

УДК 539.3

ЭВАНЕСЦЕНТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ© 2024 г. А. И. Каракозова^{1,*}¹Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: karioca@mail.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г.

После доработки 01.06.2024 г.

Принята к публикации 15.06.2024 г.

Теоретическое исследование “геометрических” SP-эванесцентных (головных) волн, распространяющихся в изотропном однородном полупространстве или полуплоскости со свободной границей, показывает, что эти волны могут удовлетворять условию отсутствия усилий на граничной плоскости тогда и только тогда, когда параметр Ламе λ исчезающе мал, что делает существование головных волн такого типа практически невозможным. Анализ основан на представлении Гельмгольца для поля перемещений в сочетании с разложением тензора напряжений и деформаций на сферическую и девиаторную части. Полученный результат о несуществовании этого типа эванесцентных волн может найти применение в теоретической геофизике при исследовании сейсмических волновых полей в окрестности эпицентров землетрясений, а так же в неразрушающих акустических методах диагностики.

Ключевые слова: эванесцентная волна; головная волна; упругая среда; изотропия; представление Гельмгольца

DOI: 10.31857/S0032823524030089 ZASUBR

1. Введение

1.1. Типы эванесцентных волн. Первоначально эванесцентные волны в акустике связывали с волнами, которые в настоящее время известны, как истекающие волны, энергия которых затухает с расстоянием (r) от источника волны быстрее, чем $r^{-\gamma}$, где γ – безразмерная постоянная, зависящая от рассматриваемой задачи [1]. Например, если в упругом полупространстве параметр затухания $\gamma > 1$ то такая волна считалась эванесцентной [1]; отметим, что $\gamma = 1$ соответствует затуханию объемных волн в 3d-среде [2]. В более поздних работах термин “эванесцентная” волна чаще применяется к акустическим волнам, которые ранее именовались головными волнами; например [3–5].

Первое экспериментальное наблюдение преломленной эванесцентной волны принадлежит Мохововичу [6], который обнаружил, что при определенных условиях отраженный от интерфейсной поверхности акустический сигнал может распространяться вдоль интерфейсной границы раздела двух слоев большой толщины. В дальнейшем это наблюдение было подтверждено теоретически на основе теории Zoepfritz–Knott в [1, 7–19].

Чаще всего рассматриваются следующие три типа эванесцентных волн (соответствующая номенклатура в основном соответствует [20]):

I. Отраженные геометрические SP-эванесцентные волны, возникают при критическом падении объемных S-волн на свободную границу полупространства, когда падающие S-волны порождают отраженные P-волны, распространяющиеся вдоль

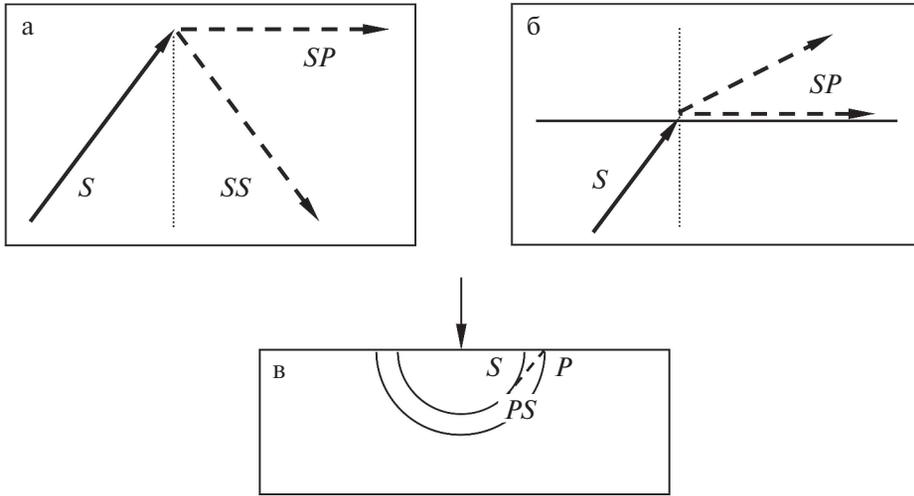


Рис. 1. а) Тип (I): отраженная SP-волна в полупространстве при критическом угле падения; б) Тип (II): преломленная SP-волна в верхнем полупространстве при критическом падении S-волны; в) Тип (III): “негеометрическая” PS-волна, возникающая при решении внешней задачи Лэмба; сплошные линии соответствуют падающим волнам; пунктирные линии соответствуют отраженным или преломленным волнам

свободной поверхности [21–25] (см. рис. 1,а). В теоретических исследованиях этот тип эванесцентных волн возникает при решении внутренних задач Лэмба о динамическом силовом воздействии, приложенном внутри упругой полуплоскости или полупространства [26–29].

II. Преломленные геометрические SP-эванесцентные волны, известные также как конические волны, возникают при критическом падении объемных S-волн на плоскую границу раздела двух сред, когда падающие S-волны порождают преломленные P-волны, распространяющиеся в нижней среде вдоль общей границы раздела [30–33] (см. рис. 1,б); для изучения межфазных высокочастотных волн в слоистых средах используются как асимптотические, так и волновые методы [34–36].

III. Более редкая, чем предыдущие геометрические типы, “негеометрическая” PS-эванесцентная волна возникает в полупространстве и распространяется назад под некоторым углом к свободной поверхности со скоростью S-волны; эта волна соответствует решениям внешней задачи Лэмба [37–39] (см. рис. 1,в) отметим, что рассмотрение внутренней задачи Лэмба не приводит к этому типу эванесцентных волн [2,40].

Первые два типа “геометрических” эванесцентных волн опираются на уравнение Zoerpritz–Knott для коэффициентов отражения-преломления [30,31] и закон Снелла для углов отражения-преломления [31]. Отметим также, что типы I–III не исчерпывают всех типов эванесцентных волн см. [41], где были обнаружены еще два типа эванесцентных волн. Еще одно замечание касается некоторых экстраполяций этих результатов на стратифицированные анизотропные и функционально-градиентные среды [42–45].

1.2. Постановка проблемы. Ниже показано, что первый тип SP-волн несовместим с однородными граничными условиями на свободной поверхности упругого изотропного полупространства или полуплоскости при любых допустимых значениях параметра Ламе $\lambda \neq 0$, что делает этот тип эванесцентных волн, практически, не имеющим права на существование. Можно ожидать, что этот результат может найти применение в теоретической геофизике при исследовании сейсмических волновых

полей в окрестности эпицентров землетрясений, а также в неразрушающих акустических методах диагностики.

2. Основные уравнения. Используемые в этом разделе основные уравнения в основном следуют [31, 46, 47].

2.1. Закон Гука. Предполагая инфинитезимальность поля деформаций, уравнения Коши можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^T), \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформации; \mathbf{u} – поле перемещений; \mathbf{x} – пространственная координата; t – время.

С введением объемной деформации

$$\theta \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

и девиатора деформаций \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор, закон Гука для изотропной однородной среды может быть представлен в виде [46]

$$p = -k\theta, \quad \mathbf{s} = 2\mu\mathbf{e} \quad (2.4)$$

Здесь p – давление, определяемое соответствующим тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, как

$$p = -\frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.5)$$

\mathbf{s} – девиатор напряжений,

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}, \quad (2.6)$$

k – объемный модуль, связанный с соответствующими параметрами Ламе λ и μ , соотношением

$$k = \frac{2}{3}\mu + \lambda \quad (2.7)$$

2.2. Уравнение движения. Уравнение движения для однородной изотропной среды можно представить в виде [31]

$$(c_p^2 \nabla_{\mathbf{x}} \text{div}_{\mathbf{x}} - c_s^2 \text{rot}_{\mathbf{x}} \text{rot}_{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \partial_{tt}^2) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.8)$$

где c_p, c_s – скорости соответственно продольной и сдвиговой объемных волн:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.9)$$

В выражениях ρ – плотность материала.

Для последующего анализа требуется представление Гельмгольца для векторного поля \mathbf{u} [47]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t) + \text{rot}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

где φ и $\boldsymbol{\psi}$ – скалярный и векторный потенциалы, соответственно. Подстановка представления (2.10) в уравнение движения, позволяет разбить уравнение (2.8) на два уравнения [46]

$$(c_p^2 \Delta_{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \partial_{tt}^2) \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (c_s^2 \Delta_{\mathbf{x}} - \mathbf{I} \partial_{tt}^2) \text{rot}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.11)$$

откуда следует, что если поле перемещений определяется только скалярным потенциалом, что соответствует распространению Р-волны:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

то уравнение движения сводится к первому уравнению в (2.11).

Принимая во внимание уравнения (2.12) и (2.2), получаем

$$\theta = \Delta_{\mathbf{x}} \varphi, \quad \mathbf{e} = \left(\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}} \right) \varphi \quad (2.13)$$

Последние уравнения с учетом (2.4) принимают вид

$$p = -k \Delta_{\mathbf{x}} \varphi, \quad \mathbf{s} = 2\mu \left(\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \Delta_{\mathbf{x}} \right) \varphi \quad (2.14)$$

Анализ уравнений (2.14) показывает, что любая Р-волна наряду со сферическим тензором деформаций и сферическим тензором напряжений, сопровождается так же соответствующими девиаторными тензорами деформаций и напряжений. Заметим также, что девиаторные компоненты в уравнениях (2.13), (2.14), удовлетворяют следующим соотношениям [46]

$$\text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{e} = 0, \quad \text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{s} = 0 \quad (2.15)$$

2.3. Граничные условия на свободной поверхности. Рассмотрим плоскую задачу (обобщенную плоскую деформацию) для полуплоскости со свободной границей, рис. 2.

Свободное от усилий граничное условие имеет вид [46]

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.16)$$

Подставляя выражения (2.14) в уравнение (2.16) и учитывая выражение (2.7), получаем

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \left(\lambda \Delta_{\mathbf{x}} \varphi + 2\mu \partial_{nn}^2 \varphi \right) \mathbf{n} + \left(2\mu \partial_{nm}^2 \varphi \right) \mathbf{m} = 0, \quad (2.17)$$

где $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$, $\partial_m = \mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ и $\Delta_{\mathbf{x}} = \partial_{nn}^2 + \partial_{mm}^2$.

Для рассматриваемой SP-эванесцентной волны скалярный потенциал φ локализован на граничной плоскости [14]

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x, t), \quad (2.18)$$

где $x = \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}$. Учитывая (2.18), видно, что части уравнения (2.17), содержащие производные ∂_n , пропадают. Таким образом, из уравнения (2.17) следует

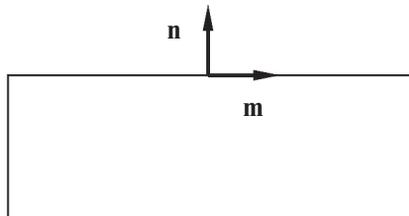


Рис. 2. Полуплоскость; \mathbf{n} – единичная нормаль к границе плоскости, \mathbf{m} – единичный касательный вектор

$$(\lambda \partial_{mm}^2 \varphi) \mathbf{n} = 0 \quad (2.19)$$

Последнее уравнение означает, что либо (I) $\lambda = 0$ и потенциал φ произволен; либо (II) $\lambda \neq 0$ и $\varphi(x, t)$ – линейная функция переменной x : $\varphi(x, t) = a(t)x + b(t)$. Второй вариант, ввиду уравнений (2.13) и (2.14), дает одинаково нулевые поля деформаций и напряжений и должен быть исключен из рассмотрения. Таким образом, первый вариант является единственно возможным для существования SP-волн, удовлетворяющих однородным граничным условиям в напряжениях.

Выводы. Проведенный анализ, основанный на представлении Гельмгольца для поля перемещений (2.10) в виде суммы скалярного и объемного потенциалов и разложении полей деформаций и напряжений по сферическим и девиаторным тензорам (2.13), (2.14), показывает, что геометрическая SP-эванесцентная волна типа (I) может удовлетворять однородным граничным условиям в напряжениях, если только параметр Ламе $\lambda \neq 0$.

Следует отметить, что условие $\lambda \neq 0$ с учетом соотношения Ламе [46]

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона, влечет

$$\nu = 0$$

Таким образом, SP-эванесцентные волны первого типа могут существовать тогда и только тогда, когда коэффициент Пуассона равен нулю, что с практической точки зрения означает невозможность существования SP-волн первого типа.

Полученный результат о несуществовании геометрических SP-волн первого типа в упругом изотропном полупространстве может иметь многочисленные приложения в геофизике, сейсмологии и сейсмологии, акустических неразрушающих методах диагностики и т.д. Одним из примеров, где результат о несуществовании SP-волн первого типа, может играть положительную роль, являются сейсмические барьеры [48,49], предназначенные, в том числе и для защиты от головных SP-волн. Однако, как показывают настоящие исследования, рассматриваемые головные волны при проектировании систем сейсмической защиты, могут быть исключены.

Благодарность. Работа финансировалась Министерством науки и высшего образования РФ, проект № FSWG-2023-0004 “Система территориальной сейсмической защиты критически важных объектов инфраструктуры на основе гранулированных метаматериалов, обладающих свойствами широкодиапазонных фоновых кристаллов”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pekeris C.L.* The seismic buried pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. 1955. V. 41. P. 629–639.
2. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 356–367.
3. *Meykens K., van Rompaey B., Janssen H.* Dispersion in acoustic waveguides – A teaching laboratory experiment // Am.J. Phys. 1999. V. 67(5). P. 400–406.
4. *de Fornel F.* Evanescent Waves: From Newtonian Optics to Atomic Optics. Berlin: Springer, 2001. 265 p.
5. *Yamamoto K., Sakiyama T., Izumiya H.* Visualization of acoustic evanescent waves by the stroboscopic photoelastic method // Phys. Proc. 2015. V. 70. P. 716–720.
6. *Mohorovičić A.* Das Beben vom 8. X. 1909 // Jahrbuch des Meteorol. Obser. in Zagreb (Agram). 1910. P. 1–63.
7. *Jeffreys H.* On compressional waves in two superposed layers // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1926. V. 23(4). P. 472–481.

8. *Muskat M.* The theory of refraction shooting // *Physics*. 1933. V. 4. P. 14–28.
9. *Heelan P.A.* On the theory of head waves // *Geophys.* 1953. V. 18. P. 871–893.
10. *O'Brien P.N.S.* Model seismology – the critical refraction of elastic waves // *Geophys.* 1955. V. 20. P. 227–242.
11. *Levin F.K., Ingram J.D.* Head waves from a bed of finite thickness // *Geophys.* 1962. V. 27. P. 753–765.
12. *Nakamura Y.* Multi-reflected head waves in a single-layered medium // *Geophys.* 1966. V. 31. P. 927–939.
13. *Datta S., Bhowmick A.N.* Head waves in two-dimensional seismic models // *Geophys. Prospect.* 1969. V. 17(4). P. 419–432.
14. *Cerveny V., Ravindra R.* Theory of Seismic Head Waves. Toronto: Toronto Univ. Press, 1971. 328 p.
15. *Cerveny V.* Theory of seismic head waves // *Am.J. Phys.* 1973. V. 41(5). P. 755–757.
16. *Zhou H., Chen Y.* Ray path of head waves with irregular interfaces // *Appl. Geophys.* 2010. V. 7(1). P. 66–73.
17. *Li S.J. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comp. Geotech.* 2019. V. 109. P. 69–81.
18. *Li S.J. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2020. V. 24. P. 2400–2421.
19. *Zhang J., Zhang H.-M., Chen X.* Characteristics of head wave in multi-layered half-space // *Acta Seism. Sinica.* 2022. V. 15(6). P. 585–594.
20. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semi-infinite medium // *Phil. Trans. A.* 1949. V. 242. P. 63–100.
21. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. New York: McGraw-Hill, 1962. 282 p.
22. *Burridge R., Lapwood E.R., Knopoff L.* First motions from seismic sources near a free surface // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1964. V. 54. P. 1889–1913.
23. *Dmitriev V.F., Noskov A.N.* Theoretical and experimental studies of quasi-surface acoustic wave resonators // *Acoust. Phys.* 2010. V. 56. P. 475–4481.
24. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. P. 235–245.
25. *Schweitzer J., Storchak D.A., Borman P.* Seismic phase nomenclature: The IASPEI standard // in: *Encycl. of Solid Earth Geophys.* / Ed. by *Gupta H.K.* *Encycl. of Earth Sci. Ser.* Berlin: Springer, 2021. 1950 p.
26. *Kausel E.* Lamb's problem at its simplest // *Proc. Roy. Soc. A.* 2012. V. 469(2149). P. 20120462–20120462.
27. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.
28. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707.
29. *Emami M., Eskandari-Ghadi M.* Transient interior analytical solutions of Lamb's problem // *Math. Mech. Solids.* 2019. V. 24(11). P. 3485–43513.
30. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology: Theory and Methods. Vol. 1. San Francisco: Freeman Co., 1980. 700 p.
31. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. Berlin: Springer, 1981. 1108 p.
32. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.* 2004. V. 62(4). P. 749–766.
33. *Su Y. et al.* Supervirtual refraction interferometry in the Radon domain // *Remote Sensing.* 2023. V. 15(2). Paper №384.
34. *Breckenridge F.R., Tschiegg C.E., Greenspan M.* Acoustic emission: some applications of Lamb's problem // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. P. 626–631.
35. *Phan H., Cho Y., Achenbach J.D.* Verification of surface wave solutions obtained by the reciprocity theorem // *Ultrasonics.* 2014. V. 54. P. 1891–1894.
36. *Kuznetsov S.V.* Stoneley waves at the generalized Wiechert condition // *Z. Angew. Math. Phys.* 2020. V. 71. Paper №180.
37. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993. 329 p.

38. Roth M., Holliger K. The non-geometric PS wave in high-resolution seismic data: observations and modeling // *Geophys. J.* 2000. V. 140. P. F5–F11.
39. Kuznetsov S.V. Love waves in layered anisotropic media // *JAMM.* 2006. V. 70. P. 116–127.
40. Il'yasov K.K. et al. Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids.* 2016. V. 51. P. 39–45.
41. Buchen P.W. The elastodynamic Green's tensor for the 2D half-space // *J. Austral. Math. Soc.* 1978. V. 20. P. 385–440.
42. Ilyashenko A.V. et al. Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2017. V. 53. P. 243–259.
43. Chapman Ch. Head-wave coefficients in anisotropic media // *Geophys. J. Int.* 2018. V. 214. P. 164–184.
44. Kuznetsov S.V. Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
45. Karakozova A., Kuznetsov S. Head waves in modified Weiskopf sandy medium // *Axioms.* 2023. V. 12. Paper №679.
46. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by Truesdell C. Berlin, Heidelberg: Springer, 1973. 295 p.
47. Auld B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Malabar, Florida: Krieger Pub. Co., 1990. 446 p.
48. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.* 2011. V. 57. P. 420–426.
49. Dudchenko A.V. et al. Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.* 2021. V. 91. P. 257–276.

Evanescent Acoustic Waves

A.I. Karakozova^{a,#}

^aNational Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

[#]e-mail: karioca@mail.ru

A theoretical study of “geometric” SP-evanescent (head) waves propagating in an isotropic homogeneous half-space or half-plane with a free boundary shows that these waves can satisfy the condition of absence of effort on the boundary plane if and only if the Lamé parameter λ is vanishingly small, which makes the existence of head waves of this type practically impossible. The analysis is based on the Helmholtz representation for the displacement field in combination with the decomposition of the stress and strain tensor into spherical and deviatoric parts. The obtained result about the non-existence of this type of evanescent waves can find application in theoretical geophysics in the study of seismic wave fields in the vicinity of earthquake epicenters, as well as in non-destructive acoustic diagnostic methods.

Keywords: evanescent wave; head wave; elastic medium; isotropy; Helmholtz representation

REFERENCES

1. Pekeris C.L. The seismic buried pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1955, vol. 41, pp. 629–639.
2. Terentjeva E.O. et al. Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, pp. 356–367.
3. Meykens K., van Rompaey B., Janssen H. Dispersion in acoustic waveguides – A teaching laboratory experiment // *Am.J. Phys.*, 1999, vol. 67(5), pp. 400–406.
4. de Fornel F. *Evanescent Waves: From Newtonian Optics to Atomic Optics.* Berlin: Springer, 2001. 265 p.
5. Yamamoto K., Sakiyama T., Izumiya H. Visualization of acoustic evanescent waves by the stroboscopic photoelastic method // *Phys. Proc.*, 2015, vol. 70, pp. 716–720.
6. Mohorovičić A. Das Beben vom 8. X. 1909 // *Jahrbuch des Meteorol. Obser. in Zagreb (Agram)*, 1910, pp. 1–63.
7. Jeffreys H. On compressional waves in two superposed layers // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1926, vol. 23(4), pp. 472–481.
8. Muskat M. The theory of refraction shooting // *Physics*, 1933, vol. 4, pp. 14–28.
9. Heelan P.A. On the theory of head waves // *Geophys.*, 1953, vol. 18, pp. 871–893.

10. *O'Brien P.N.S.* Model seismology – the critical refraction of elastic waves // *Geophys.*, 1955, vol. 20, pp. 227–242.
11. *Levin F.K., Ingram J.D.* Head waves from a bed of finite thickness // *Geophys.*, 1962, vol. 27, pp. 753–765.
12. *Nakamura Y.* Multi-reflected head waves in a single-layered medium // *Geophys.*, 1966, vol. 31, pp. 927–939.
13. *Datta S., Bhowmick A.N.* Head waves in two-dimensional seismic models // *Geophys. Prospect.*, 1969, vol. 17(4), pp. 419–432.
14. *Cerveny V., Ravindra R.* Theory of Seismic Head Waves. Toronto: Toronto Univ. Press, 1971. 328 p.
15. *Cerveny V.* Theory of seismic head waves // *Am.J. Phys.*, 1973, vol. 41(5), pp. 755–757.
16. *Zhou H., Chen Y.* Ray path of head waves with irregular interfaces // *Appl. Geophys.*, 2010, vol. 7(1), pp. 66–73.
17. *Li S.J. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comp. Geotech.*, 2019, vol. 109, pp. 69–81.
18. *Li S.J. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.*, 2020, vol. 24, pp. 2400–2421.
19. *Zhang J., Zhang H.-M., Chen X.* Characteristics of head wave in multi-layered half-space // *Acta Seism. Sinica*, 2022, vol. 15(6), pp. 585–594.
20. *Lapwood E.R.* The disturbance due to a line source in a semi-infinite medium // *Phil. Trans. A.*, 1949, vol. 242, pp. 63–100.
21. *Cagniard L.* Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. N.Y.: McGraw-Hill, 1962. 282 p.
22. *Burridge R., Lapwood E.R., Knopoff L.* First motions from seismic sources near a free surface // *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1964, vol. 54, pp. 1889–1913.
23. *Dmitriev V.F., Noskov A.N.* Theoretical and experimental studies of quasi-surface acoustic wave resonators // *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, pp. 475–4481.
24. *Dai Y., Yan S., Zhang B.* Acoustic field excited by single force with arbitrary direction in semi-infinite elastic space // *Acoust. Phys.*, 2019, vol. 65, pp. 235–245.
25. *Schweitzer J., Storchak D.A., Borman P.* Seismic phase nomenclature: The IASPEI standard // in: *Encycl. of Solid Earth Geophys.* / Ed. by *Gupta H.K.* *Encycl. of Earth Sci. Ser.* Berlin: Springer, 2021. 1950 p.
26. *Kausel E.* Lamb's problem at its simplest // *Proc. Roy. Soc. A*, 2012, vol. 469(2149), pp. 20120462–20120462.
27. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.*, 2003, vol. 61, pp. 575–582.
28. *Goldstein R.V. et al.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, pp. 700–707.
29. *Emami M., Eskandari-Ghadi M.* Transient interior analytical solutions of Lamb's problem // *Math. Mech. Solids*, 2019, vol. 24(11), pp. 3485–43513.
30. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology: Theory and Methods. Vol. 1. San Francisco: Freeman Co., 1980. 700 p.
31. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. Berlin: Springer, 1981. 1108 p.
32. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // *Quart. Appl. Math.*, 2004, vol. 62(4), pp. 749–766.
33. *Su Y. et al.* Supervirtual refraction interferometry in the Radon domain // *Remote Sensing*, 2023, vol. 15(2), paper no. 384.
34. *Breckenridge F.R., Tschiegg C.E., Greenspan M.* Acoustic emission: some applications of Lamb's problem // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1975, vol. 57, pp. 626–631.
35. *Phan H., Cho Y., Achenbach J.D.* Verification of surface wave solutions obtained by the reciprocity theorem // *Ultrasonics*, 2014, vol. 54, pp. 1891–1894.
36. *Kuznetsov S.V.* Stoneley waves at the generalized Wiechert condition // *Z. Angew. Math. Phys.*, 2020, vol. 71, paper no. 180.
37. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993. 329 p.

38. Roth M., Holliger K. The non-geometric PS wave in high-resolution seismic data: observations and modeling // *Geophys. J.*, 2000, vol. 140, pp. F5–F11.
39. Kuznetsov S.V. Love waves in layered anisotropic media // *JAMM*, 2006, vol. 70, pp. 116–127.
40. Il'yasov K.K. et al. Exterior 3D Lamb problem: Harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, pp. 39–45.
41. Buchen P.W. The elastodynamic Green's tensor for the 2D half-space // *J. Austral. Math. Soc.*, 1978, vol. 20, pp. 385–440.
42. Ilyashenko A.V. et al. Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.*, 2017, vol. 53, pp. 243–259.
43. Chapman Ch. Head-wave coefficients in anisotropic media // *Geophys. J. Int.*, 2018, vol. 214, pp. 164–184.
44. Kuznetsov S.V. Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion*, 2019, vol. 84, pp. 1–7.
45. Karakozova A., Kuznetsov S. Head waves in modified Weiskopf sandy medium // *Axioms*, 2023, vol. 12, paper no. 679.
46. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity // in: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* / Ed. by Truesdell C. Berlin, Heidelberg: Springer, 1973. 295 p.
47. Auld B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Malabar, Florida: Krieger Pub. Co., 1990. 446 p.
48. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, pp. 420–426.
49. Dudchenko A.V. et al. Vertical wave barriers for vibration reduction // *Arch. Appl. Mech.*, 2021, vol. 91, pp. 257–276.