

УДК 539.3

**ЗАДАЧА ОДНОСТОРОННЕГО ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА
ДЛЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ**© 2024 г. А. А. Бобылев^{1,2,*}¹*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия*²*Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Россия*

*e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 02.05.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 20.07.2024 г.

Рассмотрена задача о вдавливании жесткого штампа конечных размеров с поверхностным микрорельефом в стратифицированную упругую полосу. Приведены граничные вариационные формулировки задачи с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего нормальные напряжения в нормальные перемещения. При аппроксимации этого оператора применялось дискретное преобразование Фурье, численная реализация которого производилась с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Для вычисления передаточной функции использовалась вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. В результате аппроксимации исходной контактной задачи получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств, для численного решения которой применялся алгоритм на основе метода сопряженных градиентов. Установлен ряд закономерностей контактного взаимодействия.

Ключевые слова: односторонний дискретный контакт, стратифицированная упругая полоса, граничное вариационное неравенство, оператор Пуанкаре–Стеклова, преобразование Фурье, метод сопряженных градиентов

DOI: 10.31857/S0032823524040099, EDN: WVRLNQ

1. Введение. Одним из направлений повышения триботехнических характеристик контактирующих деталей машин и механизмов является использование функциональных покрытий. Среди существующих принципов создания покрытий перспективной является концепция многослойной архитектуры покрытий, так как подобные покрытия способны удовлетворять набору зачастую противоречивых требований. Разработан ряд технологий, позволяющих создавать композиции из чередующихся слоев функционально-градиентных материалов, представляющих собой гетерогенные структуры (композиты) с непрерывным изменением по глубине фазового состава и, как следствие, физико-механических свойств [1].

При исследовании локального контактного взаимодействия тел с покрытиями в качестве расчетной схемы, как правило, выбирается упругая полоса или слой, сцепленные с основанием. Учет поверхностного микрорельефа контактирующих тел в виде волнистости или шероховатости приводит к постановке задач дискрет-

ного (множественного) контакта [2–6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

Задача дискретного контакта односторонней упругой полосы с жестким штампом конечных размеров, имеющим поверхностный микрорельеф, рассмотрена в [8]. На поверхности возможного контакта полосы со штампом задавались условия одностороннего гладкого контакта. Отметим, что априори задавалась лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и размеры которых заранее неизвестны и подлежат определению. Вследствие этого задачи одностороннего контакта являются нелинейными. Наиболее распространенный подход к решению такого класса задач состоит в применении вариационных методов [9–11].

В [8] с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова (ОПС) получены граничные вариационные формулировки и на их основе разработан вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полосы. В настоящей работе этот алгоритм обобщен на случай стратифицированной упругой полосы. Предлагаемое обобщение состоит в использовании для построения ОПС численного алгоритма, разработанного в [12].

2. Постановка задачи. Пусть невесомая стратифицированная упругая полоса в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 занимает область $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \infty, 0 \leq x_2 \leq h\}$ и состоит из произвольного числа N изотропных упругих слоев Ω_n , границы раздела которых параллельны оси Ox_1 . Слои пронумерованы как $1, \dots, N$ в порядке возрастания координаты x_2 . Границу полосы $x_2 \equiv 0$ обозначим Γ_0 , границу раздела слоев Ω_n и Ω_{n+1} — через Γ_n , а границу полосы $x_2 \equiv h$ — через Γ_N . Параметры Ламе материала полосы являются произвольными ограниченными функциями координаты x_2 : $\lambda = \lambda(x_2)$ и $\mu = \mu(x_2)$, имеющими разрывы первого рода на границах Γ_n раздела слоев. Из физических соображений следует, что существуют постоянные $\lambda_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$, такие, что

$$\lambda(x_2) \geq \lambda_0, \mu(x_2) \geq \mu_0, 0 \leq x_2 \leq h \quad (2.1)$$

Далее под $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{x})$ будем понимать соответственно вектор перемещений и тензоры деформаций и напряжений в точке $\mathbf{x} \in \Omega_n$.

Для упрощения обозначений всюду, где это возможно, говоря о параметрах, относящихся к конкретному слою, будем опускать индекс, указывающий номер слоя.

Предполагается, что упругая полоса находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а массовые силы и напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние слоев Ω_n , $n = 1, N$, описывается системой уравнений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}, \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ в } \Omega_n, \quad (2.2)$$

где $\text{def} \equiv 1/2(\text{grad} + \text{grad}^T)$, $\mathbf{S}$ — тензор модулей упругости.

По границе Γ_0 полоса соединена с недеформируемым основанием. В случае полного сцепления граничные условия имеют вид

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0 \quad (2.3)$$

На границах раздела слоев также задаются условия полного сцепления:

$$u_1^{(n)} = u_1^{(n+1)}, u_2^{(n)} = u_2^{(n+1)}, \sigma_{12}^{(n)} = \sigma_{12}^{(n+1)}, \sigma_{22}^{(n)} = \sigma_{22}^{(n+1)} \text{ на } \Gamma_n \quad (2.4)$$

В упругую полосу вдавливается гладкий жесткий штамп, основание которого имеет поверхностный микрорельеф. Часть границы Γ_N , по которой возможен контакт полосы со штампом, обозначается Γ_p . Положение и предельные размеры Γ_p , т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Предполагается, что часть границы Γ_p является односвязной и конечной. При вдавливании штампа с поверхностным микрорельефом номинальная область контакта Γ_p включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и размеры которых заранее неизвестны.

Форма основания штампа и его поверхностный микрорельеф описываются функцией $\Phi(x_1)$, значение которой в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к границе Γ_p . Расстояние $\Phi(x_1)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию полосы. Для определенности будем полагать $\min_{\mathbf{x} \in \Gamma_p} \Phi(x_1) = 0$. Для штампа с поверхностным микрорельефом функция $\Phi(x_1)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется вектором перемещений $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ и углом поворота φ_3 штампа как жесткого целого. Перемещения и углы поворота штампа предполагаются малыми. Главный вектор $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и главный момент M_3 внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения выбирается точка $\mathbf{x}^c = (x_1^c, x_2^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта упругой полосы со штампом, поэтому будем полагать

$$\delta_1 = 0, F_1 = 0, \infty < F_2 < 0, |M_3| < \infty$$

Контактное взаимодействие упругой полосы со штампом описывается линеаризованными условиями одностороннего гладкого контакта:

$$\begin{aligned} u_2 &\leq \Phi + \delta_2 + (x_1 - x_1^c)\varphi_3, \sigma_{22} \leq 0, \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22}[u_2 - \Phi - \delta_2 - (x_1 - x_1^c)\varphi_3] &= 0 \text{ на } \Gamma_p \end{aligned} \quad (2.5)$$

Остальная часть границы Γ_N полосы свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = 0 \text{ на } \Gamma_N \setminus \Gamma_p \quad (2.6)$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_{22} d\Gamma_p = F_2, \int_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c) \sigma_{22} d\Gamma_p = M_3 \quad (2.7)$$

Отметим, что соотношения (2.7), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{22} \leq 0$ на Γ_p , удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (2.7).

Для выделения класса единственности решения в рассматриваемой контактной задаче используется условие конечности потенциальной энергии деформации упругой полосы [13]:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega < \infty \quad (2.8)$$

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})$, деформаций $\varepsilon^{(n)}(\mathbf{x})$ и напряжений $\sigma^{(n)}(\mathbf{x})$, $n = 1, N$, удовлетворяющих уравнениям (2.2), граничным условиям (2.3)–(2.6), уравнениям равновесия штампа (2.7) и условию (2.8). Также необходимо найти смещение δ_2 и поворот φ_3 штампа. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче одностороннего дискретного контакта априори задается лишь номинальная область контакта Γ_p , положение и размеры пятна фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

3. Интегральное представление решения. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для стратифицированной упругой полосы Ω : найти поля перемещений $\mathbf{u}^{(n)}$, $n = 1, N$, удовлетворяющие уравнениям (2.2), граничным условиям (2.3), (2.4) и (2.6), условию (2.8), а также граничным условиям

$$\sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = q \text{ на } \Gamma_p$$

Из результатов [13–16] следует, что если выполняются условия (2.1), то для любого $q \in L_2(\Gamma_p)$ данная задача имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_p} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1; \mathbf{x} \in \Omega_n, n = \overline{1, N}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi_1)$ — ядро интегрального представления, которое может быть интерпретировано как поле перемещений — решение краевой задачи о действии нормальной сосредоточенной единичной силы, приложенной в точке $\mathbf{x} = (\xi_1, h)$ границы Γ_p стратифицированной упругой полосы Ω .

Решение (3.2) вспомогательной краевой задачи удовлетворяет всем условиям сформулированной в разд. 2 задачи одностороннего дискретного контакта, кроме условий одностороннего гладкого контакта (2.5) и условий равновесия штампа (2.7). Поэтому использование интегрального представления (3.1) позволяет свести решение рассматриваемой контактной задачи к нахождению на Γ_p нормальных напряжений $q = \sigma_{22} \in L_2(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \leq 0 \text{ на } \Gamma_p \quad (3.2)$$

$$u_2(q) \leq \Phi + \delta_2 + (x_1 - x_1^c)\varphi_3 \text{ на } \Gamma_p \quad (3.3)$$

$$q[u_2(q) - \Phi - \delta_2 - (x_1 - x_1^c)\varphi_3] = 0 \text{ на } \Gamma_p \quad (3.4)$$

$$\int_{\Gamma_p} q d\Gamma_p = F_2, \int_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c) q d\Gamma_p = M_3, \quad (3.5)$$

где $u_2(q)$ — нормальные перемещения на Γ_p , соответствующие нормальным напряжениям q .

4. Оператор Пуанкаре—Стеклова. Для решения системы (3.2)–(3.5) построим ОПС $S_{ps} : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (3.1) нормальные напряжения $q(x_1) \equiv \sigma_{22}(x_1, h)$ на части Γ_p границы упругой полосы в нормальные перемещения $w(x_1) \equiv u_2(x_1, h)$ на Γ_p .

Соответствующее решению (3.1) представление ОПС $S_{ps} : q \mapsto w$ для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид:

$$w(x_1) = \int_{\Gamma_p} g_{ps}(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 \quad (4.1)$$

Выражение в явном виде ядра $g_{ps}(\cdot)$ интегрального представления (4.1) для произвольной стратифицированной упругой полосы неизвестно. Правая часть (4.1) является интегральным оператором типа свертки, поэтому с помощью интегрального преобразования Фурье по координате x_1 можно получить алгебраическое соотношение, связывающее трансформанты нормальных перемещений $\tilde{w}(\alpha)$ и нормальных напряжений $\tilde{q}(\alpha)$

$$\tilde{w}(\alpha) = \tilde{g}_{ps}(\alpha)\tilde{q}(\alpha), \quad (4.2)$$

где α — параметр преобразования Фурье, $\tilde{g}_{ps}(\alpha)$ — трансформанта ядра интегрального представления (4.1). Таким образом действие ОПС S_{ps} сводится к выполнению прямого и обратного преобразований Фурье и перемножению трансформант.

5. Передаточная функция оператора Пуанкаре–Стеклова. Функцию $\tilde{g}_{ps}(\alpha)$, следуя [17], будем называть передаточной функцией. В случае однородной полосы выражение для передаточной функции может быть получено аналитически [13]. Для функционально-градиентной полосы эту функцию удастся построить с помощью численно-аналитической методики при специальной зависимости ее упругих свойств по толщине, в частности степенной или экспоненциальной зависимости [4]. В случае произвольного закона изменения упругих свойств по толщине используются приближенные подходы, основанные как на прямом численном интегрировании краевых задач для систем дифференциальных уравнений по поперечной координате [15, 17], так и на замене неоднородной полосы многослойной с кусочно-постоянной зависимостью упругих модулей от координаты и сведении задачи к решению систем функциональных уравнений [16].

Вычислительные проблемы, возникающие при реализации таких подходов, обусловлены наличием экспоненциальных составляющих у фундаментальных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. Это приводит к плохой обусловленности систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при удовлетворении граничных условий, и к неустойчивости численных процедур решения задач Коши и их дискретных аналогов. Распространенным способом преодоления указанных трудностей является выделение в явном виде экспоненциальных составляющих, в результате чего проблема сводится к отысканию функций ограниченной вариации. Такой способ лежит в основе метода модулирующих функций [18].

В настоящей работе для построения передаточной функции применялся альтернативный подход [12], опирающийся на использование вариационной формулировки краевой задачи для трансформант перемещений. Аппроксимация вариационных уравнений производилась методом конечных элементов. Для численного решения задачи использовался нестационарный итерационный метод, на каждом шаге которого методом прогонки решались две системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Разработан алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость для любых значений параметра преобразования Фурье α .

В [12] проведена верификация разработанного вычислительного алгоритма для непрерывно-неоднородных полос, параметры Ламе материала которой являлись экспоненциальными функциями, и кусочно-однородных полос с полностью сцепленными слоями. Также в [12] даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток.

При решении задач дискретного контакта требуется вычислять значения передаточной функции ОПС в достаточно широком диапазоне изменения параметра преобразования Фурье α [8]. С целью уменьшения вычислительных затрат в настоящей работе для больших значений параметра α применялся алгоритм, использующий

полученное в [19] трехчленное асимптотическое разложение передаточной функции и построенные на его основе аппроксимации Паде.

6. Вариационная формулировка задачи. Для решения системы (3.2)–(3.5), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [9]. Введем необходимые для построения вариационных формулировок задачи функциональные пространства — гильбертов триплет $H^{1/2}(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ [8]. Учитывая плотность вложения $L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, ОПС S_{ps} , определенный формулой (4.1), можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и аналогично [8] рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_p)}}$, порожденное продолжением скалярного произведения в $L_2(\Gamma_p)$. Введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ непрерывные билинейную и линейную формы

$$a(p, q) = \langle p, G_{ps} q \rangle, b(p) = \langle p, \Phi \rangle,$$

предполагая, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$. Аналогично [8] можно показать, что если выполняются условия (2.1), то билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является симметричной и коэрцитивной на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

Образуем множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$V = \{p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) : p \leq 0; \langle p, 1 \rangle = F_2; \langle p, x_1 - x_1^c \rangle = M_3\} \quad (6.1)$$

Нетрудно видеть, что множество V является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Аналогично [8] можно показать, что решение $q \in L_2(\Gamma_p)$ системы (3.2)–(3.5) удовлетворяет граничному вариационному неравенству: найти $q \in V$ такой, что

$$a(p - q, q) - b(p - q) \geq 0 \quad \forall p \in V \quad (6.2)$$

Отметим, что неравенство (6.2) не содержит неизвестных смещения δ_2 и угла поворота φ_3 жесткого штампа. Как показано в [8], это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений V удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (3.5).

Используя известные приемы [9, 20, 21], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (6.2) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (3.2)–(3.5) по крайней мере в обобщенном смысле, т.е. условия (3.2) и (3.4) выполняются в смысле пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, условие (3.3) выполняется в смысле пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$, а условия (3.5) — после продолжения по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$:

$$\langle q, 1 \rangle = F_2, \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = M_3$$

Учитывая, что билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является положительно определенной, а множество V — непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (6.2) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in V$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p \in V} \{J(p) = a(p, p) / 2 - b(p)\} \quad (6.3)$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (6.2) и задачи минимизации (6.3) существует и единственно [9, 21].

7. Конечномерная аппроксимация задачи. Выбор метода аппроксимации задачи (6.3) определяется, в первую очередь, возможностью построения эффективной с вычислительной точки зрения аппроксимации ОПС (4.1). Из (4.2) следует, что действие ОПС сводится к выполнению пары (прямого и обратного) преобразований Фурье и перемножению трансформант. Использование преобразования Фурье наиболее эффективно в случае периодических функций благодаря дискретности их спектра и, как следствие, переходе от непрерывного преобразования к дискретному. Учитывая, что для стратифицированной полосы передаточная функция ОПС строится численно, основная идея используемого подхода состоит в аппроксимации искомых нормальных напряжений периодическими сеточными функциями и применении алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для уменьшения возникающей при этом ошибки периодичности [22, 23] вводится расширенная вычислительная область $\Gamma_c \subset \Gamma_N$ такая, что

$$\Gamma_p \Subset \Gamma_c, \quad D = \text{diam } \Gamma_c = k_c \text{diam } \Gamma_p; \quad k_c \in \mathbb{N}, \quad k_c > 1, \quad (7.1)$$

где k_c — коэффициент расширения вычислительной области.

Построим на Γ_c регулярную (равномерную) сетку T_c , состоящую из M одноузловых граничных элементов нулевого порядка размером $\delta_e = D / M$. Узлы T_c обозначим $t_m, m = 1, M$. Часть T_c , расположенную на Γ_p и содержащую L элементов, обозначим T_p . Из (7.1) следует, что $L = M / k_c$.

Далее векторы и матрицы будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы — соответствующими малыми латинскими буквами.

Введем на T_c сеточные функции нормальных напряжений и перемещений

$$\mathbf{Q}_c = (q(t_1), q(t_2), \dots, q(t_M)), \quad \mathbf{W}_c = (w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_M)),$$

а также редукции этих функций на T_p

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{R}\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{W}_p = \mathbf{R}\mathbf{W}_c,$$

где $\mathbf{R}$ — прямоугольная матрица размеров $L \times M$, в каждой строке которой имеется равно один ненулевой элемент, равный единице.

Обратные операции тривиального продолжения (дополнения нулевыми элементами) $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{W}_p$ на T_c могут быть выполнены с помощью транспонированной матрицы $\mathbf{R}^T$

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_p, \quad \mathbf{W}_c = \mathbf{R}^T \mathbf{W}_p$$

Введем матрицу Фурье порядка M

$$\mathbf{F} = [f_{mk}], \quad f_{mk} = \omega^{(m-1)(k-1)}, \quad \omega = \exp(-2\pi i / M)$$

Матрица Фурье обратима и при этом обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^* / M,$$

где $\mathbf{F}^*$ — эрмитово сопряженная матрица.

Используя матрицу $\mathbf{F}$, вычислим образы Фурье $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ соответственно сеточных функций нормальных напряжений и перемещений

$$\tilde{\mathbf{Q}}_c = (\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{M-1}) = \mathbf{F}\mathbf{Q}_c = \mathbf{F}\mathbf{R}^T \mathbf{Q}_p \quad (7.2)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{M-1}) = \mathbf{F}\mathbf{W}_c = \mathbf{F}\mathbf{R}^T \mathbf{W}_p \quad (7.3)$$

Сеточные функции $\mathbf{Q}_c$ и $\mathbf{W}_c$ являются вещественными, поэтому из свойств ДПФ следует, что компоненты $\tilde{\mathbf{Q}}_c$ и $\tilde{\mathbf{W}}_c$ удовлетворяют условиям

$$\tilde{q}_{M-m} = \tilde{q}_m^*, \quad \tilde{w}_{M-m} = \tilde{w}_m^*; \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (7.4)$$

Для сеточных функций соотношение (4.2) примет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}_c = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{Q}}_c; \quad \tilde{\mathbf{G}} = \text{diag}(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{M-1}), \quad (7.5)$$

где с учетом (7.4) для четных M

$$\tilde{g}_0 = \tilde{g}_{ps}(0) = \int_0^h \frac{dx_2}{\lambda(x_2) + 2\mu(x_2)}, \quad \tilde{g}_m = \tilde{g}_{M-m} = \tilde{g}_{ps}(2\pi m / D); \quad m = 1, 2, \dots, M/2$$

Несложно показать, что $\tilde{g}_0$ представляет собой коэффициент податливости рассматриваемой стратифицированной упругой полосы для случая приложения равномерной нормальной нагрузки по всей границе Γ_N .

Из (7.2), (7.3) и (7.5) следует, что сеточная аппроксимация интегрального представления (4.1), определяющего ОПС S_{ps} , имеет вид

$$\mathbf{W}_p = \mathbf{S}\mathbf{Q}_p, \quad (7.6)$$

где

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{R}^T / M \quad (7.7)$$

Матрица $\mathbf{S}$ является квадратной матрицей порядка L . Для вычисления произведения этой матрицы на вектор формировать ее в явном виде не требуется, достаточно программно реализовать вычисление произведений каждой из матриц в правой части (7.7) на векторы. Учитывая, что матрицы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^T$ содержат только L ненулевых элементов равных 1, вычисление произведений этих матриц на векторы сводится к выполнению L операций присваивания. Умножение диагональной матрицы $\tilde{\mathbf{G}}$ на вектор требует выполнения M операций умножения. Для вычисления произведений матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^*$ на векторы целесообразно использовать алгоритмы БПФ. Поэтому далее будем полагать $M = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. В этом случае число операций для выполнения одного преобразования имеет порядок $O(Mm) = O(M \log_2 M)$.

Аппроксимация задачи минимизации (6.3) производится с помощью гранично-элементного подхода. Для вычисления билинейной $a(\cdot, \cdot)$ и линейной $b(\cdot)$ форм используется квадратурная формула прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки T_p . Тем самым определяются аппроксимирующие билинейная $a_1(\cdot, \cdot)$ и линейная $b_1(\cdot)$ формы в пространстве $\mathbb{R}^L$

$$a_1(\mathbf{P}_p, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{P}_p^T \mathbf{S} \mathbf{Q}_p \delta_e, \quad b_1(\mathbf{P}_p) = \Phi^T \mathbf{P}_p \delta_e,$$

где $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L)^T$ – сеточная аппроксимация на T_p функции $\Phi(x_1)$, описывающей форму основания штампа.

При аппроксимации множества статически допустимых нормальных напряжений V , определенного формулой (6.1), применяется комбинированный подход. Для аппроксимации ограничений в виде неравенств используется коллокационный метод, а при аппроксимации ограничений в виде равенств – квадратурная формула прямоугольников, узлы которой совпадают с узлами сетки T_p . В результате получается замкнутое выпуклое множество статически допустимых узловых нормальных напряжений

$$V_1 = \left\{ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^L : q_i \leq 0, i = \overline{1, L}; \quad \sum_{i=1}^L \theta_i q_i = F_2; \quad \sum_{i=1}^L \vartheta_i q_i = M_3 \right\}$$

Коэффициенты λ_i и ϑ_i вычисляются по формулам

$$\theta_i = \delta_e, \quad \vartheta_i = \delta_e(x_1^i - x_1^c); \quad i = \overline{1, L},$$

где x_1^i — координата узла t_i сетки T_p .

В результате для задачи минимизации (6.3) получим сеточную аппроксимацию — задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^L$ такую, что

$$J_1(\mathbf{Q}_p) = \min_{\mathbf{Q} \in V} \{J_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q} \delta_e / 2 - \Phi^T \mathbf{Q} \delta_e\} \quad (7.8)$$

Отметим, что размерность задачи (7.8) равна L — количеству узлов сетки на Γ_p и не зависит от размера вычислительной области Γ_c , т.е. от выбора коэффициента расширения вычислительной области k_c .

Для численного решения задачи квадратичного программирования (7.8) в настоящей работе использовался алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, предложенный в [24] при решении задач одностороннего дискретного контакта для упругой полуплоскости. В [8] этот алгоритм применялся при решении задач одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полосы. Следует отметить, что алгоритм [24] позволяет вычислять не только сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_p \in \mathbb{R}^L$, но и смещение δ_2 и угол поворота φ_3 жесткого штампа.

8. Апостериорный анализ численных решений. Для оценки погрешности выполнения сеточных аппроксимаций условий (3.2)–(3.5) использовался следующий набор параметров:

$$\varepsilon_q = \max_{1 \leq i \leq L} q_i / q_{nom}, \quad \varepsilon_f = \left| \sum_{i=1}^L \theta_i q_i - F_2 \right| / |F_2|, \quad \varepsilon_m = \left| \sum_{i=1}^L \vartheta_i q_i - M_3 \right| / |M_3| \text{ для } M_3 \neq 0$$

$$\varepsilon_{z_p} = \min_{1 \leq i \leq L} z_i [q_i \geq 0]_a / |\delta_2|, \quad \varepsilon_{z_m} = \max_{1 \leq i \leq L} z_i [q_i < 0]_a / |\delta_2|,$$

где $q_{nom} = F_2 / \text{diam } \Gamma_p$ — средние (номинальные) контактные напряжения; $z_i = \phi_i + \delta_2 + (x_1^i - x_1^c)\varphi_3 - w_i$ — конечный зазор (проникание) между упругой полосой и штампом в узле t_i сетки T_p ; w_i — нормальное перемещение узла t_i сетки T_p ; $[\cdot]_a$ — скобка Айверсона (функция, равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае). Сеточная функция нормальных перемещений $\mathbf{W}_p = (w_1, w_2, \dots, w_L)$, соответствующих решению $\mathbf{Q}_p$ задачи квадратичного программирования (7.8), вычислялась с помощью (7.6).

9. Численные результаты. Разработанный вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для стратифицированной упругой полосы реализован на языке FORTRAN с применением NVIDIA HPC SDK. Для выполнения БПФ использовалась библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах.

При верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения использовалась рассмотренная в [8] тестовая задача о вдавливании в упругую полосу штампа, форма основания которого описывается квадратичной функцией. Проведено сравнение решений для случаев наличия и отсутствия момента внешних сил, приложенных к штампу, относительно точки начального контакта. Полученные численные результаты соответствуют аналитическим выводам, приведенным в [8].

Также проведено сравнение численных решений рассмотренных ниже задач дискретного контакта для штампов с регулярным поверхностным микрорельефом с решениями, полученными с помощью известного алгоритма [25]. Учитывая возможности последнего, при постановке контактных задач использовалось лишь первое из

уравнений равновесия штампа (2.7) и полагалось $\varphi_3 = 0$. Выполненные расчеты показали, что при проведении вычислений с двойной точностью среднеквадратичные относительные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений) не превышают 10^{-7} .

Получены численные решения ряда задач одностороннего дискретного контакта для стратифицированных упругих полос, в частности, для четырех полос, состоящих из $N = 10$ одинаковых слоев, модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν которых изменялись по одному из следующих законов:

$$E(\xi_2) = E_1 + (E_2 - E_1)\xi_2^2, \nu(\xi_2) = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\xi_2$$

$$E(\xi_2) = E_1 + (E_2 - E_1)\xi_2^4, \nu(\xi_2) = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\xi_2^2$$

$$E(\xi_2) = E_2 + (E_1 - E_2)\xi_2^2, \nu(\xi_2) = \nu_2 + (\nu_1 - \nu_2)\xi_2$$

$$E(\xi_2) = E_2 + (E_1 - E_2)\xi_2^4, \nu(\xi_2) = \nu_2 + (\nu_1 - \nu_2)\xi_2^2,$$

где $\xi_2 = \{Nx_2 / h\}$ – «быстрая» координата, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа; $E_1 = E^*$; $E_2 = 4E^*$; $\nu_1 = 0.4$; $\nu_2 = 0.1$; E^* – масштабный множитель (размерная величина, МПа). Графики приведенных выше функций $E(\xi_2)$ и $\nu(\xi_2)$ изображены соответственно на рис. 1, а, б. Номера кривых 1–4 соответствуют номерам стратифицированных полос.

Далее приведен анализ результатов решения задач дискретного контакта для гладких штампов с регулярным поверхностным микрорельефом, состоящим из K микровыступов. Номинальная область контакта полагалась равной $\Gamma_p = \{0 \leq x_1 \leq d, x_2 = h\}$. Форма основания штампов задавалась функцией [8]

$$\Phi(x_1) = \Phi_1(x_1) + \Phi_2(\xi_1) / K, \quad (9.1)$$

где $\Phi_1(x_1)$ – выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Phi_2(\xi_1)$ – строго выпуклая функция, характеризующая форму микровыступов; $\xi_1 = \{Kx_1 / d\}$ – «быстрая» координата. Для заданной пары функций $\Phi_1(x_1)$ и $\Phi_2(\xi_1)$ формула (9.1) определяет однопараметрическое семейство штампов $\Xi(K)$, в качестве параметра которого выступает число микровыступов K . Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а их микровыступы являются подобными.

Расчеты выполнялись для семейства жестких штампов, макроформа и поверхностный микрорельеф которых описывались соответственно функциями:

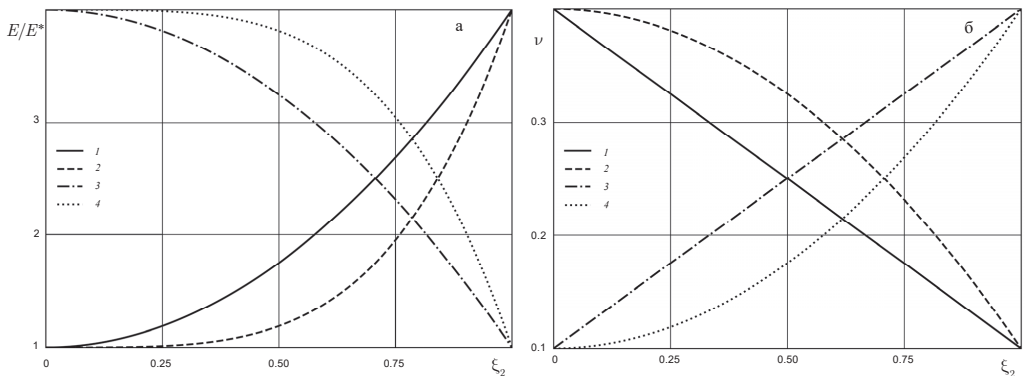


Рис. 1

$$\Phi_1(x_1) = \beta_1 d(2x_1 / d - 1)^{m_1}, \Phi_2(\xi_1) = \beta_2 d(2\xi_1 - 1)^{m_2},$$

где $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 > 0$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – безразмерные параметры.

Нормальная компонента главного вектора (погонная сила) и главный момент внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_2 = -fE^*d, M_3 = eF_2d,$$

где f – безразмерный параметр внешней нагрузки; e – безразмерный параметр, характеризующий эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $\mathbf{x}^c = (0.5d, h)$.

Необходимое количество L граничных элементов на Γ_p определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. При решении задач для семейства штампов $\Xi(K)$ каждый микровыступ аппроксимировался на сетке из 256 граничных элементов. Наибольшее общее количество элементов сетки для штампа с $K = 4096$ микровыступами составило $L = 2^{20} = 1048576$ элементов.

Установлен ряд закономерностей процесса вдавливания штампов семейства $\Xi(K)$ в упругую полосу. Рассмотрим процесс вдавливания в полосу штампа, имеющего K микровыступов, при изменении параметра внешней нагрузки f в интервале $[0, f^*]$ и проведем численный анализ зависимости от этого параметра следующих характеристик контактного взаимодействия: относительной фактической площади контакта

$$s \equiv \int_{\Gamma_p} [\sigma_{22} > 0]_a d\xi_1 / d = B_K^1(f)$$

осадки штампа $\delta_2 = B_K^2(f)$; угла поворота штампа $\varphi_3 = B_K^3(f)$.

Введем на $[0, f^*]$ равномерную сетку $T_f = \{f_m = m\Delta f, \Delta f = f^* / M_f\}$ и сеточные функции $B_K^i = R_f B_K^i, i = 1, 2, 3$, где R_f – оператор ограничения на сетку T_f . Для вычисления сеточных функций производилось пошаговое нагружение штампа. При проведении расчетов полагалось, что $M_f = 128$.

В ходе вычислительных экспериментов наблюдалась сходимость последовательностей сеточных функций $B_K^i, i = 1, 2, 3$, при увеличении количества микровыступов K . В качестве примера для семейства штампов $\Xi(K)$, определяемого набором параметров ($\beta_1 = 3 \cdot 10^{-5}$, $\beta_2 = 10^{-4}$, $m_1 = m_2 = 4$), в табл. 1 приведены относительные среднеквадратичные расхождения

Таблица 1. Относительные среднеквадратичные расхождения $\tilde{\varepsilon}_i = 10^5 \varepsilon_i$

$\tilde{\varepsilon}_i$	Номер полосы	Количество микровыступов K							
		16	32	64	128	256	512	1024	2048
$\tilde{\varepsilon}_1$	1	5218	2790	1477	788	414	206	94	33
	2	8049	4020	2074	1078	543	266	122	42
	3	5209	3008	1635	827	397	183	79	28
	4	8116	5649	3481	1942	997	478	211	71
$\tilde{\varepsilon}_2$	1	1781	825	399	193	93	43	18	6
	2	1659	756	354	169	81	37	16	5
	3	3945	2202	1170	599	296	139	60	20
	4	3844	2211	1212	637	320	152	66	22
$\tilde{\varepsilon}_3$	1	3936	1790	848	409	196	91	39	12
	2	3687	1688	769	365	174	80	34	11
	3	7125	3959	2092	1070	528	249	107	35
	4	6973	3969	2145	1123	563	268	116	38

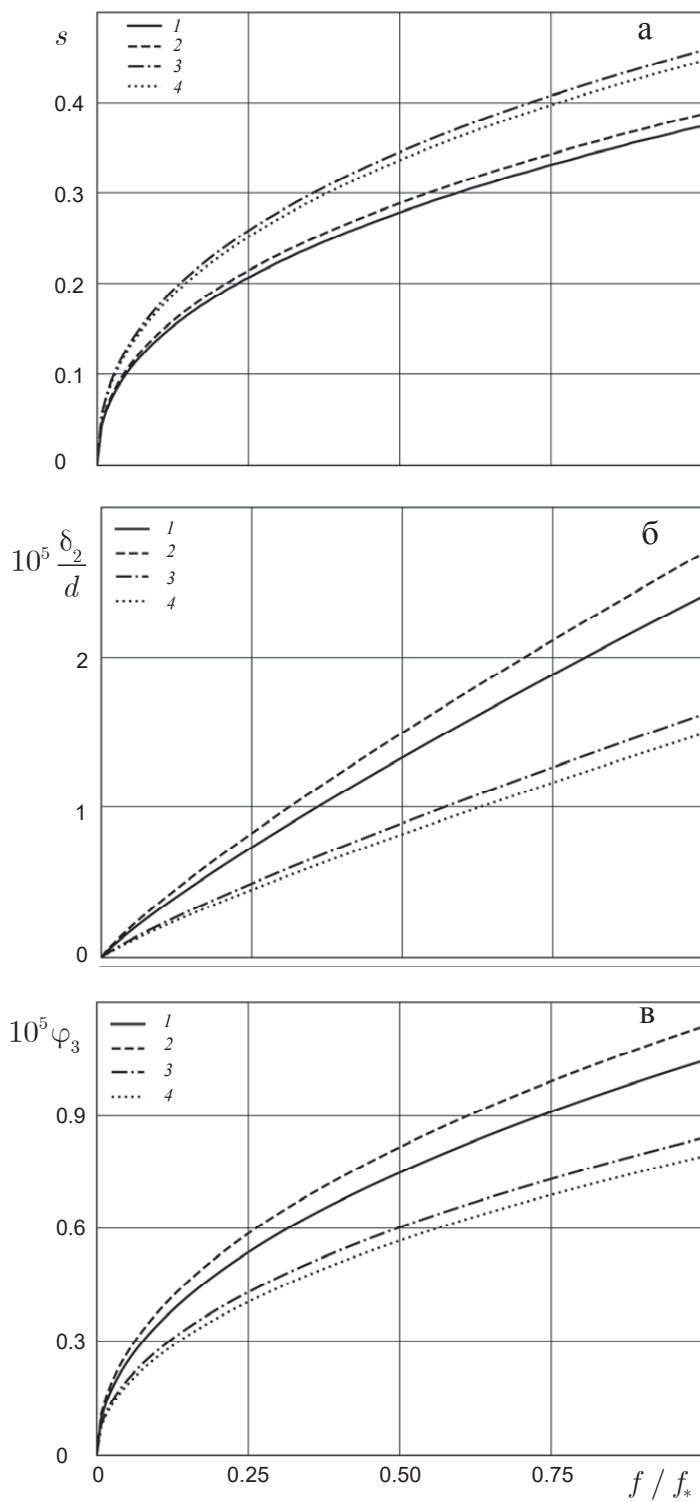


Рис. 2

$$\varepsilon_i = \|B_K^i - B_Q^i\|_2 / \|B_Q^i\|_2; i = 1, 2, 3,$$

где $Q = 4096$ – максимальное количество микровыступов в серии расчетов. Значения параметров внешней нагрузки задавались следующими: $f = 5 \cdot 10^{-5}$, $e = 0.05$. Толщина полосы полагалась равной $h = d$. Коэффициент расширения вычислительной области принимался равным $k_c = 16$.

Графики зависимостей $s = B_Q^1(f)$, $\delta_2 = B_Q^2(f)$ и $\varphi_3 = B_Q^3(f)$ для $Q = 4096$ приведены соответственно на рис. 2, а–в. Номера кривых 1–4 соответствуют номерам стратифицированных упругих полос, параметры которых были указаны выше.

На основании результатов вычислительных экспериментов можно предположить существование для рассматриваемого семейства штампов $\Xi(K)$ предельных кривых $s = B^1(f)$, $\delta_2 = B^2(f)$ и $\varphi_3 = B^3(f)$.

Заключение. Разработанный подход к решению задач одностороннего дискретного контакта для стратифицированной упругой полосы может быть обобщен на случай пространственной задачи для стратифицированного упругого слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погребняк А.Д., Лозован А.А., Кирик Г.В. и др. Структура и свойства нанокompозитных, гибридных и полимерных покрытий. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 344 с.
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб: Политехника, 2003. 233 с.
4. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. Торская Е.В. Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями. М.;Ижевск: Ин-т компют. исслед., 2020. 296 с.
6. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Amsterdam: Elsevier, 2022. 209 p.
7. Горячева И.Г., Цуканов И.Ю. Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 6. С. 757–789.
8. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 404–423.
9. Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
10. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 518 p.
11. Yastrebov V.A. Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
12. Бобылев А.А. Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полосы // Диффер. ур-я. 2023. Т. 59. № 1. С. 115–129.
13. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
14. Айзикович С.М. Статические контактные задачи для неоднородного по глубине основания // в кн.: Механика контактных взаимодействий. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 199–213.
15. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В. и др. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 236 с.
16. Никишин В.С. Статические контактные задачи для многослойных тел // в кн.: Механика контактных взаимодействий. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 214–233.
17. Ватульян А.О., Плотников Д.К. К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 3. С. 283–293.
18. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // ЖВММФ. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.

19. Бобылев А.А. О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре-Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 5. С. 52–60.
20. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 252 с.
21. Eck C., Jarušek J., Krbeč M. Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. Boca Raton: CRC Press, 2005. 398 p.
22. Wang Q.J., Zhu D. Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
23. Wang Q.J., Sun L., Zhang X. et al. FFT-based methods for computational contact mechanics // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. № 61. P. 92–113.
24. Бобылев А.А. Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 135–153.
25. Polonsky I.A., Keer L.M. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear. 1999. V. 231. № 2. P. 206–219.

A Unilateral Discrete Contact Problem for a Stratified Elastic Strip

A. A. Bobylev^{a,b,#}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: abobylov@gmail.com*

The problem is considered for the indentation of a stratified elastic strip by a rigid punch of finite dimension with a surface microrelief. Boundary variational formulations of the problem are given using the Poincaré–Steklov operator that maps normal stresses to normal displacements. To approximate this operator the discrete Fourier transform is used. The fast Fourier transform algorithms are applied for numerical realization. A variational formulation of a boundary value problem for transforms of displacements is used to calculate a transfer function. A quadratic programming problem with equality and inequality restrictions is obtained by approximating the original contact problem. To solve this problem numerically an algorithm based on the conjugate gradient method is used. Some regularities of contact interaction have been established.

Keywords: unilateral discrete contact, stratified elastic strip, boundary variational inequality, Poincaré–Steklov operator, Fourier transform, conjugate gradient method

REFERENCES

1. Pogrebnyak A.D., Lozovan A.A., Kirik G.V. et al. Structure and Properties of Nanocomposite, Hybrid and Polymer Coatings. Moscow: LIBROKOM, 2011. 344 p. (in Russian)
2. Goryacheva I.G. Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Springer, 1998. 346 p.
3. Argatov I.I., Dmitriev N.N. Fundamentals of the Theory of Elastic Discrete Contact. St. Petersburg: Polytechnics, 2003. 233 p. (in Russian)
4. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. Torskaya E.V. Models of Friction Interaction of Bodies with Coatings. Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled., 2020. 296 p.
6. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology. Amsterdam: Elsevier, 2022. 209 p.
7. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y. Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies // Mech. Solids, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1441–1462.
8. Bobylev A.A. Algorithm for solving discrete contact problems for an elastic strip // Mech. Solids, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1766–1780.
9. Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.

10. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 518 p.
11. *Yastrebov V.A.* Numerical Methods in Contact Mechanics. N.Y.: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
12. *Bobylev A.A.* Numerical construction of the transform of the kernel of the integral representation of the Poincaré–Steklov operator for an elastic strip // Differ. Eqns., 2023, vol. 59, no. 1, pp. 119–134.
13. *Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Nonclassical Mixed Problems of the Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russian)
14. *Aizikovich S.M.* Statical contact problems for a depth-inhomogeneous base // in: Mechanics of Contact Interaction. Moscow: FIZMATLIT, 2001. pp. 199–213. (in Russian)
15. *Aizikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon' A.V. et al.* Contact Problems of the Elasticity Theory for Inhomogeneous Media. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 236 p. (in Russian)
16. *Nikishin V.S.* Statical contact problems for multilayer elastic bodies // in: Mechanics of Contact Interaction. Moscow: FIZMATLIT, 2001. pp. 214–233. (in Russian)
17. *Vatulyan A.O., Plotnikov D.K.* On a Study of the Contact Problem for an Inhomogeneous Elastic Strip // Mech. Solids, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1379–1387.
18. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Methods of Constructing Green's Matrix of a Stratified Elastic Half-Space // USSR Comput. Math. Math. Phys., 1987, vol. 27, no. 1, pp. 60–65.
19. *Bobylev A.A.* Computing a transfer function of the Poincaré–Steklov Operator for a functionally graded elastic strip // Moscow Univ. Mech. Bull., 2023, vol. 78, no. 5, pp. 134–142.
20. *Khludnev A.M.* Elasticity Problems in Non-Smooth Domains. Moscow: FIZMATLIT, 2010. 252 p. (in Russian)
21. *Eck C., Jarušek J., Krbeč M.* Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. Boca Raton: CRC Press, 2005. 398 p.
22. *Wang Q.J., Zhu D.* Interfacial Mechanics: Theories and Methods for Contact and Lubrication. Boca Raton: CRC Press, 2019. 636 p.
23. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X. et al.* FFT-based methods for computational contact mechanics // Front. Mech. Eng., 2020, vol. 6, no. 61, pp. 92–113.
24. *Bobylev A.A.* Application of the conjugate gradient method to solving discrete contact problems for an elastic half-plane // Mech. of Solids, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 317–332.
25. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear, 1999, vol. 231, no. 2, pp. 206–219.