

УДК 539.374

**БОЛЬШИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ  
КРУГОВОГО СДВИГА В ИЗОТРОПНО  
УПРОЧНЯЮЩЕМСЯ МАТЕРИАЛЕ**© 2024 г. Г. М. Севастьянов<sup>1,\*</sup>, А. С. Бегун<sup>1,\*\*</sup>, А. А. Буренин<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН,  
Комсомольск-на-Амуре, Россия*<sup>\*</sup>*e-mail: akela.86@mail.ru,*<sup>\*\*</sup>*e-mail: ustinova@iacp.dvo.ru,*<sup>\*\*\*</sup>*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2024 г.

После доработки 28.02.2024 г.

Принята к публикации 10.03.2024 г.

В исследовании получено аналитическое решение задачи об азимутальном сдвиге в полом круговом цилиндре, изотропном и несжимаемом, упругие свойства которого описываются моделью Муни – Ривлина, а пластические – моделью Треска с произвольным монотонным упрочнением. Как упругие, так и пластические деформации полагаются конечными. Приведены достаточные условия существования полученного решения.

*Ключевые слова:* пластичность, гиперупругость, круговой сдвиг, конечные деформации, изотропное упрочнение

DOI: 10.31857/S0032823524020108 EDN: XUAKYF

**1. Введение.** С целью составления математической модели деформирования, учитывающей необратимые изменения в геометрии тела, вводятся [1] понятия обратимых и необратимых деформаций, которые считаются составляющими полных деформаций в теле. Однако если полные деформации в любой момент процесса деформирования возможно измерить инструментально, то их составляющие опытно неизмеримы. При этом именно эти гипотетически введенные параметры, следуя формализму термодинамики, оказываются термодинамическими параметрами изотермического процесса деформирования и для них необходимо записать дифференциальные уравнения изменения (переноса) [2]. Для этого не возникает затруднений, когда деформации можно считать малыми, в случае же больших деформаций встречаются принципиальные трудности. Необратимыми деформациями могут выступать как деформации ползучести, так и пластические деформации, для которых формулируются соответствующие определяющие законы [3–5]. При этом в деформированном теле могут одновременно существовать области, где изменение необратимых деформаций подчинено разным определяющим законам [6, 7]. Длительную прочность и разрушение деформируемого тела часто связывают с вводимым дополнительным термодинамическим параметром состояния, который отвечает за эволюцию дефек-

тной структуры. Такой структурный параметр, следуя [3, 8], называют “поврежденностью”. Для него, также следуя термодинамическому формализму, записываются дифференциальные уравнения изменения, учитывающие в той или иной степени структурные изменения в теле. Такой подход продемонстрирован в пионерских работах Ю.Н. Работнова [8–10]; он остается значимым и развивается в настоящее время [11, 12]. Отметим достаточно полный обзор работ этого направления [13].

Касаясь путей развития теории пластичности, Ю.Н. Работнов замечает [14], что “гипотезы, лежащие в основе... теорий пластичности, носят формальный характер, а экспериментальные данные недостаточно ясны... и допускают различные истолкования”. Подобные суждения повторялись Ю.Н. Работновым неоднократно [15]. Доступной базой для них являлся обстоятельный обзор [16]. Классические условия текучести дополняются функциональными зависимостями от накопленной пластической деформации, коэффициенты таких зависимостей определяются исходя из специальных опытов; таким способом устанавливаются определяющие законы теории пластичности, учитывающие изотропное, трансляционное или комбинированное упрочнение [17–20]. Ю.Н. Работновым [14] подчеркивается важность наличия точных решений соответствующих опытам краевых задач, на основе которых можно сделать какой-то осмысленный выбор тех или иных функциональных зависимостей упрочнения.

В настоящей работе получено точное решение для одной из достаточно простых схем нагружения, которая может использоваться как самостоятельно, так и в составе синтетических тестов для конкретизации законов изотропного упрочнения, а именно для задачи о больших деформациях кругового сдвига (вискозиметрической деформации).

Одномерные сдвиговые деформации – круговой сдвиг (известный также как течение Куэтта в реологии жидкостей или деформация в цилиндрическом вискозиметре), кручение, антиплоский осесимметричный сдвиг – являются наиболее простыми для исследования в механике деформируемых тел. Для этих типов деформации были получены некоторые аналитические и численно-аналитические решения. Так, в рамках модели больших упруго-пластических деформаций [21], впервые были получены [22, 23] аналитические решения о вискозиметрическом течении в цилиндрическом слое; задача обобщена на случай учета ползучести материала до наступления пластического течения [24, 25]. Учитывается [26–28] производство тепла за счет необратимого деформирования. Проводились [26, 29–31] аналитические исследования кручения упругопластических материалов, в т.ч. для материалов с изотропным упрочнением.

Деформированное состояние, близкое к круговому сдвигу, реализуется в недавно предложенных схемах обработки материалов при высоком давлении [32–38]. Предложенное далее аналитическое решение может быть использовано для оценки напряженно-деформированного состояния при указанных схемах деформирования, с тем условием, что приложенное поле давления однородно и однородны механические свойства материала.

**2. Постановка задачи.** На рис. 1 представлена схема кругового сдвига в условиях плоской деформации. Полый цилиндр с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним радиусом  $r_1$  деформирован так, что внешняя поверхность  $r = r_1$  оказывается повернутой относительно оси симметрии на угол  $\alpha^*$ . Внутренняя поверхность  $r = r_0$  остается неподвижной. Для этого к внешней поверхности прикладывается крутящая нагрузка, которая создает на поверхности  $r = r_1$  касательное напряжение  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1}$  в цилиндрической системе координат, с продольной осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии. То есть функция угла поворота материальных точек  $\alpha$  удовлетворяет граничным условиям:

$$\alpha|_{r=r_1} = \alpha^*, \quad \alpha|_{r=r_0} = 0$$

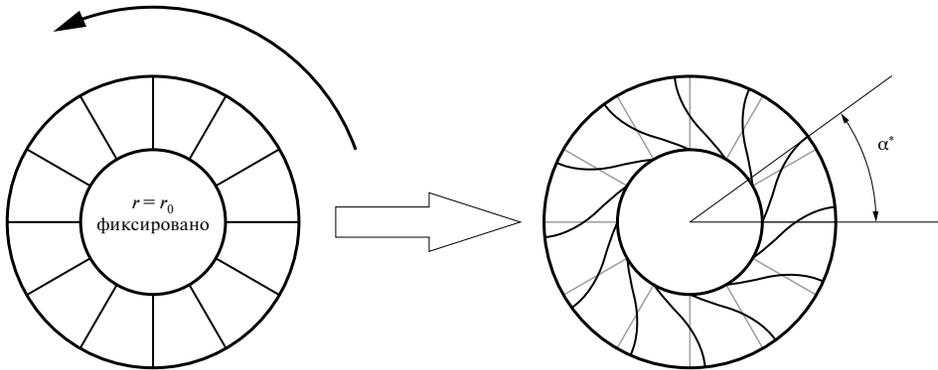


Рис. 1. Круговой сдвиг в условиях плоской деформации.

Целью исследования ставится задача определения следующих характеристик процесса:

- зависимость нагрузки  $\sigma_{r\varphi}|_{r=r_1}$  от угла поворота  $\alpha^*$ ;
- распределение пластической деформации в образце;
- искривление материальных волокон в деформированном образце в виде функции угла поворота  $\alpha$ .

**3. Модель материала. Кинематика конечных деформаций.** Пусть положение точки сплошной среды в трехмерном пространстве в недеформированном состоянии описывается радиус-вектором  $\mathbf{X} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3$ , а в деформированном состоянии радиус-вектором  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ . Координатные системы с ортонормированными базами  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  и  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  имеют общее начало. Двухточечные тензоры  $\mathbf{F}$  (материальный градиент деформации) и  $\mathbf{F}^{-1}$  (пространственный градиент деформации) определяются как  $\mathbf{F} = (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{x})^T$  и  $\mathbf{F}^{-1} = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{X})^T$ . Здесь  $\nabla_{\mathbf{x}}$  есть оператор Гамильтона в координатах деформированного состояния,  $\nabla_{\mathbf{X}}$  – в исходных координатах. Для  $\mathbf{F}$ , как и для любого невырожденного тензора второго ранга, единственным образом может быть записано полярное разложение  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ .

Здесь  $\mathbf{R}$  ортогональный тензор, представляющий вращение,  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ,  $\det \mathbf{R} = 1$ ; симметричные тензоры  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  есть соответственно правый и левый тензоры растяжений. Далее будут использоваться симметричные эйлеровы тензоры деформаций: левый тензор Коши–Грина  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$ , а также тензор Фингера (или левый тензор Пиолы [39])  $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$ .

**3.1. Разделение полной деформации на обратимую и необратимую составляющие.** Кинематика конечного упруго-пластического деформирования может быть построена на основе мультипликативного разложения тензора деформации Фингера  $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$  на обратимую и необратимую составляющие [40,41]:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{c}^p (\mathbf{c}^e)^{1/2} \quad (3.1)$$

Здесь и далее индексом «e» обозначены упругие составляющие тензоров, индексом «p» – пластические составляющие, появление которых обусловлено диссипативным процессом пластического течения. Упругие составляющие тензоров деформации вводятся равенствами  $\mathbf{V}^e = \mathbf{F}^e(\mathbf{F}^e)^T$ ,  $\mathbf{c}^e = (\mathbf{V}^e)^{-1} = (\mathbf{F}^e)^{-T}(\mathbf{F}^e)^{-1}$ . Если тело деформируется чисто упруго, то  $\mathbf{c}^e = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}^p = \mathbf{I}$ ; если упругие деформации пренебрежимо малы, то  $\mathbf{c}^p \approx \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}^e \approx \mathbf{I}$ ; здесь  $\mathbf{I}$  есть единичный тензор. Далее будет кратко

изложен этот подход. Предлагается следующее представление обратного градиента деформации:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{Y}(\mathbf{c}^e)^{1/2}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{Y}$  есть некоторый тензор второго ранга, не обязательно ортогональный, поэтому (3.2) не есть полярное разложение.

Используя известное равенство для обратного градиента деформации

$$\{\dot{\mathbf{F}}^{-1}\} + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{L} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^T$  есть пространственный тензор градиента скорости, можно получить с учетом (3.2) равенство

$$\left\{ \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \right\} = \mathbf{Q} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} - \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{L}; \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{Y}^{-1} \dot{\mathbf{Y}} \quad (3.3)$$

Здесь и далее точка над величиной означает ее полную производную по времени  $t$ , т.е.  $\{\dot{\phantom{x}}\} = \partial\{\phantom{x}\}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla_x)\{\phantom{x}\}$ ;  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{u}$  – скорость,  $\mathbf{u}$  – перемещение.

Далее, возвращаясь к представлению (3.1), можно записать

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} = \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{c}^p \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2}, \text{ откуда } \mathbf{c}^p = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$$

Находя полную производную по времени от последнего равенства, имеем

$$\dot{\mathbf{c}}^p = \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{Y}} + (\dot{\mathbf{Y}})^T \mathbf{Y} = -\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = -\mathbf{c}^p \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{c}^p \quad (3.4)$$

Условие симметрии правой части равенства (3.3) (т.е. условие симметрии тензора  $\mathbf{c}^e$  и, следовательно, его полной производной) дает

$$\mathbf{Q} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} - \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{L} = \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{Q}^T - \mathbf{L}^T \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W} + \mathbf{A} + \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{S}, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{W} = (\mathbf{L})_a$  есть тензор спина, индексом «а» обозначена антисимметричная часть тензора,  $2(\ )_a = (\ ) - (\ )^T$ ;  $\mathbf{S}$  – симметричный, а  $\mathbf{A}$  – антисимметричный тензоры. Подставляя (3.6) в (3.5), имеем

$$\left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{A} + \mathbf{A} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} = \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2}, \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{D} = (\mathbf{L})_s$  – тензор деформации скорости, индексом «s» обозначена симметричная часть тензора,  $2(\ )_s = (\ ) + (\ )^T$ ; равенство (3.7) не содержит тензор  $\mathbf{S}$ , который, следовательно, может быть произвольным симметричным. Последнее тензорное уравнение относительно  $\mathbf{A}$  имеет следующее решение [42]:

$$\mathbf{A} = \frac{I_1^2 \left[ \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \right] - I_1 \left[ \mathbf{c}^e \mathbf{D} - \mathbf{D} \mathbf{c}^e \right] + \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \left[ \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2} \right] \left( \mathbf{c}^e \right)^{1/2}}{I_1 I_2 - I_3}$$

Здесь  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{c}^e)^{1/2}$ ,  $I_2 = (1/2)\left[\text{tr}^2(\mathbf{c}^e)^{1/2} - \text{tr}\mathbf{c}^e\right]$ ,  $I_3 = \det(\mathbf{c}^e)^{1/2}$ .

Кратко это равенство может быть записано в виде [26]

$$\mathbf{A} = \frac{\Sigma (\mathbf{D}\Sigma - \Sigma \mathbf{D})\Sigma}{\det \Sigma} = \frac{\Sigma \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} - \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] \Sigma}{\det \Sigma}, \quad \Sigma = \text{tr}(\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{I} - (\mathbf{c}^e)^{1/2}$$

Далее можно получить уравнение эволюции тензора упругой деформации. Воспользовавшись (3.3), (3.6) и (3.7):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}^e &= \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right\} \dot{\left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right\}} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left\{ \dot{(\mathbf{c}^e)^{1/2}} \right\} = \mathbf{Q}\mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e\mathbf{L} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} (\mathbf{Q} - \mathbf{L})(\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\ &= \left[ \mathbf{W} + 2\mathbf{A} + \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right\} \right] \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e\mathbf{L} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \times \left[ -\mathbf{D} + 2\mathbf{A} + \left\{ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right\} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} = \\ &= -\mathbf{L}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e\mathbf{L} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - \mathbf{D}\mathbf{c}^e + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \times \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] \mathbf{c}^e \end{aligned}$$

Или с учетом (3.7):

$$\begin{aligned} \partial_{CR} \left\{ \mathbf{c}^e \right\}^{\text{def}} &= \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{L}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{L} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D} (\mathbf{c}^e)^{1/2} - \mathbf{D}\mathbf{c}^e + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] \times \\ &\quad \times (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} - \mathbf{A} \right] \mathbf{c}^e = \mathbf{c}^e \mathbf{S} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{c}^e \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $\partial_{CR} \{ \}$  – производная Коттер – Ривлина.

Подставляя представление (3.6) в уравнение (3.4) имеем

$$\dot{\mathbf{c}}^p = -\mathbf{c}^p \left[ \mathbf{W} + \mathbf{A} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] + \left[ \mathbf{W} + \mathbf{A} - \mathbf{S} (\mathbf{c}^e)^{1/2} \right] \mathbf{c}^p \quad (3.9)$$

Для замыкания (3.9) следует определить симметричный тензор  $\mathbf{S}$ . Это определение выходит за рамки кинематики и дано в следующем подразделе.

**3.2. Определяющие соотношения.** Второй закон термодинамики в виде неравенства Планка для мощности диссипации на единицу деформированного объема  $P$  есть

$$P = \sigma : \mathbf{D} - J^{-1} \dot{\Psi} \geq 0$$

Здесь и далее символ «:» означает свертку тензоров второго ранга, а именно  $\sigma : \mathbf{D} = \text{tr}(\sigma \mathbf{D}^T)$ ;  $\sigma$  – тензор напряжений Коши;  $J = \det \mathbf{F} = \rho_0 / \rho$ ;  $\rho_0$  и  $\rho$  – плотность среды в недеформированном и деформированном состоянии соответственно. Если упругий потенциал  $\Psi$  изотропной среды есть функция только упругой деформации ( $\Psi = \Psi(\mathbf{c}^e)$ ), то можно записать

$$P = \sigma : \mathbf{D} - J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \dot{\mathbf{c}}^e \geq 0$$

Исходя из соотношения (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \dot{\mathbf{c}}^e &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} : \left[ -\mathbf{L}^T \mathbf{c}^e - \mathbf{c}^e \mathbf{L} + \mathbf{c}^e \mathbf{S} (\mathbf{c}^e)^{1/2} + (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{c}^e \right] = \\ &= -2 \left( \mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \right) : \mathbf{D} + 2 \left( \mathbf{c}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}^e} \right) : \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] \end{aligned}$$

Здесь учтена соосность тензоров  $\mathbf{c}^e$  и  $\partial\Psi/\partial\mathbf{c}^e$ , а также инвариантность оператора  $\text{tr}$  относительно кругового сдвига сомножителей аргумента.

Тогда неравенство Планка может быть записано в виде

$$P = \left[ \sigma + 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e} \right] : \mathbf{D} - 2J^{-1} \left( \mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e} \right) : \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] \geq 0$$

и может быть выполнено, когда:

$$\text{— упругий закон } \sigma = \begin{cases} -2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e \neq 1 \\ -p\mathbf{I} - 2J^{-1}\mathbf{c}^e \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}^e}, & \det \mathbf{c}^e = 1 \end{cases}$$

— остаточное диссипативное неравенство  $P = \sigma : \left[ (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{S} \right] \geq 0$

Требую, чтобы остаточное диссипативное неравенство принимало вид  $P = \sigma : \mathbf{D}^p \geq 0$ , определим симметричный тензор  $\mathbf{S}$  как  $\mathbf{S} = (\mathbf{c}^e)^{-1/2} \mathbf{D}^p$ , полагая, что тензоры  $\mathbf{c}^e$  и  $\mathbf{D}^p$  сосны, то есть  $\mathbf{c}^e \mathbf{D}^p = \mathbf{D}^p \mathbf{c}^e$ . (Для изотропной среды с упругим потенциалом  $\Psi = \Psi(\mathbf{c}^e)$  тензоры  $\mathbf{c}^e$  и  $\sigma$  соосны; для того, чтобы были соосны  $\mathbf{c}^e$  и  $\mathbf{D}^p$ , нужно чтобы были соосны тензор напряжений Коши  $\sigma$  и тензор скорости пластической деформации, что является распространенным допущением в теории пластичности, в частности, это выполняется для обычного ассоциированного закона пластического течения).

Возвращаясь теперь к формулам (3.8) и (3.9), имеем:

$$\begin{aligned} \partial_J \{ \mathbf{c}^p \} &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{c}}^p - \mathbf{W} \mathbf{c}^p + \mathbf{c}^p \mathbf{W} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}^p) \mathbf{c}^p - \mathbf{c}^p (\mathbf{A} + \mathbf{D}^p) = \\ &= -2\mathbf{c}^p \mathbf{D}^p + \mathbf{A} \mathbf{c}^p - \mathbf{c}^p \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\partial_{CR} \{ \mathbf{c}^e \} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{c}}^e + \mathbf{L}^T \mathbf{c}^e + \mathbf{c}^e \mathbf{L} = (\mathbf{c}^e)^{1/2} \mathbf{D}^p (\mathbf{c}^e)^{1/2} + \mathbf{D}^p \mathbf{c}^e = 2\mathbf{c}^e \mathbf{D}^p$$

Здесь  $\partial_J \{ \}$  есть производная Яуманна.

Вместо (3.10) можно записать равенство для производной Олдройда тензора  $\mathbf{B}^e$

$$\partial_{Old} \{ \mathbf{B}^e \} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{B}}^e - \mathbf{L} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e \mathbf{L}^T = -2\mathbf{B}^e \mathbf{D}^p \quad (3.11)$$

Для изотропной среды мультипликативное разделение тензора градиента деформации на упругую и пластическую составляющие  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  при  $\mathbf{F}^p = (\mathbf{F}^p)^T$  [43,44] приводит к уравнению, по форме совпадающему с (3.11) [45]. Последнее равенство означает, что пластическая деформация осуществляется без вращения (подробнее см. [43, 46, 47]). Это кажется нам заслуживающим внимания, поскольку, вообще говоря, разделение полной деформации (3.1) и разложение градиента деформации  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  не эквивалентны. Отметим, что в [46, 47] также строится эволюционное определяющее соотношение на базе мультипликативного разделения градиента деформации на упругую и неупругую части и при этом подходе тензор деформации скорости представляет собой сумму своих упругой и неупругой частей.

Уравнение (3.10) описывает эволюцию тензора упругой деформации в области пластического течения, при этом начальные значения компонент этого тензора определяются решением соответствующей упругой задачи.

**4. Модель материала. Конкретизация физических соотношений.** Для изначально изотропной упругой несжимаемой среды мы будем использовать упругий закон Муни–Ривлина, связывающий тензор напряжений Коши с тензором упругой дефор-

мации [39]:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{B}^e \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e}, \quad \Psi = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

$$I_1 = I_1(\mathbf{B}^e) = \text{tr} \mathbf{B}^e, \quad I_2 = I_2(\mathbf{B}^e) = \frac{1}{2} \left[ \text{tr}^2 \mathbf{B}^e - \text{tr}(\mathbf{B}^e)^2 \right]; \quad \det \mathbf{B}^e = 1$$

Здесь  $C_1, C_2 \geq 0$  – материальные константы; модуль сдвига есть  $\mu = 2(C_1 + C_2)$ ; функция добавочного гидростатического давления  $p$  обусловлена несжимаемостью материала. Мы пренебрегаем приобретенной в ходе деформирования анизотропией материала.

Учитывая

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}^e} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{B}^e} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{B}^e} = C_1 \mathbf{I} + C_2 (\mathbf{I} \text{tr} \mathbf{B}^e - \mathbf{B}^e),$$

имеем

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2(C_1 + C_2 \text{tr} \mathbf{B}^e) \mathbf{B}^e - 2C_2 (\mathbf{B}^e)^2$$

Поведение сплошной среды в пластическом диапазоне будем описывать ассоциированным законом пластического течения, который связывает тензор скорости пластической деформации с тензором напряжений Коши:

$$\mathbf{D}^p = \Lambda \frac{df}{d\sigma} = \Lambda \frac{df}{d\sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma}; \quad f(\sigma_{eq}) - \tau_y = 0, \quad (4.1)$$

где  $\sigma_{eq}$  есть эквивалентное напряжение; уравнение  $f(\sigma_{eq}) - \tau_y = 0$  (условие пластичности) задает поверхность текучести;  $\Lambda$  есть неопределенный скалярный множитель Лагранжа. Функция  $\tau_y = \tau_y(q)$  (предел текучести материала на сдвиг) описывает изотропное деформационное упрочнение материала. Аргумент этой функции – накопленная пластическая деформация  $q$  – определяется дифференциальным уравнением  $\dot{q} = \sqrt{(2/3) \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$ . Началу пластического течения в материале соответствует значение сдвигового предела текучести  $\tau_y(0) = \tau_{y0}$ .

Мы будем использовать условие пластичности Треска, для которого

$$f(\sigma_{eq}) = \sigma_{eq}; \quad \sigma_{eq} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2,$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  есть наибольшее и наименьшее главные напряжения. В представленном исследовании мы рассматриваем функции упрочнения  $\tau_y(q)$  общего вида. При этом условия, которым должна удовлетворять функция  $\tau_y(q)$  для того, чтобы в теле мог быть реализован пластический круговой сдвиг, будут указаны отдельно.

**5. Кинематика кругового сдвига.** Введем цилиндрическую систему координат с продольной осью, совпадающей с осью полого цилиндра. Связь между начальным  $(R, \theta, Z)$  и конечным  $(r, \varphi, z)$  положениями точки деформированной среды при круговом сдвиге в условиях плоской деформации задается равенствами  $r = R$ ,  $z = Z$ ,  $\varphi = \theta + \alpha(R, t)$ . Здесь  $\alpha(R, t)$  – непрерывная функция угла поворота материальных точек.

Координатное представление градиента деформации в смешанном базисе есть

$$[\mathbf{F}] = (\nabla_X \otimes \mathbf{x})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r \frac{\partial \alpha}{\partial r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ненулевые компоненты левого тензора деформации Коши – Грина  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  в актуальном базисе есть

$$B_{rr} = B_{zz} = 1, \quad B_{\varphi\varphi} = 1 + B_{r\varphi}^2, \quad B_{r\varphi} = B_{\varphi r} = r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (5.1)$$

Вектор перемещения в актуальном базисе имеет вид  $\mathbf{u} = r(1 - \cos \alpha) \mathbf{e}_r + r \sin \alpha \mathbf{e}_\varphi$ .

Вектор скорости определяется равенством  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{u}$ , откуда  $\mathbf{v} = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ , где  $v_\varphi = r \partial \alpha / \partial t$  есть единственная ненулевая компонента вектора скорости.

**6. Чисто упругое деформирование.** При упругом деформировании  $\mathbf{V}^e = \mathbf{V}$  и с учетом (5.1) компоненты напряжения имеют вид

$$\sigma_{rr} = -p + 2C_1 + 4C_2 \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + 2(C_1 + C_2) \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \quad (6.2)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2C_2 \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad (6.4)$$

Условие равновесия  $\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  приводит к следующим уравнениям:

$$r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}, \quad r \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = -2\sigma_{r\varphi}$$

Если функция угла поворота  $\alpha$  найдена, то первое из уравнений равновесия служит для определения функции  $p(r, \alpha^*)$ , интегрированием второго можно установить

$$\frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} = \frac{\omega}{r^2}, \quad \omega = \omega(\alpha^*)$$

Сравнив это равенство с (6.4), имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{\omega}{r^3}, \quad \alpha(r, \alpha^*) = \omega_0(\alpha^*) - \frac{1}{2r^2} \omega(\alpha^*)$$

Граничные условия  $\alpha(r_0, \alpha^*) = 0$  и  $\alpha(r_1, \alpha^*) = \alpha^*$  позволяют установить

$$\omega_0(\alpha^*) = \frac{\alpha^*}{1 - (r_0/r_1)^2} \quad \text{и} \quad \omega(\alpha^*) = \frac{2\alpha^*}{r_0^{-2} - r_1^{-2}},$$

тогда выражение для угла закручивания в окончательном виде есть

$$\alpha(r, \alpha^*) = \alpha^* \frac{1 - (r_0/r)^2}{1 - (r_0/r_1)^2} \quad (6.5)$$

Мы будем полагать, что  $\alpha^* \geq 0$ , следовательно

$$r \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 2\alpha^* \frac{(r_0/r)^2}{1 - (r_0/r_1)^2} \geq 0 \quad (6.6)$$

## 7. Пластическое деформирование

**7.1. Зарождение пластического течения.** Формулы (6.1)–(6.4) для компонент напряжения позволяют получить выражения для главных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + \sigma_{r\varphi}^2} = \\ &= -p + 2C_1 + 4C_2 + (C_1 + C_2) \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{zz} = -p + 2C_1 + 4C_2 + 2C_2 \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{III} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + \sigma_{r\varphi}^2} = \\ &= -p + 2C_1 + 4C_2 + (C_1 + C_2) \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 - 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= (C_1 - C_2) \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} > 2C_1 \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} &= -(C_1 - C_2) \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 + 2(C_1 + C_2) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2} > 2C_2 \left( r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

Тогда, если материальные константы  $C_1$  и  $C_2$  неотрицательны, то  $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$  есть промежуточное главное напряжение, максимальное главное напряжение  $\sigma_1 = \sigma_I$ , минимальное есть  $\sigma_3 = \sigma_{III}$ . Используя условие пластичности Треска  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y(q)$ , где функция  $\tau_y(q)$  описывает изотропное упрочнение материала в пластичности, запишем условие возникновения пластического течения, которое должно выполняться на упруго-пластической границе  $r = r_{ep}$ :

$$\frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3}{2} \Big|_{r=r_{ep}} = r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left[ r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \right]^2} = \tilde{\tau}_{y0},$$

здесь и далее « $\tilde{\sim}$ » означает безразмерную величину напряжения, полученную нормированием на модуль сдвига  $\mu = 2(C_1 + C_2)$ , т.е.  $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu$ .

Отсюда

$$r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)} \quad (7.1)$$

Учитывая (6.6), пластическое течение зарождается на внутренней границе полой трубы  $r = r_0$  при угле поворота внешней поверхности

$$\alpha^* = \alpha_{cr1}^* = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right] \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)}$$

При  $\alpha_{cr1}^* < \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$  в теле существуют две области: область  $r_0 \leq r < r_{ep}$ , в которой происходит упруго-пластическое деформирование, и область  $r_{ep} < r \leq r_1$ , которая деформирована чисто упруго (рис. 2). При  $\alpha^* = \alpha_{cr2}^*$  упруго-пластическая граница достигает внешней границы полого цилиндра  $r = r_1$  и далее все тело деформируется пластически. Выражение для  $\alpha_{cr2}^*$  будет приведено позднее.

Функция угла поворота материальных точек  $\alpha$  (непрерывная и гладкая на упруго-пластической границе  $r = r_{ep}$ ) будет различаться в упругой и пластической областях:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha^e, r_{ep} \leq r \leq r_1 \\ \alpha^p, r_0 \leq r \leq r_{ep} \end{cases}, \quad \alpha^e(r_{ep}) = \alpha^p(r_{ep}), \quad \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}}$$

Последнее равенство (условие гладкости) следует из непрерывности угловой скорости  $v_\varphi = r(\partial\alpha/\partial t)$  на упруго-пластической границе по условию совместности разрывов Адамара.

7.2. *Область упругого деформирования.* В упругой области  $r_{ep} < r \leq r_1$  сохраняется равенство  $\mathbf{V}^e = \mathbf{V}$ , где тензор  $\mathbf{V}$  определяется по (5.1) при  $\alpha = \alpha^e$  и также при  $\alpha = \alpha^e$  верны выражения (14) для компонент напряжения. Кроме того, справедливы равенства

$$\alpha^e(r, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \frac{1}{2r^2} \omega^e(\alpha^*) \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} = \frac{\omega^e}{r^2} = r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r}$$

Однако эти две функции,  $\omega_0^e(\alpha^*)$  и  $\omega^e(\alpha^*)$ , уже не совпадают с  $\omega_0(\alpha^*)$  и  $\omega(\alpha^*)$  из чисто упругого решения, и, следовательно, угол поворота материальных точек в упругой области уже не может быть определен по формуле (6.5) после зарождения пластического течения. Граничное условие  $\alpha^e(r_1, \alpha^*) = \alpha^*$  как и прежде позволяет выразить одну из этих функций:

$$\omega^e(\alpha^*) = 2r_1^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] \quad (7.2)$$

и, следовательно, получить

$$\alpha^e(r, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] \quad (7.3)$$

Оставшаяся неизвестная функция  $\omega_0^e(\alpha^*)$ , определяющая кинематику в упругой области, не может быть определена без интегрирования уравнений в пластической области.

7.3. *Область упруго-пластического деформирования.* В этой области  $\mathbf{V}^e \neq \mathbf{V}$ ; тензор упругой деформации определяется эволюционным уравнением (3.11):

$$\partial \mathbf{V}^e / \partial t = \mathbf{L} \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^e \mathbf{L}^T - (\mathbf{v} \nabla_x) \mathbf{V}^e - 2\mathbf{V}^e \mathbf{D}^p \quad (7.4)$$

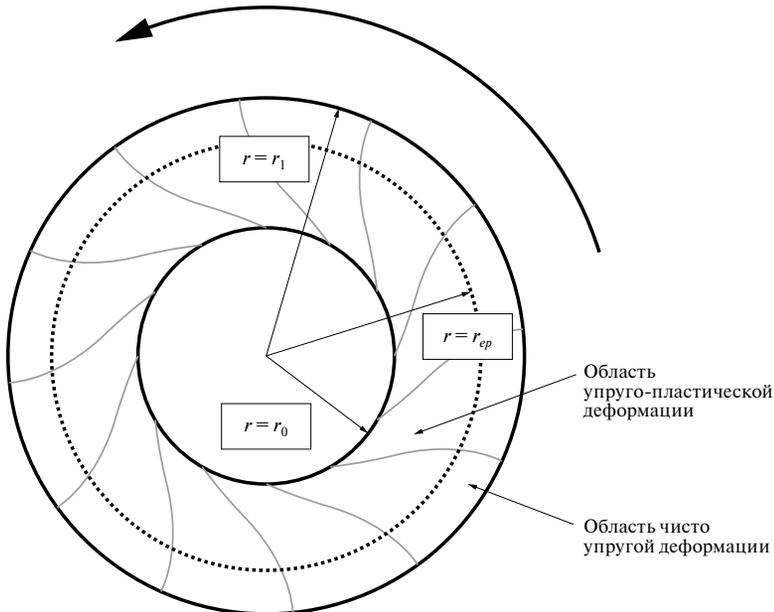


Рис. 2. Упруго-пластическое деформирование.

Будем искать координатное представление (в актуальном базисе) тензора упругой деформации  $\mathbf{B}^e$  в области пластического течения в виде

$$[\mathbf{B}^e] = \begin{pmatrix} B_{rr}^e & B_{r\varphi}^e & 0 \\ B_{r\varphi}^e & B_{\varphi\varphi}^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det \mathbf{B}^e = B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - (B_{r\varphi}^e)^2 = 1 \quad (7.5)$$

В том же базисе координатные представления тензоров  $\mathbf{L} = (\nabla_x \otimes \mathbf{v})^T$  и  $(\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{B}^e$ , фигурирующих в уравнении (7.4), есть

$$[\mathbf{L}] = \begin{pmatrix} 0 & -v_\varphi/r & 0 \\ \partial v_\varphi/\partial r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; v_\varphi = r(\partial\alpha^p/\partial t) \quad (7.6)$$

$$[(\mathbf{v}\nabla_x)\mathbf{B}^e] = \frac{v_\varphi}{r} \begin{pmatrix} -2B_{r\varphi}^e & B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 0 \\ B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e & 2B_{r\varphi}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Тензор скорости пластической деформации определяется ассоциированным законом (4.1). С учетом условия пластичности  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2/4 + \sigma_{r\varphi}^2} = \tau_y(q)$ , а также упругого закона, который позволяет выразить в пластической области компоненты напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)B_{rr}^e \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2C_2 + 2(C_1 + C_2)B_{\varphi\varphi}^e \\ \sigma_{zz} &= -p + 2C_1 + 2C_2(B_{rr}^e + B_{\varphi\varphi}^e) \\ \sigma_{r\varphi} &= 2(C_1 + C_2)B_{r\varphi}^e \end{aligned} \quad (7.8)$$

ненулевые компоненты скорости пластической деформации могут быть выражены по ассоциированному закону в следующем виде

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi}^p &= -D_{rr}^p = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{4} = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} \frac{B_{\varphi\varphi}^e - B_{rr}^e}{2} \\ D_{r\varphi}^p &= \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\sigma_{r\varphi}}{2} = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} B_{r\varphi}^e = \frac{\Lambda}{\tau_y} \frac{\mu}{2} \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

если только, как и в упругой области,  $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$  есть промежуточное главное напряжение.

В этом можно удостовериться, записав с учетом (7.8), как и в предыдущем разделе, разницу главных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{II} &= 2(C_1 - C_2) \left[ \frac{1}{2} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] + \\ &+ 2(C_1 + C_2) \sqrt{\frac{1}{4} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1} > 4C_1 \left[ \frac{1}{2} (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{II} - \sigma_{III} = & -2(C_1 - C_2) \left[ \frac{1}{2}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] + \\ & + 2(C_1 + C_2) \sqrt{\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1} > 4C_2 \left[ \frac{1}{2}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right] \end{aligned}$$

Учитывая  $(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)/2 > 1$  и указанные ранее условия  $C_1 \geq 0$ ,  $C_2 \geq 0$ , записанные выше разности положительны, и  $\sigma_{II} = \sigma_{zz}$  остается промежуточным главным напряжением в пластической области.

Определим пластический множитель  $\Lambda$ , входящий в (7.9). Уравнение для накопленной пластической деформации  $\dot{q} = \sqrt{(2/3)\mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$  с учетом (7.9) принимает вид

$$\frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} = \Lambda \frac{\mu}{\sqrt{3}\tau_y} \sqrt{\frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1},$$

откуда

$$\Lambda = \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{\sqrt{3}\tau_y}{\mu} \left[ \frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} > 0,$$

и система (7.9) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi}^p = -D_{rr}^p = & \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} (B_{\varphi\varphi}^e - B_{rr}^e) \left[ \frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ D_{r\varphi}^p = & \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \left[ \frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Подставляя выражения (7.6), (7.7) и (7.10) в (7.4) и учитывая

$$\frac{v_\varphi}{r} = \frac{\partial \alpha^p}{\partial t} = \frac{d\alpha^*}{dt} \frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha^*}, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = \frac{d\alpha^*}{dt} \left[ \frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left( r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) \right],$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{rr}^e}{\partial \alpha^*} = & -\sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \left( \frac{1}{2} B_{rr}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right) \left[ \frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial B_{\varphi\varphi}^e}{\partial \alpha^*} = & 2B_{r\varphi}^e \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left( r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \left( \frac{1}{2} B_{\varphi\varphi}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) - 1 \right) \left[ \frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial B_{r\varphi}^e}{\partial \alpha^*} = & B_{rr}^e \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left( r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} B_{r\varphi}^e (B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e) \left[ \frac{1}{4}(B_{\varphi\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \frac{\partial B_{zz}^e}{\partial \alpha^*} = & 0, \quad \frac{\partial B_{\varphi z}^e}{\partial \alpha^*} = 0, \quad \frac{\partial B_{rz}^e}{\partial \alpha^*} = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Из последних трех равенств следует, что сделанное предположение (7.5) о виде тензора  $\mathbf{B}^e$  в области пластического течения (в частности, о том, что  $B_{zz}^e = 1$ ), не противоречит эволюционному уравнению (3.11).

Из первых трех уравнений (7.11) любое одно может быть исключено посредством условия несжимаемости  $B_{r\varphi}^e = \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1}$ . Оставшиеся два уравнения из системы (7.11) содержат две компоненты упругой деформации, а также функцию угла поворо-

та  $\alpha^p(r, \alpha^*)$ . Эти уравнения дополняются условием пластичности вида

$$\tilde{\tau}_y = \frac{1}{\mu} \tau_y = \frac{1}{2\mu} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{4} (B_{r\varphi}^e + B_{rr}^e)^2 - 1} \quad (7.12)$$

и выражением

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \frac{1}{\mu} \sigma_{r\varphi} = B_{r\varphi}^e = \sqrt{B_{rr}^e B_{\varphi\varphi}^e - 1} \quad (7.13)$$

Отметим, что касательное напряжение в пластической области должно удовлетворять уравнению равновесия  $r(\partial\sigma_{r\varphi}/\partial r) = -2\sigma_{r\varphi}$ , то есть иметь вид  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}/\mu = \omega^p r^{-2}$ , где  $\omega^p(\alpha^*)$  есть некоторая функция. И поскольку касательное напряжение непрерывно на упруго-пластической границе,  $\omega^p(\alpha^*) = \omega^e(\alpha^*)$ , и

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \frac{1}{\mu} \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \omega^e, \quad (7.14)$$

то есть имеет то же выражение в пластической области, что и в упругой. Безразмерное касательное напряжение в пластической области является продолжением функции  $r(\partial\alpha^e/\partial r)$ , определенной в упругой области, в пластическую область. При этом, естественно,  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} \neq r(\partial\alpha^p/\partial r)$ .

Из уравнений (7.11) можно получить следующую систему для  $\tilde{\tau}_y$  и  $\tilde{\sigma}_{r\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} &= \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left( r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \alpha^*} &= \left[ \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left( r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \tilde{\sigma}_{r\varphi} \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \end{aligned}$$

Здесь использовано выражение  $B_{rr}^e = \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2}$ , которое может быть получено из (7.12) и (7.13).

Или, исключив производную  $\partial(r\partial\alpha^p/\partial r)/\partial\alpha^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left( r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \right) &= \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} + \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \right] \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \alpha^*} &= \left[ \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \times \\ &\times \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{\partial \tilde{\tau}_y}{\partial \alpha^*} + \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \right] - \sqrt{3} \frac{\partial q}{\partial \alpha^*} \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\tilde{\tau}_y} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \end{aligned}$$

Если теперь искать решение этой связанной системы в виде функций  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\sigma}_{r\varphi}(q)$ ,  $r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} = G(q)$ , имеем последнюю систему в виде

$$\frac{dG}{dq} = \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \sqrt{3} \right]$$

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{dq} = -\sqrt{3} \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\tilde{\tau}_y} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} + \left[ \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} - \sqrt{\tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\sigma}_{r\varphi}^2} \right] \frac{\tilde{\tau}_y}{\tilde{\sigma}_{r\varphi}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + \sqrt{3} \right] \quad (7.15)$$

Учитывая, что  $\tilde{\tau}_y$  есть известная функция накопленной пластической деформации, оба этих уравнения являются обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка; второе из них позволяет найти  $\tilde{\sigma}_{r\varphi}(q)$ , а первое непосредственным интегрированием найти  $G(q)$ .

Второе уравнение системы (7.15) линеаризуется заменой  $\Omega(q) = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\Omega}{dq} = \lambda(q) - \hbar(q)\Omega,$$

где

$$\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} + 1, \quad \hbar(q) = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} + \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y},$$

и имеет решение

$$\Omega(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q \hbar(\xi) d\xi} \left( \Omega_0 + \sqrt{3} \int_0^q \lambda(\zeta) e^{\sqrt{3} \int_0^\zeta \hbar(\xi) d\xi} d\zeta \right) \quad (7.16)$$

Константа интегрирования  $\Omega_0$  в (7.16) является начальным значением функции  $\Omega(q)$  при  $q = 0$ , которое определяется с помощью формулы (7.1):

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= \Omega^2(0) = \text{const} = 1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left( \tilde{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{r=r_{ep}} \right)^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left( B_{r\varphi}^e \Big|_{r=r_{ep}} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left( r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{\tau}_{y0}^2} \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

*Замечание 1.* Из (7.16) по правилу Лопиталья можно получить

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \Omega(q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\lambda(q)}{\hbar(q)}$$

Учитывая, что  $d\Omega/dq > 0$ , можно заключить, что функция  $\Omega(q)$  ограничена:

$$\Omega_0 \leq \Omega(q) \left\{ = \sqrt{1 - (\tilde{\sigma}_{r\varphi}/\tilde{\tau}_y)^2} \right\} \leq \frac{\tilde{\tau}_y}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}},$$

откуда

$$\frac{2}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1} \geq \left( \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{\tilde{\tau}_y} \right)^2 \geq \frac{1}{1 + \tilde{\tau}_y^2} \quad (7.17)$$

Формула (7.17) показывает, в каких пределах может лежать величина касательного напряжения в области упруго-пластического деформирования при круговом сдвиге.

Функция  $G(q)$  может быть найдена из первого уравнения системы (7.15) как

$$G(q) = G_0 + \sqrt{3} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta; \quad R(\zeta) = \sqrt{1 - \Omega^2(\zeta)} \quad (7.18)$$

Константа интегрирования  $G_0$  в (7.18) является начальным значением  $r(\partial \alpha^p / \partial r)$  при  $q = 0$ , которое определяется по формуле (7.1):

$$G_0 = G(0) = r \frac{\partial \alpha^p}{\partial r} \Big|_{r=r_{ep}} = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} = \text{const}$$

Теперь следует проинтегрировать уравнение  $r(\partial \alpha^p / \partial r) = G(q)$ . Будем полагать, что угол поворота материальных точек в пластической области может быть представлен в виде  $\alpha^p = \alpha^p(\alpha^*, q)$ . Поскольку  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$ , то, учитывая (7.14), накопленная пластическая деформация должна быть функцией автомодельной переменной  $\tilde{\sigma}_{r\varphi}(r, \alpha^*) = \omega^e(\alpha^*)r^{-2}$ . Тогда

$$G(q) = -2 \frac{\partial \alpha^p}{\partial q} \left[ \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\tilde{\tau}_y} - \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} \frac{d\Omega}{dq} \right]^{-1}$$

Откуда

$$\frac{\partial \alpha^p}{\partial q} = \frac{G}{2} \left[ \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} \frac{d\Omega}{dq} - \frac{1}{\tilde{\tau}_y} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \right] = -\frac{G}{2} \frac{d \ln(\tilde{\tau}_y R(q))}{dq}$$

Интегрируя по частям с учетом (7.18) и равенства  $\frac{dG}{dq} = \sqrt{3} \frac{\lambda(q)}{R(q)}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \alpha^p(\alpha^*, q) &= \alpha_{ep}(\alpha^*) - \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q)R(q)}{\tilde{\tau}_{y0}R(0)} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q)R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \\ \tilde{\tau}_{y0}R(0) &= \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} = G_0 \end{aligned}$$

Из граничного условия  $\alpha^p|_{r=r_0} = 0$  следует

$$\alpha_{ep}(\alpha^*) = \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{G_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta,$$

где  $q_0(\alpha^*) = q|_{r=r_0}$  – величина накопленной пластической деформации на внутренней границе полноты цилиндра. Эту величину удобно использовать в качестве параметра решения. Тогда зависимость угла поворота материальных точек в пластической области от локальной величины накопленной пластической деформации есть

$$\begin{aligned} \alpha^p(\alpha^*, q) &= \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(q)R(q)} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q)R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \end{aligned} \quad (7.19)$$

Кинематика материальных точек в области пластического деформирования определяется формулой (7.19) и зависит от распределения накопленной

пластической деформации  $q(\alpha^*, r)$ . Это распределение в свою очередь устанавливается по найденной функции  $\Omega(q)$  (формула (7.16)) исходя из равенства  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)\sqrt{1 - \Omega^2(q)}$  и формулы (7.14). Возможны два случая, в зависимости от того, занимает ли пластическая область весь объем материала или же существует упругая область.

*Случай 1.* В теле есть упругая область (параметр нагружения в диапазоне  $\alpha_{cr1}^* < \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$ ). Функция угла поворота точек материала в упругой области  $\alpha^e$  задана формулой (7.3). Дифференцируя (7.3) по  $r$ , имеем

$$r \frac{\partial \alpha^e}{\partial r} = 2(\omega_0^e - \alpha^*) \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \quad (7.20)$$

Из (7.20) и (7.1) можно получить равенство

$$2(\omega_0^e - \alpha^*) \left( \frac{r_1}{r_{ep}} \right)^2 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} = G_0 \quad (7.21)$$

Значение угла поворота на упруго-пластической границе, рассчитанное по формуле (7.19) при  $q = 0$ , дает

$$\alpha^p(\alpha^*, 0) = \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{G_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta$$

С другой стороны, по (7.3) и (7.21),

$$\alpha^e(r_{ep}, \alpha^*) = \omega_0^e(\alpha^*) - \left( \frac{r_1}{r_{ep}} \right)^2 \times [\omega_0^e(\alpha^*) - \alpha^*] = \omega_0^e(\alpha^*) - \frac{1}{2} G_0$$

Непрерывность  $\alpha$  на упруго-пластической границе приводит к равенству  $\alpha^p(\alpha^*, 0) = \alpha^e(r_{ep}, \alpha^*)$ , откуда

$$\omega_0^e = \frac{G_0}{2} \left[ 1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{G_0} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \quad (7.22)$$

Эта формула устанавливает связь между параметром решения  $q_0(\alpha^*) = q|_{r=r_0}$  и функцией  $\omega_0^e(\alpha^*)$ , которая определяет кинематику материальных точек в упругой области по формуле (7.3).

Связь параметра нагружения  $\alpha^*$  (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) с параметром  $q_0$  устанавливается по (7.14) с учетом равенства  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$ , (7.2) и (7.22):

$$\alpha^* = \omega_0^e - \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0), \quad (7.23)$$

где  $\omega_0^e$  связано с  $q_0$  формулой (7.22).

Распределение накопленной пластической деформации можно найти из равенства  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$  с учетом (7.14):

$$\tilde{\tau}_y(q)R(q) = \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)$$

Из (7.21) и (7.23) закон движения упруго-пластической границы имеет вид

$$r_{ep} = r_0 \sqrt{\frac{\tilde{\tau}_y(q_0)}{G_0}} R(q_0) \quad (7.24)$$

Согласно (7.24), все тело перейдет в пластическое состояние (упруго-пластическая граница достигнет  $r_1$ ), как только накопленная пластическая деформация на внутренней поверхности полого цилиндра  $q_{0,cr2}$  достигнет величины, при которой выполнится равенство

$$\tilde{\tau}_y(q_{0,cr2})R(q_{0,cr2}) = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 G_0$$

Это соответствует параметру нагружения

$$\alpha_{cr2}^* = G_0 \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_{0,cr2}} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{(r_1/r_0)^2 G_0}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta$$

После этого пластическое деформирование происходит во всем теле.

*Случай 2.* Все тело находится в состоянии пластического течения (параметр нагружения  $\alpha^* \geq \alpha_{cr2}^*$ ). В этом случае по (7.19) с учетом граничного условия  $\alpha^p|_{r=r_1} = \alpha^*$ :

$$\begin{aligned} \alpha^* = \alpha^p(\alpha^*, q_1) &= \frac{G_0}{2} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(q_1)R(q_1)} + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_1)R(q_1)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

Здесь величина  $q_1 = q|_{r=r_1}$  выражается с помощью  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$  и (7.14):

$$\frac{\tilde{\tau}_y(q_1)R(q_1)}{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2$$

Подставляя это выражение в формулу выше, имеем

$$\alpha^* = \alpha^p(\alpha^*, q_1) = \left[ G_0 + \sqrt{3} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta \right] \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{q_1}^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta)R(\zeta)} d\zeta$$

Таким образом, формулы выше связывают параметр нагружения  $\alpha^*$  с параметром  $q_0$ .

Распределение накопленной пластической деформации можно найти из равенства  $\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\tau}_y(q)R(q)$  с учетом (7.14):

$$\tilde{\tau}_y(q)R(q) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0)R(q_0)$$

**8. Существование решения.** Деформация кругового сдвига накладывает достаточно жесткие условия на напряженное состояние, которое удовлетворяет условию равновесия. А именно, согласно (7.14), касательное напряжение должно монотонно возрастать при уменьшении радиальной координаты, следовательно (поскольку накопленная пластическая деформация  $q$  также монотонно возрастает при уменьшении радиальной координаты), должно выполняться неравенство  $d\tilde{\sigma}_{r\varphi}/dq \geq 0$ . Согласно (7.15), это приводит к тому, что должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} + 1 \geq (\tilde{\sigma}_{r\phi}/\tilde{\tau}_y)^2 \times \left[ 1 - \tilde{\tau}_y \sqrt{\frac{1 - (\tilde{\sigma}_{r\phi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1 + \tilde{\tau}_y^2}} \right]^{-1} \quad (8.1)$$

Левая часть этого неравенства зависит только от физических свойств материала, а именно от функции упрочнения. Правая часть включает касательное напряжение, которое меняется во времени и в пространстве. Чтобы сформулировать условия для функции упрочнения  $\tilde{\tau}_y(q)$ , достаточные для того, чтобы выполнялось неравенство (8.1), воспользуемся оценкой (7.17) и получим для правой части (8.1):

$$\frac{(\tilde{\sigma}_{r\phi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \leq \frac{2n_\tau}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \leq \frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1}$$

$$\text{и} \quad \frac{(\tilde{\sigma}_{r\phi}/\tilde{\tau}_y)^2}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \geq \frac{1/(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{1 - \tilde{\tau}_y n_\sigma} \geq \frac{1}{1 + \tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\tau}_y \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} (\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1) (\tilde{\tau}_{y0})^{-1}},$$

где

$$n_\sigma = \sqrt{\left[ 1 - (\tilde{\sigma}_{r\phi}/\tilde{\tau}_y)^2 \right] / (1 + \tilde{\tau}_y^2)}, \quad n_{\tau 0} = \left( \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1 \right)^{-1}$$

Тогда, если  $\tilde{\tau}_y(q)$  такова, что

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[ 2(1 + \tilde{\tau}_y^2) n_{\tau 0} - 1 \right], \quad (8.2)$$

то неравенство (8.1) заведомо выполняется, следовательно,  $d\tilde{\sigma}_{r\phi}/dq \geq 0$  и решение существует. Условие (8.2) является достаточным для реализации рассматриваемого паттерна деформации кругового сдвига в изотропном пластически упрочняемом материале.

С другой стороны, если выполнено

$$\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} < \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \times \left[ \frac{1}{1 + \tilde{\tau}_y^2 - \tilde{\tau}_y \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} (\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1) (\tilde{\tau}_{y0})^{-1}} - 1 \right],$$

то неравенство (8.1) заведомо не выполняется. В частности, для идеально-пластического (неупрочняемого) материала  $\tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0} = \text{const}$  и последнее неравенство имеет вид  $0 < \sqrt{3} \left( 1 - \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} \right)$  и выполнено при любом значении  $\tilde{\tau}_{y0}$ . То есть в пластически неупрочняемом материале не может реализоваться круговой пластический сдвиг (последний вывод очевиден для модели жестко-пластического тела, но не очевиден для упруго-пластической задачи с конечными деформациями, в которой касательное напряжение может сильно отличаться от интенсивности напряжений).

*Замечание 2.* Сказанное выше относится только к невязкой деформации. В рамках упруго-вязкопластических моделей решения существуют даже для материалов без деформационного упрочнения (см., напр, [7,22,23]).

Таблица 1

<b>1. Чисто упругое деформирование</b>	
Условие	$\alpha^* < \alpha_{cr1}^* = \left[1 - (r_0/r_1)^2\right](G_0/2)$ , $G_0 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)}$
Решение	<p>Угол поворота <math>\alpha = \frac{\alpha^*}{1 - (r_0/r_1)^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]</math></p> <p>Величина касательного напряжения на внешней поверхности</p> $\sigma_{r\varphi}/\mu _{r=r_1} = 2\alpha^* \left[(r_1/r_0)^2 - 1\right]^{-1}$
<b>2. Часть полого цилиндра деформирована упруго, часть пластически</b>	
Условие	$\alpha_{cr1}^* \leq \alpha^* < \alpha_{cr2}^*$ , $\alpha_{cr2}^* = G_0 \ln(r_1/r_0) + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_{0cr2}} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{(r_1/r_0)^2 G_0}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta$ , $\tilde{\tau}_y(q_{0cr2}) R(q_{0cr2}) = (r_1/r_0)^2 G_0$ , $\Omega(q) = e^{-\sqrt{3} \int_0^q h(\xi) d\xi} \left[ \Omega_0 + \sqrt{3} \int_0^q \lambda(\zeta) e^{\sqrt{3} \int_0^\zeta h(\xi) d\xi} d\zeta \right]$ , $\lambda(q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}} + 1$ , $h(q) = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2}}{\tilde{\tau}_y} \lambda(q)$ ; $\Omega_0 = \frac{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1}{\tilde{\tau}_{y0}}$ <p>Достаточное условие существования решения</p> $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[ \frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1} - 1 \right]; q \in [0, q_0]$
Решение	$\alpha = \begin{cases} \alpha^e, r_{ep} \leq r \leq r_1 \\ \alpha^p, r_0 \leq r \leq r_{ep} \end{cases}$ <p>Положение упруго-пластической границы</p> $r_{ep} = r_0 \sqrt{[\tilde{\tau}_y(q_0)/G_0] R(q_0)}$ <p>Величина накопленной пластической деформации на внутренней поверхности полого цилиндра <math>q_0 = q _{r=r_0}</math> есть параметр решения</p> <p>Угол поворота в упругой области <math>\alpha^e = \omega_0^e - (r_1/r)^2 (\omega_0^e - \alpha^*)</math></p> <p>Связь параметра <math>q_0</math> с параметром нагружения <math>\alpha^*</math> (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) задана равенством <math>\alpha^* = \omega_0^e - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)</math></p> <p>где <math display="block">\omega_0^e = \frac{G_0}{2} \left[ 1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)}{G_0} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta</math></p> <p>Угол поворота в пластической области <math>\alpha^p = \omega_0^e - \frac{G_0}{2} \left[ 1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{G_0} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta</math></p> <p>Здесь распределение накопленной пластической деформации определяется равенством <math>\tilde{\tau}_y(q) R(q) = (r_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)</math></p> <p>Величина касательного напряжения на внешней поверхности <math display="block">\frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} \Big _{r=r_1} = 2(\omega_0^e - \alpha^*)</math></p>

Продолжение табл. 1

<b>3. Весь полый цилиндр находится в пластическом состоянии</b>	
Условие	$\alpha^* \geq \alpha_{cr2}^*$ <p style="text-align: center;"><i>Достаточное условие существования решения</i></p> $\frac{d\tilde{\tau}_y}{dq} \geq \sqrt{3} \sqrt{1 + \tilde{\tau}_y^2} \left[ \frac{2(1 + \tilde{\tau}_y^2)}{\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2 + 1}} - 1 \right]; q \in [0, q_0]$
Решение	<p style="text-align: center;"><i>Угол поворота</i></p> $\alpha = \alpha^p = \omega_0^e - \frac{G_0}{2} \left[ 1 + \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{G_0} \right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^q \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q) R(q)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta$ <p style="text-align: center;">Распределение накопленной пластической деформации определяется равенством</p> $\tilde{\tau}_y(q) R(q) = (r_0/r)^2 \tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)$ <p style="text-align: center;">Связь параметра <math>q_0</math> с параметром нагружения <math>\alpha^*</math> (угол поворота внешней поверхности полого цилиндра) задана равенством</p> $\alpha^* = \left[ G_0 + \sqrt{3} \int_0^{q_1} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} d\zeta \right] \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{q_1}^{q_0} \frac{\lambda(\zeta)}{R(\zeta)} \ln \frac{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)}{\tilde{\tau}_y(\zeta) R(\zeta)} d\zeta,$ <p style="text-align: center;">где величина <math>q_1 = q _{r=r_1}</math> связана с <math>q_0</math> равенством</p> $\frac{\tilde{\tau}_y(q_1) R(q_1)}{\tilde{\tau}_y(q_0) R(q_0)} = \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2$ <p style="text-align: center;"><i>Величина касательного напряжения на внешней поверхности</i></p> $\left. \frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} \right _{r=r_1} = \tilde{\tau}_y(q_1) R(q_1)$

*Замечание 3.* Достаточное условие (8.2) может служить для определения границ применимости решения для тех моделей упрочнения, для которых (8.2) выполняется только на некотором интервале накопленной пластической деформации  $q \in [0, q_{cr}]$ . Например, для линейной модели упрочнения  $\tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_{y0}(1 + hq)$  решение существует, пока накопленная пластическая деформация не превысит значения  $q_{cr}$ , определяемого уравнением

$$(mk^2 - 1)k = n \quad (8.3)$$

$$k = \sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2(1 + hq_{cr})^2}, \quad m = \tilde{\tau}_{y0}h/\sqrt{3}, \quad n = 2/\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1\right)$$

*Замечание 4.* Круговой сдвиг в жестко-пластическом материале с ограниченным упрочнением исследовался в [48], где также отмечается, что решение существует до определенной конечной величины деформации.

**9. Полное решение.** Итак, полное решение для материала Муни – Ривлина с упругим потенциалом  $\Psi = C_1 |I_1(\mathbf{B}^e) - 3| + C_2 |I_2(\mathbf{B}^e) - 3|$ ,  $C_1, C_2 \geq 0$ , с модулем сдвига  $\mu = 2(C_1 + C_2)$ , и условием пластичности Треска  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y(q)$ , где  $\tau_y(q)$  – известная функция упрочнения, приведено в табл. 1.

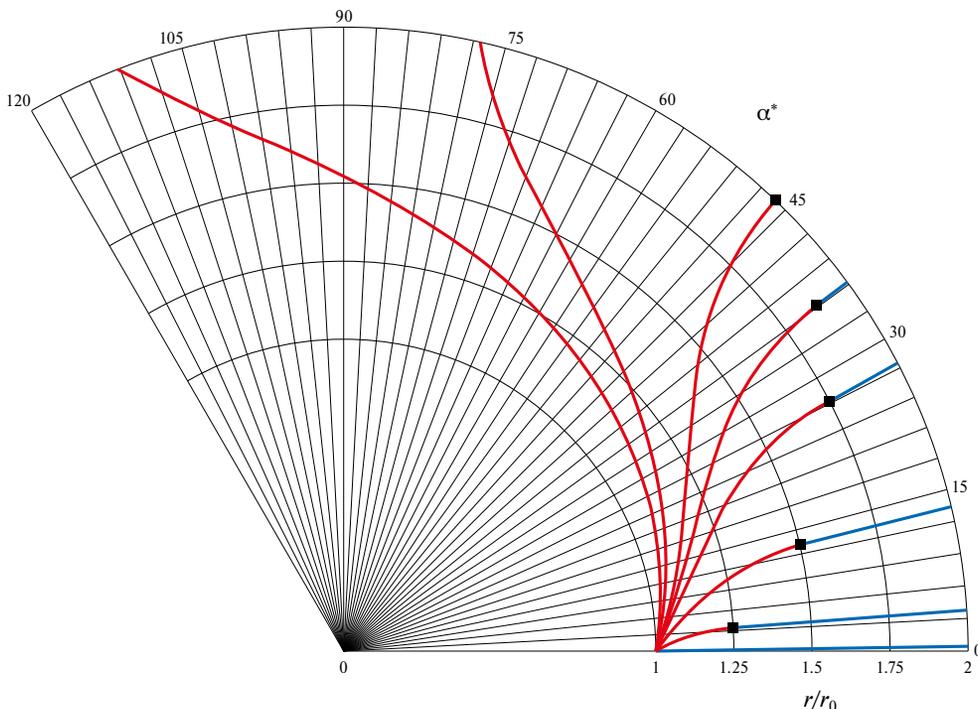


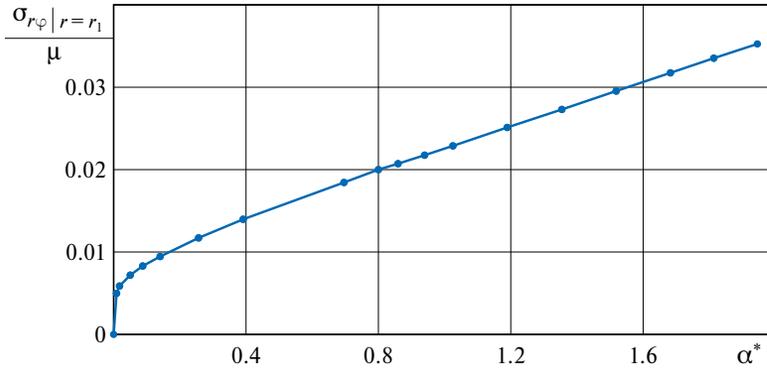
Рис. 3. Искривление изначально радиально направленных материальных волокон после кругового сдвига (угол поворота  $\alpha^*$  в градусах). Символ «■» обозначает положение упруго-пластической границы.

**10. Пример решения.** Используя данные [49] о пластическом деформировании ПВХ (поливинилхлорид, «lightly plasticized PVC» в цитируемой работе) при растяжении, можно получить следующее представление линейной функции упрочнения материала:  $\tau_y = \tau_{y0}(1 + hq)$ ,  $\tau_{y0} = 20$  МПа,  $h = 1.8$ . Модуль сдвига ПВХ  $\mu = 1$  ГПа, безразмерная величина  $\tilde{\tau}_{y0} = \tau_{y0}/\mu = 0.02$ . Тогда  $m = \tilde{\tau}_{y0}h/\sqrt{3} \approx 0.0208$ ,

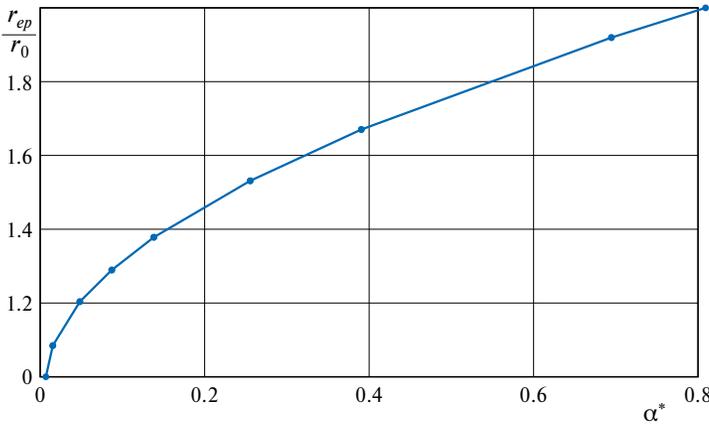
$n = 2/\left(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} + 1\right) \approx 0.9999$ , и, решая (8.3), имеем  $k \approx 1.01028$ , откуда  $q_{cr} = \frac{1}{h} \left[ \frac{\sqrt{Q^2 - 1}}{\tilde{\tau}_{y0}} - 1 \right] = 3.4$ . Таким образом, представленное здесь решение можно использовать до достижения параметром  $q_0 = q|_{r=r_0}$  величины 3.4 (как минимум).

Далее, константа  $G_0 = \sqrt{2(\sqrt{1 + \tilde{\tau}_{y0}^2} - 1)} \approx \tilde{\tau}_{y0} = 0.02$ . Пусть деформируется полый цилиндр с соотношением радиусов  $r_1/r_0 = 2$ . Угол поворота внешней поверхности, при котором наступит пластическое течение  $\alpha_{cr1}^* = (G_0/2)\left[1 - (r_0/r_1)^2\right] = 0.0075$  радиан. Вычисляя интегралы в аналитическом решении из таблицы предыдущего раздела, получаем следующие результаты.

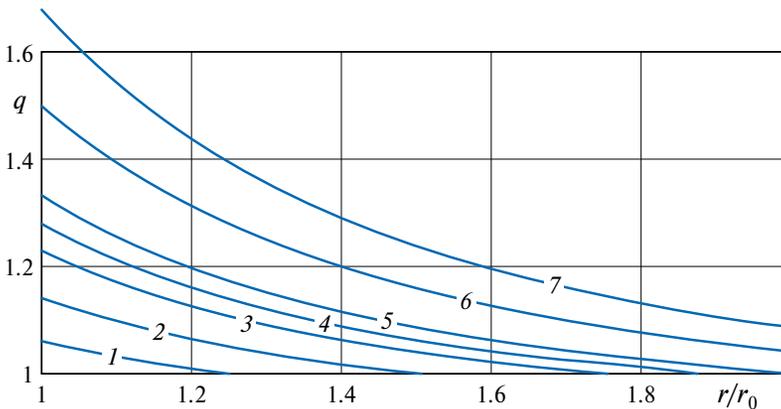
На рис. 3 приведено искривление материальных волокон, изначально направленных радиально, при углах поворота внешней поверхности  $\alpha^* = 0.0075, 0.0668, 0.2327, 0.4786, 0.6322, 0.809, 1.354, 1.945$  (все значения в радианах). Угол  $\alpha_{cr2}^* = 0.809$  радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние. Первые пять значений угла соответствуют относительной протяженности пластической области  $(r_{ep} - r_0)/(r_1 - r_0) = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 7/8$ .



**Рис. 4.** Связь касательного напряжения на внешней поверхности образца с углом поворота  $\alpha^*$  (в радианах). Значение  $\alpha^* = \alpha_{cr2}^* = 0.809$  радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние.



**Рис. 5.** Распространение упруго-пластической границы (угол поворота  $\alpha^*$  в радианах).



**Рис. 6.** Распределение накопленной пластической деформации по сечению образца:  $1 - \alpha^* = 0.0668$ ,  $2 - \alpha^* = 0.2327$ ,  $3 - \alpha^* = 0.4786$ ,  $4 - \alpha^* = 0.6322$ ,  $5 - \alpha^* = 0.809$ ,  $6 - \alpha^* = 1.354$ ,  $7 - \alpha^* = 1.945$  (угол поворота  $\alpha^*$  в радианах).

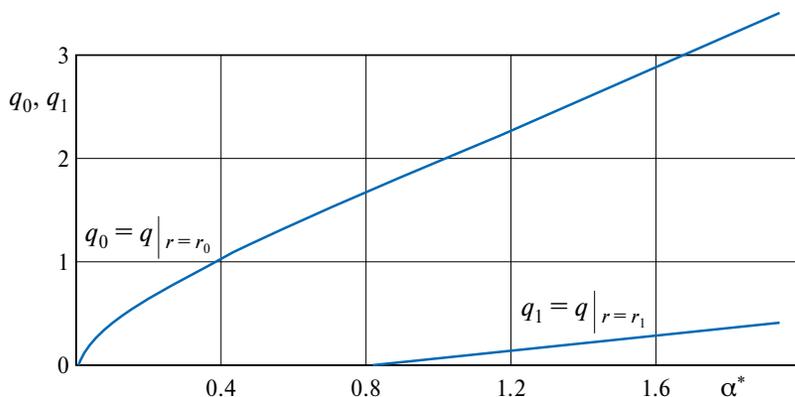


Рис. 7. Эволюция накопленной пластической деформации на граничных поверхностях (угол поворота  $\alpha^*$  в радианах). Значение  $\alpha^* = \alpha_{cr2}^* = 0,809$  радиан соответствует полному переходу образца в пластическое состояние.

Связь между величиной касательного напряжения на внешней поверхности образца и углом поворота  $\alpha^*$  приведена на рис. 4. На рис. 5 показано продвижение упруго-пластической границы в материале.

На рис. 6 приведено распределение накопленной пластической деформации по сечению образца при различных углах поворота внешней поверхности. На рис. 7 показана эволюция накопленной пластической деформации на внутренней и внешней поверхностях образца.

**Заключение.** В представленном исследовании получено аналитическое решение задачи плоской деформации об упруго-пластическом круговом сдвиге в полем цилиндре, упругие свойства которого описываются моделью Муни–Ривлина, а пластические – моделью Треска с произвольным изотропным упрочнением. Решение включает зависимость между углом поворота внешней границы и приложенным касательным напряжением; распределение накопленной пластической деформации по сечению образца; закон распространения упруго-пластической границы; формулы для перемещения материальных точек (угол поворота). Установлены достаточные для существования решения условия, налагаемые на функцию упрочнения (формула (8.2)). Приведен пример решения для ПВХ-трубы с линейным упрочнением.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (проект 22-11-00163).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
2. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
5. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
6. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаныук Л.В.* Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // Докл. РАН. 2016. Т. 470 (3). С. 275–278.
7. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V. 90. P. 829–845.

- <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
8. *Работнов Ю.Н.* Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избр. тр. М.: Наука, 1991.
  9. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // в сб.: *Вопр. прочн. матер. и констр.* М.: Изд-во АН СССР, 1959.
  10. *Работнов Ю.Н.* Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // *Изв. РАН. МТТ.* 1967. №3. С. 36–41.
  11. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016.
  12. *Волков И.А., Игумнов Л.А.* Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017.
  13. *Локощенко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С.* Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // *Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 24 (2). С. 275–318.
  14. *Работнов Ю.Н.* Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела // *ПММ.* 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 164–169.
  15. *Работнов Ю.Н.* Механика твердого тела и пути ее развития // *Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр.* 1962. №2. С. 3–10.
  16. *Клюшников В.Д.* О задачах пластичности для материала с упрочнением // *ПММ.* 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 97–118.
  17. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
  18. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
  19. *Shutov A.V., Kuzgorodtseva A.A.* Sample shapes for reliable parameter identification in elasto-plasticity // *Acta Mech.* 2020. V. 231. P. 4761–4780.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>
  20. *Shutov A.V., Kreißig R.* Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: phenomenological modeling and time integration // *Comput. Meth. Appl. Mech.* 2008. V.197 (21–24). P. 2015–2029.  
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.12.017>
  21. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013.
  22. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Устинова А.С.* Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // *ПМТФ.* 2008. Т. 49. № 2. С. 277–284.
  23. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // *ПМТФ.* 2015. Т. 56. № 2. С. 146–158.
  24. *Бегун А.С., Ковтаниук Л.В.* Вискозиметрическое течение упруговязкопластического материала при его нагреве вследствие пристенного трения // *ПМТФ.* 2021. Т. 62. №5. С. 89–99.
  25. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* К расчетам больших неизотермических деформаций упруговязкопластических материалов // *ПММ.* 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 638–653.
  26. *Севастьянов Г.М., Буренин А.А.* Адиабатический нагрев материала при упругопластическом кручении с конечными деформациями // *ПМТФ.* 2019. Т. 60. № 6. С. 149–161.
  27. *Буренин А.А., Устинова А.С.* Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // В сб. научн. тр. к 70-летию академика В.А. Левина Владивосток: 2009.
  28. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтаниук Л.В.* Винтовое вязкопластическое течение в зазоре между жесткими цилиндрами // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 55–70.
  29. *Севастьянов Г.М., Бормотин К.С.* Упругопластическое кручение с конечными деформациями: Сравнение аналитического и МКЭ-моделирования для немонотонно упрочняющихся полимеров // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* 2023. № 3. С. 124–136.
  30. *Sevastyanov G.M.* Finite-strain elastic-plastic torsion: comparison of von Mises and Tresca materials // *Mater. Phys. Mech.* 2023. V. 51. № 2. P. 140–150.  
[https://doi.org/10.18149/MPM.5122023\\_13](https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13)
  31. *Арутюнян Н.Х., Радаев Ю.Н.* Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // *ПММ.* 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1014–1022.

32. *Toth L.S., Arzaghi M., Fundenberger J.J., Beausir B., Bouaziz O., Arruffat-Massion R.* Severe plastic deformation of metals by high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.* 2009. V. 60. № 3. P. 175–177.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.09.029>
33. *Wang J.T., Li Zh., Wang J., Langdon T.G.* Principles of severe plastic deformation using tube high-pressure shearing // *Scripta Mater.* 2012. V. 67. № 10. P. 810–813.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.028>
34. *Faraji G., Kim H.S.* Review of principles and methods of severe plastic deformation for producing ultrafine-grained tubes // *Mater. Sci. Tech.* 2016. V. 33. № 8. P. 905–923.  
<https://doi.org/10.1080/02670836.2016.1215064>
35. *Pougis A., Toth L.S., Bouaziz O., Fundenberger J.J., Barbier D., Arruffat R.* Stress and strain gradients in high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.* 2012. V. 66. № 10. P. 773–776.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.02.004>
36. *Lapovok R., Qi Y., Ng H.P., Toth L.S., Estrin Yu.* Gradient structures in thin-walled metallic tubes produced by continuous high pressure tube shearing process // *Adv. Eng. Mater.* 2017. V. 19. Art. No. 1700345.  
<https://doi.org/10.1002/adem.201700345>
37. *Lapovok R., Pougis A., Lemiale V., Orlov D., Toth L.S., Estrin Yu.* Severe plastic deformation processes for thin samples // *J. Mater. Sci.* 2010. V. 45. P. 4554–4560.  
<https://doi.org/10.1007/s10853-010-4403-x>
38. *Lapovok R., Ng H.P., Tomus D., Estrin Yu.* Bimetallic copper-aluminium tube by severe plastic deformation // *Scripta Mater.* 2012. V. 66. P. 1081–1084.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.03.004>
39. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
40. *Шитиков А.В., Быковцев Г.И.* Конечные деформации упругопластических сред // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311 (1). С. 59–62.
41. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтаниук Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *Докл. РАН.* 1996. Т. 347 (2). С. 199–201.
42. *Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.* Some basic kinematical relations for finite deformations of continua // *Mech. Mater.* 1987. V. 6. №2. P. 127–138.  
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90003-2)
43. *Levitas V.I.* Large Deformation of Materials with Complex Rheological Properties at Normal and High Pressure. New York: Nova Sci. Pub., 1996
44. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plasticity.* 2016. V. 84. P. 33–57.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
45. *Sevastyanov G.M.* Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 206. P. 383–395.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>
46. *Роговой А.А.* Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // *ПМТФ.* 2007. 48 (4), 144–153.
47. *Роговой А.А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Ч. II. М.:Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2023.
48. *Alexandrov S., Richmond O.* Couette flows of rigid/plastic solids: analytical examples of the interaction of constitutive and frictional laws // *Int. J. Mech. Sci.* 2001. V. 43. № 3. P. 653–665.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00045-X)
49. *Haward R.N.* The derivation of a strain hardening modulus from true stress-strain curves for thermoplastics // *Polymer.* 1994. V. 35. № 18. P. 3858–3862.  
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(94\)90268-2](https://doi.org/10.1016/0032-3861(94)90268-2)

## Finite-Strain Elastic-Plastic Circular Shear in Materials with Isotropic Hardening

G. M. Sevastyanov<sup>a, #</sup>, A. S. Begun<sup>a, ###</sup>, A. A. Burenin<sup>a, ###</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Mechanical Science and Metallurgy KhFRC FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: akela.86@mail.ru,*

<sup>##</sup>*e-mail: ustinova@iacp.dvo.ru,*

<sup>###</sup>*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru*

This study presents an analytical solution to the problem of azimuthal shear in a hollow circular cylinder, isotropic and incompressible, the elastic properties of which are described by the Mooney – Rivlin model, and the plastic properties by the Tresca model with arbitrary monotonic hardening. Both elastic and plastic deformations are assumed to be finite. Sufficient conditions for the existence of the presented solution are given.

*Keywords:* plasticity, hyperelasticity, circular shear, finite strain, isotropic hardening

### REFERENCES

1. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of Deformable Solids. Moscow: Nauka, 1979. (in Russian)
2. *Myasnikov V.P.* Equations of motion of elastoplastic materials under large deformations // Bull. of the FEB RAS, 1996, vol. 4, pp. 8–13. (in Russian)
3. *Rabotnov Yu.N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. (in Russian)
4. *Il'yushin A.A.* Plasticity. Moscow: USSR Acad. of Sci., 1963. (in Russian)
5. *Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian)
6. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466. <https://doi.org/10.1134/S102833581609007X>
7. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech., 2020, vol. 90, pp. 829–845. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
8. *Rabotnov Yu.N.* Problems of Mechanics of Deformable Solids. Selected papers. Moscow: Nauka, 1991. (in Russian)
9. *Rabotnov Yu.N.* On the mechanism of long-term destruction // Issues of Strength of Mater.&Struct. Moscow: USSR Acad. of Sci., 1959. (in Russian)
10. *Rabotnov Yu.N.* Effect of stress concentration on long-term strength // Mech. Solids, 1967, vol. 3, pp. 36–41. (in Russian)
11. *Lokoshchenko A.M.* Creep and Long-Term Strength of Metals. Moscow: Fizmatlit, 2016. (in Russian)
12. *Volkov I.A., Igumnov L.A.* Introduction to Continuum Mechanics of Damaged Media. Moscow: Fizmatlit, 2017. (in Russian)
13. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Teraud W.V., Basalov Yu.G., Agababyan V.S.* Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review) // Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.&Math. Sci., 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1765>
14. *Rabotnov Yu.N.* Model illustrating some properties of a hardening plastic body // JAMM, 1959, vol. 23, iss. 1, pp. 219–228. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90068-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90068-1)
15. *Rabotnov Yu.N.* Solid mechanics and ways of its development // Proc. USSR Acad. of Sci. Dept. Techn. Sci. Mech.&Mech. Engng., 1962, vol. 2, pp. 3–10. (in Russian)
16. *Kliushnikov V.D.* On plasticity laws for work-hardening materials // JAMM, 1958, vol. 22, iss. 1, pp. 129–160. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(58\)90088-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(58)90088-1)

17. *Ivlev D.D., Bykovtsev G.I.* Theory of a Hardening Plastic Solid. Moscow: Nauka, 1971. (in Russian)
18. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. (in Russian)
19. *Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A.* Sample shapes for reliable parameter identification in elastoplasticity // *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, pp. 4761–4780.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-020-02758-9>
20. *Shutov A.V., Kreißig R.* Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: phenomenological modeling and time integration // *Comput. Meth. Appl. Mech.* 2008, vol. 197 (21–24), pp. 2015–2029.  
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.12.017>
21. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffects. Vladivostok: Dalnauka, 2013 (in Russian)
22. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Ustinova A.S.* Accounting for the elastic properties of a non-Newtonian material under its viscosimetric flow // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, pp. 277–284.  
<https://doi.org/10.1007/s10808-008-0038-y>
23. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Flow of an elastoviscoplastic material between rotating cylindrical surfaces with nonrigid cohesion // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, pp. 293–303.  
<https://doi.org/10.1134/S0021894415020157>
24. *Begun A.S., Kovtanyuk L.V.* Viscometric flow of elastoplastic material heated by wall friction // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, pp. 779–788.  
<https://doi.org/10.1134/S0021894421050096>
25. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Calculations of large nonisothermal deformations of elastoviscoplastic materials // *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, pp. 2066–2077.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654422080052>
26. *Sevast'yanov G.M., Burenin A.A.* Local adiabatic heating effect in finite-strain elastic-plastic torsion // *J. Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, pp. 1104–1114.  
<https://doi.org/10.1134/S002189441906016627>
27. *Burenin A.A., Ustinova A.S.* Development and inhibition of helical viscoplastic flow with calculation of the elastic response after stopping the flow and unloading // in: *The Coll. of Papers Dedicated to the 70th Anniv. of Acad. V.A. Levin.* Vladivostok: 2009. (in Russian)
28. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Helical viscoplastic flow in a gap between rigid cylinders // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 640–652.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060048>
29. *Sevastyanov G.M., Bormotin K.S.* Finite-strain elastic-plastic torsion: analytical and fem modeling for nonmonotonically hardening polymers // *PNRPU Mech. Bull.*, 2023, vol. 3, pp. 124–136.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.11>
30. *Sevastyanov G.M.* Finite-strain elastic-plastic torsion: comparison of von Mises and Tresca materials // *Mater. Phys. Mech.*, 2023, vol. 51, no. 2, pp. 140–150.  
[https://doi.org/10.18149/MPM.5122023\\_13](https://doi.org/10.18149/MPM.5122023_13)
31. *Arutyunyan N.Kh., Radayev Yu.N.* Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations // *JAMM*, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 804–811.  
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7)
32. *Toth L.S., Arzaghi M., Fundenberger J.J., Beausir B., Bouaziz O., Arruffat-Massion R.* Severe plastic deformation of metals by high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.*, 2009, vol. 60, no. 3, pp. 175–177.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.09.029>
33. *Wang J.T., Li Zh., Wang J., Langdon T.G.* Principles of severe plastic deformation using tube high-pressure shearing // *Scripta Mater.*, 2012, vol. 67, no. 10, pp. 810–813.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.028>
34. *Faraji G., Kim H.S.* Review of principles and methods of severe plastic deformation for producing ultrafine-grained tubes // *Mater. Sci. Tech.*, 2016, vol. 33, no. 8, pp. 905–923.  
<https://doi.org/10.1080/02670836.2016.1215064>
35. *Pougis A., Toth L.S., Bouaziz O., Fundenberger J.J., Barbier D., Arruffat R.* Stress and strain gradients in high-pressure tube twisting // *Scripta Mater.*, 2012, vol. 66, no. 10, pp. 773–776.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.02.004>

36. *Lapovok R., Qi Y., Ng H.P., Toth L.S., Estrin Yu.* Gradient structures in thin-walled metallic tubes produced by continuous high pressure tube shearing process // *Adv. Eng. Mater.*, 2017, vol. 19, art. no. 1700345.  
<https://doi.org/10.1002/adem.201700345>
37. *Lapovok R., Pougis A., Lemiale V., Orlov D., Toth L.S., Estrin Yu.* Severe plastic deformation processes for thin samples // *J. Mater. Sci.*, 2010, vol. 45, pp. 4554–4560.  
<https://doi.org/10.1007/s10853-010-4403-x>
38. *Lapovok R., Ng H.P., Tomus D., Estrin Yu.* Bimetallic copper-aluminium tube by severe plastic deformation // *Scripta Mater.*, 2012, vol. 66, pp. 1081–1084.  
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.03.004>
39. *Korobeinikov S.N.* *Nonlinear Deformation of Solids.* Novosibirsk: SB RAS, Pub., 2000. (in Russian)
40. *Shitikov A.V., Bykovtsev G.I.* Finite deformations of elastoplastic media // *Dokl. Phys.*, 1990, vol. 311, no. 1, pp. 59–62. (in Russian)
41. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* A simple model of finite strain in an elastoplastic medium // *Dokl. Phys.*, 1996, vol. 347, no. 2, pp. 199–201. (in Russian)
42. *Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.* Some basic kinematical relations for finite deformations of continua // *Mech. Mater.*, 1987, vol. 6, no. 2, pp. 127–138.  
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90003-2)
43. *Levitas V.I.* *Large Deformation of Materials with Complex Rheological Properties at Normal and High Pressure.* N.Y.: Nova Sci. Pub., 1996.
44. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plast.*, 2016, vol. 84, pp. 33–57.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
45. *Sevastyanov G.M.* Analytical solution for high-pressure torsion in the framework of geometrically nonlinear non-associative plasticity // *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 206, pp. 383–395.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.028>
46. *Rogovoi A.A.* Thermodynamics of finite strain elastic-inelastic deformation // *J. Appl. Mech. & Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 4, pp. 591–598.  
<https://doi.org/10.1007/s10808-007-0074-z>
47. *Rogovoy A.A.* Formalized Approach to Constructing Models of the Mechanics of a Deformable Solid. Pt. II. Moscow; Izhevsk: Inst. of Comput. Res., 2023.
48. *Alexandrov S., Richmond O.* Couette flows of rigid/plastic solids: analytical examples of the interaction of constitutive and frictional laws // *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 3, pp. 653–665.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00045-X)
49. *Haward R.N.* The derivation of a strain hardening modulus from true stress-strain curves for thermoplastics // *Polymer*. 1994. vol. 35, no. 18, pp. 3858–3862.  
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(94\)90268-2](https://doi.org/10.1016/0032-3861(94)90268-2)