\mu = 2(C_1 + C_2)$; функция добавочного гидростатического давления p обусловлена несжимаемостью материала. Мы пренебрегаем приобретенной в ходе деформирования анизотропией материала.

Учитывая

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}^e} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{B}^e} = C_1 \mathbf{I} + C_2 (\mathbf{I} \text{tr} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e),$$

имеем

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2(C_1 + C_2 \text{tr} \mathbf{B}^e) \mathbf{B}^e - 2C_2 (\mathbf{B}^e)^2$$

Поведение сплошной среды в пластическом диапазоне будем описывать ассоциированным законом пластического течения, который связывает тензор скорости пластической деформации с тензором напряжений Коши:

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{df}{d\sigma} = \Lambda \frac{df}{d\sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma}; \quad f(\sigma_{eq}) - \tau_y = 0, \quad (4.1)$$

где σ_{eq} есть эквивалентное напряжение; уравнение $f(\sigma_{eq}) - \tau_y = 0$ (условие пластичности) задает поверхность текучести; Λ есть неопределенный скалярный множитель Лагранжа. Функция $\tau_y = \tau_y(q)$ (предел текучести материала на сдвиг) описывает изотропное деформационное упрочнение материала. Аргумент этой функции – накопленная пластическая деформация q – определяется дифференциальным уравнением $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$. Началу пластического течения в материале соответствует значение сдвигового предела текучести $\tau_y(0) = \tau_{y0}$.

Мы будем использовать условие пластичности Треска, для которого

$$f(\sigma_{eq}) = \sigma_{eq}; \quad \sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2,$$

где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главные напряжения. В представленном исследовании мы рассматриваем функции упрочнения $\tau_y(q)$ общего вида. При этом условия, которым должна удовлетворять функция $\tau_y(q)$ для того, чтобы в теле мог быть реализован пластический круговой сдвиг, будут указаны отдельно.

5. Кинематика кругового сдвига. Введем цилиндрическую систему координат с продольной осью, совпадающей с осью полого цилиндра. Связь между начальным (R, θ, Z) и конечным (r, φ, z) положениями точки деформированной среды при круговом сдвиге в условиях плоской деформации задается равенствами $r = R$, $z = Z$, $\varphi = \theta + \alpha(R, t)$. Здесь $\alpha(R, t)$ – непрерывная функция угла поворота материальных точек.

Координатное представление градиента деформации в смешанном базисе есть

$$[\mathbf{F}] = (\nabla_X \otimes \mathbf{x})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r \frac{\partial \alpha}{\partial r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ненулевые компоненты левого тензора деформации Коши – Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ в актуальном базисе есть

$$B_{rr} = B_{zz} = 1, \quad B_{\varphi\varphi} = 1 + B_{r\varphi}^2, \quad B_{r\varphi} = B_{\varphi r} = r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (5.1)$$

Вектор перемещения в актуальном базисе имеет вид $\mathbf{u} = r(1 - \cos \alpha) \mathbf{e}_r + r \sin \alpha \mathbf{e}_\varphi$.

Вектор скорости определяется равенством $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{u}$, откуда $\mathbf{v} = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, где $v_\varphi = r \partial \alpha / \partial t$ есть единственная ненулевая компонента вектора скорости.

6. Чисто упругое деформирование. При упругом деформировании $\mathbf{V}^e = \mathbf{V}$ и с учетом (5.1) компоненты напряжения имеют вид

$$\sigma_{rr} = -p + 2C_1 + 4C_2 \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2(C_1 + C_2) \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \quad (6.2)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2C_2 \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (6.4)$$

Условие равновесия $\nabla_x \cdot \sigma = \mathbf{0}$ приводит к следующим уравнениям:

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}, \quad r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = -2\sigma_{r\varphi}$$

Если функция угла поворота α найдена, то первое из уравнений равновесия служит для определения функции $p(r, \alpha^*)$, интегрированием второго можно установить

$$\frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} = \frac{\omega}{r^2}, \quad \omega = \omega(\alpha^*)$$

Сравнив это равенство с (6.4), имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{\omega}{r^3}, \quad \alpha(r, \alpha^*) = \omega_0(\alpha^*) - \frac{1}{2r^2} \omega(\alpha^*)$$

Граничные условия $\alpha(r_0, \alpha^*) = 0$ и $\alpha(r_1, \alpha^*) = \alpha^*$ позволяют установить

$$\omega_0(\alpha^*) = \frac{\alpha^*}{1 - (r_0/r_1)^2} \quad \text{и} \quad \omega(\alpha^*) = \frac{2\alpha^*}{r_0^{-2} - r_1^{-2}},$$

тогда выражение для угла закручивания в окончательном виде есть

$$\alpha(r, \alpha^*) = \alpha^* \frac{1 - (r_0/r)^2}{1 - (r_0/r_1)^2} \quad (6.5)$$

Мы будем полагать, что $\alpha^* \geq 0$, следовательно

$$r \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 2\alpha^* \frac{(r_0/r)^2}{1 - (r_0/r_1)^2} \geq 0 \quad (6.6)$$

7. Пластическое деформирование

7.1. Зарождение пластического течения. Формулы (6.1)–(6.4) для компонент напряжения позволяют получить выражения для главных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + \sigma_{r\varphi}^2} = \\ &= -p + 2C_1 + 4C_2 + (C_1 + C_2) \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{zz} = -p + 2C_1 + 4C_2 + 2C_2 \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{III} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + \sigma_{r\varphi}^2} = \\ &= -p + 2C_1 + 4C_2 + (C_1 + C_2) \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 - 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= (C_1 - C_2) \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} > 2C_1 \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} &= -(C_1 - C_2) \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} > 2C_2 \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

Тогда, если материальные константы C_1 и C_2 неотрицательны, то $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$ есть промежуточное главное напряжение, максимальное главное напряжение $\sigma_1 = \sigma_I$, минимальное есть $\sigma_3 = \sigma_{III}$. Используя условие пластичности Треска $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y(q)$, где функция $\tau_y(q)$ описывает изотропное упрочнение материала в пластичности, запишем условие возникновения пластического течения, которое должно выполняться на упруго-пластической границе $r = r_{ep}$:

$$\frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} \Big|_{r=r_{ep}} = r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left[r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \right]^2} = \tilde{\tau}_{y0},$$

здесь и далее « $\tilde{\sim}$ » означает безразмерную величину напряжения, полученную нормированием на модуль сдвига $\mu = 2(C_1 + C_2)$, т.е. $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu$.

Отсюда

$$r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (7.1)$$

Учитывая (6.6), пластическое течение зарождается на внутренней границе полой трубы $r = r_0$ при угле поворота внешней поверхности

$$\alpha^* = \alpha_{cr1}^* = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right] \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}$$

При $\alpha_{cr1}^* < \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$ в теле существуют две области: область $r_0 \leq r < r_{ep}$, в которой происходит упруго-пластическое деформирование, и область $r_{ep} < r \leq r_1$, которая деформирована чисто упруго (рис. 2). При $\alpha^* = \alpha_{cr2}^*$ упруго-пластическая граница достигает внешней границы полого цилиндра $r = r_1$ и далее все тело деформируется пластически. Выражение для α_{cr2}^* будет приведено позднее.

Функция угла поворота материальных точек α (непрерывная и гладкая на упруго-пластической границе $r = r_{ep}$) будет различаться в упругой и пластической областях:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha^e, r_{ep} \leq r \leq r_1 \\ \alpha^p, r_0 \leq r \leq r_{ep} \end{cases}, \quad \alpha^e(r_{ep}) = \alpha^p(r_{ep}), \quad \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}}$$

Последнее равенство (условие гладкости) следует из непрерывности угловой скорости $v_\varphi = r(\partial\alpha/\partial t)$ на упруго-пластической границе по условию совместности разрывов Адамара.

7.2. *Область упругого деформирования.* В упругой области $r_{ep} < r \leq r_1$ сохраняется равенство $\mathbf{V}^e = \mathbf{V}$, где тензор \mathbf{V} определяется по (5.1) при $\alpha = \alpha^e$ и также при $\alpha = \alpha^e$ верны выражения (14) для компонент напряжения. Кроме того, справедливы равенства

$$\alpha^e(r, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \frac{1}{2r^2} \omega^e(\alpha^*) \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} = \frac{\omega^e}{r^2} = r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r}$$

Однако эти две функции, $\omega_0^e(\alpha^*)$ и $\omega^e(\alpha^*)$, уже не совпадают с $\omega_0(\alpha^*)$ и $\omega(\alpha^*)$ из чисто упругого решения, и, следовательно, угол поворота материальных точек в упругой области уже не может быть определен по формуле (6.5) после зарождения пластического течения. Граничное условие $\alpha^e(r_1, \alpha^*) = \alpha^*$ как и прежде позволяет выразить одну из этих функций:

$$\omega^e(\alpha^*) = 2r_1^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] \quad (7.2)$$

и, следовательно, получить

$$\alpha^e(r, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] \quad (7.3)$$

Оставшаяся неизвестная функция $\omega_0^e(\alpha^*)$, определяющая кинематику в упругой области, не может быть определена без интегрирования уравнений в пластической области.

7.3. *Область упруго-пластического деформирования.* В этой области $\mathbf{V}^e \neq \mathbf{V}$; тензор упругой деформации определяется эволюционным уравнением (3.11):

$$\partial \mathbf{V}^e / \partial t = \mathbf{L} \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^e \mathbf{L}^T - (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{V}^e - 2\mathbf{V}^e \mathbf{D}^p \quad (7.4)$$

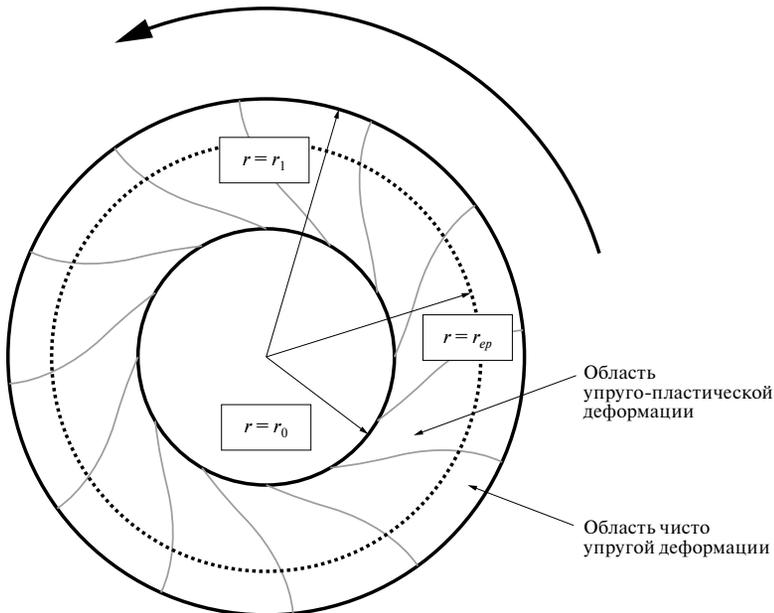


Рис. 2. Упруго-пластическое деформирование.

Будем искать координатное представление (в актуальном базисе) тензора упругой деформации \mathbf{B}^e в области пластического течения в виде

$$[\mathbf{B}^e] = \begin{pmatrix} B_{rr}^e & B_{r\varphi}^e & 0 \\ B_{r\varphi}^e & B_{\varphi\varphi}^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det \mathbf{B}^e = B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - (B_{r\varphi}^e)^2 = 1 \quad (7.5)$$

В том же базисе координатные представления тензоров $\mathbf{L} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^T$ и $(\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{B}^e$, фигурирующих в уравнении (7.4), есть

$$[\mathbf{L}] = \begin{pmatrix} 0 & -v_\varphi/r & 0 \\ \partial v_\varphi/\partial r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; v_\varphi = r(\partial\alpha^p/\partial t) \quad (7.6)$$

$$[(\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{B}^e] = \frac{v_\varphi}{r} \begin{pmatrix} -2B_{r\varphi}^e & B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 0 \\ B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 2B_{r\varphi}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Тензор скорости пластической деформации определяется ассоциированным законом (4.1). С учетом условия пластичности $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2/4 + \sigma_{r\varphi}^2} = \tau_y(q)$, а также упругого закона, который позволяет выразить в пластической области компоненты напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)B_{rr}^e \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)B_{\varphi\varphi}^e \\ \sigma_{zz} &= -p + 2C_1 + 2C_2(B_{rr}^e + B_{\varphi\varphi}^e) \\ \sigma_{r\varphi} &= 2(C_1 + C_2)B_{r\varphi}^e \end{aligned} \quad (7.8)$$

ненулевые компоненты скорости пластической деформации могут быть выражены по ассоциированному закону в следующем виде

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi}^p &= -D_{rr}^p = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{4} = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} \frac{B_{\varphi\varphi}^e - B_{rr}^e}{2} \\ D_{r\varphi}^p &= \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\sigma_{r\varphi}}{2} = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} B_{r\varphi}^e = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

если только, как и в упругой области, $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$ есть промежуточное главное напряжение.

В этом можно удостовериться, записав с учетом (7.8), как и в предыдущем разделе, разницу главных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= 2(C_1 - C_2) \left[\frac{1}{2} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] + \\ &+ 2(C_1 + C_2) \sqrt{\frac{1}{4} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1} > 4C_1 \left[\frac{1}{2} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{II} - \sigma_{III} = & -2(C_1 - C_2) \left[\frac{1}{2}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] + \\ & + 2(C_1 + C_2) \sqrt{\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1} > 4C_2 \left[\frac{1}{2}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] \end{aligned}$$

Учитывая $(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)/2 > 1$ и указанные ранее условия $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, записанные выше разности положительны, и $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$ остается промежуточным главным напряжением в пластической области.

Определим пластический множитель Λ , входящий в (7.9). Уравнение для накопленной пластической деформации $\dot{q} = \sqrt{(2/3)\mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$ с учетом (7.9) принимает вид

$$\frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} = \Lambda \frac{\mu}{\sqrt{3}\tau_y} \sqrt{\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1},$$

откуда

$$\Lambda = \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{\sqrt{3}\tau_y}{\mu} \left[\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} > 0,$$

и система (7.9) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi}^p = -D_{rr}^p = & \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} (B_{\varphi\varphi}^e - B_{rr}^e) \left[\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ D_{r\varphi}^p = & \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \left[\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Подставляя выражения (7.6), (7.7) и (7.10) в (7.4) и учитывая

$$\frac{v_\varphi}{r} = \frac{\partial \alpha^p}{\partial t} = \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha^*}, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = \frac{d\alpha^*}{dt} \left[\frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) \right],$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{rr}^e}{\partial \alpha^*} = & -\sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \left[\frac{1}{2} B_{rr}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] \left[\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial B_{\varphi\varphi}^e}{\partial \alpha^*} = & 2B_{r\varphi}^e \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \left[\frac{1}{2} B_{\varphi\varphi}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] \left[\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial B_{r\varphi}^e}{\partial \alpha^*} = & B_{rr}^e \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} B_{r\varphi}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) \left[\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial B_{zz}^e}{\partial \alpha^*} = & 0, \quad \frac{\partial B_{\varphi z}^e}{\partial \alpha^*} = 0, \quad \frac{\partial B_{rz}^e}{\partial \alpha^*} = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Из последних трех равенств следует, что сделанное предположение (7.5) о виде тензора \mathbf{B}^e в области пластического течения (в частности, о том, что $B_{zz}^e = 1$), не противоречит эволюционному уравнению (3.11).

Из первых трех уравнений (7.11) любое одно может быть исключено посредством условия несжимаемости $B_{r\varphi}^e = \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1}$. Оставшиеся два уравнения из системы (7.11) содержат две компоненты упругой деформации, а также функцию угла поворо-

та $\alpha^p(r, \alpha^*)$. Эти уравнения дополняются условием пластичности вида

$$\tilde{\tau}_y = \frac{1}{\mu} \tau_y = \frac{1}{2\mu} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{4} (B_{r\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1} \quad (7.12)$$

и выражением

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \frac{1}{\mu} \sigma_{r\varphi} = B_{r\varphi}^e = \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \quad (7.13)$$

Отметим, что касательное напряжение в пластической области должно удовлетворять уравнению равновесия $r(\partial\sigma_{r\varphi}/\partial r) = -2\sigma_{r\varphi}$, то есть иметь вид $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}/\mu = \omega^p r^{-2}$, где $\omega^p(\alpha^*)$ есть некоторая функция. И поскольку касательное напряжение непрерывно на упруго-пластической границе, $\omega^p(\alpha^*) = \omega^e(\alpha^*)$, и

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \frac{1}{\mu} \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \omega^e, \quad (7.14)$$

то есть имеет то же выражение в пластической области, что и в упругой. Безразмерное касательное напряжение в пластической области является продолжением функции $r(\partial\alpha^e/\partial r)$, определенной в упругой области, в пластическую область. При этом, естественно, $\tilde{\sigma}_{r\varphi} \neq r(\partial\alpha^p/\partial r)$.

Из уравнений (7.11) можно получить следующую систему для $\tilde{\tau}_y$ и $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} &= \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \alpha^*} &= \left[\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \end{aligned}$$

Здесь использовано выражение $B_{rr}^e = \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2}$, которое может быть получено из (7.12) и (7.13).

Или, исключив производную $\partial(r\partial\alpha^p/\partial r)/\partial\alpha^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) &= \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} + \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \right] \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \alpha^*} &= \left[\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \times \\ &\times \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} + \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \right] - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\tilde{\tau}_y} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \end{aligned}$$

Если теперь искать решение этой связанной системы в виде функций $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\sigma}_{r\varphi}(q)$, $r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} = G(q)$, имеем последнюю систему в виде

$$\frac{dG}{dq} = \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \sqrt{3} \right]$$

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{dq} = -\sqrt{3} \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\tilde{\tau}_y} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} + \left[\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \sqrt{3} \right] \quad (7.15)$$

Учитывая, что $\tilde{\tau}_y$ есть известная функция накопленной пластической деформации, оба этих уравнения являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка; второе из них позволяет найти $\tilde{\sigma}_{r\varphi}(q)$, а первое непосредственным интегрированием найти $G(q)$.

Второе уравнение системы (7.15) линеаризуется заменой $\Omega(q) = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\Omega}{dq} = \lambda(q) - \hbar(q)\Omega,$$

где

$$\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} + 1, \quad \hbar(q) = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} + \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y},$$

и имеет решение

$$\Omega(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q \hbar(\xi) d\xi} \left(\Omega_0 + \sqrt{3} \int_0^q \lambda(\zeta) e^{\sqrt{3} \int_0^\zeta \hbar(\xi) d\xi} d\zeta \right) \quad (7.16)$$

Константа интегрирования Ω_0 в (7.16) является начальным значением функции $\Omega(q)$ при $q = 0$, которое определяется с помощью формулы (7.1):

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= \Omega^2(0) = \text{const} = 1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left(\tilde{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{r=r_{ep}} \right)^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left(B_{r\varphi}^e \Big|_{r=r_{ep}} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left(r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

Замечание 1. Из (7.16) по правилу Лопиталья можно получить

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \Omega(q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\lambda(q)}{\hbar(q)}$$

Учитывая, что $d\Omega/dq > 0$, можно заключить, что функция $\Omega(q)$ ограничена:

$$\Omega_0 \leq \Omega(q) \left\{ = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2} \right\} \leq \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}},$$

откуда

$$\frac{2}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1} \geq \left(\frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\tilde{\tau}_y} \right)^2 \geq \frac{1}{1 + \tilde{\tau}_y^2} \quad (7.17)$$

Формула (7.17) показывает, в каких пределах может лежать величина касательного напряжения в области упруго-пластического деформирования при круговом сдвиге.

Функция $G(q)$ может быть найдена из первого уравнения системы (7.15) как

$$G(q) = G_0 + \sqrt{3} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta; \quad R(\zeta) = \sqrt{1 - \Omega^2(\zeta)} \quad (7.18)$$

Константа интегрирования G_0 в (7.18) является начальным значением $r(\partial \alpha^p / \partial r)$ при $q = 0$, которое определяется по формуле (7.1):

$$G_0 = G(0) = r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} = \text{const}$$

Теперь следует проинтегрировать уравнение $r(\partial \alpha^p / \partial r) = G(q)$. Будем полагать, что угол поворота материальных точек в пластической области может быть представлен в виде $\alpha^p = \alpha^p(\alpha^*, q)$. Поскольку $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$, то, учитывая (7.14), накопленная пластическая деформация должна быть функцией автомодельной переменной $\tilde{\sigma}_{r\varphi}(r, \alpha^*) = \omega^e(\alpha^*)r^{-2}$. Тогда

$$G(q) = -2 \frac{\partial \alpha^p}{\partial q} \left[\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} - \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} \frac{d\Omega}{dq} \right]^{-1}$$

Откуда

$$\frac{\partial \alpha^p}{\partial q} = \frac{G}{2} \left[\frac{\Omega}{1 - \Omega^2} \frac{d\Omega}{dq} - \frac{1}{\tilde{\tau}_y} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \right] = -\frac{G}{2} \frac{d \ln(\tilde{\tau}_y R(q))}{dq}$$

Интегрируя по частям с учетом (7.18) и равенства $\frac{dG}{dq} = \sqrt{3} \frac{\lambda(q)}{R(q)}$, имеем:

$$\begin{aligned} \alpha^p(\alpha^*, q) &= \alpha_{ep}(\alpha^*) - \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q)R(q)}{\tilde{\tau}_{y0}R(0)} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q)R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \\ \tilde{\tau}_{y0}R(0) &= \sqrt{2 \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} = G_0 \end{aligned}$$

Из граничного условия $\alpha^p|_{r=r_0} = 0$ следует

$$\alpha_{ep}(\alpha^*) = \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{G_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta,$$

где $q_0(\alpha^*) = q|_{r=r_0}$ – величина накопленной пластической деформации на внутренней границе полноты цилиндра. Эту величину удобно использовать в качестве параметра решения. Тогда зависимость угла поворота материальных точек в пластической области от локальной величины накопленной пластической деформации есть

$$\begin{aligned} \alpha^p(\alpha^*, q) &= \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(q)R(q)} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q)R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \end{aligned} \quad (7.19)$$

Кинематика материальных точек в области пластического деформирования определяется формулой (7.19) и зависит от распределения накопленной

пластической деформации $q(\alpha^*, r)$. Это распределение в свою очередь устанавливается по найденной функции $\Omega(q)$ (формула (7.16)) исходя из равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1 - \Omega^2(q)}$ и формулы (7.14). Возможны два случая, в зависимости от того, занимает ли пластическая область весь объем материала или же существует упругая область.

Случай 1. В теле есть упругая область (параметр нагружения в диапазоне $\alpha_{cr1}^* < \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$). Функция угла поворота точек материала в упругой области α^e задана формулой (7.3). Дифференцируя (7.3) по r , имеем

$$r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} = 2(\omega_0^e - \alpha^*) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \quad (7.20)$$

Из (7.20) и (7.1) можно получить равенство

$$2(\omega_0^e - \alpha^*) \left(\frac{r_1}{r_{ep}} \right)^2 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} = G_0 \quad (7.21)$$

Значение угла поворота на упруго-пластической границе, рассчитанное по формуле (7.19) при $q = 0$, дает

$$\alpha^p(\alpha^*, 0) = \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{G_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta$$

С другой стороны, по (7.3) и (7.21),

$$\alpha^e(r_{ep}, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \left(\frac{r_1}{r_{ep}} \right)^2 \times [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] = \omega_0^e(\alpha^*) - \frac{1}{2} G_0$$

Непрерывность α на упруго-пластической границе приводит к равенству $\alpha^p(\alpha^*, 0) = \alpha^e(r_{ep}, \alpha^*)$, откуда

$$\omega_0^e = \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{G_0} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \quad (7.22)$$

Эта формула устанавливает связь между параметром решения $q_0(\alpha^*) = q|_{r=r_0}$ и функцией $\omega_0^e(\alpha^*)$, которая определяет кинематику материальных точек в упругой области по формуле (7.3).

Связь параметра нагружения α^* (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) с параметром q_0 устанавливается по (7.14) с учетом равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$, (7.2) и (7.22):

$$\alpha^* = \omega_0^e - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0), \quad (7.23)$$

где ω_0^e связано с q_0 формулой (7.22).

Распределение накопленной пластической деформации можно найти из равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$ с учетом (7.14):

$$\tilde{\tau}_y(q)R(q) = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)$$

Из (7.21) и (7.23) закон движения упруго-пластической границы имеет вид

$$r_{ep} = r_0 \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_y(q_0)}{G_0}} R(q_0) \quad (7.24)$$

Согласно (7.24), все тело перейдет в пластическое состояние (упруго-пластическая граница достигнет r_1), как только накопленная пластическая деформация на внутренней поверхности полого цилиндра $q_{0,cr2}$ достигнет величины, при которой выполнится равенство

$$\tilde{\tau}_y(q_{0,cr2})R(q_{0,cr2}) = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 G_0$$

Это соответствует параметру нагружения

$$\alpha_{cr2}^* = G_0 \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_{0,cr2}} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{(r_1/r_0)^2 G_0}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta$$

После этого пластическое деформирование происходит во всем теле.

Случай 2. Все тело находится в состоянии пластического течения (параметр нагружения $\alpha^* \geq \alpha_{cr2}^*$). В этом случае по (7.19) с учетом граничного условия $\alpha^p|_{r=r_1} = \alpha^*$:

$$\begin{aligned} \alpha^* = \alpha^p(\alpha^*, q_1) &= \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(q_1)R(q_1)} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_1)R(q_1)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

Здесь величина $q_1 = q|_{r=r_1}$ выражается с помощью $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$ и (7.14):

$$\frac{\tilde{\tau}_y(q_1)R(q_1)}{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2$$

Подставляя это выражение в формулу выше, имеем

$$\alpha^* = \alpha^p(\alpha^*, q_1) = \left[G_0 + \sqrt{3} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta \right] \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{q_1}^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta$$

Таким образом, формулы выше связывают параметр нагружения α^* с параметром q_0 .

Распределение накопленной пластической деформации можно найти из равенства $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$ с учетом (7.14):

$$\tilde{\tau}_y(q)R(q) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)$$

8. Существование решения. Деформация кругового сдвига накладывает достаточно жесткие условия на напряженное состояние, которое удовлетворяет условию равновесия. А именно, согласно (7.14), касательное напряжение должно монотонно возрастать при уменьшении радиальной координаты, следовательно (поскольку накопленная пластическая деформация q также монотонно возрастает при уменьшении радиальной координаты), должно выполняться неравенство $d\tilde{\sigma}_{r\varphi}/dq \geq 0$. Согласно (7.15), это приводит к тому, что должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + 1 \geq (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2 \times \left[1 - \tilde{\tau}_y \sqrt{\frac{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \right]^{-1} \quad (8.1)$$

Левая часть этого неравенства зависит только от физических свойств материала, а именно от функции упрочнения. Правая часть включает касательное напряжение, которое меняется во времени и в пространстве. Чтобы сформулировать условия для функции упрочнения $\tilde{\tau}_y(q)$, достаточные для того, чтобы выполнялось неравенство (8.1), воспользуемся оценкой (7.17) и получим для правой части (8.1):

$$\frac{(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \leq \frac{2n_\tau}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \leq \frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1}$$

$$\text{и} \quad \frac{(\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \geq \frac{1/(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \geq \frac{1}{1 + \tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\tau}_y \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} (\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1) (\tilde{\tau}_{y0})^{-1}},$$

где

$$n_\sigma = \sqrt{\left[1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2 \right] / (1 + \tilde{\tau}_y^2)}, \quad n_{\tau 0} = \left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1 \right)^{-1}$$

Тогда, если $\tilde{\tau}_y(q)$ такова, что

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[2(1 + \tilde{\tau}_y^2) n_{\tau 0} - 1 \right], \quad (8.2)$$

то неравенство (8.1) заведомо выполняется, следовательно, $d\tilde{\sigma}_{r\varphi}/dq \geq 0$ и решение существует. Условие (8.2) является достаточным для реализации рассматриваемого паттерна деформации кругового сдвига в изотропном пластически упрочняемом материале.

С другой стороны, если выполнено

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} < \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \times \left[\frac{1}{1 + \tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\tau}_y \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} (\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1) (\tilde{\tau}_{y0})^{-1}} - 1 \right],$$

то неравенство (8.1) заведомо не выполняется. В частности, для идеально-пластического (неупрочняемого) материала $\tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0} = \text{const}$ и последнее неравенство имеет вид $0 < \sqrt{3} \left(1 - \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} \right)$ и выполнено при любом значении $\tilde{\tau}_{y0}$. То есть в пластически неупрочняемом материале не может реализоваться круговой пластический сдвиг (последний вывод очевиден для модели жестко-пластического тела, но не очевиден для упруго-пластической задачи с конечными деформациями, в которой касательное напряжение может сильно отличаться от интенсивности напряжений).

Замечание 2. Сказанное выше относится только к невязкой деформации. В рамках упруго-вязкопластических моделей решения существуют даже для материалов без деформационного упрочнения (см., напр. [7,22,23]).

Таблица 1

1. Чисто упругое деформирование	
Условие	$\alpha^* < \alpha_{cr1}^* = \left[1 - (r_0/r_1)^2\right](G_0/2)$, $G_0 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)}$
Решение	<p>Угол поворота $\alpha = \frac{\alpha^*}{1 - (r_0/r_1)^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]$</p> <p>Величина касательного напряжения на внешней поверхности</p> $\sigma_{r\varphi}/\mu _{r=r_1} = 2\alpha^* \left[(r_1/r_0)^2 - 1\right]^{-1}$
2. Часть полого цилиндра деформирована упруго, часть пластически	
Условие	$\alpha_{cr1}^* \leq \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$, $\alpha_{cr2}^* = G_0 \ln(r_1/r_0) + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_{0cr2}} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{(r_1/r_0)^2 G_0}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta$, $\tilde{\tau}_y(q_{0cr2}) R(q_{0cr2}) = (r_1/r_0)^2 G_0$, $\Omega(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q h(\xi) d\xi} \left[\Omega_0 + \sqrt{3} \int_0^q \lambda(\zeta) e^{\sqrt{3} \int_0^\zeta h(\xi) d\xi} d\zeta \right]$, $\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} + 1$, $h(q) = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \lambda(q)$; $\Omega_0 = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}}$ <p>Достаточное условие существования решения</p> $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[\frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1} - 1 \right]; q \in [0, q_0]$
Решение	$\alpha = \begin{cases} \alpha^e, r_{ep} \leq r \leq r_1 \\ \alpha^p, r_0 \leq r \leq r_{ep} \end{cases}$ <p>Положение упруго-пластической границы</p> $r_{ep} = r_0 \sqrt{[\tilde{\tau}_y(q_0)/G_0] R(q_0)}$ <p>Величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности полого цилиндра $q_0 = q _{r=r_0}$ есть параметр решения</p> <p>Угол поворота в упругой области $\alpha^e = \omega_0^e - (r_1/r)^2 (\omega_0^e - \alpha^*)$</p> <p>Связь параметра q_0 с параметром нагружения α^* (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) задана равенством $\alpha^* = \omega_0^e - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)$</p> <p>где $\omega_0^e = \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)}{G_0} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta$</p> <p>Угол поворота в пластической области $\alpha^p = \omega_0^e - \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{G_0} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta$</p> <p>Здесь распределение накопленной пластической деформации определяется равенством $\tilde{\tau}_y(q) R(q) = (r_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)$</p> <p>Величина касательного напряжения на внешней поверхности $\frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} \Big _{r=r_1} = 2(\omega_0^e - \alpha^*)$</p>

Продолжение табл. 1

3. Весь полый цилиндр находится в пластическом состоянии	
Условие	$\alpha^* \geq \alpha_{cr2}^*$ <p style="text-align: center;"><i>Достаточное условие существования решения</i></p> $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[\frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}} - 1 \right]; q \in [0, q_0]$
Решение	<p style="text-align: center;"><i>Угол поворота</i></p> $\alpha = \alpha^p = \omega_0^e - \frac{G_0}{2} \left[1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{G_0} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta$ <p style="text-align: center;">Распределение накопленной пластической деформации определяется равенством</p> $\tilde{\tau}_y(q) R(q) = (r_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)$ <p style="text-align: center;">Связь параметра q_0 с параметром нагружения α^* (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) задана равенством</p> $\alpha^* = \left[G_0 + \sqrt{3} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta \right] \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{q_1}^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta,$ <p style="text-align: center;">где величина $q_1 = q _{r=r_1}$ связана с q_0 равенством</p> $\frac{\tilde{\tau}_y(q_1) R(q_1)}{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)} = \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2$ <p style="text-align: center;"><i>Величина касательного напряжения на внешней поверхности</i></p> $\left. \frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} \right _{r=r_1} = \tilde{\tau}_y(q_1) R(q_1)$

Замечание 3. Достаточное условие (8.2) может служить для определения границ применимости решения для тех моделей упрочнения, для которых (8.2) выполняется только на некотором интервале накопленной пластической деформации $q \in [0, q_{cr}]$. Например, для линейной модели упрочнения $\tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0}(1 + hq)$ решение существует, пока накопленная пластическая деформация не превысит значения q_{cr} , определяемого уравнением

$$(mk^2 - 1)k = n \quad (8.3)$$

$$k = \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2(1 + hq_{cr})^2}, \quad m = \tilde{\tau}_{y0}h/\sqrt{3}, \quad n = 2/\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1\right)$$

Замечание 4. Круговой сдвиг в жестко-пластическом материале с ограниченным упрочнением исследовался в [48], где также отмечается, что решение существует до определенной конечной величины деформации.

9. Полное решение. Итак, полное решение для материала Муни – Ривлина с упругим потенциалом $\Psi = C_1 |I_1(\mathbf{B}^e) - 3| + C_2 |I_2(\mathbf{B}^e) - 3|$, $C_1, C_2 \geq 0$, с модулем сдвига $\mu = 2(C_1 + C_2)$, и условием пластичности Треска $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y(q)$, где $\tau_y(q)$ – известная функция упрочнения, приведено в табл. 1.

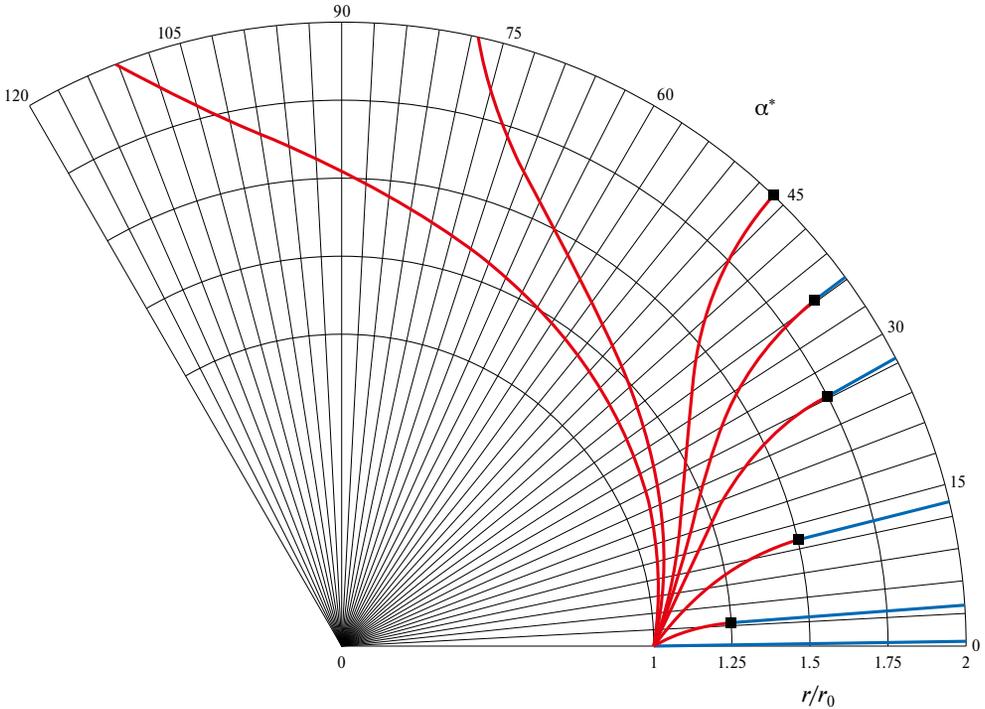


Рис. 3. Искривление изначально радиально направленных материальных волокон после кругового сдвига (угол поворота α^* в градусах). Символ «■» обозначает положение упруго-пластической границы.

10. Пример решения. Используя данные [49] о пластическом деформировании ПВХ (поливинилхлорид, «lightly plasticized PVC» в цитируемой работе) при растяжении, можно получить следующее представление линейной функции упрочнения материала: $\tau_y = \tau_{y0}(1 + hq)$, $\tau_{y0} = 20$ МПа, $h = 1.8$. Модуль сдвига ПВХ $\mu = 1$ ГПа, безразмерная величина $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu = 0.02$. Тогда $m = \tilde{\tau}_{y0}h/\sqrt{3} \approx 0.0208$, $n = 2/\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1\right) \approx 0.9999$, и, решая (8.3), имеем $k \approx 1.01028$, откуда $q_{cr} = \frac{1}{h} \left[\frac{\sqrt{Q^2 - 1}}{\tilde{\tau}_{y0}} - 1 \right] = 3.4$. Таким образом, представленное здесь решение можно использовать до достижения параметром $q_0 = q|_{r=r_0}$ величины 3.4 (как минимум).

Далее, константа $G_0 = \sqrt{2\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1\right)} \approx \tilde{\tau}_{y0} = 0.02$. Пусть деформируется полый цилиндр с соотношением радиусов $r_1/r_0 = 2$. Угол поворота внешней поверхности, при котором наступит пластическое течение $\alpha_{cr1}^* = (G_0/2)\left[1 - (r_0/r_1)^2\right] = 0.0075$ радиан. Вычисляя интегралы в аналитическом решении из таблицы предыдущего раздела, получаем следующие результаты.

На рис. 3 приведено искривление материальных волокон, изначально направленных радиально, при углах поворота внешней поверхности $\alpha^* = 0.0075, 0.0668, 0.2327, 0.4786, 0.6322, 0.809, 1.354, 1.945$ (все значения в радианах). Угол $\alpha_{cr2}^* = 0.809$ радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние. Первые пять значений угла соответствуют относительной протяженности пластической области $(r_{ep} - r_0)/(r_1 - r_0) = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 7/8$.

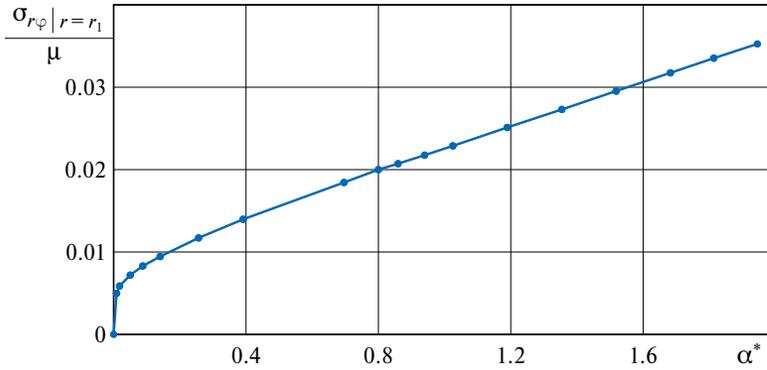


Рис. 4. Связь касательного напряжения на внешней поверхности образца с углом поворота α^* (в радианах). Значение $\alpha^* = \alpha_{cr2}^* = 0.809$ радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние.

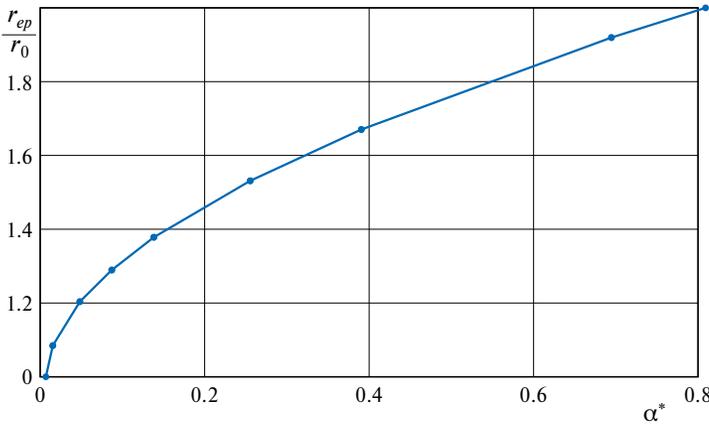


Рис. 5. Распространение упруго-пластической границы (угол поворота α^* в радианах).

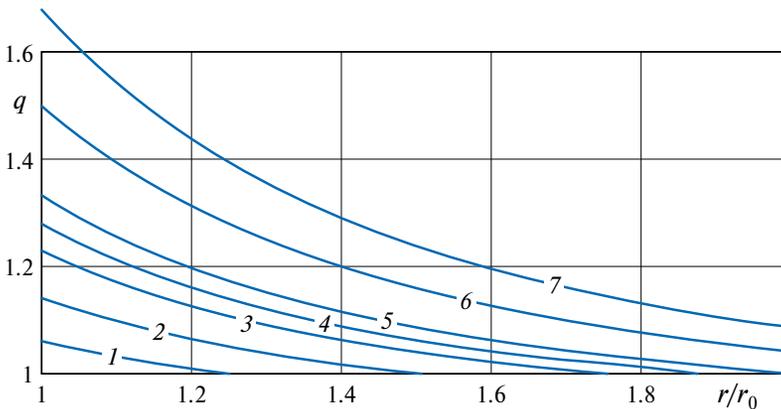


Рис. 6. Распределение накопленной пластической деформации по сечению образца: $1 - \alpha^* = 0.0668$, $2 - \alpha^* = 0.2327$, $3 - \alpha^* = 0.4786$, $4 - \alpha^* = 0.6322$, $5 - \alpha^* = 0.809$, $6 - \alpha^* = 1.354$, $7 - \alpha^* = 1.945$ (угол поворота α^* в радианах).

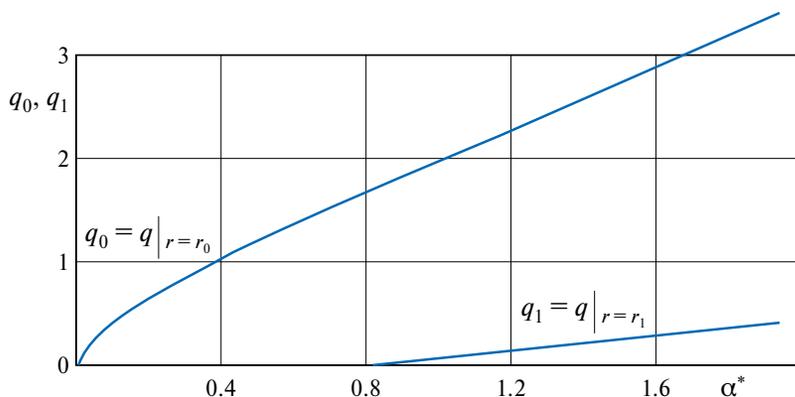


Рис. 7. Эволюция накопленной пластической деформации на граничных поверхностях (угол поворота α^* в радианах). Значение $\alpha^* = \alpha_{cr2}^* = 0,809$ радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние.

Связь между величиной касательного напряжения на внешней поверхности образца и углом поворота α^* приведена на рис. 4. На рис. 5 показано продвижение упруго-пластической границы в материале.

На рис. 6 приведено распределение накопленной пластической деформации по сечению образца при различных углах поворота внешней поверхности. На рис. 7 показана эволюция накопленной пластической деформации на внутренней и внешней поверхностях образца.

Заключение. В представленном исследовании получено аналитическое решение задачи плоской деформации об упруго-пластическом круговом сдвиге в полем цилиндре, упругие свойства которого описываются моделью Муни–Ривлина, а пластические – моделью Треска с произвольным изотропным упрочнением. Решение включает зависимость между углом поворота внешней границы и приложенным касательным напряжением; распределение накопленной пластической деформации по сечению образца; закон распространения упруго-пластической границы; формулы для перемещения материальных точек (угол поворота). Установлены достаточные для существования решения условия, налагаемые на функцию упрочнения (формула (8.2)). Приведен пример решения для ПВХ-трубы с линейным упрочнением.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (проект 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
2. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
5. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
6. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаныук Л.В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Докл. РАН. 2016. Т. 470 (3). С. 275–278.
7. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V. 90. P. 829–845.

- <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
8. *Работнов Ю.Н.* Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избр. тр. М.: Наука, 1991.
 9. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // в сб.: *Вопр. прочн. матер. и констр.* М.: Изд-во АН СССР, 1959.
 10. *Работнов Ю.Н.* Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // *Изв. РАН. МТТ.* 1967. №3. С. 36–41.
 11. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016.
 12. *Волков И.А., Игумнов Л.А.* Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017.
 13. *Локощенко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С.* Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // *Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 24 (2). С. 275–318.
 14. *Работнов Ю.Н.* Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела // *ПММ.* 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 164–169.
 15. *Работнов Ю.Н.* Механика твердого тела и пути ее развития // *Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр.* 1962. №2. С. 3–10.
 16. *Клюшников В.Д.* О задачах пластичности для материала с упрочнением // *ПММ.* 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 97–118.
 17. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
 18. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
 19. *Shutov A.V., Kaigorodtseva A.A.* Sample shapes for reliable parameter identification in elasto-plasticity // *Acta Mech.* 2020. V. 231. P. 4761–4780.
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>
 20. *Shutov A.V., Kreißig R.* Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: phenomenological modeling and time integration // *Comput. Meth. Appl. Mech.* 2008. V.197 (21–24). P. 2015–2029.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.12.017>
 21. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013.
 22. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Устинова А.С.* Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // *ПМТФ.* 2008. Т. 49. № 2. С. 277–284.
 23. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 2. С. 146–158.
 24. *Бегун А.С., Ковтаниук Л.В.* Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала при его нагреве вследствие пристенного трения // *ПМТФ.* 2021. Т. 62. №5. С. 89–99.
 25. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* К расчетам больших неизотермических деформаций упруговязкопластических материалов // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 638–653.
 26. *Севастьянов Г.М., Буренин А.А.* Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // *ПМТФ.* 2019. Т. 60. № 6. С. 149–161.
 27. *Буренин А.А., Устинова А.С.* Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // В сб. научн. тр. к 70-летию академика В.А. Левина Владивосток: 2009.
 28. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* Винтовое вязкопластическое течение в зазоре между жесткими цилиндрами // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 55–70.
 29. *Севастьянов Г.М., Бормотин К.С.* Упругопластическое кручение с конечными деформациями: Сравнение аналитического и МКЭ-моделирования для немонотонно упрочняющихся полимеров // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* 2023. № 3. С. 124–136.
 30. *Sevastyanov G.M.* Finite-strain elastic-plastic torsion: comparison of von Mises and Tresca materials // *Mater. Phys. Mech.* 2023. V. 51. № 2. P. 140–150.
https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13
 31. *Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н.* Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // *ПММ.* 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1014–1022.

32. *Toth L.S., Arzaghi M., Fundenberger J.J., Beausir B., Bouaziz O., Arruffat-Massion R.* Severe plastic deformation of metals by high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.* 2009. V. 60. № 3. P. 175–177.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.09.029>
33. *Wang J.T., Li Zh., Wang J., Langdon T.G.* Principles of severe plastic deformation using tube high-pressure shearing // *Scripta Mater.* 2012. V. 67. № 10. P. 810–813.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.028>
34. *Faraji G., Kim H.S.* Review of principles and methods of severe plastic deformation for producing ultrafine-grained tubes // *Mater. Sci. Tech.* 2016. V. 33. № 8. P. 905–923.
<https://doi.org/10.1080/02670836.2016.1215064>
35. *Pougis A., Toth L.S., Bouaziz O., Fundenberger J.J., Barbier D., Arruffat R.* Stress and strain gradients in high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.* 2012. V. 66. № 10. P. 773–776.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.02.004>
36. *Lapovok R., Qi Y., Ng H.P., Toth L.S., Estrin Yu.* Gradient structures in thin-walled metallic tubes produced by continuous high pressure tube shearing process // *Adv. Eng. Mater.* 2017. V. 19. Art. No. 1700345.
<https://doi.org/10.1002/adem.201700345>
37. *Lapovok R., Pougis A., Lemiale V., Orlov D., Toth L.S., Estrin Yu.* Severe plastic deformation processes for thin samples // *J. Mater. Sci.* 2010. V. 45. P. 4554–4560.
<https://doi.org/10.1007/s10853-010-4403-x>
38. *Lapovok R., Ng H.P., Tomus D., Estrin Yu.* Bimetallic copper-aluminium tube by severe plastic deformation // *Scripta Mater.* 2012. V. 66. P. 1081–1084.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.03.004>
39. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
40. *Шитиков А.В., Быковцев Г.И.* Конечные деформации упругопластических сред // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311 (1). С. 59–62.
41. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтаниук Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *Докл. РАН.* 1996. Т. 347 (2). С. 199–201.
42. *Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.* Some basic kinematical relations for finite deformations of continua // *Mech. Mater.* 1987. V. 6. №2. P. 127–138.
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90003-2)
43. *Levitas V.I.* Large Deformation of Materials with Complex Rheological Properties at Normal and High Pressure. New York: Nova Sci. Pub., 1996
44. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plasticity.* 2016. V. 84. P. 33–57.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
45. *Sevastyanov G.M.* Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 206. P. 383–395.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>
46. *Роговой А.А.* Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // *ПМТФ.* 2007. 48 (4), 144–153.
47. *Роговой А.А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Ч. II. М.;Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2023.
48. *Alexandrov S., Richmond O.* Couette flows of rigid/plastic solids: analytical examples of the interaction of constitutive and frictional laws // *Int. J. Mech. Sci.* 2001. V. 43. № 3. P. 653–665.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00045-X)
49. *Haward R.N.* The derivation of a strain hardening modulus from true stress-strain curves for thermoplastics // *Polymer.* 1994. V. 35. № 18. P. 3858–3862.
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(94\)90268-2](https://doi.org/10.1016/0032-3861(94)90268-2)

Finite-Strain Elastic-Plastic Circular Shear in Materials with Isotropic Hardening

G. M. Sevastyanov^{a, #}, A. S. Begun^{a, ###}, A. A. Burenin^{a, ###}

^a*Institute of Mechanical Science and Metallurgy KhFRC FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

[#]*e-mail: akela.86@mail.ru,*

^{##}*e-mail: ustanova@iacp.dvo.ru,*

^{###}*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru*

This study presents an analytical solution to the problem of azimuthal shear in a hollow circular cylinder, isotropic and incompressible, the elastic properties of which are described by the Mooney – Rivlin model, and the plastic properties by the Tresca model with arbitrary monotonic hardening. Both elastic and plastic deformations are assumed to be finite. Sufficient conditions for the existence of the presented solution are given.

Keywords: plasticity, hyperelasticity, circular shear, finite strain, isotropic hardening

REFERENCES

1. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of Deformable Solids. Moscow: Nauka, 1979. (in Russian)
2. *Myasnikov V.P.* Equations of motion of elastoplastic materials under large deformations // Bull. of the FEB RAS, 1996, vol. 4, pp. 8–13. (in Russian)
3. *Rabotnov Yu.N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. (in Russian)
4. *Il'yushin A.A.* Plasticity. Moscow: USSR Acad. of Sci., 1963. (in Russian)
5. *Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian)
6. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466.
<https://doi.org/10.1134/S102833581609007X>
7. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech., 2020, vol. 90, pp. 829–845.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
8. *Rabotnov Yu.N.* Problems of Mechanics of Deformable Solids. Selected papers. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian)
9. *Rabotnov Yu.N.* On the mechanism of long-term destruction // Issues of Strength of Mater.&Struct. Moscow: USSR Acad. of Sci., 1959. (in Russian)
10. *Rabotnov Yu.N.* Effect of stress concentration on long-term strength // Mech. Solids, 1967, vol. 3, pp. 36–41. (in Russian)
11. *Lokoshchenko A.M.* Creep and Long-Term Strength of Metals. Moscow: Fizmatlit, 2016. (in Russian)
12. *Volkov I.A., Igumnov L.A.* Introduction to Continuum Mechanics of Damaged Media. Moscow: Fizmatlit, 2017. (in Russian)
13. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Teraud W.V., Basalov Yu.G., Agababyan V.S.* Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review) // Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.&Math. Sci., 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1765>
14. *Rabotnov Yu.N.* Model illustrating some properties of a hardening plastic body // JAMM, 1959, vol. 23, iss. 1, pp. 219–228.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90068-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90068-1)
15. *Rabotnov Yu.N.* Solid mechanics and ways of its development // Proc. USSR Acad. of Sci. Dept. Techn. Sci. Mech.&Mech. Engng., 1962, vol. 2, pp. 3–10. (in Russian)
16. *Kliushnikov V.D.* On plasticity laws for work-hardening materials // JAMM, 1958, vol. 22, iss. 1, pp. 129–160.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(58\)90088-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(58)90088-1)

17. *Ivlev D.D., Bykovtsev G.I.* Theory of a Hardening Plastic Solid. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)
18. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. (in Russian)
19. *Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A.* Sample shapes for reliable parameter identification in elastoplasticity // *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, pp. 4761–4780.
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>
20. *Shutov A.V., Kreißig R.* Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: phenomenological modeling and time integration // *Comput. Meth. Appl. Mech.* 2008, vol. 197 (21–24), pp. 2015–2029.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.12.017>
21. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffects. Vladivostok: Dalnauka, 2013 (in Russian)
22. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Ustinova A.S.* Accounting for the elastic properties of a non-Newtonian material under its viscosimetric flow // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, pp. 277–284.
<https://doi.org/10.1007/s10808-008-0038-y>
23. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Flow of an elastoviscoplastic material between rotating cylindrical surfaces with nonrigid cohesion // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, pp. 293–303.
<https://doi.org/10.1134/S0021894415020157>
24. *Begun A.S., Kovtanyuk L.V.* Viscometric flow of elastoplastic material heated by wall friction // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, pp. 779–788.
<https://doi.org/10.1134/S0021894421050096>
25. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Calculations of large nonisothermal deformations of elastoviscoplastic materials // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, pp. 2066–2077.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422080052>
26. *Sevast'yanov G.M., Burenin A.A.* Local adiabatic heating effect in finite-strain elastic-plastic torsion // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, pp. 1104–1114.
<https://doi.org/10.1134/S002189441906016627>
27. *Burenin A.A., Ustinova A.S.* Development and inhibition of helical viscoplastic flow with calculation of the elastic response after stopping the flow and unloading // in: *The Coll. of Papers Dedicated to the 70th Anniv. of Acad. V.A. Levin.* Vladivostok: 2009. (in Russian)
28. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Helical viscoplastic flow in a gap between rigid cylinders // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 640–652.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060048>
29. *Sevastyanov G.M., Bormotin K.S.* Finite-strain elastic-plastic torsion: analytical and fem modeling for nonmonotonically hardening polymers // *PNRPU Mech. Bull.*, 2023, vol. 3, pp. 124–136.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.11>
30. *Sevastyanov G.M.* Finite-strain elastic-plastic torsion: comparison of von Mises and Tresca materials // *Mater. Phys. Mech.*, 2023, vol. 51, no. 2, pp. 140–150.
https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13
31. *Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N.* Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations // *JAMM*, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 804–811.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7)
32. *Toth L.S., Arzaghi M., Fundenberger J.J., Beausir B., Bouaziz O., Arruffat-Massion R.* Severe plastic deformation of metals by high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.*, 2009, vol. 60, no. 3, pp. 175–177.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.09.029>
33. *Wang J.T., Li Zh., Wang J., Langdon T.G.* Principles of severe plastic deformation using tube high-pressure shearing // *Scripta Mater.*, 2012, vol. 67, no. 10, pp. 810–813.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.028>
34. *Faraji G., Kim H.S.* Review of principles and methods of severe plastic deformation for producing ultrafine-grained tubes // *Mater. Sci. Tech.*, 2016, vol. 33, no. 8, pp. 905–923.
<https://doi.org/10.1080/02670836.2016.1215064>
35. *Pougis A., Toth L.S., Bouaziz O., Fundenberger J.J., Barbier D., Arruffat R.* Stress and strain gradients in high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.*, 2012, vol. 66, no. 10, pp. 773–776.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.02.004>

36. *Lapovok R., Qi Y., Ng H.P., Toth L.S., Estrin Yu.* Gradient structures in thin-walled metallic tubes produced by continuous high pressure tube shearing process // *Adv. Eng. Mater.*, 2017, vol. 19, art. no. 1700345.
<https://doi.org/10.1002/adem.201700345>
37. *Lapovok R., Pougis A., Lemiale V., Orlov D., Toth L.S., Estrin Yu.* Severe plastic deformation processes for thin samples // *J. Mater. Sci.*, 2010, vol. 45, pp. 4554–4560.
<https://doi.org/10.1007/s10853-010-4403-x>
38. *Lapovok R., Ng H.P., Tomus D., Estrin Yu.* Bimetallic copper-aluminium tube by severe plastic deformation // *Scripta Mater.*, 2012, vol. 66, pp. 1081–1084.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.03.004>
39. *Korobeinikov S.N.* Nonlinear Deformation of Solids. Novosibirsk: SB RAS, Pub., 2000. (in Russian)
40. *Shitikov A.V., Bykovtsev G.I.* Finite deformations of elastoplastic media // *Dokl. Phys.*, 1990, vol. 311, no. 1, pp. 59–62. (in Russian)
41. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* A simple model of finite strain in an elastoplastic medium // *Dokl. Phys.*, 1996, vol. 347, no. 2, pp. 199–201. (in Russian)
42. *Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.* Some basic kinematical relations for finite deformations of continua // *Mech. Mater.*, 1987, vol. 6, no. 2, pp. 127–138.
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90003-2)
43. *Levitas V.I.* Large Deformation of Materials with Complex Rheological Properties at Normal and High Pressure. N.Y.: Nova Sci. Pub., 1996.
44. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plast.*, 2016, vol. 84, pp. 33–57.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
45. *Sevastyanov G.M.* Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 206, pp. 383–395.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>
46. *Rogovoi A.A.* Thermodynamics of finite strain elastic-inelastic deformation // *J. Appl. Mech. & Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 591–598.
<https://doi.org/10.1007/s10808-007-0074-z>
47. *Rogovoy A.A.* Formalized Approach to Constructing Models of the Mechanics of a Deformable Solid. Pt. II. Moscow; Izhevsk: Inst. of Comput. Res., 2023.
48. *Alexandrov S., Richmond O.* Couette flows of rigid/plastic solids: analytical examples of the interaction of constitutive and frictional laws // *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 3, pp. 653–665.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00045-X)
49. *Haward R.N.* The derivation of a strain hardening modulus from true stress-strain curves for thermoplastics // *Polymer*. 1994. vol. 35, no. 18, pp. 3858–3862.
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(94\)90268-2](https://doi.org/10.1016/0032-3861(94)90268-2)