

УДК 539.3:534.26

РАССЕЯНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2024 г. Д. Ю. Ефимов^{1,*}¹Тульский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята к публикации 20.04.2024

Получено аналитическое решение задачи дифракции плоской акустической волны на радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочке конечной длины. Цилиндрическая оболочка находится в акустическом полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. Граница полупространства является акустически жесткой или акустически мягкой поверхностью. Представлены результаты расчетов акустического поля в дальней зоне.

Ключевые слова: дифракция акустических волн, неоднородная упругая оболочка, плоская поверхность

DOI: 10.31857/S0032823524020096 EDN: XUEOPA

1. Введение. Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. С помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. Рассеиватели, имеющие форму кругового цилиндра, представляют значительный практический интерес, так как хорошо аппроксимируют многие реальные объекты и элементы конструкций.

Задачи дифракции на сплошном упругом цилиндре бесконечной длины с непрерывно-неоднородным упругим покрытием, расположенном в безграничном пространстве, исследовались в [1–3], при этом в качестве источников первичного волнового возмущения полагались плоская акустическая волна [1], бесконечно длинный линейный [2] и сферический [3] источники первичного акустического возмущения. При дифракции акустических волн на цилиндрическом рассеивателе в последнем возникают как стационарные (установившиеся) моды, так и распространяющиеся волновые моды, определяемые уравнениями Похгаммера-Кри. Возникающие при этом эффекты описаны в работах [4, 5].

Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В [6] было рассмотрено рассеяние наклонно падающей плоской акустической волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, расположенным вблизи идеальной поверхности. В [7] решалась задача дифракции сферических и цилиндрических акустических волн абсолютно жестким цилиндром, находящимся вблизи импедансной

границы. В [8, 9] с использованием интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа решалась задача дифракции звука однородным упругим цилиндром, находящимся вблизи границы упругого полупространства. При этом в [9] полагалось, что цилиндр имеет непрерывно-неоднородное покрытие.

В упомянутых выше работах полагалось, что цилиндрический рассеиватель имеет бесконечную длину. Дифракция акустических волн на телах цилиндрической формы конечной длины исследовалась гораздо в меньшей степени. Приближенное решение задачи дифракции плоской гармонической акустической волны на жестком цилиндре конечной длины было предложено в [10]. В [11, 12] получена формула для акустического давления поля, рассеянного абсолютно жестким конечным цилиндром, в дальней зоне. Дифракция акустических волн на тонкостенной цилиндрической оболочке исследовалась в [13], а акустическое рассеяние сплошным тонким упругим ограниченным стержнем изучено в [14]. В [15] в качестве рассеивателя рассматривался цилиндр с полусферическими законцовками, а решение задачи было получено с использованием метода Т-матриц. Работы [16–19] посвящены решению задачи рассеяния наклонно падающей плоской акустической волны упругой тонкостенной цилиндрической оболочкой, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами. В [16] получено приближенное аналитическое выражение для амплитуды рассеяния в дальней зоне поля с помощью интеграла Кирхгофа. В [17] исследованы особенности рассеяния в случае низких частот. В [18] для определения амплитуды обратного рассеяния применяется импеданс излучения ограниченной цилиндрической области. В [19] рассматривается итерационный метод решения задачи. В [20] изучено рассеяние плоской акустической волны конечным упругим сплошным цилиндром с неоднородным упругим покрытием. В каждой из перечисленных работ о дифракции звука на цилиндрическом теле конечной длины полагалось, что рассеиватель расположен в свободном безграничном пространстве.

В настоящей работе рассматривается задача установившихся колебаний при рассеянии наклонно падающей плоской акустической волны радиально-неоднородной толстостенной упругой цилиндрической оболочкой конечной длины в присутствии идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) плоской поверхности.

2. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородную изотропную упругую цилиндрическую оболочку конечной длины L . Оболочка имеет произвольную толщину. Ее внешний радиус — r_1 ($r_1 < L$), а внутренний — r_0 . Тело находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Плоская подстилающая поверхность Γ является абсолютно жесткой или акустически мягкой. Ось оболочки параллельна плоскости Γ и отстоит от нее на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат, связанные с телом, таким образом, что их координатные оси z совпадают с осью вращения цилиндра, а торцы цилиндра отстоят от центра координатной системы на расстоянии $L/2$. В системе координат x, y, z граница полупространства Γ определяется уравнением $y = -d$ (рис. 1). Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного цилиндрического слоя являются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а плотность ρ — непрерывной функцией координаты r . Будем считать, что в полости цилиндрической оболочки — вакуум.

Пусть из внешнего пространства на оболочку падает плоская гармоническая акустическая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$.

Потенциал скорости падающей волны в системе координат x, y, z равен

$$\Psi_0 = \tilde{A}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) - i\omega t],$$

где $\tilde{A}_0$ — амплитуда волны, ω — круговая частота; $\mathbf{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор; $k_x = k \cos \varphi_0 \sin \theta_0$, $k_y = k \sin \varphi_0 \sin \theta_0$, $k_z = k \cos \theta_0$; $k = \omega / c$ — волновое число жидкости; θ_0, φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской акустической волны; $k = |\mathbf{k}|$, t — время. В дальней-

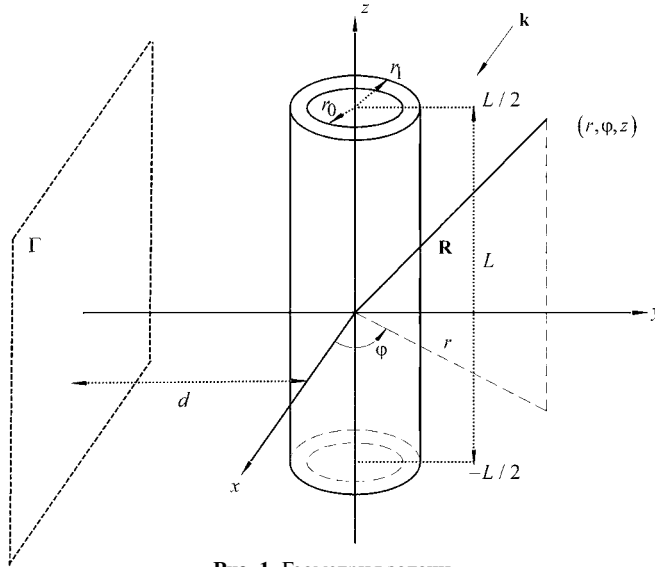


Рис. 1. Геометрия задачи.

шем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное конечной цилиндрической оболочкой в присутствии идеальной плоскости.

3. Аналитическое решение задачи. Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [21]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (3.1)$$

где Ψ — потенциал скорости полного акустического поля.

При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяется по формулам:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_1 \omega \Psi$$

Уравнения движения упругого неоднородного цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний описываются общими уравнениями движения сплошной среды, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho u_z, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где u_r , u_φ , u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Используя обобщенный закон Гука [22], соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое запишем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \\
\sigma_{zz} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \\
\sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi z} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\text{где } \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Получим приближенное решение задачи, пренебрегая отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, но учитывая рассеяние цилиндрической оболочкой волны, образующейся при отражении падающей плоской волны от плоскости. Чтобы отражением от плоскости Γ волн, рассеянных телом, можно было пренебречь, следует полагать, что $d \gg r_1$. В силу линейной постановки задачи потенциал скорости полного акустического поля Ψ представим в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_S, \tag{3.4}$$

где Ψ_1 — потенциал скорости волны, возникающей при отражении падающей плоской волны от плоскости Γ ; Ψ_S — потенциал скорости волн, рассеянных цилиндрической оболочкой при воздействии на нее волн с потенциалами Ψ_0 и Ψ_1 .

Потенциал Ψ_1 описывает плоскую волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению (3.1) и граничному условию на поверхности Γ , которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \tag{3.5}$$

если плоскость Γ является абсолютно жесткой, и в равенстве нулю акустического давления

$$(\Psi_0 + \Psi_1)|_{y=-d} = 0, \tag{3.6}$$

если плоскость Γ является акустически мягкой.

Потенциал Ψ_1 имеет вид

$$\Psi_1 = \tilde{A}_1 \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R})], \tag{3.7}$$

где $\tilde{A}_1$ — амплитуда волны; $\mathbf{k}_1 = (k_{1x}, k_{1y}, k_{1z})$ — волновой вектор отраженной от плоскости волны; $k_{1x} = k \cos \varphi_1 \sin \theta_0$; $k_{1y} = k \sin \varphi_1 \sin \theta_0$; φ_1 — угол, образованный вектором $\mathbf{k}_1$ с положительным направлением оси x . Согласно закону Снеллиуса [23], $k_{1x} = k_x$, $k_{1z} = k_z$ и $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$.

Подставляя (3.7) в граничные условия (3.5) и (3.6), находим

$$\tilde{A}_1 = \pm \tilde{A}_0 \exp(i2k_y d),$$

где знаки «+» и «−» относятся к случаям жесткой и мягкой подстилающих поверхностей соответственно.

В цилиндрической системе координат падающая и отраженная плоские волны представляются разложением [24]

$$\Psi_j = \tilde{A}_j \exp(i\alpha z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \varphi_j)]; \quad j = 0, 1, \tag{3.8}$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $\alpha = k \cos \theta_0$, $\beta = k \sin \theta_0$.

Рассеянное оболочкой поле с учетом условий излучения на бесконечности будем искать в виде комбинации всевозможных цилиндрических волн, бегущих вдоль оси z с волновым числом h

$$\Psi_S = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp(in\varphi) dh, \quad (3.9)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$. При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im} k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности [19] для потенциала Ψ_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Граничные условия на внешней поверхности оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $r = r_1$

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (3.10)$$

На внутренней поверхности оболочки должны выполняться граничные условия, заключающиеся в отсутствии нормальных и тангенциальных составляющих тензора напряжений:

при $r = r_0$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (3.11)$$

Полагаем, что конечная упругая неоднородная оболочка шарнирно закреплена по торцам в бесконечные цилиндрические абсолютно жесткие и неподвижные экраны. В этом случае при $z = \pm L/2$ должны выполняться краевые условия [25]

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad M_z = 0, \quad N_z = 0, \quad (3.12)$$

что означает равенство нулю радиального смещения u_r , углового смещения u_φ , изгибающего момента в продольном направлении M_z и продольной силы N_z оболочки. При этом

$$M_z = \int_{r_0}^{r_1} \sigma_{zz} r dr, \quad N_z = \int_{r_0}^{r_1} \sigma_{zz} dr$$

Поэтому условия (3.12) сводятся к следующим краевым условиям при $z = \pm L/2$:

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (3.13)$$

Компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом слое будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi) \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{2nq}(r) \sin[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi) \\ u_z(r, \varphi, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{3nq}(r) \cos[k_q(z + L/2)] \exp(in\varphi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $k_q = \pi q / L$. Выбор функций u_r, u_φ, u_z в виде (3.14) обеспечивает выполнение условий (3.13).

Подставляя разложения (3.14) в уравнения (3.2) с учетом (3.3), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r)$ для каждого n и q

$$\mathbf{A}_{nq} \mathbf{U}_{nq}'' + \mathbf{B}_{nq} \mathbf{U}_{nq}' + \mathbf{C}_{nq} \mathbf{U}_{nq} = 0, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{U}_{nq} = (U_{1nq}(r), U_{2nq}(r), U_{3nq}(r))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_{nq} = (a_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{B}}_{nq} = (b_{nqpm})_{3 \times 3}$, $\hat{\mathbf{C}}_{nq} = (c_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрицы третьего порядка с элементами:

$$\begin{aligned} a_{nq11} &= (\lambda + 2\mu)r^2, & a_{nq22} &= a_{nq33} = \mu r^2, & a_{nqpm} &= 0 \quad (p \neq m) \\ b_{nq11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, & b_{nq12} &= b_{nq21} = in(\lambda + \mu)r \\ b_{nq13} &= -k_q(\lambda + \mu)r^2, & b_{nq22} &= b_{nq33} = \mu' r^2 + \mu r, & b_{nq23} &= b_{nq32} = 0 \\ b_{nq31} &= k_q(\lambda + \mu)r^2, & c_{nq11} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(k_q^2 r^2 + n^2 + 2) + \lambda' r - \lambda \\ c_{nq12} &= in(\lambda' r - \lambda - 3\mu), & c_{nq13} &= -k_q \lambda' r^2, & c_{nq21} &= in(\mu' r + \lambda + 3\mu) \\ c_{nq22} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu' r - n^2 \lambda - \mu(2n^2 + k_q^2 r^2 + 1), & c_{nq23} &= -ink_q(\lambda + \mu)r \\ c_{nq31} &= k_q(\mu' r + \lambda + \mu)r, & c_{nq32} &= ink_q(\lambda + \mu)r \\ c_{nq33} &= \omega^2 \rho r^2 - \mu(2k_q^2 r^2 + n^2) - k_q^2 \lambda r^2 \end{aligned}$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу. Воспользуемся следующей парой преобразований Фурье

$$\tilde{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} f(z) dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \tilde{f}(h) dh$$

Используя формулу [26]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} dz = \delta(h)$$

и принимая во внимание четность дельта-функции Дирака $\delta(x)$, найдем преобразования Фурье по z потенциала падающей акустической волны Ψ_0 и отраженной от поверхности акустической волны Ψ_1 , определяемых (3.8)

$$\tilde{\Psi}_j(h) = \tilde{A}_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r) \exp[in(\varphi - \varphi_j)] \delta(h - \alpha) \quad (3.16)$$

$$\Psi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{\Psi}_j(h) dh; \quad j = 0, 1$$

Учитывая то, что $u_r = 0$ при $|z| > L/2$, преобразование Фурье по z радиального смещения неоднородного упругого слоя будет иметь вид

$$\tilde{u}_r(h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} U_{1nq}(r) g_q(h) \exp(in\varphi) \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ihz) \tilde{u}_r(h) dh, \\ g_q(h) &= (-i)^{q-1} \frac{L}{4\pi} \left[\frac{\sin k_q^{(+)} }{k_q^{(+)}} - (-1)^q \frac{\sin k_q^{(-)} }{k_q^{(-)}} \right] \end{aligned}$$

$$k_q^{(+)} = (hL + \pi q) / 2, \quad k_q^{(-)} = (hL - \pi q) / 2$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_1$ (первое условие (3.10)) с учетом (3.16), (3.17), принимая во внимание соотношение $\varphi_1 = 2\pi - \varphi_0$, находим коэффициенты $A_n(h)$, выраженные через $U_{1nq}(r_1)$

$$A_n(h) = -\frac{1}{k_h H'_n(k_h r_1)} \times \left[i^n \beta J'_n(\beta r_1) \delta(h - \alpha) \times (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0}) + i\omega \sum_{a=1}^{\infty} U_{1nq}(r_1) g_q(h) \right] \quad (3.18)$$

Подставим во второе граничное условие (3.10) выражения (3.8), (3.9) и (3.14), домножим обе части равенства на $\sin[k_q(z + L/2)]$ и проинтегрируем по z в пределах от $-L/2$ до $L/2$. В результате получим

$$\begin{aligned} & (\lambda(r_1) + 2\mu(r_1))U'_{1nq}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} \times [U_{1nq}(r_1) + inU_{2nq}(r_1) - k_q r_1 U_{3nq}(r_1)] = \\ & = (-1)^{q+1} 4 \frac{\omega \rho_1}{L} \left[\frac{2i^n g_q(\alpha) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})}{\beta r_1 H'_n(\beta r_1)} - \pi \omega \sum_{m=1}^{\infty} U_{1nm}(r_1) Z_{nmq} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$Z_{nmq} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} g_m(h) g_q(h) dh$$

Подробный анализ последнего интеграла приведен в работе [20].

Из третьего и четвертого граничных условий (3.10) находим

$$\begin{aligned} inU_{1nq}(r_1) + r_1 U'_{2nq}(r_1) - U_{2nq}(r_1) &= 0 \\ k_q U_{1nq}(r_1) + U'_{3nq}(r_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из граничных условий (3.11) получим следующие краевые условия для системы (3.15):

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_{nq} \mathbf{U}'_{nq} + \mathbf{F}_{nq} \mathbf{U}_{nq} \right)_{r=r_0} = 0, \quad (3.21)$$

где $\mathbf{F}_{nq} = (f_{nqpm})_{3 \times 3}$ – матрица третьего порядка с элементами

$$\begin{aligned} f_{nq11} &= \lambda(r) / r, \quad f_{nq12} = in\lambda(r) / r, \quad f_{nq13} = -\lambda(r) k_q, \quad f_{nq21} = in\mu(r) / r \\ f_{nq22} &= -\mu(r) / r, \quad f_{nq23} = f_{nq32} = f_{nq33} = 0, \quad f_{nq31} = k_q \mu(r) \end{aligned}$$

Построенная краевая задача (3.15), (3.19) – (3.21) может быть решена каким-либо аналитическим или численным методом.

Теперь представим рассеянное поле в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа, позволяющего определить рассеянное акустическое поле в произвольной точке пространства по известным потенциалу поля и его нормальной производной на поверхности рассеивателя [27]

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega, \quad (3.22)$$

где $\mathbf{R}_2$ — радиус-вектор точки, находящейся на внешней боковой поверхности цилиндрической оболочки; $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)$ — функция Грина для свободного пространства; Ω — боковая поверхность цилиндра; $d\Omega = r_1 d\varphi_2 dz_2$; $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$; $z_2 \in [-L/2, L/2]$.

Применение формулы (3.22) вызвано необходимостью устранения вклада в рассеянное поле цилиндрических абсолютно жестких экранов и учета только рассеяния звука цилиндрической оболочкой конечной длины.

Выберем функцию Грина в виде потенциала точечного источника и в цилиндрической системе координат имеет вид [24]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(\xi) d\xi, \quad (3.23)$$

где

$$\tilde{G}_o(\xi) = \frac{i}{8\pi} e^{i\xi(z-z_2)} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_m(\eta r) H_m(\eta r_2), & r < r_2 \\ J_m(\eta r_2) H_m(\eta r), & r > r_2 \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$$

Подставляя в (3.22) полное поле, определяемое выражением (3.4), с использованием (3.8), (3.9), (3.18), с учетом (3.23) и формулы [27]

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \alpha) dh = f(\alpha),$$

если α лежит внутри $[a, b]$, а также осуществляя интегрирование по переменной φ_2 с учетом свойства ортогональности экспоненциальных множителей, получим выражение для потенциала Ψ_S , рассеянного оболочкой

$$\Psi_S(\mathbf{R}) = \frac{ir_1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[W_{1n} I_{1n} + W_{2n} I_{2n} + i\omega \sum_{q=1}^{\infty} [I_{4nq} - I_{3nq}] U_{1nq}(r_1) \right] \exp(in\varphi), \quad (3.24)$$

где

$$W_{1n} = - \frac{i^n J'_n(\beta r_1) H_n(\beta r_1) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})}{H'_n(\beta r_1)}$$

$$W_{2n} = i^n \beta J'_n(\beta r_1) (\tilde{A}_0 e^{-in\varphi_0} + \tilde{A}_1 e^{in\varphi_0})$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \times \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \times J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 d\xi$$

$$I_{3nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} \times g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi$$

$$I_{4nq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\xi z} \exp[i(h - \xi)z_2] \times g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r) dz_2 dh d\xi$$

Важно отметить, что для того, чтобы выражение (3.24) удовлетворяло условиям излучения на бесконечности, аналогично выражению (3.9), в интегралах

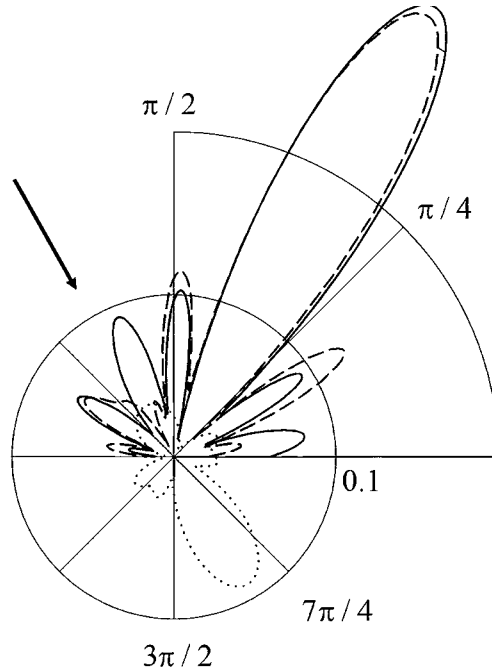


Рис. 2. Диаграммы направленности рассеянного поля, $kr_1 = 4$, $L/r_1 = 5$.

$I_{1n}, I_{2n}, I_{3nq}, I_{4nq}$ следует полагать $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Потенциал скорости полного рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_{S1} = \Psi_1 + \Psi_S, \quad (3.25)$$

где Ψ_S определяется выражением (3.24).

4. Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты зависимости безразмерной амплитуды рассеянного поля $|\Psi_{S1}(\varphi) / \tilde{A}_0|$ от угловой координаты φ и зависимости коэффициента обратного звукового рассеяния $|\Psi_{S1}(\pi + \varphi_0) / \tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в плоскости $z = 0$ при $r = r_*$. В этом случае интегралы из (3.24) принимают вид

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi \\ I_{2n} &= \int_{-W}^W \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(\alpha - \xi)z_2] J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 d\xi \\ I_{3nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] \frac{H_n(k_h r_1)}{k_h H'_n(k_h r_1)} \times g_q(h) \eta J'_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi \\ I_{4nq} &= \int_{-W}^W \int_{-Q}^Q \int_{-L/2}^{L/2} \exp[i(h - \xi)z_2] \times g_q(h) J_n(\eta r_1) H_n(\eta r_*) dz_2 dh d\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Полагалось, что толстостенная цилиндрическая оболочка из поливинилбути-
раля ($r_1 = 1$ м, $(r_0 = 0.5$ м) располагается в полупространстве, заполненном водой
($\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с). Расстояние от оси цилиндра до границы полупро-
странства оценивалось величиной $d / r_1 = 20$. Рассматривалась как однородная
цилиндрическая оболочка с характерными плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и мо-
дулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м², так и неоднородная, физи-
ко-механические характеристики которой изменялись по закону

$$\lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0, \quad \rho = \rho^0 f(r)$$

$$f(r) = 0.75 \left[(r_1 - r)^2 / (r_1 - r_0)^2 + 1 \right]; \quad r_0 \leq r \leq r_1$$

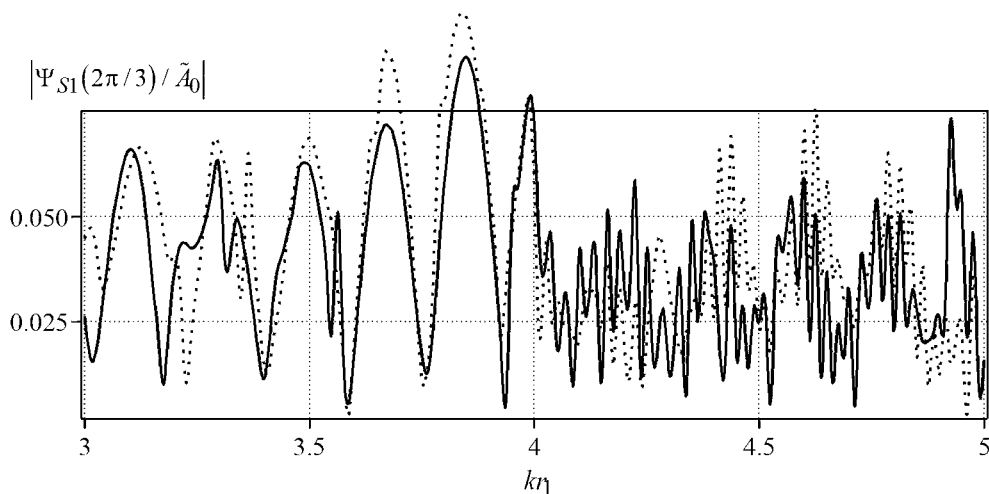


Рис. 3. Частотная зависимость коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L / r_1 = 5$.

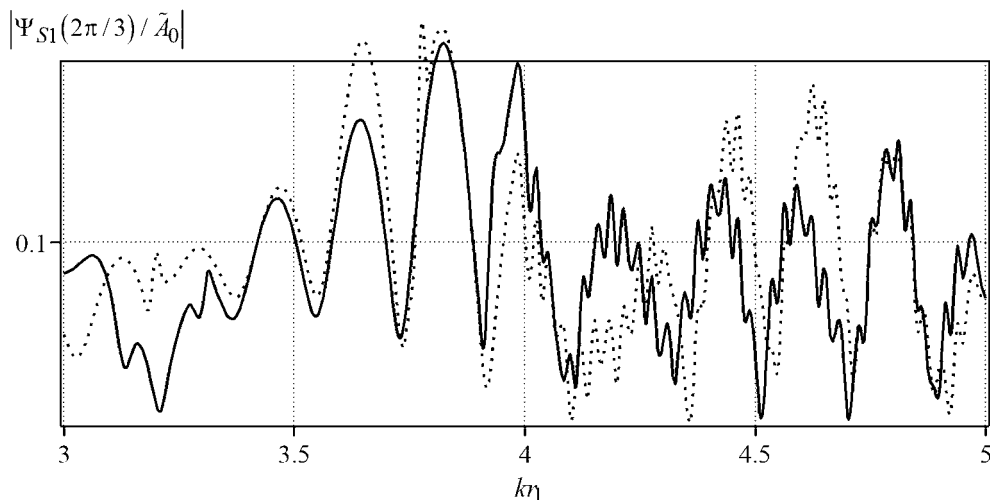


Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента обратного звукового рассеяния от волнового размера тела, $L / r_1 = 100$.

Полагалось, что плоская акустическая волна единичной амплитуды падает на цилиндрическую оболочку под углами падения $(\varphi_0, \theta_0) = (-\pi/3, \pi/2)$ для значений $L/r_1 = 5, 100$ и $r_* = 100$ м.

Решение краевой задачи (3.15), (3.19) – (3.21) получено методом сплайн-коллокации [28].

Суммирование в (3.25) проводилось в диапазоне от $-N$ до N по индексу n и от 1 до N по индексу q , где $N = 2[kr_1] + 1$ [·] – целая часть числа.

Интегралы (4.1) вычислялись по квадратурным формулам, построенным на параллелепипедальных сетках Коробова [29, 30]. При этом к несобственным интегралам I-го рода применялся прием обрезания бесконечных пределов [31].

На рис. 2 представлены диаграммы направленности амплитуды рассеянного акустического поля в случае неоднородной цилиндрической оболочки для значений $kr_1 = 4$, $L/r_1 = 5$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ , а стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Сплошная линия соответствует случаю абсолютно жесткой поверхности, штриховая – акустически мягкой, пунктирная – оболочке, расположенной в свободном пространстве.

На рис. 3, 4 представлены частотные зависимости коэффициента обратного рассеяния звука $|\Psi_{S1}(2\pi/3)/\tilde{A}_0|$ от волнового размера тела kr_1 в интервале $3 \leq kr_1 \leq 5$ для значений $L/r_1 = 5, 100$. Поверхность полагалась абсолютно жесткой. Пунктирные линии соответствуют однородной цилиндрической оболочке, сплошные линии – неоднородной оболочке.

Закключение. На основе полученного аналитического решения задачи проведены численные расчеты, которые позволили выявить существенное влияние присутствия идеальной плоскости вблизи цилиндрического рассеивателя конечной длины на рассеянное поле. Показано, что неоднородность материала оболочки позволяет эффективно изменять характеристики рассеяния цилиндрического тела при соответствующем выборе законов неоднородности материала.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Л. А. Толоконникову за постоянное внимание и полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ, соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024, тема научного исследования “Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 265–274.
2. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460–472.
3. Толоконников Л.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сб. 2018. Т.19. Вып. 4. С. 215–226.
4. Кузнецов С.В., Ильяшенко А.В. Поляризация волн Похгаммера–Кри: аксиально симметричные продольные моды // Акуст. ж. 2018. Т. 64. № 6. С. 657–663.
5. Ильяшенко А.В. Продольные волны Похгаммера–Кри: аномальная поляризация // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 136–146.
6. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сб. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369–381.

7. *Wai Keung Lui, Kai Ming Li* The scattering of sound by a long cylinder above an impedance boundary // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2010. V. 127. № 2. P. 664–674.
8. *Шендеров Е.Л.* Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *Акуст. ж.* 2002. Т. 48. № 2. С. 266–276.
9. *Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю.* Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779–791.
10. *Williams W.E.* Diffraction by a cylinder of finite length // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1956. V. 52. № 2. P. 322–335.
11. *Косарев О.И.* Вторичное гидроакустическое поле, создаваемое твердым конечным цилиндром в дальнем поле // *Пробл. машин. и автомат.* 2015. № 4. С. 99–103.
12. *Косарев О.И.* Дифракция звука на конечном твердом цилиндре в дальнем поле // *Вестн. научно-техн. развития.* 2017. № 3. С. 30–37.
13. *Лямшев Л.М.* Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // *Докл. АН СССР.* 1957. Т. 115. № 2. С. 271–273.
14. *Лямшев Л.М.* Рассеяние звука тонким ограниченным стержнем // *Акуст. ж.* 1958. Т. 4. № 1. С. 51–58.
15. *Su J.-H., Varadan V.V., Varadan V.K., Flax L.* Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68. № 2. P. 686–691.
16. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Амплитуда резонансного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости // *Акуст. ж.* 1986. Т. 32. № 1. С. 129–131.
17. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Некоторые особенности рассеяния звука ограниченными цилиндрическими оболочками // *Акуст. ж.* 1986. Т. 32. № 5. С. 699–701.
18. *Белогорцев А.С., Музыченко В.В.* Влияние ограниченности цилиндрической оболочки на амплитуду обратного рассеяния // *Акуст. ж.* 1991. Т. 37. № 2. С. 228–234.
19. *Доценко И.Е., Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Рассеяние звука на ограниченной цилиндрической упругой оболочке с полусферическими заглушками // *Акуст. ж.* 1991. Т. 37. № 5. С. 922–932.
20. *Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю.* Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // *Матем. модел.* 2023. Т. 35. № 4. С. 3–23.
21. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
22. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
23. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
24. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
25. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
26. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
27. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
28. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
29. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
30. *Добровольский Н.Н., Скобельцын С.А., Толоконников Л.А., Ларин Н.В.* О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // *Чебышевский сб.* 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368–382.
31. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.

Scattering of Acoustic Waves by an Inhomogeneous Elastic Cylindrical Shell of Finite Length in a Half-Space

D. Yu. Efimov^{a, #}

^a*Tula State University, Tula, Russia*

[#]*e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

An analytical solution to the problem of diffraction of a plane acoustic wave on a radially inhomogeneous thick-walled elastic cylindrical shell of finite length is obtained. The cylindrical shell is located in an acoustic half-space filled with an ideal liquid. The boundary of the half-space is an acoustically rigid or acoustically soft surface. The results of calculations of the acoustic field in the far zone are presented.

Keywords: sound diffraction, inhomogeneous elastic shell, flat surface

REFERENCES

1. Tolokonnikov L.A. Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, 2013, no. 2–2, pp. 265–274. (in Russian)
2. Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu. Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with a radially inhomogeneous coating // *Chebyshev. sb.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 460–472. (in Russian)
3. Tolokonnikov L.A. Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating // *Chebyshev. sb.*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 215–226. (in Russian)
4. Kuznetsov S.V., Ilyashenko A.V. Polarization of Pochhammer–Chree waves: axisymmetric longitudinal modes // *Acoust. Phys.*, 2018, vol. 64, no. 6, pp. 659–664.
5. Ilyashenko A.V. Pochhammer–Cree longitudinal waves: Anomalous polarization // *Mech. Solids*. 2019. vol. 54. pp. 598–606.
6. Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu. Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface // *Chebyshev. sb.*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 369–381. (in Russian)
7. Wai Keung Lui, Kai Ming Li The scattering of sound by a long cylinder above an impedance boundary // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2010, vol. 127, no. 2, pp. 664–674.
8. Shenderov E.L. Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace // *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 2, pp. 225–234.
9. Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu. Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1657–1667.
10. Williams W.E. Diffraction by a cylinder of finite length // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1956, vol. 52, no. 2, pp. 322–335.
11. Kosarev O.I. Secondary hydroacoustic field generated by a solid finite cylinder in the far field // *Probl. Mashinostr. Avtom.*, 2015, no. 4, pp. 99–103. (in Russian)
12. Kosarev O.I. Diffraction of sound by a hard cylinder of finite length in the far field // *Vestn. Nauchno-Tekh. Razvit.*, 2017, no. 3 (115), pp. 30–37. (in Russian)
13. Lyamshev L.M. Sound diffraction on a thin bounded elastic cylindrical shell // *Dokl. AN SSSR*, 1957, vol. 115, no. 2, pp. 271–273. (in Russian)
14. Lyamshev L.M. Sound scattering by a thin rod of finite length // *Akust. zh.*, 1958, vol. 4, no. 1, pp. 51–58. (in Russian)
15. Su J.-H., Varadan V.V., Varadan V.K., Flax L. Acoustic wave scattering by a finite elastic cylinder in water // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1980, vol. 68, no. 2, pp. 686–691.

16. *Muzychenko V.V., Rybak S.A.* Amplituda rezonansnogo rasseyaniya zvuka ogranichennoy tsilindricheskoy obolochkoy v zhidkosti // Akust. zh., 1986, vol. 32, no. 1, pp. 129–131. (in Russian)
17. *Muzychenko V.V., Rybak S.A.* Nekotoryye osobennosti rasseyaniya zvuka ogranichennymi tsilindricheskimi obolochkami // Akust. zh., 1986, vol. 32, no. 5, pp. 699–701. (in Russian)
18. *Belogortsev A.S., Muzychenko V.V.* Vliyaniye ogranichennosti tsilindricheskoy skorosti na velichinu obratnogo rasseyaniya // Akust. zh., 1991, vol. 37, no. 2, pp. 228–234. (in Russian)
19. *Dotsenko I.E., Muzychenko V.V., Rybak S.A.* Rasseyaniye zvuka na ogranichennoy tsilindricheskoy uprugoy obolochke s polusfericheskimi zaglushkami // Akust. zh., 1991, vol. 37, no. 5, pp. 922–932. (in Russian)
20. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu.* Scattering of sound waves by a finite length elastic cylinder with an inhomogeneous coating // Math. Models&Comput. Simul., 2023, vol. 15, no. 5, pp. 863–876.
21. *Shenderov E.L.* Wave Problems of Hydroacoustics. Leningrad: Sudostroenie, 1972. (in Russian)
22. *Nowacki W.* Teoria sprzystosci. Warszawa: PWN, 1973.
23. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973. 344 p. (in Russian)
24. *Ivanov E.A.* Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1968. 584 p. (in Russian)
25. *Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kruger S.* Plastiny i obolochki. Moscow: Nauka, 1966. 636 p. (in Russian)
26. *Kurant R.* Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1964. 830 p. (in Russian)
27. *Shenderov E.L.* Radiation and Scattering of Sound. Leningrad: Sudostroenie, 1989. 302 p. (in Russian)
28. *Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* Spline Function Methods. Moscow: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian)
29. *Korobov N.M.* Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis. Moscow: MTSNMO, 2004. 288 p. (in Russian)
30. *Dobrovol'skii N.N., Skobel'tsyn S.A., Tolokonnikov L.A., Larin N.V.* About application of number-theoretic grids in problems of acoustics // Chebyshev. sb., 2021, vol. 22, no. 3, pp. 368–382. (in Russian)
31. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Moscow: Fizmatgiz, 1978. 512 p. (in Russian)