

ISSN 0032-8235

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

(ПММ)

т. 87, вып. 6



МОСКВА 2023

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 87. Iss. 6

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, S.V. Nesterov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

| | |
|--|------|
| Кинематическое истолкование движения твердого тела в новом решении уравнений Гриоли <i>Г. В. Горр</i> | 901 |
| Кватернионная регуляризация особенностей моделей астродинамики, порождаемых гравитационными силами (обзор) <i>Ю. Н. Челноков</i> | 915 |
| К задаче об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил <i>Г. М. Розенблат, С. А. Решмин</i> | 954 |
| Управление подавлением радиальных колебаний двухмассовой системы с одновременным ее раскручиванием <i>С. А. Васенин, С. А. Решмин</i> | 970 |
| Движение изменяемого тела с неподвижной точкой в зависящем от времени силовом поле <i>А. А. Буров</i> | 984 |
| Амплитудно-частотные характеристики и области устойчивости двухслойной жидкости при угловых колебаниях твердого тела <i>Вин Ко Ко, А. Н. Темнов</i> | 995 |
| Собственные колебания газа в резонаторе Гельмгольца с периодически изменяющимся поперечным сечением <i>Пью Ко Ко</i> | 1006 |
| Влияние релаксации поверхностного натяжения на устойчивость заряженной струи <i>А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева, С. О. Ширяева</i> | 1014 |
| Одномерное растекание нефтепродуктов по поверхности воды <i>А. В. Кистович, Т. О. Чаплина</i> | 1028 |
| Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений <i>Ж. В. Маленко, А. А. Ярошенко</i> | 1037 |

C O N T E N T S

| | |
|--|------|
| Cinematic Interpretation of Motion a Rigid Body in a new Solution of Grioli Equations <i>G. V. Gorr</i> | 901 |
| Quaternion Regularization of Singularities of Astrodynamical Models Generated by Gravitational Forces (Review) <i>Yu. N. Chelnokov</i> | 915 |
| On Optimal Rigid Body Rotation with Internal Forces Application <i>G. M. Rozenblat, S. A. Reshmin</i> | 954 |
| Control of Suppression of Radial Vibrations of a Two-Mass System with Its Simultaneous Spinning-Up <i>S. A. Vasenin, S. A. Reshmin</i> | 970 |
| Motion of a Variable Body with a Fixed Point in a Time-dependent Force Field <i>A. A. Burov</i> | 984 |
| Amplitude-Frequency Characteristics and Stability Regions of a Two-Layer Liquid under Angular Vibrations of a Solid Body <i>Win Ko Ko, A. N. Temnov</i> | 995 |
| Natural Vibrations of a Gas in a Helmholtz Resonator with a Periodically Varying Cross-Section <i>Phyo Ko Ko</i> | 1006 |
| Effect of Surface Tension Relaxation on the Stability of the Charged Jet <i>A. I. Grigoryev, N. Yu. Kolbneva, S. O. Shiryaeva</i> | 1014 |
| One-dimensional Spreading of Petroleum Products on the Surface of the Water <i>A. V. Kistovich, T. O. Chaplina</i> | 1028 |
| Three-Dimensional Bending-Gravitational Waves in a Floating Ice Sheet from a Moving Source of Disturbances <i>Zh. V. Malenko, A. A. Yaroshenko</i> | 1037 |

УДК 531.38; 531.39

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГРИОЛИ

© 2023 г. Г. В. Горп^{1,*}

¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*e-mail: gvgorr@gmail.com

Поступила в редакцию 25.05.2023 г.

После доработки 23.08.2023 г.

Принята к публикации 25.09.2023 г.

В статье получено новое решение уравнений Гриоли задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил. С использованием модифицированного метода Пуансо, предложенного автором статьи, показано, что движение тела в построенном решении представляется качением без скольжения эллипсоида инерции тела по неподвижной в пространстве плоскости. Данный результат можно отнести к аналогу результата Пуансо, полученному в истолковании движения тела в решении Эйлера.

Ключевые слова: решение уравнений Гриоли, кинематическое истолкование, модифицированный метод Пуансо

DOI: 10.31857/S0032823523060048, EDN: HWKSFN

1. Введение. В динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, большое значение имеют геометрические исследования свойств движения тела. Известным примером истолкования движения тела в задаче о движении тяжелого твердого тела является результат Л. Пуансо [1], который доказал, что движение тела в классическом решении Л. Эйлера можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции тела по неподвижной в пространстве плоскости. Большой вклад в исследование движения тяжелого твердого тела внесли Д. Сильвестр [2], который интерпретировал движение тела качением центральной поверхности второго порядка по одной из ее касательных плоскостей, неподвижной в пространстве; Д. Мак-Куллаг [3], изучавший движение гирационного эллипсоида в решении Эйлера, и другие [4–9]. Обзор классических результатов, полученных в кинематическом истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку, представлен в учебнике по теоретической механике [10], в монографиях [11, 12], в которых особое внимание уделено уравнениям П.В. Харламова [13], описывающим уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости. Благодаря применению этих уравнений получено геометрическое истолкование движения тела во многих решениях уравнений Эйлера–Пуассона и их обобщений на случай, когда учитываются движения несомых тел (систем, называемых гироскатом). В статье [9] Н.Е. Жуковский отмечал большое значение геометрического истолкования в теоретической механике. В статье [14] предложен модифицированный метод Пуансо, который основан на рассмотрении свойств вектора, который коллинеарен вектору угловой скорости. Показано [15], что в одном из решений [16], полученном в задаче о движении твердого тела в потенциальном силовом поле, движение тела пред-

ставляется качением без скольжения эллипсоида инерции тела по неподвижной в пространстве плоскости.

Данная статья посвящена изучению уравнений Гриоли [17], которые являются наиболее общими уравнениями движения тела под действием потенциальных и гироскопических сил, допускающими три первых интеграла. Частный вариант этих уравнений в другой постановке рассматривал Х.М. Яхья [18, 19]. В статье [20] показана эквивалентность уравнений Д. Гриоли и Х.М. Яхьи. Для доказательства данного утверждения применялся метод инвариантных соотношений (ИС) построения частных решений уравнений динамики твердого тела [21]. При этом рассматривались три линейных ИС для компонент момента количества движения и применялись методы решения обратных задач механики и метод ИС [22], который имеет отличие от метода [21]. Следует отметить и уравнения М.П. Харламова [23], полученные в исследовании движений механических систем под действием гироскопических сил. Они также являются частной формой уравнений Гриоли.

В данной статье рассмотрены три линейных ИС по компонентам момента количества движения тела, правые части которых зависят от компонент единичного вектора оси симметрии силовых полей. Используя метод решения обратных задач, находится потенциальная функция и функция, характеризующая гироскопические силы. Третья функция, входящая в правые части уравнений Гриоли, не содержится в первых интегралах данных уравнений и она равна дивергенции вектора момента количества движения. Далее полагается, что конец вспомогательного вектора, введенного в модифицированном методе Пуансо [14], принадлежит эллипсоиду инерции тела в неподвижной точке, а градиент к эллипсоиду ортогонален неподвижной в пространстве плоскости. Это требование на структуру заданных ИС дает возможность выразить компоненты вектора момента количества движения через линейные функции от первой и второй компонент вектора оси симметрии силовых полей и произвольную дифференцируемую функцию от третьей компоненты указанного вектора. Таким образом, в статье найдено новое решение уравнений Гриоли и установлено, что движение можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости. Полученный в статье результат дополняет исследования [15, 24, 25], увеличивая число случаев в динамике твердого тела, которые являются аналогом истолкования Пуансо [14].

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями Гриоли [17]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{ax} + \mu(v_1, v_2, v_3)(\mathbf{v} \times \mathbf{ax}) + \frac{\partial L(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{ax} + \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{ax}) \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.1), (2.2) введены обозначения: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор момента количества движения; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $a = \text{diag} \left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_3} \right)$ (A_1, A_2, A_3 – главные моменты инерции) – матрица гирационного тензора; $\mu(v_1, v_2, v_3)$, $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ – дифференцируемые функции от v_1, v_2, v_3 ; $\frac{\partial L(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} = \overline{\text{grad}} L(v_1, v_2, v_3)$, $\frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} = \overline{\text{grad}} U(v_1, v_2, v_3)$; точка над x и \mathbf{v} обозначает относительную производную по времени t . Уравнения (2.1), (2.2) имеют первые интегралы

$$a\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2U(v_1, v_2, v_3) = 2E, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + L(v_1, v_2, v_3) = k; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (2.3)$$

где E и k – произвольные постоянные.

В монографии [22] на основании применения метода решения обратной задачи механики исследованы условия существования инвариантных соотношений (ИС):

$$x_1 = g_1(v_1, v_2, v_3), \quad x_2 = g_2(v_1, v_2, v_3), \quad x_3 = g_3(v_1, v_2, v_3), \quad (2.4)$$

где $g_i(v_1, v_2, v_3)$ ($i = \overline{1,3}$) – дифференцируемые функции от v_i ($i = \overline{1,3}$). Показано, что если функции $U(v_1, v_2, v_3)$, $L(v_1, v_2, v_3)$ находить из первых интегралов (2.3), то уравнения (2.1), (2.2) допускают ИС (2.4) при выполнении равенства

$$\mu(v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial g_1(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1} + \frac{\partial g_2(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial g_3(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_3} \quad (2.5)$$

В данной статье применен модифицированный метод Пуансо, установленный в [14]. Согласно этому методу, вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ сопоставим в соответствие вектор $\mathbf{b}(t)$:

$$\mathbf{b}(t) = B(t)\boldsymbol{\omega}(t) \quad (B(t) \in C^1) \quad (2.6)$$

Введем главную подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Неподвижную систему координат обозначим через $O\xi\eta\zeta$, а ее единичные векторы – через $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$.

Запишем $\mathbf{b}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\mathbf{b}(t) = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{A_1} x_1 \mathbf{i}_1 + \frac{1}{A_2} x_2 \mathbf{i}_2 + \frac{1}{A_3} x_3 \mathbf{i}_3 \quad (2.7)$$

Эллипсоид инерции тела описывается уравнением

$$\Phi(x, y, z) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 - \sigma_0^2 = 0 \quad (\sigma_0^2 = \text{const}) \quad (2.8)$$

Касательная плоскость к поверхности (2.8) ортогональна вектору

$$\overline{\text{grad}} \Phi(x, y, z) = A_1 x \mathbf{i}_1 + A_2 y \mathbf{i}_2 + A_3 z \mathbf{i}_3 \quad (2.9)$$

Отметим, что в равенствах (2.7) b_i, x_i ($i = \overline{1,3}$) зависят от t .

Постановка задачи. Определить условия на функции (2.4), $B(t)$, при выполнении которых компоненты вектора $\mathbf{b}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$A_1 b_1^2 + A_2 b_2^2 + A_3 b_3^2 = \sigma_0^2 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = k_0 \quad (2.11)$$

$$\overline{\text{grad}} \Phi(b_1, b_2, b_3) = A_1 b_1 \mathbf{i}_1 + A_2 b_2 \mathbf{i}_2 + A_3 b_3 \mathbf{i}_3 = \beta(t)\mathbf{v} \quad (2.12)$$

Поясним механическую трактовку условий (2.10)–(2.12). Равенство (2.10) характеризует свойство того, что конец вектора $\mathbf{b}(t)$ принадлежит эллипсоиду инерции. Равенство (2.11) означает, что неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является плоской кривой. Равенство (2.12) определяет свойство того, что касательная плоскость к эллипсоиду инерции при некоторых условиях на σ_0, k_0 и функцию $\beta(t)$ совпадает с плоскостью (2.11). Следовательно, ставится задача о нахождении решения уравнений (2.1), (2.2), для которого имеет место аналог истолкования движения тела, полученного Пуансо в решении Эйлера. В отличие от подхода Пуансо, при данном подходе концы вектора $\mathbf{b}(t)$

принадлежат эллипсоиду инерции, а в методе Л. Пуансо эллипсоиду инерции принадлежат концы вектора $\omega(t)$.

Отметим, что для применения метода ИС [22] в интегрировании системы уравнений (2.1), (2.2) используется уравнение (2.2), которое в скалярной форме состоит из уравнений

$$\dot{v}_1 = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2, \quad (2.13)$$

где

$$\omega_i = \frac{1}{A_i} g_i(v_1, v_2, v_3) \quad (2.14)$$

3. Исследование уравнений (2.13). Введем углы Эйлера θ, φ, ψ [10]:

$$\theta = \arccos v_3, \quad \varphi = \arctg \frac{v_1}{v_2}, \quad \psi = \frac{\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2}{1 - v_3^2} \quad (3.1)$$

Поскольку предполагается, что уравнения (2.1), (2.2) проинтегрированы, то по формулам (3.1) можно найти углы θ, φ, ψ . Следовательно, подвижный базис $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ в неподвижном базисе $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ получим с помощью переменных θ, φ, ψ . Рассмотрим уравнение (2.12), используя в силу (2.6) значения b_i :

$$b_i = B(t)\omega_i = B(t)\frac{x_i}{A_i} \quad (3.2)$$

и углы Эйлера θ, φ, ψ в матрице, определяющей связь между подвижной и неподвижной системами координат, получим

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad } \Phi} &= B(t)(x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3) = \\ &= B(t)\left\{[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta)x_1 - \right. \\ &\quad \left. - (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta)x_2 + x_3 \sin \psi \sin \theta]\mathbf{v}_1 + \right. \\ &\quad \left. + [(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta)x_1 - (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta)x_2 - \right. \\ &\quad \left. - x_3 \cos \psi \sin \theta]\mathbf{v}_2 + (x_1 \sin \varphi \sin \theta + x_2 \cos \varphi \sin \theta + x_3 \cos \theta)\mathbf{v}_3\right\} = \beta(t)\mathbf{v} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Равенство (3.3) выполняется, если имеют место соотношения

$$x_1 = \frac{v_1 x_3}{v_3}, \quad x_2 = \frac{v_2 x_3}{v_3}, \quad (3.4)$$

которые записаны с учетом выражений $v_1 = \sin \theta \sin \varphi$, $v_2 = \sin \theta \cos \varphi$, $v_3 = \cos \theta$. В качестве независимой функции x_3 в формулах (2.4), (3.4) примем $x_3 = g(v_3)$, где $g(v_3)$ – дифференцируемая функция от v_3 . Тогда ИС (2.4) с учетом (3.4) запишем в виде

$$x_1 = \frac{v_1 g(v_3)}{v_3}, \quad x_2 = \frac{v_2 g(v_3)}{v_3}, \quad x_3 = g(v_3) \quad \left(\mathbf{x} = \frac{g(v_3)}{v_3} \mathbf{v} \right) \quad (3.5)$$

На основании (3.5) равенство (3.3) упрощается:

$$\overline{\text{grad } \Phi} = \frac{B(v_3)g(v_3)}{v_3} \mathbf{v} \quad (3.6)$$

Таким образом, при записи (3.6) в качестве вспомогательной переменной выбрана переменная v_3 . Из (3.5), (3.6) следует значение функции $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \frac{B(v_3(t))g(v_3(t))}{v_3(t)}$$

Пусть γ – множество решений уравнений (2.13), в которых ω_i в силу (2.14), (3.5) имеют вид

$$\omega_1 = \frac{v_1 g(v_3)}{A_1 v_3}, \quad \omega_2 = \frac{v_2 g(v_3)}{A_2 v_3}, \quad \omega_3 = \frac{g(v_3)}{A_3} \quad (3.7)$$

Запишем уравнения (2.13), принимая во внимание равенства (3.7):

$$\dot{v}_1 = \frac{g(v_3)(A_2 - A_3)v_2 v_3}{v_3 A_2 A_3}, \quad \dot{v}_2 = \frac{g(v_3)(A_3 - A_1)v_3 v_1}{v_3 A_3 A_1}, \quad \dot{v}_3 = \frac{g(v_3)(A_1 - A_2)v_1 v_2}{v_3 A_1 A_2} \quad (3.8)$$

Таким образом, множество γ определяется соотношениями

$$v_i = v_i(t), \quad (3.9)$$

которые описывают решение системы (3.8). Отметим, что в уравнениях $g(v_3)$ – произвольная дифференцируемая функция от v_3 ; функции $L(v_1, v_2, v_3)$ и $U(v_1, v_2, v_3)$ на ИС (3.7) найдем, используя первые интегралы (2.3):

$$L(v_1, v_2, v_3) = k - \frac{g(v_3)}{v_3} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \quad (3.10)$$

$$2U(v_1, v_2, v_3) = \frac{g^2(v_3)}{v_3^2 A_1 A_2 A_3} (A_2 A_3 v_1^2 + A_1 A_3 v_2^2 + A_1 A_2 v_3^2) - 2E \quad (3.11)$$

В монографии [22] показано, что в функции (3.10) при нахождении $\overline{\text{grad}} L(v_1, v_2, v_3)$ нельзя выражение $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ заменять единицей, так как в противном случае из уравнений (2.1), (2.2) не следует условие (2.5) (ниже будет приведен пример этого свойства).

Из векторного представления \mathbf{x} из (3.5) следует, что вектор \mathbf{x} коллинеарен вектору \mathbf{v} , а переменность его модуля зависит от функции $g(v_3) : v_3$. Данное свойство возможно и в задаче о движении *тяжелого твердого тела*, несущего ротор, то есть в задаче о движении гиростата [26] под действием силы тяжести. Из формул (3.10), (3.11) следует, что функции $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ имеют сингулярный вид. Такого вида функции рассматривали ранее [27–29] и другие (см. монографию [30]) без объяснения применения результатов в каких-либо силовых полях, так как они решали математические проблемы существования соответствующих решений уравнений динамики твердого тела. Объяснение применимости сингулярных функций $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ дано в статьях [31, 32] при рассмотрении задач квантовой механики.

В дальнейшем целесообразно рассматривать два варианта ИС (3.7). В первом варианте (см. (3.5)) полагаем, что $g(v_3)$ – произвольная дифференцируемая функция v_3 ; во втором варианте предполагаем, что она определяется из уравнения $\mu(v_1, v_2, v_3) = 0$. Во втором случае из условия (2.5) получим

$$g(v_3) = \frac{g_0}{v_3^2} \quad (3.12)$$

На примере (3.12) покажем, что в формуле (3.10) нельзя заменять выражение $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ единицей. При выполнении условия (3.12) ИС (3.5) таковы:

$$x_1 = \frac{v_1}{v_3} g_0, \quad x_2 = \frac{v_2}{v_3} g_0, \quad x_3 = \frac{1}{v_3} g_0 \quad \left(\mathbf{x} = \frac{g_0}{v_3} \mathbf{v} \right) \quad (3.13)$$

Для наглядности проведенных преобразований запишем динамические уравнения, которые следуют из (2.1), в случае (3.13). Используя функции $L(v_1, v_2, v_3)$, $U(v_1, v_2, v_3)$ из (3.10), (3.11) при значении $g(v_3)$ из (3.12), установим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{g_0^2 v_2}{A_1 A_2 A_3 v_3^7} \left[A_1 (A_2 - A_3) v_3^2 - 3 A_3 (A_1 - A_2) v_1^2 \right] \\ \dot{x}_2 &= \frac{g_0^2 v_1}{A_1 A_2 A_3 v_3^7} \left[A_2 (A_3 - A_1) v_3^2 - 3 A_3 (A_1 - A_2) v_2^2 \right] \\ \dot{x}_3 &= \frac{2 g_0^2 v_1 v_2}{A_1 A_2 v_3^6} (A_2 - A_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Если в левые части системы (3.14) подставить значения (3.13) и воспользоваться уравнениями Пуассона (3.8) при условии (3.12):

$$\dot{v}_1 = \frac{g_0 (A_2 - A_3) v_2 v_3}{v_3^3 A_2 A_3}, \quad \dot{v}_2 = \frac{g_0 (A_3 - A_1) v_3 v_1}{v_3^3 A_3 A_1}, \quad \dot{v}_3 = \frac{g_0 (A_1 - A_2) v_1 v_2}{v_3^3 A_1 A_2}, \quad (3.15)$$

то получим тождества. Таким образом, данные свойства нельзя получить в случае, если в выражении (3.10) применять геометрический интеграл $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$.

4. Интегрирование уравнений Пуассона (3.8), (3.15). Поскольку уравнения (3.8) имеют два первых интеграла

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad A_2 A_3 v_1^2 + A_1 A_3 v_2^2 + A_1 A_2 v_3^2 = c_0^2, \quad (4.1)$$

то интегрирование уравнений (3.8) сводится к квадратурам. Из (4.1) определим функции $v_1^2(v_3)$, $v_2^2(v_3)$:

$$v_1^2 = \frac{A_1 (A_3 - A_2) v_3^2 + c_0^2 - A_1 A_3}{A_3 (A_2 - A_1)}, \quad v_2^2 = \frac{A_2 (A_1 - A_3) v_3^2 + A_2 A_3 - c_0^2}{A_3 (A_2 - A_1)} \quad (4.2)$$

Без ограничения общности полагаем, что главные моменты инерции удовлетворяют неравенствам

$$A_1 < A_2 < A_3 \quad (4.3)$$

Тогда, в силу (4.3), имеют место условия

$$\alpha_0 = \frac{A_1 (A_3 - A_2)}{A_3 (A_2 - A_1)} > 0, \quad \beta_0 = \frac{A_2 (A_3 - A_1)}{A_3 (A_2 - A_1)} > 0$$

Запишем соотношения (4.2) в виде

$$v_1^2 = \alpha_0 (v_3^2 - \alpha_1), \quad v_2^2 = \beta_0 (-v_3^2 + \beta_1), \quad (4.4)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{A_1 A_3 - c_0^2}{A_1 (A_3 - A_2)}, \quad \beta_1 = \frac{A_2 A_3 - c_0^2}{A_2 (A_3 - A_1)} \quad (4.5)$$

Для примера действительности функций (4.4) положим, что параметр c_0^2 удовлетворяет условию

$$A_1 A_3 < c_0^2 < A_2 A_3 \tag{4.6}$$

Тогда переменная v_3 изменяется на множестве

$$v_3 \in \left\{ \left[-\sqrt{\beta_1}, -\sqrt{\alpha_1} \right] \cup \left[\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\beta_1} \right] \right\}, \tag{4.7}$$

где, в силу (4.6), $\alpha_1^2 < \beta_1^2 < 1$, то есть множество (4.7) содержится во множестве $[-1; 1]$, причем $v_3 \neq 0$. Зависимость $v_3(t)$ находим из третьего уравнения системы (3.8) путем обращения интеграла

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{v_3 dv_3}{g(v_3)\sqrt{(v_3^2 - \alpha_1)(-v_3^2 + \beta_1)}} = \frac{(A_1 - A_2)}{A_1 A_2} \sqrt{\alpha_0 \beta_0} (t - t_0) \tag{4.8}$$

В случае (3.12) для вычисления интеграла можно ввести новую переменную $u = v_3^2$. Следовательно, интеграл (4.8) примет вид

$$\int_{u_0}^u \frac{udu}{g_0 \sqrt{(u - \alpha_1)(\beta_1 - u)}} = \frac{2(A_1 - A_2)}{A_1 A_2} \sqrt{\alpha_0 \beta_0} (t - t_0) \tag{4.9}$$

Очевидно, что интеграл в левой части (4.9) вычисляется в элементарных функциях.

5. Исследование уравнений (2.10), (2.11). Подставим в уравнения (2.10), (2.11) значения (3.2), в которых x_i ($i = \overline{1, 3}$) имеют вид (3.5):

$$\frac{B^2(v_3)g^2(v_3)}{A_1 A_2 A_3 v_3^2} F_1(v_1, v_2, v_3) = \sigma_0^2 \tag{5.1}$$

$$\frac{B(v_3)g(v_3)F_1(v_1, v_2, v_3)}{A_1 A_2 A_3 v_3} = k_0, \tag{5.2}$$

где функция $F_1(v_1, v_2, v_3)$ такова:

$$F_1(v_1, v_2, v_3) = A_2 A_3 v_1^2 + A_3 A_1 v_2^2 + A_1 A_2 v_3^2 \tag{5.3}$$

Поскольку уравнения (5.1), (5.2) рассматриваются на многообразии, которое характеризует кривую γ , то, в силу (4.1) (первого интеграла уравнений (3.8)), $F_1(v_1, v_2, v_3) = c_0^2$. Внесем это значение в равенства (5.1), (5.2):

$$B(v_3)g(v_3) = \frac{\sigma_0 \sqrt{A_1 A_2 A_3}}{c_0} v_3 \tag{5.4}$$

$$B(v_3)g(v_3) = \frac{k_0 A_1 A_2 A_3}{c_0^2} v_3 \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.4), (5.5) получим условие

$$\sigma_0 = \frac{k_0 \sqrt{A_1 A_2 A_3}}{c_0^2} \tag{5.6}$$

При выполнении равенства (5.6) уравнения (5.4), (5.5) аналитически эквивалентны. Данное свойство, в силу (2.10), (2.11), является весьма примечательным. Геометрическая трактовка его такова: если конец вектора \mathbf{b} принадлежит эллипсоиду инерции те-

ла, то проекция \mathbf{b} на вектор \mathbf{v} (неподвижный в пространстве) постоянна и наоборот. Если в (5.4) $B(v_3) = B_0$ (это значение можно принять за единицу), то на эллипсоиде инерции тела лежит конец вектора $\boldsymbol{\omega}$. Такое свойство имеет место и в решении Эйлера. При $B(v_3) = 1$ из (5.4) следует равенство

$$g(v_3) = \kappa_0 v_3 \left(\kappa_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{A_1 A_2 A_3}}{c_0} \right) \quad (5.7)$$

Используя $g(v_3)$ из (5.7), запишем ИС (3.5) в векторной форме:

$$\mathbf{x} = \kappa_0 \mathbf{v} \quad (5.8)$$

В силу (5.8) вектор \mathbf{x} не только постоянен по величине, но и неподвижен в пространстве. Это означает, что при $B(v_3) = 1$ для уравнений (2.1), (2.2) имеет место случай Эйлера, который полностью изучен в учебниках по теоретической механике (см., например, [10]). Здесь представляет интерес применение метода решения обратных задач механики, который позволил из уравнений Гриоли получить уравнения Эйлера. Запишем только основные формулы при $x_i = \kappa_0 v_i$:

$$\mu(v_1, v_2, v_3) = 3\kappa_0, \quad 2U(v_1, v_2, v_3) = \kappa_0^2 (a\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - 2E, \quad L(v_1, v_2, v_3) = k - \kappa_0^2 (a\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} = \kappa_0^2 (a\mathbf{x} \times \mathbf{v}), \quad \frac{\partial L(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} \times a\mathbf{x} = -2\kappa_0^2 (\mathbf{v} \times a\mathbf{x}) \quad (5.10)$$

Подстановка величин из (5.9), (5.10) в уравнение (2.1) дает уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x}, \quad (5.11)$$

которое характеризует решение Эйлера. Таким образом, при $B = 1$ имеем: $\mathbf{b}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)$, то есть годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ совпадает с годографом вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Покажем, что при $B(v_3) \neq 1$ годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ существенно отличается от годографа вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$. Запишем (5.4), приняв обозначение $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{A_1 A_2 A_3}}{c_0}$:

$$B(v_3) = \frac{\varepsilon_0 v_3}{g(v_3)} \quad (5.12)$$

Покажем, что вектор $A\mathbf{b}(t)$ коллинеарен вектору \mathbf{v} . В силу равенства $\mathbf{b}(t) = B(v_3)\boldsymbol{\omega}$ для вектора $A\mathbf{b}(t)$ получим значение: $A\mathbf{b}(t) = B(v_3)A\boldsymbol{\omega} = B(v_3)\mathbf{x}$, где вектор \mathbf{x} указан в (3.5). На основании (3.5), (5.12) получим:

$$A\mathbf{b}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{v}, \quad (5.13)$$

то есть в неподвижном пространстве вектор (5.13) постоянен. Очевидно, что для вектора $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$ это свойство не выполняется (см. (3.5)). Использование равенства (5.13) при кинематическом истолковании недостаточно, так как это не позволяет качественно исследовать годографы векторов $\mathbf{b}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ и выполнить их сравнительный анализ. Поскольку при произвольной функции $g(v_3)$ получить конкретный результат невозможно, то в дальнейшем полагаем $\mu(v_1, v_2, v_3) = 0$ (см. [22]).

6. Случай $\mu(v_1, v_2, v_3) = 0$. Рассмотрим случай $\mu(v_1, v_2, v_3) = 0$, который характеризуется равенством (3.12). Компоненты вектора момента количества движения в подвиж-

ной системе координат имеют вид (3.13), компоненты вектора ω в подвижной системе координат определены соотношениями

$$\omega_1 = \frac{g_0 v_1}{A_1 v_3^3}, \quad \omega_2 = \frac{g_0 v_2}{A_2 v_3^3}, \quad \omega_3 = \frac{g_0}{A_3 v_3^2} \quad (6.1)$$

Для нахождения компонент вектора $\mathbf{b}(t) = B(v_3)\omega$ обратимся к уравнению (5.4). Так как $g(v_3) = \frac{g_0}{v_3^2}$, то из (5.4) следует

$$B(v_3) = d_0 v_3^3, \quad (6.2)$$

где

$$d_0 = \frac{\sigma_0 \sqrt{A_1 A_2 A_3}}{g_0 c_0}$$

Для применения комплексного подхода в истолковании движения тела запишем выражения для углов Эйлера из (3.7) с учетом (6.1):

$$\theta = \arccos v_3, \quad \varphi = \arctg \frac{\sqrt{\alpha_0(v_3^2 - \alpha_1)}}{\sqrt{\beta_0(\beta_1 - v_3^2)}} \quad (6.3)$$

$$\psi(v_3) = \frac{1}{A_3(A_1 - A_2)\sqrt{\alpha_0\beta_0}v_3^{(0)}} \int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{(c_0^2 - A_1 A_2 v_3^2) dv_3}{(1 - v_3^2)\sqrt{(v_3^2 - \alpha_1)(\beta_1 - v_3^2)}} \quad (6.4)$$

где вспомогательная переменная v_3 определяется из (4.8):

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{v_3^3 dv_3}{\sqrt{(v_3^2 - \alpha_1)(\beta_1 - v_3^2)}} = \frac{g_0(A_1 - A_2)\sqrt{\alpha_0\beta_0}}{A_1 A_2} (t - t_0) = \tau \quad (6.5)$$

Введем обозначение

$$H(v_3) = -\frac{1}{4} \left[(\alpha_1 + \beta_1) \arcsin \frac{\alpha_1 + \beta_1 - 2v_3^2}{\beta_1 - \alpha_1} + 2\sqrt{(v_3^2 - \alpha_1)(\beta_1 - v_3^2)} \right]$$

Тогда из формулы (6.5) следует

$$H(v_3^{(0)}) - H(v_3) = \tau \quad (v_3^{(0)} = v_3(0)) \quad (6.6)$$

Очевидно, что найти явную зависимость $v_3(\tau)$ из (6.6) невозможно. Поэтому исследование соотношений (6.3)–(6.5) целесообразно провести, не обращаясь к (6.6). Положим, без ограничения общности, что v_3^2 изменяется на отрезке

$$\alpha_1 \leq v_3^2 \leq \beta_1 \quad (6.7)$$

При таком подходе следует учитывать, что радикалы $\sqrt{v_3^2 - \alpha_1}$, $\sqrt{\beta_1 - v_3^2}$ изменяют свои знаки при переходе через граничные значения α_1 , β_1 . Это свойство вытекает из формулы (6.5): $\left. \frac{dv_3}{dt} \right|_{v_3^{(0)}} > 0$ в начальный момент ($v_3^{(0)} = v_3(t_0)$) и в силу периодического изменения

переменной v_3^2 на отрезке (6.7) указанные радикалы изменяют свои знаки. Данный подход необходимо применять при построении подвижного и неподвижного го-

дографов вектора $\mathbf{b}(t)$, а также при истолковании движения тела на основании качения без скольжения эллипсоида инерции тела (2.10) по плоскости (2.11).

Для исследования подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ обратимся к формулам (6.1),

(6.2). С учетом равенств $\omega_i = \frac{b_i}{d_0 v_3}$ ($i = \overline{1,3}$) из (6.1) найдем

$$v_i = \frac{A_i b_i}{\lambda_0} \quad (\lambda_0 = g_0 d_0) \quad (6.8)$$

Подставим v_i из (6.8) в геометрический интеграл $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Тогда получим уравнение

$$A_1^2 b_1^2 + A_2^2 b_2^2 + A_3^2 b_3^2 = \lambda_0^2 \quad (6.9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию уравнений (2.10) и (6.9):

$$A_1 (\lambda_0^2 - \sigma_0^2 A_1) b_1^2 + A_2 (\lambda_0^2 - \sigma_0^2 A_2) b_2^2 + A_3 (\lambda_0^2 - \sigma_0^2 A_3) b_3^2 = 0 \quad (6.10)$$

Следовательно, в качестве подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ можно рассматривать линию пересечения эллипсоида (2.10) и конуса (6.10).

В задачах кинематического истолкования движения твердого тела важную роль играет формула [14]

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \frac{(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}(t)) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{i}_3)}{\mathbf{i}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}(t))}, \quad (6.11)$$

где α – полярный угол уравнений неподвижного годографа. Поскольку функция $\psi(t)$ известна (см. (6.4)), то при замене $\boldsymbol{\omega}$ на \mathbf{b} в (6.11) найдем полярный угол уравнений неподвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$. Однако, этот подход приводит к значительным вычислительным трудностям. Его можно использовать в комплексном подходе [33] истолкования движения тела; для этого необходимо использовать формулы (6.3)–(6.5). В результате движение тела можно описать с помощью углов Эйлера: $\theta = \theta(v_3)$, $\varphi = \varphi(v_3)$, $\psi = \psi(v_3)$.

Преобразуем уравнения [13] с помощью замены $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{B(v_3)} \mathbf{b}$:

$$b_\xi = b_p \cos \alpha, \quad b_\eta = b_p \sin \alpha, \quad b_\zeta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.12)$$

где

$$b_p^2 = b^2 - b_\zeta^2, \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{b_p^2} [\dot{\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{b})] \quad (6.13)$$

На основании равенств (6.8), уравнений (3.15), соотношения (2.11), из равенств (6.12), (6.13) получим

$$b_\zeta(v_3) = k_0 = \frac{\sigma_0^2}{\lambda_0}, \quad b_p^2(v_3) = \frac{\lambda_0^2}{A_1^2 A_2^2 A_3^2} F_2(v_3) \quad (6.14)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{g_0 F_3(v_1, v_2, v_3)}{v_3^3 F_2(v_1, v_2, v_3)} \quad (6.15)$$

$$F_2(v_3) = A_1 A_2 (A_3 - A_1)(A_3 - A_2) v_3^2 - A_3^2 A_1 A_2 + A_3 (A_1 + A_2) c_0^2 - c_0^4 \quad (6.16)$$

$$F_3(v_1, v_2, v_3) = A_1 (A_3 - A_2)^2 v_2^2 v_3^2 + A_2 (A_1 - A_3)^2 v_3^2 v_1^2 + A_3 (A_2 - A_1)^2 v_1^2 v_2^2$$

Построение подвижного годографа (уравнения (6.9), (6.10)) и неподвижного годографа (уравнения (6.14), (6.15)), в силу (4.7), достаточно проводить при $v_3 \in [\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\beta_1}]$.

При таком подходе радикалы $\sqrt{v_3^2 - \alpha_1}$, $\sqrt{\beta_1 - v_3^2}$ после нулевых значений в силу

$$\frac{dv_3}{d\tau} = \sqrt{(v_3^2 - \alpha_1)(\beta_1 - v_3^2)} \quad \left((v_3^{(0)})^2 - \alpha_1 \neq 0, (v_3^{(0)})^2 - \beta_1 \neq 0 \right)$$

изменяют свой знак. При этом полагаем $\left. \frac{dv_3}{d\tau} \right|_{\tau=0} > 0$. Свойство проекции неподвижного годографа установить достаточно просто: эта кривая расположена в кольце с радиусами

$$R_1 = \left| b_p(v_3) \right|_{\alpha_1}, \quad R_2 = \left| b_p(v_3) \right|_{\beta_1}$$

и касается указанных окружностей. В силу формулы (6.15) и свойств функций (6.16) при $g_0 > 0$ угол $\alpha(t)$ убывает, при $g_0 < 0$ угол $\alpha(t)$ возрастает.

Для сопоставления подвижных годографов векторов $\mathbf{b}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ запишем годограф $\boldsymbol{\omega}(t)$ как линию пересечения поверхностей

$$A_1^2 (c_0^2 - A_2 A_3) \omega_1^2 + A_2^2 (c_0^2 - A_1 A_3) \omega_2^2 + A_3^2 (c_0^2 - A_1 A_2) \omega_3^2 = 0 \quad (6.17)$$

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - \frac{c_0^2 A_3^2}{g_0 A_1 A_2} \omega_3^3 = 0 \quad (6.18)$$

Из уравнений (6.9), (6.10) следует, что подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ является линией пересечения поверхностей второго порядка, а из уравнений (6.17), (6.18) – подвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ является линией пересечения поверхности второго порядка (6.17) (конуса) и поверхности третьего порядка (6.18). Следовательно, полодии $\mathbf{b}(t)$ отличаются от полодии $\boldsymbol{\omega}(t)$ в случае Эйлера.

На основании формулы

$$\mathbf{x}(v_3) = \frac{g_0}{v_3^3} \mathbf{v} \quad (6.19)$$

устанавливаем уравнения подвижного годографа \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \frac{A_3}{g_0} x_3^3 \\ x_1^2 (c_0^2 - A_2 A_3) + x_2^2 (c_0^2 - A_1 A_3) + x_3^2 (c_0^2 - A_1 A_2) &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Из (6.20) следует, что подвижный годограф в данном случае (линия пересечения поверхностей второго и третьего порядка) не совпадает по своему типу с подвижным годографом $\mathbf{x}(t)$ в случае Эйлера. Таким образом, несмотря на различные типы полодий и герполодий, построение их не вызывает затруднений, поскольку все аналитические формулы в статье выписаны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье для кинематического истолкования движения тела применен модифицированный метод Пуансо, предложенный автором статьи.

2. Получено новое решение уравнений Гриоли задачи о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Кинематическое истолкование движе-

ния тела в данном решении характеризуется движением без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости.

3. Отличие истолкования движения тела, полученного в данной статье, от истолкования в случае Эйлера состоит в том, что в первом подходе эллипсоид инерции содержит полодию вектора $\mathbf{b}(t)$, а в случае Эйлера он содержит полодию вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Подвижный годограф $\boldsymbol{\omega}(t)$ в решении Эйлера – линия пересечения поверхностей второго порядка. Аналогичным свойством обладает и подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$, но в статье подвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ – линия пересечения поверхностей второго и третьего порядка.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps // *J. Math. Pures et Appl.* 1851. Bd. 1. № 16. P. 289–336.
2. *Sylvester J.J.* On the motion of a rigid body acted on by no external forces // *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* 1866. V. 156. P. 757–780.
3. *Mac-Cullagh J.* On the rotation of a solid body // *Proc. Roy. Irish Acad.* 1840–1844. V. 2. P. 542–545; 1845–1847. V. 3. P. 370–371.
4. *Darboux G.* Sur la theorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants a la meme polhodie // *C. R. Acad. Sci.* 1885. V. 101. P. 1555–1561.
5. *Darboux G.* Sur le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe // *J. Math. Pures et Appl.* 1885. V. 1. P. 403–430.
6. *Jacobi C.G.J.* Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe // in: *Gesammelte Werke.* Berlin: G. Reimer, 1882. B. 2. S. 493–510.
7. *Hess W.* Über das Problem der Rotation // *Math. Ann.* 1882. V. 20. S. 461–470.
8. *Hess W.* Über des Jacobische Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrangeschen Rotation durch zwei Poinsotische Rotation // *Z. Math. Phys.* 1888. V. 33. P. 292–305.
9. *Жуковский Н.Е.* Геометрическая интерпретация рассмотренного С.В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // в: *Собр. соч.: В 7 т. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 294–339.*
10. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
11. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наукова думка, 1978. 296 с.
12. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
13. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // *ПММ.* 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502–507.
14. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // *Мех. тверд. тела.* 2012. Вып. 42. С. 26–36.
15. *Горр Г.В.* Об одном аналоге истолкования Пуансо решения Эйлера в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил // *ПММ.* 2020. Т. 84. Вып. 1. С. 20–32.
16. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // *ПММ.* 2020. Т. 84. Вып. 1. С. 20–32.
17. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // *Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. e Natur.* 1963. V. 35. f. 1–2. P. 35–39.
18. *Yehia H.M.* New generalizations of all the known integrable problems in rigid-body dynamics // *J. Phys. A.: Math. Gen.* 1999. V. 32. P. 7565–7580.
19. *Yehia H.M.* Equivalent mechanical systems with cyclic coordinates and new in-tegrable problems // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2001. V. 36. P. 89–105.
20. *Горр Г.В.* Об одном классе решений уравнений динамики твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 547–558.
21. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: в 2 т. М.: Изд-во иностр. литер, 1951. Т. 2, ч. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. 555 с.
22. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2017. 424 с.

23. Харламов М.П. Симметрия в системах с гироскопическими силами // Мех. тверд. тела. 1983. Вып. 15. С. 87–93.
24. Гашененко И.Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Мех. тверд. тела. 2010. Вып. 40. С. 12–20.
25. Маркеев А.П. О геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера // Пробл. мех. управл. движ. Нелин. дин. системы. Межвузовский сборник научных трудов. Пермь 1981. С. 123–131.
26. Горр Г.В. Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестн. Удмурт. Ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 1–14.
27. Горячев Д.Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. Изв. 1916. кн. 3. С. 1–13.
28. Горячев Д.Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Варшав. унив. Изв. 1915. кн. 3. С. 1–11.
29. Yehia H.M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with Kovalevskaya configuration. I – The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Com. 1996. V. 23. № 5. P. 423–437.
30. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 2001. 384 с.
31. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Обобщенный гиростат Горячева–Чаплыгина в квантовой механике // Диф. геом., группы Ли и мех. 1987. Зап. Науч. Сем. ЛОМИ НАН СССР. 1987. Т. 9. С. 134–141.
32. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Квазиклассическое квантование волчка Ковалевской // ТМФ. 1987. Т. 73. № 3. С. 335–347.
33. Gorr G.V. A Complex approach to the interpretation of the motion of a solid with a fixed point // Mech. Solids. 2021. V. 56. № 6. P. 932–946.

Cinematic Interpretation of Motion a Rigid Body in a new Solution of Grioli Equations

G. V. Gorr^{a,#}

^a*Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: gvgorr@gmail.com*

In the article, a new solution is obtained for the problem on motion of a rigid body, having a fixed point, under the action of potential and gyroscopic forces. With use of the modified Poisson method, proposed by the author, it is shown that the motion of the body in this solution can be presented by rolling without sliding of the ellipsoid of inertia of the body along a plane fixed in the immovable space. This result may be considered as an analysis of Poisson result on interpretation of motion a rigid body in Euler solution.

Keywords: solution of Grioli equations, cinematic interpretation, modified Poisson method

REFERENCES

1. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pures et Appl., 1851, Bd. 1, no. 16, pp. 289–336.
2. *Sylvester J.J.* On the motion of a rigid body acted on by no external forces // Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1866, vol. 156, pp. 757–780.
3. *Mac-Cullagh J.* On the rotation of a solid body // Proc. Roy. Irish Acad., 1840–1844, vol. 2, pp. 542–545; 1845–1847, vol. 3, pp. 370–371.
4. *Darboux G.* Sur la theorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants a la meme polhodie // C. R. Acad. Sci., 1885, vol. 101, pp. 1555–1561.
5. *Darboux G.* Sur le mouvement d’un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe // J. Math. Pures et Appl., 1885, vol. 1, pp. 403–430.
6. *Jacobi C.G.J.* Sur la rotation d’un corps de révolution grave autour d’un point quelconque de son axe // in: Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882. B. 2, pp. 493–510.
7. *Hess W.* Über das Problem der Rotation // Math. Ann., 1882, vol. 20, pp. 461–470.

8. *Hess W.* Über des Jacobische Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrangeschen Rotation durch zwei Poinstische Rotation // *Z. Math. Phys.*, 1888, vol. 33, pp. 292–305.
9. *Zhukovskii N.E.* Geometric interpretation of the case considered by Kovalevskaya of the motion of a heavy rigid body about a fixed point // in: *Coll. Sci. Papers in 7 Vols.* Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1948, vol. 1. pp. 294–339. (in Russian)
10. *Suslov G.K.* Theoretical Mechanics. Moscow: Gostekhizdat., 1946. 655 p. (in Russian)
11. *Gorr G.V., Kudryashova L.V., Stepanova L.A.* Classical Problems on Dynamics of Rigid Body. Kiev: Naukova Dumka, 1978. 296 p. (in Russian)
12. *Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems on Dynamics of Rigid Body. Kyiv: Naukova Dumka, 2012. 402 c. (in Russian)
13. *Kharlamov P.V.* Kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point // *JAMM*, 1964, vol. 28 (3), pp. 502–507.
14. *Gorr G.V.* About one approach to the application of Poinst theorem of kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point // *Rigid Body Mech.*, vol. 42 (Inst. Prikl. Mat. Mekh., Donetsk, 2012), pp. 26–36.
15. *Gorr G.V.* On one analogue of Poinst interpretation of Euler solution in the problem of rigid body motion in the potential force field // *JAMM*, 2020, vol. 84 (1), pp. 13–25.
16. *Gorr G.V.* On three invariant relations of the equations of motion of a body in a potential field of force // *JAMM*, 2020, vol. 84 (1), pp. 20–32.
17. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // *Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur.*, 1963, vol. 35, f. 1–2, pp. 35–39.
18. *Yehia H.M.* New generalizations of all the known integrable problems in rigid-body dynamics // *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 1999, vol. 32, pp. 7565–7580.
19. *Yehia H.M.* Equivalent mechanical systems with cyclic coordinates and new in-tegrable problems // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2001, vol. 36, pp. 89–105.
20. *Gorr G.V.* On a class of solutions of the dynamics equations for a rigid body acted upon by the potential and gyroscopic forces // *JAMM*, 2018, vol. 82 (5), pp. 547–558.
21. *Levi-Civita T., Amaldi W.* Course in Theoretical Mechanics in 2 Vol. Moscow: Inostr. Lit., 1951. 555 p. (in Russian)
22. *Gorr G.V.* Invariant Relations of Equations of Rigid Body Dynamics (Theory, Results, Comments). Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res., 2017. 424 p. (in Russian)
23. *Kharlamov M.P.* Symmetry in systems with gyroscopic forces // *Rigid Body Mech.*, 1983, vol. 15, pp. 87–93.
24. *Gashenenko I.N.* Poinst kinematic representation of the motion of a body in the Hess case // *Rigid Body Mech.*, vol. 40 (Inst. Prikl. Mat. Mekh., Donetsk, 2010), pp. 12–20.
25. *Markeev A.P.* On Poinst geometric interpretation of a rigid body motion in Euler case // *Probl. Mech. Control. Motion. Nonlin. Dyn. Syst.* Intercollege collection of scientific works. Perm', 1981, pp. 123–131.
26. *Gorr G.V.* An approach in studying gyrostat motion with variable gyrostatic moment // *Vestn. Udmurt. Univ. Matem. Mekh. Komp'yut. Nauki.*, 2021, vol. 31, f. 1, pp. 1–14. (in Russian)
27. *Goryachev D.N.* New integrability cases for Euler dynamical equations // *Warsaw Univ. Proc.*, 1916, vol. 3, pp. 1–13. (in Russian)
28. *Goryachev D.N.* New cases of motion of a rigid body about a fixed point // *Warsaw Univ. Proc.*, 1915, vol. 3, pp. 1–11. (in Russian)
29. *Yehia H.M.* New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with Kovalevskaya configuration. I – The case of axisymmetric forces // *Mech. Res. Com.*, 1996, vol. 23, no. 5, pp. 423–437.
30. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Dynamics of a Rigid Body. Izhevsk: Sci. & Pub. Center. R&C Dyn., 2001. 84 p. (in Russian)
31. *Komarov I.V., Kuznetsov V.B.* Generalized Goryachev–Chaplygin gyrostate in the quantum mechanics // *Dif. Geom., Lie Groups&Mech. Proc. Sci. Sem. LOMI NAS USSR*, 1987, vol. 9, pp. 134–141. (in Russian)
32. *Komarov I.V., Kuznetsov V.B.* Quasi-classical quantization of Kovalevskaya top // *Theor. & Math. Phys.*, 1987, vol. 73 (3), pp. 335–347. (in Russian)
33. *Gorr G.V.* A Complex approach to the interpretation of the motion of a solid with a fixed point // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 932–946. (in Russian)

УДК 531.36

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ МОДЕЛЕЙ АСТРОДИНАМИКИ, ПОРОЖДАЕМЫХ ГРАВИТАЦИОННЫМИ СИЛАМИ (ОБЗОР)

© 2023 г. Ю. Н. Челноков^{1,*}¹Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Поступила в редакцию 04.09.2023 г.

После доработки 11.10.2023 г.

Принята к публикации 15.10.2023 г.

Излагается регуляризация особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых гравитационными силами, с использованием четырехмерных переменных и матриц Кустаанхеймо–Штифеля, а также кватернионная регуляризация уравнений этой задачи, предложенная автором и имеющая ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля. Дается аналитический обзор работ, посвященных кватернионной регуляризации указанных особенностей с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля, которая уникальна в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем. Рассмотрен предложенный автором новый метод регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании идеальных прямоугольных координат Ганзена, переменных Леви-Чивита и параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также на использовании в качестве дополнительных переменных кеплеровской энергии и реального времени и новой независимой переменной Зундмана. Приведены регулярные кватернионные уравнения в переменных Леви-Чивита и параметрах Эйлера этой задачи, которые имеют не только хорошо известные достоинства матричных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, но и обладают своими дополнительными достоинствами.

Ключевые слова: механика космического полета (астродинамика), возмущенная пространственная задача двух тел, регуляризация особенностей, порождаемых гравитационными силами, идеальная система координат, уравнения орбитального движения, переменные Кустаанхеймо–Штифеля, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), координаты Ганзена, переменные Леви-Чивита, кватернион

DOI: 10.31857/S0032823523060036, EDN: YDBQRS

1. Введение. Работа носит обзорный аналитический характер и дополняет собой нашу обзорную работу [1]. Обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, лежащих в основе небесной механики и механики космического полета (астродинамики): проблема устранения особенностей типа сингулярностей (деления на ноль), которые порождаются действующими на небесное или космическое тело ньютоновскими гравитационными силами и которые осложняют аналитическое и численное исследование движения тела вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам. Для получения различных регулярных уравнений используются четырехмерные параметры

Эйлера (Родрига–Гамильтона), четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (KS -переменные), двумерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена, регулярные двумерные переменные Леви-Чивита и кватернионы Гамильтона.

В нашей работе [1] излагаются кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела, основанные на использовании четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти модели кинематики не имеют особенностей, порождаемых использованием для описания движения классических углов Эйлера–Крылова и их дуальных аналогов. Обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера, четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и кватернионов Гамильтона. Излагается история проблемы регуляризации и регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля, нашедшие широкое применение в небесной механике и астродинамике. Излагаются предложенные нами кватернионные методы регуляризации, имеющие ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля, и различные, предложенные нами, регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (как для абсолютного, так и для относительного движения). Приведены результаты сравнительного исследования точности численного интегрирования различных форм регуляризованных уравнений небесной механики и астродинамики в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и ньютоновских уравнений в декартовых координатах, показывающие, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования ньютоновских уравнений.

В настоящей работе кратко описывается матричная регуляризация Кустаанхеймо–Штифеля (KS -регуляризация) особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых гравитационными силами, с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Показывается, что предложенный нами кватернионный метод регуляризации уравнений этой задачи имеет ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля. Дается аналитический анализ работ, посвященных кватернионной регуляризации указанных особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Многие из этих работ опубликованы в ведущих зарубежных изданиях.

В работе также излагается регуляризация Леви-Чивита уравнений возмущенной плоской задачи двух тел (уравнений плоского движения). Изложен предложенный нами новый метод регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании идеальной системы координат, двумерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и двумерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение второго (рассматриваемого) тела в идеальной системе координат, в которой уравнения пространственного движения принимают вид уравнений плоского движения, а также основанный на использовании четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Эти параметры Эйлера и кватернион ориентации идеальной системы координат являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты изучаемого (второго) тела (медленно изменяющимися переменными).

Леви-Чивита в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал [2]: “Проблема в пространстве долго сопротивлялась моим усилиям, т.к. я пытался подойти к ней с помощью аналогичных изменений координат...”.

Штифель и Шейфеле в своей широко цитируемой книге [3] отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. В работе [4] (см. также книгу [5]) говорится, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом [6] и Гурвицем [7], невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства).

Тем не менее, автором статьи [8] было показано, что регуляризация Леви-Чивита может быть с успехом использована для построения регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Эта регуляризация регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенная в [8], излагается в нашей обзорной работе.

Для получения регулярных уравнений исходные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в декартовых координатах записываются нами в двух системах координат: орбитальной и идеальной системах координат (название системы координат “идеальная”, по-видимому, было введено Depit [9]) с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбиты, компоненты которого – параметры Эйлера – являются медленно изменяющимися переменными и характеризуют инерциальную ориентацию в пространстве идеальной системы координат. В этих уравнениях переменными являются расстояние r от центра масс второго тела до центра масс первого тела, производная dr/dt (проекция v_1 вектора скорости \mathbf{v} центра масс второго тела на направление радиус-вектора \mathbf{r} второго (изучаемого) тела), модуль $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ вектора \mathbf{c} момента орбитальной скорости второго тела, обобщенная истинная аномалия φ и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) (скалярные оскулирующие элементы орбиты).

Далее осуществляется переход от этих уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел к уравнениям, записанным в идеальной системе координат с использованием двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена для описания движения второго тела в этой системе координат и дополненным нами кватернионным дифференциальным уравнением ориентации идеальной системы координат в инерциальной системе координат, коэффициенты которого содержат координаты Ганзена. Отметим замечательную особенность идеальной системы координат: в ней трехмерные уравнения пространственного движения принимают вид двухмерных уравнений плоского движения в идеальных прямоугольных координатах Ганзена.

Затем в полученных уравнениях нами осуществляется переход от координат Ганзена к переменным Леви-Чивита и переход к новой независимой переменной τ в соответствии с дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$ (преобразованием времени Зундмана [10]). Кроме этого, также в качестве дополнительной переменной вводится кеплеровская энергия h , через которую выражаются коэффициенты дифференциальных уравнений в переменных Леви-Чивита, и дополнение полученных уравнений дифференциальными уравнениями для кеплеровской энергии и времени.

В итоге получаются скалярные и кватернионные регулярные уравнения движения второго тела (регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел), полученные в работе [8], в которых совместно используются переменных Леви-Чивита и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона).

Эти регулярные уравнения имеют не только хорошо известные достоинства уравнений Куستاанхеймо–Штиффеля (регулярность, линейность в новом времени для кеплеровских движений, близость к линейным уравнениям для возмущенных движений), но и обладают своими дополнительными достоинствами:

1) для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармо-

нического осциллятора, как в случае Кустанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора; кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, в этом случае остается постоянным;

2) для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат, входящий в состав используемых переменных и имеющий в качестве своих компонент параметры Эйлера, является кватернионным оскулирующим элементом (медленно изменяющейся кватернионной переменной), что также является полезным свойством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Отметим, однако, что эти уравнения не пригодны для исследования редко встречающихся прямолинейных орбит, когда модуль вектора момента орбитальной скорости второго тела $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ обращается в ноль, поскольку кватернионное дифференциальное уравнение ориентации идеальной системы координат в этом случае вырождается (в знаменателях коэффициентов этого уравнения присутствует величина c). В статье указывается, как можно избавиться от этого недостатка излагаемых регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, в которых совместно используются переменные Леви-Чивита и параметры Эйлера, и приводятся регулярные уравнения в этих переменных, не имеющие указанного недостатка, но являющиеся более сложными.

2. Проблема регуляризации уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики). В основе небесной механики и астродинамики лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. Эти уравнения вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических (ньютоновских) уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными. Среди методов регуляризации и регулярных моделей прикладной небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных – кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырехмерные переменные Кустанхеймо–Штифеля или четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти методы и модели имеют ряд преимуществ аналитического и вычислительного характера перед другими методами и моделями.

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных переменных Кустанхеймо–Штифеля (KS -переменных) посвящены работы [11–28], а также работы автора статьи [8, 29–42].

Приводятся [42–50] результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в переменных Кустанхеймо–Штифеля, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования KS -переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Проведено [51, 52] сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых ко-

ординатах и построенных автором статьи [53] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в KS -переменных, принимающих вид регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Регулярные кватернионные уравнения в KS -переменных показали значительно более высокую точность, чем уравнения в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом – на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом – на 7 порядков.

Отметим, что в книге Бордовицыной [43] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием уравнений в KS -переменных и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в KS -переменных перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими результатами [51, 52] показало, что они в целом согласуются между собой. Отметим также, что Бордовицыной и Шарковским использованы регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в канонической, а не в осцилляторной форме, выведенные ими с использованием соответствующего гамильтониана.

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в KS -переменных, имеющих возмущенный осцилляторный вид, в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе перед уравнениями в декартовых координатах.

3. Регуляризация Кустаанхеймо–Штифеля уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и регуляризация Леви-Чивита уравнений возмущенной плоской задачи двух тел. Векторное и скалярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \mathbf{r} &= \mathbf{p} \left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right); \quad r = |\mathbf{r}| \\ \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \xi_1 &= p_1, \quad \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \xi_2 = p_2 \\ \frac{d^2 \xi_3}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3} \xi_3 &= p_3; \quad r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор центра масс второго (изучаемого) тела, проводимый из центра масс первого (центрального) тела, $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние между телами, m и M – массы второго и первого тел; f – гравитационная постоянная; \mathbf{p} – вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела (вектор-функция времени t , радиус-вектора \mathbf{r} и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ второго тела в системе координат ξ , имеющей начало в центре масс первого тела и координатные оси, параллельные осям инерциальной системы координат), t – время; ξ_k – декартовы координаты центра масс изучаемого тела в системе координат ξ , $p_k = p_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$ ($k = 1, 2, 3$) – проекции возмущающего ускорения \mathbf{p} на оси инерциальной системы координат, совпадающие с его проекциями на оси системы координат ξ , верхняя точка – символ дифференцирования по времени t .

Уравнения (3.1) вырождаются при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния r между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в на-

чале координат, как уже отмечалось, создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит к Эйлеру [54] и Леви-Чивита [2, 55, 56]. Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (спиновая или *KS*-регуляризация) была предложена Кустаанхеймо и Штифелем [57, 58]. Она наиболее полно изложена в монографии [3].

В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спинов: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. На языке вещественного анализа это эквивалентно введению четырех параметров $u_1, u_2, u_3, u_4 = u_0$.

В регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, изложенной в книге [3], использована обобщенная матрица Леви-Чивита, названная *KS*-матрицей. Эта матрица (обозначается нами как $L(\mathbf{u}_{KS})$) – четырехмерная квадратная матрица, содержащая в левом верхнем углу двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита и имеющая вид

$$L(\mathbf{u}_{KS}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

В этой матрице u_j ($j = 0, 1, 2, 3$) – переменные Кустаанхеймо–Штифеля, называемые *KS*-переменными (вместо обозначения u_4 одной из переменных Кустаанхеймо–Штифеля здесь и далее нами используется обозначение u_0).

В матричной записи преобразование Кустаанхеймо–Штифеля имеет вид (3.3) [3]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

В скалярной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2), \quad (3.4)$$

что с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа [59].

Таким образом, в основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, которое основывается на переходе от трехмерных декартовых координат ξ_k к новым четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j (т.е., на переходе от трехмерного пространства декартовых координат к новому четырехмерному пространству).

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля в скалярной записи имеют вид [3]

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = \frac{1}{2}rq_j; \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2 \left(q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_1 \frac{du_1}{d\tau} + q_2 \frac{du_2}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} q_0 &= u_0 p_1 - u_3 p_2 + u_2 p_3, & q_1 &= u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 \\ q_2 &= -u_2 p_1 + u_1 p_2 + u_0 p_3, & q_3 &= -u_3 p_1 - u_0 p_2 + u_1 p_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь τ – новая независимая переменная, называемая фиктивным временем, связанная с временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$ (преобразованием времени Зундмана [10]), h – кеплеровская энергия единицы массы изучаемого тела, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношением

$$h = \frac{1}{2} v^2 - f(m + M) \frac{1}{r}; \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.9)$$

Время t также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля (3.5)–(3.8) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных, в общем случае нестационарных, дифференциальных уравнений относительно четырех KS -переменных u_j , их первых производных $du_j/d\tau$ по новой независимой переменной τ , кеплеровской энергии h и времени t .

Эти скалярные уравнения эквивалентны матричным уравнениям [3]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}_{ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u}_{ks} &= \frac{1}{2} r L(\mathbf{u}_{ks}) \mathbf{P}_{ks}, & \frac{dh}{d\tau} &= -2 \left(\frac{d\mathbf{u}_{ks}}{d\tau}, (L(\mathbf{u}_{ks}))^T \mathbf{P}_{ks} \right) \\ \frac{dt}{d\tau} &= (\mathbf{u}_{ks}, \mathbf{u}_{ks}) & \mathbf{u}_{ks} &= (u_1, u_2, u_3, u_0), \quad \mathbf{P}_{ks} = (p_1, p_2, p_3, 0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где \mathbf{u}_{ks} – четырехмерный вектор-столбец KS -переменных, $L(\mathbf{u}_{ks})$ – KS -матрица, определяемая соотношением (3.2), \mathbf{P}_{ks} – четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения \mathbf{p} , (\mathbf{a}, \mathbf{b}) – скалярное произведение четырехмерных вектор-столбцов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля обобщают уравнения Леви-Чивита уравнений возмущенной плоской задачи двух тел, имеющие в скалярной записи вид

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = \frac{1}{2} r q_j; \quad j = 1, 2 \quad (3.11)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2 \left(q_1 \frac{du_1}{d\tau} + q_2 \frac{du_2}{d\tau} \right); \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_1^2 + u_2^2 \quad (3.12)$$

$$q_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2, \quad q_2 = -u_2 p_1 + u_1 p_2 \quad (3.13)$$

Здесь u_1 и u_2 – переменные Леви-Чивита, связанные с декартовыми координатами ξ_1 и ξ_2 соотношениями

$$\xi_1 = u_1^2 - u_2^2, \quad \xi_2 = 2u_1 u_2, \quad (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} = r = |\mathbf{r}| = u_1^2 + u_2^2 \quad (3.14)$$

В случае плоского движения четырехмерная квадратная матрица $L(\mathbf{u}_{ks})$ Кустаанхеймо–Штифеля, определяемая соотношением (3.2), переходит в двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита, имеющую вид

$$L(\mathbf{u}_{lc}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

В матричной записи преобразование Леви-Чивита (3.14) имеет вид (3.16) [3]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{lc}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

В комплексной записи преобразование Леви-Чивита принимает вид (3.17):

$$\xi_1 + i\xi_2 = (u_1 + iu_2)^2 \quad (3.17)$$

и устанавливает отображение параметрической плоскости переменных Леви-Чивита u_1 и u_2 на физическую плоскость переменных ξ_1 и ξ_2 (декартовых координат).

Скалярные регулярные уравнения возмущенной плоской задачи двух тел (3.11)–(3.13) Леви-Чивита эквивалентны его матричным уравнениям [3]

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_{lc}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u}_{lc} = \frac{1}{2} r L(\mathbf{u}_{lc}) \mathbf{P}_{lc}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -2 \left(\frac{d\mathbf{u}_{lc}}{d\tau}, (L(\mathbf{u}_{lc}))^T \mathbf{P}_{lc} \right); \quad \frac{dt}{d\tau} = (\mathbf{u}_{lc}, \mathbf{u}_{lc}) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{u}_{lc} = (u_1, u_2), \quad \mathbf{P}_{lc} = (p_1, p_2),$$

где \mathbf{u}_{lc} – двумерный вектор-столбец переменных Леви-Чивита, $L(\mathbf{u}_{lc})$ – матрица Леви-Чивита, определяемая соотношением (3.15), \mathbf{P}_{lc} – двумерный вектор-столбец, сопоставляемый двумерному вектору возмущающего ускорения \mathbf{p} , (\mathbf{a}, \mathbf{b}) – скалярное произведение двумерных вектор-столбцов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Отметим основные хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (3.5)–(3.7):

– они, в отличие от ньютоновских уравнений (3.1), регулярны в центре притяжения, когда расстояние между телами $r = 0$;

– линейны во времени τ для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений) и имеют в этом случае вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными половинной кеплеровской энергии h , взятой со знаком “–”:

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = 0; \quad h = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

– для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h = \text{const} < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора во времени τ , квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус;

– позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Штифелем и Шейфеле [3], Бордовицной и Шарковским [43] показано, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля значительно выше точности интегрирования ньютоновских уравнений. Так, Бордовицной и Шарковским показано, что использование регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например, задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классиче-

ских ньютоновских уравнений. Сравнение этих результатов с нашими, приведенными выше, показало, как уже отмечалось выше, что они в целом согласуются между собой.

Fukushima было также показано [45, 46], что KS -регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме. Проводится [46] численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации KS , Шперлинга–Бюрде (SB), Бюрде–Феррандиса (BF) и трехмерное расширение регуляризации Леви–Чивита (LC). В аннотации [46] сказано: KS и расширенная LC -регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел. Подчеркнем, что и Fukushima [46] сравнивает семь схем, описанных в § 1, а также “нерегуляризованную обработку, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах”. Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения.

4. Кватернионная регуляризация и регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные автором статьи. В основе знаменитой регуляризации Кустанхеймо–Штифеля лежит, как уже отмечалось, нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, названное KS -преобразованием. Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (к четырехмерным переменным Кустанхеймо–Штифеля). Поэтому, по мнению Штифеля и Шейфеля прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (т.е. пространственном) случае невозможен ([3], стр. 29).

В книге [3] постулируется матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел (первое из уравнений (3.10)), записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви–Чивита плоского движения (3.18), и с помощью нескольких теорем доказывается, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение (первое из уравнений (3.1)).

Вскоре после открытия KS -преобразования было рассмотрено использование кватернионов Гамильтона (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) и четырёхмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел, поскольку четырёхмерность пространства новых координат делало естественным использование для такой регуляризации кватернионов Гамильтона и четырёхмерных кватернионных матриц. Однако, Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав в одиннадцатой главе своей книги [3], посвященной геометрии KS -преобразования, что “Любая попытка заменить теорию KS -матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму”. Поэтому вместо хорошо известных в математике четырёхмерных кватернионных матриц Штифель и Шейфеле в [3] для построения теории регуляризации используют новые четырёхмерные квадратные матрицы, названные ими KS -матрицами, имеющие вид (3.2).

Приведенное утверждение Штифеля и Шейфеле было опровергнуто, по-видимому впервые, автором статьи [29–32]. Известный западный ученый Вальдвогель по поводу цитированного выше высказывания Штифеля и Шейфеле о бесперспективности использования в теории регуляризации кватернионных матриц в работе [20] говорит: “Это утверждение было впервые опровергнуто Челноковым (1981), который представил теорию регуляризации пространственной задачи Кеплера, используя геометрические представления во вращающейся системе координат и кватернионные матрицы. В серии статей (напр., 1992 и 1999) тем же автором была расширена теория кватернионной регуляризации и приведены практические применения.”

Автором статьи было показано [29–32] ([29] – с использованием классических кватернионных матриц, [30] – с использованием кватернионов Гамильтона), что в действительности кватернионный подход к регуляризации

– позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в KS -переменных (что, как уже отмечалось, ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение ([3], стр. 29) из-за неоднозначности KS -преобразования,

– позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризирующему KS преобразованию;

– раскрывает геометрический смысл его неоднозначности;

– позволяет получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустанхеймо–Штифеля.

Для построения кватернионных регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в [29] была использована четырехмерная кватернионная матрица

$$n\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

элементами которой являются переменные Кустанхеймо–Штифеля u_j .

Эта матрица отличается от KS -матрицы (3.2). Если под элементами u_j этой матрицы понимать четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j , то она будет являться хорошо известной кватернионной матрицей поворота, описывающей вращение в трехмерном пространстве.

В работе [30] для этих целей использован кватернион Гамильтона \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad (4.2)$$

элементами которого являются переменные Кустанхеймо–Штифеля u_j .

В кватернионной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}; \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i} - u_2\mathbf{j} - u_3\mathbf{k}, \quad (4.3)$$

приведенный Штифелем и Шейфеле в их книге [3].

Показано [29, 30], что регуляризирующее KS -преобразование координат заключается в переходе от трехмерных декартовых координат центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым четырехмерным переменным, которые являются нормированными определенным образом компонентами сопряженного кватерниона поворота $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$, характеризующего ориентацию вращающейся системы координат η в инерциальной системе координат. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} центра масс второго тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, поэтому кватернионные переменные \mathbf{u} и $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ связаны кватернионным соотношением $\mathbf{u} = \sqrt{r}\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, которые эквивалентны скалярным соотношениям: $u_0 = r^{1/2}\lambda_0$, $u_i = -r^{1/2}\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

Также было показано, что билинейное соотношение Кустанхеймо–Штифеля

$$u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_0 \frac{du_1}{d\tau} + u_3 \frac{du_2}{d\tau} - u_2 \frac{du_3}{d\tau} = 0 \quad (4.4)$$

связывающее между собой KS -переменные u_j и их первые производные по новой независимой переменной τ , накладывает на движение трехгранника η дополнительное

(неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора ω абсолютной угловой скорости трехгранника η на направление радиус-вектора \mathbf{r} (ось η_1):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2 \left(\lambda_0 \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1 \frac{d\lambda_0}{dt} - \lambda_2 \frac{d\lambda_3}{dt} + \lambda_3 \frac{d\lambda_2}{dt} \right) = \\ &= \frac{2}{r} \left(u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_0 \frac{du_1}{d\tau} + u_3 \frac{du_2}{d\tau} - u_2 \frac{du_3}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что по словам Штифеля и Шейфеле ([3], стр. 29) соотношение вида (4.4):

$$u_4 v_1 - u_3 v_2 + u_2 v_3 - u_1 v_4 = 0,$$

где u_j и v_j — компоненты четырехмерных векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} , “называется билинейным соотношением и играет основную роль в нашем построении регулярной небесной механики”.

Таким образом, переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от декартовых координат центра масс второго тела к KS -переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся системе координат η с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j , являющихся компонентами кватерниона поворота λ этой системы координат.

Дальнейшие преобразования этих уравнений связаны с нормировкой параметров Эйлера λ_j (кватерниона поворота λ) с помощью множителя \sqrt{r} и с переходом в них к переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j , а также с введением в качестве дополнительных зависимых переменных кеплеровской энергии h и времени t и с переходом к новой независимой переменной Зундмана τ .

Отметим, что автором были получены [29, 30] более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) матричные (с использованием кватернионных матриц) и кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в KS -переменных в предположении, что вышеуказанное билинейное соотношение (4.4) не выполняется. Эти уравнения содержат дополнительные слагаемые, в которых присутствуют проекции ω_1 и ϵ_1 векторов угловой скорости и углового ускорения сопровождающего трехгранника η на направление радиус-вектора \mathbf{r} центра масс второго тела (одна из этих проекций (ω_1 или ϵ_1) является произвольно задаваемым параметром) и являются более сложными.

Матричные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в общем случае, когда билинейное соотношение (4.4) не выполнится, имеют вид [29]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1'' \\ u_0'' \\ -u_3'' \\ u_2'' \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \omega_1 \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1 - 3r & -\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 + 3r & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 + 3r \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 - 3r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_0' \\ -u_3' \\ u_2' \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h + \omega_1^2 r^2 & -r^2 \epsilon_1 & 0 & 0 \\ r^2 \epsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h + \omega_1^2 r^2 & r^2 \epsilon_1 \\ 0 & 0 & -r^2 \epsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \\ -u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} r \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h' &= 2\left(q_0 u'_0 + q_1 u'_1 + q_2 u'_2 + q_3 u'_3\right), \quad t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\
 q_0 &= u_0 p_1 - u_3 p_2 + u_2 p_3, \quad q_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3, \\
 q_2 &= -u_2 p_1 + u_1 p_2 + u_0 p_3, \quad q_3 = -u_3 p_1 - u_0 p_2 + u_1 p_3 \\
 \xi_1 &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

где ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ – проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на направление радиус-вектора \mathbf{r} (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром), верхний штрих, по-прежнему, – символ дифференцирования по независимой переменной τ .

Кватернионные регулярные уравнения этой задачи в общем случае в переменных Кустанхеймо–Штифеля имеют вид [30] (в этой работе эти уравнения записаны в другой кватернионной форме, соответствующей приведенной выше матричной записи этих уравнений (4.5), когда кватернионная переменная α , введенная в этой работе и соответствующая вектор-столбцу $(u_1, u_0, -u_3, u_2)$, равна $\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}$):

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{3}{2} r \omega_1 \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{1}{2} \left(r^2 \varepsilon_1 + \omega_1 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{u}} \right) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} - \frac{1}{2} \left(h + r^2 \omega_1^2 \right) \mathbf{u} &= -\frac{1}{2} r \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi \\
 \frac{dh}{d\tau} = \mathbf{p}_\xi \cdot \left[\frac{d}{d\tau} (\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}) \right]; \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \quad \frac{d\omega_1}{d\tau} = r \varepsilon_1 & \\
 \mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & \\
 \mathbf{p}_\xi = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}, \quad p_k = p_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3) &
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

В этих уравнениях \mathbf{u} , h , t – неизвестные функции независимой переменной τ , $\bar{\mathbf{u}}$ – кватернион, сопряженный кватерниону \mathbf{u} , проекции p_k вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения на оси инерциальной системы координат являются заданными функциями времени t , декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс второго тела на оси опорной системы координат ξ , которые могут быть представлены как функции времени t и переменных u_j , u'_j ; ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ – проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на ось η_1 , заданные как функции переменных t и u_j , u'_j ; центральная точка означает скалярное произведение.

Для нахождения проекций радиус-вектора \mathbf{r} и вектора скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ центра масс изучаемого тела на оси инерциальной системы координат (координат ξ_k и их производных $\dot{\xi}_k$ по времени t) через переменные u_j и u'_j необходимо воспользоваться кватернионными соотношениями

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = 2r^{-1} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}'$$

Таким образом, нами были получены более общие (в сравнении с уравнениями Кустанхеймо–Штифеля) регулярные матричные и кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. Эти уравнения сложнее уравнений Кустанхеймо–Штифеля. Они, в первую очередь, имеют теоретический интерес, демонстрируя тот факт, что регуляризация достигается и в том случае, когда $\omega_1 \neq 0$, т.е. когда не выполняется билинейное соотношение, являющееся одним из основных в теории регуляризации Кустанхеймо–Штифеля. Возможно, эти уравнения будет целесообразно использовать для высокоточных численных расчетов, поскольку при их интегрировании не требуется выполнения билинейного соотношения (4.4), которое неизбежно будет нарушаться в процессе численного интегрирования из-за методических и вычислительных погрешностей.

Полагая $\omega_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, из уравнений (4.6) получаем нашу кватернионную форму регулярных уравнений Кустаанхеймо–Штифеля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u} &= -\frac{1}{2} r \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, & \frac{dh}{d\tau} &= 2 \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right); & \frac{dt}{d\tau} &= r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} \\ q &= q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, & \mathbf{p}_\xi &= p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\operatorname{scal}(\cdot)$ – скалярная часть кватернионного произведения $\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{q}$, \mathbf{p}_ξ – кватернион действующих возмущений.

Отметим, что использование кватернионных моделей механики имеет преимущества перед использованием векторных и матричных моделей. Кватернионное исчисление, в отличие от матричного исчисления, имеет геометрическую наглядность векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно более общее и гибкое. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме того, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, можно непосредственно использовать векторные величины, определяемые их проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением, чем векторный. Также отметим, что в кватернионном исчислении, в отличие от матричного, операция аналитического нахождения и численного вычисления обратного кватерниона, в отличие от аналитического нахождения и вычисления обратной матрицы, проста и легко алгоритмизируема.

Автором также были получены другие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и искусственного спутника Земли (ИСЗ) в новых четырехмерных переменных: модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, введенных в работе [34] (см. также [38]). Эти уравнения обладают всеми достоинствами выше приведенных матричных и кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, но имеют более простую и симметричную структуру для движения второго тела (например, космического аппарата (спутника)) в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная, но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники [34, 41].

Более простые и симметричные структуры уравнений приводят к более эффективным вычислительным алгоритмам при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения спутника. Удобство и эффективность использования полученных уравнений движения спутника в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля для аналитического исследования движения спутника показано в [41] на примере движения спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются его центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. В этой работе найдены первые интегралы уравнений движения спутника в модифицированных переменных в указанном случае, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Предложен [32, 34] способ однозначного нахождения значений параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо–Штифеля по заданным в рассматриваемый момент времени значениям декартовых координат и их первых производных (проекциям вектора скорости). Этот способ имеет в сравнении со способом неоднозначного нахождения переменных Кустаанхеймо–Штифеля [3] существенные преимущества.

5. Работы по регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля (KS-регуляризации) и кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел других авторов. В работе Velte [11], посвященной профессору Отто Фольку, дается с помощью кватернионов в векторном

изложении новый вывод KS -преобразования, действующего из четырехмерного пространства параметров в трехмерное физическое пространство. Использование кватернионов в векторном изложении (с использованием векторной записи для кватернионов со скалярной составляющей $\xi \in \mathbb{R}$ и векторной компонентой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) позволило автору дать каждому шагу в выводе KS -преобразования непосредственную геометрическую интерпретацию. В частности, KS -преобразование представлено как преобразование Леви-Чивита, сформулированное в повернутой системе координат. Отмечается, что здесь вполне естественным образом вступают (появляются) углы Эйлера. В качестве простого приложения приводятся явные формулы для KS -преобразования в случае эллиптического движения Кеплера в пространстве.

Во введении отмечается, что Volk и Waldvogel указали [60] на геометрическую интерпретацию KS -преобразования, включающую эйлеровы углы повернутой системы координат. Velte также отмечает, что “В этой статье Volk (1973) указал, что KS -преобразование уже встречается в письме Эйлера к Кристиану Гольдбаху в виде особого случая так называемой идентичности Эйлера”.

В завершение вывода KS -преобразования говорится: “Таким образом, мы нашли, что преобразование Кустанхеймо и Штифеля можно вывести следующим образом. Во-первых, в плоскости движения вводится и формулируется посредством кватернионов преобразование Леви-Чивита. Введя теперь повернутую систему координат, получим преобразование Кустанхеймо и Штифеля”.

Далее в разделе “Связь с углами Эйлера” отмечается, что “До сих пор мы описывали поворот системы координат с помощью кватерниона D , заданного в виде (9), содержащим половинный угол поворота и единичный вектор оси вращения. Но можно также выразить угол поворота и единичный вектор оси вращения с помощью трех эйлеровых углов (долготы узла, наклона плоскости движения и угла между линией узла и направлением единичного вектора \mathbf{e}_1 в плоскости движения)”. Поэтому компоненты кватерниона D являются функциями трех указанных углов Эйлера.

Отметим, что в статье [11], на наш взгляд, Velte фактически реализована прозрачная идея, заключающаяся в том, что если в системе координат $X_1X_2X_3$ точка совершает плоское движение в плоскости X_1X_2 с координатами x_1 и x_2 , то в системе координат $X'_1X'_2X'_3$, повернутой на произвольный угол δ относительно исходной системы координат $X_1X_2X_3$ вокруг оси, направление которой не совпадает с осью X_3 и задается единичным вектором \mathbf{d} , точка будет совершать пространственное (трехмерное) движение в системе координат $X'_1X'_2X'_3$ с тремя координатами x'_1 , x'_2 и x'_3 , которые могут быть выражены через четырехмерные переменные Кустанхеймо–Штифеля u_j . Именно такие формулы, связывающие новые координаты x'_1 , x'_2 и x'_3 точки с переменными Кустанхеймо–Штифеля u_j , в итоге получены из формул, связывающих декартовы координаты x_1 и x_2 в системе координат $X_1X_2X_3$ с переменными Леви-Чивита ξ и η , в результате проделанных выкладок с использованием кватернионов (в том числе с использованием введенного постоянного произвольного кватерниона $D = \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{d}$, описывающего поворот исходной системы координат (переход от системы координат $X_1X_2X_3$ к системе координат $X'_1X'_2X'_3$). Постоянство кватерниона D в статье не оговорено, но это следует из использованного Velte термина “поворот” и проводимых выкладок. При этом полученные переменные Кустанхеймо–Штифеля u_j выражены им в явном виде через переменные Леви-Чивита ξ и η и компоненты d_j кватерниона D . В четвертом разделе им также представлены формулы, с помощью которых компоненты d_j могут быть найдены с помощью углов Эйлера. Также для эллиптического движения Кеплера в повернутой системе координат $X'_1X'_2X'_3$ получены формулы для переменных Кустан-

анхеймо–Штифеля u_j , выраженные через параметры орбиты, эксцентрическую аномалию E и компоненты d_j кватерниона D .

Подчеркнем, что Velte-преобразование Кустанхеймо и Штифеля (KS -преобразование) представлено как преобразование Леви-Чивита, сформулированное в повернутой на постоянный угол δ системе координат. Нами [29, 30] показано, как уже отмечалось в разд. 4, что регуляризирующее KS -преобразование координат заключается в переходе от трехмерных декартовых координат центра масс второго (изучаемого) тела в инерциальной системе координат к новым четырехмерным переменным Кустанхеймо–Штифеля u_j , которые являются нормированными определенным образом компонентами сопряженного кватерниона вращения $\bar{\lambda} = \lambda_0 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k$, где λ_j – параметры Эйлера. Эти параметры Эйлера λ_j и кватернион вращения λ характеризуют ориентацию вращающейся (подвижной) системы координат η в инерциальной системе координат. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора \mathbf{r} центра масс второго тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, поэтому кватернионные переменные \mathbf{u} и λ связаны соотношением $\mathbf{u} = \sqrt{r}\bar{\lambda}$.

Подробный анализ работы Velte проводится также в связи с тем, что в следующем разделе излагаются полученные нами регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел [8], в состав которых входят регулярные дифференциальные уравнения движения в модифицированных переменных Леви-Чивита второго порядка, описывающие движение второго (изучаемого) тела в идеальной системе координат и имеющие вид регулярных уравнений Леви-Чивита плоского движения, и регулярное кватернионное дифференциальное уравнение в четырехмерных параметрах Эйлера первого порядка, описывающих изменение ориентации идеальной системы координат в инерциальной системе координат в процессе движения тела. Совместное использование модифицированных переменных Леви-Чивита и параметров Эйлера позволило нам расширить знаменитую регуляризацию Леви-Чивита плоского движения на пространственное движение с использованием идеальной системы координат.

В работе Vivarelli [12] KS -преобразование, введенное Кустанхеймо и Штифелем в небесную механику, сформулировано в терминах гиперкомплексных чисел как произведение кватерниона и его антиинволюции. Следовательно, оно представляет особый морфизм вещественной алгебры кватернионов, имеющий трехмерное вещественное линейное подпространство, а также представляет собой естественное обобщение преобразования Леви-Чивита. Показано, что кватернионная матрица произведения приводит к KS -матрице; билинейное соотношение Кустанхеймо–Штифеля и два тождества, которые играют центральную роль в KS -теории, легко выводятся с использованием кватернионов. Дается подходящее кватернионное калибровочное преобразование, которое приводит к хорошо известному расслоению четырехмерного пространства. В дополнение приводятся несколько геометрических интерпретаций.

Отметим, что кватернион q , используемый автором [12], имеет вид

$$q = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k,$$

где i, j, k – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Преобразование Кустанхеймо–Штифеля представляется в следующей кватернионной форме:

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j = qq_*, \quad q_* = k\bar{q}k^{-1} = u_1 + u_2 i + u_3 j - u_4 k,$$

где q_* – кватернион, антиинволютивный кватерниону q .

Это представление отличается от кватернионного представления преобразования Кустьянхеймо–Штифеля

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}; \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1 \mathbf{i} - u_2 \mathbf{j} - u_3 \mathbf{k},$$

приведенного в [3] и используемого в наших работах.

В работах Vivarelli [13, 14] развивается геометрический и физический взгляд на векторное произведение двух кватернионов и рассматривается связь трех классических задач механики через гиперкомплексное KS -преобразование.

Исследование возмущенного кеплеровского движения проводится Штифелем и Шейфеле в [3] не только с использованием регулярных уравнений в осцилляторной форме и методов теории колебаний, но также с использованием регулярных уравнений в канонической форме, для чего ими разработана теория канонического KS -преобразования. Такой канонический подход к проблеме регуляризации, использующий KS -преобразование, развит в работах Лидова [61, 62] и Лидова и Ляховой [63] и широко используется в настоящее время. В более поздней работе [64] рассмотрено применение в теории регуляризации канонических уравнений задачи двух тел обобщенной KS -матрицы и связанных с ней преобразований.

Отметим также работу Шагова [15]. В ней получены дифференциальные уравнения движения космического аппарата в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в орбитальной системе координат и использующие для описания его движения в инерциальном пространстве кватернион поворота, нормированный посредством множителя, равного квадратному корню из модуля c вектора момента скорости спутника. В этих уравнениях в качестве независимой переменной использована переменная τ , связанная с временем t дифференциальным соотношением $d\tau = (1/2)cr^{-2}dt$ (здесь r – расстояние до центра Земли). Уравнения во “времени” τ линейны для невозмущенного кеплеровского движения спутника.

В работе Derpit, Elpe и Ferrer “Линеаризация: Лаплас против Штифеля” [16] матричная KS -теория Кустьянхеймо–Штифеля изложена в терминах кватернионов. Авторы рассматривают KS -преобразование независимо от его возможного применения к кеплеровским системам, уточняют несколько теорем, сформулированных Штифелем. В аннотации сказано: “с одной стороны, мы отказываемся от формализма матричной теории, чтобы продолжить исключительно в контексте алгебры кватернионов; с другой стороны, мы объясняем, как в иерархии гиперкомплексных систем как KS -преобразование, так и классическое проективное разложение возникают путем удвоения преобразования Леви-Чивита”.

Во введении этой работы отмечается: “Будучи свободными от вычислительных сервитутов (вычислительного рабства, вычислительной зависимости), мы даже поставили перед собой задачу переустановить всю KS -теорию в терминах кватернионов. К тому времени, как Штифель и Шейфеле завершили свою монографию, они осознали тесную связь между своим матричным формализмом и теорией кватернионов. Было предложено, чтобы они воспользовались этим; они отреагировали на предложение в чрезмерных терминах (Штифель и др., 1971, р. 286). Действительно ли они считают, что переход от матриц к кватернионам приведет к “провалу или, по крайней мере, к очень громоздкому формализму”? Несмотря на суровые предсказания Штифеля, мы приняли вызов. Мы потерпели неудачу? Читатель – это наше жюри. Построение KS -преобразования как эманации альтернативной билинейной формы над алгеброй затрат кватернионов не сложнее, чем матричный формализм Штифеля и Шейфеле. Кроме того, мы находим награды в упражнениях: теоремы обострены, некоторые в значительной степени; доказательства сокращены; общий дизайн Штифеля значительно улучшился в отношении его глобального и внутреннего значения, не говоря уже о том, чтобы обеспечить стиль программирования для манипулирования кватернионами с помощью процессоров символов общего назначения.”

В работе Deprit, Elipre и Ferrer также рассматривается линеаризация уравнений движения, записанных в цилиндрической, сферической и орбитальной системах координат, посредством введения новых переменных и введения новой независимой переменной вместо времени t . В этой работе в качестве альтернативы KS -преобразованию было предложено собственное преобразование: DEF -преобразование. В отношении этого преобразования и известного BF -преобразования, также рассмотренного ими, отмечается следующее:

“Об альтернативах KS -преобразованию Штифель и Шейфеле (1971, р. 288) выпустили предупреждение, чуть ли не предписание: “авторы убеждены, что поиск других преобразований [...] не очень многообещающий”. Многим читателям их предзнаменование создало впечатление, что KS -методика уникальна в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем. Факты отвергают иск. Кустанхаймо, Штифель и Шейфеле никогда не упоминали о решающем шаге, который Фок (1935, 1936) сделал в этом направлении тридцать пять лет назад, даже в их кратком упоминании того же шага, предпринятого, но независимо, Мозером (Moser 1970). Здесь у нас есть место для последней записи в конкурсе: BF -преобразование, предложенное Burdet (1969) для координатной части и завершенное Ferrandiz (1986a,b, 1987, 1988) для моментальной части. Мы дополняем его нашим собственным преобразованием, DEF -преобразованием, которое, как мы утверждаем, одинаково хорошо выполняет все задачи KS -преобразования – линеаризацию, регуляризацию и каноничность – хотя, как мы склонны верить, более простым и более интуитивным способом (раздел 4.1). По общему признанию, конструкция включает в себя тяжелые алгебраические манипуляции, однако не более, чем в случае с KS - или BF -преобразованием. Кроме того, мы передаем эту работу процессору символов.”

Восьмимерное DEF -преобразование декартовых координат и проекций вектора скорости материальной точки имеет (в обозначениях авторов этого преобразования) следующий вид [16]:

$$\mathbf{x} = u_0 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{X} = U_0 \mathbf{u} + \frac{1}{u_0} (\mathbf{u} \times \mathbf{U}) \times \mathbf{u} = U_0 \mathbf{u} + \frac{1}{u_0} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{U} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, $\mathbf{X} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ – ее вектор скорости; u_0 , U_0 и \mathbf{u} , \mathbf{U} – новые скалярные и трехмерные векторные переменные.

Независимая переменная (время t) заменяется на обобщенную истинную аномалию f , такую, что

$$u_0^2 df = \beta^2 Q dt; \quad Q = \|\mathbf{Q}\|, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} = \frac{1}{\beta^2} \mathbf{x} \times \mathbf{X},$$

где β – параметр.

DEF -преобразование имеет много общего с BF -преобразованием (Burdet–Ferrandiz transformation), имеющим вид

$$\mathbf{x} = u_0 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \left(U_0 \mathbf{u} + \frac{1}{u_0} (\mathbf{u} \times \mathbf{U}) \times \mathbf{u} \right) = \left(U_0 \mathbf{u} + \frac{1}{u_0} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{U} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{u}) \right)$$

Оно отличается от него отсутствием множителя $1/\|\mathbf{u}\|^2$ и является более простым.

Уравнения движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле в DEF -переменных (при отсутствии возмущений) после перехода к обобщенной истинной аномалии f в качестве независимой переменной принимают следующий вид [16]:

$$\frac{du_0}{df} = \frac{u_0^2}{Q}, \quad \frac{dU_0}{df} = \frac{Q}{u_0} - \frac{\mu}{\beta^3 Q}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{df} = \frac{1}{Q} \mathbf{Q} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{U}}{df} = \frac{1}{Q} \mathbf{Q} \times \mathbf{U} - \frac{u_0^2}{\beta^4} \left(2h + 3 \frac{\mu}{\beta u_0} \right) \mathbf{u}; \quad \frac{dt}{df} = \frac{u_0^2}{\beta^2 Q},$$

где μ – гравитационная постоянная, $\mathbf{Q} = \text{const}$ – “угловой момент”, h – кеплеровская энергия (постоянная величина).

Дифференцируя третье уравнение приведенной системы уравнений по переменной f , получаем [16] линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно векторной переменной \mathbf{u} :

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{df^2} + \mathbf{u} = 0$$

Для новой скалярной переменной $\sigma = Q^2/(\mu u_0)$, введенной вместо переменной u_0 , получаем, учитывая первое и второе уравнения вышеприведенной системы, следующее линейное дифференциальное уравнение относительно скалярной переменной σ [16]:

$$\frac{d\sigma^2}{df^2} + \sigma = \frac{1}{\beta^3}$$

После получения двух последних уравнений ([16], р. 191) говорится “Это завершает лиnearизацию кеплеровских систем в трех измерениях посредством DEF-преобразования”.

Никаких комментариев в отношении второго уравнения и основного четвертого динамического уравнения движения материальной точки (уравнения первого порядка для векторной переменной \mathbf{U}) полученной в [16] системы уравнений не дается, хотя видно, что четвертое уравнение содержит в правой части векторное слагаемое

$$\frac{u_0^2}{\beta^4} \left(2h + 3 \frac{\mu}{\beta u_0} \right) \mathbf{u},$$

которое после подстановки в него аналитических решений $u_0 = u_0(f)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(f)$ (функций обобщенной истинной аномалии f), полученных в результате интегрирования приведенных последних двух линейных уравнений, принимает вид нестационарного выражения, явно зависящего от “времени” f .

Уравнение для переменной \mathbf{U} принимает при этом вид векторного дифференциального неоднородного линейного уравнения, однородная часть которого имеет постоянные коэффициенты, а неоднородная часть явно зависит от “времени” f (обобщенной истинной аномалии f), что не позволяет построить аналитическое решение этого уравнения в простой форме.

Кватернионные уравнения движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют вид [30] (в них четырехмерная кватернионная переменная \mathbf{u} отлична от векторной переменной \mathbf{u} DEF)

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u} = 0; \quad \frac{dt}{d\tau} = r; \quad h = \text{const}$$

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Здесь первое кватернионное уравнение эквивалентно системе четырех независимых линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент u_j кватернионной переменной \mathbf{u} (переменных Кустаанхеймо–Штифеля [3]):

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = 0; \quad h = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

Эти уравнения имеют постоянные коэффициенты, равные половинной постоянной кеплеровской энергии h материальной точки, взятой со знаком “минус”, и легко интегрируются в элементарных функциях в случае эллиптического кеплеровского движения, когда $h < 0$, или, для любого знака энергии h , в функциях Штумпфа. В случае эллиптического кеплеровского движения основное кватернионное уравнение эквивалентно уравнению движения четырехмерного одночастотного осциллятора. Уравнение для времени t может быть проинтегрировано отдельно от этих уравнений.

Радиус-вектора \mathbf{r} и вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ материальной точки в инерциальной системе координат связаны с переменными \mathbf{u} и $d\mathbf{u}/d\tau$ кватернионными соотношениями

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

На наш взгляд, из сравнения приведенных уравнений видно преимущество уравнений в KS -переменных перед уравнениями в DEF -переменных. Отметим, что из кватернионных уравнений возмущенного движения материальной точки в KS -переменных получаются [37] уравнения в кватернионных оскулирующих элементах (в кватернионных медленных переменных), удобные для исследования возмущенного эллиптического движения материальной точки.

Среди других ранних зарубежных работ отметим статьи Vrbik [17, 18], в которых продемонстрирована эффективность применения кватернионов к решению возмущенной задачи Кеплера. Так приведено доказательство формул [18] для построения пертурбативного решения возмущенной задачи Кеплера с использованием алгебры кватернионов в формулировке уравнений Кустанхеймо–Штифеля. Главным преимуществом такого подхода является удаление из соответствующего решения быстрых колебаний (в случае консервативных сил) и малых делителей (в случае зависящих от времени сил).

Среди более поздних работ отметим статьи Вальдфогеля [19, 20], имеющего совместные работы с Штифелем [65, 66]. Утверждается [20], что “кватернионы для регуляризации небесной механики – верный (правильный) путь” и что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”.

Вальдвогель [20] пишет: “Данная статья подкрепляет это утверждение. Мы начнем с краткого введения в алгебру кватернионов, затем мы опишем процедуру регуляризации и ее следствия в элегантной форме. Кроме того, будет приведен альтернативный вывод теории движения Кеплера, основанный на регуляризации. Также мы рассмотрим регуляризацию ограниченной пространственной задачи трех тел, т.е. пространственное обобщение преобразования Бирхоффа. В завершение будет приведено описание возмущенного движения Кеплера в регуляризованных переменных”.

Как уже отмечалось, в [20] признается приоритет автора статьи в области кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел.

Укажем основные особенности кватернионного метода регуляризации Вальдфогеля [20], а именно, для регуляризации предлагается использовать “звездно сопряженный” кватернион (“star conjugate of the quaternion”)

$$\mathbf{u}^* = -k\bar{\mathbf{u}}k = u_0 + iu_1 + ju_2 - ku_3$$

$$x = x_1 + x_2i + x_3j = qq_*, \quad q_* = k\bar{q}k^{-1} = u_1 + u_2i + u_3j - u_4k,$$

где $\mathbf{u} = u_0 + iu_1 + ju_2 + ku_3$, а также отображение

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^*$$

В этом отображении используется нетрадиционное представление трехмерного вектора \mathbf{x} кватернионом $\mathbf{x} = x_0 + ix_1 + jx_2$ с нулевой k -компонентой (отметим, что специальный символ “ \circ ” кватернионного произведения Вальдфогелем не используется). Такой кватернион \mathbf{x} является формальным обобщением (наращиванием) комплексной переменной $x = x_0 + ix_1$, использованной Леви-Чивита в теории регуляризации уравнений плоского движения.

Приведенное отображение Вальдфогеля с учетом его предыдущей формулы принимает вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^* = -\mathbf{u}\mathbf{k}\bar{\mathbf{u}}\mathbf{k}$$

В скалярной записи из последней формулы имеем

$$x_0 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2, \quad x_1 = 2(u_0u_1 - u_2u_3), \quad x_2 = 2(u_0u_2 + u_1u_3),$$

“что в точности является KS -преобразованием в его классической форме или – до перестановки индексов – отображением Хопфа” [20].

Отметим, что кватернионы Вальдфогеля \mathbf{x} , \mathbf{u} и \mathbf{u}^* совпадают с кватернионами Vivarelli [12] x , q и q^* с точностью до обозначений индексов их компонент.

В классической теории кватернионов трехмерному вектору \mathbf{x} ставится в соответствие кватернион $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ с нулевой скалярной частью. В работах автора статьи для регуляризации используются кватернионные переменные $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}^* = u_0^* + u_1^*\mathbf{i} + u_2^*\mathbf{j} + u_3^*\mathbf{k}$, не совпадающие (по смыслу) с кватернионной переменной Вальдфогеля, и кватернион $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ с нулевой скалярной частью. В этих работах используется отображение

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u},$$

а также отображение

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}^*$$

В скалярной записи первое из этих отображений дает в точности преобразование Кустанхаймо–Штифеля

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad x_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2),$$

которое по своей форме отличается от выше приведенного преобразования Вальдфогеля.

В скалярной записи второе из этих отображений дает преобразование координат

$$x_1 = 2(u_1^*u_3^* - u_0^*u_2^*), \quad x_2 = 2(u_2^*u_3^* + u_0^*u_1^*), \quad x_3 = u_0^{*2} - u_1^{*2} - u_2^{*2} + u_3^{*2},$$

отличное от преобразования Кустанхаймо–Штифеля, и позволяет, как показано нами [41], получить регуляризованные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли в ее гравитационном поле в четырехмерных переменных u_j^* , которые обладают всеми достоинствами уравнений движения спутника в переменных Кустанхаймо–Штифеля u_j (также полученных нами), но имеют более простую и симметричную структуру в случае учета в потенциале гравитационного поля Земли не только его центральной (ньютонической) составляющей, но и других составляющих: зональных, тессеральных и секториальных гармоник поля тяготения Земли.

Отметим полученное элегантное кватернионное представление [19, 20] пространственного отображения Биркгофа [67], используемого в теории регуляризации уравнений ограниченной задачи трех тел. Такое же преобразование, известное как отображение Жуковского, используется в аэродинамике для отображения поперечных раз-

резов аэродинамической поверхности до приближительной круговой формы. В работе [20] это преобразование названо преобразованием Жуковского–Биркгофа (Joukowski–Birkhoff mapping). Это представление приведено там в качестве дополнения к более ранним работам по теории регуляризации [65, 68].

Saha показано [21], как преобразование Кустанхеймо–Штифеля, записанное в кватернионной форме, можно интерпретировать как вращение в трех измерениях с использованием оси и угла вращения. Отметим, что такая интерпретация преобразования Кустанхеймо–Штифеля была дана значительно ранее в работах автора статьи [29, 30].

Отмечается [21], что “преобразование Кустанхеймо–Штифеля превращает гравитационную проблему двух тел в гармонический осциллятор при переходе к четырем измерениям. В дополнение к интересам математической физики, KS -преобразование оказалось очень полезным при моделировании N -тел, где оно помогает справляться с близкими встречами. И все же формализм остается несколько загадочным, а роль дополнительного измерения особенно загадочна. В этой статье показано, как базовое преобразование можно интерпретировать как вращение в трех измерениях. Например, если повернуть телескоп из зенита к выбранной звезде за один оборот, то можно представить ось вращения и угол как KS -преобразование звезды. Неединственность оси вращения кодирует дополнительное измерение. Эта геометрическая интерпретация становится очевидной при написании KS -преобразований в кватернионной форме, что также помогает получить краткие выражения для регуляризованных уравнений движения”.

В статье [22] регуляризация Кустанхеймо–Штифеля пространственной задачи Кеплера представлена в симплектическом и кватернионном подходах.

Рассматриваются [23] устойчивость и хаос в пространстве Кустанхеймо–Штифеля, индуцированные расслоением Хопфа. Даны [24] полностью регулярные и универсальные решения проблемы относительного движения космического корабля в двух формах, полученных из регуляризаций KS и Сперлинга–Бурде (SB). В полученных решениях нет особенностей, и на их форму не влияет тип эталонной орбиты (круговая, эллиптическая, параболическая или гиперболическая). Кроме того, решения задачи даны в компактных тензорных выражениях и непосредственно относятся к вектору начального состояния корабля-лидера. Формулировки SB и KS вводят фиктивное время посредством преобразования Сундмана (Sundman transformation). Из-за использования альтернативной независимой переменной решения строятся на основе теории асинхронного относительного движения. Этот метод упрощает необходимые производные. Замкнутые выражения частных производных орбитального движения по начальному состоянию приведены явно.

Среди последних работ в области преобразований Леви-Чивита и Кустанхеймо–Штифеля отметим работы Breiter и Langner [25–27]. Отмечается [27], что “ KS -преобразование приобрело популярность в матрично-векторной формулировке Кустанхеймо и Штифеля (1965), но его гораздо проще интерпретировать и обобщать на языке кватернионной алгебры, очень тесно связанной с оригинальной спинорной формулировкой Кустанхеймо (1964)”. Излагается KS -преобразование в кватернионной форме, предлагается его обобщенное определение, развивается геометрическая интерпретация KS -переменных, предложенная в [21], рассматривается билинейная форма Кустанхеймо–Штифеля и ее обобщение. Однако отметим, что основная цель [27] – “вывести альтернативный набор переменных действие–угол, который не основан на понятии плоскости орбиты (таким образом, избегая сингулярностей, когда орбита вырождается в прямой отрезок), и проверить его на некоторой хорошо известной астрономической проблеме (на проблеме Лидова–Козаи)”.

В связи с этим говорится “Но тем, кто хочет извлечь выгоду из богатства канонического формализма, требуется набор переменных “действие–угол” регуляризованной задачи Кеплера. Первый шаг в этом направлении можно найти в монографии Штифе-

ля и Шейфеле (1971), где симплектические полярные координаты вводятся для каждой отдельной степени свободы. Однако этот подход не учитывает вырождение проблемы и, следовательно, не подходит для методов возмущения на основе усреднения. Более того, не было предпринято никаких попыток связать этот набор с ограничением, известным как “билинейный инвариант”, эффективно сокращающим систему до трех степеней свободы. Обе проблемы были решены Чжао (2015), который предложил переменные “ LCF ” (предположительно названные в честь Леви-Чивита (1906) и Фейоса (2001)). В его подходе движение в KS -переменных рассматривается в колеблющейся “плоскости Леви-Чивита” (Деприт и др., 1994) как проблема с двумя степенями свободы. Третья степень свободы добавляется парой переменных действие–угол, ориентирующих плоскость. Избыточная четвертая степень скрыта в определении плоскости Леви-Чивита. Преобразованный кеплеровский гамильтониан зависит от одной переменной действия, два других действия тесно связаны с угловым моментом и его проекцией на полярную ось. Интересно, что результат идентичен “изоэнергетическим переменным”, найденным Леви-Чивита (1913) без регуляризации.”

Задача Лидова–Козаи анализируется [27] в терминах LKS -переменных, которые позволяют непосредственно исследовать устойчивость для всех равновесий, кроме круговой экваториальной и полярной радиальной орбит.

Предложен [28] альтернативный угловой подход к KS -преобразованию, предложена его интерпретация через симметрию.

Во многих работах проводилось сравнение точности численного решения регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля с решениями других регулярных уравнений, предложенных в этих работах. В частности, в [47] такое сравнение проводилось с уравнениями, предложенными в этой работе. В их состав входят уравнения в параметрах Эйлера, характеризующие ориентацию орбитальной системы координат. В качестве переменных используются расстояние, его производная по новой независимой переменной (а затем величины, являющиеся постоянными интегрирования в решениях уравнений невозмущенного движения для этих переменных), параметры Эйлера, а также момент количества орбитального движения.

В работах Fukushima (2005, 2007) [45, 46], ученого из японской Национальной астрономической обсерватории, показано, что KS -регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме.

Приводится [46] численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации SB , KS , BF и трехмерное расширение регуляризации LC . В аннотации статьи [46] сказано: KS и расширенная LC -регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел. Подчеркнем, что Fukushima сравнивает семь схем, описанных в § 1 его статьи, а также “нерегуляризованную обработку, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах”. Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения.

В качестве переменных состояния нового специального метода возмущений для задачи двух тел предложены [48] семь пространственных элементов (в том числе элемент, обратный удвоенной полной энергии, и два первых интеграла (first integrals of the unperturbed motion)) и элемент времени. Новые элементы сохраняют нулевой эксцентриситет и наклон, а также отрицательные значения полной энергии. Предложены уравнения движения, записанные в орбитальной системе координат, для описания ориентации которой используются параметры Эйлера. Уравнения для параметров Эйлера записываются в скалярной и матричной формах. Сравниваются результаты чис-

ленных решений предлагаемых уравнений и других уравнений, в том числе уравнений в KS -переменных. Из приводимых результатов численных решений можно сделать вывод, что для решаемых задач лучшую точность дают уравнения в KS -переменных и уравнения, предложенные авторами, причем решения новых уравнений имеют меньшие погрешности, чем решения уравнений в KS -переменных.

Показано [49], что специальные методы возмущения, основанные на регуляризованных формулировках, могут конкурировать и даже работать лучше, чем полуаналитические методы для изучения долгосрочного движения (порядка десятилетий) объектов, вращающихся вокруг Земли. Обращается внимание на то, что для такого рода применений формулировка Коуэлла (Cowell) никогда не используется из-за малых требуемых размеров шагов интегрирования, что вызывает сильное накопление ошибки округления и длительное время вычислений. Авторы этой работы разработали код Fortran, названный THALASSA, который включает метод Коуэлла, EDromo, регуляризацию KS , и набор регулярных элементов, которые были получены Штифелем и Шейфеле (1971, раздел 19) из уравнений в KS -переменных. Сложный числовой решатель, названный LSODAR (решатель для обыкновенных дифференциальных уравнений с автоматическим поиском корней), был включен для интеграции дифференциальных уравнений движения.

Авторы [48] отмечают, что они представили набор неосредненных методов, основанных на интегрировании существующих регуляризованных формулировок уравнений движения через адаптивный решатель, и что ими впервые показано, что эффективные реализации неосредненных регуляризованных формулировок уравнений движения, и особенно методов неособых элементов, являются привлекательными кандидатами для долгосрочного изучения высотного и высокоэллиптического спутника Земли.

Представлен [50] новый метод вычисления орбит в возмущенной задаче двух тел: векторы положения и скорости движущегося объекта в декартовых координатах заменяются восемью орбитальными элементами, то есть константами невозмущенного движения. Два из них связаны с радиальным движением, следующие четыре – параметры Эйлера, задающие ориентацию промежуточной системы координат, эволюция которой отслеживает ориентацию плоскости орбиты и направление отсчета на ней. Полная энергия и элемент времени дополняют вектор состояния. Численные тесты включены для оценки эффективности предлагаемого специального метода возмущений. На примере орбитального движения двух комет показывается, что вычисления с использованием этого метода намного более точные и более быстрые, чем классические вычисления орбит с декартовыми координатами.

6. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием идеальной системы координат, переменных Леви-Чивита, параметров Эйлера и кватернионов. Как известно Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоской задачи двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно.

Рассмотрим предложенную нами кватернионную регуляризацию [8] уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием переменных Леви-Чивита. Она основана на использовании двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, двухмерных переменных Леви-Чивита, четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватерниона вращения Гамильтона, описывающих ориентацию идеальной системы координат [9], а также основана на использовании в качестве дополнительных переменных кеплеровской энергии и реального времени и на использовании новой независимой переменной Зундмана. Эти уравнения имеют не только хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля, но и имеют свои дополнительные достоинства.

6.1. Уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в орбитальной и идеальной системах координат с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбитального движения. Эти уравнения имеют вид [8, 33, 34]

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + p_{1\text{orb}}, \quad \frac{dr}{dt} = v_1, \quad \frac{dc}{dt} = rp_{2\text{orb}}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d\Lambda_0}{dt} &= -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, & 2 \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3, \\ 2 \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, & 2 \frac{d\Lambda_3}{dt} &= \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$$\Omega_1 = \frac{r}{c} p_{3\text{orb}} \cos \varphi, \quad \Omega_2 = \frac{r}{c} p_{3\text{orb}} \sin \varphi, \quad \Omega_3 = 0 \quad (6.3)$$

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_{\text{id}}; \quad \Omega_{\text{id}} = \Omega_1 \mathbf{i} + \Omega_2 \mathbf{j} = \frac{r}{c} p_{3\text{orb}} (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}), \quad \Omega_3 = 0 \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) является кватернионной записью скалярной системы дифференциальных уравнений (6.2) и (6.3) в параметрах Эйлера Λ_j , характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Кватернионная переменная Λ в этом уравнении имеет смысл кватернионного оскулирующего элемента орбиты второго (изучаемого) тела: при равенстве нулю составляющей $p_{3\text{orb}}$ вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения центра масс второго тела, перпендикулярной плоскости, проходящей через радиус-вектор \mathbf{r} и вектор \mathbf{v} скорости этого тела, то есть, плоскости мгновенной орбиты второго тела, кватернион $\Lambda = \text{const}$.

Уравнения (6.1)–(6.3) или (6.1) и (6.4), (6.3) – уравнения движения второго тела, записанные в двух вращающихся системах координат: в орбитальной системе координат η_{orb} и в идеальной системе координат η_{id} . Уравнения (6.1) записаны в орбитальной системе координат, а уравнения (6.2) и (6.3) (или (6.4), (6.3)) – в идеальной системе координат.

Ось $\eta_{1\text{orb}}$ орбитальной системы координат η_{orb} , имеющей начало в центре масс второго тела, направлена по радиус-вектору \mathbf{r} , а ее ось $\eta_{3\text{orb}}$ направлена вдоль вектора $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента орбитальной скорости центра масс второго тела. Ось $\eta_{3\text{id}}$ идеальной системы координат η_{id} параллельна оси $\eta_{3\text{orb}}$ орбитальной системы координат, а координатные оси $\eta_{1\text{id}}$ и $\eta_{2\text{id}}$ идеальной системы координат лежат в плоскости координатных осей $\eta_{1\text{orb}}$ и $\eta_{2\text{orb}}$ орбитальной системы координат и получаются из них поворотом вокруг оси $\eta_{3\text{orb}}$ на угол φ по ходу часовой стрелки.

В уравнения (6.1)–(6.3) или (6.1) и (6.4), (6.3) переменными являются расстояние r от центра масс второго тела до центра масс первого тела, производная dr/dt (проекция v_1 вектора скорости \mathbf{v} центра масс второго тела на направление радиус-вектора \mathbf{r} (на ось $\eta_{1\text{orb}}$ орбитальной системы координат)), модуль вектора момента орбитальной скорости второго тела $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$, обобщенная истинная аномалия φ и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), характеризующие ориентацию идеальной системы координат η_{id} в инерциальной системе координат ξ .

Фигурирующие в этих уравнениях величины $p_{k\text{orb}}$ являются проекциями вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения центра масс второго тела на оси орбитальной системы координат η_{orb} .

Вектор Ω абсолютной угловой скорости идеальной системы координат η_{id} параллелен радиус-вектору \mathbf{r} центра масс второго тела и определяется формулой

$$\Omega = \frac{p_{3\text{orb}}}{c} \mathbf{r}; \quad c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

Проекции Ω_i вектора Ω на оси идеальной системы координат η_{id} запишем в виде

$$\Omega_1 = \frac{r}{c} p_{3orb} \cos \varphi = \frac{1}{c} H_1 p_{3orb}, \quad \Omega_2 = \frac{r}{c} p_{3orb} \sin \varphi = \frac{1}{c} H_2 p_{3orb}, \quad \Omega_3 = 0,$$

где $H_1 = r \cos \varphi$, $H_2 = r \sin \varphi$ – проекции радиус-вектора \mathbf{r} на оси системы координат η_{id} .

Декартовы координаты ξ_k в инерциальной системе координат и проекции $v_k = v_{k orb}$ вектора скорости центра масс второго тела на оси орбитальной системы координат находятся через указанные переменные по формулам

$$\xi_1 = r(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2), \quad \xi_2 = 2r(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3), \quad \xi_3 = 2r(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)$$

$$v_1 = v_{1orb} = \frac{dr}{dt}, \quad v_2 = v_{2orb} = \frac{c}{r}, \quad v_3 = v_{3orb} = 0,$$

где λ_j – параметры Эйлера, характеризующих ориентацию орбитальной системы координат в инерциальной системе координат, которые предварительно находятся через переменные Λ_j с использованием формул

$$\Lambda_0 = \lambda_0\varphi_0 + \lambda_3\varphi_3, \quad \Lambda_1 = \lambda_1\varphi_0 - \lambda_2\varphi_3, \quad \Lambda_2 = \lambda_2\varphi_0 + \lambda_1\varphi_3, \quad \Lambda_3 = -\lambda_0\varphi_3 + \lambda_3\varphi_0,$$

в которых $\varphi_0 = \cos(\varphi/2)$, $\varphi_3 = \sin(\varphi/2)$, или с использованием кватернионных формул

$$\Lambda = \lambda \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k} \right); \quad \lambda = \Lambda \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k} \right)$$

Проекции $v_{k\xi}$ вектора скорости центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат ξ определяются кватернионными соотношениями

$$\mathbf{v}_\xi = v_{1\xi}\mathbf{i} + v_{2\xi}\mathbf{j} + v_{3\xi}\mathbf{k} = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \lambda \circ \mathbf{v}_{\eta_{orb}} \circ \bar{\lambda} = \lambda \circ (\dot{\mathbf{r}} + (c/r)\mathbf{j}) \circ \bar{\lambda},$$

а связи проекций $p_{k\xi}$ вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения на оси инерциальной системы координат с их проекциями $p_{k orb}$ на оси орбитальной системы координат определяются кватернионными соотношениями перепроектирования

$$\mathbf{p}_\xi = p_{1\xi}\mathbf{i} + p_{2\xi}\mathbf{j} + p_{3\xi}\mathbf{k} = \lambda \circ \mathbf{p}_{orb} \circ \bar{\lambda}$$

$$\mathbf{p}_{orb} = p_{1orb}\mathbf{i} + p_{2orb}\mathbf{j} + p_{3orb}\mathbf{k} = \bar{\lambda} \circ \mathbf{p}_\xi \circ \lambda$$

Отметим, что уравнения возмущенного кеплеровского движения, записанные в идеальной системе координат и состоящие из уравнений для полярных координат и уравнений для угловых переменных, описывающих ориентацию идеальной системы координат, были получены Andoyer (1923) [69] и Musen (1959) [70].

6.2. Уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в идеальной системе координат с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена и кватернионного оскулирующего элемента орбитального движения. Введем двухмерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена H_1 , H_2 , являющиеся проекциями радиус-вектора \mathbf{r} центра масс второго тела на оси идеальной системы координат η_{id} , связанные с переменными r и φ (полярными координатами) соотношениями

$$H_1 = r \cos \varphi, \quad H_2 = r \sin \varphi, \quad H_3 = 0 \quad (6.5)$$

Дифференцируя эти соотношения дважды по времени и используя уравнения (6.1), получим вместо уравнений (6.1)–(6.3) следующие уравнения:

$$\frac{d^2 H_1}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} H_1 = p_{1id}, \quad \frac{d^2 H_2}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} H_2 = p_{2id}, \quad H_3 = 0, \quad r^2 = H_1^2 + H_2^2 \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d\Lambda_0}{dt} &= -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, & 2 \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3 \\ 2 \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, & 2 \frac{d\Lambda_3}{dt} &= \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\Omega_1 = (H_1/c) p_{3id}, \quad \Omega_2 = (H_2/c) p_{3id}, \quad c = H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1, \quad p_{3id} = p_{3orb} \quad (6.8)$$

Уравнения (6.7) и (6.8) в кватернионной записи имеют вид

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_{id}, \quad (6.9)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k}$$

$$\Omega_{id} = \Omega_1\mathbf{i} + \Omega_2\mathbf{j} = (p_{3id}/c)(H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j}) = p_{3id} (H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1)^{-1} (H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j})$$

Декартовы координаты ξ_k центра масс второго тела в инерциальной системе координат и проекции $v_{k\xi}$ вектора абсолютной скорости \mathbf{v} центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат находятся через идеальные координаты Ганзена H_1 , H_2 и их производные \dot{H}_1 , \dot{H}_2 по кватернионным формулам

$$\mathbf{r}_{in} = \Lambda \circ \mathbf{r}_{id} \circ \bar{\Lambda}, \quad \mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{id} = H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{v}_{in} = \Lambda \circ \mathbf{v}_{id} \circ \bar{\Lambda}, \quad \mathbf{v}_{in} = \mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_{id} = \dot{H}_1\mathbf{i} + \dot{H}_2\mathbf{j} \quad (6.11)$$

Проекции $p_{k id}$ вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения на оси идеальной системы координат η_{id} связаны с его проекциями $p_{k\xi}$ на оси инерциальной системы координат ξ соотношениями перепроектирования

$$\mathbf{p}_{id} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{p}_{in} \circ \Lambda, \quad \mathbf{p}_{id} = p_{1id}\mathbf{i} + p_{2id}\mathbf{j} + p_{3id}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_\xi = p_{1\xi}\mathbf{i} + p_{2\xi}\mathbf{j} + p_{3\xi}\mathbf{k} \quad (6.12)$$

Уравнения (6.6)–(6.8) или (6.6), (6.9) являются уравнениями движения второго тела, записанными в идеальной системе координат η_{id} . В этих уравнениях переменными являются двумерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена H_1 , H_2 , их первые производные по времени \dot{H}_1 , \dot{H}_2 и параметры Эйлера Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), характеризующие ориентацию идеальной системы координат η_{id} в инерциальной системе координат ξ . Фигурирующие в этих уравнениях величины $p_{i id}$ являются проекциями вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения центра масс второго тела на оси идеальной системы координат η_{id} ($p_{3id} = p_{3orb}$).

Отметим, что скалярные уравнения возмущенного кеплеровского движения в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера, записанные в идеальной системе координат, ранее были получены в других формах и другими способами Deprit (1976) [9] и Брумбергом (1980) [71]. Уравнения (6.6)–(8.8) получены автором статьи [8] независимо и согласуются с уравнениями [9] и [71].

6.3. Регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Леви-Чивита и параметрах Эйлера. Введем систему координат $O\eta_{id}$, оси которой параллельны осям идеальной системы координат η_{id} , а начало находится в центре масс O первого тела. Ориентация системы координат $O\eta_{orb}$, оси которой параллельны осям орбитальной системы координат η_{orb} , а начало находится в центре O , в идеальной системе координат η_{id} (а также и в системе координат $O\eta_{id}$) характеризуется кватернионом поворота Φ , имеющим вид

$$\Phi = \cos \frac{\Phi}{2} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{k}$$

Компоненты Φ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) этого кватерниона определяются соотношениями

$$\Phi_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = \sin \frac{\varphi}{2}$$

и являются параметрами Эйлера, характеризующими ориентацию орбитальной системы координат η_{orb} в идеальной системе координат η_{id} .

Ранее введенные двумерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена H_1 , H_2 , определяемые соотношениями (6.5), являются декартовыми координатами центра масс второго тела в системе координат $O\eta_{id}$ и связаны с переменными r и Φ_j соотношениями

$$H_1 = r \cos \varphi = r(\Phi_0^2 - \Phi_3^2), \quad H_2 = r \sin \varphi = 2r\Phi_0\Phi_3 \quad (H_3 = 0)$$

Введем переменные Леви-Чивита

$$U_0 = \sqrt{r}\Phi_0, \quad U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3,$$

связанные с ганзеновскими координатами соотношениями

$$H_1 = U_0^2 - U_3^2, \quad H_2 = -2U_0U_3 \quad (6.13)$$

Введение знака “–” в соотношении для переменной Леви-Чивита $U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3$ и, как следствие, для координаты Ганзена $H_2 = -2U_0U_3$ объясняется следующими соображениями. Для пространственного движения связи трехмерных декартовых координат ξ_k с четырехмерными переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид соотношений (3.4):

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2)$$

Для плоского движения координата $\xi_3 = 0$. Двухмерные декартовы координаты ξ_1 и ξ_2 в этом случае совпадают с координатами Ганзена H_1 и H_2 (напомним, что координата Ганзена $H_3 = 0$): $\xi_1 = H_1$ и $\xi_2 = H_2$ (идеальная система координат в случае плоского движения может трактоваться как опорная система координат ξ).

Нулевому значению координаты ξ_3 соответствуют, как видно из (3.4), нулевые значения либо переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_1 и u_2 , либо переменных u_0 и u_3 . При этом переменными Леви-Чивита будут либо переменные $u_0 = U_0$ и $u_3 = U_3$, либо переменные $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$.

Выбирая первый вариант выбора переменных $u_0 = U_0$ и $u_3 = U_3$ в качестве переменных Леви-Чивита, получим, учитывая, что $u_1 = u_2 = 0$

$$\xi_1 = H_1 = u_0^2 - u_3^2 = U_0^2 - U_3^2, \quad \xi_2 = H_2 = -2u_0u_3 = -2U_0U_3$$

Для второго варианта выбора переменных $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$ в качестве переменных Леви-Чивита имеем соответственно

$$\xi_1 = H_1 = u_1^2 - u_2^2 = U_1^2 - U_2^2, \quad \xi_2 = H_2 = 2u_1u_2 = 2U_1U_2$$

Нами, таким образом, выше был выбран первый вариант определения переменных Леви-Чивита: $U_0 = \sqrt{r}\Phi_0$, $U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3$, соответствующий описанию движения орбитальной системы координат относительно идеальной системы координат в параметрах Эйлера Φ_0 и Φ_3 .

Отметим, что уравнениям Леви-Чивита (3.11)–(3.14) (они приведены в книге Штифеля и Шейфеле [3]) соответствует второй вариант выбора определения переменных Леви-Чивита.

Дополнительно дадим другое объяснение введения знака “–” в соотношении для переменной Леви-Чивита $U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3$ и, как следствие, для координаты Ганзена $H_2 = -2U_0U_3$. По аналогии с соотношениями

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_i = -r^{1/2}\lambda_i; \quad i = 1, 2, 3,$$

определяющими переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j для пространственного движения через параметры Эйлера λ_j и расстояние r до центра притяжения, для движения в идеальной системе координат (эквивалентного в этом случае плоскому движению) будем иметь соотношения для переменных Леви-Чивита U_0 и U_3 :

$$U_0 = r^{1/2}\Phi_0, \quad U_3 = -r^{1/2}\Phi_3 \quad (U_1 = U_2 = 0),$$

которые определяют движение центра масс второго тела в идеальной системе координат. В этих соотношениях роль параметров Эйлера λ_j играют выше введенные параметры Эйлера Φ_j :

$$\Phi_0 = \cos(\varphi/2), \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = \sin(\varphi/2),$$

характеризующие ориентацию орбитальной системы координат η_{orb} в идеальной системе координат. В соотношениях для переменных Леви-Чивита U_0 и U_3 , как видно, присутствует знак “–” в соотношении для переменной U_3 . Выражения для координат Ганзена принимают при этом вид

$$H_1 = r(\Phi_0^2 - \Phi_3^2) = U_0^2 - U_3^2, \quad H_2 = 2r\Phi_0\Phi_3 = -2U_0U_3,$$

согласующийся с формулами (3.4) в случае плоского движения, когда $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. В этих выражениях присутствует знак “–” в выражении для координаты H_2 .

Проекции вектора скорости центра масс второго тела на оси системы координат $O\eta_{\text{id}}$ (а также на оси идеальной системы координат η_{id}) связаны с производными по времени от переменных Леви-Чивита соотношениями

$$\begin{aligned} v_{1\text{id}} &= v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi = \dot{H}_1 = 2(U_0\dot{U}_0 - U_3\dot{U}_3) \\ v_{2\text{id}} &= v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi = \dot{H}_2 = -2(U_3\dot{U}_0 + U_0\dot{U}_3) \\ v_{3\text{id}} &= v_3 = \dot{H}_3 = 0, \quad v_k = v_{k\text{orb}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Формулы для кеплеровской энергии h и модуля c вектора момента орбитальной скорости второго тела, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} h &= (1/2)v^2 - \mu/r = (1/2)(\dot{H}_1^2 + \dot{H}_2^2) - \mu(H_1^2 + H_2^2)^{-1/2} \\ c &= |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1, \end{aligned} \quad (6.15)$$

в новых переменных Леви-Чивита U_0 и U_3 принимают вид

$$h = 2r(\dot{U}_0^2 + \dot{U}_3^2) - \mu/r, \quad r = U_0^2 + U_3^2, \quad c = 2(U_0^2 + U_3^2)(U_3\dot{U}_0 - U_0\dot{U}_3) \quad (6.16)$$

Перейдем в уравнениях движения второго тела (6.6)–(6.8), записанным в идеальной системе координат с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена H_1 , H_2 , к переменным Леви-Чивита U_0 , U_3 по формулам (6.13), (6.14) и к новой независимой переменной τ в соответствии с дифференциальным соотношением Зундмана $dt = r d\tau$. Введем также в качестве дополнительной переменной кеплеров-

скую энергию h , определяемую соотношениями (6.15), (6.16) и удовлетворяющую дифференциальному уравнению $dh/dt = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$. В итоге получим следующие скалярные регулярные дифференциальные уравнения движения второго тела (регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел) [8]:

$$\frac{d^2U_0}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hU_0 = \frac{1}{2}rQ_0, \quad \frac{d^2U_3}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hU_3 = \frac{1}{2}rQ_3 \quad (6.17)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2 \left(Q_0 \frac{dU_0}{d\tau} + Q_3 \frac{dU_3}{d\tau} \right) \quad (6.18)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d\Lambda_0}{d\tau} &= -r(\Omega_1\Lambda_1 + \Omega_2\Lambda_2), & 2 \frac{d\Lambda_1}{d\tau} &= r(\Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3) \\ 2 \frac{d\Lambda_2}{d\tau} &= r(\Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3), & 2 \frac{d\Lambda_3}{d\tau} &= r(\Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2) \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r \quad (6.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r &= |\mathbf{r}| = U_0^2 + U_3^2, & Q_0 &= U_0p_{1id} - U_3p_{2id}, & Q_3 &= -U_3p_{1id} - U_0p_{2id} \\ \Omega_1 &= \frac{1}{c}(U_0^2 - U_3^2)p_{3id}, & \Omega_2 &= -\frac{2}{c}U_0U_3p_{3id}; & c &= 2 \left(U_3 \frac{dU_0}{d\tau} - U_0 \frac{dU_3}{d\tau} \right), & p_{3id} &= p_{3orb} \end{aligned}$$

Эти уравнения необходимо дополнить кватернионными соотношениями перепроектирования (6.10)–(6.12).

Отметим, что регулярные уравнения (6.17)–(6.20) содержат, как подсистему, уравнения (6.17), (6.18), (6.20), имеющие вид регулярных уравнений Леви-Чивита плоской задачи двух тел. Эта подсистема уравнений совпадают с уравнениями Леви-Чивита плоской задачи двух тел (3.11)–(3.14), если в них формально ввести переобозначения $U_0 = u_1$, $U_3 = -u_2$ и $Q_0 = q$, $Q_3 = -q_2$.

Скалярные регулярные уравнения движения второго тела (6.17)–(6.20) (регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел) в кватернионной записи имеют следующий вид [8]:

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{U} = \frac{1}{2}r\mathbf{Q}, \quad \frac{dh}{d\tau} = 2 \text{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right) \quad (6.21)$$

$$2 \frac{d\Lambda}{d\tau} = r\Lambda \circ \Omega_{id} = \frac{r}{c} p_{3id} \Lambda \circ \left((U_0^2 - U_3^2)\mathbf{i} - 2U_0U_3\mathbf{j} \right); \quad \frac{dt}{d\tau} = r \quad (6.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_0 + U_3\mathbf{k}, & \bar{\mathbf{U}} &= U_0 - U_3\mathbf{k}, & \Lambda &= \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} \\ r = |\mathbf{r}| = \|\mathbf{U}\| &= \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{U} = U_0^2 + U_3^2, & c &= 2 \left(U_3 \frac{dU_0}{d\tau} - U_0 \frac{dU_3}{d\tau} \right) \\ \mathbf{Q} &= -\mathbf{i} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{P}_{id}, & \mathbf{P}_{id} &= p_{1id}\mathbf{i} + p_{2id}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Отображения радиус-вектора \mathbf{r} и вектора скорости \mathbf{v} центра масс второго тела на оси идеальной и инерциальной систем координат определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{id} &= H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j} = \bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{U}, & \mathbf{r}_{in} &= \Lambda \circ \mathbf{r}_{id} \circ \bar{\Lambda}, & \mathbf{r}_{in} &= r_{\xi} = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} \\ \mathbf{v}_{id} &= \frac{d\mathbf{r}_{id}}{dt} = \frac{dH_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dH_2}{dt}\mathbf{j} = 2\bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{U}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \\ \mathbf{v}_{in} &= \Lambda \circ \mathbf{v}_{id} \circ \bar{\Lambda}, & \mathbf{v}_{in} &= \mathbf{v}_{\xi} = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Уравнения (6.17)–(6.20) или (6.21) и (6.22) являются регулярными уравнениями возмущенной пространственной задачи двух тел, построенными с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена. В скалярных уравнениях (6.17)–(6.20) регулярными переменными являются переменные Леви-Чивита U_0 и U_3 , описывающие движение центра масс второго тела в идеальной системе координат $O\eta_{\text{id}}$, кеплеровская энергия h , время t и параметры Эйлера Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), характеризующие ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. В регулярных кватернионных уравнениях (6.21) и (6.22) переменными являются двухмерный кватернион \mathbf{U} , описывающий движение центра масс второго тела в идеальной системе координат $O\eta_{\text{id}}$, кеплеровская энергия h , время t и четырехмерный кватернион (кватернионный оскулирующий элемент) $\mathbf{\Lambda}$, характеризующий ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Фигурирующие в этих уравнениях величины $p_{1\text{id}}$, $p_{2\text{id}}$ являются проекциями вектора \mathbf{p} возмущающего ускорения центра масс второго тела на оси идеальной системы координат. Эти величины находятся через проекции вектора \mathbf{p} на оси инерциальной системы координат с помощью выше приведенных соотношений перепроектирования.

Регулярные уравнения (6.17)–(6.20) или (6.21) и (6.22) возмущенной пространственной задачи двух тел образуют систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля) и обладают всеми достоинствами уравнений Кустаанхеймо–Штифеля:

– они, в отличие от ньютоновских уравнений, регулярны в центре притяжения, линейны для невозмущенных кеплеровских движений и имеют в этом случае скалярный вид

$$\frac{d^2 U_i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h U_i = 0, \quad i = 0, 3; \quad h = \text{const}, \quad \Lambda_j = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

или кватернионный вид

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{U} = 0; \quad h = \text{const}, \quad \mathbf{\Lambda} = \text{const}$$

(для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком “минус”);

– позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Вместе с тем эти регулярные уравнения имеют существенные отличия:

1) для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, поскольку кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения орбитального движения, в этом случае остается постоянным;

2) для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (т.е. медленно изменяющейся кватернионной переменной), что также является полезным свой-

ством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Отметим, однако, что эти уравнения не пригодны для исследования прямолинейных орбит, когда модуль вектора момента орбитальной скорости второго тела $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ обращается в ноль, поскольку кватернионное дифференциальное уравнение ориентации идеальной системы координат в этом случае вырождается (из-за присутствия в этом уравнении знаменателя c).

От этого недостатка уравнений (6.17)–(6.20) или (6.21) и (6.22) можно избавиться, переходя в них от независимой переменной τ к новой независимой переменной τ^* в соответствии с дифференциальным соотношением $d\tau = cd\tau^*$ и дополняя полученные уравнения дифференциальным уравнением для переменной c . В итоге получаем уравнения, не имеющие указанной особенности:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau^*} &= c\mathbf{S}, \quad \frac{d\mathbf{S}}{d\tau^*} - \frac{1}{2}ch\mathbf{U} = \frac{1}{2}cr\mathbf{Q} \\ \frac{dc}{d\tau^*} &= cr \left[2p_{1id}U_0U_3 + p_{2id}(U_0^2 - U_3^2) \right] \\ \frac{dh}{d\tau^*} &= 2 \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{Q} \right) \\ 2 \frac{d\Lambda}{d\tau^*} &= cr\Lambda \circ \Omega_{id} = rp_{3id}\Lambda \circ \left((U_0^2 - U_3^2)\mathbf{i} - 2U_0U_3\mathbf{j} \right) \\ \frac{dt}{d\tau^*} &= cr \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{P}_{id}, \quad \mathbf{P}_{id} = p_{1id}\mathbf{i} + p_{2id}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{p}_{id} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{p}_{in} \circ \Lambda, \quad \mathbf{p}_{id} = p_{1id}\mathbf{i} + p_{2id}\mathbf{j} + p_{3id}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_\xi = p_{1\xi}\mathbf{i} + p_{2\xi}\mathbf{j} + p_{3\xi}\mathbf{k}$$

В этих регулярных кватернионных уравнениях переменными, по-прежнему, являются двухмерный кватернион \mathbf{U} , кеплеровская энергия h , время t , четырехмерный кватернион Λ , а также двухмерный кватернион \mathbf{S} и модуль c вектора момента орбитальной скорости. Эти уравнения сложнее регулярных кватернионных уравнений (6.21) и (6.22).

Отметим однако, что при движении в ньютоновском гравитационном поле, как известно, существуют следующие виды траекторий: круговая, эллиптическая, параболическая и гиперболическая. При наличии малых возмущений движение происходит по траекториям, близким к указанным. Прямолинейных траекторий среди них нет. Тем не менее, с теоретической точки зрения прямолинейные и близкие к ним орбиты могут существовать при определенных возмущающих или управляющих силах, поэтому последние приведенные уравнения представляют интерес.

В заключение отметим, что Брумбергом [71] описано применение параметров Эйлера к выводу уравнений возмущенного движения пространственной задачи двух тел в ганзеновских координатах и указано на возможность дальнейшего преобразования полученных им уравнений возмущенного движения с использованием параболических координат Леви-Чивита.

Заключение. Дан аналитический обзор работ, посвященных кватернионной регуляризации особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых действующими гравитационными силами, с помощью использования четырехмерных переменных Кустанхаймо–Штифеля. Они демонстрируют актуальность разработки кватернионных методов регуляризации

особенностей классических моделей механики типа деления на ноль, порождаемых действующими гравитационными силами, и актуальность применения регулярных кватернионных моделей аналитической механики для решения задач небесной механики и механики космического полета (астродинамики).

Изложен предложенный автором новый метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и двухмерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение второго (рассматриваемого) тела в идеальной системе координат, в которой уравнения пространственного движения принимают вид уравнений плоского движения, а также основанный на использовании четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат.

Изложены полученные с помощью этого метода регулярные скалярные и кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. В скалярных уравнениях переменными являются переменные Леви-Чивита, кеплеровская энергия, время и указанные параметры Эйлера. В кватернионных уравнениях переменными являются двухмерный кватернион, описывающий движение центра масс второго тела в идеальной системе координат (его компоненты – переменные Леви-Чивита), кеплеровская энергия, время и четырехмерный кватернион ориентации идеальной системы координат (его компоненты – параметры Эйлера). Используемые в качестве переменных параметры Эйлера и кватернион ориентации идеальной системы координат являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты изучаемого (второго) тела (медленно изменяющимися переменными).

Изложенные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, в которых совместно используются переменные Леви-Чивита и параметры Эйлера, образуют в общем случае систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют и регулярные уравнения Кустанхеймо–Штифеля). Они, также как и уравнения Кустанхеймо–Штифеля, регулярны в центре притяжения (в отличие от нерегулярных ньютоновских уравнений), линейны для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений для этих движений); позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения (эллиптического, гиперболического, параболического) с использованием функций Штумпфа, близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений, позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их численного решения.

Однако эти регулярные уравнения имеют следующие существенные отличия от регулярных уравнений в переменных Кустанхеймо–Штифеля:

– для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае Кустанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, так как для этого случая движения тела кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, и его компоненты (параметры Эйлера) остаются постоянными. Поэтому скалярные и кватернионные дифференциальные уравнения в параметрах Эйлера, описывающие изменение ориентации идеальной системы координат, выпадают в этом случае из рассмотрения;

– для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (т.е. медленно изменяющейся кватернионной переменной), а параметры Эйлера (компоненты этого кватерниона) – скалярными оскулирующими элементами, что также является

полезным свойством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Недостатком этих уравнений является то, что эти уравнения не пригодны для исследования прямолинейных орбит. Для этих орбит модуль c вектора момента орбитальной скорости второго тела, стоящий в знаменателях коэффициентов скалярных и кватернионных дифференциальных уравнений в параметрах Эйлера, описывающих изменение ориентации идеальной системы координат, обращается в ноль. Поэтому эти уравнения в этом случае вырождаются. В статье приведены регулярные кватернионные уравнения, свободные от этого недостатка, но имеющие более сложную структуру.

Во введении было отмечено, что Леви-Чивита (1920) в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал их неудачу. Штифель и Шейфеле в своей книге (1971) также отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. Aarseth и Zare (1974), а также Aarseth (2003) отмечали, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом и Гурвицем, невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства).

Изложенные в разд. 3 результаты, полученные ранее автором [8], показывают, что регуляризация дифференциальных уравнений возмущенного плоского движения в задаче двух тел, предложенная Леви-Чивита, может быть с успехом использована для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения в задаче двух тел, если исходные уравнения возмущенного пространственного движения записать в идеальной системе координат, в которой они принимают вид уравнений возмущенного плоского движения, и затем получаемые уравнения дополнить скалярными или кватернионными уравнениями, описывающими изменение ориентации идеальной системы координат в параметрах Эйлера в процессе возмущенного движения тела, а также дополнить уравнениями для кеплеровской энергии и времени, рассматриваемыми в качестве дополнительных переменных (при этом в качестве независимой переменной используется независимая переменная Зундмана).

В заключение отметим недавно опубликованную на английском языке работу автора статьи [42], в которой рассмотрены различные аспекты кватернионной регуляризации особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых действующими гравитационными силами, а также рассмотрена кватернионная регуляризация дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения (возмущенного движения материальной точки в произвольном центральном силовом поле, когда линия действия потенциальной силы проходит во все время движения через точку, называемую центром), а также рассмотрены различные приложения регуляризованных кватернионных уравнений.

Работа выполнена в рамках темы FFNM-2022-0007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные методы и регулярные модели аналитической механики (обзор) // ПММ. 2023. Т. 87. № 4. С. 519–556.
2. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // *Acta Math.* 1920. V. 42. P. 99–144. DOI: 10.1007/BF02418577
3. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 303 с.
4. *Aarseth S.J., Zare K.A.* Regularization of the three-body problem // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 185–205.
5. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. Cambridge: Univ. Press, 2003. 408 p.

6. *Hopf H.* Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // *Math. Ann.* 1931. V. 104. P. 637–665.
7. *Hurwitz A.* *Mathematische Werke.* Vol. 2. Basel: Birkhauser, 1933.
8. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // *Космич. исслед.* 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. DOI: 10.7868/S0023420614030029
9. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // *Celest. Mech.* 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
10. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois corps // *Acta Math.* 1912. V. 36. P. 105–179.
11. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // *Celest. Mech.* 1978. V. 17. P. 395–403.
12. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // *Celest. Mech.* 1983. V. 29. P. 45–50.
13. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // *Celest. Mech.* 1988. V. 41. P. 359–370.
14. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 1991. V. 50. P. 109–124.
15. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // *Mech. Solids.* 1990. № 2. P. 3–8.
16. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 1994. V. 58. P. 151–201.
17. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Canad. J. Phys.* 1994. V. 72. P. 141–146.
18. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys. A: Math.&General.*, 1995. V. 28. P. 193–198.
19. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astr.* 2006. V. 95. P. 201–212.
20. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Celest. Mech.&Dyn. Astr.* 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
21. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2009. V. 400. P. 228–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x.arXiv:0803.4441
22. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // *R.&C. Dyn.*, 2015. V. 20. № 1. P. 19–36. DOI: 10.1134/S1560354715010025
23. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454. DOI: 10.1093/mnras/stw780.arXiv:1604.06673
24. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2017. V. 127. pp. 343–368.
25. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2017. V. 128. P. 323–342.
26. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2018. V. 130. Art. № 68. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
27. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2019. V. 131. Art. № 9. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
28. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-Map. An interpretation through symmetry // *J. Geom. Mech.* 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
29. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. № 6. С. 12–21.
30. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 1. С. 151–158.
31. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: 1985. 36 с. Деп. в ВИНТИ 13.12.85. № 218628-В.
32. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: 1985. 18 с. Деп. в ВИНТИ 13.22.85. № 8629-В.

33. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственно-го спутника. I // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
34. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственно-го спутника. II // Космич. исслед. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
35. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.
37. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТлСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
38. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. DOI: 10.7868/S0023420613050026
39. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. DOI: 10.7868/S0023420615050040
40. *Челноков Ю.Н.* Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733. DOI: 10.31857/S003282350002736-9
41. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космич. исслед. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. DOI: 10.1134/S002342061902002X
42. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. DOI: 10.1007/s10483-021-2797-9
43. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
44. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
45. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. № 5. Art. № 2496. DOI: 10.1086/429546
46. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. № 6. Art. № 2815.
47. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150. DOI: 10.1007/s10569-006-9056-3
48. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2015. V. 454. P. 2890–2908.
49. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art. № 21. DOI: 10.1007/s10569-019-9897-1
50. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2020. V. 132. Art. № 10. DOI: 10.1007/s10569-020-9952-y
51. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. матер.: XXVIII С.-Петербургская между. конф. по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2021. С. 292–295.
52. *Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Шекутьев А.Ф.* Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и изохронных производных // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156.
53. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
54. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
55. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Mat. Pura Appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
56. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere Math. 1956. № 2. P. 411–417.

57. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // *Ann. Univ. Turku.* 1964. V. 73. P. 3–7. DOI: 10.1086/518165
58. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angew. Math.* 1965. V. 218. P. 204–219.
59. *Hopf H.* Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphere auf die Kugelfläche // *Math. Ann.* 1931. V. 104. P. 637–665.
60. *Volk O.* Concerning the derivation of the KS-transformation // *Celest. Mech.* 1973. V. 8. P. 297–305.
61. *Лидов М.Л.* Увеличение размерности гамильтоновых систем. KS-преобразование, использование частных интегралов // *Космич. исслед.* 1982. Т. 20. № 2. С. 163–176.
62. *Лидов М.Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла // *Космич. исслед.* 1982. Т. 20. № 6. С. 787–807.
63. *Лидов М.Л., Ляхова В.А.* Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость // *Космич. исслед.* 1983. Т. 21. № 1. С. 3–11.
64. *Полещиков С.М.* Регуляризация канонических уравнений задачи двух тел с помощью обобщенной KS-матрицы // *Космич. исслед.* 1999. Т. 37. № 3. С. 322–328.
65. *Stiefel E.L., Waldvogel J.* Generalisation de la regularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace a trois dimensions // *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences.* 1965, Paris.
66. *Stiefel E., Rosler M., Waldvogel J., Burdet C.A.* Methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics // *NASA Contractor Rep. NASA CR-769.* 1967. P. 88–115.
67. *Birkhoff G.D.* The restricted problem of three bodies // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884–1940). 1915. V. 39 (1). P. 265–334.
68. *Waldvogel J.* Die Verallgemeinerung der Birkhoff-Regularisierung für das räumliche Dreikörperproblem // *Bull. Astron. Ser.* 3. 1967. V. 2. № 2. P. 295–341.
69. *Andoyer H.* *Cours de Mecanique Celeste.* Paris: Gauthier-Vilars, 1923.
70. *Musen P.* Application of Hansen's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth // *J. Geoph. Res.* 1959. V. 64. P. 2271–2279.
71. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.

Quaternion Regularization of Singularities of Astrodynamic Models Generated by Gravitational Forces (Review)

Yu.N. Chelnokov^{a, #}

^a*Institute of Precision Mechanics and Control Problems RAS, Saratov, Russia*

[#]*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

The article presents an analytical review of works devoted to the quaternion regularization of the singularities of differential equations of the perturbed three-body problem generated by gravitational forces, using the four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables. Most of these works have been published in leading foreign publications. We consider a new method of regularization of these equations proposed by us, based on the use of two-dimensional ideal rectangular Hansen coordinates, two-dimensional Levi-Civita variables, and four-dimensional Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters. Previously, it was believed that it was impossible to generalize the famous Levi-Civita regularization of the equations of plane motion to the equations of spatial motion. The regularization proposed by us refutes this point of view and is based on writing the differential equations of the perturbed spatial problem of two bodies in an ideal coordinate system using two-dimensional Levi-Civita variables to describe the motion in this coordinate system (in this coordinate system, the equations of spatial motion take the form of equations of plane motion) and based on the use of the quaternion differential equation of the inertial orientation of the ideal coordinate system in the Euler parameters, which are the osculating elements of the orbit, as well as on the use of Keplerian energy and real time as additional variables, and on the use of the new independent Sundmann variable. Reduced regular equations, in which Levi-Civita variables and Euler parameters are used together, have not only the well-known advantages of equations in Kustaan-

heimo–Stiefel variables (regularity, linearity in new time for Keplerian motions, proximity to linear equations for perturbed motions), but also have their own additional advantages: 1) two-dimensionality, and not four-dimensionality, as in the case of Kustaanheimo–Stiefel, a single-frequency harmonic oscillator describing in new time in Levi-Civita variables the unperturbed elliptic Keplerian motion of the studied (second) body, 2) slow change in the new time of the Euler parameters, which describe the change in the inertial orientation of the ideal coordinate system, for perturbed motion, which is convenient when using the methods of nonlinear mechanics. This work complements our review paper [1].

Keywords: space flight mechanics (astrodynamics), perturbed spatial two-body problem, regularization of singularities generated by gravitational forces, ideal coordinate system, equations of orbital motion, Kustaanheimo–Stiefel variables, Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters, Levi-Civita variables, quaternion

REFERENCES

1. *Chelnokov Yu. N.* Quaternion and biquaternion methods and regular models of analytical mechanics (Review) // *PMM*, 2023, vol. 87, iss. 4, pp. 519–556.
2. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // *Acta Math.*, 1920, vol. 42, pp. 99–144. DOI: 10.1007/BF02418577
3. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
4. *Aarseth S. J., Zare K. A.* Regularization of the three-body problem // *Celest. Mech.*, 1974, vol. 10, pp. 185–205.
5. *Aarseth S. J.* Gravitational N-Body Simulations. Cambridge: Univ. Press, 2003. 408 p.
6. *Hopf H.* Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphere auf die Kugelfläche // *Math. Ann.*, 1931, vol. 104, pp. 637–665.
7. *Hurwitz A.* Mathematische Werke. Vol. 2. Basel: Birkhauser, 1933.
8. *Chelnokov Yu. N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // *Cosmic Res.*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350–361. DOI: 10.1134/S0010952514030022
9. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // *Celest. Mech.*, 1976, vol. 13, no. 2, pp. 253–263.
10. *Sundman K. F.* Memoire sur le probleme des trois corps // *Acta Math.*, 1912, vol. 36, pp. 105–179.
11. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // *Celest. Mech.*, 1978, vol. 17, pp. 395–403.
12. *Vivarelli M. D.* The KS-transformation in hypercomplex form // *Celest. Mech.*, 1983, vol. 29, pp. 45–50.
13. *Vivarelli M. D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // *Celest. Mech.*, 1988, vol. 41, pp. 359–370.
14. *Vivarelli M. D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1991, vol. 50, pp. 109–124.
15. *Shagov O. B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // *Mech. Solids*, 1990, no. 2, pp. 3–8.
16. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1994, vol. 58, pp. 151–201.
17. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Canad. J. Phys.*, 1994, vol. 72, pp. 141–146.
18. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys. A: Math. & General*, 1995, vol. 28, pp. 193–198.
19. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2006, vol. 95, pp. 201–212.
20. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way // *Mech. & Dyn. Astron.*, 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
21. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2009, vol. 400, pp. 228–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x. arXiv:0803.4441

22. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // *R&C Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 19–36. DOI: 10.1134/S1560354715010025
23. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2016, vol. 459, no. 3, pp. 2444–2454. DOI: 10.1093/mnras/stw780.arXiv:1604.06673
24. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2017, vol. 127, pp. 343–368.
25. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2017, vol. 128, pp. 323–342.
26. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2018, vol. 130, Art. no. 68. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
27. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, Art. no. 9. DOI: 10.1007/s10569-019-9887-3
28. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-map. An interpretation through symmetry // *J. Geom. Mech.*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 359–372.
29. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1–10.
30. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 1–7.
31. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods in problems of perturbed motion of a material point. Part 1. General theory. Applications to problem of regularization and to problem of satellite motion // Available from VINITI. No. 8628-B (Moscow, 1985).
32. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods in problems of perturbed motion of a material point. Part 2. Three-dimensional problem of unperturbed central motion. problem with initial conditions // Available from VINITI. No. 8629-B (Moscow, 1985).
33. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // *Cosmic Res.*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
34. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // *Cosmic Res.*, vol. 31, no. 3, 1993, pp. 409–418.
35. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // *Mech. Solids*, vol. 28, no. 1, 1993, pp. 16–25.
36. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // *Mech. Solids*, vol. 28, no. 2, 1993, pp. 1–12.
37. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material points in a central field with application of quaternions // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 688–713.
38. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // *Cosmic Res.*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 353–364. DOI: 10.1134/S001095251305002X
39. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // *Cosmic Res.*, 2015, vol. 53, no. 5, pp. 394–409.
40. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: Regular quaternion equations of relative motion // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 169–178. DOI: 10.3103/S0025654419030075
41. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial earth satellite // *Cosmic Res.*, 2019, vol. 57, no. 2, pp. 101–114. DOI: 10.1134/S0010952519020023
42. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math.&Mech.*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80. DOI: 10.1007/s10483-021-2797-9
43. *Bordovitsyna T.V.* *Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics.* Moscow: Nauka, 1984. 136 p.
44. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* *Theory of Motion of Artificial Satellites of the Earth. Analytical and Numerical Methods.* Tomsk: Tomsk Univ. Pub., 2007. 178 p.
45. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *Astron. J.*, 2005, vol. 129, no. 5, 2496. DOI: 10.1086/429546
46. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.*, 2007, vol. 133, no. 6, 2815.
47. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2007, vol. 97, pp. 131–150. DOI: 10.1007/s10569-006-9056-3

48. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2015, vol. 454, pp. 2890–2908.
49. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, no. 21. DOI: 10.1007/s10569-019-9897-1
50. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2020, vol. 132, no. 10. DOI: 10.1007/s10569-020-9952-y
51. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021, 9470806.
52. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Shchekutiev A.F.* Forecast and correction of spacecraft orbital motion using regular quaternion equations and their solutions in Kustaanheimo–Stiefel variables and isochronic derivatives // *PMM*, 2023, vol. 87, iss. 2, pp. 124–156.
53. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639. DOI: 10.3103/S0025654417060036
54. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // *Nov. Comm. Petrop.*, 1765, vol. 11, pp. 144–151.
55. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1904, vol. 9, pp. 1–32.
56. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // *Opere Math.*, 1956, no. 2, pp. 411–417.
57. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // *Ann. Univ. Turku*, 1964, vol. 73, pp. 3–7. DOI: 10.1086/518165
58. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // *J. Reine Angew. Math.*, 1965, vol. 218, pp. 204–219.
59. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphere auf die Kugelflache // *Math. Ann.*, 1931, vol. 104, pp. 637–665.
60. *Volk O.* Concerning the derivation of the KS-transformation // *Celest. Mech.*, 1973, vol. 8, pp. 297–305.
61. *Lidov M.L.* Increasing the dimension of Hamiltonian systems. KS-transform, use of partial integrals // *Cosmic Res.*, 1982, vol. 20, no. 2, pp. 163–176.
62. *Lidov M.L.* Method for constructing families of spatial periodic orbits in the Hill problem // *Cosmic Res.*, 1982, vol. 20, no. 6, pp. 787–807.
63. *Lidov M.L., Lyakhova V.A.* Families of spatial periodic orbits of the Hill problem and their stability // *Cosmic Res.*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 3–11.
64. *Poleshchikov S.M.* Regularization of the canonical equations of the two-body problem using the generalized KS-matrix // *Cosmic Res.*, 1999, vol. 37, no. 3, pp. 322–328.
65. *Stiefel E.L., Waldvogel J.* Generalisation de la regularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace a trois dimensions // *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de L'Academie des Sciences*. 1965, Paris.
66. *Stiefel E., Rossler M., Waldvogel J., Burdet C.A.* Methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics // *NASA Contractor Rep. NASA CR-769*, 1967, pp. 88–115.
67. *Birkhoff G.D.* The restricted problem of three bodies // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1884–1940), 1915, vol. 39 (1), pp. 265–334.
68. *Waldvogel J.* Die Verallgemeinerung der Birkhoff-Regularisierung fur das raumliche Dreikorperproblem // *Bull. Astron. Ser.* 3, 1967, vol. 2, no. 2, pp. 295–341.
69. *Andoyer H.* *Cours de Mecanique Celeste*. Paris: Gauthier-Vilars, 1923.
70. *Musen P.* Application of Hansen's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth // *J. Geoph. Res.*, 1959, vol. 64, pp. 2271–2279.
71. *Broomberg V.A.* *Analytical Algorithms of Celestial Mechanics*. Moscow: Nauka, 1980. 208 p.

УДК 517.977

**К ЗАДАЧЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОВОРОТЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ПРИ ПОМОЩИ ВНУТРЕННИХ СИЛ**© 2023 г. Г. М. Розенблат^{1,*}, С. А. Решмин^{2,**}¹*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Москва, Россия*²*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: gr51@mail.ru****e-mail: reshmin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 23.09.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принята к публикации 15.10.2023 г.

В статье получены результаты, касающиеся численно-аналитического решения задачи о максимальном повороте твердого тела на заданном интервале времени путем перемещения подвижной внутренней массы. Движения массы реализуются при помощи приложения ограниченной силы. Ранее рассматривались аналогичные задачи, в которых перемещения внутренней массы предполагались кинематическими с ограничениями на скорость точки. Полученный аналитический результат описывается простыми и легко проверяемыми формулами. Оптимальная траектория подвижной внутренней массы является спиралью, которая накручивается на центр масс самого твердого тела с возрастающей до бесконечности частотой. Полученные численные результаты касаются построения иных оптимальных траекторий, которые не поддаются аналитическому исследованию.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, динамика твердого тела

DOI: 10.31857/S0032823523060085, **EDN:** GHQIGD

1. Введение. Рассматривается задача о максимальном угле поворота за заданное время плоского твердого тела при помощи ограниченных внутренних сил, реализуемых в процессе движения внутренней точечной массы.

Более точная постановка задачи следующая. Рассматривается плоское твердое тело, которое может совершать плоское движение и на которое не действуют никакие внешние силы. Внутри этого тела имеет возможность двигаться (в плоскости тела при помощи актюаторов) материальная точка. Перемещение точки осуществляется посредством управляющей внутренней силы, которая ограничена по модулю и может быть ориентирована в произвольном направлении в плоскости движения системы. На координаты и скорости точки (относительно твердого тела) не накладываются никакие ограничения (кроме условий дифференцируемости). Требуется выбрать такой допустимый закон изменения управляющей силы, чтобы повернуть тело на максимальный угол за заданное время.

Ранее, подобного рода модели (твердое плоское тело, взаимодействующее с подвижной внутренней массой) рассматривались в качестве примеров, иллюстрирующих закон сохранения кинетического момента системы материальных точек (см., напр., ([1], разд. 333, стр. 38), ([2], задача 45, стр. 226)). Отметим, однако, что движе-

ние подвижной массы (насекомого, по терминологии Аппеля [1]) рассматривалось с кинематической точки зрения, т.е., относительная скорость подвижной массы считалась заданной функцией времени (в частности, постоянной). В учебнике [2] ситуация аналогичная. При формулировке таких задач указывалось, что система “тело + точка” в начальный момент находилась в покое, а затем, в момент $t = 0$, точка начинала двигаться с некоторой постоянной относительной скоростью $v = v_0$. Ясно, что переход точки из состояния $v = 0$ в состояние $v = v_0$ не может произойти мгновенно и реализуется при помощи приложения к точке некоторой ограниченной силы. Это обстоятельство приводит к необходимости определенной коррекции как формулировок, так и полученных в [1, 2] ответов к указанным задачам.

В настоящее время аналогичные модели рассматриваются для исследования управляемых робототехнических устройств, предназначенных для перемещения тел при помощи подвижных внутренних масс (см., напр. [3–5] и [6]). В частности рассматриваются кинематические перемещения внутренних масс, для которых управлением является вектор скорости, реализующий необходимое оптимальное перемещение объекта (капсульного робота).

В настоящей работе, рассмотренные выше модели применяются для оптимального поворота объекта при помощи подвижной внутренней массы, перемещение которой осуществляется ограниченной по модулю управляющей силой (см. также [7, 8]).

2. Описание модели, уравнения движения и постановка задачи. На рис. 1 изображено сечение твердого тела, центр масс которого находится в точке C . Oxy — неподвижная система координат, $C\xi\eta$ — подвижная поступательная система координат, связанная с центром масс тела. Предполагаем, что оси этих систем координат все время параллельны друг другу. Внутри тела находится материальная точка m , которая имеет возможность двигаться посредством приложения внутренней силы $F = (F_x, F_y)^T$. Для модуля силы F должно соблюдаться следующее ограничение

$$F_x^2 + F_y^2 \leq F_0^2 \tag{2.1}$$

Пусть m — масса точки m , M, J — масса тела и его момент инерции относительно центра масс C соответственно. Обозначим:

- x_C, y_C — координаты центра масс C тела в системе координат Oxy ;
- φ — угол поворота тела относительно неподвижной системы координат Oxy ;
- ξ, η — координаты точки m относительно подвижной системы $C\xi\eta$.

Учитывая, что при приложении к подвижной точке m силы F , на тело в той же точке пространства действует сила $F' = -F$ (согласно третьему закону Ньютона), запишем уравнения движения центра масс и уравнение кинетического момента тела относительно его центра масс:

$$M\ddot{x}_C = -F_x, \quad M\ddot{y}_C = -F_y, \quad J\ddot{\varphi} = \eta F_x - \xi F_y \tag{2.2}$$

Движение точки m определяется уравнениями второго закона Ньютона

$$m(\ddot{x}_C + \ddot{\xi}) = F_x, \quad m(\ddot{y}_C + \ddot{\eta}) = F_y \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) получим три уравнения

$$\ddot{\xi} = \lambda F_x, \quad \ddot{\eta} = \lambda F_y, \quad \ddot{\varphi} = \mu(\ddot{\xi}\eta - \ddot{\eta}\xi); \quad \lambda = \frac{M+m}{Mm}, \quad \mu = \frac{1}{\lambda J} \tag{2.4}$$

Далее, для упрощения записи, будем полагать F_0, λ, μ равными единице.

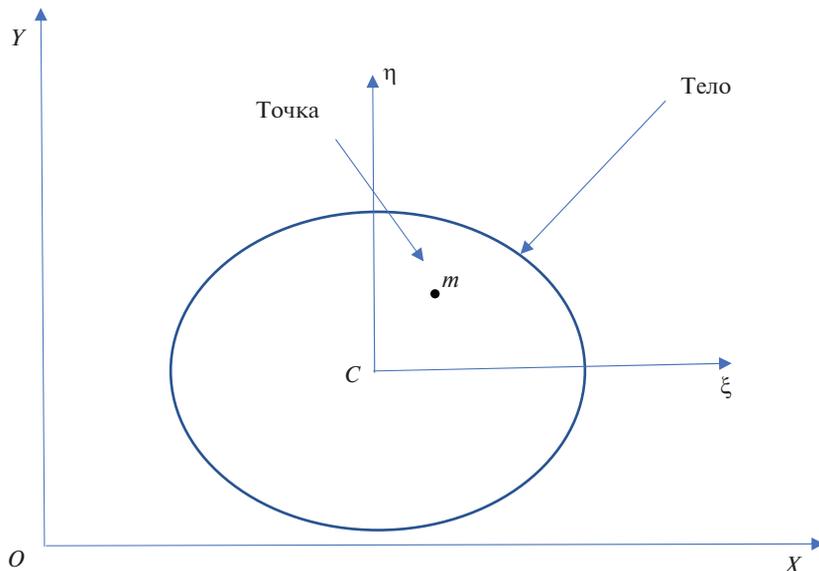


Рис. 1. Тело с движущейся внутренней точечной массой.

Третье уравнение в системе (2.4) можно проинтегрировать. Предполагая $\phi(0) = 0$, окончательно получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F_x, & \dot{\eta} &= F_y, & \phi &= \xi\eta - \dot{\eta}\xi + C \\ C &= -\dot{\xi}(0)\eta(0) + \xi(0)\dot{\eta}(0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

В правой части полученного третьего уравнения в системе (2.5) добавлена константа $C = -\dot{\xi}(0)\eta(0) + \xi(0)\dot{\eta}(0)$, чтобы обеспечить выполнение условия $\phi(0) = 0$. Однако, нетрудно показать, что эту константу, при решении рассматриваемой оптимальной задачи, можно опустить без ограничения общности.

Систему (2.5) перепишем в стандартной форме системы Коши, вводя обозначения

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\xi}, \quad x_4 = \dot{\eta}, \quad x_5 = \phi \quad (2.6)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = F_x, \quad \dot{x}_4 = F_y, \quad \dot{x}_5 = x_2x_3 - x_1x_4 \quad (2.7)$$

Для системы (2.7) ставится следующая задача оптимального управления.

Пусть заданы начальные условия $x_i(0) = x_{i0}$ ($i = 1, 5$) и время $t = T$. Требуется определить такой закон изменения управляющих сил F_x, F_y , которые удовлетворяют ограничениям (2.1) и обеспечивают $\max x_5(T) = \max \phi(T)$.

В классической формулировке задачи Понтрягина последнее условие максимума можно заменить следующим

$$J = \int_0^T (x_2x_3 - x_1x_4) dt \rightarrow \max \quad (2.8)$$

3. Основные уравнения принципа максимума и формулировка результата. Здесь приведены дифференциальные уравнения принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой оптимальной задачи и излагается полученный результат.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [9], вводим сопряженные переменные p_k ($k = 1, 5$), соответствующие фазовым переменным из (2.6), и гамильтониан H для исходной системы дифференциальных уравнений (2.7) по формуле

$$H = p_1x_3 + p_2x_4 + (p_3F_x + p_4F_y) + p_5(x_2x_3 - x_1x_4) \quad (3.1)$$

Сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_k = -\partial H/\partial x_k; \quad k = 1, 5$$

В данном случае, используя (3.1), получим уравнения

$$\dot{p}_1 = p_5x_4, \quad \dot{p}_2 = -p_5x_3, \quad \dot{p}_3 = -p_1 - p_5x_2, \quad \dot{p}_4 = -p_2 + p_5x_1, \quad \dot{p}_5 = 0 \quad (3.2)$$

Из последнего уравнения системы (3.2) следует, что $p_5 = \text{const} \geq 0$. Тогда система (3.2) приобретает следующий вид

$$\dot{p}_1 = p_5x_4, \quad \dot{p}_2 = -p_5x_3, \quad \dot{p}_3 = -p_1 - p_5x_2, \quad \dot{p}_4 = -p_2 + p_5x_1 \quad (3.3)$$

В соответствии с принципом максимума оптимальное управление F доставляет максимум функции H из (3.1), и при ограничениях (2.1) имеет вид

$$F_x = \frac{p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \quad F_y = \frac{p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}} \quad (3.4)$$

Кроме того, поскольку на конечные значения $x_k(T)$, ($k = 1, 4$) не наложено никаких ограничений, то должны быть выполнены условия трансверсальности

$$p_k(T) = 0; \quad k = 1, 4 \quad (3.5)$$

Дифференцируя дважды последние два уравнения системы (3.3) и используя (2.7) и (3.4), получим следующие два уравнения для двух сопряженных переменных p_3, p_4 :

$$\ddot{p}_3 = -\lambda \frac{p_4}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \quad \ddot{p}_4 = \lambda \frac{p_3}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}; \quad \lambda = 2p_5 = \text{const} \geq 0 \quad (3.6)$$

Таким образом, задача сводится к поиску решений системы 6-го порядка (3.6) на отрезке $0 \leq t \leq T$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$p_3(T) = p_4(T) = 0 \quad (3.7)$$

Мы можем понизить на две единицы порядок системы (3.6), записав следующие два ее интеграла

$$p_3\dot{p}_3 + p_4\dot{p}_4 = \frac{1}{2}(\dot{p}_3^2 + \dot{p}_4^2) + C_1, \quad -\dot{p}_4\ddot{p}_3 + \dot{p}_3\ddot{p}_4 = \lambda\sqrt{p_3^2 + p_4^2} + C_2, \quad (3.8)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, определяемые начальными и конечными условиями для переменных p_3, p_4 . Система (3.8) является уже системой 4-го порядка. Можно еще понизить порядок системы (3.8) на две единицы при помощи следующих замен

$$p_3 = \rho \cos \alpha, \quad p_4 = \rho \sin \alpha, \quad \dot{p}_3 = v \cos \beta, \quad \dot{p}_4 = v \sin \beta \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9), обозначая $\gamma = \beta - \alpha$, получаем следующие четыре уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \rho \dot{\alpha} &= v \sin \gamma \\ \rho v \cos \gamma - \rho v \dot{\beta} \sin \gamma &= \frac{1}{2}v^2 + C_1, & v^2 \dot{\beta} &= \lambda \rho + C_2; & \gamma &= \beta - \alpha \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда получаем замкнутую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех функций $\{\rho, v, \gamma\}$ (уравнение для β “отщепляется”):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & v \dot{\rho} &= -v^2 \sin \gamma + \frac{\rho(\lambda\rho + C_2)}{v} \\ \dot{v} \rho \cos \gamma &= \frac{\rho(\lambda\rho + C_2)}{v} \sin \gamma + \frac{v^2}{2} + C_1; & \sin \gamma &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если в системе (3.11) поделить второе и третье уравнения на первое и взять за независимое переменное функцию ρ , то получим систему второго порядка для двух переменных $\{v, \gamma\}$.

Таким образом, нам нужно найти такие решения системы (3.11) на отрезке $0 \leq t \leq T$, которые удовлетворяют краевому условию $\rho(T) = 0$, чтобы обеспечить условие трансверсальности (3.7). Аналитически эти решения удалось найти лишь в том частном случае, когда $C_1 = C_2 = 0$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Система (3.11) в случае $C_1 = C_2 = 0$ имеет частное решение, которое дается соотношениями

$$\gamma(t) = \gamma_0 = \pm \arcsin(1/\sqrt{10}), \quad v(t) = (\pm\sqrt{10}\lambda)^{1/3} [\rho(t)]^{2/3} \quad (3.12)$$

Справедливость утверждения 1 устанавливается непосредственной проверкой.

Далее, используя первые два уравнения системы (3.11) и соотношения (3.12), получим искомые решения системы (3.6) как функции времени на отрезке $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} p_3(t) &= p_*(1 - \tau)^3 \cos[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)] \\ p_4(t) &= -p_*(1 - \tau)^3 \sin[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)] \\ p_* &= \lambda T^3/10, \quad \tau = t/T, \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad \tau \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя формулы (3.6) и (3.13), получаем выражения для оптимальных управлений

$$\begin{aligned} F_x &= \cos[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)], \quad F_y = -\sin[\alpha_0 + \ln(1 - \tau)] \\ \tau &= t/T, \quad \alpha_0 = \text{const} \in [0, 2\pi], \quad \tau \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя функции из (3.14) в уравнения движения (2.7), находим соответствующие оптимальные траектории точки в системе координат $C\xi\eta$ и максимальный угол поворота тела. Несложно получить, что эти траектории представляют собой спирали, закручивающиеся вокруг центра масс C бесконечное число раз. В конце этого процесса, при $t \rightarrow T$, направление управляющей силы F меняется с увеличивающейся до бесконечности частотой.

В формулах (3.14) α_0 – произвольная константа из интервала $[0, 2\pi]$. Используя (3.14), мы можем решить полную систему уравнений (2.7), (3.3) на отрезке $0 \leq t \leq T$ и определить все те начальные условия $x_k(0) = x_{k0}$, ($k = 1, 4$), при которых соблюдены условия трансверсальности $p_k(T) = 0$, ($k = 1, 4$). Проводя элементарные выкладки, мы получаем следующий результат.

Утверждение 2. Если начальные условия в рассматриваемой задаче удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_{10} = \xi(0) &= \frac{T^2}{10} (\cos \alpha_0 + 3 \sin \alpha_0), & x_{20} = \eta(0) &= \frac{T^2}{10} (3 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0) \\ x_{30} = \dot{\xi}(0) &= -\frac{T}{2} (\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0), & x_{40} = \dot{\eta}(0) &= \frac{T}{2} (-\cos \alpha_0 + \sin \alpha_0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\alpha_0 \in [0, 2\pi],$$

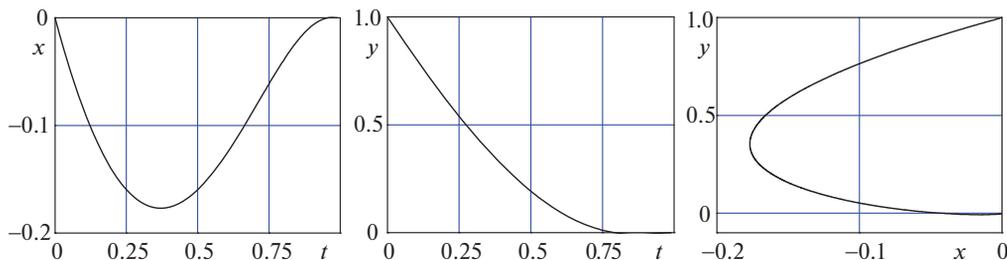


Рис. 2. Общий вид траектории точки с законами движения $x(t) = (1 - t)^2 \sin(\ln(1 - t))$, $y(t) = (1 - t)^2 \cos(\ln(1 - t))$ при $t \in [0.001, 1]$.

то при управляющих силах из (3.14) тело за время T повернется на максимальный угол. При этом оптимальные траектории спиралеобразно стремятся к точке

$$\xi(T) = \dot{\xi}(T) = \eta(T) = \dot{\eta}(T) = 0$$

Справедливость утверждения 2 следует из принципа максимума Понтрягина и непосредственного интегрирования системы уравнений (2.7), (3.3) при функциях F_x, F_y , вычисляемых по формулам (3.14).

Замечание 1. В силу однородности пространства в формулах (3.15) можно принять $\alpha_0 = 0$. Тогда искомые начальные условия будут такими

$$x_{10} = \xi(0) = \frac{T^2}{10}, \quad x_{20} = \eta(0) = \frac{3T^2}{10}, \quad x_{30} = \dot{\xi}(0) = -\frac{T}{2}, \quad x_{40} = \dot{\eta}(0) = -\frac{T}{2}$$

Оптимальное управление из (3.14) примет вид

$$F_x = \cos[\ln(1 - s)], \quad F_y = -\sin[\ln(1 - s)]; \quad s = t/T, \quad t \in [0, T]$$

Решая систему (2.5) при указанных начальных условиях и управлениях F_x, F_y , получим следующие формулы для координат и скоростей

$$\begin{aligned} x_1(t) = \xi(t) &= \frac{T^2}{\sqrt{10}} \tau^2 \sin(\gamma_0 + \ln \tau), & x_2(t) = \eta(t) &= \frac{T^2}{\sqrt{10}} \tau^2 \cos(\gamma_0 + \ln \tau) \\ x_3(t) = \dot{\xi}(t) &= -\frac{T}{\sqrt{2}} \tau \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \tau\right), & x_4(t) = \dot{\eta}(t) &= -\frac{T}{\sqrt{2}} \tau \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln \tau\right) \\ x_5(t) = \varphi(t) &= -\frac{T^3}{10} (1 - \tau^3), & x_6(t) = \dot{\varphi}(t) &= \frac{T^4}{10} \left(\frac{3}{4} - \tau + \frac{\tau^4}{4}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\sin \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \tau = 1 - \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T]$$

Из (3.16) следует, что оптимальный угол поворота равен $x_5(T) = \varphi(T) = \frac{3T^4}{40}$, траектории точки по координатам и скоростям приближаются спиралеобразно в точку нуль. На рис. 2 представлены законы движения точки по координатам и ее траектория.

4. Решение оптимальной задачи методом полярных координат. В предыдущем разделе решение задачи Понтрягина осуществлялось в декартовых координатах. В настоящем разделе исходная задача оптимального управления решается с использованием поляр-

ных координат. Такой метод позволяет сократить выкладки и лучше прояснить механический смысл полученных результатов.

В системе (2.7) перейдем к полярным переменным по формулам

$$x_1 = \rho \cos \alpha, \quad x_2 = \rho \sin \alpha, \quad x_3 = v \cos \beta, \quad x_4 = v \sin \beta \quad (4.1)$$

Тогда система (2.7) примет вид

$$\dot{\rho} = v \cos \gamma, \quad \rho \dot{\alpha} = -v \sin \gamma, \quad \dot{v} = F_v, \quad v \dot{\beta} = F_\beta, \quad v \dot{\varphi} = \rho v \sin \gamma \quad (4.2)$$

В (4.2) приняты следующие обозначения

$$F_v = F_x \cos \beta + F_y \sin \beta, \quad F_\beta = -F_x \sin \beta + F_y \cos \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta \quad (4.3)$$

Согласно (4.3), F_v , F_β суть проекции управляющей силы F на оси скоростной системы координат (касательную и нормаль соответственно, к траектории точки в декартовой системе координат $C\xi\eta$). Ясно, что эти проекции также удовлетворяют ограничению

$$F_v^2 + F_\beta^2 \leq F_0^2 = 1 \quad (4.4)$$

Путем несложных преобразований можно сократить число уравнений в системе (4.2). В результате получаем следующую систему четырех дифференциальных уравнений для четырех переменных $\{\rho, \gamma, v, \varphi\}$

$$\dot{\rho} = v \cos \gamma, \quad \dot{\gamma} = -\frac{v}{\rho} \sin \gamma - \frac{1}{v} F_\beta, \quad \dot{v} = F_v, \quad \dot{\varphi} = \rho v \sin \gamma, \quad t \in [0, T] \quad (4.5)$$

Для системы (4.5) ставится аналогичная разд. 3 оптимальная задача. Найти функции F_v , F_β , которые при ограничениях (4.4) и заданных начальных условиях $\{\rho(0), \gamma(0) = \alpha(0) - \beta(0), v(0), \varphi(0) = 0\}$ обеспечивают для решения системы (4.5) $\max \varphi(T)$.

Используя принцип максимума Понтрягина, вводим сопряженные переменные $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, которые соответствуют исходным переменным $\{\rho, \gamma, v, \varphi\}$ в написанном порядке. Далее составляем гамильтониан, который запишем в следующем виде

$$H = v \left(p_1 \cos \gamma - \frac{p_2}{\rho} \sin \gamma + p_4 \rho \sin \gamma \right) + \left(-\frac{p_2}{v} F_\beta + p_3 F_v \right) \quad (4.6)$$

В соответствии с принципом максимума оптимальные функции F_v , F_β реализуют максимум функции H из (4.6), и при ограничениях (4.4) имеют вид

$$F_\beta = -p_2/p_0, \quad F_v = q/p_0, \quad (4.7)$$

где $q = v p_3$, $p_0 = \sqrt{p_2^2 + q^2}$.

Из дифференциальных уравнений для сопряженных переменных следует, что $\dot{p}_4 = 0$, т.е., $p_4 = \lambda = \text{const} \geq 0$. Записывая уравнения для других сопряженных переменных, присоединяя к ним динамические уравнения (4.5) и используя равенства (4.7), получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений для шести функций $\{\rho, \gamma, v, p_1, p_2, p_3\}$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos \gamma, & \dot{\gamma} &= -\frac{v}{\rho} \sin \gamma + \frac{p_2}{v p_0}, & \dot{v} &= \frac{q}{p_0} \\ \dot{p}_1 &= -\left(\frac{p_2}{\rho^2} + \lambda \right) v \sin \gamma, & \dot{p}_2 &= v \left[p_1 \sin \gamma + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho \right) \cos \gamma \right] \\ \dot{p}_3 &= -p_1 \cos \gamma + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho \right) \sin \gamma + \frac{p_2^2}{v^2 p_0}; & & & t \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.8)$$

В системе (4.8) приняты обозначения из (4.7). Кроме того, так как на исходные переменные $\rho(t)$, $\gamma(t)$, $v(t)$ при $t = T$ не наложено никаких ограничений, то должны быть выполнены условия трансверсальности

$$p_1(T) = p_2(T) = p_3(T) = 0 \tag{4.9}$$

Таким образом, требуется решить систему дифференциальных уравнений (4.8) на отрезке $0 \leq t \leq T$ при заданных начальных условиях для переменных $\{\rho, \gamma, v\}$ и условиях трансверсальности (4.9) для переменных $\{p_1, p_2, p_3\}$. Для некоторых начальных условий это удалось сделать аналитически.

Можно показать (доказательство громоздко и здесь не приводится), что система уравнений (4.8), (4.9) не имеет решений, при которых $\rho = \text{const}$ (т. е., оптимальные траектории не могут быть окружностями с центром в центре масс тела).

Перейдем тогда в системе (4.8) к независимой переменной ρ . Для этого поделим обе части всех уравнений, начиная со второго, на первое уравнение. Получим систему пяти уравнений для пяти переменных $\{\gamma, v, p_1, p_2, p_3\}$ (производная по ρ обозначается штрихом)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg } \gamma}{\rho} + \frac{p_2}{v^2 p_0 \cos \gamma}, & v' &= \frac{q}{v p_0 \cos \gamma} \\ p_1' &= -\left(\frac{p_2}{\rho^2} + \lambda\right) \text{tg } \gamma, & p_2' &= p_1 \text{tg } \gamma + \frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho \\ p_3' &= -\frac{1}{v} \left[p_1 - \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho\right) \text{tg } \gamma \right] + \frac{p_2^2}{v^3 p_0 \cos \gamma} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Система (4.10) имеет два интеграла

$$p_1^2 + \left(\frac{p_2}{\rho} + \lambda \rho\right)^2 = h^2 = \text{const} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} v \left(p_1 \cos \gamma - \frac{p_2}{\rho} \sin \gamma + \lambda \rho \sin \gamma \right) + \frac{p_0}{v} &= H = \text{const} \\ p_0 &= \sqrt{p_2^2 + q^2}, & q &= v p_3 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Интеграл (4.11) получается непосредственно из третьего и четвертого уравнений системы (4.10). Интеграл (4.12) следует из сохранения значения функции Гамильтона (4.6) при значениях F_v, F_β из (4.7) в силу уравнений (4.8). Константы h, H в (4.11) и (4.12) определяются заданными начальными условиями для $\{\rho, \gamma, v\}$ и условиями трансверсальности (4.9).

Благодаря интегралу (4.11), можно понизить порядок системы (4.10). Введем вместо p_1, p_2 новую переменную σ по формулам

$$p_1 = h \sin \sigma, \quad p_2 = \rho(h \cos \sigma - \lambda \rho); \quad \sigma \in [0, 2\pi] \tag{4.13}$$

Тогда интеграл (4.11) соблюдается автоматически, а система (4.10) будет эквивалентна следующим четырем уравнениям для четырех переменных $\{\gamma, \sigma, v, q\}$, ($q = v p_3$)

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\text{tg } \gamma}{\rho} + \frac{p_2}{v^2 p_0 \cos \gamma}, & v' &= \frac{q}{v p_0 \cos \gamma} \\ \sigma' &= -\frac{\text{tg } \gamma}{\rho}, & q' &= -p_1 + \left(\frac{p_2}{\rho} - \lambda \rho\right) \text{tg } \gamma + \frac{p_0}{v^2 \cos \gamma} \end{aligned} \tag{4.14}$$

В уравнениях (4.14) p_1, p_2 даются формулами (4.13), а p_0, q определяются обозначениями из (4.7).

Введем новую переменную p по формуле

$$q = v p_3 = p p_2 = p \rho (h \cos \sigma - \lambda \rho) \quad (4.15)$$

Тогда имеем $p_0 = |p_2| \sqrt{1 + p^2}$, и система уравнений (4.14) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} + \frac{\operatorname{sgn} p_2}{v^2 \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, & v' &= \frac{p \operatorname{sgn} p_2}{v \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, & \sigma' &= -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} \\ p_2 p' &= -h \sin \sigma - p h \sin \sigma \operatorname{tg} \gamma + (h \cos \sigma - 2\lambda \rho)(\operatorname{tg} \gamma - p) + \frac{|p_2| \sqrt{1 + p^2}}{v^2 \cos \gamma} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рассмотрим такие начальные условия, для которых $h = 0$. В этом случае из интеграла (4.11) следует, что

$$p_1 \equiv 0, \quad p_2 = -\lambda \rho^2 \quad (4.17)$$

В соответствии с условиями трансверсальности (4.9) тогда имеем $\rho(T) = 0$. Уравнения (4.16) приобретают вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} - \frac{1}{v^2 \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, & v' &= -\frac{p}{v \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}} \\ -\lambda \rho^2 p' &= (-2\lambda \rho)(\operatorname{tg} \gamma - p) + \frac{\lambda \rho^2 \sqrt{1 + p^2}}{v^2 \cos \gamma} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Далее полагаем $u = v^2$. Тогда система (4.18) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} - \frac{1}{u \cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, & u' &= -\frac{2p}{\cos \gamma \sqrt{1 + p^2}}, \\ p' &= \frac{2}{\rho} (\operatorname{tg} \gamma - p) - \frac{\sqrt{1 + p^2}}{u \cos \gamma} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из формулы (4.12) для рассматриваемых начальных условий получим следующий интеграл системы (4.19)

$$2\rho \sqrt{u} \sin \gamma + \frac{\rho^2}{\sqrt{u}} \sqrt{1 + p^2} = H = \text{const} \quad (4.20)$$

При условиях: 1) ограниченности функции $p(\rho)$, 2) стремлении $u(\rho)$ к нулю при $\rho \rightarrow 0$ медленнее, чем ρ^4 , из (4.20) получим с необходимостью, что $H = 0$. Тогда из (4.20) имеем соотношение

$$\sqrt{1 + p^2} = -\frac{2u \sin \gamma}{\rho} \quad (4.21)$$

Обозначая $p = \operatorname{tg} \psi$, из (4.21) получим соотношение

$$u = -\frac{\rho}{2 \cos \psi \sin \gamma} \quad (4.22)$$

Используя (4.22), перепишем 1-е и 3-е уравнения системы (4.19) в виде следующей системы двух уравнений относительно двух переменных $\{\gamma, \psi\}$

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} + 2 \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} \cos^2 \psi = \frac{\operatorname{tg} \gamma (1 - \operatorname{tg}^2 \psi)}{\rho (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)} \\ (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) \psi' &= \frac{2}{\rho} (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \psi) + 2 \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\rho} = \frac{2}{\rho} (2 \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \psi) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Отметим, что 2-е уравнение системы (4.19) при выполнении соотношений (4.22) и (4.23) выполняется тождественно.

Введем новые переменные по формулам

$$z_1 = p = \operatorname{tg} \psi, \quad z_2 = \operatorname{tg} \gamma, \quad \rho(t) = \rho(0) \exp(-\tau); \quad \tau \in (0, +\infty) \quad (4.24)$$

Заметим, что в (4.24) введено “безразмерное время” τ , а условие $\rho(T) = 0$, в таком случае, реализуется при $\tau = +\infty$. Это, конечно, справедливо при монотонном убывании функции $\rho(t)$, что будет показано далее.

Уравнения (4.23) для введенных в (4.24) новых переменных приобретают вид

$$\frac{dz_1}{d\tau} = 2z_1 - 4z_2, \quad \frac{dz_2}{d\tau} = z_2 \left(1 + z_2^2 \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2 + 1} \right); \quad \tau \in [0, +\infty) \quad (4.25)$$

Система (4.25) есть автономная система дифференциальных уравнений 2-го порядка (“полулинейная”). Эта система имеет три особые точки с координатами (z_1, z_2) :

$$1) (1, 1/2); \quad 2) (-1, -1/2); \quad 3) (0, 0) \quad (4.26)$$

Эти точки являются стационарными решениями системы (4.25).

Уравнения же (4.19) тогда имеют особые решения $\gamma = \gamma_0$, $p = p_0$, $u = v^2 = k\rho$, ($k > 0$), для которых выполнены соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \pm 1/2, \quad p_0 = \pm 1, \quad k = -\frac{2p_0}{(\sqrt{1 + p_0^2}) \cos \gamma_0}, \quad v = \sqrt{k\rho} \quad (4.27)$$

Эти решения удовлетворяют также интегралу (4.20) при $H = 0$. Так как $k > 0$, то из (4.27) получим

$$\begin{aligned} p = p_0 = \pm 1, \quad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma_0 = \pm \frac{1}{2} \\ \cos \gamma_0 = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \gamma_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad k = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Отметим, что в силу условий трансверсальности (4.9), формул (4.17) и обозначений (4.15), имеем $\rho(T) = 0$, $v(T) = \sqrt{k\rho(T)} = 0$. В результате приходим к решениям, полученным в разд. 3.

Ясно, что, выбирая другие решения системы (4.25), которые существуют на бесконечном интервале $\tau \in [0, +\infty)$ и отличны от стационарных, могли бы быть получены новые оптимальные решения для соответствующих новых начальных условий исходной задачи. Исследование системы (4.25), однако, приводит к следующему отрицательному результату.

Утверждение 3. Решениями системы (4.25), которые продолжаются на весь бесконечный интервал $0 \leq \tau < +\infty$, являются только стационарные решения, представленные тремя особыми точками из (4.26).

Доказательство утверждения 3 приведено в Приложении. Фазовая плоскость системы (4.25) приведена на рис. 3, где изображено соответствующее векторное поле направлений вместе с некоторыми фазовыми траекториями. Некоторые решения показаны на рис. 3, а–г, где видно, что они действительно непродолжаемые. Проявление

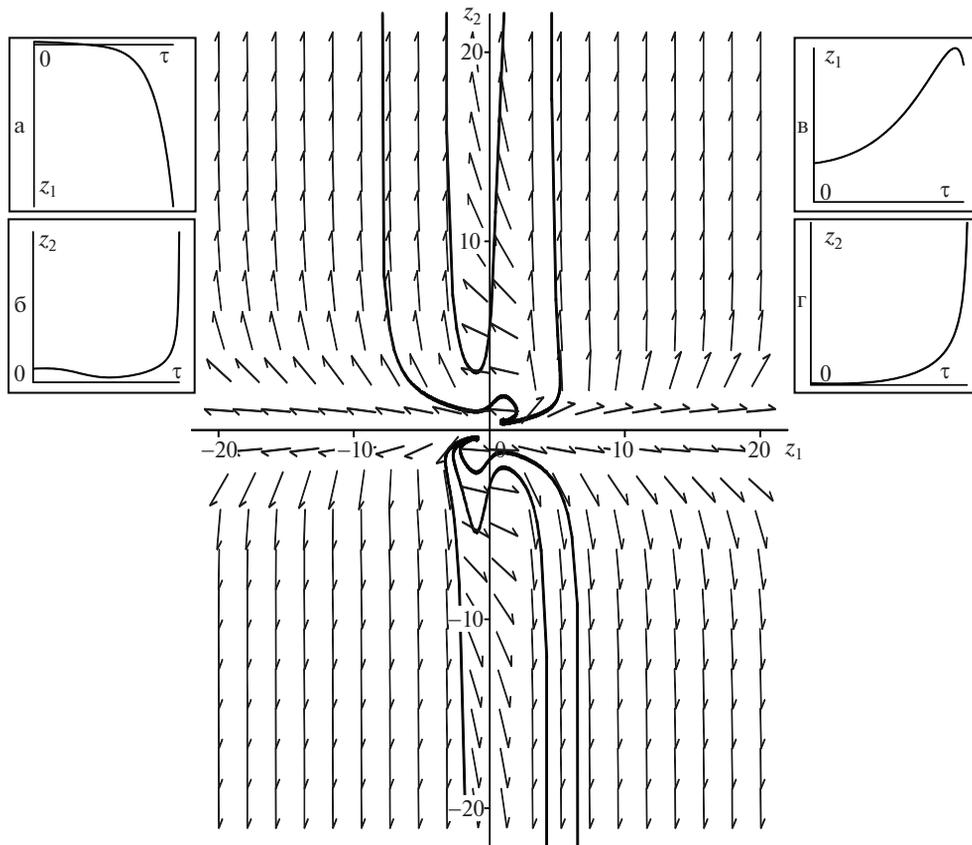


Рис. 3. Фазовая плоскость системы (4.25) и некоторые фазовые траектории.

стрировано два варианта. В первом случае $z_1(0) = 1.1$, $z_2(0) = 0.6$. При этом на конечном интервале времени первая координата становится достаточно большой по абсолютной величине, значение второй уходит на бесконечность (см. рис. 3,а,б). Во втором случае $z_1(0) = 0.9$, $z_2(0) = 0.4$. При этом на конечном интервале времени первая координата остается небольшой по величине, значение второй уходит на бесконечность (см. рис. 3,в,г). В обоих случаях есть немонотонность одной из координат, что соответствует сложному поведению фазовых траекторий на рис. 3.

Замечание 2. Нетрудно установить, используя (4.7), (4.15) и первое равенство из (4.28), что оптимальная сила F удовлетворяет соотношениям $|F_v| = |F_\beta| = 1/\sqrt{2}$. Таким образом, сила F является постоянной по модулю (равным единице) и всегда направлена под углом 45° к касательной траектории подвижной точки в системе $C\xi\eta$. Эта сила является “следящей” по скорости точки. Отметим, что в монографии [10], (см. разд. 3.5.2, стр. 115) рассматривалась задача о “следящей” силе по позиции точки (сила была также постоянна по модулю и всегда перпендикулярна радиус-вектору точки). Спиралеобразные траектории движения точки, полученные в монографии [10], вполне аналогичны траекториям в настоящей работе.

Замечание 3. В работе [11] численно исследовалась задача об оптимальной раскрутке плоской двухмассовой системы, где управлением являлся ограниченный внешний момент, приложенный к одному из тел.

Замечание 4. Аналитические выражения для оптимальных траекторий в рассматриваемой задаче удалось получить лишь для достаточно узкого класса начальных условий. При этом оказалось, что оптимальные траектории подвижной массы в конце интервала управления по спиралям приходят с нулевой предельной скоростью в центр масс тела. Весьма вероятно, что аналогичный эффект будет наблюдаться и для других начальных условий. Однако для доказательства этого факта потребуются дополнительные численно-аналитические исследования решений приведенных в статье дифференциальных уравнений.

Замечание 5. При исследовании, редукции и поиске первых интегралов дифференциальных уравнений настоящей статьи использовались идеи и методы, которые были развиты в [12, 13].

5. Результаты численного интегрирования уравнений принципа максимума. Рассчитаем теперь траекторию, начальные условия у которой такие, что не поддались аналитическому исследованию. Численно интегрировалась в обратном времени система (4.8). При этом терминальные значения фазовых координат и момент окончания были выбраны произвольно, а терминальные значения сопряженных переменных задавались достаточно малыми в соответствии с (4.9):

$$\rho(T) = \gamma(T) = v(T) = 0.1, \quad p_1(T) = p_2(T) = p_3(T) = 10^{-6}, \quad T = 10$$

Отметим, что ненулевые значения сопряженных переменных здесь взяты специально, так как при нулевых значениях рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет особенность. На рис. 4 (на первых трех графиках) представлены зависимости фазовых координат ρ, γ, v от времени. Остальные неизвестные функции, такие как $\alpha(t)$, $\varphi(t)$ или зависимость от времени координат и проекций силы в исходной системе, могут быть подсчитаны с использованием уравнений (4.1)–(4.3). Для примера на рис. 4 (на четвертом графике) был подсчитан угол $\alpha(t)$ при условии, что $\alpha(T) = 0$.

Приложение. Доказательство утверждения 3. Перепишем систему (4.25) в виде следующей системы интегральных уравнений

$$z_1(\tau) = e^{2\tau} \left[z_1(0) - 4 \int_0^\tau e^{-2s} z_2(s) ds \right], \quad \frac{|z_2(\tau)|}{\sqrt{1 + z_2^2(\tau)}} = \frac{|z_2(0)|}{\sqrt{1 + z_2^2(0)}} \exp \left[\int_0^\tau \frac{z_1^2(s) - 1}{z_1^2(s) + 1} ds \right] \quad (\text{П1})$$

Нас интересуют решения системы (П1), которые продолжаются на весь бесконечный интервал $0 \leq \tau < +\infty$. Такие решения будем называть приемлемыми. Из второго уравнения системы (П1) следует, что любое приемлемое решение $z_2(\tau)$ (при $z_2(0) \neq 0$) не обращается в нуль на любом конечном интервале времени τ . Тогда из первого уравнения системы (П1) получим, что при $z_1(0)z_2(0) < 0$ решение $z_1(\tau)$ стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow +\infty$ не медленнее, чем $e^{2\tau}$. В этом случае второе уравнение системы (П1) становится противоречивым при $\tau \rightarrow +\infty$, так как левая часть этого уравнения ограничена при всех τ (меньше 1), а правая часть стремится к $+\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$, как e^τ . Таким образом, при $z_1(0)z_2(0) < 0$ решения системы не продолжаются на бесконечный интервал времени, т.е., приемлемых решений нет.

Рассмотрим случай $z_1(0)z_2(0) > 0$. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай $z_1(0) > 0, z_2(0) > 0$. Тогда, в силу вышесказанного, имеем $z_2(\tau) > 0, \tau \in [0, +\infty)$, а правая часть первого уравнения системы (П1) остается все время положительной (в против-

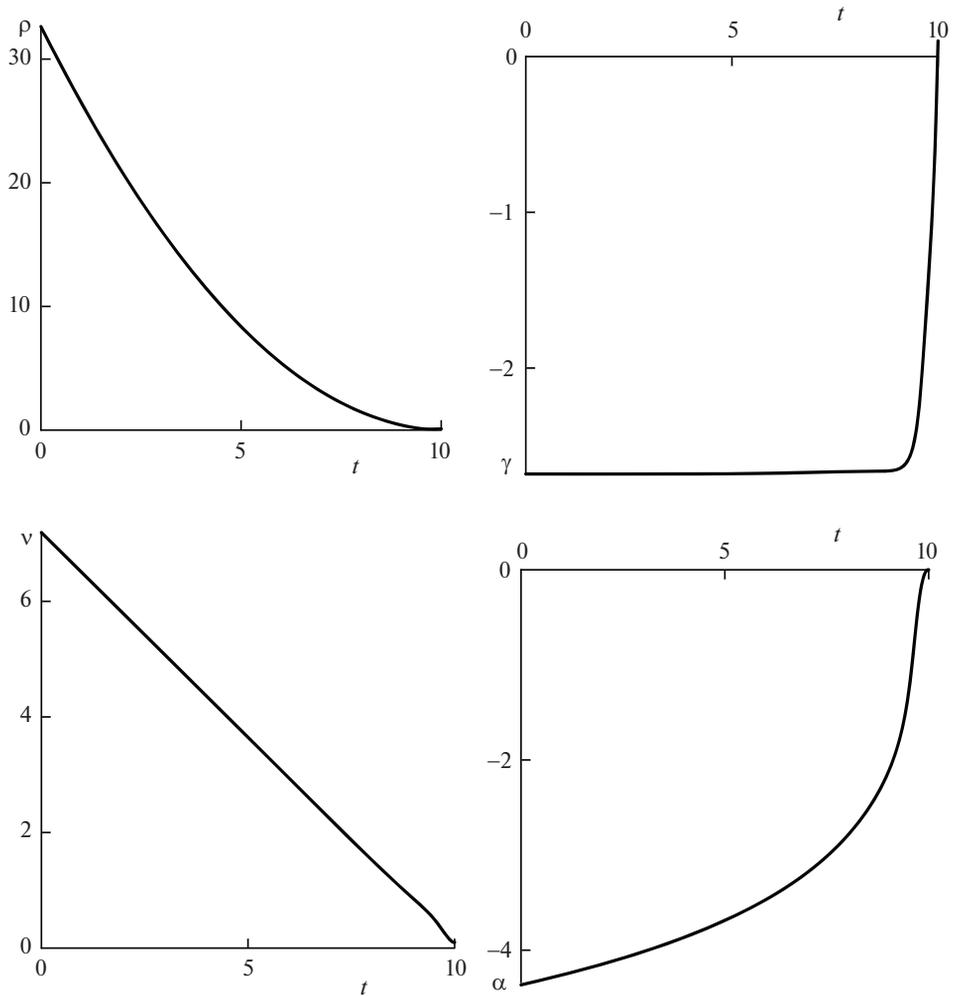


Рис. 4. Результаты интегрирования системы (4.8) и зависимость $\alpha(t)$.

ном случае, существует такое τ_1 , что $z_1(\tau_1)z_2(\tau_1) < 0$, и, в силу вышесказанного, приемлемых решений нет. Таким образом, в этом случае для приемлемого решения необходимо иметь

$$0 < 4 \int_0^{+\infty} e^{-2s} z_2(s) ds \leq z_1(0)$$

Покажем, что для приемлемого решения должно соблюдаться точное равенство

$$4 \int_0^{+\infty} e^{-2s} z_2(s) ds = z_1(0) \quad (\text{П2})$$

Действительно, в противном случае, в силу монотонности по τ интеграла $\int_0^\tau e^{-2s} z_2(s) ds$ и первого уравнения системы (П1), нарушение равенства (П2) привело бы к бесконеч-

ному возрастанию при $\tau \rightarrow +\infty$ (как $e^{2\tau}$) функции $z_1(\tau)$. А это, как было уже отмечено выше, было бы противоречиво для второго уравнения системы (П1) (в случае приемлемого решения).

Используя равенство (П2), первое уравнение системы (П1) можно переписать в следующем виде

$$z_1(\tau) = 4e^{2\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2s} z_2(s) ds \tag{П3}$$

Предположим, что предел функции $|z_1(s)|$ при $s \rightarrow +\infty$ существует и является конечным: $\lim_{s \rightarrow +\infty} |z_1(s)| = z_* < +\infty$. Рассмотрим три случая:

1) $z_* > 1$. Тогда интеграл $\int_0^{\tau} \frac{z_1^2(s) - 1}{z_1^2(s) + 1} ds$ положителен и расходится при $\tau \rightarrow +\infty$, а значит второе уравнение системы (П1) противоречиво и приемлемых решений нет.

2) $z_* < 1$. Тогда интеграл $\int_0^{\tau} \frac{z_1^2(s) - 1}{z_1^2(s) + 1} ds$ отрицателен и расходится при $\tau \rightarrow +\infty$, а из второго уравнения системы (П1) получим $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} z_2(\tau) = 0$. Отсюда, используя уравнение (П3), получим, что $\lim_{s \rightarrow +\infty} |z_1(s)| = z_* = 0$. Рассматривая систему линейного приближения для исходной системы (4.25) в окрестности особой точки $\{z_1 = 0, z_2 = 0\}$, получим

$$\frac{dz_1}{d\tau} = 2z_1 - 4z_2, \quad \frac{dz_2}{d\tau} = z_2; \quad \tau \in [0, +\infty)$$

Собственные числа этой системы суть $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$, следовательно, решения никак не могут входить в эту точку, что указывает на противоречивость полученных предельных значений для исходной нелинейной системы (4.25). Таким образом, в этом случае также нет приемлемых решений.

3) $z_* = 1$. Тогда, если интеграл $\int_0^{\tau} \frac{z_1^2(s) - 1}{z_1^2(s) + 1} ds$ расходится при $\tau \rightarrow +\infty$, то он должен быть обязательно отрицателен (иначе противоречиво второе уравнение системы (П1)). Кроме того, в этом случае второе уравнение системы (П1) приводит к предельному соотношению $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} z_2(\tau) = 0$. Согласно соотношению (П3), это предельное соотношение дает предельное соотношение $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} z_1(\tau) = z_* = 0$. Полученное противоречие указывает на отсутствие приемлемых решений в этом случае.

Если же интеграл $\int_0^{\tau} \frac{z_1^2(s) - 1}{z_1^2(s) + 1} ds$ сходится при $\tau \rightarrow +\infty$, то, согласно второму уравнению системы (П1), существует предел $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} z_2(\tau) = z_{2*}$. Переходя в равенстве (П3) к пределу при $\tau \rightarrow +\infty$, получим соотношение $1 = 2z_{2*} \rightarrow z_{2*} = 1/2$. Полученный предел является первой особой точкой из (4.26). Линеаризованные уравнения исходной системы (4.25) в окрестности этой особой точки имеют вид $z_1' = 2z_1 - 4z_2, z_2' = \frac{5}{8}z_1$. Собственные числа полученной системы суть $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$. Таким образом, и в этом случае решения никак не могут входить в рассматриваемую точку. Это указывает на отсутствие приемлемых решений в рассматриваемом случае.

Последний оставшийся случай, когда $\lim_{s \rightarrow +\infty} |z_1(s)| = z_* = +\infty$, также приводит к отсутствию приемлемых решений, так как тогда, при $\tau \rightarrow +\infty$, противоречиво второе уравнение системы (П1). Утверждение 3 доказано.

Благодарности. Авторы выражают свою благодарность академику РАН В.Ф. Журавлёву за поддержку и внимание к работе, а также академику РАН Ф.Л. Черноусько и всем участникам руководимого им семинара за ценные и конструктивные замечания к настоящей работе.

Второй автор выполнял исследование с использованием средств государственного бюджета по госзаданию № 123021700055-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Ленанд, 2021. 504 с.
2. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ, 1984. 296 с.
3. *Chernousko F.L.* Optimal control of two-dimensional motions of a body by a movable mass // Prepr. IX Vienna Int. Conf. on Math. Model. (MATHMOD). Vienna, February 21–23, 2018. Pap. WeD4.2. Vienna, 2018. P. 253–256.
4. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
5. *Черноусько Ф.Л.* Изменение ориентации твердого тела при помощи вспомогательной массы // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 79–81.
6. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // Докл. РАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
7. *Розенблат Г.М.* Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Докл. РАН. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99.
8. *Решмин С.А., Розенблат Г.М.* Численно-аналитическое исследование оптимального поворота твердого тела при помощи внутренних сил // Межд. науч. конф. “Фундаментальные и прикладные задачи механики”. Москва, 6–9 декабря 2022 г. Матер. конф. Ч. 1. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. С. 182–188.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: ГИФМЛ, 1961. 391 с.
10. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph.* Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. London; New York: Taylor&Francis, 2002. 230 p.
11. *Решмин С.А.* Применение метода Ньютона при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи об оптимальном раскручивании двухмассовой системы // Modern Europ. Res. 2021. № 2 (Т. 1). С. 114–122.
12. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Докл. РАН. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.

On Optimal Rigid Body Rotation with Internal Forces Application

G. M. Rozenblat^{a,#} and S. A. Reshmin^{b,##}

^aMoscow State Automobile and Road Technical University (MADI), Moscow, Russia

^bIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: gr51@mail.ru

^{##}e-mail: reshmin@ipmnet.ru

The article describes the result obtained for the problem of a rigid body's maximum rotation in a given time interval by moving a movable internal mass. The mass movement is achieved by applying limited force. Previously, similar problems were considered in which the displacements of internal mass were assumed to be kinematic with restrictions on the point's speed. The obtained result is described by analytical, easily verifiable formulas. The optimal

trajectory of the moving mass is a spiral that coils around the center of mass of a rigid body with a frequency increasing to infinity. The obtained numerical results relate to the design of other optimal trajectories that cannot be analyzed analytically.

Keywords: optimal control, Pontryagin's maximum principle, rigid body dynamics

REFERENCES

1. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle, Vol. 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique (Gauthier-Villars, Paris, 1953). (in French)
2. *Tatarinov Ya.V.* Lectures on Classical Dynamics. Moscow: MSU Pub., 1984. (in Russian)
3. *Chernousko F.L.* Optimal control of two-dimensional motions of a body by a movable mass // Prepr. IX Vienna Int. Conf. on Math. Model. (MATHMOD). Vienna, February 21–23, 2018. Pap. WeD4.2. Vienna, 2018, pp. 253–256.
4. *Chernousko F.L.* Optimal control of the motion of a two-mass system // Dokl. Math., 2018, vol. 97, no. 3, pp. 295–300.
5. *Chernousko F.L.* Change of orientation of a rigid body by means of an auxiliary mass // Dokl. Phys., 2020, vol. 65, no. 2, pp. 72–74.
6. *Shmatkov A.M.* Time-optimal rotation of a body by displacement of a mass point // Dokl. Phys., 2018, vol. 63, no. 8, pp. 337–341.
7. *Rozenblat G.M.* On optimal rotation of a rigid body by applying internal forces // Dokl. Math., 2022, vol. 106, no. 1, pp. 291–297.
8. *Reshmin S.A., Rozenblat G.M.* Computer-analytical investigation of optimal turning of a solid body by means of internal forces // Int. Sci. Conf. Fundamental and Applied Problems of Mechanics (FAPM-2022). Moscow, 6–9 December, 2022. The materials of the conference. Part 1. Moscow: BMSTU Pub., 2023, pp. 182–188. (in Russian)
9. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Gordon&Breach, 1986. xxiv+360 p.
10. *Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph.* Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. London; N.Y.: Taylor & Francis, 2002. 230 p.
11. *Reshmin S.A.* Application of the Newton method to solving boundary value problems of the maximum principle on the example of the problem of optimal unwinding of a two-mass system // Modern Europ. Res., 2021, no. 2 (vol. 1), pp. 114–122. (in Russian)
12. *Kozlov V.V.* Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems // JAMM, 2015, vol. 79, no. 3, pp. 209–216.
13. *Shamolin M.V.* New cases of integrable odd-order systems with dissipation // Dokl. Math., 2020, vol. 101, no. 2, pp. 158–164.

УДК 517.977

**УПРАВЛЕНИЕ ПОДАВЛЕНИЕМ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ЕЕ РАСКРУЧИВАНИЕМ**© 2023 г. С. А. Васенин^{1,*}, С. А. Решмин^{1,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: stepan_vasenin@mail.ru

**e-mail: reshmin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 01.09.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Объектом исследования данной работы является двухмассовая управляемая механическая система, состоящая из несущего диска, вращающегося вокруг своей оси, закрепленной в пространстве, и несомого кольца, присоединенного к диску при помощи невесомых упругих элементов. Демпферов в системе нет. Процесс подавления радиальных колебаний рассматривается с позиции теории оптимального управления. На достаточно больших интервалах времени используется численный метод Ньютона для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина. Исследованы свойства фазовых траекторий системы в зависимости от начальных состояний диска и кольца и количества пружин в сложной модели упругого взаимодействия. Показано, как при некоторых начальных условиях и параметрах системы вследствие радиальности упругой силы и закона сохранения кинетического момента траектория центра масс кольца стремится к окружности. Указанная тенденция выхода на режим движения по окружности не является единой и зависит от количества пружин. Демонстрируется, что при малом количестве упругих элементов траектория кольца не принимает вид окружности, а происходит почти полное гашение радиальных колебаний. Установлено, что при рассматриваемых во время численного эксперимента параметрах системы управление является релейным с довольно большим количеством переключений. При этом происходит одновременное раскручивание всей системы.

Ключевые слова: релейное управление, принцип максимума, управляемое вращение, краевая задача, метод Ньютона, гашение колебаний

DOI: 10.31857/S0032823523060097, **EDN:** GYSVUO

1. Введение. Процессы подавления колебаний и раскрутки механических систем присутствуют во многих технических устройствах. Важность исследования данных явлений обусловлена большим количеством механических объектов, которые напрямую или косвенно связаны с разными модификациями процессов раскрутки и вращения. В работе рассматривается модель колеса, состоящая из диска и кольца, соединенных между собой невесомыми упругими пружинами. Ставится задача о подавлении радиальных упругих колебаний (имеется в виду изменение расстояния между осями вращения диска и кольца) за счет изменения угла кручения между диском и кольцом. Закон управления формируется на основе соотношений принципа максимума Понтрягина [1] в соответствующей задаче оптимального управления с некоторым интегральным функционалом. Таким образом, речь идет о минимизации в некотором

смысле амплитуды колебаний в течение всего процесса раскрутки (а не только в терминальный момент), связанной с энергией, закачиваемой в эту степень свободы. При численных экспериментах оказалось, что одновременно с этим удается обеспечить раскручивание системы до достаточно больших угловых скоростей. Для построения управления на большом интервале времени предлагается использовать метод Ньютона, часто применяющийся для решения соответствующей краевой задачи принципа максимума. В предыдущих работах [2, 3] предполагалось, что механическая система совершает движения при малых величинах отклонений центра масс кольца и модуля разности углов поворотов диска и кольца. В данном случае потенциальная энергия упругого взаимодействия была разложена в двумерный ряд Тейлора, что отражается на простоте полученных уравнений, описывающих движение двухмассовой системы. Отличием данной работы от предыдущих является рассмотрение более точной и сложной математической модели упругого взаимодействия при довольно больших колебаниях системы и разном количестве упругих элементов. Выбор численного метода Ньютона для решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина обусловлен более простой реализацией на ЭВМ и быстрой сходимостью. Однако метод последовательных приближений [4, 5], использованный в предыдущих работах, также может быть успешно применен для решения задачи.

Установлено, что минимизация радиальных колебаний механической системы при выборе в качестве управления крутящего момента может быть проведена успешно. Однако в процессе раскрутки возрастает до довольно больших значений величина разности углов поворотов, что с физической точки зрения может привести к разрушению двухмассовой системы. Предполагается, что возможности прикладываемого к диску момента велики, так что в процессе управления угол крутильной деформации, т.е. разность углов вращения диска и кольца, может изменяться сколь угодно быстро в заданных пределах. Указанный угол кручения выбирается в качестве нового управления, которое гасит амплитуду радиальных колебаний. Выбором допустимого диапазона изменения управления (угла кручения) можно обеспечить дополнительно и требуемую раскрутку системы в целом.

Отметим, что существуют работы [6], численные методы расчета оптимального программного управления которых используют эволюционные алгоритмы, не основанные на решении краевой задачи принципа максимума. Решение краевой задачи принципа максимума Понтрягина проводилось в работах [7–16]. Приведена [17] задача граничного управления колебаниями двумерной пластины с целью полной остановки колебаний за конечное время. При этом на управляющие воздействия наложены ограничения на максимум абсолютной величины. Построение управления для механических систем как в данной задаче, у которых число степеней свободы превосходит размерность вектора обобщенных управляющих сил, было проведено в работе [18]. Рассматривается [19] возможный подход к осуществлению управления движением портального крана при перемещении груза. Предложено два различных метода отыскания управляющего ускорения, обеспечивающего гашение колебаний перемещаемого груза. Гашение колебаний нелинейного маятника проводилось в работе [20]. Получено [21] аналитическое оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором, причем задача рассматривалась на конечном интервале времени. Исследовалась [22] динамика механического изотропного стержневого упругого подвеса. Многомерные осцилляторы с нелинейным затуханием рассматривались в [23, 24].

2. Описание механической системы и уравнения движения. Рассматривается управляемая механическая система, состоящая из диска и кольца, соединенных между собой при помощи невесомых предварительно растянутых пружин, концы которых не заземлены шарнирно-неподвижными опорами (рис. 1). Радиус диска равен r_a . Радиус внутренней полости кольца равен r_b . Углы поворотов диска и кольца обозначены со-

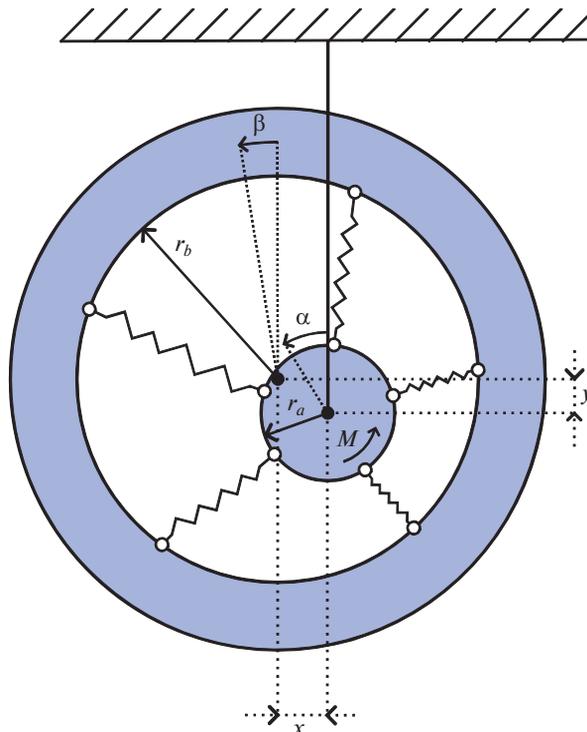


Рис. 1. Двухмассовая система.

ответственно через α и β . Оси вращения параллельны, причем ось вращения диска и его центр масс зафиксированы в пространстве. Положение центра масс кольца характеризуется относительными координатами x , y в прямоугольной системе координат в плоскости, которая перпендикулярна осям вращения. Таким образом, при $x = 0$ и $y = 0$ оси вращения совпадают.

Упругое взаимодействие будем моделировать системой, состоящей из N пружин жесткостью k , причем длина в свободном состоянии каждой из них равна $l_0 < r_b - r_a$. Соответствующая внутренняя энергия каждой натянутой пружины в недеформированной системе подсчитывается по формуле:

$$E_0 = \frac{k}{2}(r_b - r_a - l_0)^2 \quad (2.1)$$

Пусть теперь система деформировалась за счет смещения кольца b на x по горизонтали, на y по вертикали, а диск a совершил относительный поворот на угол $\varphi = \alpha - \beta$. Для i -й пружины запишем координаты конца, соединенного с диском:

$$x_{ai} = r_a \cos \gamma_i, \quad y_{ai} = r_a \sin \gamma_i; \quad \gamma_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

и координаты конца, соединенного с кольцом:

$$x_{bi} = x + r_b \cos(\gamma_i - \varphi), \quad y_{bi} = y + r_b \sin(\gamma_i - \varphi); \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

Соответствующая энергия i -й пружины в деформированной системе подсчитывается по формуле:

$$E_i = \frac{k}{2} \left(\sqrt{(x_{bi} - x_{ai})^2 + (y_{bi} - y_{ai})^2} - l_0 \right)^2 \quad (2.4)$$

В результате запишем потенциальную энергию упругой деформации системы в виде:

$$\Pi_{\text{tire}} = \sum_{i=1}^N E_i - NE_0 \quad (2.5)$$

Учитывая выражение для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} [I_a \dot{\alpha}^2 + I_b \dot{\beta}^2 + m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)], \quad (2.6)$$

составим Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2} [I_a \dot{\alpha}^2 + I_b \dot{\beta}^2 + m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] - \frac{k}{2} \sum_{i=1}^N (l_i - l_0)^2 + NE_0 \quad (2.7)$$

$$l_i = \sqrt{[r_b \cos(\gamma_i - \alpha + \beta) + x - r_a \cos \gamma_i]^2 + [r_b \sin(\gamma_i - \alpha + \beta) + y - r_a \sin \gamma_i]^2} \quad (2.8)$$

Докажем, что суммы, указанные ниже, имеют следующую особенность:

$$\sum_{i=1}^N \cos \gamma_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin \gamma_i = 0 \quad (2.9)$$

Рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^N e^{j\gamma_i}$, где j – мнимая единица, которая представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна:

$$S_N = \frac{b_1(1 - q^N)}{1 - q} = \frac{e^{j\gamma_1}(e^{j2\pi} - 1)}{e^{j\gamma_1} - 1}, \quad (2.10)$$

где $b_1 = \exp(j\gamma_1)$ – первый член, $q = \exp(j\gamma_1)$ – знаменатель. Из полученной формулы (2.10) следует, что $S_N = 0$. Заменяя j на $-j$, аналогично доказываем равенство нулю суммы. Утверждение доказано.

Из выражений (2.9) можно получить аналогичными рассуждениями для $\forall \varphi$ следующий результат:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \cos(\gamma_i - \varphi) = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin(\gamma_i - \varphi) = 0 \\ \sum_{i=1}^N \sin(2\gamma_i - \varphi) = 0, \quad \sum_{i=1}^N \sin 2(\gamma_i - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Производные для получения уравнения для α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = I_a \dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = I_a \ddot{\alpha} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = - \sum_{i=1}^N k \left(1 - \frac{l_0}{l_i} \right) \delta_i = -k \sum_{i=1}^N \delta_i + kl_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} \\ \delta_i = (y_{bi} - y)(x_{bi} - x_{ai}) - (x_{bi} - x)(y_{bi} - y_{ai}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим, что в состоянии равновесия, когда $x = y = \varphi = 0$, выражение для δ_i представляет собой векторное произведение двух коллинеарных векторов (y_{ai}, y_{bi}) и (x_{ai}, x_{bi}) . Поэтому в этом случае $\delta_i = 0$. Рассмотрим первую сумму в полученном выражении. Упростим данное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \delta_i &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{r_b^2}{2} \sin 2(\gamma_i - \varphi) + r_b \sin(\gamma_i - \varphi) x - \frac{r_a r_b}{2} (-\sin \varphi + \sin(2\gamma_i - \varphi)) \right] - \\ &- \sum_{i=1}^N \left[\frac{r_b^2}{2} \sin 2(\gamma_i - \varphi) + r_b \cos(\gamma_i - \varphi) y - \frac{r_a r_b}{2} (\sin \varphi + \sin(2\gamma_i - \varphi)) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N r_a r_b \sin \varphi = N r_a r_b \sin \varphi \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -k N r_a r_b \sin \varphi + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогично полученным выражениям для α соотношения для β имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = I_b \ddot{\beta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N k \left(1 - \frac{l_0}{l_i} \right) \delta_i = k N r_a r_b \sin \varphi - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} \quad (2.14)$$

Производные для получения уравнения для x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m_b \ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\sum_{i=1}^N k \left(1 - \frac{l_0}{l_i} \right) (x_{bi} - x_{ai}) = -k N x + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} \quad (2.15)$$

Аналогично полученным выражениям для x соотношения для y имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m_b \ddot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\sum_{i=1}^N k \left(1 - \frac{l_0}{l_i} \right) (y_{bi} - y_{ai}) = -k N y + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} \quad (2.16)$$

Уравнения Лагранжа второго рода для описания движения механической системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_a \ddot{\alpha} + k N r_a r_b \sin(\alpha - \beta) - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} &= M \\ I_b \ddot{\beta} - k N r_a r_b \sin(\alpha - \beta) + k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{l_i} &= 0 \\ m_b \ddot{x} + k N x - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} = 0, \quad m_b \ddot{y} + k N y - k l_0 \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Постановка задачи управления. Предполагаем, что крутящий момент $M(t)$ может быть достаточно большим. Поэтому в качестве нового управления выбираем угол кручения и считаем, что он ограничен:

$$u(t) = \varphi(t) = \alpha(t) - \beta(t); \quad 0 \leq u(t) \leq u_0, \quad (3.1)$$

где u_0 — заданная постоянная, которая должна быть достаточно мала. Функция $u(t)$ предполагается кусочно-непрерывной. Выберем интегральный функционал качества типа Лагранжа, соответствующий минимизации амплитуды радиальных колебаний системы в течение всего процесса:

$$J = \int_0^T (x^2 + y^2) dt \quad (3.2)$$

Так как функционал зависит только от x , y , а управлением является разность углов поворотов диска и кольца, то последние два уравнения системы (2.17) можно рассматривать отдельно от первых двух. Введем новые переменные: v_x — скорость изменения координаты x , v_y — скорость изменения координаты y . Перейдем к системе четырех уравнений первого порядка, описывающих двумерный осциллятор:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= -\frac{kNx}{m_b} + \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= -\frac{kNy}{m_b} + \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь в соответствии с (2.3), (2.8) зависимость правых частей от нового управления u достаточно сложная и нелинейная:

$$\begin{aligned} x_{bi} &= x + r_b \cos(\gamma_i - u), & y_{bi} &= y + r_b \sin(\gamma_i - u) \\ l_i &= \sqrt{(x_{bi} - x_{ai})^2 + (y_{bi} - y_{ai})^2}; & i &= 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где величины x_{ai} , y_{ai} не зависят от управления и заданы в (2.2). Системе (3.3) отвечают начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad y(0) = y_0, \quad v_y(0) = v_{y0} \quad (3.4)$$

Сформулируем задачу оптимального управления на конечном заданном интервале времени $t \in [0, T]$.

Задача. За счет выбора допустимого управления $u(t)$ требуется за время T перевести систему (3.3) из заданного начального состояния (3.4) в произвольное терминальное состояние и минимизировать при этом функционал (3.2), т.е. уменьшить, насколько это возможно, радиальные колебания в процессе управления.

Далее будут составлены соотношения принципа максимума для поставленной задачи, на основе которых будут найдены численно соответствующие законы управления. Их оптимальность математически строго не обосновывается, так как принцип максимума является только необходимым условием оптимальности. Однако, их эффективность проверена.

Кроме того, результаты численного моделирования, приведенные далее, подтверждают, что неотрицательность управления (см. (3.1)) способствует постепенному раскручиванию исходной системы (2.17) до достаточно больших значений угловых скоростей $\dot{\beta}(T)$. Если в процессе решения задачи у построенного управления появятся точки разрыва, то в них соответствующий момент $M(t)$ окажется бесконечно большим. Данная проблема может быть успешно решена с помощью процедуры сглаживания [3].

4. Краевая задача принципа максимума. Введем вспомогательную переменную x_0 и перейдем к функционалу типа Майера:

$$J = x_0(T), \quad \dot{x}_0 = f_0 = x^2 + y^2; \quad x_0(0) = 0 \quad (4.1)$$

Для составления соответствующей краевой задачи принципа максимума следует выполнить набор последовательных стандартных действий, а именно ввести сопряженные переменные, составить гамильтониан, выписать сопряженную систему, найти общий вид управления, максимизирующего гамильтониан в каждый момент времени, добавить начальные условия для основных переменных и граничные условия для сопряженных переменных на правом конце траектории (условия трансверсальности).

Введем соответствующие сопряженные переменные: $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$, причем $p_0(t) = \text{const} = -1$. Запишем гамильтониан:

$$\begin{aligned} H = (p, f) &= -x^2 - y^2 + p_1 v_x + p_2 \left(\frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{x_{bi} - x_{ai}}{l_i} - \frac{kNx}{m_b} \right) + \\ &+ p_3 v_y + p_4 \left(\frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{y_{bi} - y_{ai}}{l_i} - \frac{kNy}{m_b} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь в скалярном произведении p – вектор сопряженных переменных, f – вектор-функция, у которой компоненты с ненулевым индексом задают правую часть системы. Сопряженная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x + p_2 \frac{kN}{m_b} - p_2 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(y_{bi} - y_{ai})^2}{l_i^3} + p_4 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(x_{bi} - x_{ai})(y_{bi} - y_{ai})}{l_i^3} \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 2y + p_4 \frac{kN}{m_b} + p_2 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(x_{bi} - x_{ai})(y_{bi} - y_{ai})}{l_i^3} - p_4 \frac{kl_0}{m_b} \sum_{i=1}^N \frac{(x_{bi} - x_{ai})^2}{l_i^3} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial v_x} = -p_1, \quad \dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial v_y} = -p_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Граничные условия (условия трансверсальности) для системы (4.3) заданы на правом конце траектории:

$$p_1(T) = 0, \quad p_2(T) = 0, \quad p_3(T) = 0, \quad p_4(T) = 0 \quad (4.4)$$

Исследуемая система нелинейна по управлению u . Однако, при численных расчетах, представленных далее, максимальное значение гамильтониана в зависимости от управления достигалось только в граничных значениях управления. Это означает, что выражение для определения управления, доставляющего максимум гамильтониану при выбранных параметрах системы, можно записать следующим образом:

$$u = \arg \max_u H(t, x(t), p(t), u) = \begin{cases} 0, & H(t, x(t), p(t), 0) > H(t, x(t), p(t), u_0) \\ u_0, & H(t, x(t), p(t), 0) \leq H(t, x(t), p(t), u_0) \end{cases} \quad (4.5)$$

Дополнительная численная проверка отсутствия максимума гамильтониана при промежуточных значениях управления также выполнялась.

5. Методика применения метода Ньютона. Для построения оптимального управления или экстремалей на основе составленных соотношений принципа максимума (3.3), (3.4), (4.3)–(4.5) будем численно решать их с использованием метода Ньютона в комбинации с методом “пристрелки”.

Начальные значения сопряженных переменных считаются варьируемыми параметрами. Исходная система интегрируется совместно с сопряженной системой в прямом времени при управлении, максимизирующем гамильтониан в каждый момент времени. Цель – обеспечить выполнение условий трансверсальности на правом конце траектории. Задача рассматривается формально как задача решения системы нескольких уравнений, заданных неявно. Число уравнений равно числу варьируемых параметров. Для выбора варьируемых параметров на следующей итерации и обеспечения сходимости к искомому решению используется метод Ньютона:

$$\begin{aligned} z &= (p_1(0), \dots, p_n(0)), \quad F(z) = 0, \quad F = (F_1, \dots, F_n) \\ z^{k+1} &= z^k - W^{-1}F, \quad W = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}; \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где z – вектор начальных значений сопряженных переменных, $F(z)$ – вектор-функция из условий трансверсальности на правом конце, W – матрица Якоби. Так как условия трансверсальности на правом конце явно не зависят от начальных значений сопряженных переменных, то для определения матрицы Якоби будем использовать выражение:

$$W = \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \approx \frac{F_i(z_1, z_2, \dots, z_j + \Delta_j, \dots, z_n) - F_i(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n)}{\Delta_j} \quad (5.2)$$

Процесс итераций заканчивается, когда будут выполнены условия трансверсальности на правом конце.

6. Численное построение экстремалей. В данном разделе представлены результаты расчетов системы при раскручивании системы управлением, полученным из соотношений принципа максимума. Была проведена серия расчетов при разных количествах упругих элементов, соединяющих диск и кольцо. Рассмотрена динамика системы как при малых, так и при больших отклонениях.

Расчет 1. При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением:

$$\begin{aligned} m_a &= 1 \text{ кг}, & m_b &= 1 \text{ кг}, & r_a &= 0.621 \text{ м}, & r_b &= 0.644 \text{ м} \\ I_a &= 0.193 \text{ кг м}^2, & I_b &= 0.208 \text{ кг м}^2, & k &= 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, & l_0 &= 0.012 \text{ м} \\ N &= 10, & T &= 80 \text{ с}, & u_0 &= 0.01 \text{ рад} \\ x(0) &= 0.002 \text{ м}, & v_x(0) &= -0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}}, & y(0) &= 0.002 \text{ м}, & v_y(0) &= 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

Численным методом Ньютона было получено управление, успешно уменьшающее амплитуду радиальных колебаний механической системы. На рис. 2 представлены результаты численного моделирования. Обнаружено, что воздействие оптимального управления на механическую систему имеет приблизительно периодический характер с примерным периодом $\tau = 0.36$ с. Сопряженные переменные p_1, p_2, p_3, p_4 сначала колеблются с убывающей амплитудой, а потом, когда колебания полностью пропадают, принимают нулевое терминальное значение. В конце процесса раскручивания угол и угловая скорость кольца приняли приблизительно следующие значения:

$\beta = 1596$ рад, $\dot{\beta} = 40 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Относительное изменение значения гамильтониана в течение процесса движения составляет 0.00008%, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

Расчет 2. При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением:

$$\begin{aligned} m_a &= 1 \text{ кг}, & m_b &= 1 \text{ кг}, & r_a &= 0.055 \text{ м}, & r_b &= 0.21 \text{ м} \\ I_a &= 0.0015 \text{ кг м}^2, & I_b &= 0.0220 \text{ кг м}^2, & k &= 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, & l_0 &= 0.1 \text{ м} \\ N &= 3, & T &= 135 \text{ с}, & u_0 &= 0.1 \text{ рад} \\ x(0) &= 0.1 \text{ м}, & v_x(0) &= -0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, & y(0) &= 0.1 \text{ м}, & v_y(0) &= 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

Численным методом Ньютона было получено управление, успешно уменьшающее амплитуду радиальных колебаний механической системы. На рис. 3 представлены результаты численного моделирования. На графике для оптимального управления демонстрируется нетривиальный алгоритм переключения. Сложный характер поведения в течение всего процесса движения, следующий из расхождения скоростей убывания амплитуд колебаний x, v_x, y, v_y , наблюдается и для сопряженных переменных p_1, p_2, p_3, p_4 . В конце процесса раскручивания угол и угловая скорость кольца приняли приблизительно следующие значения: $\beta = 2673$ рад, $\dot{\beta} = 38 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Относительное изменение значения гамильтониана в течение процесса движения составляет 0.0001%, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

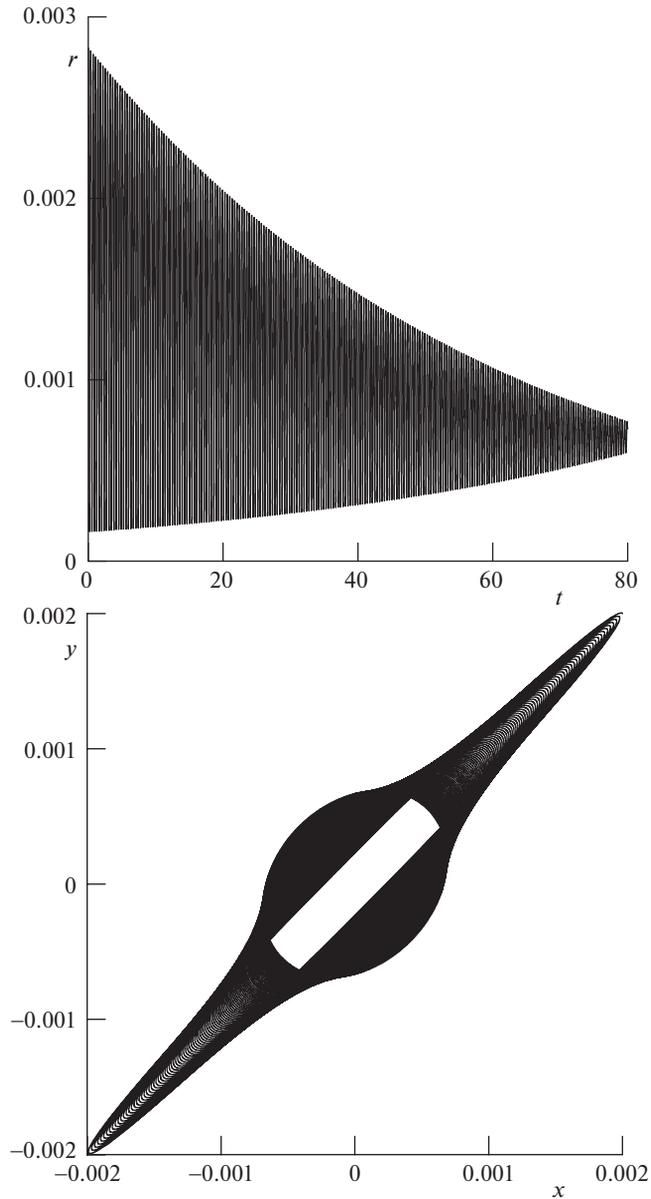


Рис. 2. Результаты численного моделирования расчета 1 (малые колебания, большое количество пружин).

Расчет 3. При расчете были использованы следующие параметры системы с ненулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением:

$$m_a = 1 \text{ кг}, \quad m_b = 1 \text{ кг}, \quad r_a = 0.055 \text{ м}, \quad r_b = 0.21 \text{ м}$$

$$I_a = 0.0015 \text{ кг м}^2, \quad I_b = 0.0220 \text{ кг м}^2, \quad k = 10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \quad l_0 = 0.1 \text{ м}$$

$$N = 2, \quad T = 45 \text{ с}, \quad u_0 = 0.1 \text{ рад}$$

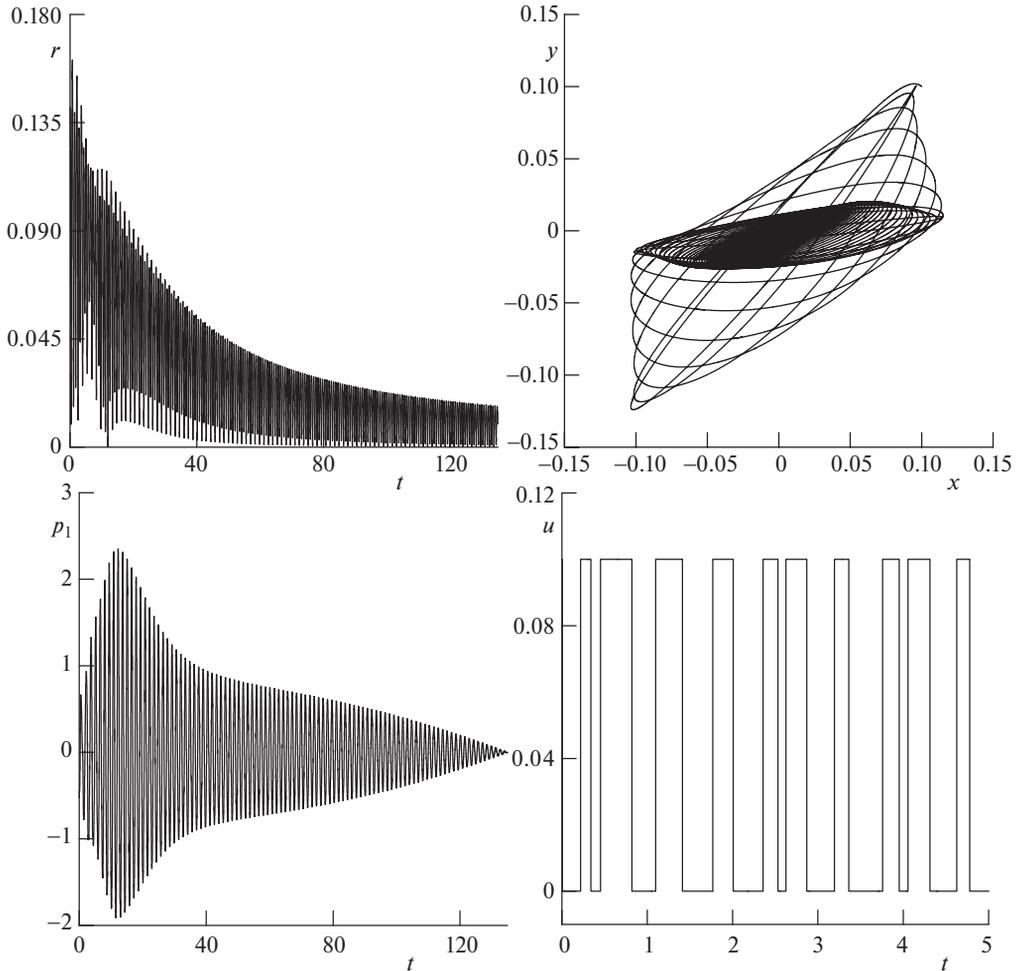


Рис. 3. Результаты численного моделирования расчета 2 (конечные колебания, малое количество пружин).

$$x(0) = 0.1 \text{ м}, \quad v_x(0) = -0.1 \frac{\text{М}}{\text{с}}, \quad y(0) = 0.1 \text{ м}, \quad v_y(0) = 0.1 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

Численным методом Ньютона было получено управление, успешно уменьшающее амплитуду радиальных колебаний механической системы. На рис. 4 представлены результаты численного моделирования. Установлено, что, в отличие от второго расчета, оптимальное управление стремится к периодической форме. Сопряженные переменные p_1, p_2, p_3, p_4 сначала колеблются с убывающей амплитудой, а потом, когда колебания полностью пропадают, принимают нулевое терминальное значение. В конце процесса раскручивания угол и угловая скорость кольца приняли приблизительно следующие значения: $\beta = 259$ рад, $\dot{\beta} = 10$ рад/с. Относительное изменение значения гамильтониана в течение процесса движения составляет 0.00005%, что свидетельствует о правильности и точности проделанных вычислений.

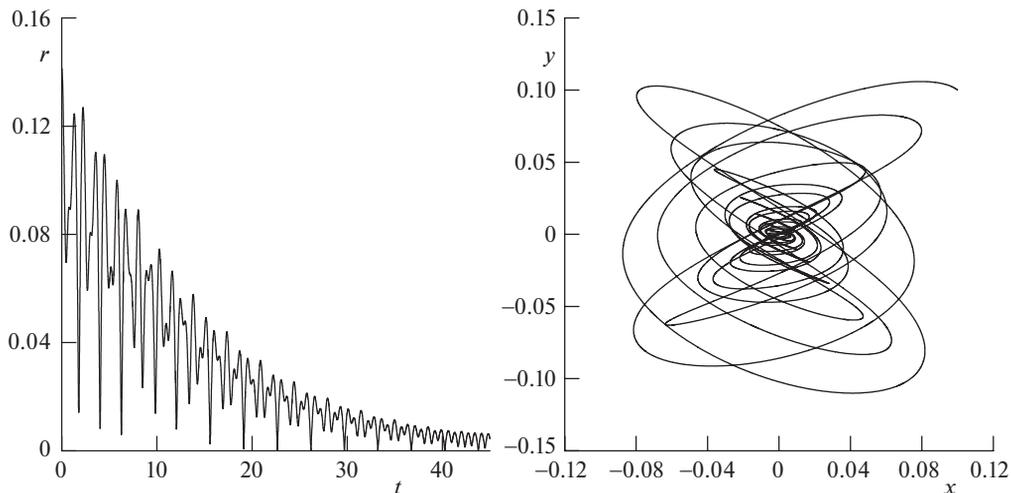


Рис. 4. Результаты численного моделирования расчета 3 (конечные колебания, малое количество пружин).

Заключение. В работе рассмотрена задача об оптимальном гашении радиальных колебаний в упругой двухмассовой системе, состоящей из диска и кольца, соединенных пружинами, при ограничениях на управляющее воздействие (угол кручения). Такая задача сводится к управлению колебаниями соответствующего двумерного осциллятора. Оказалось, что закон изменения угла кручения, полученный из соотношений принципа максимума, при выбранных параметрах системы имеет релейный вид с большим количеством переключений. При этом также продемонстрировано, что одновременно может возникать режим раскрутки механической системы, причем как при малом, так и при достаточно большом количестве пружин. Показано, что с увеличением количества пружин в механической системе при неизменности остальных параметров возрастает время гашения колебаний, а в некоторых случаях траектория центра масс кольца стремится к окружности. Стремление траектории центра масс кольца к окружности при достаточно большом количестве упругих элементов следует из радиальности упругой силы. Отметим, что поведение механической системы при малых колебаниях совпало с поведением системы в упрощенной математической модели упругого взаимодействия в работах [2, 3], что показывает правильность проделанного исследования. Планируется использовать данную математическую модель для анализа раскручивания системы при контакте кольца с поверхностью, наличии трения и внутреннего демпфирования. Результаты будут применяться для исследования нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта [25].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-11-00128), <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Решмин С.А., Васенин С.А. Применение метода последовательных приближений при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи управления раскручиванием двухмассовой системы // Modern Europ. Res. 2022. № 3 (Т. 1). С. 186–196.

3. *Васенин С.А., Решмин С.А.* Оптимальное подавление колебаний в задаче раскручивания двухмассовой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 6. С. 67–80.
4. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВММФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.
5. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
6. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю., Рындин Д.А.* Решение задачи оптимального управления группой роботов эволюционными алгоритмами // Информ. и матем. технол. в науке и управл. 2017. № 3 (7). С. 109–121.
7. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // Докл. РАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
8. *Левский М.В.* Оптимальное управление кинетическим моментом во время пространственного разворота твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 115–140.
9. *Шматков А.М.* Периодические решения задачи оптимального управления поворотом твердого тела с помощью внутренней массы // Вестн. МГУ. Сер. I: Математика. Механика. 2020. № 3. С. 63–67.
10. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В.* Оптимальное по быстродействию управление в системе третьего порядка с несимметричными ограничениями // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 2. С. 169–173.
11. *Стрелкова Н.А.* Об управлении одной системой второго порядка в сопротивляющейся среде // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3 (30). С. 46–51.
12. *Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д.* Модель конкуренции Лотки–Вольтерры с немонотонной функцией терапии для нахождения оптимальных стратегий лечения раковых заболеваний крови // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 79–98.
13. *Глазков Т.В., Решмин С.А.* Оптимальное раскручивание колесного диска в составе двухмассовой модели // Инж. ж.: Наука и инновации. 2022. № 5. С. 45–51.
14. *Решмин С.А., Черноусько Ф.Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 13–22.
15. *Шматков А.М.* Влияние габаритов управляемого устройства на оптимальный по быстродействию поворот с помощью подвижной внутренней массы // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 3. С. 292–296.
16. *Розенблат Г.М.* Об оптимальном повороте твердого тела при помощи внутренних сил // Докл. РАН. 2022. Т. 505. № 1. С. 92–99.
17. *Романов И.В., Шамаев А.С.* Гашение колебаний тонкой пластины ограниченным воздействием, приложенным к границе // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 64–74.
18. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В.* Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // ПММ. 2014. Т. 78. № 6. С. 755–765.
19. *Шугайло Т.С.* Управление движением козлового крана с грузом заданием ускорения // Вестн. С.-Петербургского ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7. № 1. С. 154–164.
20. *Решмин С.А.* Поиск главного бифуркационного значения максимального управляющего момента в задаче синтеза оптимального управления маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 2. С. 5–20.
21. *Галеев А.А., Лысенко П.В.* Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором // АиТ. 2019. № 1. С. 21–37.
22. *Привалов Е.А., Жбанов Ю.К.* Стержневая конструкция упругого подвеса инертной массы // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 19–28.
23. *Журавлев В.Ф.* Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелин. динам. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
24. *Журавлев В.Ф.* Пространственный осциллятор Ван дер Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.
25. *Решмин С.А.* Качественный анализ нежелательного эффекта потери силы тяги транспортного средства во время интенсивного старта // Докл. РАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 289–293.

Control of Suppression of Radial Vibrations of a Two-mass System with its Simultaneous Spinning-up

S. A. Vasenin^{a,#} and S. A. Reshmin^{a,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: stepan_vasenin@mail.ru*

^{##}*e-mail: reshmin@ipmnet.ru*

The object of research in this work is a two-mass controlled mechanical system consisting of a carrier disk rotating about its axis, fixed in space, and a carried ring connected to the disk by means of weightless elastic elements. There are no dampers in the system. The process of suppression of radial oscillations is considered from the perspective of the theory of optimal control. On sufficiently large time intervals, Newton's numerical method is used to solve the boundary value problem of the Pontryagin's maximum principle. The properties of phase trajectories of the system are studied depending on the initial states of the disk and ring and the number of springs in a complex model of elastic interaction. It is shown how, under certain initial conditions and parameters of the system, due to the radiality of the elastic force and the law of conservation of angular momentum, the trajectory of the center of mass of the ring tends to a circle. The specified tendency to enter the circular motion mode is not uniform and depends on the number of springs. It is shown that with a small number of elastic elements, the trajectory of the ring does not take the form of a circle, but almost complete damping of radial vibrations occurs. It has been established that with the parameters of the system considered during the numerical experiment, the control is relay with a fairly large number of switchings. In this case, the entire system is simultaneously spinning-up.

Keywords: relay control, maximum principle, controlled rotation, boundary value problem, Newton's method, vibration damping

REFERENCES

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Gordon&Breach, 1986. xxiv+360 p.
2. *Reshmin S.A., Vasenin S.A.* Application of the method of successive approximations in solving the boundary problems of the maximum principle on the example of the problem of controlling spin-up of the two-mass system // *Modern Europ. Res.*, 2022, no. 3 (vol. 1), pp. 186–196. (in Russian)
3. *Vasenin S.A., Reshmin S.A.* Optimal suppression of oscillations in the problem of unwinding a two-mass system // *J. Comput. Sci. Int.*, 2023, vol. 62, no. 6.
4. *Krylov I.A., Chernous'ko F.L.* On a method of successive approximations for the solution of problems of optimal control // *USSR Comput. Math.&Math. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 6, pp. 1371–1382.
5. *Chernous'ko F.L., Banichuk N.V.* Variational Problems in Mechanics and Control. Moscow: Nauka, 1973. 238 p. (in Russian)
6. *Diveev A.I., Shmalko E.Yu., Ryndin D.A.* Solution of optimal control problem for group of robots by evolutionary algorithms // *Inform.&Math. Technol. in Sci.&Manag.*, 2017, no. 3, pp. 109–121. (in Russian)
7. *Chernous'ko F.L.* Optimal control of the motion of a two-mass system // *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 5, pp. 295–299.
8. *Levskii M.V.* Optimal control of kinetic moment during the spatial rotation of a rigid body (spacecraft) // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 92–111.
9. *Shmatkov A.M.* Periodic solutions to the optimal control problem of rotation of a rigid body using internal mass // *MSU Mech. Bull.*, 2020, vol. 75, no. 3, pp. 75–79.
10. *Akulenko L.D., Kostin G.V.* Time-optimal control in a third-order system with asymmetric constraints // *Dokl. Math.*, 2000, vol. 61, no. 3, pp. 454–458.
11. *Strelkova N.A.* On the control of one second-order system in a resisting environment // *Bull. Perm Univ. Math. Mech.*, 2015, no. 3, pp. 46–51. (in Russian)

12. *Grigorenko N.L., Khailov E.N., Grigorieva E.V., Klimenkova A.D.* Lotka-Volterra competition model with a nonmonotone therapy function for finding optimal strategies in the treatment of blood cancers // Proc. Steklov Inst. of Mathematics, 2022, vol. 317, pp. 71–89.
13. *Glazkov T.V., Reshmin S.A.* Optimal unwinding of the wheel as part of a two-mass model // Engng. J.: Sci.&Innov., 2022, no. 5, pp. 45–51. (in Russian)
14. *Reshmin S.A., Chernous'ko F.L.* A time-optimal control synthesis for a nonlinear pendulum // J. Comput. Sci. Int., 2007, vol. 46, pp. 9–18.
15. *Shmatkov A.M.* Influence of the size of a controllable device on time-optimal rotation generated by a moving internal mass // Dokl. Math., 2019, vol. 99, pp. 325–328.
16. *Rozenblat G.M.* On optimal rotation of a rigid body by applying internal forces // Dokl. Math., 2022, vol. 106, pp. 291–297.
17. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Comput. Sci. Int., 2020, vol. 59, pp. 371–380.
18. *Anan'evskii I.M., Anokhin N.V.* Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link // JAMM, 2014, vol. 78, no. 6, pp. 543–550.
19. *Shugailo T.S.* Motion control of a loaded gantry crane by prescribing its acceleration // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., 2020, vol. 53, pp. 100–107.
20. *Reshmin S.A.* Finding the principal bifurcation value of the maximum control torque in the problem of optimal control synthesis for a pendulum // J. Comput. Sci. Int., 2008, vol. 47, pp. 163–178.
21. *Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Energy-optimal control of harmonic oscillator // Autom.&Remote Control, 2019, vol. 80, pp. 16–29.
22. *Privalov E.A., Zhanov Yu.K.* Rod construction of an isotropic elastic suspension of inertial mass // Mech. Solids, 2018, vol. 53, pp. 492–500.
23. *Zhuravlev V.F.* Van der Pol's controlled 2D oscillator // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222. (in Russian)
24. *Zhuravlev V.F.* Van der Pol oscillator. Technical applications // Mech. Solids, 2020, vol. 55, pp. 132–137.
25. *Reshmin S.A.* Qualitative analysis of the undesirable effect of loss of traction force of a vehicle during an intense start // Dokl. Phys., 2019, vol. 64, no. 1, pp. 30–33.

УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ ИЗМЕНЯЕМОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ СИЛОВОМ ПОЛЕ

© 2023 г. А. А. Буров^{1,*}¹ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru

Поступила в редакцию 30.05.2023 г.

После доработки 30.09.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Рассматривается задача о движении вокруг неподвижной точки изменяемого тела в зависящем от времени силовом поле. Указываются условия, при которых уравнения движения сводятся к классическим уравнениям Эйлера–Пуассона, описывающим движения твердого тела в поле притяжения. Обсуждаются вопросы существования первых интегралов и устойчивости установившихся движений.

Ключевые слова: движение изменяемого тела с неподвижной точкой, зависящее от времени силовое поле, замена времени, замена переменных, существование интегрируемых случаев, неинтегрируемость уравнений движения, существование установившихся движений, бифуркационные диаграммы

DOI: 10.31857/S0032823523060024, EDN: AEBWIS

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$ – абсолютная система отсчета (АСО), $Ox_1x_2x_3$ – подвижная прямоугольная декартова система отсчета (ПСО), оси которой могут свободно вращаться вокруг неподвижной точки O . Пусть тело образовано точками P_1, \dots, P_n точки массами m_1, \dots, m_n . Положение этих точек задается векторами \overline{OP}_k , проекции которых на оси ПСО имеют вид

$$\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})^T$$

Будем считать, что законы движения точек относительно ПСО заданы соотношениями

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k(t), \quad (1.1)$$

где $x_{1k}(t)$, $x_{2k}(t)$, $x_{3k}(t)$ – гладкие функции времени.

Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} -$$

ортогональная матрица, по строкам которой записаны единичные векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ АСО, заданные своими проекциями на оси ПСО (см., например, [1], стр. 56 и далее, а также [2]). Эта матрица зависит от времени $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$, причем кососимметричная матрица

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{S}^{-1} \frac{d\mathbf{S}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (1.2)$$

называется матрицей угловой скорости:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

По ее компонентам определяется вектор угловой скорости ПСО относительно АСО

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T,$$

заданный в проекциях на оси ПСО.

При этом матричное равенство (1.2) можно записать в виде системы уравнений Пуассона

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1.3)$$

Согласно формуле Эйлера скорость точки P_k в момент времени t определяется соотношением

$$\mathbf{v}_k(t) = \dot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k(t)$$

Тогда кинетическая энергия системы в целом определяется как

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + \dots + m_n(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k(t)) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{K}(t), \boldsymbol{\omega}) + T_0(t), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} \sum m_k (x_{2k}^2(t) + x_{3k}^2(t)) & -\sum m_k x_{1k}(t) x_{2k}(t) & -\sum m_k x_{1k}(t) x_{3k}(t) \\ -\sum m_k x_{1k}(t) x_{2k}(t) & \sum m_k (x_{3k}^2(t) + x_{1k}^2(t)) & -\sum m_k x_{2k}(t) x_{3k}(t) \\ -\sum m_k x_{1k}(t) x_{3k}(t) & -\sum m_k x_{2k}(t) x_{3k}(t) & \sum m_k (x_{1k}^2(t) + x_{2k}^2(t)) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} \sum m_k (x_{2k}(t) \dot{x}_{3k}(t) - x_{3k}(t) \dot{x}_{2k}(t)) \\ \sum m_k (x_{3k}(t) \dot{x}_{1k}(t) - x_{1k}(t) \dot{x}_{3k}(t)) \\ \sum m_k (x_{1k}(t) \dot{x}_{2k}(t) - x_{2k}(t) \dot{x}_{1k}(t)) \end{pmatrix}$$

Здесь суммирование осуществляется по всем точкам: индекс k пробегает значения от 1 до n . Функция $T_0(t)$ зависит только от времени и при дальнейшем составлении уравнений движения роли не играет.

Согласно теореме об изменении момента количества движения уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}(t)) \Leftrightarrow (\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ – момент внешних сил.

Замечание 1. Уравнения (1.4) совместно с уравнениями Пуассона (1.3) описывают движения гиростата с переменным тензором инерции и переменным гиростатическим моментом. Известны различные постановки задачи о движении тел с осесиммет-

ричными роторами (см., напр., [3, 4]). Движению гиростата с переменным гиростатическим моментам посвящена монография [5].

Утверждение 1. Если существует функция $f(t) > 0 \forall t$, такая, что

$$\mathbf{I}(t) = f(t)\mathbf{I}_*, \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_*, \quad f(t)\mathbf{Q}(t, \alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{Q}_*(\alpha, \beta, \gamma), \quad (1.5)$$

где тензор \mathbf{I}_* и вектор \mathbf{K}_* постоянны в осях ПСО, а вектор $\mathbf{Q}_*(\alpha, \beta, \gamma)$ не зависит явно от времени, то заменой независимой переменной $t \rightarrow t_*$:

$$f(t) \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_*} \quad (1.6)$$

и переменной ω :

$$\omega_* = f(t)\omega \quad (1.7)$$

уравнения (1.4), (1.3) приводимы к виду

$$\frac{d}{dt_*}(\mathbf{I}_*\omega_* + \mathbf{K}_*) = (\mathbf{I}_*\omega_* + \mathbf{K}_*) \times \omega_* + \mathbf{Q}_*(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1.8)$$

$$\frac{d\alpha}{dt_*} = \alpha \times \omega_*, \quad \frac{d\beta}{dt_*} = \beta \times \omega_*, \quad \frac{d\gamma}{dt_*} = \gamma \times \omega_* \quad (1.9)$$

Правые части уравнений (1.8), (1.9) не зависят явно от времени и имеют вид уравнений движения гиростата под действием не зависящего явно от времени крутящего момента.

Доказательство. Подставим условия (1.5) в уравнения (1.4)

$$\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{I}_*\omega + \mathbf{K}_*) = (f(t)\mathbf{I}_*\omega + \mathbf{K}_*) \times \omega + f^{-1}(t)\mathbf{Q}_*(\alpha, \beta, \gamma)$$

и домножим левую и правую части этого уравнения на $f(t)$

$$f(t) \frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{I}_*\omega + \mathbf{K}_*) = f(t)(f(t)\mathbf{I}_*\omega + \mathbf{K}_*) \times \omega + f(t)f^{-1}(t)\mathbf{Q}_*(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1.10)$$

Применение к уравнениям (1.10) соотношений (1.6) и (1.7) приводит их к виду (1.8), что и требовалось.

Что касается уравнений Пуассона (1.3), то также домножая левую и правую части на $f(t)$ и, используя замену переменных (1.7), получаем уравнения

$$\frac{d\alpha}{dt_*} = \alpha \times \omega_*, \quad \frac{d\beta}{dt_*} = \beta \times \omega_*, \quad \frac{d\gamma}{dt_*} = \gamma \times \omega_*$$

отличающиеся от уравнений (1.3) лишь обозначениями.

Замечание 2. В постановке задачи предполагается, что точки P_1, P_2, \dots, P_n совершают наперед заданное движение относительно подвижной системы отсчета, описываемое соотношениями (1.1). Понятно, что для обеспечения такого относительного движения к этим точкам надо приложить некоторые управляющие воздействия – силы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. После того, как то или иное вращательное движение системы, определяемое уравнениями (1.3), (1.4) найдено, управляющие силы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ могут быть найдены из уравнений

$$m_k \frac{d}{dt_*}(\dot{\mathbf{x}}_k + \omega \times \mathbf{x}_k) = m_k(\dot{\mathbf{x}}_k + \omega \times \mathbf{x}_k) \times \omega + \mathbf{F}_k + \mathbf{u}_k; \quad k = 1, \dots, n,$$

где \mathbf{F}_k – активные силы, действующие на точки P_1, P_2, \dots, P_n .

2. Случай потенциальности внешних сил. Предположим, что система совершает движение в потенциальном поле внешних сил с потенциалом

$$U = U(t, \alpha, \beta, \gamma), \quad (2.1)$$

выражающим зависимость от времени и от ориентации тела. При этом момент внешних сил, как известно, записывается как

$$\mathbf{Q}(t, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \times \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \beta \times \frac{\partial U}{\partial \beta} + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} \quad (2.2)$$

Утверждение 2. Если потенциал (2.1) имеет вид

$$f(t)U(t, \alpha, \beta, \gamma) = U_*(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.3)$$

то уравнения движения сводятся к не зависящим от времени уравнениям Эйлера–Пуассона, описывающим вращение тела в трехмерном евклидовом пространстве.

Доказательство сводится к непосредственной подстановке условий (2.3) в соотношение для момента (2.2).

Рассмотрим некоторые известные специальные случаи такого потенциала, для которых предлагаемая замена переменных и времени приводит к классическим задачам механики твердого тела.

3. Движение тела в однородном переменном поле. Пусть поле, в котором совершает движение система, однородно, но, в отличие от привычного поля силы тяжести, меняется со временем. Для определенности можно считать, что это поле направлено вдоль оси OX_γ . Тогда потенциал в общем случае записывается как

$$U(t, \gamma) = (\mathbf{a}(t), \gamma)$$

При этом условие теоремы записывается как

$$f(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_*, \quad (3.1)$$

где \mathbf{a}_* – постоянный вектор.

Замечание 3. В случае, когда речь идет об однородном, но переменном поле силы тяжести с ускорением $\mathbf{g}(t)$, направленным в сторону, противоположную вектору γ , вектор $\mathbf{a}(t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{a}(t) = -m\mathbf{g}(t)\ell(t),$$

где $m = m_1 + \dots + m_n$ – масса системы, $\ell(t) = \mathbf{OC}(t)$ – вектор, определяющий положение центра масс системы – точку C .

Утверждение 3. Пусть выполнено условие (3.1).

– При $\mathbf{K}_* = 0$ уравнения (1.8), (1.3), а вместе с ними – и уравнения (1.4), (1.2), вполне интегрируемы во всех случаях, известных из механики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Речь идет о случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Горячева–Чаплыгина. Также при выполнении указанных условий имеют место многочисленные случаи существования частных интегралов, включая случай Гесса (см. детали, напр., в [1, 6–8]). В общем случае уравнения движения системы оказываются неинтегрируемыми (см. [9–11]).

– При $\mathbf{K}_* \neq 0$ и уравнения (1.8), (1.3), а вместе с ними – и уравнения (1.4), (1.2), вполне интегрируемы во всех случаях, известных из механики тяжелого гиростата. Речь идет о случае Жуковского–Вольтерра, случае динамической симметрии, а также случаях Ковалевской–Яхья [12, 13] и Сретенского [14]. Также при выполнении указанных условий имеют место случаи существования частных интегралов и решений, включая случай Сретенского, аналогичный случаю Гесса (также см. [15]). В общем случае уравнения движения системы также оказываются неинтегрируемыми (см. [16]).

Замечание 4. В рассматриваемый класс систем не попадают тела с переменным гироскопическим моментам (см., напр., [5]).

Утверждение 4. При выполнении условия (3.1) установившимся движениям системы (1.8), (1.9) – положениям равновесия и равномерным вращениям – единственным образом ставятся в соответствие движения системы (1.4), (1.3). При этом движение, равномерное в новом времени, в исходном времени таковым не будет. Также сохраняются вид и свойства бифуркационных диаграмм (см., в частности, [17–22]) относительно тяжелого твердого тела и [23–26] относительно тяжелого гиростата.

Замечание 5. Устойчивость записанных в исходном времени движений из утверждения 4 в общем случае требует отдельного обсуждения.

Замечание 6. Одним из наиболее естественных источников зависимости однородного поля от времени является колебания точки подвеса (см., напр., [27]).

4. Движение тела в линейном переменном поле. Предположим теперь, что закон движения точек организован таким образом, что центр масс совпадает с неподвижной точкой. Тогда в квадратичном приближении поле притяжения со стороны распределенных притягивающих центров определяется потенциалом вида (см., напр., [28])

$$U = \frac{1}{2}(\mu_\alpha(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + \mu_\beta(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + \mu_\gamma(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}))$$

Утверждение 5. Если коэффициенты $\mu_\alpha(t)$, $\mu_\beta(t)$, $\mu_\gamma(t)$ таковы, что

$$f^2(t)\mu_\alpha(t) = \mu_{\alpha*}, \quad f^2(t)\mu_\beta(t) = \mu_{\beta*}, \quad f^2(t)\mu_\gamma(t) = \mu_{\gamma*},$$

где $\mu_{\alpha*}$, $\mu_{\beta*}$ и $\mu_{\gamma*}$ – постоянные, то условие (2.3) утверждения 2 оказываются выполненными, а сами уравнения (1.8), (1.3) при $\mathbf{K}_* = 0$ являются вполне интегрируемыми [28] (см. также [29–31]).

Замечание 7. Инвариантные многообразия в упомянутом интегрируемом случае изучались в [32].

Замечание 8. Изучаемые уравнения посредством преобразования Лежандра в общем случае приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned}$$

с функцией Гамильтона

$$H(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, t) = f(t)H(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$$

Для таких систем замена независимой переменной $t \mapsto t_*$ вида (1.6) выглядит вполне естественной и очевидной.

5. Краткие исторические замечания и возможные направления дальнейших исследований. Системы подобно-деформируемых тел, исследование движения которых восходит к публикации Д.Н. Зейлигера [33], при соответствующем выборе относятся к системам рассматриваемого класса.

Исследования таких систем, продолженные Н.Г. Четаевым [34] (см. также [35]), получили развитие в ряде работ, посвященных решению задач теории групп, дифференциальной геометрии и математической физики [36–39].

Исследования применимости моментов инерции, зависящих от времени, к управлению ориентацией спутников восходят, вероятно, к публикациям [40, 41]. Примеры использования особенностей динамики тел с моментами инерции, зависящими от времени, применительно к задачам орбитальной динамики обсуждаются в [42].

Для аффинно-деформируемых тел рассматриваемого класса характерно изменение со временем тензора инерции. Вместе с тем, как видно из формулировки утверждения 1, вопрос о распространении полученных результатов на случай зависящего от времени гиросtatического момента остается открытым. Исследования таких систем, восходящие, вероятно, к публикации [43], посвященной перманентным вращениям уравновешенного неавтономного гиростата, ведутся довольно интенсивно. Так изучались [44] маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиросtatическим моментом, регулярные прецессии гиростата с переменным гиросtatическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [45–47], инвариантные соотношения уравнений движения такого гиростата [48]. Полученные результаты были изложены в труднодоступной монографии [5]. Дальнейшие исследования были сосредоточены на разработке подходов к исследованию гиростатов с переменным гироскопическим моментом [49] и на изучении различных частных решений их уравнений движения [50–54].

Также заметим, что в вышеприведенных рассуждениях молчаливо предполагается неизменность массы изучаемой системы. Между тем, задачи о движении тела переменной массы также заслуживают внимания (см., напр., [55, 56]). При этом источниками изменения массы и формы могут быть, например, как испарение и сублимация, так и налипание пыли. Общие подходы к исследованию таких систем предложены в [57].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005. 576 с.
2. *Burov A.A., Chevallier D.P.* On motion of a rigid body about a fixed point with respect to a rotating frame // *R&C Dyn.* 1998. V. 3. № 1. P. 66–76. DOI: RD1998v003n01ABEH000061
3. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 544 с.
4. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиросtatическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ Ин-т прикл. матем. и мех., 2017. 250 с.
6. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТТЛ, 1953. 288 с.
7. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалёв А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 402 с.
8. *Yehia H.M.* Rigid BODY DYNAMICS. A Lagrangian Approach. Switzerland AG: Springer Nature, 2022. 460 p.
9. *Козлов В.В.* Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера–Пуансо // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех.* 1976. № 6. С. 99–104.
10. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление, решение и несуществование интеграла в динамике твердого тела // *Тр. ММО.* 1980. Т. 41. С. 287–303.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // *УМН.* 1983. Т. 38 (229). Вып. 1. С. 3–67.
12. *Yehia H.M.* New integrable cases in dynamics of rigid bodies // *Mech. Res. Com.* 1986. V. 13. Iss. 3. P. 169–172.
13. *Яхья Х.М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех.* 1987. № 4. С. 88–90.
14. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 149. Вып. 2. С. 292–294.
15. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // *Вест. Моск. ун-та.* 1963. № 3. С. 60–71.
16. *Gavrilov L.* Non-integrability of the equations of heavy gyrostат // *Compos. Math.* 1992. Т. 82. № 3. P. 275–291.

17. *Каток С.Б.* Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // УМН. 1972. Т. 27. Вып. 2. С. 126–132.
18. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Теор. и приложн. мех. София. 1974. Т. 5. № 4. С. 55–70.
19. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 616–627.
20. *Татаринов Я.В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1974. № 6. С. 99–105.
21. *Gashenchenko I.N., Richter P.H.* Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies // Int. J. Bifur. & Chaos. 2004. V. 14. № 08. P. 2525–2553.
22. *Каранетян А.В.* Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 221–224.
23. *Анчев А.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
24. *Elise A., Arribas M., Riaguas A.* Complete analysis of bifurcations in the axial gyrostat problem // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 587–601. DOI: 10.1088/0305-4470/30/2/021
25. *Гашененко И.Н.* Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата // Нелин. дин. 2005. Т. 1. № 1. С. 33–52. DOI: 10.20537/nd0501003
26. *Iñarraea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elise A.* On the stability of a class of permanent rotations of a heavy asymmetric gyrostat // R&C Dyn. 2017. V. 22. P. 824–839. DOI: 10.1134/S156035471707005X
27. *Холостова О.В.* Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. Ижевск: ИКИ, 2016. 308 с.
28. *Vogoyavlensky O.I.* New integrable problem of classical mechanics // Comm. in Math. Phys. 1984. V. 94. P. 255–269. DOI: 10.1007/BF01209304
29. *Brun F.* Rotation kring fix punkt // Ofversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Forhadl. Stockholm. 1893. V. 7. P. 455–468.
30. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. II // Ark. Mat. Ast. Fys. 1907. V. 4. № 4. S. 1–4.
31. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. III // Ark. Mat. Ast. Fys. 1910. V.6. № 5. S. 1–10.
32. *Каранетян А.В.* Инвариантные множества в задаче Клебша–Тиссерана: существование и устойчивость // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 959–964.
33. *Зейлигер Д.Н.* Теория движения подобно-изменяемого тела. Казань: тип. Казанского Императорского ун-та, 1892. 105 с.
34. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела // Учен. зап. Казан. ун-та. 1954. V. 114. Казань: Казанский гос. ун-т. С. 5–7.
35. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с.
36. *Stawianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM. 1982. V. 62. № 6. P. 229–240. DOI: 10.1002/zamm.19820620604
37. *Stawianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $GL(n, \mathbf{R})$ // Rep. on Math. Phys. 1988. V. 26. Iss. 1. P. 73–119. DOI: 10.1016/0034-4877(88)90006-7
38. *Stawianowski J.J., Kovalchuk V., Gołubowska B., Martens A., Rożko E.E.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // J. Math. Anal. & Appl. 2017. V. 446. Iss. 1. P. 493–520. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.08.042
39. *Burov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Rep. on Math. Phys. 2008. V. 62. Iss. 3. P. 283–321. DOI: 10.1016/S0034-4877(09)00003-2
40. *Iñarraea M., Lanchares V.* Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia // Int. J. Bifur.&Chaos. 2000. V. 10. № 05. P. 997–1018. DOI: 10.1142/S0218127400000712
41. *Iñarraea M., Lanchares V., Rothos V.M., Salas J.P.* Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag // Int. J. Bifur.&Chaos. 2003. V. 13. № 02. P. 393–409. DOI: 10.1142/S0218127403006613
42. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // Celest. Mech. & Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art № 1. DOI: 10.1007/s10569-018-9874-0

43. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 875–876.
44. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Мех. твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. 2009. Вып. 39. С. 42–49.
45. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Мех. твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. 2010. Вып. 40. С. 91–104.
46. Мазнев А.В. Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАНУ. 2011. № 8. С. 66–72.
47. Горр Г.В., Мазнев А.В. О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 2. С. 369–376. DOI: 10.20537/nd1202011
48. Горр Г.В., Мазнев А.В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента // Дин. сист. 2012. Т. 2 (30). № 1; 2. С. 23–32.
49. Горр Г.В. Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 102–115. DOI: 10.35634/vm210108
50. Горр Г.В., Белоконь Т.В. О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 2. С. 139–151. DOI: 10.31857/S0032823521020053
51. Ткаченко Д.Н. Новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Мех. твердого тела. 2021. Вып. 51. С. 34–43.
52. Данилюк Д.А. Об одном решении уравнений Кирхгофа–Пуассона в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Мех. твердого тела. 2021. Вып. 51. С. 44–56.
53. Данилюк Д.А., Ткаченко Д.Н. Новое решение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Ж. теоретич. и прикл. мех. 2022. № 1 (78). С. 5–15. DOI: 10.24412/0136-4545-2022-1-5-15
54. Горр Г.В. Об одном классе полурегулярных прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 115–124. DOI: 10.31857/S0572329922600414
55. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass (Stability and Control: Theory, Methods and Applications) Routledge. 1998. 252 p. DOI: 10.1201/9780203759066
56. Ong J.J., O'Reilly O.M. On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Engng Sci. 2004. V. 42. Iss. 19–20. P. 2159–2174. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2004.07.010
57. Irschik H., Humer A. A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // in: Dyn. Mech. Syst. with Variable Mass. Int. Centre for Mech. Sci. Courses and Lectures. 2014. V. 557. P. 1–50.

Motion of a Variable Body with a Fixed Point in a Time-dependent Force Field

A. A. Burov^{a, #}

^aFederal Research Center “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: jtm@narod.ru

The problem of motion around a fixed point of a variable body in a time-dependent force field is considered. The conditions under which the equations of motion are reduced to the classical Euler–Poisson equations describing the motions of a rigid body in the field of attraction are indicated. The problems of the existence of the first integrals and the stability of steady motions are discussed.

Keywords: motion of a variable body with a fixed point, time-dependent force field, change of time, change of variable, existence of integrable cases, nonintegrability of equations of motion, existence of steady motions, bifurcation diagrams

REFERENCES

1. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos. Moscow: Inst. Comp. Sci., 2005. 576.
2. *Burov A.A., Chevallerier D.P.* On motion of a rigid body about a fixed point with respect to a rotating frame // *R&C Dyn.*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 66–76. DOI: RD1998v003n01ABEH000061
3. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. Volume seconda. Parte seconda. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Bologna: N. Zanichelli, 1950.
4. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977.
5. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* Movement of a Gyrostat with a Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Inst. Appl. Math. & Mech., 2017. 250 p. (in Russian)
6. *Golubev V.V.* Lectures on the Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point. Moscow: Gostekhizdat, 1953.
7. *Gasheneko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems of Rigid Body Dynamics. Kyiv: Nauk. Dumka, 2012. 402 p. (in Russian)
8. *Yehia H.M.* Rigid Body Dynamics. A Lagrangian Approach. Switzerland AG: Springer Nature, 2022. 460 p.
9. *Kozlov V.V.* Splitting of the Separatrices in the Perturbed Euler–Poinsot Problem // *MSU Bull. Ser. I: Math., Mech.*, 1976, vol. 31, pp. 99–104.
10. *Ziglin S.L.* Splitting of separatrices, branching solutions and non-existence of an integral in the dynamics of a rigid body // *Proc. Moscow Math. Soc.*, 1980, vol. 41, pp. 287–303.
11. *Kozlov V.V.* Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // *Rus. Math. Surv.*, 1983, vol. 38, iss. 1, pp. 1–76. DOI: 10.1070/RM1983v038n01ABEH003330
12. *Yehia H.M.* New integrable cases in dynamics of rigid bodies // *Mech. Res. Com.*, 1986, vol. 13, iss. 3, pp. 169–172.
13. *Yehia H.M.* New integrable cases in the problem of motion of a gyrostat // *MSU Bull. Ser. I: Math., Mech.*, 1987, vol. 42, no. 4, pp. 29–31.
14. *Sretensky L.N.* On some cases of integrability of the equations of motion of a gyrostat // *Dokl. AN SSSR*, 1963, vol. 149, iss. 2, pp. 292–294.
15. *Sretensky L.N.* On some cases of motion of a heavy rigid body with a gyroscope // *MSU Bull.*, 1963, no. 3, pp. 60–71.
16. *Gavrilov L.* Non-integrability of the equations of heavy gyrostat // *Compos. Math.*, 1992, vol. 82, no. 3, pp. 275–291.
17. *Katok S.B.* Bifurcation sets and integral manifolds in the problem of motion of a heavy rigid body // *Usp. Math. Nauk*, 1972, vol. 27, pp. 126–132.
18. *Rubanovsky V.N.* On bifurcation and stability of permanent rotations of a heavy rigid body with one fixed point // *Theory&Appl., Mech.*, Sofiya, 1974, vol. 5, no. 4, pp. 55–70.
19. *Rubanovskii V.N.* On bifurcation and stability of stationary motions in certain problems of dynamics of a solid body // *JAMM*, vol. 38, no. 4, 1974, pp. 573–584.
20. *Tatarinov Ya.V.* Portraits of classical integrals of the problem of rotation of a rigid body around a fixed point // *MSU Bull. Ser. Math., Mech.*, 1974, no. 6, pp. 99–105.
21. *Gasheneko I.N., Richter P.H.* Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies // *Int. J. Bifur.&Chaos.*, 2004, vol. 14, no. 8, pp. 2525–2553.
22. *Karapetyan A.V.* Invariant sets in the Goryachev–Chaplygin problem: existence, stability and branching // *JAMM*, 2006, vol. 70, iss. 2, pp. 195–198.
23. *Anchev A.* Permanent rotations of a heavy gyrostat having a stationary point // *JAMM*, 1967, vol. 31, iss. 1, pp. 48–58.
24. *Elipe A., Arribas M., Riaguas A.* Complete analysis of bifurcations in the axial gyrostat problem // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1997, vol. 30, pp. 587–601. DOI: 10.1088/0305-4470/30/2/021
25. *Gasheneko I.N.* Bifurcations of the integral manifolds in the problem on motion of a heavy gyrostat // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2005, vol. 1, no. 1, pp. 33–52.

26. *Iñarraea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* On the stability of a class of permanent rotations of a heavy asymmetric gyrostat // *R&C Dyn.*, 2017, vol. 22, pp. 824–839.
DOI: 10.1134/S156035471707005X
27. *Kholostova O.V.* Problems of the Dynamics of Rigid Bodies with a Vibrating Suspension. Izhevsk: IKI, 2016. 308 p. (in Russian)
28. *Bogoyavlensky O.I.* New integrable problem of classical mechanics // *Comm. in Math. Phys.*, 1984, vol. 94, pp. 255–269. DOI: 10.1007/BF01209304
29. *Brun F.* Rotation kring fix punkt // *Ofversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Forhadl. Stockholm*, 1893, vol. 7, pp. 455–468.
30. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. II // *Ark. Mat. Ast. Fys.*, 1907, vol. 4, no. 4, S. 1–4.
31. *Brun F.* Rotation kring fix punkt. III // *Ark. Mat. Ast. Fys.*, 1910, vol. 6, no. 5, S. 1–10.
32. *Karapetyan A.V.* Invariant sets in the Clebsch–Tisserand problem: Existence and stability // *JAMM*, 2006, vol. 70, iss. 6, pp. 859–864.
33. *Seiliger D. N.* Theory of motion of a similarly variable body. Kazan’: Typo-lithography of Kazan’, 1892.
34. *Chetaev N.G.* On the equations of motion of a similarly variable body. // *Uch. Zap. Kazan. Univ.*, 1954, vol. 114, pp. 5–7.
35. *Chetaev N.G.* Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1987. 368 p.
36. *Ślawianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // *ZAMM*, 1982, vol. 62, no. 6, pp. 229–240. DOI: 10.1002/zamm.19820620604
37. *Ślawianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $GL(n\mathbb{R})$ // *Rep. on Math. Phys.*, 1988, vol. 26, iss. 1, pp. 73–119. DOI: 10.1016/0034-4877(88)90006-7
38. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Gołubowska B., Martens A., Rožko E.E.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // *J. Math. Anal.&Appl.*, 2017, vol. 446, iss. 1, pp. 493–520. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.08.042
39. *Burov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // *Rep. on Math. Phys.*, 2008, vol. 62, iss. 3, pp. 283–321. DOI: 10.1016/S0034-4877(09)00003-2
40. *Iñarraea M., Lanchares V.* Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia // *Int. J. Bifur.&Chaos*, 2000, vol. 10, no. 05, pp. 997–1018. DOI: 10.1142/S0218127400000712
41. *Iñarraea M., Lanchares V., Rothos V.M., Salas J.P.* Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moments of inertia and viscous drag // *Int. J. Bifur.&Chaos*, 2003, vol. 13, no. 02, pp. 393–409. DOI: 10.1142/S0218127403006613
42. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, Art. No. 1.
DOI: 10.1007/s10569-018-9874-0
43. *Druzhinin E.I.* The permanent rotations of a balanced non-autonomous gyrostat // *JAMM*, 1999, vol. 63, iss. 5, pp. 825–826.
44. *Volkova O.S., Gashenenko I.N.* Pendulum rotations of a heavy gyrostat with variable gyrostatic moment // *Mech. Solid Body*, 2009, iss. 39, pp. 42–49.
45. *Maznev A.V.* Precessional movements of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces // *Mech. Solid Body*, 2010, iss. 40, pp. 91–104.
46. *Maznev A.V.* Regular precession of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces // *Dokl. NASU*, 2011, no. 8, pp. 66–72.
47. *Gorr G. V., Maznev A.V.* About motion of symmetric gyrostat with a variable gyrostatic moment in two tasks of dynamics // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 369–376.
48. *Gorr G.V., Maznev A.V.* On two linear invariant relations for the equations of motion of a gyrostat in the case of a variable gyrostatic moment // *Dyn. Syst.*, 2012, vol. 2 (30), no. 1; 2, pp. 23–32.
49. *Gorr G.V.* On one approach to studying the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment // *Vestn. Udmurt. Univ. Math. Fur. Computer. Sci.*, 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 102–115.
50. *Gorr G.V., Belokon T.V.* On solutions of the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1157–1166.

51. *Tkachenko D.N.* New solution to the equations of motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces // *Mech. Solid Body*, 2021, iss. 51, pp. 34–43.
52. *Danilyuk D.A.* On one solution of the Kirchhoff–Poisson equations in the problem of the motion of a gyrostat with a variable gyrostatic moment // *Mech. Solid Body*, 2021, iss. 51, pp. 44–56.
53. *Danilyuk D.A., Tkachenko D.N.* New solution to the equations of motion of a gyrostat with variable gyrostatic under the action of potential and gyroscopic forces // *J. Theor.&Appl. Mech.*, 2022, no. 1 (78), pp. 5–15.
54. *Gorr G.W.* On a class of semi-regular gyrostat precessions with variable gyrostatic moment // *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 2, pp. 475–482.
55. *Cveticanin L.* *Dynamics of Machines with Variable Mass (Stability and Control: Theory, Methods and Applications)*. Routledge. 1998. 252 p. DOI: 10.1201/9780203759066
56. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // *Int. J. Engng Sci.*, 2004, vol. 42, iss. 19–20, pp. 2159–2174. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2004.07.010
57. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // in: *Dyn. Mech. Syst. with Variable Mass*. Int. Centre for Mech. Sci. Courses and Lectures, 2014, vol. 557, pp. 1–50.

УДК 531.38

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. Вин Ко Ко^{1,*}, А. Н. Темнов^{1,**}¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: win.c.latt@gmail.com

**e-mail: antt45@mail.ru

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 15.09.2023 г.

В статье рассмотрена задача о нелинейных колебаниях жидкостей, полностью заполняющих осесимметричный цилиндрический сосуд, совершающий движение вокруг горизонтальной оси. Движение каждой жидкости предполагается потенциальным. Приведена оценка влияния нелинейных коэффициентов на динамические характеристики процессов при вращательных движениях сосуда. Рассмотрен случай вынужденных угловых колебаний сосуда с жидкостями относительно неподвижной оси. В статье приведено приближенное решение нелинейных уравнений, полученное методом Бубнова–Галёркина, а также выявлены основные нелинейные эффекты, связанные с вращением поверхности раздела жидкостей. Приведены амплитудно-частотные характеристики и области устойчивости движений двухслойной жидкости при вынужденных угловых колебаниях круглого цилиндрического сосуда.

Ключевые слова: механическая система, цилиндрическая полость, гидродинамические коэффициенты, основной резонанс, возмущенная поверхность, вращательное движение

DOI: 10.31857/S0032823523060103, EDN: YDLUQT

1. Введение. Для описания многих физических систем, требуется создание нелинейных математических моделей. К ним относится и рассматриваемая далее механическая система, состоящая из твердого тела, полость которого полностью заполнена двумя несмешивающимися жидкостями.

Задача о движении такого тела, в линейной постановке рассматривалась многими авторами. В частности, исследовалась [1, 2] проблема о движениях двухслойной тяжелой жидкости. Была решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости. Решена задача о колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и скрепленного упругой связью с неподвижным основанием.

В статье [3] показано качественное отличие движений твердого тела с полостью, целиком наполненной двумя жидкостями от аналогичных случаев движений твердого тела с одной однородной жидкостью, рассмотренное Н.Е. Жуковским [4]. Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, рассмотрены в книгах [5–7].

Изучена [8] задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей (нижняя жидкость считалась вязкой, а верхняя идеальной), частично заполняющих неподвижный сосуд.

Исследованы [9] нелинейные задачи динамики однородной жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Выведены [10] частотные уравнения собственных колебаний двухслойной жидкости в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на “свободной” и внутренних поверхностях жидкости.

Были исследованы [11–15] нелинейные эффекты колебаний двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объем и построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке при поступательных и угловых движениях. При проведении экспериментов [16] с жидкостями, полностью заполняющими круглый цилиндрический бак, вблизи основного резонанса были зафиксированы особенности нелинейных движений поверхности раздела слоев жидкостей, подобные движениям свободной поверхности однородной жидкости.

Рассмотрены [17] свободные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде. Представлена [18] регуляризация баротропных гравитационных волн в двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. Следует также отметить статьи по нелинейным колебаниям двух жидкостей [19, 20], в которых кроме теоретических результатов приведено исследование на экспериментальной установке, состоящей из осциллирующего бака, наполненного двумя несмешивающимися жидкостями. Математическая модель в этих работах получена в результате применения вариационного подхода Лагранжа.

Целью настоящей работы является дальнейшее исследование нелинейных колебательных движений двух жидкостей в цилиндрической полости твердого тела, совершающего угловые колебания.

2. Постановка задачи. Рассмотрим круглый цилиндрический сосуд, полностью заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, и совершающий колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси O^*Y (рис. 1). С твердым телом свяжем систему координат O^*XYZ и расположим ось O^*X так, чтобы в невозмущенном положении механической системы тело–жидкости ось O^*X была перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 . Движение твердого тела вокруг оси O^*Y будем описывать угловой координатой θ и вектором угловой скорости вращения $\vec{\omega}_2$ так, что $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{j}$, $\theta(t) = \theta_0 \sin pt$.

Введем также переносную систему координат $Oxyz$, с началом, в середине невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 , $\vec{R} = H\vec{i} + \vec{r}$, где H – расстояние от оси вращения до поверхности раздела жидкостей, \vec{R} – радиус-вектор, проведенный из точки O^* ; \vec{g} – ускорение свободного падения.

Жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми, остальные обозначения ясны из рис. 1. Вектор абсолютной скорости произвольной точки бака имеет вид

$$\vec{V}_a = \vec{\omega}_2 \times \vec{R} \quad (2.1)$$

Предположим, что движение каждой жидкости потенциальное, удовлетворяет уравнениям Лапласа, граничным условиям непротекания на смачиваемых поверхностях, кинематическим условиям и динамическим условиям на поверхности раздела (см. [13]).

Используя цилиндрическую систему координат $Ox\eta$, потенциалы скоростей $\Phi^{(k)}$ каждой жидкости можно записать в виде рядов Фурье

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t) B_i^{(k)}(x, r, \eta) \quad (k = 1, 2), \quad (2.2)$$

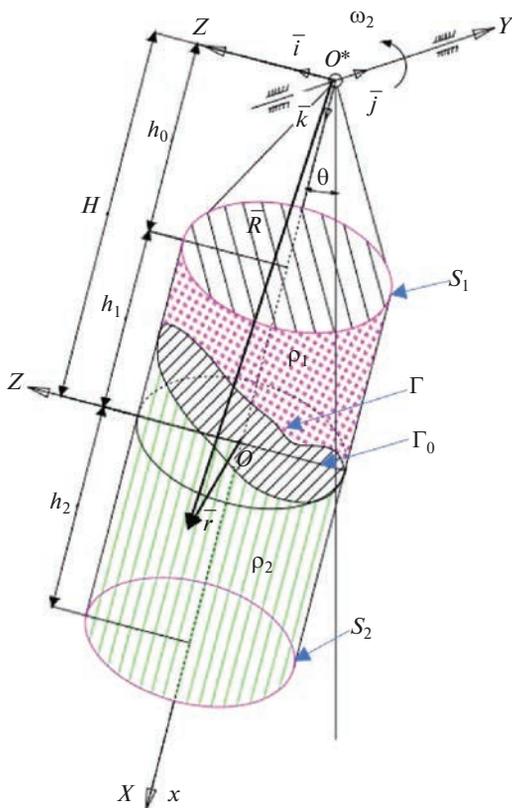


Рис. 1. Геометрия задачи и системы координат.

где $A^{(k)}$ и $B_i^{(k)}$ – гармонические скалярные функции, коэффициенты α_i – функции времени, подлежащие определению (обобщенные координаты i -й гармоники). Верхние индексы k принимают значения 1 и 2, и относятся соответственно к верхней и нижней жидкостям. Определение функций $A^{(k)}$, $B_i^{(k)}$ подробно приведено в предыдущих работах авторов [12, 13].

3. Вынужденные угловые колебания цилиндрического сосуда с двухслойной жидкостью. Ранее были изучены нелинейные колебания жидкостей в сосудах, совершающих вынужденные поступательные движения [12]. При этом были выявлены основные нелинейные эффекты, связанные с вращением диаметра поверхности раздела жидкостей. Для того чтобы оценить влияние остальных нелинейных коэффициентов на характеристики динамических процессов при конечных вращательных движениях сосуда рассмотрим другой частный случай движения, а именно случай вынужденных угловых колебаний сосуда с жидкостями, закрепленного относительно неподвижной оси и находящегося в поле тяжести.

Проекции ускорения и угловых скоростей на оси связанной системы координат будут равны

$$g_x = g_0 \cos \theta, \quad g_y = 0, \quad g_z = g_0 \sin \theta \tag{3.1}$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \dot{\theta}, \quad \omega_z = 0 \tag{3.2}$$

Согласно исходным предпосылкам о порядке малости величин угловых скоростей будем пренебрегать слагаемыми пропорциональными θ^3 , как малыми величинами порядка ε^2 . В связи с этим квадрат парциальной частоты σ^2 , пропорциональный g , и боковое ускорение можно с точностью до малых высшего порядка представить в следующем виде

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2\right), \quad g_z = g_0 \theta \quad (3.3)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\omega_{nm}^2 (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 f_{nm} + \rho_1)}, \quad \omega_{nm}^2 = g k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h_1, \quad \bar{f}_{nm} = \operatorname{th} k_{nm} h_1 \operatorname{cth} k_{nm} h_2 \quad (3.4)$$

Тогда система уравнений для обобщенных координат $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \beta$, при возбуждении основной моды колебаний поверхности раздела жидкостей примет вид [13]

$$L_1(\alpha, \beta) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha - d_0 \ddot{\theta} + d_1 (\alpha^2 \ddot{\alpha} + \alpha \dot{\alpha}^2 + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \dot{\beta}^2) + (d_3 \alpha^2 - d_4 \beta^2) \ddot{\theta} + \\ + d_2 (\beta^2 \ddot{\alpha} + 2\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\beta} - 2\alpha \dot{\beta}^2) - (d_3 + 3d_4) \beta \dot{\beta} \dot{\theta} - d_5 \alpha \dot{\theta}^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$L_2(\alpha, \beta) = \ddot{\beta} + \sigma^2 \beta + d \ddot{\theta} + d_1 (\alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta^2 \ddot{\beta} + \beta \dot{\alpha}^2 + \beta \dot{\beta}^2) + (d_3 + d_4) \alpha \beta \ddot{\theta} + \\ + d_2 (-\alpha \beta \ddot{\alpha} + \alpha^2 \ddot{\beta} - 2\beta \dot{\alpha}^2 + 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta}) + (d_3 + 3d_4) \beta \dot{\alpha} - d_6 \beta \dot{\theta}^2 = 0, \quad (3.6)$$

где $d = \lambda/\mu$, $d_0 = \lambda_0/\mu$, $d_1 = \mu_1/\mu$, $d_2 = \mu_2/\mu$, $d_3 = \lambda_3/\mu$, $d_4 = \lambda_2/\mu$, $d_5 = J_1/\mu$, $d_6 = J_2/\mu$.

Постоянные коэффициенты, выражающиеся через параметры первой и второй жидкостей [11, 13]

$$\mu = \mu^{(2)} - \mu^{(1)}, \quad \mu_i = \mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)}, \quad \lambda = \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}, \quad \lambda_0 = \lambda_0^{(2)} - \lambda_0^{(1)}, \quad J_i = J_i^{(2)} - J_i^{(1)},$$

$$\mu^{(k)} = \rho_k \frac{\delta_{11}^{(k)}}{\ell_{11}^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \rho_k r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2}, \quad \lambda_0^{(i)} = \rho_i r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2} \left[(h_0 + h_2) + \frac{2r_0}{\xi_{11}} \operatorname{th} (k_{11} h_i / 2) \right],$$

$$\mu_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left[6Y_{11}^{\prime 2} + \left(\frac{2}{r^2} - 3k_{11}^2 \right) Y_{11}^2 \right] Y_{11} +$$

$$+ \sum_n \frac{4c_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} \left(Y_{n0} Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11} \right) + \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} \left[Y_{n2} Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11} \right] \} Y_{11} r dr,$$

$$\mu_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left[2Y_{11}^{\prime 2} - \left(\frac{2}{r^2} + k_{11}^2 \right) Y_{11}^2 \right] Y_{11} +$$

$$+ \sum_n \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} \left[Y_{n2} Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11} \right] \} Y_{11} r dr,$$

$$J^{(1)} = \rho_1 r_0^2 \pi \left[\frac{(H + h_1)^3}{3} - \frac{(h_0 + h_2)^3}{3} - \frac{3}{4} h_1 r_0^2 - r_0^3 \frac{16}{\xi_{11}^3 (\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th} (k_{11} h_1 / 2) \right],$$

$$J^{(2)} = \rho_2 r_0^2 \pi \left[\frac{(h_0 + h_2)^3}{3} - \frac{h_0^3}{3} - \frac{3}{4} h_2 r_0^2 + r_0^3 \frac{16}{\xi_{11}^3 (\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th} (k_{11} h_2 / 2) \right]; \quad i = 1, 2.$$

В уравнениях (3.5), (3.6) параметр β характеризует деформацию поверхности раздела жидкостей в плоскости перпендикулярной плоскости колебаний сосуда. Пусть сосуд совершает угловые колебания по закону

$$\theta = \theta_0 \cos pt \tag{3.7}$$

Если параметрический резонанс отсутствует в рассматриваемом случае, т.е. $\beta \equiv 0$, то вынужденные угловые колебания системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha, \beta) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha - d_0 \ddot{\theta} + d_1 (\alpha^2 \ddot{\alpha} + \alpha \dot{\alpha}^2) + d_3 \alpha^2 \ddot{\theta} - d_5 \alpha \dot{\theta}^2 = 0 \tag{3.8}$$

Приближенное решение этого уравнения, найденное методом Бубнова–Галёркина [6], можно представить в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kpt + \bar{\alpha}_k \sin kpt), \tag{3.9}$$

где α_k и $\bar{\alpha}_k$ – неизвестные постоянные.

Удержав в (3.9) только основные гармоники

$$\alpha(t) = A \cos pt + \bar{A} \sin pt, \tag{3.10}$$

получим уравнение

$$d_0 \theta_0 + \left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{1}{4} d_3 \theta_0^2 A - \frac{3}{4} d_3 \theta_0 A^2 - \frac{1}{2} d_1 A^3 = 0, \quad \bar{A} \equiv 0, \tag{3.11}$$

где $\bar{p}^2 = p^2 / \sigma^2$.

Уравнение зависимости амплитуд свободных колебаний двухслойной жидкости от частот колебаний (скелетная линия) может быть получено из уравнения (3.11) при $\theta_0 = 0$,

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{d_1}{2} A^3 = 0 \tag{3.12}$$

Проведем исследование устойчивости полученного стационарного решения системы, предположив

$$\bar{\alpha}(t) = A \cos pt, \quad \bar{\beta}(t) \equiv 0 \tag{3.13}$$

Рассмотрим возмущенное движение системы

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) + \xi(t), \quad \beta(t) = \bar{\beta}(t) + \eta(t) \tag{3.14}$$

Начальные условия для функций $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ достаточно мало отличаются друг от друга. Такие движения будем называть возмущенными, а величины $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – возмущениями. Движение называется устойчивым по Ляпунову, если малые изменения в начальных условиях достаточно мало отклоняют систему от невозмущенного движения. Уменьшая начальные возмущения, можно сделать отклонения при $t > t_0$ сколь угодно малыми.

Подставляя (3.14) в (3.5)–(3.6) и, учитывая, что $\bar{\alpha}(t)$ является частным решением (3.8), получаем уравнения возмущенного движения системы в виде

$$(1 + d_1 \bar{\alpha}^2) \ddot{\xi} + 2d_1 \bar{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\xi} + (\sigma^2 + d_1 (2\bar{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - d_5 \bar{\alpha}^2 + 2d_3 \bar{\alpha} \ddot{\theta}) \xi + \bar{\sigma} (\xi, \eta, \theta) = 0 \tag{3.15}$$

$$(1 + d_2 \bar{\alpha}^2) \dot{\eta} + 2d_2 \bar{\alpha} \dot{\bar{\alpha}} \dot{\eta} + (\sigma^2 + c \bar{\alpha} \ddot{\alpha} + k_3 \bar{\alpha}^2 + k_4 \bar{\alpha} \dot{\theta} + k_5 \bar{\alpha} \ddot{\theta} - d_2 \dot{\theta}^2) \eta + \bar{d}(\xi, \eta, \theta) = 0 \quad (3.16)$$

Оставляя в уравнениях (3.15) и (3.16) только линейные члены, с учетом (3.13) приходим к уравнениям первого приближения

$$L_3(\xi) = (p' + q \cos \Omega t) \dot{\xi} - \varepsilon_1 \dot{\xi} \sin \Omega t + (\gamma - \delta \cos \Omega t) \xi = 0 \quad (3.17)$$

$$L_4(\eta) = (\bar{p} + \bar{q} \cos \Omega t) \dot{\eta} - \varepsilon \dot{\eta} \sin \Omega t + (\bar{\gamma} - \bar{\delta} \cos \Omega t) \eta = 0 \quad (3.18)$$

Здесь для удобства написания решения в дальнейшем были приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} d_1 A^2, \quad p' = 1 + q, \quad \varepsilon_1 = d_1 p A^2, \quad \bar{q} = \frac{1}{2} d_2 A^2, \quad \varepsilon = d_2 p A^2, \quad \bar{p} = 1 + \bar{q} \\ \gamma &= \sigma^2 - \left[\frac{1}{2} d_1 A^2 - d_3 A \theta_0 - \frac{1}{2} d_5 \theta_0^2 \right] p^2, \quad \delta = \left[\frac{3}{2} d_1 A^2 + d_3 A \theta_0 + \frac{1}{2} d_5 \theta_0^2 \right] p^2 \\ k_4 &= d_3 + 3d_4, \quad k_5 = d_3 + d_4, \quad c = d_1 - d_2 \\ \bar{\gamma} &= \sigma^2 - \frac{1}{2} \left[d_2 A^2 - d_4 A \theta_0 - d_5 \theta_0^2 \right] p^2, \quad k_3 = d_1 - 2d_2 \\ \bar{\delta} &= \left[A^2 \left(d_1 - \frac{3}{2} d_2 \right) + (d_3 + 2d_4) A \theta_0 - \frac{1}{2} d_6 \theta_0^2 \right] p^2, \quad \Omega = 2p \end{aligned} \quad (3.19)$$

Переходим к построению областей неустойчивости решений уравнений (3.17)–(3.18). Рассмотрим сначала уравнение (3.17) относительно функции $\xi(t)$, характеризующее возмущение периодического решения $\bar{\alpha}(t) = A \cos pt$. Амплитуда A этого решения определяется уравнением (3.11). Установим, какая пара значений A и p , приводит к устойчивым решениям и какая пара к неустойчивым. Имея в виду построение основной области неустойчивости решения уравнения (3.17), представим его в виде

$$\xi(t) = a_1 \cos pt + b_1 \sin pt \quad (3.20)$$

Воспользовавшись методом Бубнова–Галёркина [6],

$$\int_0^{2\pi/p} L_3(\xi) \cos pt \, dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/p} L_3(\xi) \sin pt \, dt = 0, \quad (3.21)$$

после интегрирования получим следующие соотношения, в которых отражены границы области неустойчивости

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{3}{2} \left(d_1 A^3 + d_3 \theta_0 A^2 + \frac{3}{2} d_5 \theta_0^2 A \right) = 0 \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{1}{2} \left(d_1 A^3 + d_3 \theta_0 A^2 + \frac{1}{2} d_5 \theta_0^2 A \right) = 0 \quad (3.23)$$

Из уравнения (3.22), (3.23) получаем левую и правую границы динамической неустойчивости исходной формы основной моды колебаний поверхности раздела (линии АМО и АВ).

Далее рассмотрим второе уравнение (3.18) в вариациях относительно возмущения $\eta(t)$ тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$. Исследование решений уравнения (3.18) дает ответ на вопрос об устойчивости тривиального решения. В соответствии с изложенным выше, областям неустойчивости уравнения (3.18) отвечают области параметрически возбуждаемых колебаний ($\beta \neq 0$), т.е. области динамической неустойчивости режима движения (3.11). Для построения основной области неустойчивости положим

$$\eta(t) = a_0 \cos pt + b_0 \sin pt \quad (3.24)$$

Подставляя выражения (3.24) в уравнения (3.25) и применяя метод Бубнова–Галёркина [6], получаем следующие соотношения для определения границ областей динамической устойчивости:

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1\right)A + \left(\frac{1}{2}d_1 - 2d_2\right)A^3 + \left(\frac{1}{2}d_3 + 2d_4\right)\theta_0 A^2 - \frac{3}{4}d_6\theta_0^2 A = 0 \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1\right)A - \frac{1}{2}d_1 A^3 - \frac{1}{2}d_3\theta_0 A^2 - \frac{1}{4}d_6\theta_0^2 A = 0 \quad (3.26)$$

Уравнения (3.25), (3.26) описывают левую и правую границы параметрически возбуждаемых колебаний (линии ADE и AJ).

Рассмотрим теперь вопрос о построении установившихся режимов движения жидкостей, происходящих в основной области динамической неустойчивости. Предположим, что в области основного резонанса приближенное решение системы нелинейных уравнений (3.17)–(3.18) можно представить в виде

$$\alpha(t) = A \cos pt + \bar{A} \sin pt, \quad \beta(t) = \bar{B} \cos pt + B \sin pt \quad (3.27)$$

Используя метод Бубнова–Галёркина для постоянных A, B ($\bar{A} = 0, \bar{B} = 0$), получаем следующие алгебраические соотношения:

$$-\frac{1}{2}d_1 A B^2 + \left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 - \frac{3}{4}d_6\theta_0^2\right)A + \left(\frac{1}{2}d_3 + 2d_4\right)\theta_0 A^2 + \left(\frac{1}{2}d_1 - 2d_2\right)A^3 = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{1}{2}d_1 - 2d_2\right)A + \frac{1}{4}(d_3 + 3d_4)\theta_0\right)B^2 + \left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 - \frac{1}{4}d_5\theta_0^2\right)A - \\ &-\frac{1}{4}(3d_3 - d_4)\theta_0 A^2 - \frac{1}{2}d_1 A^3 + d_0\theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Исключив B^2 из (3.29) и подставляя результат в выражение (3.28), находим уравнение для определения амплитудно-частотных характеристик в области динамической неустойчивости

$$\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 = &4d_2 \left(1 - 2\frac{d_2}{d_1}\right)A^3 - \left[\left(1 - 4\frac{d_2}{d_1}\right)\left(\frac{3}{2}d_3 + 5d_4\right) - \frac{1}{4}(3d_3 - d_4)\right]A^2\theta_0 - \\ &- \left[\frac{d_3 + 3d_4}{2d_1}\left(\frac{1}{2}d_3 + 2d_4\right) - \frac{1}{4}d_5\right]A\theta_0^2 + \frac{3d_6}{8d_1}(d_3 + 3d_4)\theta_0^3 - \\ &- \frac{3}{4}d_6 \left(1 - 4\frac{d_2}{d_1}\right)A\theta_0 - d_0\theta_0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$m_2 = 2 \left(1 - 2\frac{d_2}{d_1}\right)A + \frac{1}{2} \left(\frac{d_3}{d_1} + 3\frac{d_4}{d_1}\right)\theta_0 \quad (3.32)$$

На рис. 2 построены амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний двухслойной жидкости для цилиндрической полости при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{p}_1 = 0.85, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1, \bar{h}_0 = 0$ при двух значениях $\theta_0 = 0.01$ и $\theta_0 = 0.1$.

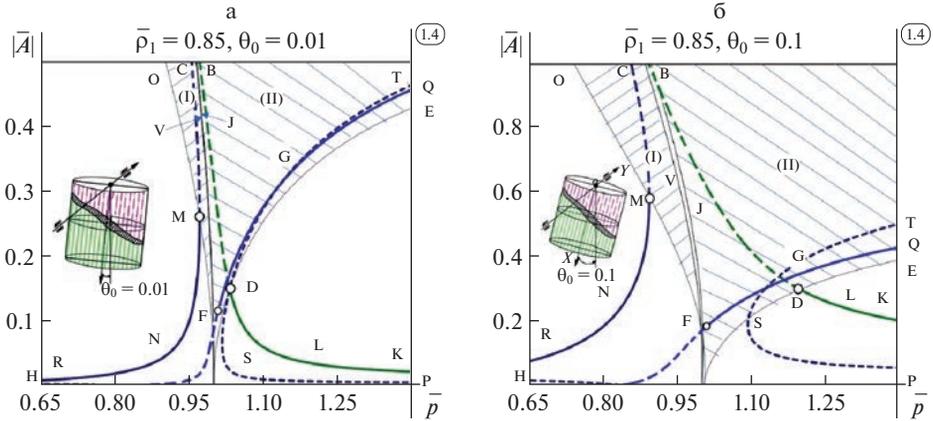


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{\rho}_1 = 0.85$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1$, $\bar{h}_0 = 0$ при $\theta_0 = 0.01$ – а, $\theta_0 = 0.1$ – б.

Соответствующие уравнению (3.30) резонансные кривые представлены на рис. 2 сплошными синими линиями FGQ – возникновение устойчивых изменений координаты $\beta(t)$, взаимодействие которых с основной формой приводит к вращению узлового диаметра.

Сплошные линии черные RNM и зеленые KLD показывают плоские линейные устойчивые колебания, пунктирные линии HF и PT – отображают неустойчивые режимы возникновения параметрических колебаний, пунктирные линии черные MC и зеленые DB – неустойчивые режимы возникновения нелинейных колебаний основной формы.

Из полученных всех соотношений построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний жидкостей. При отсутствии верхней жидкости $\bar{\rho}_1 = 0$, построенные характеристики качественно совпадают с результатом задачи о вынужденных угловых колебаниях одной жидкости в цилиндрическом сосуде [5].

Вид амплитудно-частотных характеристик и области неустойчивости I и II угловых нелинейных колебаний цилиндрического сосуда, целиком заполненного двумя жидкостями показаны на (рис. 2), для двух уровней амплитуды входного сигнала $\theta_0 = 0.01$ и 0.1 .

При малых значениях $\theta_0 = 0.01$ на (рис. 2,а) поведение амплитудно-частотных характеристик угловых колебаний двухслойной жидкости мало чем отличается от аналогичных характеристик поступательных колебаний двухслойной жидкости [12], что и следовало ожидать, т.к. эффект дополнительных нелинейных коэффициентов, стоящих множителями перед малыми θ_0 и θ_0^2 , не может существенно проявиться. При увеличении амплитуды θ_0 область II расширяется, увеличивается расстояние между устойчивой и неустойчивой ветвями кривой параметрического резонанса FGQ и PST (рис. 2,б). Видно (рис. 2,б), что точка S пересечения ветви PST и границы $ADSE$ области II не совпадает с точкой D пересечения ветви KLD и этой же границы $ADSE$, хотя на (рис. 2,а) они практически совпали. Левая ветвь RNM и правая ветвь KLD с ростом

амплитуды θ_0 поднимаются. Устойчивая ветвь FGQ с увеличением θ_0 несколько поднимается по значениям.

Таким образом, учет нелинейных слагаемых, при коэффициентах d_3, d_4, d_5, d_6 приводит к некоторому количественному изменению, но не вносит никаких новых качественных свойств в динамическую систему.

Заключение. На основании приведенных теоретических исследований нелинейных колебаний жидкостей, возбуждаемых угловыми колебаниями твердого тела вокруг горизонтальной оси, можно сделать следующий вывод. В определенном диапазоне амплитуд возбуждения колебаний твердого тела при одинаковой частоте возбуждения амплитуды плоских колебаний поверхности раздела увеличиваются. Переход из плоских колебаний поверхности раздела в пространственные движения происходит при сравнительно больших амплитудах колебаний поверхности раздела.

Следует заметить, что амплитудно-частотная характеристика реальных жидкостей, обладающих вязкостными свойствами, может отличаться от приведенных теоретических кривых, сужением областей неустойчивости и отсутствием кривых, характеризующих пространственные движения поверхности раздела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Изв. РАН. МТТ. 1986. № 1. С. 27–36.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Изв. РАН. МТТ. 1987. № 2. С. 52–58.
3. Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде // В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск: НЭТИ, 1974. С. 82–88.
4. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. М.: Гостехиздат, 1948. 143 с.
5. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990. 296 с.
6. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
7. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
8. Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы “идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ” в цилиндрическом контейнере // Crimean Int. Math. Conf. (СІМС-2003). Abstracts. Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. Т. 3. С. 51–52.
9. Лимарченко О.С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Киев: Адверта, 2017. 130 с.
10. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инж. ж.: наука и иннов. Электрон. ж. 2013. № 12 (24).
11. Вин Ко Ко, Ян Хаинг У. Нелинейные колебания поверхности раздела двух жидкостей при угловых колебаниях бака // Инж. ж.: наука и иннов. 2021. Вып. 5.
DOI: 10.18698/2308-6033-2020-5-2076
12. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объеме // Вестн. Томского ГУ. Матем. и мех. 2021. № 69.
13. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Тр. МАИ. 2021. № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03
14. Win Ko Ko, Temnov A.N. Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318. Art. № 020004. DOI: 10.1063/5.0035840
15. Win Ko Ko, Temnov A.N. Research of amplitude-frequency characteristics of nonlinear oscillations of the interface of two-layered liquid // Int. J. Mech.&Mechatron. Engng. 2020. V. 14. № 1. P. 7–13.

16. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci.&Engng. 2018. V. 468. Art. № 012031.
17. *Sekerzh-Zen'kovich S.Y.* The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel // JAMM. 1990. V. 54. № 1. P. 39–45.
18. *Kalinichenko V.A.* Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dyn. 2019. V. 54. №. 6. P. 761–773.
19. *La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A.* Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Phys. Fluids. 2005. № 17. P. 062101.
20. *Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaglia P.-Y., Thomson C.F.C.* Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // J. Ocean Engng.&Marine Energy. 2018. V. 4. P. 243–257.

Amplitude-Frequency Characteristics and Stability Regions of a Two-Layer Liquid Under Angular Vibrations of a Solid Body

Win Ko Ko^{a,#} and A.N. Temnov^{a,##}

^a*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: win.c.latt@gmail.com*

^{##}*e-mail: antt45@mail.ru*

The article considers the problem of nonlinear oscillations of the motion of liquids completely filling an axisymmetric cylindrical vessel moving around a horizontal axis O^*Y . The motion of each fluid is assumed to be potential and formulated in a cylindrical coordinate system. The influence of nonlinear coefficients on the characteristics of dynamic processes during finite rotational movements of the vessel is estimated and the case of forced angular oscillations of a vessel with liquids relative to a fixed axis is considered. The main nonlinear effects associated with the rotation of the diameter of the interface of liquids are also revealed. An approximate solution of the obtained non-linear equations, found by the Bubnov-Galerkin method, was used in the article. As a result of the transformation, the amplitude-frequency characteristics and stability regions of a two-layer liquid are constructed under forced angular oscillations of a round cylindrical vessel.

Keywords: mechanical system, cylindrical cavity, hydrodynamic coefficients, basic resonance, disturbed surface, rotational motion

REFERENCES

1. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Vibrations of a solid body with a cavity containing a heavy inhomogeneous liquid // Mech. Solids, 1986, no. 1, pp. 27–36.
2. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Nonresonant vibrations of a solid body with a cavity containing a heavy two-layer liquid // Mech. Solids, 1987, no. 2, pp. 52–58.
3. *Lukovskii I.A.* Introduction to the Nonlinear Dynamics of a Solid Body with Cavities Containing a Liquid. Kiev: Nauk. Dumka, 1990. 296 p.
4. *Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskii I.A.* Nonlinear Dynamics of an Aircraft with a Liquid. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 208 p.
5. *Mikishev G.N., Rabinovich B.I.* Dynamics of a Solid Body with Cavities Partially Filled with Liquid. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 532 p.
6. *Zhukovskii N.E.* On the Motion of a Solid Body Having Cavities Filled with a Homogeneous Droplet Liquid. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 143 p.
7. *Kozlov N.V., Shuvalova D.A.* Experimental measurement of inertial oscillations of the interface of immiscible liquids in a horizontal cylindrical cavity during rotation // Modern Probl. Sci.&Educ., 2014, no. 6. <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16669>
8. *Gaziev E.L.* Modeling of natural oscillations of the “ideal capillary liquid-barotropic gas” system in a cylindrical container // Crimean Int. Math. Conf. (CIMC-2003), Abstracts, Simferopol', KNTS NANU, 2013, vol. 3, pp. 51–52.

9. *Limarchenko O.S.* Nonlinear Problems of Fluid Dynamics in Non-Cylindrical Tanks. Kiev: Adver-ta, 2017. 130 p.
10. *Pozhalostin A.A., Goncharov D.A.* Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers in the presence of surface tension forces // Engng. J.: Sci.&Innov., 2013, no. 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147
11. *Win Ko Ko, Yan Naing Oo.* Nonlinear oscillations of the interface of two liquids with angular oscil-lations of the tank // Engng. J.: Sci.&Innov., 2021, vol. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-5-2076
12. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Theoretical investigation of the effects of vibrations of two immiscible liq-uids in a limited volume // Bull. Tomsk State Univ., Math.&Mech., 2021, no. 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8
13. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Angular oscillations of a solid body with a two-layer liquid near the main resonance // Proc. MAI. 2021, no. 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03
14. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel // AIP Conf. Proc. 2318, 2021, 020004. DOI: 10.1063/5.0035840
15. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Research of amplitude-frequency characteristics of nonlinear oscillations of the interface of two-layered liquid // Int. J. Mech.&Mechatron. Engng., 2020, vol. 14, no. 1. pp. 7–13.
16. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conf. Ser.: Materials Sci.&Engng. 468, 2018, 012031.
17. *Sekerzh-Zen'kovich S.Y.* The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel // JAMM, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 39–45.
18. *Kalinichenko V.A.* Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761–773.
19. *La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A.* Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Phys. Fluids, 2005, no. 17, pp. 062101.
20. *Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C.* Experimental inves-tigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // J. Ocean Engng.&Marine Energy, 2018, vol. 4, pp. 243–257.

УДК 534-13

**СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В РЕЗОНАТОРЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**© 2023 г. Пью Ко Ко^{1,*}¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: phyokoko4387@gmail.com

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

В рамках длинноволнового приближения исследованы частоты и формы собственных колебаний газа в резонаторе Гельмгольца имеющего форму трубы периодического сечения. Задача сводится к задаче Штурма–Лиувилля с краевыми условиями первого рода, решение которой проводится методом ускоренной сходимости. Проведен детальный анализ зависимостей собственных чисел и собственных функций от параметров трубы. Выявлен “автомодельный” тип зависимости собственной частоты для различных мод. Определены значения параметров периодичности трубы, при которых происходит резкое изменение собственной частоты.

Ключевые слова: резонатор, собственные колебания газа, метод ускоренной сходимости

DOI: 10.31857/S0032823523060073, EDN: HWCNOX

1. Введение. Впервые на задачу о проникновении звука через цилиндрическое отверстие обратил внимание Дж.В. Стретт [1], который заменил бесконечномерную задачу газовой механики конечномерной введя понятие присоединенной массы отверстия. Этот подход был развит в 40-е годы XX века в Советском Союзе для случая задачи о собственных колебаниях газа в цилиндрическом сосуде с перегородкой теоретически [2] и подтвержден экспериментально [3]. Несмотря на длительную историю и в последние годы задача о собственных колебаниях в резонаторе Гельмгольца вызывает значительный интерес, ей посвящено ряд работ как теоретических [4, 5], где изучались особенности спектра собственных колебаний газа в трубе с единственным сингулярным дефектом, так и экспериментальных [6].

Настоящая работа посвящена собственным колебаниям газа в резонаторе Гельмгольца цилиндрической формы (далее трубы), сечение площадь поперечного сечения которого – периодическая функция продольной координаты, а именно $S = S_0 h^2$, $h = 1 - a \sin \pi b x$, где параметр a далее будет именоваться амплитудой дефекта, а b – волновым числом трубы. Основное внимание в работе уделено изучению изменений вносимых периодическим изменением радиуса трубы в спектральные свойства задачи, особенно в предельных случаях, когда в трубе существует периодическая структура из сингулярных дефектов.

2. Постановка задачи. Итак, имеется резонатор Гельмгольца длины l с открытыми концами. Радиус поперечного сечения резонатора меняется по периодическому закону $h = 1 - a \sin \pi b x$ (рис. 1). Пусть поперечные размеры трубы значительно меньше, чем продольный размер. Будем исследовать зависимость параметров собственных колебаний газа (частоты и формы продольных колебаний) от геометрических параметров

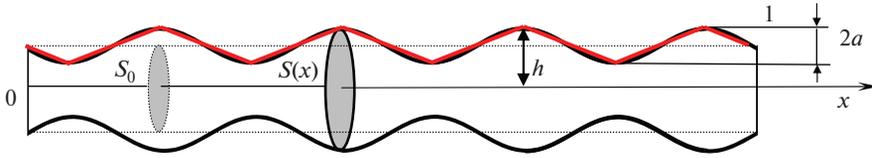


Рис. 1. Геометрия задачи. Резонаторы в форме трубы с периодически изменяющимся радиусом $h = 1 - a \sin \pi bx$ (кривая черного цвета) и пилообразной формы (красные линии).

трубы (амплитуды изменения радиуса трубы a — амплитуды дефекта и волнового числа трубы b).

В приближении линейной акустики уравнения для звукового потенциала после разделения переменных можно записать в безразмерном виде [4, 5]

$$\frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{du}{dx} \right) + \omega^2 h^2 u = 0; \quad a < 1, \quad b < 1, \quad (2.1)$$

где $x = z/l$, $\omega = \Omega l/c$, Ω — размерная собственная частота, l — длина трубы, c — скорость звука.

Предполагается, что концы резонатора открыты, что соответствует краевым условиям первого рода

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2.2)$$

Ставится задача определить собственные числа и собственные функции задачи (2.1)–(2.2) и их зависимость от амплитуды деформации профиля трубы a и волнового числа трубы b .

Решение задачи (2.1)–(2.2) проводилось численно методом ускоренной сходимости, основные элементы которого состоят в следующем [7].

Пусть дана задача Штурма–Лиувилля с граничными условиями первого рода

$$(p(x)\varphi)' + [\lambda r(x) - q(x)]\varphi = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (2.4)$$

Причем коэффициенты уравнения — ограниченные функции на некотором расширенном интервале, содержащем отрезок $[0, 1]$

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \quad 0 < r_0 \leq r(x) \leq r^+ < \infty$$

Тогда, используя метод Рэля–Ритца, найдем оценку сверху первого собственного числа

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* = \frac{\int_0^1 (p(x)\psi'^2 + q\psi^2) dx}{\int_0^1 r(x)\psi^2 dx},$$

где $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Рассмотрим две задачи Коши для уравнения (1), в котором положено I. $\lambda = \lambda_1^*$ и II. $\lambda = \xi^2 \lambda_1^*$ ($\xi < 1$) с начальными условиями вида

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

Выбираем параметр ξ таким образом, чтобы решение второй задачи Коши оставалось знакопостоянным на интервале $[0, 1]$. Тогда согласно осцилляторным теоремам Штурма такому значению ξ будет соответствовать оценка снизу для собственного

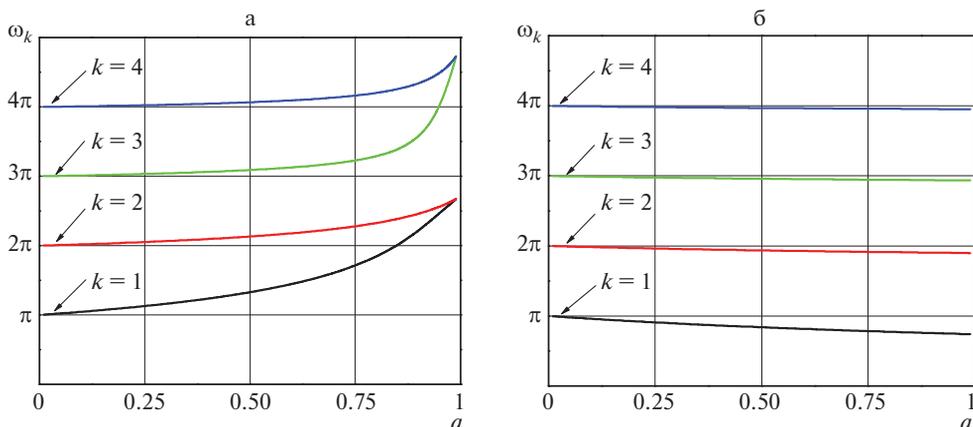


Рис. 2. Зависимость собственных частот от величины дефекта a первых четырех мод колебаний при $b = 1$ для трубы а. сужающегося профиля $h = 1 - a \sin \pi bx$; б. расширяющегося профиля $h = 1 + a \sin \pi bx$.

числа $\xi^2 \lambda_1^*$. Таким образом получаем двустороннюю оценку собственного числа $\xi^2 \lambda_1^* \leq \lambda \leq \lambda_1^*$. Затем повторяем процедуру необходимое число раз до достижения заданной точности вычисления собственного значения.

3. Собственные частоты резонатора Гельмгольца периодического сечения. Проведенные по методу ускоренной сходимости расчеты первых четырех собственных частот для волнового числа трубы соответствующего половине периода показали, что в случае трубы сужающегося профиля собственные частоты существенно зависят от величины амплитуды дефекта. Предельные величины нечетных и последующих четных собственных частот совпадают. Спектр резонатора единичной длины переходит в спектр резонатора разделенного в месте максимума амплитуды дефекта (рис. 2). В случае трубы расширяющегося профиля происходит незначительное уменьшение собственных частот, слабо зависящее от амплитуды дефекта.

Поведение частот колебаний значительно усложняется при дальнейшем увеличении волнового числа трубы. На рис. 3 для набора амплитуд дефекта приведены зависимости первых четырех собственных частот от волнового числа трубы в случае, когда ее профиль первоначально сужается. Первоначальное нарастание частот, увеличивающееся вместе с ростом амплитуды дефекта, затем сменяется падением до минимума, причем величина частот становится значительно меньше, чем у трубы постоянного радиуса. В районе волнового числа трубы, соответствующего одному периоду изменения профиля трубы для первой моды (k -кратному для k -й моды) значения частот возвращаются к исходным значениям и слабо зависят от амплитуды дефекта. После достижения минимума значения частот слабо зависят от величины волнового числа трубы. На фоне медленного возрастания наблюдаются периодические возмущения, отражающие периодичность в изменении профиля трубы.

Чтобы подчеркнуть общие особенности в поведении зависимостей для разных мод справа на рис. 3 приведены масштабированные зависимости частот от сдвинутого на соответствующие значения аргумента. Учитывая такое подобие, далее анализируются особенности поведения только первой моды собственных колебаний.

Для верификации и качественного обсуждения полученных результатов были использованы упрощенные модели, допускающие аналитическое решение задачи. В качестве первой из них была выбрана модель, в которой, возникающая в уравнении (2.1)

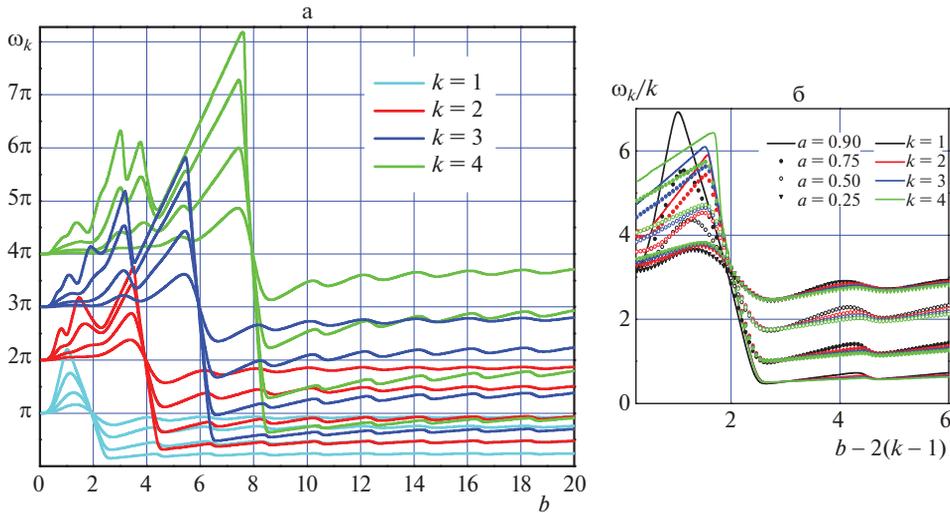


Рис. 3. Зависимость собственных частот первых четырех мод колебаний от “волнового числа” трубы для разных значений амплитуды дефекта $a = 0.25; 0.5; 0.75; 0.9$ (слева). Справа частотная зависимость приведена в измененных координатах.

логарифмическая производная радиуса трубы, заменялась ее средним значением на каждом из интервалов монотонного поведения радиуса.

$$u_n'' + (-1)^n 2f_n u_n' + \omega^2 u_n = 0; \quad f_n = \left| \langle d \ln h/dx \rangle_n \right|$$

На каждом интервале разбиения задача сводилась к решению уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_n = e^{(-1)^{n+1} f_n x} (A_n \cos \omega_n x + B_n \sin \omega_n x); \quad \omega_n^2 = \omega^2 - f_n^2, \quad (3.1)$$

после чего проводилась сшивка решений. Результатом процедуры сшивки оказывалась система трансцендентных алгебраических уравнений, из которых определялась собственная частота. В частности, при $n = 1$ ($0 < b < 1/2$) сшивка не требуется, а крайние условия на концах трубы приводят к росту частоты собственных колебаний $\omega^2 = \pi^2 + f_1^2$.

Во второй модели рассматривалась труба пилообразного профиля, радиус которой меняется по закону

$$h_1 = 1 - 2abx, \quad h_n = 1 - (-1)^n 2a(n - bx); \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

а решение на n -м участке имеет вид

$$u_n(x) = \frac{1}{h_n} (A_n \sin \omega x + B_n \cos \omega x) \quad (3.3)$$

На стыке участков гладкости профиля трубы опять задавались условия сшивки, условие совместности приводит к системе уравнений, из которой определяется частота собственных колебаний.

Проведенные в рамках первой и второй моделей расчеты зависимости первой собственной частоты от волнового числа трубы (рис. 4) показали качественное совпадение с результатами численного моделирования методом ускоренной сходимости на интервале выхода зависимости на асимптотику больших чисел b .

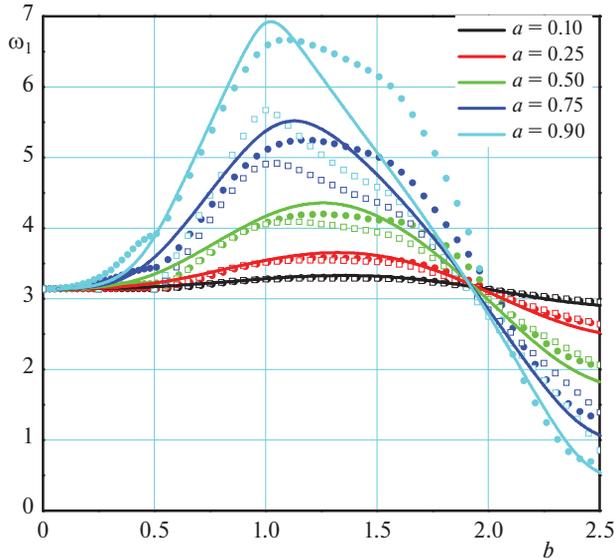


Рис. 4. Зависимость первой собственной частоты от “волнового числа” трубы: сплошная линия – численное моделирование МУС; ● – результаты аналитического решения уравнений с осредненными коэффициентами; □ – результаты аналитического решения задачи для резонатора пилообразного профиля.

Изучение изменения вида профилей первой собственной формы при увеличении амплитуды дефекта трубы и степени ее изрезанности (росте волнового числа трубы b) выявило ряд характерных особенностей рис. 5. При малом изменении волнового числа $b < 1/2$ и с ростом амплитуды дефекта максимум первоначально синусоидального профиля смещается в сторону уменьшения радиуса, с обострением профиля собственной моды u_1 справа и относительным выполаживанием слева от максимума, причем при стремлении амплитуды дефекта к единице производные u_1 могут стремиться к бесконечности в окрестности точки с радиусом трубы близким к нулю. В интервале изменения волнового числа $1/2 < b < 3/2$ минимум профиля трубы смещается из правого края влево (при равных значениях амплитуды дефекта) вместе с положением максимума профиля (при $b = 1$ профиль собственной моды становится симметричным). Увеличение параметра b будет приводить к постепенному выполаживанию профиля собственной моды в окрестности его максимума и обострению производных в окрестности правого конца трубы, где радиус обращается в нуль при $b = 5/2$ и $a = 1$. В последнем случае профиль собственной функции принимает форму ступеньки, ограниченной вертикальной асимптотой в правом конце. Далее профиль собственной функции имеет вид ступенчатой функции, его максимум смещается влево вместе с положениями минимумов радиуса трубы. При возникновении очередного нуля у радиуса трубы $b = 9/2$ в профиле собственной функции возникает вторая ступенька, которая, однако, в дальнейшем исчезает в окрестности симметричного профиля трубы $b = 5$. Физическая интерпретация последней особенности связана с тем, что положению максимума, который в силу симметрии находится в центре трубы, соответствует нуль скорости газа. Таким образом, уменьшение до нуля радиуса отверстия ($a \rightarrow 1$) в силу отсутствия потока не приводит к изменению профиля собственной функции. Третья ступенька в профиле собственной функции возникает при появлении четвер-

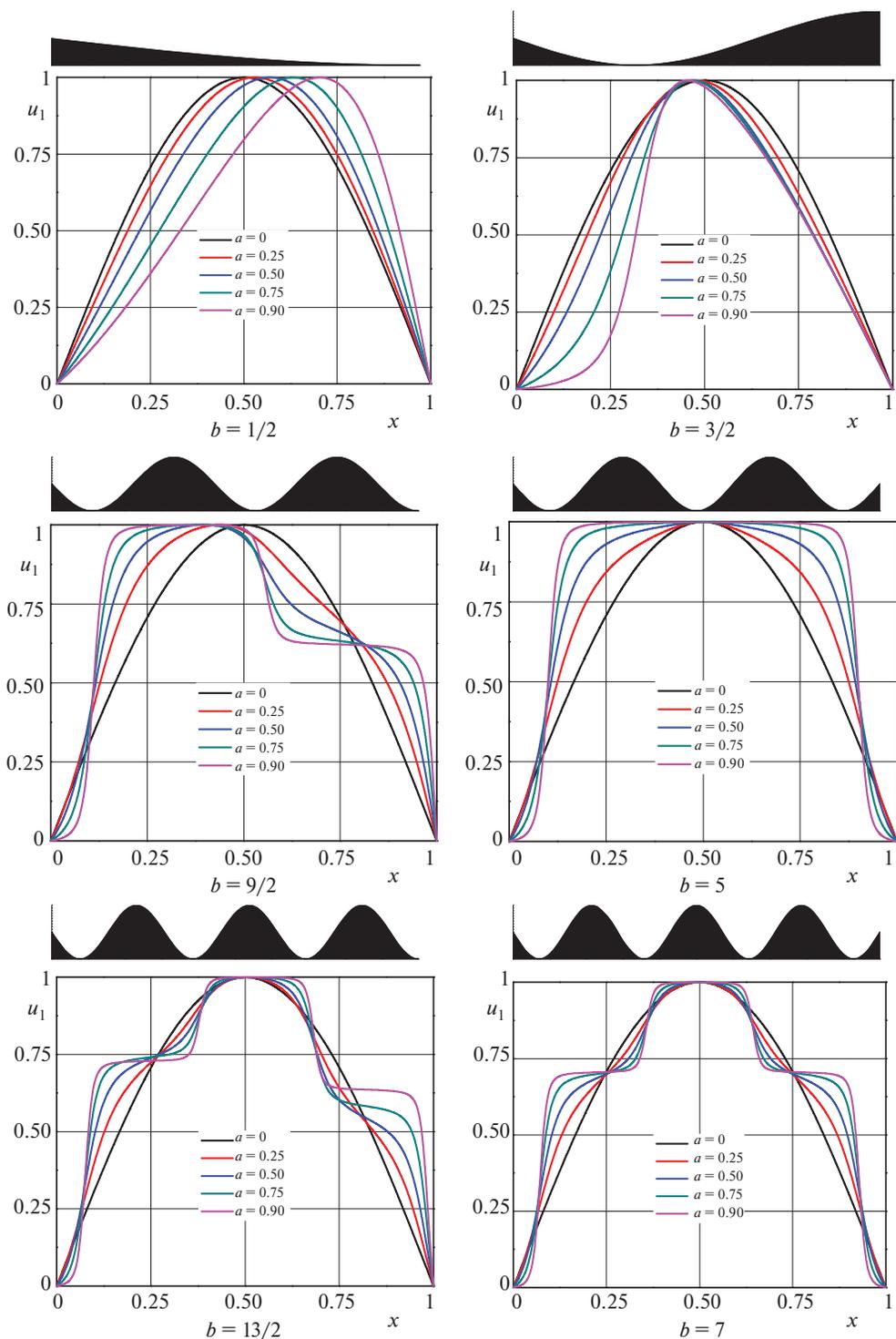


Рис. 5. Деформация профилей первой собственной моды при изменении “волнового числа” трубы.

того нуля у радиуса трубы ($b = 13/2$). Причем такая структура сохраняется и в следующем симметричном случае, когда $b = 7$.

Заключение. Следует отметить, что полученные результаты при относительно небольших значениях параметра b согласуются с ранее выполненными исследованиями [4, 5], в которых анализировалось поведение собственных функций резонатора Гельмгольца с единичным дефектом. Было получено, что собственные функции при стремлении величины дефекта к критическому значению, соответствующему полному разделению резонатора на две части, локализуются в зависимости от моды в одной из двух частей резонатора. Спектр задачи, при этом, можно разделить на две части соответствующие спектрам двух взятых по отдельности частей резонатора. С точки зрения гашения звуковых колебаний это означает, что уменьшение радиуса отверстия, соединяющего две части резонатора, будет приводить к локализации звуковых колебаний в одной из частей. При этом напряжения вызванные звуком в корпусе резонатора будут сосредоточены практически исключительно в перегородке, где производные звукового потенциала, а соответственно и скорость потока, будут обращаться в бесконечность.

В настоящей работе для трубы периодического сечения определены условия, когда звуковые колебания соответствующие первой собственной моде будут распространяться по всей длине трубы. Максимум их интенсивности будет сосредоточен в окрестности минимумов радиуса сечения трубы. Таким образом, в случае резонатора переменного сечения возможно возникновение значительных звуковых нагрузок на корпус даже на больших расстояниях от узкого входного отверстия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Релей (Стретт Дж.В.) Теория звука. Т. 2. М.; Л.: ГИТТЛ, 1944. 476 с.
2. Фок В.А. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 875–878.
3. Нестеров В.С. Экспериментальное исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 879–882.
4. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г. Собственные колебания акустического резонатора с локальной перегородкой // Докл. РАН. 2016. Т. 470. № 3. С. 279–282. DOI: 10.1134/S1028335816090093
5. Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Нестеров С.В. Зависимость собственных частот и форм колебаний идеального газа от параметров акустического резонатора // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 52–64. DOI: 10.3103/S002565441701006X
6. Быков А.И., Комкин А.И., Миронов М.А. Исследование акустического импеданса отверстия при высоких уровнях звука // Уч. зап. физ. фак-та МГУ. 2017. № 5. 1751403.
7. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.

Natural Vibrations of a Gas in a Helmholtz Resonator with a Periodically Varying Cross-section

Phyo Ko Ko^{a, #}

^aBauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

[#]e-mail: phyokoko4387@gmail.com

Within the framework of the long-wave approximation, the frequencies and shapes of gas natural oscillations in a Helmholtz resonator having the shape of a pipe of periodic cross-section have been studied. The problem is reduced to the Sturm–Liouville problem with boundary conditions of the first kind, the solution of which is carried out by the method of accelerated convergence. A detailed analysis of the dependences of eigenvalues and eigenfunctions on pipe parameters was carried out. A “self-similar” type of dependence of the

natural frequency for various modes has been revealed. The values of the resonator periodicity parameters at which a sharp change in the natural frequency occurs are determined.

Keywords: resonator, gas natural oscillations, accelerated convergence method

REFERENCES

1. *Strutt J.W.* Theory of Sound. V. II. L.: Macmillan, 1926.
2. *Fok V.A.* Theoretical study of conductivity of a circular hole in a wall across a tube // Dokl. AN SSSR, 1941, vol. 31, no. 9, pp. 875–878.
3. *Nesterov V.S.* Experimental study of conductivity of a circular hole in a wall across a tube // Dokl. AN SSSR, 1941, vol. 31, no. 9, pp. 879–882.
4. *Nesterov S.V., Akulenko L.D., Baidulov V.G.* Eigenoscillations of an acoustic cavity with a local membrane // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, no. 9, pp. 467–470. DOI: 10.1134/S1028335816090093
5. *Akulenko L.D., Baidulov V.G., Nesterov S.V.* Dependence of the natural frequencies and mode shapes of vibrations of an ideal gas on the acoustic resonance parameters // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 1, pp. 41–51. DOI: 10.3103/S002565441701006X
6. *Bykov A.I., Komkin A.I., Mironov M.A.* Study of the acoustic impedance of a hole at high sound levels // Uch. Zap. Phys. Fac. MSU, 2017, no. 5, 1751403.
7. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.

УДК 532.612; 532.614

**ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ
НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ**© 2023 г. А. И. Григорьев^{1,*}, Н. Ю. Колбнева^{2,**}, С. О. Ширяева^{2,***}¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*²*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия***e-mail: grigorai@mail.ru****e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru*****e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.

После доработки 26.09.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

В асимптотических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде капиллярных волн на поверхности заряженных струй полярной жидкости исследуется влияние эффекта релаксации поверхностного натяжения на закономерности их реализации. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Показано, что учет эффекта динамического поверхностного натяжения приводит к повышению порядка дисперсионного уравнения, у которого появляется еще один затухающий корень, описывающий колебания поверхности струи, связанные с разрушением приповерхностного двойного электрического слоя (разрушением упорядоченности полярных молекул в приповерхностном слое). При достаточно больших зарядах (предпробойных в смысле зажигания коронного разряда в газовой среде) это решение становится неустойчивым, вследствие чего претерпевает электростатическую неустойчивость вся поверхность. В используемой математической модели идеальной жидкости движение поверхности струи, появляющееся при включении эффекта релаксации поверхностного натяжения, и декременты затухания капиллярных волновых движений имеют чисто релаксационную природу.

Ключевые слова: заряженная струя, релаксация поверхностного натяжения, декремент

DOI: 10.31857/S003282352306005X, EDN: HLMDPE

1. Введение. Эффект релаксации поверхностного натяжения полярной жидкости, называемый также эффектом динамического поверхностного натяжения, заключается в изменении его величины между равновесным значением и некоторым максимальным, достигаемым при разрушении приповерхностного двойного электрического слоя. Этот эффект основан на том, что ориентирующее действие поверхность жидкости оказывает на диполи отдельных молекул: в приповерхностном слое молекулы выстраиваются отрицательно заряженными концами диполей молекул наружу [1, стр. 47], в результате электростатического квадрупольно-дипольного взаимодействия. При этом величина коэффициента поверхностного натяжения достигает наименьшего значения. При силовом воздействии на поверхность жидкости упорядоченность диполей разрушается, и величина коэффициента поверхностного натяжения, измеряемого плотностью свободной энергии поверхности жидкости, увеличивается. Время,

необходимое для восстановления равновесной структуры приповерхностного слоя, называется временем релаксации.

Сам эффект релаксации поверхностного натяжения начал исследоваться еще в начале прошлого XX века (см., дискуссию [2, 3], и приведенные там ссылки).

Эффект динамического поверхностного натяжения изучается уже более ста лет [1–8], но вопрос об изменении закономерностей распространения капиллярных приповерхностных волн и потери ими устойчивости при его учете, остается открытым.

2. Физическая постановка задачи. Рассмотрим бесконечную струю радиусом R несжимаемой, электропроводной жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , движущуюся со скоростью \vec{U} вдоль оси симметрии невозмущенной струи в вакууме. Для упрощения математических выкладок жидкость будем считать идеальной. Примем, что в области пространства вокруг струи жидкости имеется электростатическое поле, вектор напряженности которого перпендикулярен невозмущенной цилиндрической свободной поверхности струи $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_r$, что приводит к появлению поверхностного заряда с поверхностной плотностью χ_0 .

Все нижеследующее рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , в которой ось z направлена вдоль оси симметрии невозмущенной струи, а начало системы координат движется вместе со струей со скоростью струи.

В реальных (не идеализированных) условиях поверхность струи возмущена капиллярным волновым движением, возникающим уже в силу теплового движения молекул [9]. Амплитуда капиллярных волн теплового происхождения $\xi(z, \varphi, t)$ определяется соотношением $|\xi(z, \varphi, t)| \sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [9]. Для большинства жидкостей амплитуда тепловых осцилляций $|\xi(z, \varphi, t)|$ не превышает 10^{-8} см.

Во введенной системе координат форма поверхности струи будет описываться уравнением $r = R + \xi(z, \varphi, t)$, движение жидкости будет определяться капиллярными волнами на поверхности струи. Зададимся целью исследовать возможные движения жидкости в описанной системе.

Примем также, что в жидкости реализуется эффект динамического поверхностного натяжения. В экспериментах [4–8] найдено, что характерное время релаксации поверхностного натяжения различных жидкостей τ_r (время установления упорядоченности диполей на поверхности жидкости), составляет 10^{-5} – 10^{-3} с, а максимальное значение динамического поверхностного натяжения σ_∞ на четверть величины выше его равновесного значения σ_0 [8]. Поэтому для численных оценок в нижеследующем изложении примем значения: $\tau_r = 10^{-4}$ с, $\sigma_0 = 73$ дин/см, $\sigma_\infty \approx 90$ дин/см, $\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 \approx 17$ дин/см, характерные для воды.

Принимая во внимание, что в результате разрушения двойного электрического слоя коэффициент поверхностного натяжения изменяется от равновесного до максимального значений, динамический коэффициент поверхностного натяжения $\sigma(t)$ можно представить в виде суммы величины коэффициента поверхностного натяжения равновесной поверхности струи и добавки, связанной с разрушением упорядоченности дипольных молекул в приповерхностном слое:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_* \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \quad (2.1)$$

Временная зависимость (с характерным временем релаксации τ_r) показывает, что в начальный момент времени при полном разрушении порядка в ориентации приповерхностных диполей максимальное значение коэффициента поверхностного натя-

жения составляет $\sigma_\infty = \sigma_0 + \sigma_*$. Но по прошествии времени порядка τ_r ориентация диполей восстанавливается и поверхностное натяжение снижается до σ_0 .

Как уже упоминалось выше эффект релаксации поверхностного натяжения жидкости объясняется отклонением строения приповерхностной структуры мгновенно деформированной поверхности от ее равновесного состояния. Известно, что лапласовское давление определяет связь между изменением давления ΔP под искривленной капиллярным волновым движением поверхностью жидкости с кривизной поверхности $u(t)$. Эффект релаксации приповерхностной структуры жидкости можно связать с тем фактом, что жидкость при весьма коротких временах воздействия обладает как вязкими, так и упругими свойствами [11]. В такой ситуации можно воспользоваться известным для вязкоупругих жидкостей принципом суперпозиции Больцмана [10, 11], согласно которому “текущее напряжение определяется суперпозицией откликов на полный спектр приращений деформации”, то есть текущее напряжение определяется всей историей деформации среды. Это позволяет записать соотношение, связывающее мгновенное изменение капиллярного давления на поверхности жидкости $\Delta P_1(t)$ с историей изменения ее кривизны $u(t)$ [10, 11]:

$$\Delta P_1(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t-\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1) в (2.2) и применение прямого преобразования Фурье к результату такой подстановки позволяет перейти от временной зависимости величины поверхностного натяжения к частотной. В результате комплексный коэффициент поверхностного натяжения σ запишем в соответствие с известной формулой Максвелла [10]:

$$\sigma = \sigma_\infty - \frac{\sigma_*}{1 - i\omega_n \tau_r} = \sigma_0 - \frac{i\omega_n \sigma_* \tau_r}{1 - i\omega_n \tau_r}; \quad \sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 \quad (2.3)$$

В (2.1), (2.3) введены обозначения: i – мнимая единица, τ_r – характерное время релаксации (время, за которое мгновенно деформированный приповерхностный слой жидкости возвращается в равновесное состояние), σ_0 – значение коэффициента поверхностного натяжения равновесной структуры поверхности жидкости (для нулевой частоты), σ_∞ – максимальное значение коэффициента поверхностного натяжения для весьма высоких частот, соответствующих неравенству $\omega_n \tau_r \gg 1$.

3. Математическая постановка задачи. Математическая постановка задачи для идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости будет состоять из уравнения Эйлера

$$\frac{d\vec{V}(r, z, \varphi, t)}{dt} = -\nabla \frac{P(r, z, \varphi, t)}{\rho}; \quad 0 \leq r \leq R + \xi(z, \varphi, t),$$

уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{V}(r, z, \varphi, t) = 0; \quad 0 \leq r \leq R + \xi(z, \varphi, t),$$

уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(r, z, \varphi, t) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}(r, z, \varphi, t) = 0 \quad (3.1)$$

Граничные условия к выписанным уравнениям будут иметь вид:

$$r \rightarrow 0 : |V(r, z, \varphi, t)| < \infty, \quad r \rightarrow +\infty : \vec{E} \rightarrow 0$$

на свободной поверхности электропроводной струи:

$$r = R + \xi(z, \varphi, t):$$

$$\text{кинематическое: } (\bar{n}(z, \varphi, t), \bar{V}(z, \varphi, t)) = \frac{\partial \xi(z, \varphi, t)}{\partial t}.$$

$$\text{динамическое: } P(z, \varphi, t) - P_{\text{атм}} + P_E(z, \varphi, t) = P_\sigma(z, \varphi, t);$$

условия на границе проводник–диэлектрик:

$$(\bar{\tau}(z, \varphi, t), \bar{E}(z, \varphi, t)) = 0 : (\bar{n}(z, \varphi, t), \bar{E}(z, \varphi, t)) = 4\pi\chi(z, \varphi, t) \quad (3.2)$$

В выписанных соотношениях $\bar{V}(r, z, \varphi, t)$ – поле скоростей в объеме жидкости, $\bar{V}(z, \varphi, t)$ – скорость на свободной поверхности струи, $P(r, z, \varphi, t)$ – гидродинамическое давление в объеме жидкости, $P(z, \varphi, t)$ – давление на свободной поверхности струи, $\bar{E}(r, z, \varphi, t)$ – напряженность приложенного электрического поля в объеме внутри и вне струи, $\bar{E}(z, \varphi, t)$ – напряженность приложенного электрического поля на свободной поверхности струи, $P_{\text{атм}}$ – атмосферное давление, $P_\sigma(z, \varphi, t)$ – давление сил поверхностного натяжения; χ – поверхностная плотность электрического заряда.

Решение задачи проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$. За всеми физическими величинами оставим прежние обозначения, а их численные величины будут выражаться в долях своих характерных размеров.

Введем малый параметр ε : отношение максимальной амплитуды капиллярных волн к радиусу струи: $\varepsilon \equiv \max|\xi|/R$.

4. Дисперсионное уравнение без учета эффекта динамического поверхностного натяжения. Раскладывая сформулированную задачу по малому параметру ε , несложно выделить задачи нулевого и первого порядков малости [12].

Решение задачи нулевого порядка определяет невозмущенную цилиндрическую струю, движущуюся вдоль оси симметрии со скоростью \bar{U} , с равномерно распределенным по ее поверхности электрическим зарядом, создающим электростатическое поле в окрестности струи, стремящееся к нулю при удалении от поверхности струи на бесконечность.

В первом порядке малости по ε будем искать решение стандартными методами (см., напр., [12, 13]).

В указанном приближении решения задачи (3.1), удовлетворяющие граничным условиям (3.2), для возмущения границы раздела сред $\xi(\varphi, z, t)$, и добавок к гидродинамическому потенциалу в струе $\psi(\vec{r}, t)$, и к электрическому потенциалу $\Phi(\vec{r}, t)$ будем искать в виде

$$\xi(\varphi, z, t) = \xi_0 \exp[i\omega_{0m}(k)t] \exp(ikz + im\varphi)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = b \exp[i\omega_{0m}(k)t] \exp(ikz + im\varphi) I_m(kr)$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = c \exp[i\omega_{0m}(k)t] \exp(ikz + im\varphi) K_m(kr),$$

где m – азимутальный параметр; $\omega_{0m}(k)$ – частота капиллярных волн; k – волновое число; ξ_0 – начальная амплитуда; b, c – неизвестные коэффициенты; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка m [14].

Находя значения коэффициентов b, c и подставляя решения в систему граничных условий задачи, можно получить дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольными азимутальными числами m на поверхности струи без учета эффекта релаксации поверхностного натяжения:

$$\omega_{0m}^2(k) = g_m(k) (k^2 + m^2 - 1 + w(1 + h_m(k)))$$

$$w \equiv 4\pi\chi_0^2 \equiv \frac{E_0^2}{4\pi}, \quad g_m(k) = \frac{kI_m'(k)}{I_m(k)}, \quad h_m(k) = \frac{kK_m'(k)}{K_m(k)}, \quad (4.1)$$

где штрих у функций Бесселя обозначает производную по аргументу; w – безразмерный параметр, характеризующий устойчивость струи по отношению к заряду на ее поверхности.

5. Дисперсионное уравнение с учетом эффекта динамического поверхностного натяжения. Дисперсионное соотношение с учетом динамического поверхностного натяжения найдем по аналогии с [10, 15].

Перейдем к размерному квадрату частоты. Для этого необходимо квадрат безразмерной частоты $\omega_{0m}^2(k)$ умножить на квадрат масштаба обезразмеривания частоты:

$$\omega_r^2 = \frac{\sigma_0}{\rho R^3} \omega_{0m}^2(k), \quad (5.1)$$

где σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения на нулевой частоте (статическое).

Поменяем в формуле (5.1) статическое поверхностное натяжение σ_0 на динамическое как это было сделано в [10, 15]:

$$\sigma_d = \sigma_\infty - \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{1 - i\omega\tau_r}, \quad (5.2)$$

где ω и τ_r – частота и характерное время релаксации, для получения которого в безразмерной форме следует разделить его на масштаб измерения времени $[T] = \sqrt{\rho R^3 / \sigma_0}$.

Подставив (5.2) в (5.1), получим размерную частоту с коэффициентом динамического поверхностного натяжения.

$$\omega_r^2 = \frac{\sigma_d}{\rho R^3} \omega_{0m}^2(k) = \frac{\sigma_0}{\rho R^3} \frac{\sigma_d}{\sigma_0} \omega_{0m}^2(k) = \frac{\sigma_0}{\rho R^3} \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau_r} \right) \omega_{0m}^2(k)$$

Вновь вернемся к безразмерной частоте, используя масштаб обезразмеривания частоты $[\omega] = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho R^3}}$:

$$\omega^2 = \frac{\omega_r^2}{\frac{\sigma_0}{\rho R^3}} = \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau_r} \right) \omega_{0m}^2(k)$$

при $\omega\tau_r \ll 1$ квадрат частоты стремится к “статическому” значению $\omega^2 \rightarrow \omega_0^2$.

Введем новое обозначение $\Sigma \equiv \sigma_\infty / \sigma_0$, тогда дисперсионное уравнение с учетом эффекта динамического поверхностного натяжения примет вид:

$$\omega^2 = \left(\Sigma - \frac{\Sigma - 1}{1 - i\omega\tau_r} \right) \omega_{0m}^2(k),$$

где $\omega_{0m}^2(k)$ – определено (4.1).

Таким образом, полное дисперсионное соотношение с учетом динамического поверхностного натяжения принимает вид:

$$\omega_m^2(k) = g_m(k) \left(\Sigma - \frac{\Sigma - 1}{1 - i\omega_m(k)\tau_r} \right) \left[(k^2 + m^2 - 1) + w(1 + h_m(k)) \right] \quad (5.3)$$

Несложно видеть, что общая степень дисперсионного уравнения по сравнению с (4.1) увеличилась на единицу, а кроме того некоторые его коэффициенты стали не вещественными, а комплексными, что может существенно изменить решения.

Интересно отметить, что дисперсионное уравнение для струи зависит от азимутального параметра m [16]. Этим струя отличается от капли, для которой дисперсионное уравнение оказывается вырожденным по азимутальному параметру [17, 18]. Упомянутое различие между каплей и струей не единственное: они по разному ведут себя в смысле устойчивости по отношению к собственному электрическому заряду [17, 19] и по отношению к спонтанному разбиению на капли [19–23].

Согласно [17] сферическая капля устойчива по отношению к собственному заряду вплоть до очень больших его значений, оставаясь сферической. Критический для реализации неустойчивости заряд определяется критерием Рэля:

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3} \geq 1$$

При больших значениях параметра Рэля W , удовлетворяющих записанному выше неравенству, капля вытягивается в фигуру типа сфероида вращения и сбрасывает около четверти заряда и примерно пять процентов массы в виде струйки мелких капелек [20], как это и наблюдается в экспериментах [20–22].

Качественно подобным образом ведут себя и незаряженные капли, помещенные в сильное внешнее однородное электростатическое поле [22].

Струя ведет себя иначе. Она изначально неустойчива, например, для нулевой азимутальной моды ($m = 0$) распадается на капли даже в отсутствии заряда [19], так как поверхностная потенциальная энергия сил поверхностного натяжения струи больше чем потенциальная энергия совокупности капель, имеющих суммарный объем, равный объему распадающегося на капли участка струи, и распад на отдельные капли энергетически выгоден. Закономерности распада струи на отдельные капли зависят от номера азимутальной моды, как это показано на рис. 1. Видно, что для азимутальной моды с $m = 0$ имеет место последовательный отрыв капель с торца струи, для моды с $m = 1$ свободный конец струи движется “хлыстообразно”, и капли отрываются с его торца, а для $m = 2$ распад на капли происходит через выброс боковых дочерних струек, который начинается при очень больших значениях заряда (приходящегося на единицу длины струи), при которых зажигается коронный разряд у поверхности струи, как это отмечается в экспериментах [23].

6. Численный анализ. Для более детального исследования влияния эффекта релаксации поверхностного натяжения на закономерности реализации капиллярных волн на струе и ее устойчивость построим по полученным дисперсионным уравнениям (4.1) и (5.3) графики для первых трех азимутальных мод.

Значения физических величин, входящих в дисперсионное уравнение (5.3), приняты следующими: радиус струи $R = 100$ мкм, плотность воды $\rho = 1$ г/см³, равновесное статическое поверхностное натяжение воды $\sigma_0 = 73$ дин/см, неравновесное (максимальное) поверхностное натяжение воды $\sigma_\infty = 90$ дин/см, характерное размерное время релаксации поверхностного натяжения воды $\tau_r = 10^{-4}$ с.

Чтобы получить безразмерное время релаксации следует разделить τ_r на масштаб обезразмеривания времени. При принятых значениях физических величин получим безразмерное значение $\tau_r \approx 0.85$. Безразмерный параметр Σ будет иметь величину $\Sigma = 1.23$.

7. Осесимметричная мода. На рис. 2,а в безразмерном виде приведены зависимости вещественных и мнимых частей частоты от волнового числа осесимметричной ($m = 0$) капиллярной волны на поверхности струи без учета явления релаксации, то есть рассчитанные по дисперсионному уравнению (4.1). Сплошными линиями нане-



Рис. 1. Зарисовки режимов электродиспергирования жидкости в различных азимутальных модах по результатам экспериментов [23].

сены вещественные части частоты (частоты капиллярных волн), а пунктирными — мнимые: выше оси абсцисс инкремент нарастания возмущения на поверхности струи, ниже оси абсцисс — декремент его затухания.

Как уже отмечалось, инкремент соответствует разбиению струи на капли [19]. Что касается декремента (напомним, что речь идет об идеальной жидкости), то на рис. 2,а при изменении k в диапазоне $0 \leq k \leq 1$ он соответствует передаче энергии от нижней ветви, с убывающей амплитудой возмущения, к ветви с растущей амплитудой, так как жидкость идеальна, а внешних источников энергии для обеспечения роста амплитуды нет.

В диапазоне $k > 1$ имеются две ветви капиллярных волн: “1” и “2”, с нулевыми декрементами.

На рис. 2,б, по сравнению с рис. 2,а, учтена релаксация поверхностного натяжения, приводящая во всем диапазоне изменения k к появлению ветви “3”, соответствующей неперIODическому убыванию возмущений на поверхности струи, а также остающейся, как и на рис. 2,а, ветви “1” и “2”. Графики на рис. 2,б рассчитаны по дисперсионному уравнению (5.3). Ветвь “3” является чисто релаксационной, как и декременты затухания ветвей “1” и “2” (в диапазоне значений волновых чисел $k > 1$) и роста инкремента — ветви “1” (в диапазоне значений волновых чисел: $0 < k < 1$). Затухание соответствует разрушению упорядоченности диполей в приповерхностном слое.

Известно [1, стр. 47], что ориентация диполей молекул воды в приповерхностном слое не антипараллельная, как было бы при учете только дипольного взаимодействия, а параллельная, что обеспечивается учетом и диполь-квадрупольного взаимодействия. Иными словами, поверхность воды оказывает ориентирующее влияние на диполи воды: они выстраиваются отрицательно заряженными концами наружу. Такая равновесная ориентация диполей обладает определенной свободной энергией, определяющей величину коэффициента поверхностного натяжения жидкости. Достаточно интенсивная капиллярная волна на поверхности струи может разрушить упорядоченность диполей, свободная энергия поверхности струи увеличится (так как поверхность станет неравновесной), а с ней и величина коэффициента поверхностного натяжения. За время порядка характерного времени релаксации τ_r упорядоченность диполей самопроизвольно восстановится потому, что при этом система переходит в равновесное состояние с меньшей потенциальной энергией поверхности.

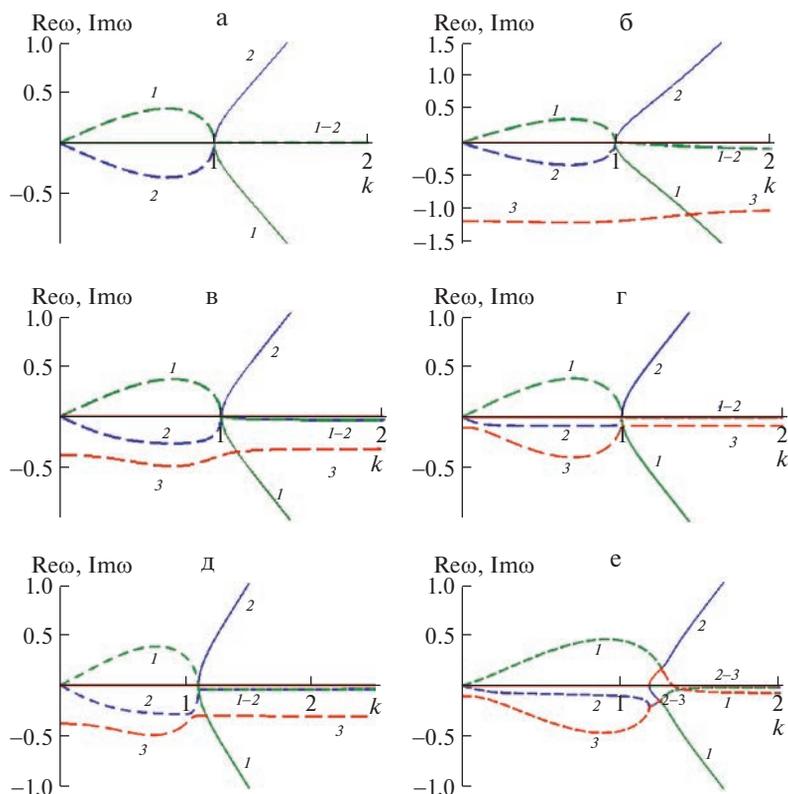


Рис. 2. Графики, построенные по дисперсионным уравнениям для азимутальной моды с $m = 0$: а) $\Sigma = 1$; $R = 100$ мкм; $\tau_r = 0$; $w = 0$; б) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 0$; в) $\Sigma = 1.2$; $R = 50$ мкм; $\tau_r = 2.7$; $w = 0$; г) $\Sigma = 1.23$; $R = 100$ мкм; $\tau_r = 10$; $w = 0$; д) $\Sigma = 1.23$; $R = 100$ мкм; $\tau_r = 2.7$; $w = 0.4$; е) $\Sigma = 1.23$; $R = 100$ мкм; $\tau_r = 10$; $w = 1$.

На рис. 2,б ветвь “2” при изменении волнового числа k в диапазоне $k \geq 1$, соответствует экспоненциально убывающему волновому движению, решение которого обладает вещественной частью и малой отрицательной мнимой частью. В диапазоне $0 \leq k \leq 1$ эта ветвь соответствует декременту аperiodического движения. Ветвь “1” в диапазоне $0 \leq k \leq 1$ соответствует экспоненциальному росту амплитуды возмущения. Ветвь “3” соответствует чисто затухающему аperiodическому движению возмущения поверхности без действительной части во всем диапазоне изменения k . Ветви “1” и “2” имеют место в случае отсутствия динамического поверхностного натяжения, при неменяющемся коэффициенте поверхностного натяжения. Ветвь “3” порождена именно динамическим поверхностным натяжением и соответствует аperiodическому затуханию возмущений при разрушении упорядоченности диполей молекул воды.

Сама физическая картина снижения амплитуд капиллярных волн и возмущений на поверхности струи идеальной полярной жидкости представляется следующей.

Равновесному состоянию поверхности струи воды соответствует такое, при котором диполи воды параллельны друг другу [1]. При этом свободная энергия сил поверхностного натяжения минимальна [24]. Капиллярные волны на поверхности струи имеют достаточно малую амплитуду и упорядоченности диполей не нарушают.

При наличии внешних силовых воздействий на поверхность струи, например, при движении струи относительно материальной среды, амплитуды капиллярных волн вследствие реализации неустойчивости Кельвина–Гельмгольца увеличиваются. В итоге капиллярные волны уже смогут разрушить упорядоченность диполей, и коэффициент поверхностного натяжения воды увеличится [24] примерно на четверть [8], то есть возрастет свободная потенциальная энергия поверхности жидкости.

Если радиус струи уменьшить вдвое, то безразмерное характерное время релаксации примет величину $\tau_r = 2.7$, а график будет иметь вид, приведенный на рис. 2,в. То есть в качественном отношении график на рис. 2,в полностью аналогичен рис. 2,б, изменится лишь диапазон значений по вертикальной оси. Поскольку рисунки строятся в безразмерном виде, то точно такой же вид, как рис. 2,в, будет иметь график, построенный при $R = 10$ мкм и $\tau_r = 10^{-5}$ с.

При $R = 100$ мкм и размерном характерном времени релаксации $\tau_r = 10^{-3}$ с график примет вид, приведенный на рис. 2,г. Видно, что декремент затухания ветвей “1” и “2” по сравнению с рис. 2,в немного уменьшится.

В случае заряженной струи, картина корней дисперсионного уравнения останется такой же, однако, область реализации затухающего капиллярного волнового движения смещается по оси абсцисс вправо, тем дальше, чем больше заряд, приходящийся на единицу длины струи, см. рис. 2,д и рис. 2,е. Видно также, что при появлении на струе заряда достаточной величины отдельные ветви начинают взаимодействовать между собой с образованием новых ветвей.

Из рис. 2,а–е видно, что ордината начала третьей ветви (релаксационной) обратно пропорциональна безразмерному характерному времени τ_r .

8. Хлыстообразная асимметричная мода. На рис. 3,а приведен график зависимости частоты капиллярной волны от волнового числа для незаряженной струи с азимутальным числом $m = 1$ в отсутствии учета эффекта релаксации поверхностного натяжения, рассчитанный по дисперсионному уравнению (4.1). Видно, что декременты ветвей “1” и “2” равны нулю.

При учете эффекта релаксации поверхностного натяжения рассчитывать график будем по уравнению (5.3) и он будет иметь вид, приведенный на рис. 3,б. По сравнению с рис. 3,а на графике появилась ветвь “3”, а декременты ветвей “1” и “2”, равные друг другу, стали отличными от нуля. Иными словами, при $k > 0$ имеются две ветви капиллярных волн: “1” и “2” (сплошные линии), с отличными от нуля и равными по величине декрементами (пунктирные линии “1, 2”). Это наталкивает на мысль, что декременты капиллярных волн и чисто релаксационных движений все имеют релаксационную природу.

На рис. 3,в–д приведены рассчитанные по (5.3) графики для заряженных струй, с учетом динамического поверхностного натяжения. Из этих рисунков видно, что при появлении заряда на струе область существования капиллярного волнового движения смещается вдоль оси абсцисс в область больших значений волновых чисел (в область более коротких волн). В окрестности начала координат (для длинных капиллярных волн) вдоль оси абсцисс появляется растущая с увеличением величины заряда на единицу длины струи область аperiodически растущей неустойчивости, что соответствует отрыву капель. При дальнейшем увеличении величины заряда на струе отдельные ветви начинают взаимодействовать между собой и появляются новые затухающие волновые движения.

9. Электростатическая неустойчивость моды с $m = 2$. На рис. 4,а приведен график зависимости частоты капиллярных волн от волнового числа для незаряженной струи с азимутальным числом $m = 2$ в отсутствии учета эффекта релаксации поверхностного

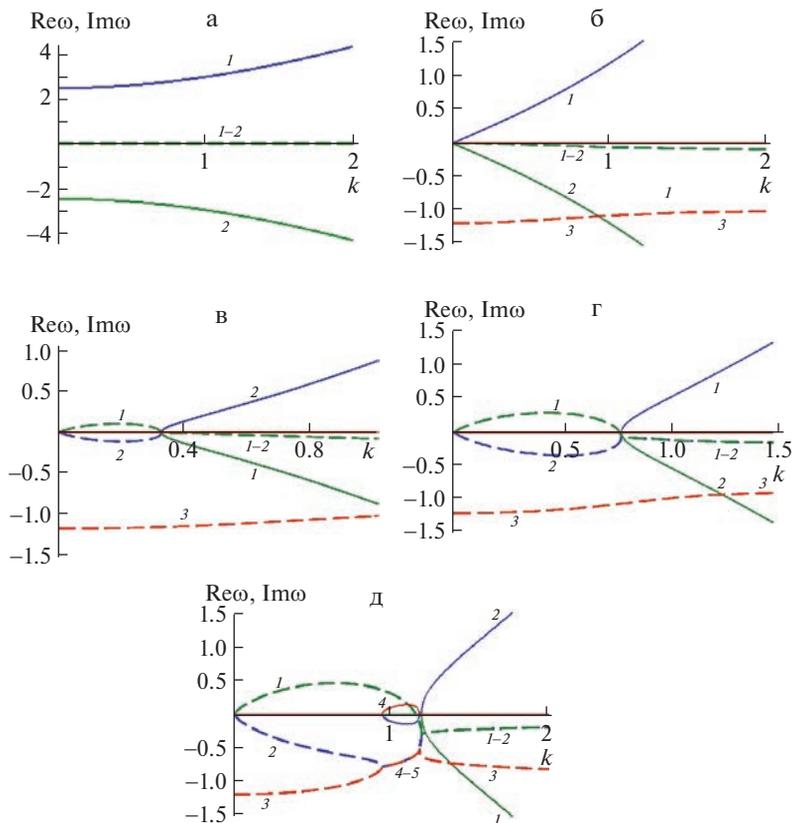


Рис. 3. Графики, построенные по дисперсионным уравнениям для азимутальной моды с $m = 1$, $R = 100$ мкм: а) $\Sigma = 1$; $\tau_r = 0$; $w = 0$; б) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 0$; в) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 0.7$; г) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 1.2$; д) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 1.6$.

натяжения, рассчитанный по дисперсионному уравнению (4.1). Видно, что инкремент и декремент для незаряженной не релаксирующей струи равны нулю.

На рис. 4,б уже учтен эффект релаксации поверхностного натяжения, в итоге декременты волнового движения стали отличными от нуля, и появилась еще одна ветвь “3”, соответствующая чисто релаксационному затуханию возмущений поверхности струи.

Появление заряда на струе (см. рис. 4,в) приводит к деформации и смещению ветвей дисперсионного уравнения: ветвь затухания капиллярных волн “1, 2” (соответствующая мнимым значениям частот) уходит дальше в область отрицательных значений, т.е. декремент увеличивается, а ветвь “3”, соответствующая аperiodическим движениям, поднимается вверх и при $w = 2.9$ почти доходит до оси абсцисс. При дальнейшем незначительном увеличении заряда, приходящегося на единицу длины струи, релаксационная ветвь “3” частично переходит в область положительных значений мнимых частей частот, то есть в некоем диапазоне волновых чисел превращается из декремента в инкремент неустойчивости, рис. 4,г. Точка, с которой начинается такой переход, характеризуется значениями: $w \approx 2.904$, $k \approx 0.789$. При дальнейшем увеличении заряда на струе эта тенденция перехода ветви “3” в область положительных ординат усиливается.

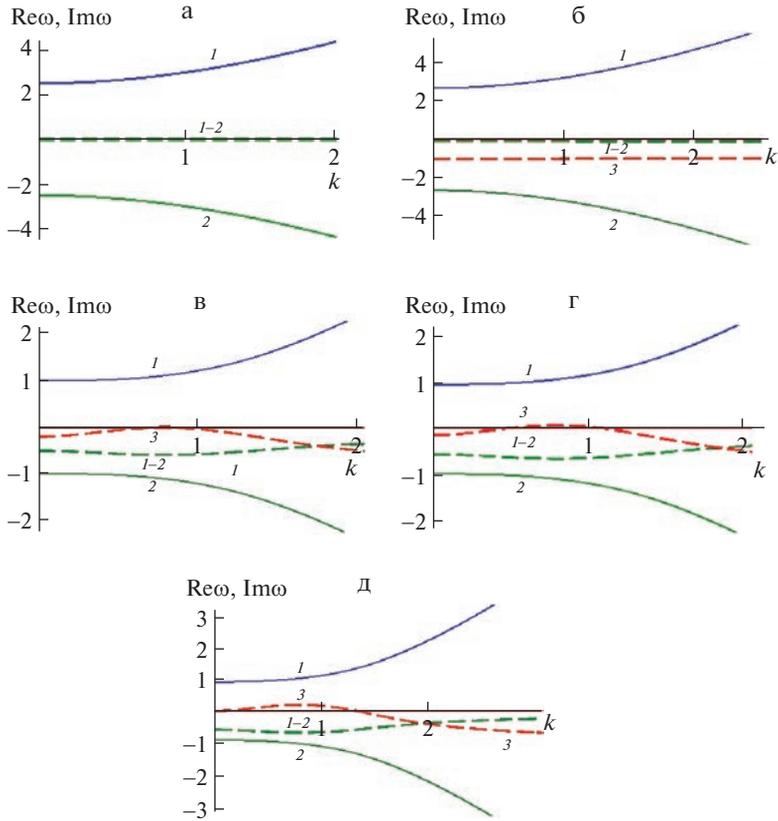


Рис. 4. Графики, построенные по дисперсионным уравнениям для азимутальной моды с $m = 2$, $R = 100$ мкм: а) $\Sigma = 1$; $\tau_r = 0$; $w = 0$; б) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 0$; в) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 2.9$; г) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 2.94$; д) $\Sigma = 1.23$; $\tau_r = 0.85$; $w = 3$.

ется (рис. 4,д). Этот факт удивительно точно (с точностью до третьего знака после запятой) совпадает с результатами работ [16, 25], в которых исследовались иными методами критические условия реализации электростатической неустойчивости азимутальной моды струи с $m = 2$.

Таким образом, электростатическая неустойчивость азимутальной моды с $m = 2$ начинается с перехода релаксационной ветви апериодических движений “3” из области отрицательных ординат в область положительных.

Следует отметить, что в [16, 25] ставилась цель: определить критические условия различных азимутальных мод струи, для более точного толкования результатов экспериментов по электродиспергированию электропроводной жидкости в [23], но не было цели связать неустойчивость с той, либо иной ветвью дисперсионного уравнения.

Заключение. Методами математического моделирования на упрощенной модели исследуется влияние эффекта релаксации поверхностного натяжения полярной жидкости на закономерности реализации капиллярного волнового движения и развития неустойчивости первых трех азимутальных мод капиллярных колебаний поверхности заряженных идеальных несжимаемых электропроводных жидких струй. Оказалось, что учет эффекта релаксации поверхностного натяжения приводит к повышению по-

рядка дисперсионного уравнения, у которого появляется еще один затухающий непериодический корень релаксационной природы, который можно связать с разрушением упорядоченности диполей воды в приповерхностном двойном электрическом слое. При достаточно больших электрических зарядах, приходящихся на единицу длины струи, именно этот релаксационный корень становится неустойчивым.

В обнаруженном затухании интересно то, что оно имеет место в идеальной жидкости. В используемой идеализированной модели релаксационное движение, появляющееся при включении эффекта динамического поверхностного натяжения, инкременты и декременты волновых движений имеют релаксационную природу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я.И. Теория явлений атмосферного электричества. Л.; М.: Гостехтеориздат, 1949. 155 с.
2. Бор Н. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом колебания струй // Нильс Бор. Избр. научн. тр. М.: Наука, 1970. С. 7–50. 584 с.
3. Бор Н. К определению коэффициента поверхностного натяжения воды свежееобразованной поверхности воды // Нильс Бор. Избр. научн. тр. М.: Наука, 1970. С. 5–59. 584 с.
4. Owens D.K. The dynamic surface tension of sodium dodecyl sulfate solutions // J. Colloid&Interface Sci. 1969. V. 29. № 3. P. 496–501.
5. Kochurova N.N., Rusanov A.I. Dynamic surface properties of water: Surface tension and surface potential // J. Colloid&Interface Sci. 1981. V. 81. № 2. P. 297–303.
6. Aytouna M., Bartolo D., Wegdam G., Bonn D., Rafai A. Impact dynamics of surfactant laden drops: dynamic surface tension effects // Exper. in Fluids. 2010. V. 48. № 1. P. 49–57.
7. Nagata Y., Ohto T., Bonn M., Kuhne T. Surface tension of ab initio liquid water at the water-air interface // J. Chem. Phys. 2016. V. 144. № 20. 204705.
8. Hauner I.M., Deblais A., Beattie J.K., Kellay H., Bonn D. The dynamic surface tension of water // Phys. Chem. Lett. 2017. V. 8. P. 1599–1603.
9. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348.
10. Бьковский Ю.А., Манькин Э.А., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г. Спектр поверхностных колебаний жидкости с учетом релаксационных эффектов // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 10. С. 2211–2213.
11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
12. Григорьев А.И., Михеев Г.Е., Ширяева С.О. Электростатическая неустойчивость поверхности объемно заряженной струи диэлектрической жидкости, движущейся относительно материальной среды // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 5. С. 3–14.
DOI: 10.7868/S0568528117050012
13. Левич В.Л. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
15. Левачева Г.А., Манькин Э.А., Полуэктов П.П. О спектре колебаний форм мицеллярной частицы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 17–22.
16. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электростатическая неустойчивость высоких азимутальных мод заряженной струи // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 3. С. 48–55.
DOI: 10.31857/S0568528121030051
17. Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
19. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Спонтанный распад струй. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2012. 204 с.

20. *Schweizer J.W., Hanson D.N.* Stability limit of charged drops // *J. Colloid&Interface Sci.* 1971. V. 35. № 3. P. 417–423.
21. *Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al.* Rayleigh jets from levitated micro droplets // *Nature.* 2003. V. 421. P. 128.
22. *Grimm R.L., Beauchamp J.L.* Dynamics of field-induced droplet ionization: time-resolved studies of distortion, jetting, and progeny formation from charged and neutral methanol droplet exposed to strong electric fields // *J. Phys. Chem. B.* 2005. V. 109. P. 8244–8250.
23. *Cloupeau M., Prunet Foch B.* Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review // *J. Aerosol Sci.* 1994. V. 25. № 6. P. 1021–1035.
24. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
25. *Григорьев А.И.* Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости // *ЖТФ.* 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 36–45.

Effect of Surface Tension Relaxation on the Stability of the Charged Jet

A. I. Grigoryev^{a,#}, N. Yu. Kolbneva^{b,##}, and S. O. Shiryaeva^{b,###}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*

[#]*e-mail: grigori@mail.ru*

^{##}*e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru*

^{###}*e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

In the asymptotic calculations of the first order of smallness by the dimensionless amplitude of capillary waves on the surface of charged jets of polar liquid, the effect of the relaxation effect of surface tension on the regularities of their implementation is investigated. Calculations are carried out on the model of an ideal non-compressible electrically conductive fluid. It has been shown that taking into account the effect of dynamic surface tension leads to an increase in the order of the dispersion equation, which has another damping root, which is obliged to destroy the near-surface double electric layer (destruction of the ordering of polar molecules in the near-surface layer), which undergoes electrostatic instability at sufficiently large charges (pre-breakdown in the sense of ignition of corona discharge in air). In the ideal fluid mathematical model used, the relaxation motion of the jet surface disturbances that occurs when the surface tension relaxation effect is turned on and the attenuation decrements of capillary wave motions are purely of a relaxation nature.

Keywords: charged jet, surface tension relaxation, decrement

REFERENCES

1. *Frenkel J.I.* Theory of Atmospheric Electricity Phenomena. Leningrad;Moscow: Gostekhteorizdat, 1949. 155 p.
2. *Bor N.* Determination of water surface tension coefficient by jet oscillation // in: Niels Bor. Selected scientific works. Moscow: Nauka, pp. 7–50. 1970. 584 p. (in Russian)
3. *Bor N.* To determine the coefficient of surface tension of water of freshly formed surface of water // in: Niels Bor. Selected scientific works. Moscow: Nauka, pp. 5–59. 1970. 584 p. (in Russian)
4. *Owens D.K.* The dynamic surface tension of sodium dodecyl sulfate solutions // *J. Colloid&Interface Sci.*, 1969, vol. 29, no. 3, pp. 496–501.
5. *Kochurova N.N., Rusanov A.I.* Dynamic surface properties of water: Surface tension and surface potential // *J. Colloid&Interface Sci.*, 1981, vol. 81, no. 2, pp. 297–303. (in Russian)
6. *Aytouna M., Bartolo D., Wegdam G., Bonn D., Rafai A.* Impact dynamics of surfactant laden drops: dynamic surface tension effects // *Exper. in Fluids*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 49–57.
7. *Nagata Y., Ohto T., Bonn M., Kuhne T.* Surface tension of ab initio liquid water at the water-air interface // *J. Chem. Phys.*, 2016, vol. 144, no. 20, 204705.
8. *Hauer I.M., Deblais A., Beattie J.K., Kellay H., Bonn D.* The dynamic surface tension of water // *Phys. Chem. Lett.*, 2017, vol. 8, pp. 1599–1603.

9. *Frenkel J.I.* To the theory of Tonks about the rupture of the surface of a liquid by a constant electric field in a vacuum // JETP, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348. (in Russian)
10. *Bykovsky Yu.A., Manykin E.A., Nakhutin I.E., Poluektov P.P., Rubezhniy Yu.G.* Spectrum of surface vibrations of liquid taking into account relaxation effects // ZhTF, 1976, vol. 46, no. 10, pp. 2211–2213. (in Russian)
11. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.; L.: Acad. Press.
12. *Grigor'ev A.I., Mikheev G.E., Shiryayeva S.O.* Electrostatic instability of the surface of a volume charged jet of dielectric liquid moving relative to the surrounding medium // Fluid Dyn., 2017, vol. 52, no. 5, pp. 599–609. DOI: 10.1134/S0015462817050015
13. *Levich V.L.* Physicochemical Hydrodynamics. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 700 p. (in Russian)
14. *Abramowitz M., Steegun I.* Special Functions Handbook. Moscow: Nauka, 1979. 830 p.
15. *Levacheva G.A., Manykin E.A., Poluektov P.P.* On the spectrum of oscillations in the forms of a micellar particle // Izv. USSR AS, Fluid&Gas Mech., 1985, no. 2, pp. 17–22. (in Russian)
16. *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* Electrostatic instability of the higher-order azimuthal modes of a charged jet // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, no. 3, pp. 353–360. DOI: 10.1134/S0015462821030058
17. *Rayleigh.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag., 1882, vol. 14, pp. 184–186.
18. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (in Russian)
19. *Shiryayeva S.O., Grigoriev A.I.* Spontaneous Jet Decay. Yaroslavl: YarSU, 2012. 204 p. (in Russian)
20. *Schweizer J.W., Hanson D.N.* Stability limit of charged drops // J. Colloid&Interface Sci., 1971, vol. 35, no. 3, pp. 417–423.
21. *Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al.* Rayleigh jets from levitated micro droplets // Nature, 2003, vol. 421, pp. 128.
22. *Grimm R.L., Beauchamp J.L.* Dynamics of field-induced droplet ionization: time-resolved studies of distortion, jetting, and progeny formation from charged and neutral methanol droplet exposed to strong electric fields // J. Phys. Chem. B, 2005, vol. 109, pp. 8244–8250.
23. *Cloupeau M., Prunet Foch B.* Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review // J. Aerosol Sci., 1994, vol. 25, no. 6, pp. 1021–1035.
24. *Frenkel J.I.* Kinetic Theory of Liquids. Leningrad: Nauka, 1975. 592 p. (in Russian)
25. *Grigoriev A.I.* Electrostatic instability of a highly charged jet of electrically conductive liquid // ZhTF, 2009, vol. 79, no. 4, pp. 36–45. (in Russian)

УДК 532.5

ОДНОМЕРНОЕ РАСТЕКАНИЕ НЕФТЕПРОДУКТОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

© 2023 г. А. В. Кистович^{1,*}, Т. О. Чаплина^{1,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

*e-mail: kavmendeleevo@mail.ru,

**e-mail: tanya.06@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Экспериментально и теоретически исследован процесс квазиодномерного растекания пятен нефтепродуктов по поверхности воды. В основе теоретической модели лежит приближенное уравнение, полученное при использовании законов сохранения массы разлившегося продукта и полной энергии системы. Представлены приближенные решения этого уравнения и результаты экспериментальных исследований по растеканию в узком протяженном контейнере машинного масла и сырой нефти, и показано их хорошее соответствие теории. Проведено сравнение с процессом двумерного осесимметричного растекания пятна таких же нефтепродуктов.

Ключевые слова: моделирование, квазиодномерное растекание, машинное масло, сырая нефть, коэффициент сопротивления формы

DOI: 10.31857/S0032823523060061, EDN: GYYKUG

1. Введение. Экспериментальному и теоретическому изучению растекания нефти и нефтепродуктов посвящена обширная научная литература, из которых к наиболее известным относятся работы [1–8]. Упомянутые работы содержат, ставшее почти обязательным, сравнение экспериментальных результатов с теоретическими предсказаниями, что связано с полуэмпирической природой математических моделей распространения. По этой причине необходимо проведение более глубокого изучения модели распространения, самая продвинутая версия которой, достигнутая в [6], все еще недостаточно точна для требуемого уровня понимания процессов, происходящих при распространении нефтепродуктов в различных природных условиях. Представленная в [9] простая модель осесимметричного радиального растекания, основанная на исследовании динамики полной энергии системы “вода–нефтепродукт”, показала хорошее совпадение экспериментальных и теоретических результатов. В большинстве естественных ситуаций разливы нефтепродуктов происходят на двумерной поверхности (открытые водные пространства заливов, озер, морей и т.д.), но также возможны и особые условия (каналы, реки, узкие аквариумы и т.д.), когда поверхность разлива можно считать одномерной [7, 8]. В данной работе представлена, основанная на энергетическом подходе, упрощенная математическая модель, позволяющая исследовать основные динамические параметры такого типа растекания. При этом химический состав и все термодинамические параметры сред считаются постоянными величинами, масса растекающегося пятна предполагается неизменной, все среды однородны, изотропны и несжимаемы.

2. Квазиодномерное растекание нефтепродукта. Ниже представлен приближенный расчет параметров разлива, в основу модели которого положена форма нефтяного пятна в виде полосы, ширина D которой постоянна, а его длина $L(t)$ вдоль оси x и толщина $h(t)$ вдоль оси z являются функциями времени. Полоса и нижележащая вода ограничены непроницаемой стенкой при $x = 0$. Структура течения нефти внутри полосы такова, что в надводной части жидкие частицы нефти движутся вниз и от стенки, а в нижней части – вверх и от стенки. Этот тип течения находится в соответствии с движением поверхностей пятна при разливе: верхняя граница (граница раздела “нефть–воздух”) движется вниз, а нижняя (граница раздела “нефть–вода”) движется вверх.

Для описания энергетических соотношений системы “нефть–вода” используется модель нефтяного пятна, помещенного на поверхность воды, содержащейся в призме ширины D и длины L_w . Изначально, при отсутствии нефти, глубина воды была равна H . Пусть в некоторый момент времени длина нефтяного пятна равна L_o , а толщина – h .

Координаты верхней и нижней границ нефтяного пятна в момент времени t задаются величинами $z = h_{\pm}(t)$, так что толщина пятна

$$h(t) = h_+(t) - h_-(t), \quad (2.1)$$

а его длина равна L_o . Уровень свободной поверхности воды в этот момент времени обозначен символом H' . Один из параметров проблемы – объем нефтяного пятна

$$V = DL_o(t)h(t) = DL_o(t)(h_+(t) - h_-(t)) = \text{const}, \quad (2.2)$$

который остается неизменным в течение всего времени разлива.

Исходя из закона сохранения объема воды

$$hL_o + H'(L_w - L_o) = HL_w \quad (2.3)$$

и закона Архимеда

$$(H' - h_-)\rho_w = (h_+ - h_-)\rho_o = h\rho_o, \quad (2.4)$$

получаются необходимые соотношения

$$H' = \frac{H - L_*h}{1 - L_*}, \quad h_- = H - (1 - L_*)\rho h, \quad h_+ = H + (1 - (1 - L_*)\rho)h, \quad (2.5)$$

где $\rho = \rho_o/\rho_w$, $L_* = L_o/L_w$.

При $L_w \gg L_o \sim L_* \rightarrow 0$ соотношения (2.5) приобретают вид

$$H' = H, \quad h_- = H - \rho h, \quad h_+ = H + (1 - \rho)h \quad (2.6)$$

Обратимся теперь к расчету энергетических характеристик системы. В постоянном поле силы тяжести потенциальная энергия системы, изображенной на рис. 1, с учетом (2.6) определяется соотношением

$$\Pi = \frac{\rho_w L_w D}{2} H^2 g + \frac{\rho_o L_o D}{2} h^2 g (1 - \rho) \quad (2.7)$$

Поверхностная энергия задается выражением

$$E_S = L_o D (\sigma_{ow} + \sigma_{oa}) + (L_w - L_o) D \sigma_{aw} = L_w D \sigma_{aw} + L_o D (\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}), \quad (2.8)$$

где σ_{ij} – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела i -й и j -й сред.

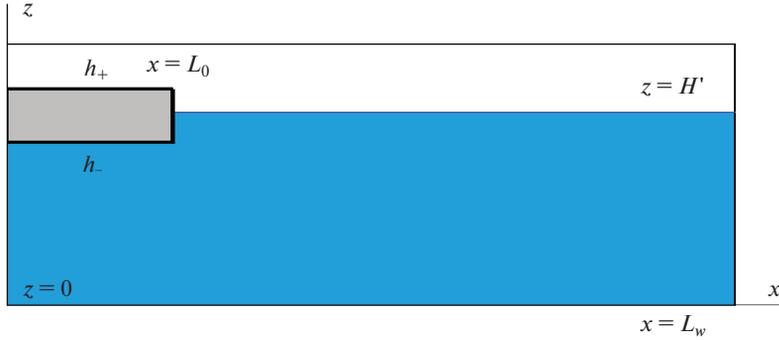


Рис. 1. Модель расчета энергетического состояния системы.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии нефти и воды и имеет вид

$$T = \frac{D}{2} \left[\rho_w \int_{L_0}^{L_w} \int_0^H \mathbf{w}^2 dx dz + \rho_w \int_0^{L_0} \int_0^{h_-} \mathbf{w}^2 dx dz + \rho_o \int_0^{L_0} \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{v}^2 dx dz \right], \quad (2.9)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{w} — поля скорости в нефти и воде соответственно.

Скорость вязкой диссипации энергии в системе задается выражением

$$\dot{E}_v = \frac{D}{2\eta_w} \left[\int_{L_0}^{L_w} \int_0^H \Sigma_w dx dz + \int_0^{L_0} \int_0^{h_-} \Sigma_w dx dz \right] + \frac{D}{2\eta_o} \int_0^{L_0} \int_{h_-}^{h_+} \Sigma_o dx dz, \quad (2.10)$$

где $\Sigma_i = \sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + \sigma_{zz}^2$, причем элементы тензора вязких напряжений вычисляются для i -той среды.

Таким образом, имеет место

$$\begin{aligned} \Sigma_w &= 2\eta_w^2 \left[2(\partial w_x / \partial x)^2 + (\partial w_x / \partial z + \partial w_z / \partial x)^2 + 2(\partial w_z / \partial z)^2 \right] \\ \Sigma_o &= 2\eta_o^2 \left[2(\partial v_x / \partial x)^2 + (\partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x)^2 + 2(\partial v_z / \partial z)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

В выражениях (2.7) и (2.8) величины $\rho_w L_w D H^2 g / 2$ и $L_w D \sigma_{aw}$ описывают потенциальную и поверхностную энергии воды до помещения на нее нефтяного пятна. Отбрасывание этих членов и перенос начала оси z на исходную поверхность воды, и, с учетом того, что протяженность акватории существенно больше протяженности разлива, устремляя размер системы к бесконечности ($L_w \rightarrow \infty \sim L_* \rightarrow 0$), а также вводя для сокращения записи обозначение $L_0 = L(t)$, получаем окончательные выражения для энергетических характеристик одномерного нефтяного разлива

$$\Pi = \frac{M_o g}{2} h(1 - \rho), \quad (2.12)$$

где M_o — масса нефти, постоянная величина,

$$E_S = LD(\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}) = M_o g \frac{\lambda_S^2}{h} \operatorname{sgn}(\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}), \quad (2.13)$$

где $\lambda_S = \sqrt{|\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}| / \rho_o g}$ — капиллярная постоянная контактной линии “нефть–вода–воздух”

$$T = \frac{D}{2} \left[\rho_w \int_{L_o}^{\infty} \int_{-H}^0 \mathbf{w}^2 dx dz + \rho_w \int_0^{L_o} \int_{-H}^{h_c} \mathbf{w}^2 dx dz + \rho_o \int_0^{L_o} \int_{h_c}^{h_u} \mathbf{v}^2 dx dz \right] \quad (2.14)$$

$$\dot{E}_v = \frac{D}{2\eta_w} \left[\int_{L_o}^{\infty} \int_{-H}^0 \Sigma_w dx dz + \int_0^{L_o} \int_{-H}^{h_c} \Sigma_w dx dz \right] + \frac{D}{2\eta_o} \int_0^{L_o} \int_{h_c}^{h_u} \Sigma_o dx dz \quad (2.15)$$

Уравнение динамики энергии системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (T + \Pi + E_S) = -\dot{E}_v \quad (2.16)$$

Для того, чтобы система уравнений (2.1), (2.2), (2.11)–(2.16) приводила к конструктивным результатам, необходимо задаться моделью поля скорости в нефти и воде.

Поле скорости в нефти должно удовлетворять граничным условиям вида

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=L(t)} = \dot{L}(t), \quad v_z|_{z=h_c(t)} = \dot{h}_c(t) \quad (2.17)$$

$$w_x|_{x=0} = 0, \quad w_x|_{x=L, z \in [h_c, 0]} = \dot{L}, \quad w_z|_{z=0, r > L} = 0, \quad w_z|_{z=h_c, r \leq L} = \dot{h}_c \quad (2.18)$$

$$\mathbf{w}|_{x=\infty} = 0, \quad \mathbf{w}|_{z=-H} = 0,$$

где точка над символом обозначает производную по времени.

Распределение скорости в нефти с учетом вязкого увлечения воды задается выражением [9]

$$v_x = \frac{\dot{L}}{L} x (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o))$$

$$v_z = \dot{h}_c - 2 \frac{\dot{L}}{L} \sqrt{v_o t} \left[\zeta_o (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o)) + \frac{\kappa_{ow}}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_o^2} \right], \quad (2.19)$$

а в воде распределение скорости при $0 \leq x \leq L(t)$ имеет вид

$$w_x = \frac{\dot{L}}{L} x \kappa_{wo} \operatorname{erfc}(\zeta_w) + \frac{\partial \Phi_w}{\partial x}$$

$$w_z = 2 \kappa_{wo} \frac{\dot{L}}{L} \sqrt{v_w t} \left[\zeta_w \operatorname{erfc}(\zeta_w) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_w^2} \right] + \frac{\partial \Phi_w}{\partial z}, \quad (2.20)$$

где введены обозначения

$$\zeta_o = \frac{z - h_c}{2\sqrt{v_o t}}, \quad \zeta_w = \frac{h_c - z}{2\sqrt{v_w t}}, \quad \kappa_{ow} = \frac{\rho_w \sqrt{v_w}}{\rho_o \sqrt{v_o} + \rho_w \sqrt{v_w}}, \quad \kappa_{wo} = 1 - \kappa_{ow} \quad (2.21)$$

Расчет кинетической энергии по соотношению (2.14) дает величину главного члена (без учета той части кинетической энергии воды, которая обусловлена сопротивлением формы нефтяного пятна)

$$T = \frac{M_o \alpha^2}{6} \dot{L}^2, \quad \alpha^2 = (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_h))^2, \quad \zeta_h = \frac{h}{2\sqrt{v_o t}} \quad (2.22)$$

Мощность производства кинетической энергии воды за счет сопротивления формы нефтяного пятна при его растекании определяется выражением

$$P_{kw} = C_{sh} \dot{L}^2, \quad (2.23)$$

где C_{sh} – коэффициент сопротивления формы.

Анализ составляющих уравнения (2.16) и использование приближений, подобных тем, которые были проведены в случае с азимутально симметричным пятном [9], приводят к уравнению вида

$$\ddot{L} + 2a^2 \dot{L} - \frac{b^2}{L^2} + c^2 \operatorname{sgn}(\sigma) = 0, \quad (2.24)$$

где введены обозначения

$$a^2 = \frac{3C_f}{2M_o\alpha^2}, \quad b^2 = \frac{3gV(1-\rho)}{2D\alpha^2}, \quad c^2 = \frac{3gD\lambda_s^2}{V\alpha^2} \quad (2.25)$$

В качестве начальных условий для уравнения (2.24) выбираются значения длины разлива L и скорости его края \dot{L} в некоторый начальный момент времени

$$L|_{t=0} = L_0, \quad \dot{L}|_{t=0} = L_1 \quad (2.26)$$

I. Сначала рассматривается случай разлива конечных размеров, когда $\text{sgn } \sigma = 1$. Положение равновесия задается величиной $L_* = c/b$.

I.1. Начальные моменты времени разлива. В этом случае толщина нефтяного пятна h существенно больше капиллярной постоянной λ_s и последним членом в уравнении (2.24) можно пренебречь, так что справедливо приближенное уравнение

$$\ddot{L} + 2a^2\dot{L} - \frac{b^2}{L^2} = 0, \quad (2.27)$$

решение которого имеет вид

$$L = \frac{3L_0}{2} + \frac{e^{-a^2t}}{\rho} \begin{cases} L_1 \sin(\rho t) - \frac{L_0\rho}{2} \left(\cos(\rho t) + a^2 \frac{\sin(\rho t)}{\rho} \right), & a^4 - \frac{2b^2}{L_0^3} < 0 \\ L_1 \text{sh}(\rho t) - \frac{L_0\rho}{2} \left(\text{ch}(\rho t) + a^2 \frac{\text{sh}(\rho t)}{\rho} \right), & a^4 - \frac{2b^2}{L_0^3} > 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{|a^4 - 2b^2/L_0^3|}.$$

На малых временах оба соотношения (2.28) описывают единое поведение размера нефтяного пятна во времени

$$L = L_0 + L_1 t + \frac{b^2 - 2L_1 L_0^2 a^2}{2L_0^2} t^2 + o(t^2),$$

которое определяется относительными вкладами гравитационных, инерциальных эффектов и явлением сопротивления формы нефтяного пятна.

I.2. Вблизи положения равновесия решение принимает вид

$$L = L_* + e^{-a^2t} \begin{cases} A \cos(\rho t) + B \sin(\rho t), & a^4 - \frac{2b^2}{L_*^3} < 0 \\ A \text{ch}(\rho t) + B \text{sh}(\rho t), & a^4 - \frac{2b^2}{L_*^3} > 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{|a^4 - 2b^2/L_*^3|}.$$

II. Теперь рассматривается случай разлива неограниченных размеров, когда $\text{sgn } \sigma = -1$. Положение равновесия отсутствует.

II.1. Начальные моменты времени разлива. В этом случае так же, как и в случае I.1 толщина нефтяного пятна h существенно больше капиллярной постоянной λ_s и искоемое решение совпадает с решением (2.28).

II.2. На больших временах, когда $L \gg L_*$, в уравнении (2.24) можно пренебречь членом b^2/L^2 , в результате чего это уравнение приобретает вид

$$\ddot{L} + 2a^2\dot{L} - c^2 = 0 \quad (2.30)$$

Пусть в некоторый “начальный” момент времени $t = t_*$ (отличающийся от начального момента разлива, чтобы выполнялось условие $L \gg L_*$) и при $t \rightarrow \infty$ выполняются условия

$$L|_{t=t_*} = L_0, \quad \dot{L}|_{t=t_*} = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} L = \infty \quad (2.31)$$

Тогда решение задачи (2.30, 2.31) представимо в форме

$$L = L_0 + \frac{c^2}{4a^4} \left(2a^2 (t - t_*) - 1 + e^{-2a^2(t-t_*)} \right) + \frac{L_1}{2a^2} \left(1 - e^{-2a^2(t-t_*)} \right), \quad (2.32)$$

причем, согласно выражению для скорости роста разлива, получаемого дифференцированием (2.32)

$$\dot{L} = \frac{c^2}{2a^2} \left(1 - e^{-2a^2(t-t_*)} \right) + L_1 e^{-2a^2(t-t_*)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{c^2}{2a^2}, \quad (2.33)$$

на больших временах имеет место линейное приращение площади разлива, что отличается от экспоненциального приращения площади аксиально симметричного нефтяного пятна [9, 10].

3. Экспериментальные результаты и сравнение с аналитической моделью. В эксперименте использовалось машинное масло Volga M8B-SAE 20 API ($\rho_o = 883.7$ кг/м³, $\nu_o = 3.34 \times 10^{-4}$ м²/с, при температуре $T = 20^\circ\text{C}$) и сырая нефть Мамонтовского месторождения ($\rho_o = 878.0$ кг/м³, $\nu_o = 2.15 \times 10^{-5}$ м²/с, при температуре $T = 20^\circ\text{C}$). В опытах использовался пластиковый контейнер ($0.29 \times 0.08 \times 0.08$ м), который заполнялся дегазированной водой, температурой $T = 20^\circ\text{C}$.

Экспериментальный метод включал нанесение различных количеств (5, 10, 15 мл) моторного масла Volga M8B-S AE 20 API и сырой нефти Мамонтовского месторождения на поверхность воды площадью 37.35 см², ограниченной пластиковой перегородкой, после устранения которой, растекание происходит только в одном направлении.

На фотографии рис. 2 показана экспериментальная кювета, заполненная водой с нефтью (темная область в левой части кюветы) в первые моменты времени после устранения ограничивающей перегородки.

Ход экспериментов записывался с помощью цифровой камеры в автоматическом режиме, съемка велась с частотой 360 кадров в минуту, а полученные последовательности кадров обрабатывались и анализировались. Положение пятна нефтепродуктов регистрировали с использованием метода фотометрии обработанных изображений, полученных из исходных кадров методами пакетной обработки.

Рис. 3,а иллюстрирует поведение размера пятна нефтепродукта в случае, когда выполняется условие $a^4 - 2b^2/L_*^3 > 0$ (машинное масло) и возможно положение равновесия. Здесь и далее экспериментальные результаты представлены после численной обработки методом [11], устраняющим погрешности измерений при наличии различных временных масштабов, проявляющихся в исследуемом явлении. Рис. 3,а показывает хорошее качественное совпадение теоретических и экспериментальных данных изменения площади масляного пятна. Количественное сравнение результатов крайне затруднено отсутствием необходимых численных значений физических характеристик нефтепродуктов, так как производители машинных масел и нефти не могут их предоставить. По этой же причине не указаны количественные отсчеты на теоретических графиках.



Рис. 2. Фото экспериментальной кюветы с нанесенной на воду нефтью и убранной перегородкой.

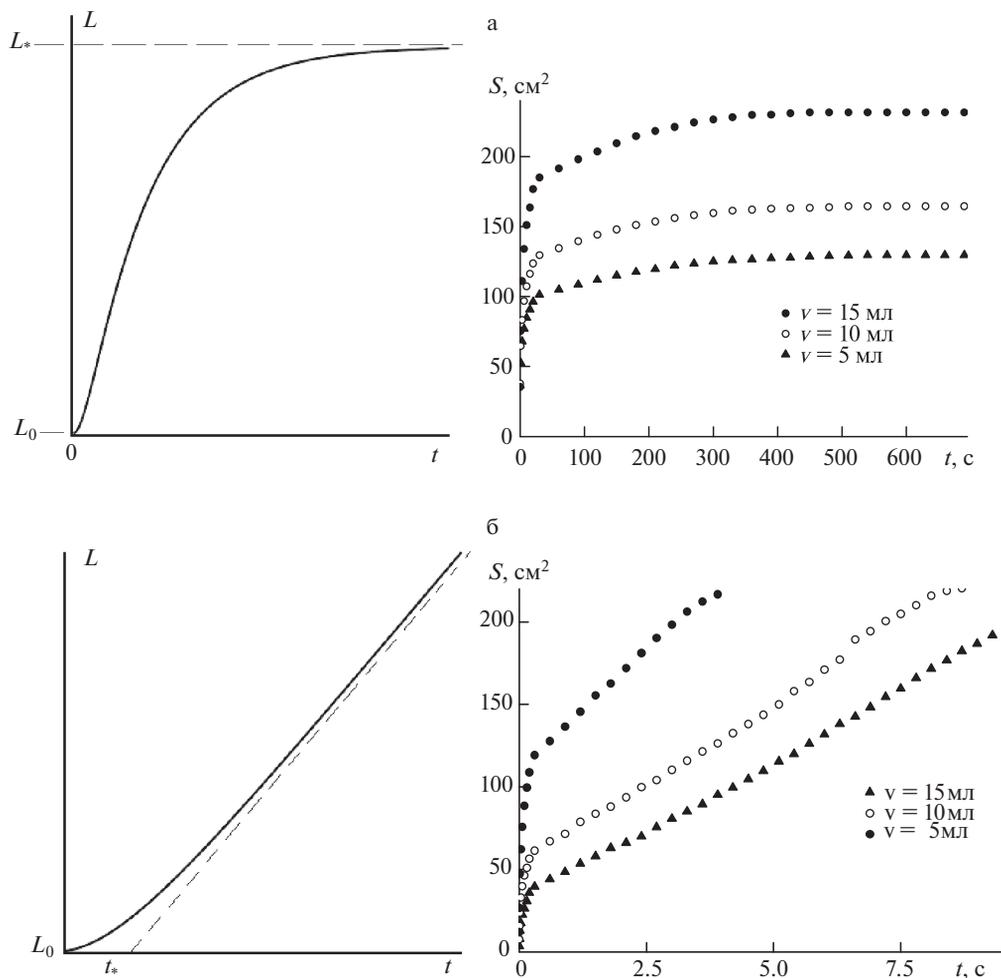


Рис. 3 а: Ограниченный рост пятна машинного масла. — сплошная кривая; б: Неограниченный рост пятна сырой нефти. — сплошная кривая слева а: теория (2.28); б: теория (2.32) для больших времен; справа наборы измерительных экспериментальных точек.

При обратном отношении $a^4 - 2b^2/L_*^3 < 0$ изменение размеров нефтяного пятна отличается затухающим колебательным характером вблизи положения равновесия. Затухание колебаний связано с генерацией движения воды за счет сопротивления

формы нефтяного пятна при его распространении по поверхности воды. Необходимо отметить, что в рассмотренных случаях характер поведения размера пятна качественно совпадает с поведением площади нефтяного пятна при аксиально симметричном разливе [9, 10].

Результаты теоретических расчетов и экспериментов с сырой нефтью приведены на рис. 3,б. В экспериментах отклонение закона роста площади пятна от линейного на конечных этапах разлива (рис. 3,б) связано с приближением края пятна к концу экспериментального контейнера, где структура течения в воде заведомо отличается от теоретической модели, в которой контейнер имеет неограниченные размеры.

Сравнение графиков рис. 3,б показывает совпадение теоретических и экспериментальных результатов – на основной и завершающей стадиях роста нефтяного пятна увеличение его площади происходит по линейному закону, в отличие от экспоненциального закона роста, наблюдаемом при двумерном осесимметричном разливе [9, 10].

Заключение. Подобно двумерному осесимметричному растеканию квазиодномерное растекание проявляет наличие тех же характерных режимов: ограниченное растекание с монотонным или колебательным характером стремления к предельному размеру пятна машинного масла и неограниченное растекание сырой нефти.

В отличие от неограниченного двумерного осесимметричного растекания сырой нефти, когда скорость роста площади пятна подчиняется экспоненциальному закону [9, 10], в одномерном случае имеет место линейная зависимость площади от времени.

Работа выполнена в рамках госзадания FFGN-2023-0006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fay J.A.* The spreading of oil slicks on a calm sea from oil on the sea // in: *Oil on the Sea* / Ed. by *Hoult D.P.* New York: Plenum Press, 1969. P. 53–64.
2. *Garrett W.D., Berger W.R.* Factors affecting the use of monomolecular surface films to control oil pollution on water // *Environ. Sci. & Technol.* 1970. V. 4. Iss. 2. P. 123–127.
3. *Cross R.H., Hoult D.P.* Collection of oil slicks // in: *Harbours and Coastal Engineering Division* / Ed. by *Waterways J.* ASCE. 1971. V. 97. P. 313.
4. *Hoult D.P.* Oil spreading on the sea // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1972. V. 4. P. 341–368.
5. *Buckmaster J.* Viscous-gravity spreading of an oil slick // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 59. Pt. 3. P. 481–491.
6. *DiPietro N.D., Huh C., Cox R.G.* The hydrodynamics of the spreading of one liquid on the surface of another // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 84. Pt. 3. P. 529–549.
7. *Hoult D.P., Suchon W.* The spread of the oil in a channel // *Fluid Mech. Lab. Rep. Dept. Mech. Engng. MIT.* 1970. 25 p.
8. *Huh C., Inoue M., Mason S.G.* Unidirectional spreading of one liquid on the surface of another // *Canad. J. Chem. Engng.* 1975. V. 53. P. 367–371.
9. *Кистович А.В., Чаплина Т.О., Пахненко В.П.* Радиальное растекание нефтепродуктов по поверхности воды // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 6. С. 956–974.
10. *Кистович А.В., Чаплина Т.О., Пахненко В.П.* Растекание технических масел и сырой нефти по поверхности воды // *Докл. РАН.* 2023. Т. 508. № 2. С. 290–296.
DOI: 10.31857/S2686739722601211
11. *Солодкий Д.А., Кистович А.В.* Модифицированный сдвиговый алгоритм обработки измерительных данных // *Измер. техн.* 2014. № 11. С. 43–47.

One-Dimensional Spreading of Petroleum Products on the Surface of the Water

A. V. Kistovich^{a,#} and T. O. Chaplina^{a,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: kavmendelevo@mail.ru*

^{##}*e-mail: tanya75.06@rambler.ru*

The process of quasi-one-dimensional spreading of oil product spots on the water surface has been experimentally and theoretically investigated. The theoretical model is based on an approximate equation obtained using the laws of conservation of the mass of the decomposed product and the total energy of the system. Approximate solutions of this equation and the results of experimental studies on the spreading of machine oil and crude oil in a narrow extended container are presented, and their good compliance with the theory is shown. A comparison is made with the process of two-dimensional axisymmetric spreading of a spot of the same petroleum products.

Keywords: modeling, quasi-one-dimensional spreading, engine oil, crude oil, resistance shape coefficient

REFERENCES

1. *Fay J.A.* The spreading of oil slicks on a calm sea from oil on the sea // in: *Oil on the Sea* / Ed. by *Hoult D.P.* N.Y.: Plenum Press, 1969, pp. 53–64.
2. *Garrett W.D., Berger W.R.* Factors affecting the use of monomolecular surface films to control oil pollution on water // *Environ. Sci.&Technol.*, 1970, vol. 4, iss. 2, pp. 123–127.
3. *Cross R.H., Hoult D.P.* Collection of oil slicks // in: *Harbours and Coastal Engineering Division* / Ed. by *Waterways J.* ASCE, 1971, vol. 97, pp. 313.
4. *Hoult D.P.* Oil spreading on the sea // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1972, vol. 4, pp. 341–368.
5. *Buckmaster J.* Viscous-gravity spreading of an oil slick // *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 59, pt. 3, pp. 481–491.
6. *DiPietro N.D., Huh C., Cox R.G.* The hydrodynamics of the spreading of one liquid on the surface of another // *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 84, pt. 3, pp. 529–549.
7. *Hoult D.P., Suchon W.* The spread of the oil in a channel // *Fluid Mech. Lab. Rep. Dept. Mech. Engng. MIT*, 1970, 25 p.
8. *Huh C., Inoue M., Mason S.G.* Unidirectional spreading of one liquid on the surface of another // *Canad. J. Chem. Engng.*, 1975, vol. 53, pp. 367–371.
9. *Kistovich A.V., Chaplina T.O., Pakhnenko V.P.* On the radial spread of petroleum products on the surface of water // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, pp. 1008–1022. DOI: 10.1134/S0015462822080043
10. *Kistovich A.V., Chaplina T.O., Pakhnenko V.P.* Spreading of technical oils and crude oil on the water surface // *Dokl. Earth Sc.*, 2022, vol. 507 (suppl 3), pp. 474–479. DOI: 10.1134/S1028334X22601638
11. *Solodkii D.M., Kistovich A.V.* Modified shift algorithm for processing measured data // *Meas. Tech.*, 2015, vol. 57, no. 11, pp. 1287–1292. DOI: 10.1007/s11018-015-0622-5

УДК 539.3:532.5

ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАВАЮЩЕМ ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2023 г. Ж. В. Маленко^{1,2,*}, А. А. Ярошенко^{1,2,**}¹Филиал государственного морского университета им. Адмирала Ф.Ф. Ушакова,
Севастополь, Россия²Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

*e-mail: zhvla17@mail.ru

**e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 15.09.2023 г.

Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. По поверхности пластины перемещается источник возмущений. Получены значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. Определены угловые зоны, в которых распространяются волны. Исследовано влияние скорости перемещения источника возмущений, толщины ледяной пластины, сил сжатия и растяжения на амплитуды образующихся волн.

Ключевые слова: упругая пластина, ледяной покров, изгибно-гравитационные волны, критическая скорость

DOI: 10.31857/S0032823523060115, EDN: AOECZR

1. Введение. В зимний период многие реки, озера и водоемы Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока покрываются ледяным покровом. Создаются условия для организации на них ледовых дорог и переправ для доставки по ним грузов. Одна из самых известных ледовых дорог была создана во время Великой Отечественной войны на Ладожском озере для доставки по ней грузов в осажденный Ленинград. Группа ученых под руководством Кобеко П.П., проведя серию экспериментов, разработала рекомендацию по движению транспортных средств по ледяному покрову [1]. Ими была предписана определенная скорость движения автомобилей, чтобы избежать явления резонанса, вызванного изгибно-гравитационной волной.

На северо-западе Канады находится одна из самых опасных зимних дорог мира – Tuktoyaktuk Winter Road или Mackenzie Ice Road. Она пролегает частично по замерзшему руслу реки Маккензи, частично по замерзшему морю Бофорта. Самый длинный в мире автозимник находится в Чукотском автономном округе. Он проложен по льду Восточно-Сибирского моря и соединяет город Певек с селом Айон. Протяженность его составляет 120 км.

С другой стороны необходимость продления навигации на замерзающих водных путях ставит задачу разрушения ледяного покрова. Для этих целей используются суда на воздушной подушке, которые, двигаясь с определенной скоростью, создают условия для разрушения ледяного покрова. К одним из первых работ, посвященных этой

проблеме, можно отнести работы [2, 3]. Дальнейшие исследования в этом направлении были продолжены Козиным В.М. и его учениками [4–6].

Исследования плавающего ледяного покрова при движении по нему различного рода нагрузок строятся в зависимости от того, является ли разрушение льда желательным или нежелательным. Возникает необходимость исследований поведения ледяного покрова при движении по нему источника возмущений. Важно знать поведение ледяного покрова в зависимости от скорости перемещения нагрузки, знать критические скорости, при которых возможно разрушение ледяного покрова.

Первый систематический подход, посвященный исследованию реакций бесконечной пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины H , от воздействий на нее различного рода нагрузок, принадлежит Хейсину Д.Е. [7]. Он проанализировал прогибы пластины, вызванные равномерно движущейся нагрузкой, и показал, что в случае плоской деформации существует две критические скорости.

Дальнейшее исследование трехмерных изгибно-гравитационных волн, вызванных движущимися возмущениями, нашло свое отражение в работах [8–11] и многих других.

Одними из первых зарубежных работ, посвященных исследованию изгибных волн в плавающих ледяных покровах, вызванных движущимися нагрузками, были работы Wilson J.T. [12, 13]. В коллективной монографии [14] приводится анализ и библиография основных работ зарубежных авторов вплоть до 1995 года, посвященных перемещению грузов по ледяному покрову. Среди последних исследований по этой теме можно отметить работы: [15–22].

Исследованию колебаний сплошного ледяного покрова при воздействии на него изгибно-гравитационных волн от движущихся погруженных тел посвящены работы [23–30]. В монографии [23] проанализирована возможность использования подводных судов для разрушения ледяного покрова. Приводятся результаты экспериментальных исследований. Изучено [24] влияние скорости движения погруженного тела, толщины плавающего льда, сжимающих и растягивающих усилий на распределение прогибов в ледяном покрове. Исследован [25] докритический режим движения диполя (сферы), при котором ледяной покров не совершает колебательные движения. Рассмотрена [26] плоская задача о движении диполя в жидкости с плавающим ледяным покровом при движении его со сверхкритическими скоростями. Монография [27] посвящена экспериментальным исследованиям разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов. Эксперименты проводились в опытовом ледовом бассейне Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. Экспериментально и теоретически исследовалось [28] влияние глубины опытового бассейна на прогибы ледяного покрова при движении модели под ним. При проведении экспериментов ледяной покров получался путем замораживания поверхностного слоя воды, либо использовался резиновый лист, плавающий на поверхности жидкости. В монографии [29] кроме экспериментальных исследований изложены результаты численного и теоретического моделирования движения погруженного тела в приповерхностной водной среде, как для свободной поверхности, так и при наличии ледяного покрова. Изучено [30] движение сферы в жидкости бесконечной глубины под плавающим ледяным покровом при неравномерном его сжатии. Анализируется величина прогиба льда в зависимости от его толщины, скорости движения и глубины его погружения, а также направления движения.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния скорости перемещения источника возмущений, сил сжатия и растяжений, а также толщины ледяного покрова на амплитуды трехмерных изгибно-гравитационных волн. Проведено [31] исследование в случае отсутствия сил сжатия и растяжения.

2. Постановка задачи. На поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины плавает ледяной покров, который моделируется тонкой упругой изотропной пластиной, по поверхности которой перемещается источник возмущений вида:

$$p = p_0 f(x_1, y); \quad x_1 = x + vt \quad (2.1)$$

В горизонтальных направлениях пластина и жидкость не ограничены. Считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц и прогиб пластины малыми, в системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений (2.1), задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ

$$\Delta\phi = 0; \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, \quad y < \infty \quad (2.2)$$

с граничными условиями:

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -p_1 f(x, y) \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2.3)$$

где $D_1 = \frac{D}{\rho g}$, $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$, $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $p_1 = \frac{p_0}{\rho g}$, $\nabla^4 = \Delta_1^2$, $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ρ – плотность жидкости, E, h, ρ_1, μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки, Q – сжимающее усилие, ζ – возвышение поверхности пластина–жидкость. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

3. Аналитическое решение задачи. Применяя для решения задачи (2.2)–(2.3) интегральное преобразование Фурье по горизонтальным координатам, получим следующее интегральное представление для прогиба пластинки – возвышения поверхности пластина-жидкость:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right), \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \quad (3.1)$$

где $\tau = ((1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4) M(r))^{1/2}$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH$, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $k_0 = rv \cos \theta - \tau$, $f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилие удовлетворяют условию $Q_1 < Q_0$, где $Q_0 = q_1(r_4)$, r_4 – положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид:

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1}$$

$$q_2 = \operatorname{th} rH + rH(\operatorname{ch} rH)^{-2}, \quad q_3 = (1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH) \operatorname{th} rH$$

Для $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ существенно меняется структура волнового движения. За источником возмущений происходит наложение волн [32].

Заменим путь интегрирования во втором интеграле (3.1) на контур L , идущий по действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ с обходом полюсов $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ в комплексной плоскости θ по малым полуокружностям снизу и сверху соответственно, что обеспечивает выполнение условия излучения для прогиба ледяного покрова ζ и потенциала скорости течения жидкости ϕ . Здесь $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $\tau_0 = (rv)^{-1} \tau$. Так как подынтегральное выражение в (3.1) на отрезках $[0, r_1]$ и $[r_2, \infty]$ не имеет особенностей, то, применяя последовательно метод стационарной фазы и интегрирование по частям, получим:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left(\int_{r_1}^{r_2} r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right) + O(R^{-1}) \quad (3.2)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_L k^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \quad (3.3)$$

здесь r_1 и r_2 – вещественные корни уравнения $\tau'_0(r) = 1$.

Вычислим контурный интеграл (3.3) с учетом знаков выражения $\operatorname{Re}(i \cos(\theta - \gamma))$ на малых полуокружностях, обходящих точки $\theta = \theta_{1,2}$, и подставим в (3.2). Затем, применяя для вычисления интеграла (3.2) метод стационарной фазы, получим, что в зависимости от скорости перемещения нагрузки на границе раздела пластина-жидкость образуется от одной до трех систем изгибно-гравитационных волн с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$:

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < v < v_0 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_0 < v < v_1 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH} \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v > \sqrt{gH}, \end{cases}$$

где $\zeta_k = R^{-1/2} \Psi_j(\alpha_k) \cos(R\Phi_j(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4)$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$,

$$\Psi_j = -f_1(r)M(r)(v\tau\sqrt{1-\tau_0^2})^{-1}(2\pi|\Phi_j''|)^{-1/2}, \quad f_1(r) = f^*(r)\rho_1$$

$$\Phi_{1,2} = r(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1-\tau_0^2} \sin \gamma),$$

$f^*(r) = (b/r)J_1(rb)$, J_1 – функция Бесселя, b – радиус круга, по площади которого равномерно распределена нагрузка, α_k – действительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \tau_2(r)$,

$$\tau_2 = (r\tau_0)' \sqrt{1-\tau_0^2} (1-\tau_0(r\tau_0)')^{-1}.$$

Здесь $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, $v_1 = \tau_3(r_3)$, $\tau_3 = ((\tau/r)^2 - (\tau'(r\tau' - \tau)^2/r^3\tau''))^{1/2}$, r_3 – действительный корень уравнения $\tau'_3(r) = 0$, $r_3 < r_0$, где v_0 – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны, v_1 – скорость, при которой совпадают фазовые скорости изгибно-гравитационной, упругой и гравитационной волн, \sqrt{gH} – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

В табл. 1 приведены значения критических скоростей v_0 и v_1 , при которых меняется характер волнового возмущения. Здесь и далее для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \times 10^9$ Н/м², $\mu = 0.34$, $\rho = 870$ кг/м³, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $h = 0.2$ м, $H = 100$ м, $b = 2$ м.

Таким образом:

$$\text{если } 0 < v < v_0, \quad \text{то } \zeta = O(R^{-1}), \quad (3.4)$$

$$\text{если } v_0 < v < v_1, \quad \text{то } \zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}), \quad 0 \leq |\gamma| \leq \pi, \quad (3.5)$$

если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то при

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_1 \leq |\gamma| \leq \pi \end{cases} \quad (3.6)$$

Таблица 1. Значения критических скоростей v_0 и v_1 для сил сжатия и растяжения

| $Q = k\sqrt{D\rho g}$ | v_0 (м/с) | | v_1 (м/с) | |
|-----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | $h = 0.2$ м | $h = 0.5$ м | $h = 0.2$ м | $h = 0.5$ м |
| $-1.5\sqrt{D\rho g}$ | 10.2 | 14.4 | 18.7 | 23.4 |
| $-1.0\sqrt{D\rho g}$ | 9.6 | 13.6 | 17.4 | 22.6 |
| $-0.5\sqrt{D\rho g}$ | 8.9 | 12.5 | 15.8 | 21.3 |
| 0 | 8.1 | 11.3 | 14.0 | 19.4 |
| $0.5\sqrt{D\rho g}$ | 7.2 | 9.9 | 12.3 | 16.6 |
| $1.0\sqrt{D\rho g}$ | 6.0 | 8.2 | 10.0 | 13.6 |
| $1.5\sqrt{D\rho g}$ | 4.2 | 6.4 | 6.3 | 8.6 |

$$\text{если } v > \sqrt{gH}, \text{ то } \zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2 \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi \end{cases} \quad (3.7)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — значения угловых зон, в которых распространяются волны, находят-ся по следующим формулам:

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \arctg((v^2/gH) - 1)^{-1/2},$$

α_4, α_5 — действительные корни уравнения $\tau_2^2(r) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3$, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$, при $\gamma = \gamma_1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$, при $\gamma = \gamma_2$.

4. Анализ полученных результатов. На рис. 1–7 приведено распределение амплитуд изгибно-гравитационных волн. Шкала делений по осям координат x и u дана в метрах. Отклонение изолиний амплитуд волнового движения дано в миллиметрах.

При $v < v_0$ волны с амплитудой затухания как $R^{-1/2}$ не образуются — (3.4). Отклоне-ние не волнообразно и напоминает статический прогиб как при стационарной нагрузке.

При $v_0 < v < v_1$ образуется изгибно-гравитационная волна ζ_3 — (3.5). На рис. 1–2 представлено распределение амплитуды этой волны для сил растяжения и сжатия со-ответственно. Волны, распространяющиеся впереди источника, более короткие и их амплитуда меньше амплитуды более длинных волн, распространяющихся за источни-ком. При движении источника со скоростью близкой к v_0 максимум амплитуды нахо-дится по трассе движения (рис. 1). При увеличении скорости максимум смещается от трассы (рис. 2), и при $v = v_1$ максимальное значение амплитуды будет на лучах $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ и $\gamma = -\gamma_1 = -\gamma_2$. Увеличение сил растяжения увеличивает амплитуду волны ζ_3 , а увеличение сил сжатия и толщины ледяного покрова уменьшает ее.

При $v_1 < v < \sqrt{gH}$ образуются три системы изгибно-гравитационных волн — $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ (3.6). Волны ζ_3 распространяются впереди источника, а ζ_1 и ζ_2 за источником воз-мущений внутри угловых зон $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$ и $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$ соответственно. Упругая волна ζ_3 распространяется в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$.

На рис. 3–5 приведены амплитуды поперечной волны ζ_1 (рис. 3), продольной ζ_2 (рис. 4) и упругой волны ζ_3 (рис. 5).

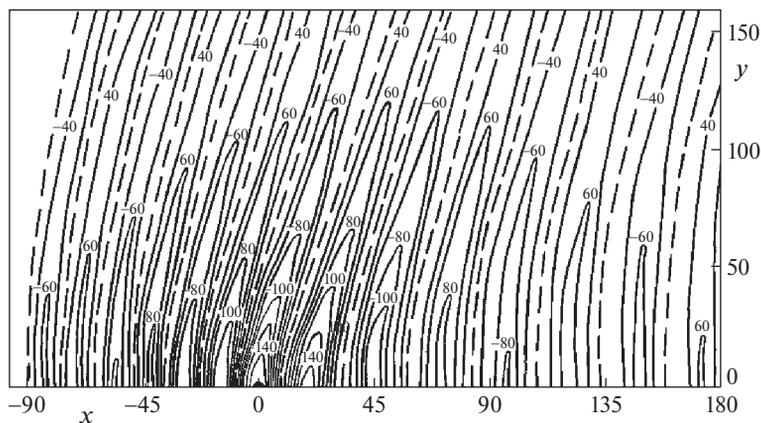


Рис. 1. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $v = 10$ м/с, ($v_0 < v < v_1$), $Q_1 = -\sqrt{D_1}$

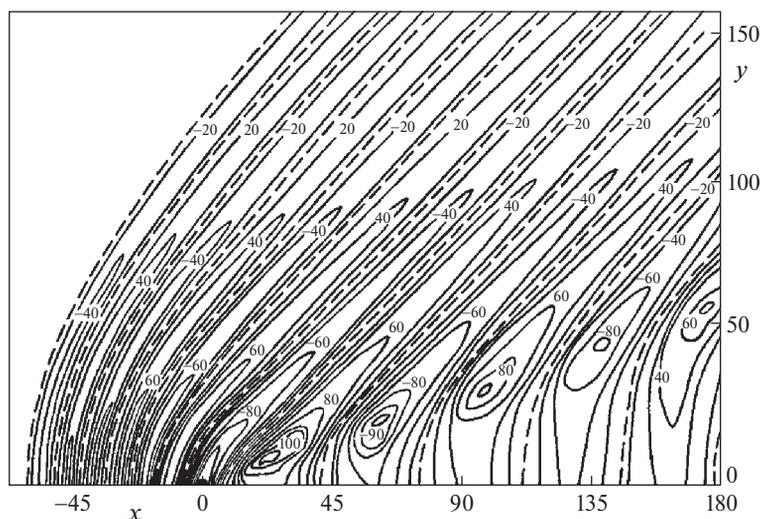


Рис. 2. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для $v = 10$ м/с, ($v_0 < v < v_1$), $Q_1 = 0.5\sqrt{D_1}$

Амплитуда поперечной волны ζ_1 меньше амплитуды продольной ζ_2 и упругой ζ_3 волн. Силы сжатия и растяжения существенного влияния на амплитуды волн ζ_1 и ζ_2 не оказывают. При увеличении сжимающих усилий амплитуда упругой волны ζ_3 увеличивается и уменьшается при увеличении сил растяжения. Увеличение толщины ледяного покрова уменьшает амплитуды волн ζ_2 , ζ_3 и не оказывает существенного влияния на амплитуду волны ζ_1 . Наибольшее влияние на амплитуды волн оказывает скорость перемещения нагрузки. Увеличение скорости уменьшает амплитуды всех трех волн.

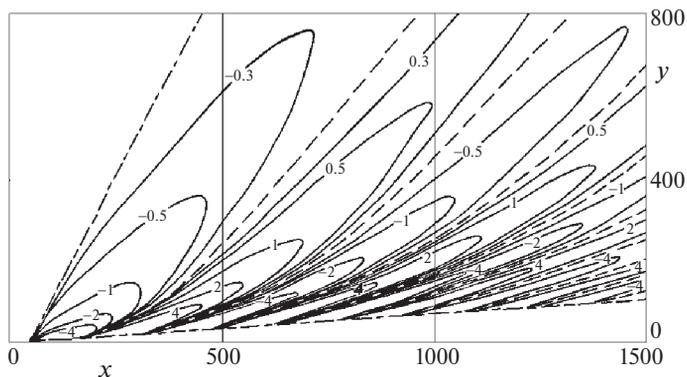


Рис. 6. Амплитуда продольной волны ζ_2 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$), $Q_1 = \sqrt{D_1}$

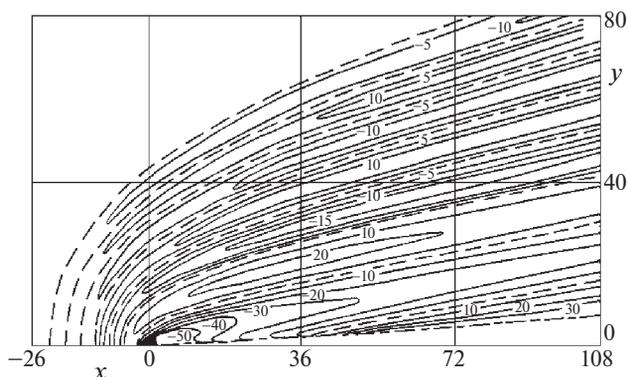


Рис. 7. Амплитуда упругой волны ζ_3 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$), $Q_1 = \sqrt{D_1}$

При $v > \sqrt{gH}$ образуются две системы волн – продольные ζ_2 и упругие ζ_3 – (3.7). На рис. 6 и 7 приведены амплитуды продольной ζ_2 и упругой ζ_3 волн соответственно.

Продольные волны ζ_2 распространяются за источником возмущений в угловой зоне $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$, а упругие волны ζ_3 впереди источника возмущений в области $\gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi$. Увеличение сил сжатия, растяжения и толщины ледяного покрова на амплитуду волны ζ_2 существенного влияния не оказывает. Амплитуда упругой волны уменьшается при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. При увеличении сил сжатия амплитуда волны ζ_3 увеличивается. С увеличением скорости движения источника возмущений, амплитуды волн ζ_2 и ζ_3 , как и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, уменьшаются.

Заключение. Наибольший интерес для практических целей имеют критические скорости v_0 и v_1 . Транспортное средство при перемещении по ледяному покрову должно двигаться со скоростью либо меньше v_0 , либо больше v_1 , чтобы избежать разрушения льда. С другой стороны для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке должно двигаться с критической скоростью v_0 или v_1 . Амплитуды образующихся

волн уменьшаются при движении со скоростью $v > v_1$. При движении с критической скоростью равной \sqrt{gH} происходит изменение характера волнового возмущения, но на амплитуды образующихся волн существенного влияния это не оказывает. Амплитуды образующихся волн уменьшаются при движении со скоростью $v > v_1$.

При уменьшении толщины ледяного покрова и глубины жидкости уменьшаются значения критических скоростей v_0 и v_1 . С уменьшением глубины жидкости уменьшается разница между значениями критических скоростей. Таким образом, для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке может двигаться с меньшей критической скоростью.

Силы растяжения увеличивают значения критических скоростей v_0 и v_1 , а силы сжатия уменьшают. Однако, при $Q_1 > Q_0$ значение критической скорости v_1 увеличивается, а значение v_0 продолжает уменьшаться, стремясь к нулю при $Q_1 \rightarrow 2\sqrt{D_1}$.

Силы сжатия и растяжения оказывают существенное влияние на амплитуду упругой волны ζ_3 и не оказывают существенного влияния на амплитуды волн ζ_1 и ζ_2 , имеющих характер поперечной и продольной корабельных волн соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов И.К., Кобеко П.П., Шульман А.Р.* Деформация ледяного покрова при движении грузов // ЖТФ. 1946. Т. 16. Вып. 3. С. 257–262.
2. *Зуев В.А.* Средства продления навигации на внутренних водных путях. Ленинград: Судостроение, 1986. 208 с.
3. *Зуев В.А., Козин В.М.* Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1988. 128 с.
4. *Жесткая В.Д., Козин В.М.* Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. Владивосток: Дальнаука, 2003. 161 с.
5. *Козин В.М.* Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперимент. М.: Академия естествознания, 2007. 355 с.
6. *Козин В.М., Земляк В.Л., Рогожникова Е.Г., Погорелова А.В.* Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 120 с.
7. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Ленинград: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
8. *Доценко С.Ф.* О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 5. С. 26–32.
9. *Букатов А.Е., Ярошенко А.А.* Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 78–83.
10. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: МГИ, 2017. 360 с.
11. *Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чужимов С.Д. и др.* Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Академия естествознания, 2008. 329 с.
12. *Wilson J.T.* Coupling between moving loads and flexural waves in floating ice sheets // US Army SIPRE. Rep. 34. 1955. P. 1–33.
13. *Wilson J.T.* Moving loads on floating ice sheets. // Project 2432. Univ. Michigan Res. Inst. 1958. 22 p.
14. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. Springer Sci.&Business Media, 2012. 236 p.
15. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc. Roy. Soc. A. 2018. V. 474. Iss. 2209. 19 p.
DOI: 10.1098/rspa.2017.0223.

16. *Dinvay E., Kalisch H., Päräu E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 876. P. 122–149. DOI: 10.1017/jfm.2019.530
17. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Res.* 2019. V. 86. P. 154–165.
18. *Ткачева Л.А.* Волновое движение в ледяном покрове с трещиной при равномерном движении нагрузки // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 1. С. 17–35. DOI: 10.1134/S0568528119010158
19. *Ткачева Л.А.* Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 2. С. 113–122. DOI: 10.31857/S0568528123700044
20. *Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 63–72. DOI: 10.31857/S0568528121040125
21. *Ильичев А.Т.* Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // *ТМФ.* 2021. Т. 208. № 3. С. 387–408. DOI: 10.4213/tmf10092
22. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // *Изв. РАН. ФАО.* 2023. Т. 59. № 3. С. 346–351. DOI: 10.31857/S0002351523030033
23. *Козин В.М., Онищук А.В., Марьин Б.Н., Иванов Ю.Л. и др.* Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. Владивосток: Дальнаука, 2005. 191 с.
24. *Стурова И.В.* Движение погруженной сферы в жидкости под ледяным покровом // *ПММ.* 2012. № 3. С. 406–417.
25. *Савин А.С., Савин А.А.* Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. №5. С.16–23.
26. *Ильичев А.Т., Савин А.С.* Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости // *ТМФ.* 2017. Т. 193. № 3. С. 455–465. DOI: 10.4213/tmf9356
27. *Козин В.М., Земляк В.Л., Баурин Н.О., Ипатов К.И.* Экспериментальные исследования влияния ледовых условий на эффективность разрушения ледяного покрова изгибно-гравитационными волнами от движения подводных судов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 142 с.
28. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.* 2019. V. 31(3). P. 562–569. DOI: 10.1007/s42241-018-0143-1
29. *Земляк В.Л., Козин В.М., Погорелова А.В., Васильев А.С.* Движение погруженного тела в приповерхностной водной среде, покрытой ледяным покровом. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 126 с.
30. *Ткачева Л.А.* Движение сферы под ледяным покровом при неравномерном сжатии // *ПМТФ.* 2022. Т. 63. № 2 (372). С. 12–24. DOI: 10.15372/PMTF20220202
31. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // *Морские интел. технол.* 2021. Т. 4(52). № 2. С. 157–161. DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
32. *Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Маркина Е.В. и др.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений в условиях равномерного сжатия // *Морские интел. технол.* 2022. № 4(58). С. 251–257. DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050

Three-Dimensional Bending-Gravitational Waves in a Floating Ice Sheet from a Moving Source of Disturbances

Zh. V. Malenko^{a,b,#} and A. A. Yaroshenko^{a,b,##}

^aBranch of the Admiral F.F. Ushakov State Maritime University in Sevastopol, Sevastopol, Russia

^bSevastopol State University, Sevastopol, Russia

[#]e-mail: zhvla17@mail.ru

^{##}e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

The ice cover is modeled by a thin elastic isotropic plate floating on the surface of a liquid of finite depth. The source of disturbances moves along the surface of the plate. The values of critical velocities at which the character of the wave disturbance changes are obtained. The

angular zones in which the waves propagate are determined. The influence of the velocity of movement of the source of disturbances, the thickness of the ice plate, compression and stretching forces on the amplitudes of the waves formed is investigated.

Keywords: elastic plate, ice cover, bending-gravitational waves, critical speed

REFERENCES

1. *Ivanov I.K., Kobeko P.P., Shulman A.R.* Deformation of the ice cover during the movement of goods // J. Tech. Phys., 1946, vol. 16, no. 5, pp. 257–262. (in Russian)
2. *Zuev V.A.* Means of Prolonging Navigation on Inland Waterways. Leningrad: Sudostroenie, 1986. 208 p. (in Russian)
3. *Zuev V.A., Kozin V.M.* The Use of Hovercrafts for the Destruction of the Ice Sheet. Vladivostok: Far Eastern Univ. Pub., 1988. 128 p. (in Russian)
4. *Zhestkaya V.D., Kozin V.M.* Studies of the Possibilities of Destruction of the Ice Cover by Amphibious Hovercraft by the Resonant Method. Vladivostok: Dalnauka, 2003. 161 p. (in Russian)
5. *Kozin V.M.* Resonant Method of Ice Cover Destruction. Inventions and Experiment. Moscow: Acad. Natural Sci., 2007. 355 p. (in Russian)
6. *Kozin V.M., Zemlyak V.L., Rogozhnikova E.G., Pogorelova A.V.* The Influence of Ice Conditions on the Deformed State of the Ice Cover from the Movement of the Load. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2020. 120 p. (in Russian)
7. *Heisin D.E.* Dynamics of the Ice Cover. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1967. 215 p. (in Russian)
8. *Dotsenko S.F.* Unsteady gravity-elastic and gravity-capillary ship waves // Fluid Dyn., 1978, vol. 13, no. 5, pp. 658–663. DOI: 10.1007/BF01050226
9. *Bukatov A.E., Yaroshenko A.A.* The influence of a uniformly compressed floating elastic plate on the development of three-dimensional waves in a homogeneous fluid // Fluid Dyn., 1984, vol. 19, no. 6, pp. 925–930. DOI: 10.1007/BF01411581
10. *Bukatov A.E.* Waves in the Sea with Floating Ice Cover. Sevastopol: Marine Hydrophys. Inst., 2017. 360 p. (in Russian)
11. *Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V. et al.* Applied Problems of Ice Cover Dynamics. Moscow: Acad. Natural Sci., 2008. 329 p. (in Russian)
12. *Wilson J.T.* Coupling between moving loads and flexural waves in floating ice sheets // US Army SIPRE. Rep. 34, 1955, pp. 1–33.
13. *Wilson J.T.* Moving loads on floating ice sheets. // Project 2432, Univ. Michigan Res. Inst., 1958, 22 p.
14. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. Springer Sci.&Business Media, 2012. 236 p.
15. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc. Roy. Soc. A, 2018, vol. 474, iss. 2209, 19 p. DOI: 10.1098/rspa.2017.0223
16. *Dinvay E., Kalisch H., Părău E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech., 2019, vol. 876, pp. 122–149. DOI: 10.1017/jfm.2019.530
17. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res., 2019, vol. 86, pp. 154–165.
18. *Tkacheva L.A.* Wave motion in an ice sheet with crack under uniformly moving load // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 1, pp. 14–32. DOI: 10.1134/S0015462819010154
19. *Tkacheva L.A.* Motion of a load on an ice cover in the presence of a current with velocity shear // Fluid Dyn., 2023, vol. 58, no. 2, pp. 263–273. DOI: 10.1134/S0015462823700064
20. *Sturova I.V.* Motion of a load over an ice sheet with non-uniform compression // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, no. 4, pp. 503–512. DOI: 10.1134/S0015462821040121
21. *Il'ichev A.T.* Effective wavelength of envelope waves on the water surface beneath an ice sheet: small amplitudes and moderate depths // Theor.&Math. Phys., 2021, vol. 208, no. 4, pp. 1182–1200. DOI: 10.1134/S0040577921090026

22. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Far fields at the interface between an infinitely deep ocean and ice generated by a localized source // *Izv. Atmos.&Oceanic Phys.*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 296–300. DOI: 10.1134/S0001433823030039
23. *Kozin V.M., Onishchuk A.V., Maryin B.N., Ivanov Yu.L. et al.* Ice-Breaking Ability of Bending-Gravitational Waves from the Motion of Objects. Vladivostok: Dalnauka, 2005. 191 p. (in Russian)
24. *Sturova I.V.* The motion of a submerged sphere in a liquid under an ice sheet // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 3, pp. 293–301. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.07.005
25. *Savin A.S., Savin A.A.* Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid // *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 5, pp. 613–620. DOI: 10.1134/S0015462815050026
26. *Ilyichev A.T., Savin A.S.* Process of establishing a plane-wave system on ice cover over a dipole moving uniformly in an ideal fluid column // *Theor.&Math. Phys.*, 2017, vol. 193, no. 3, pp. 1801–1810. DOI: 10.1134/S0040577917120066
27. *Kozin V.M., Zemlyak V.L., Baburin N.O., Ipatov K.I.* Experimental Studies of the Influence of Ice Conditions on the Effectiveness of the Destruction of the Ice Cover by Bending Gravity Waves from the Movement of Underwater Vessels. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2017. 142 p. (in Russian)
28. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodyn.*, 2019, vol. 31(3), pp. 562–569. DOI: 10.1007/s42241-018-0143-1
29. *Zemlyak V.L., Kozin V.M., Pogorelova A.V., Vasiliev A.S.* Motion of a Submerged Body in a Near-Surface Water Environment Covered with Ice. Novosibirsk: SB RAS Pub., 2020. 126 p. (in Russian)
30. *Tkacheva L.A.* Motion of a sphere submerged in water under an ice cover with nonuniform compression // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 187–198. DOI: 10.1134/S002189442202002X
31. *Malenko Zh.V., Yaroshenko A.A.* Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances // *Marine Intel. Technol.*, 2021, vol. 4(52), no 2, pp. 157–161. (in Russian) DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
32. *Yaroshenko A.A., Malenko Zh.V., Markina E.V. et al.* Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances under conditions of uniform compression // *Marine Intel. Technol.*, 2022, vol. 1, no. 4(58), pp. 251–257. (in Russian) DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050