ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2024, том 88, № 3, с. 347–358

УДК 531.36

К ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОТСУТСТВИИ РЕЗОНАНСА

© 2024 г. А. П. Маркеев[1,*]

[1]*Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*
**e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в реакцию 17.05.2024 г.
После доработки 20.06.2024 г.
Принята к публикации 24.06.2024 г.

Разработан аналитический алгоритм нахождения частот нелинейных колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы вблизи ее устойчивого положения равновесия. Предполагалось, что в системе нет резонансов до четвертого порядка включительно, т.е. отношение частот малых линейных колебаний не равняется единице, двум или трем. В качестве приложения рассмотрена задача о нелинейных колебаниях материальной точки на неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести; указана оценка меры колмогоровского множества начальных условий, для которых движение точки является условно-периодическим. Рассмотрена также нелинейная консервативная система, в которой отсутствуют резонансы любого порядка. Система представляет собой маятник, образованный двумя скрепленными шарниром тонкими стержнями одинаковой длины и веса. Изучен характер нелинейных колебаний этого маятника в окрестности его устойчивого равновесия на вертикали.

Ключевые слова: консервативная система, устойчивость, условно-периодические колебания

DOI: 10.31857/S0032823524030017 ZBCTUY

1. Введение. На этапе предварительного проектирования многих машин и механизмов инженеру – конструктору важно заранее, до проведения дорогостоящих (а часто и совсем невозможных) экспериментов, знать, как может зависеть динамика проектируемой системы от ее параметров.

В статье получены явные формулы для частот нелинейных колебаний автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы с точностью до второй степени относительно начальных отклонений системы от ее устойчивого положения равновесия.

В случае консервативной системы, представляющей собой материальную точку, движущуюся по неподвижной абсолютно гладкой поверхности в однородном поле тяжести, изучен характер нелинейных колебаний в предположении об отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно. Дано приближенное аналитическое представление колмогоровского множества условно – периодических колебаний и указана оценка меры этого множества.

В качестве конкретного примера нерезонансной задачи исследованы нелинейные колебания двойного маятника в окрестности его устойчивого равновесия на вертикали. Показано, что для большинства начальных условий движение маятника является условно – периодическим, а относительная мера множества, дополнительного к этому большинству, экспоненциально мала.

Проведенный анализ опирается на современные методы исследования нелинейных динамических систем [1,2]. При проведении необходимых вычислений используются преобразование Биркгофа [3] и его модификации [4,5], удобные для применения методов компьютерной алгебры.

Нормальные (главные) координаты. Рассмотрим консервативную систему с двумя степенями свободы, положение которой определяется обобщенными координатами x_1, x_2. Пусть начало координат $x_1 = x_2 = 0$ является положением равновесия, а потенциальная энергия $\Pi(x_1, x_2)$ – аналитическая функция в его окрестности. Функция Π может еще зависеть от одного или нескольких параметров. Без ограничения общности будем считать, что $\Pi(0,0) = 0$ и предположим, что разложение Π в ряд начинается с определенно-положительной квадратичной формы. Тогда точка $x_1 = x_2 = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции Π и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, положение равновесия устойчиво [6].

Кинетическая энергия системы T является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ и имеет вид

$$T = a_{20}\dot{x}_1^2 + a_{11}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{02}\dot{x}_2^2$$

Коэффициенты a_{20}, a_{11}, a_{02} – функции x_1, x_2 и, как и функция Π, могут еще зависеть от одного или нескольких параметров. Предположим, что они – аналитические функции от x_1, x_2 и что при $x_1 = x_2 = 0$ кинетическая энергия T – определенно-положительная квадратичная форма относительно $\dot{x}_1, \dot{x}_2$.

Если вместо обобщенных координат x_1, x_2 ввести, следуя [6,7], нормальные (главные) координаты θ_1, θ_2, то потенциальная энергия запишется в виде ряда

$$\Pi = \frac{1}{2}(\omega_1^2\theta_1^2 + \omega_2^2\theta_2^2) + \sum_{k=3}^{\infty}\Pi_k, \quad \Pi_k = \sum_{\nu_1+\nu_2=k} p_{\nu_1\nu_2}\theta_1^{\nu_1}\theta_2^{\nu_2} \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее ν_1 и ν_2 – целые неотрицательные числа. Через ω_1 и ω_2 обозначены частоты малых (линейных) колебаний. Будем считать их различными ($\omega_1 > \omega_2 > 0$).

Кинетическая энергия в нормальных координатах запишется в виде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \sum_{\nu_1+\nu_2=1}^{\infty} t_{\nu_1\nu_2 20}\theta_1^{\nu_1}\theta_2^{\nu_2}\dot{\theta}_1^2 + \\ + \sum_{\nu_1+\nu_2=1}^{\infty} t_{\nu_1\nu_2 11}\theta_1^{\nu_1}\theta_2^{\nu_2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \sum_{\nu_1+\nu_2=1}^{\infty} t_{\nu_1\nu_2 02}\theta_1^{\nu_1}\theta_2^{\nu_2}\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Коэффициенты $p_{\nu_1\nu_2}$ в (1.1) и $t_{\nu_1\nu_2 20}, t_{\nu_1\nu_2 11}, t_{\nu_1\nu_2 02}$ в (1.2) зависят только от параметров системы.

2. Функция Гамильтона. При анализе нелинейных колебаний будем использовать гамильтонову форму уравнений движения. Импульсы p_{θ_j} определяются равенствами

$$p_{\theta_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j}; \; j = 1,2 \tag{2.1}$$

Отсюда, с учетом выражения (1.2) для функции T, находятся величины $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$ как функции от $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$. Эти функции линейны по импульсам. При этом, если пренебречь в выражениях $\dot{\theta}_j(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$ величинами выше первой степени относительно $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$, то справедливы равенства $\dot{\theta}_j = p_{\theta_j}$ $(j = 1,2)$.

Подставив найденные из (2.1) величины $\dot\theta_1$ и $\dot\theta_2$ в функцию $H = T + \Pi$ (см. равенства (1.1) и (1.2)), получим функцию Гамильтона $H(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$, аналитическую по θ_j, p_{θ_j} $(j = 1,2)$. Уравнения движения системы запишутся в виде канонических уравнений

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_j}}, \ \frac{dp_{\theta_j}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j}; \ j = 1,2 \tag{2.2}$$

Для удобства дальнейших вычислений целесообразно сделать каноническую унивалентную замену переменных $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2} \to q_1, q_2, p_1, p_2$ по формулам [7]

$$\theta_j = \frac{1}{\sqrt{\omega_j}} q_j, \ p_{\theta_j} = \sqrt{\omega_j} p_j; \ j = 1,2 \tag{2.3}$$

Подставив эти выражения в функцию $H(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$, получим функцию $\Gamma(q_1, q_2, p_1, p_2)$, соответствующую каноническим уравнениям движения в новых переменных

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p_j}, \ \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial q_j}; \ j = 1,2 \tag{2.4}$$

Функция Γ аналитична относительно q_1, q_2, p_1, p_2 и ее разложение в ряд записывается в виде

$$\begin{aligned} \Gamma = {} & \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \sum_{\nu_1+\nu_2=1}^{\infty} \gamma_{\nu_1\nu_2 20} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \cdot p_1^2 + \\ & + \sum_{\nu_1+\nu_2=1}^{\infty} \gamma_{\nu_1\nu_2 11} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \cdot p_1 p_2 + \sum_{\nu_1+\nu_2=1}^{\infty} \gamma_{\nu_1\nu_2 02} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \cdot p_2^2 + \sum_{\nu_1+\nu_2=3}^{\infty} \gamma_{\nu_1\nu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Зависящие только от параметров системы коэффициенты $\gamma_{\nu_1\nu_2}$, $\gamma_{\nu_1\nu_2 20}$, $\gamma_{\nu_1\nu_2 11}$, $\gamma_{\nu_1\nu_2 02}$ выражаются через коэффициенты разложений (1.1) и (1.2).

Для коэффициентов членов третьей степени можно получить следующие выражения:

$$\gamma_{30} = \frac{p_{30}}{\omega_1^{3/2}}, \ \gamma_{21} = \frac{p_{21}}{\omega_1\omega_2^{1/2}}, \ \gamma_{12} = \frac{p_{12}}{\omega_1^{1/2}\omega_2}, \ \gamma_{03} = \frac{p_{03}}{\omega_2^{3/2}} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{1020} = -\omega_1^{1/2} t_{1020}, \ \gamma_{0120} = -\frac{\omega_1}{\omega_2^{1/2}} t_{0120}, \ \gamma_{1011} = -\omega_2^{1/2} t_{1011} \\ & \gamma_{0111} = -\omega_1^{1/2} t_{0111}, \ \gamma_{1002} = -\frac{\omega_2}{\omega_1^{1/2}} t_{1002}, \ \gamma_{0102} = -\omega_2^{1/2} t_{0102} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Коэффициенты членов четвертой степени в (2.5) выражаются через коэффициенты разложений (1.1), (1.2) по таким формулам:

$$\gamma_{40} = \frac{p_{40}}{\omega_1^2}, \ \gamma_{31} = \frac{p_{31}}{\omega_1^{3/2}\omega_2^{1/2}}, \ \gamma_{22} = \frac{p_{22}}{\omega_1\omega_2}, \ \gamma_{13} = \frac{p_{13}}{\omega_1^{1/2}\omega_2^{3/2}}, \ \gamma_{04} = \frac{p_{04}}{\omega_2^2} \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{2020} = -t_{2020} + 2t_{1020}^2 + \frac{1}{2}t_{1011}^2,\ \gamma_{1120} = \frac{\omega_1^{1/2}}{\omega_2^{1/2}}(-t_{1120} + t_{1011}t_{0111} + 4t_{0120}t_{1020})\\
&\gamma_{0220} = \frac{\omega_1}{\omega_2}(-t_{0220} + 2t_{0120}^2 + \frac{1}{2}t_{0111}^2),\ \gamma_{2011} = \frac{\omega_2^{1/2}}{\omega_1^{1/2}}[-t_{2011} + 2t_{1011}(t_{1020} + t_{1002})]\\
&\gamma_{1111} = -t_{1111} + 2t_{0111}(t_{1020} + t_{1002}) + 2t_{1011}(t_{0102} + t_{0120})\\
&\gamma_{0211} = \frac{\omega_1^{1/2}}{\omega_2^{1/2}}[-t_{0211} + 2t_{0111}(t_{0102} + t_{0120})],\ \gamma_{2002} = \frac{\omega_2}{\omega_1}(-t_{2002} + 2t_{1002}^2 + \frac{1}{2}t_{1011}^2)\\
&\gamma_{1102} = \frac{\omega_2^{1/2}}{\omega_1^{1/2}}(-t_{1102} + t_{1011}t_{0111} + 4t_{0102}t_{1002}),\ \gamma_{0202} = -t_{0202} + 2t_{0102}^2 + \frac{1}{2}t_{0111}^2
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Выражения для коэффициентов членов пятой и более высоких степеней не выписываем из-за их громоздкости.

3. Об алгоритме нормализации. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы, не обязательно являющуюся консервативной. Пусть ее функция Гамильтона записывается в виде ряда

$$
\Gamma = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\omega_j(q_j^2 + p_j^2) + \sum_{k=3}^{\infty}\Gamma_k(q_1,q_2,p_1,p_2)\,,\ \Gamma_k = \sum_{\substack{m_1+m_2+\\+n_1+n_2=k}} h_{m_1m_2n_1n_2}q_1^{m_1}q_2^{m_2}p_1^{n_1}p_2^{n_2}, \tag{3.1}
$$

где m_j,n_j – целые неотрицательные числа, $h_{m_1m_2n_1n_2}$ – коэффициенты, зависящие только от параметров системы, а $\omega_1 > \omega_2 > 0$.

Следуя [3,4], введем вместо переменных q_j,p_j новые переменные z_j,Z_j при помощи близкого к тождественному канонического унивалентного преобразования $q_1,q_2,p_1,p_2 \to z_1,z_2,Z_1,Z_2$, задаваемого неявно формулами

$$
z_j = \frac{\partial S}{\partial Z_j}\,,\ p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}\,;\ j = 1{,}2\,, \tag{3.2}
$$

где

$$
S = q_1Z_1 + q_2Z_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_k + \cdots, \tag{3.3}
$$

а S_k – форма степени k относительно q_1,q_2,Z_1,Z_2

$$
S_k = \sum_{\substack{m_1+m_2+\\+n_1+n_2=k}} s_{m_1m_2n_1n_2}q_1^{m_1}q_2^{m_2}Z_1^{n_1}Z_2^{n_2} \tag{3.4}
$$

Из (3.2), (3.3) следует, что q_j,p_j выражаются через новые переменные z_j,Z_j при помощи рядов по степеням z_1,z_2,Z_1,Z_2:

$$
q_j = z_j - \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_j} + \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial Z_j\partial z_1}\frac{\partial S_3^*}{\partial Z_1} + \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial Z_j\partial z_2}\frac{\partial S_3^*}{\partial Z_2} - \frac{\partial S_4^*}{\partial Z_j} + O_4\,;\ j = 1{,}2 \tag{3.5}
$$

$$
p_j = Z_j + \frac{\partial S_3^*}{\partial z_j} - \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial z_j\partial z_1}\frac{\partial S_3^*}{\partial Z_1} - \frac{\partial^2 S_3^*}{\partial z_j\partial z_2}\frac{\partial S_3^*}{\partial Z_2} + \frac{\partial S_4^*}{\partial z_j} + O_4\,;\ j = 1{,}2 \tag{3.6}
$$

Здесь S_k^* – функции S_k из (3.3), (3.4), в которых q_1,q_2 заменены на z_1,z_2 (т.е. $S_k^* = S_k(z_1,z_2,Z_1,Z_2)$); через O_n здесь и далее обозначается совокупность членов не ниже n-й степени относительно z_1,z_2,Z_1,Z_2.

Функция Гамильтона в новых переменных получается подстановкой q_j, p_j из (3.5), (3.6) в исходную функцию (3.1). Надлежащим подбором коэффициентов $s_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ форм $S_3, S_4, \ldots, S_k$ можно уничтожить в новой функции Гамильтона большинство одночленов и в результате получить функцию, нормализованную до членов k-й степени включительно относительно z_1, z_2, Z_1, Z_2.

Если в системе нет резонансов до k-го порядка включительно, т.е. $k_1\omega_1 \neq k_2\omega_2$, где k_1, k_2 – натуральные числа, причем $k_1 + k_2 = k$ и $k_2 > k_1$, то в симплектических полярных координатах φ_j, r_j, вводимых равенствами

$$z_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j\,,\ Z_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j\,;\ j = 1,2\,, \tag{3.7}$$

нормализованная функция Гамильтона запишется в виде

$$K = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \sum_{2\le i+j\le k/2} c_{ij} r_1^i r_2^j + O((r_1 + r_2)^{(k+1)/2})\,, \tag{3.8}$$

где i, j – целые неотрицательные числа. Если же есть резонанс порядка k, то к правой части равенства (3.8) добавятся еще и слагаемые вида

$$r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2}[\alpha_{k_1k_2}\sin(k_1\varphi_1 - k_2\varphi_2) + \beta_{k_1k_2}\cos(k_1\varphi_1 - k_2\varphi_2)] \tag{3.9}$$

Коэффициенты c_{ij} в (3.8) и $\alpha_{k_1k_2}, \beta_{k_1k_2}$ в (3.9) зависят только от параметров системы.

Если в правой части равенства (3.8) отбросить последнее слагаемое, то величины

$$\Omega_j = \frac{\partial K}{\partial r_j}\,;\ j = 1,2 \tag{3.10}$$

будут задавать приближенные значения частот нелинейных колебаний системы в окрестности ее устойчивого положения равновесия.

Замечание. Описанную процедуру нормализации и нахождения частот нелинейных колебаний удобнее проводить, используя вместо вещественных переменных q_j, p_j, комплексно сопряженные переменные u_j, U_j, вводимые каноническим преобразованием (с валентностью, равной $2i$; i – мнимая единица)

$$u_j = p_j + iq_j\,,\ U_j = p_j - iq_j\,;\ j = 1,2$$

Исходную функцию Гамильтона (3.1), записанную в переменных u_j, U_j, можно привести к нормальной форме классическим преобразованием Биркгофа или при помощи какой-либо из модификаций метода Депри–Хори [3,4]. Соответствующая каноническая унивалентная замена пременных $u_1, u_2, U_1, U_2 \to v_1, v_2, V_1, V_2$ близка к тождественной. Затем осуществляется переход к вещественным канонически сопряженным переменным z_j, Z_j при помощи канонической (с валентностью, равной $1/(2i)$) замены

$$z_j = \frac{v_j - V_j}{2i}\,,\ Z_j = \frac{v_j + V_j}{2}\,;\ j = 1,2\,,$$

и делается замена (3.7), чтобы получить нормальную форму в переменных φ_j, r_j.

Вычисления показывают, что если $k = 4$, то явные выражения коэффициентов нормальной формы из (3.8), (3.9) через коэффициенты исходной функции Гамильтона (3.1) можно выписать следующим образом. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&a_{3000} = \frac{1}{4}(h_{0030} - h_{2010}),\ b_{3000} = \frac{1}{4}(h_{3000} - h_{1020})\\
&a_{0300} = \frac{1}{4}(h_{0003} - h_{0201}),\ b_{0300} = \frac{1}{4}(h_{0300} - h_{0102})\\
&a_{2010} = -\frac{1}{4}(3h_{0030} + h_{2010}),\ b_{2010} = \frac{1}{4}(3h_{3000} + h_{1020})\\
&a_{0201} = -\frac{1}{4}(3h_{0003} + h_{0201}),\ b_{0201} = \frac{1}{4}(3h_{0300} + h_{0102})\\
&a_{2001} = \frac{1}{4}(h_{2001} - h_{1110} - h_{0021}),\ b_{2001} = \frac{1}{4}(h_{2100} + h_{1011} - h_{0120})\\
&a_{2100} = -\frac{1}{4}(h_{2001} + h_{1110} - h_{0021}),\ b_{2100} = \frac{1}{4}(h_{2100} - h_{1011} - h_{0120})\\
&a_{1011} = \frac{1}{2}(h_{2001} + h_{0021}),\ b_{1011} = \frac{1}{2}(h_{2100} + h_{0120})\\
&a_{1200} = -\frac{1}{4}(h_{1101} + h_{0210} - h_{0012}),\ b_{1200} = \frac{1}{4}(h_{1200} - h_{1002} - h_{0111})\\
&a_{1101} = -\frac{1}{2}(h_{0210} + h_{0012}),\ b_{1101} = \frac{1}{2}(h_{1200} + h_{1002})\\
&a_{1002} = \frac{1}{4}(h_{1101} - h_{0210} + h_{0012}),\ b_{1002} = \frac{1}{4}(h_{1200} - h_{1002} + h_{0111})\\
&a_{1003} = \frac{1}{8}(h_{1201} + h_{0112} - h_{1003} - h_{0310}),\ b_{1003} = \frac{1}{8}(h_{1300} + h_{0211} - h_{1102} - h_{0013})
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= -\frac{2}{5}(a_{2001}a_{1200} + b_{2001}b_{1200}) + (a_{1002}a_{1011} - b_{1002}b_{1011}) -\\
&\quad -(a_{0300}a_{1101} + b_{0300}b_{1101}) + 2(a_{0201}a_{1002} + b_{0201}b_{1002})\\
\kappa_2 &= -\frac{2}{5}(a_{2001}b_{1200} - a_{1200}b_{2001}) - (a_{1002}b_{1011} + a_{1011}b_{1002}) +\\
&\quad +(a_{0300}b_{1101} - a_{1101}b_{0300}) - 2(a_{0201}b_{1002} - a_{1002}b_{0201})
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков ($\omega_1 \neq 2\omega_2$ и $\omega_1 \neq 3\omega_2$) нормализованная функция Гамильтона (3.1) имеет вид

$$
K = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}), \tag{3.13}
$$

где коэффициенты c_{ij} вычисляются по следующим формулам:

$$c_{20} = \frac{1}{2}(3h_{4000} + h_{2020} + 3h_{0040}) - 2[\frac{3}{\omega_1}(a_{3000}^2 + b_{3000}^2 + a_{2010}^2 + b_{2010}^2) -$$

$$-\frac{1}{2\omega_1 - \omega_2}(a_{2001}^2 + b_{2001}^2) + \frac{1}{\omega_2}(a_{1011}^2 + b_{1011}^2) + \frac{1}{2\omega_1 + \omega_2}(a_{2100}^2 + b_{2100}^2)]$$

$$c_{11} = h_{2200} + h_{0220} + h_{2002} + h_{0022} - 8[\frac{1}{\omega_1 + 2\omega_2}(a_{1200}^2 + b_{1200}^2) +$$

$$+\frac{1}{2\omega_1 + \omega_2}(a_{2100}^2 + b_{2100}^2) - \frac{1}{\omega_1 - 2\omega_2}(a_{1002}^2 + b_{1002}^2) + \frac{1}{2\omega_1 - \omega_2}(a_{2001}^2 + b_{2001}^2) + \quad (3.14)$$

$$+\frac{1}{\omega_1}(a_{2010}a_{1101} + b_{2010}b_{1101}) - \frac{1}{\omega_2}(a_{0201}a_{1011} - b_{0201}b_{1011})]$$

$$c_{02} = \frac{1}{2}(3h_{0400} + h_{0202} + 3h_{0004}) - 2[\frac{3}{\omega_2}(a_{0300}^2 + b_{0300}^2 + a_{0201}^2 + b_{0201}^2) +$$

$$+\frac{1}{\omega_1 - 2\omega_2}(a_{1002}^2 + b_{1002}^2) + \frac{1}{\omega_1}(a_{1101}^2 + b_{1101}^2) + \frac{1}{\omega_1 + 2\omega_2}(a_{1200}^2 + b_{1200}^2)]$$

При резонансе третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$ нормальная форма такова

$$K = 2\omega_2 r_1 + \omega_2 r_2 + 2r_2\sqrt{2r_1}[a_{1002}\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) - b_{1002}\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2)] + O((r_1 + r_2)^2) \quad (3.15)$$

Если нет резонанса третьего порядка, но есть резонанс $\omega_1 = 3\omega_2$ четвертого порядка, то нормальная форма функции Гамильтона (3.1) имеет вид

$$K = 3\omega_2 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 -$$
$$-4r_2\sqrt{r_1 r_2}[(a_{1003} + \frac{1}{\omega_2}\kappa_2)\sin(\varphi_1 - 3\varphi_2) + (b_{1003} + \frac{1}{\omega_2}\kappa_1)\cos(\varphi_1 - 3\varphi_2)] + \quad (3.16)$$
$$+O((r_1 + r_2)^{5/2})$$

4. О нормальной форме функции Гамильтона (2.5) консервативной системы. В случае консервативной системы многие коэффициенты форм Γ_k в разложении (3.1) равны нулю. Так, из (2.5) и (3.1) видно, что из 20-ти коэффициентов формы Γ_3 отличны от нуля только следующие 10 коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&h_{3000} = \gamma_{30},\ h_{2100} = \gamma_{21},\ h_{1200} = \gamma_{12},\ h_{0300} = \gamma_{03}\\
&h_{1020} = \gamma_{1020},\ h_{1011} = \gamma_{1011},\ h_{1002} = \gamma_{1002}\\
&h_{0120} = \gamma_{0120},\ h_{0111} = \gamma_{0111},\ h_{0102} = \gamma_{0102},
\end{aligned} \quad (4.1)$$

а из 35-ти коэфициентов формы Γ_4 отличны от нуля только 14 коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&h_{4000} = \gamma_{40},\ h_{3100} = \gamma_{31},\ h_{2200} = \gamma_{22},\ h_{1300} = \gamma_{13},\ h_{0400} = \gamma_{04}\\
&h_{2020} = \gamma_{2020},\ h_{2011} = \gamma_{2011},\ h_{2002} = \gamma_{2002}\\
&h_{1120} = \gamma_{1120},\ h_{1111} = \gamma_{1111},\ h_{1102} = \gamma_{1102}\\
&h_{0220} = \gamma_{0220},\ h_{0211} = \gamma_{0211},\ h_{0202} = \gamma_{0202}
\end{aligned} \quad (4.2)$$

В данной статье мы не будем рассматривать нелинейные колебания при наличии резонансов. Получим только, предполагая что $\omega_1 \neq 2\omega_2$ и $\omega_1 \neq 3\omega_2$, выражения для частот Ω_1 и Ω_2 нелинейных колебаний (3.10). При этом ограничимся получением только первых поправок к частотам ω_1 и ω_2 малых колебаний. Эти поправки квадратичны относительно начальных значений величин q_j, p_j $(j = 1,2)$ (или, что одно и то же, линейны относительно начальных значений величин r_1 и r_2). А нормализующую замену переменных (3.5), (3.6) для краткости выпишем только до членов второй степени относительно z_j, Z_j $(j = 1,2)$.

Из (3.10)–(3.14) и (4.1), (4.2) получаем

$$\Omega_1 = \omega_1 + 2c_{20}r_1 + c_{11}r_2,\ \Omega_2 = \omega_2 + c_{11}r_1 + 2c_{02}r_2, \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{20} &= \frac{3}{2}\gamma_{40} + \frac{1}{2}\gamma_{2020} - \frac{3}{4}\frac{(\gamma_{30}+\gamma_{1020})^2 + 4\gamma_{30}^2}{\omega_1} + \frac{1}{8}\frac{(\gamma_{21}-\gamma_{0120}+\gamma_{1011})^2}{2\omega_1-\omega_2} - \\
&- \frac{1}{2}\frac{(\gamma_{21}+\gamma_{0120})^2}{\omega_2} - \frac{1}{8}\frac{(\gamma_{21}-\gamma_{0120}-\gamma_{1011})^2}{2\omega_1+\omega_2} \\
c_{11} &= \gamma_{22} + \gamma_{0220} + \gamma_{2002} - \frac{1}{2}\frac{(\gamma_{12}-\gamma_{1002}-\gamma_{0111})^2}{\omega_1+2\omega_2} - \frac{1}{2}\frac{(\gamma_{21}-\gamma_{1011}-\gamma_{0120})^2}{2\omega_1+\omega_2} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{(\gamma_{12}-\gamma_{1002}+\gamma_{0111})^2}{\omega_1-2\omega_2} - \frac{1}{2}\frac{(\gamma_{21}+\gamma_{1011}-\gamma_{0120})^2}{2\omega_1-\omega_2} - \\
&- \frac{(3\gamma_{30}+\gamma_{1020})(\gamma_{12}+\gamma_{1002})}{\omega_1} - \frac{(3\gamma_{03}+\gamma_{0102})(\gamma_{21}+\gamma_{0120})}{\omega_2} \\
c_{02} &= \frac{3}{2}\gamma_{04} + \frac{1}{2}\gamma_{0202} - \frac{3}{4}\frac{(\gamma_{03}+\gamma_{0102})^2 + 4\gamma_{03}^2}{\omega_2} - \frac{1}{8}\frac{(\gamma_{12}-\gamma_{1002}+\gamma_{0111})^2}{\omega_1-2\omega_2} - \\
&- \frac{1}{2}\frac{(\gamma_{12}+\gamma_{1002})^2}{\omega_1} - \frac{1}{8}\frac{(\gamma_{12}-\gamma_{1002}-\gamma_{0111})^2}{\omega_1+2\omega_2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из (2.6)–(2.9) и (4.3), (4.4) величины Ω_1, Ω_2 выражаются через коэффициенты рядов (1.1) и (1.2). И тем самым определяется явная зависимость частот нелинейных колебаний от параметров системы.

Проведя вычисления по описанному в п. 3 алгоритму, найдем, что нормализующую замену переменных (3.5), (3.6) можно представить в виде

$$q_j = z_j - \frac{\partial S_3^*}{\partial Z_j} + O_3,\ p_j = Z_j + \frac{\partial S_3^*}{\partial z_j} + O_3;\ j = 1,2, \tag{4.5}$$

где

$$S_3^* = \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 + \sigma_{111}Z_1^3 + \sigma_{112}Z_1^2 Z_2 - \sigma_{122}Z_1 Z_2^2 + \sigma_{222}Z_2^3 \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\gamma_{30}}{\omega_1}z_1^2 + \frac{2\omega_1(\gamma_{21}-\gamma_{0120}) + \gamma_{1011}\omega_2}{4\omega_1^2-\omega_2^2}z_1 z_2 + \\
&+ \frac{\gamma_{12}(\omega_1^2-2\omega_2^2) - 2\gamma_{1002}\omega_2^2 + \gamma_{0111}\omega_1\omega_2}{\omega_1(\omega_1^2-4\omega_2^2)}z_2^2 \\
\sigma_2 &= \frac{2\omega_1^2(\gamma_{21}+\gamma_{0120}) - \gamma_{1011}\omega_1\omega_2 - \gamma_{21}\omega_2^2}{\omega_2(4\omega_1^2-\omega_2^2)}z_1^2 - \\
&- \frac{2\omega_2(\gamma_{12}-\gamma_{1002}) + \gamma_{0111}\omega_1}{\omega_1^2-4\omega_2^2}z_1 z_2 + \frac{\gamma_{03}}{\omega_2}z_2^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_{111} = \frac{1}{3}\frac{2\gamma_{30}+\gamma_{1020}}{\omega_1},\ \sigma_{112} = \frac{2\omega_1^2(\gamma_{21}+\gamma_{0120}) + \gamma_{1011}\omega_1\omega_2 - \gamma_{0120}\omega_2^2}{\omega_2(4\omega_1^2-\omega_2^2)}$$

$$\sigma_{122} = \frac{2\omega_2^2(\gamma_{12}+\gamma_{1002}) + \gamma_{0111}\omega_1\omega_2 - \gamma_{1002}\omega_1^2}{\omega_1(\omega_1^2-4\omega_2^2)},\ \sigma_{222} = \frac{1}{3}\frac{2\gamma_{03}+\gamma_{0102}}{\omega_2}$$

5. Условно-периодические колебания при отсуствии резонансов до четвертого порядка. Рассмотрим приближенную систему с функцией Гамильтона $K^{(0)}$, получаемой из функции (3.13) полной системы отбрасыванием членов выше четвертой степени относительно $r_1^{1/2}, r_2^{1/2}$

$$K^{(0)} = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \tag{5.1}$$

Пусть функция $K^{(0)}$ является невырожденной, т. е. определитель

$$D_2 = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_1^2} & \dfrac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \dfrac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \dfrac{\partial^2 K^{(0)}}{\partial r_2^2} \end{Vmatrix} = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \tag{5.2}$$

отличен от нуля. Тогда, согласно КАМ-теории [1,2], в малой окрестности положения равновесия $r_1 = r_2 = 0$ движения полной системы с функцией Гамильтона (3.13) будут для большинства начальных значений $r_j(0)$ величин r_j $(j = 1,2)$ условно – периодическими с рационально независимыми частотами, задаваемыми равенствами (4.3), в которых $r_j = r_j(0)$. Это большинство начальных значений образует множество, называемое колмогоровским. Мера множества начальных значений, не принадлежащих колмогоровскому множеству, является малой. В окрестности $r_1 + r_2 < \varepsilon$ его относительная мера имеет порядок $\varepsilon^{(k-3)/4}$, где k – порядок до которого отсутствуют резонансы $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$.

Пример 1. Колебания материальной точки на неподвижной поверхности. В качестве иллюстрации рассмотрим конкретную задачу. Пусть материальная точка весом mg движется в однородном поле тяжести, все время оставаясь на неподвижной абсолютно гладкой поверхности. Движение отнесем к системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а оси Ox и Oy параллельны линиям кривизны поверхности в начале координат. Уравнение поверхности запишется в виде сходящегося ряда

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2}\right) + \sum_{k=3}^{\infty} Z_k\ ,\ Z_k = \sum_{\nu_1+\nu_2=k} z_{\nu_1\nu_2} x^{\nu_1} y^{\nu_2}\ , \tag{5.3}$$

где ρ_1, ρ_2 – главные радиусы кривизны поверхности (полагаем, что $\rho_2 > \rho_1 > 0$), а ν_1, ν_2 – целые неотрицательные числа.

Потенциальная и кинетическая энергии точки вычисляются по формулам

$$\Pi = mgz\ ,\ T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),\ \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y} \tag{5.4}$$

Нормальные координаты θ_1, θ_2 введем равенствами

$$\theta_1 = \sqrt{m}x\ ,\ \theta_2 = \sqrt{m}y \tag{5.5}$$

Для частот ω_1, ω_2 малых линейных колебаний имеем следующие выражения

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\rho_1}\ ,\ \omega_2^2 = \frac{g}{\rho_2}\ ;\ \omega_1 > \omega_2 > 0 \tag{5.6}$$

Потенциальная и кинетическая энергии (5.4) в нормальных координатах θ_1, θ_2 запишутся в виде рядов (1.1) и (1.2). Коэффициенты членов ряда (1.1) до четвертой степени включительно таковы:

$$p_{30} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{30}\ ,\ p_{21} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{21}\ ,\ p_{12} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{12}\ ,\ p_{03} = \frac{g}{\sqrt{m}} z_{03} \tag{5.7}$$

$$p_{40} = \frac{g}{m}z_{40}\,,\ p_{31} = \frac{g}{m}z_{31}\,,\ p_{22} = \frac{g}{m}z_{22}\,,\ p_{13} = \frac{g}{m}z_{13}\,,\ p_{04} = \frac{g}{m}z_{04} \tag{5.8}$$

Коэффициенты всех шести членов третьей степени относительно $\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2$ в (1.2) равны нулю, а из девяти коэффициентов членов четвертой степени отличны от нуля только три коэффициента:

$$t_{2020} = \frac{1}{2m\rho_1^2}\,,\ t_{1111} = \frac{1}{m\rho_1\rho_2}\,.\ t_{0202} = \frac{1}{2m\rho_2^2} \tag{5.9}$$

Рассмотрим случай, когда отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, т.е. $\omega_1 \neq 2\omega_2$ и $\omega_1 \neq 3\omega_2$ (или, что то же самое, $\rho_2 \neq 4\rho_1$ и $\rho_2 \neq 9\rho_1$). Из (5.6)–(5.9), (2.3), (2.6)–(2.9) и формул (4.4) находим выражения для величин c_{ij}, нужных для вычисления частот (4.3) нелинейных колебаний:

$$c_{20} = \frac{\rho_1}{2m}[3z_{40} - \frac{1}{2\rho_1^3} - \frac{15}{2}\rho_1 z_{30}^2 - \frac{\rho_2(3\rho_1 - 8\rho_2)}{2(\rho_1 - 4\rho_2)}z_{21}^2]$$

$$c_{11} = \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{m}[z_{22} + \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 - 4\rho_2}z_{21}^2 - \frac{2\rho_1\rho_2}{4\rho_1 - \rho_2}z_{12}^2 - 3\rho_1 z_{30}z_{12} - 3\rho_2 z_{03}z_{21}]$$

$$c_{02} = \frac{\rho_2}{2m}[3z_{04} - \frac{1}{2\rho_2^3} - \frac{15}{2}\rho_2 z_{03}^2 - \frac{\rho_1(8\rho_1 - 3\rho_2)}{2(4\rho_1 - \rho_2)}z_{12}^2] \tag{5.10}$$

Если определитель (5.2) отличен от нуля, то движение материальной точки для большинства начальных условий будет условно-периодическим с частотами Ω_1 и Ω_2, задаваемыми равенствами (4.3). В окрестности $r_1 + r_2 < \varepsilon$ относительная мера дополнения к этому большинству имеет порядок $\varepsilon^{1/4}$.

Пример 2. О нелинейных колебаниях двойного маятника. Маятник образован двумя твердыми стержнями, которые соединены своими концами при помощи шарнира. Первый из стержней подвешен его свободным концом к неподвижной точке. В остальном стержни могут свободно перемещаться в одной вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса первого стержня. Движение происходит в однородном поле тяжести.

Существует устойчивое положение равновесия маятника, когда стержни висят вдоль вертикали снизу от точки подвеса. Вблизи положения равновесия первый и второй стержни отклонены от вертикали на малые углы φ и ψ соответственно.

Система имеет две степени свободы, величины φ и ψ примем за обобщенные координаты. Пусть стержни являются тонкими и однородными, имеют одинаковую длину l и одинаковый вес mg. Для потенциальной и кинетической энергий можно получить следующие выражения [7]:

$$\Pi = mgl(3\sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}),\ T = \frac{1}{2}ml^2[\frac{4}{3}\dot\varphi^2 + \cos(\varphi - \psi)\dot\varphi\dot\psi + \frac{1}{3}\dot\psi^2] \tag{5.11}$$

В нормальных координатах θ_1, θ_2, вводимых по формулам [7]

$$\varphi = -\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3}{7m}}[(1+\sqrt{7})\theta_1 + (1-\sqrt{7})\theta_2],\ \psi = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3}{7m}}[(5+\sqrt{7})\theta_1 + (5-\sqrt{7})\theta_2], \tag{5.12}$$

потенциальная энергия Π представляется рядом (1.1), в котором

$$\omega_1^2 = 3(1 + \frac{2\sqrt{7}}{7})\frac{g}{l}\,,\ \omega_2^2 = 3(1 - \frac{2\sqrt{7}}{7})\frac{g}{l}\,, \tag{5.13}$$

а формы Π_k имеют четную степень; коэффициенты формы Π_4 задаются равенствами

$$p_{40} = -\frac{3(125+46\sqrt{7})}{784}\frac{g}{ml^3},\ p_{31} = -\frac{27(3+\sqrt{7})}{196}\frac{g}{ml^3},\ p_{22} = -\frac{243}{392}\frac{g}{ml^3}$$
$$p_{13} = -\frac{27(3-\sqrt{7})}{196}\frac{g}{ml^3},\ p_{04} = -\frac{3(125-46\sqrt{7})}{784}\frac{g}{ml^3} \quad (5.14)$$

Кинетическая энергия T в нормальных координатах записывается в виде ряда (1.2), в котором коэффициенты при $\dot\theta_1^2, \dot\theta_1\dot\theta_2, \dot\theta_2^2$ – четные функции θ_1, θ_2, причем

$$t_{2020} = \frac{27}{196}\frac{37+14\sqrt{7}}{ml^2},\ t_{1120} = \frac{27}{98}\frac{2+\sqrt{7}}{ml^2},\ t_{0220} = -\frac{27}{196}\frac{5-2\sqrt{7}}{ml^2}$$
$$t_{2011} = -\frac{9}{98}\frac{8+3\sqrt{7}}{ml^2},\ t_{1111} = -\frac{9}{49ml^2},\ t_{0211} = -\frac{9}{98}\frac{8-3\sqrt{7}}{ml^2} \quad (5.15)$$
$$t_{2002} = -\frac{27}{196}\frac{5+2\sqrt{7}}{ml^2},\ t_{1102} = \frac{27}{98}\frac{2-\sqrt{7}}{ml^2},\ t_{0202} = \frac{27}{196}\frac{37-14\sqrt{7}}{ml^2}$$

Опираясь на описанную структуру разложений (1.1), (1.2) и равенства (2.6)–(2.9), (4.3), (4.4) и (5.13)–(5.15), получаем коэффициенты функции $K^{(0)}$ из (5.1):

$$c_{20} = -\frac{3}{1568}\frac{1409+528\sqrt{7}}{ml^2},\ c_{11} = \frac{9\sqrt{21}}{392ml^2},\ c_{02} = -\frac{3}{1568}\frac{1409-528\sqrt{7}}{ml^2} \quad (5.16)$$

Условие невырожденности функции $K^{(0)}$ выполнено, так как для определителя (5.2) из равенств (5.16) имеем такое выражение

$$D_2 = \frac{297333}{614656m^2l^4} \neq 0$$

Отметим следующее важное обстоятельство: рассматриваемая задача о нелинейных колебаниях двойного маятника в окрестности его устойчивого равновесия на вертикали является нерезонансной. Действительно, если $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$, то из (5.13) следует, что

$$\sqrt{7} = \frac{3k_2^2 - 11k_1^2}{4k_1^2},$$

но последнее равенство невозможно, так как число $\sqrt{7}$ иррациональное.

Для большинства начальных значений $r_j(0)$ колебания маятника будут условно-периодическими с частотами (4.3), вычисляемыми при $r_j = r_j(0)$. Дополнение к этому колмогоровскому большинству начальных условий имеет малую относительную меру в окрестности $r_1 + r_2 < \varepsilon$. Ввиду отмеченной выше нерезонансности задачи о колебаниях, эта мера экспоненциально мала [1]: она имеет порядок $\exp(-\frac{c_1}{\varepsilon^{c_2}})$, c_1, c_2 – const > 0.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, https://rscf.ru/project/24-11-00162/ в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
2. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
3. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
4. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

5. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. 592 с.

On The Problem of Nonlinear Oscillations of a Conservative System in the Absence of Resonance

A. P. Markeev [a,#]

[a] *Moscow Aviation Institute (NRU), Moscow, Russia*
[#] *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

An analytical algorithm is developed for finding the frequencies of nonlinear oscillations of a conservative system with two degrees of freedom near its stable equilibrium position. It is assumed that there are no resonances in the system up to the fourth order inclusive, i.e. the ratio of frequencies of small linear oscillations is not equal to two or three. As an application, the problem of nonlinear oscillations of a material point on a stationary absolutely smooth surface in a uniform gravitational field is considered. An estimate of the Kolmogorov set measure of initial conditions is indicated for which the motion of the point is conditionally periodic. A nonlinear conservative system is also considered in which there are no resonances of any order. The system is a pendulum formed by two thin rods of equal length and weight connected by a hinge. The nature of nonlinear oscillations of this pendulum in the vicinity of its stable equilibrium on the vertical is studied.

Keywords: conservative system, stability, conditionally periodic oscillations

REFERENCES

1. *Arnol’d V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
2. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc., no. 81, Providence R.I.: AMS, 1968.
3. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. Vol. 9. Providence R.I.: AMS Coll., 1966.
4. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
5. *Nayfeh A.X.* Perturbation Methods. N.Y.: Wiley, 1973. 425 p.
6. *Gantmacher F.R.* Lectures on Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 296 p. (in Russian)
7. *Markeev A.P.* Theoretical mechanics. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2007. 592 p. (in Russian)