

УДК 531.4

СЖАТИЕ И СДВИГ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КЛИНА ШЕРОХОВАТЫМ ШТАМПОМ (МОДЕЛЬ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА)

© 2024 г. А. Н. Сахаров^{1,*}, А. Ю. Рябинина^{1,**}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

^{*}e-mail: alexandr.sakharov@math.msu.ru,

^{**}e-mail: alina.riabinina@math.msu.ru

Поступила в редакцию 12.02.2024 г.

После доработки 15.03.2024г.

Принята к публикации 20.03.2024г.

Исследуется передача сдвигового усилия посредством фрикционного контакта на шероховатых поверхностях предварительно сжатых пластических тел. В качестве модели контакта рассматривается задача пластического смятия клина шероховатым плоским штампом с условием трения Прандтля на контактной поверхности. Предложена методика определения предельной сдвиговой нагрузки, воспринимаемой фрикционным контактом.

Ключевые слова: фрикционный контакт, сдвигоустойчивое соединение, идеально-пластический клин, трение

DOI: 10.31857/S0032823524020069 EDN: XUKABH

1. Введение. При проектировании соединений деталей, где нагрузка сдвига передается только силами трения через контакт предварительно сжатых металлических поверхностей (фрикционные соединения) важную роль играет задача определения предельного значения сдвиговой нагрузки. Несущая способность фрикционных соединений зависит как от способа получения шероховатости поверхности, так и от адгезионных свойств, которые могут изменяться вследствие возникновения и разрушения окисных пленок на поверхности металлических деталей [1, 2]. В соответствии с классификацией И. В. Крагельского для таких условий может использоваться теория сухого или граничного трения, когда наряду с силами межмолекулярного взаимодействия между контактирующими поверхностями важную роль играют процессы преодоления механического сопротивления при пропахивании или взаимном внедрении отдельных выступов шероховатой поверхности [3].

При достижении предельной нагрузки такое соединение на макроуровне обнаруживает типичные черты идеальнопластического поведения, а на микроуровне происходит пластический срез выступов на контактной поверхности, поэтому модели пластического поведения при описании такого контактного взаимодействия могут оказаться весьма полезны. Строгое математическое исследование задачи затрудняется как статистическим характером шероховатости обработанной поверхности детали, так и сложностью решения самой контактной задачи с учетом множества

факторов (геометрии сопрягаемых поверхностей, учета условий контакта, необратимого деформирования при начальном сжатии и т.д.). В данной работе предложена модель неровностей в виде двугранного клина из идеальнопластического материала, контактирующего с плоским шероховатым штампом. Такая модель может показаться излишне упрощенной, однако по выражению Ю. Н. Работнова “механик вынужден блуждать между Сциллой и Харибдой; с одной стороны, его уравнения должны достаточно точно отражать действительность, с другой – быть доступными для интегрирования” [4].

Другой подход для решения контактных задач для шероховатых тел используется в рамках упругой или нелинейно упругой модели при моделировании шероховатости в виде регулярных структур [5, 6] или самоподобных (фрактальных) объектов [7].

Однако для целей нашего исследования несущей способности фрикционного контакта модель идеально-пластического тела представляется наиболее подходящей. Еще одним полезным свойством такой модели является локальный характер пластического деформирования, когда поля напряжений от дискретных контактов не взаимодействуют. В этом случае для исследования поведения ансамбля контактов уже не нужно решать краевую задачу МДТТ, а только вероятностную [8, 9].

Известное геометрически подобное (автомодельное) решение Хилла о сжатии идеально-пластического клина гладким штампом в условиях плоской деформации [10, 11] лежит в основе модели локально пластически деформируемого тела при анализе контактных задач для шероховатых тел [12], а также для описания образования физического контакта между компонентами в твердом состоянии при получении композиционных материалов.

Особенностью решения Хилла является неограниченность усилия, приложенного к штампу, поскольку пластическое смятие вершины клина приводит к росту контактной площадки, так возникает первый параметр – осадка штампа, связанная с усилием сжатия. Для определения несущей способности фрикционного соединения, необходимо учесть трение, возникающее на контактных площадках. В качестве закона трения используется условие Прандтля взамен закона Кулона, поскольку требование ограниченности касательного напряжения $|\tau_n| \leq k$ пределом текучести k является определяющим. Соколовским предложен параметр ω , $\tau_n = k \cos 2\omega$, который характеризует трение при смятии клина шероховатым штампом [13], с одной стороны, а с другой, равен углу между нормалью к поверхности и линией скольжения вблизи границы. Задание углового параметра ω позволяет рассматривать как реактивные силы трения $\omega = \omega_0$, препятствующие выпиранию материала клина, так и активные $\omega = \frac{\pi}{2} - \omega_0$, когда силы трения совершают работу по выпиранию (выпахивание).

Угол $\omega \in \left[\omega_0, \frac{\pi}{2} - \omega_0 \right]$ является вторым параметром, характеризующим условия

на контактной площадке. Таким образом, силовым параметрам (P, T) сжатия и сдвига отвечают параметры (c, ω) , подобный подход позволяет рассматривать различные сценарии нагружения клина.

2. Смятие клина шероховатым штампом при пропорциональном нагружении. Построим геометрически подобное (автомодельное) решение смятия несжимаемого жестко-идеально-пластического клина плоским шероховатым штампом, когда на площадке контакта наряду с нормальными σ_n действуют касательные напряжения τ_n , не превосходящие предела текучести материала на сдвиг ($\tau_n \leq k$). В соответствии с [12] введем угол ω (рис. 1), характеризующий адгезионное взаимодействие: $\pi/4 \leq \omega < \pi/2$

$$\tau_n = k \cos 2\omega \quad (2.1)$$

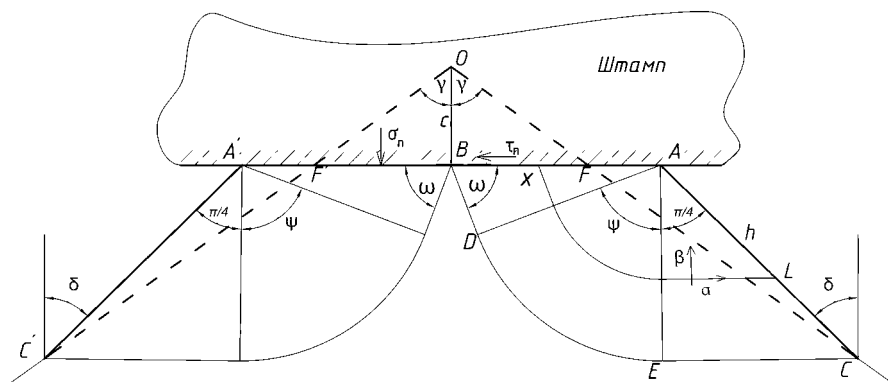


Рис. 1. Симметричное смятие клина.

В рамках такой постановки трение рассматривается лишь как сопротивление сдвигу материала под штампом при пластическом деформировании клина. Краевое условие (2.1) сохраняет геометрическое подобие задачи, тогда компоненты тензора напряжений и вектора скорости частиц материала есть функции только единственной переменной, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор положения частицы, отнесенный к начальному состоянию, а c — осадка штампа, определяющая стадию нагружения.

3. Случай симметричного смятия. Данный случай может реализоваться при действии на штамп вертикальной нагрузки. Обозначим ψ — угол центрированного вее-ра поля линий скольжения, $BF = x = c \operatorname{tg} \gamma$, введем угол $\delta = \frac{\pi}{4} - \omega + \psi$, равный наклону участка AC грани клина ($\delta < \gamma$).

Вследствие несжимаемости для пластического материала следуют равенства площадей соответствующих треугольников $S \triangle ACF = S \triangle OBF$ и условия подобия, запишем систему уравнений:

$$cx = h \cos \delta \left(\frac{h}{\sqrt{2} \sin \omega} - x \right), \quad \frac{c}{x} = \frac{h \cos \delta}{\frac{h}{\sqrt{2} \sin \omega} - x + h \sin \delta} \quad (3.1)$$

Исключая x из (3.1), получим

$$\frac{h}{c} = \frac{1 + \sqrt{2} \sin \omega \sin \delta}{\cos \delta} \quad (3.2)$$

Найдем давление p , действующее на площадке контакта, воспользовавшись интегралом Генки вдоль α -линии:

$$p = k(1 + 2\psi + \sin 2\omega) \quad (3.3)$$

Заметим, что при $\omega = \pi / 4$ формулы (3.2) и (3.3) совпадают с решением Хилла для гладкого штампа. Усилие смятия линейно связано с осадкой штампа и равно

$$\frac{P(c)}{c} = \frac{k(1 + 2\psi + \sin 2\omega)(1 + \sqrt{2} \sin \omega \sin \delta)}{\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta}$$

На рис. 2 построены графики значений пластической податливости dc / dP , (где c — осадка штампа, $P = \frac{2p(\omega)h(\omega)}{\sqrt{2} \sin \omega}$ — усилие на клин) в зависимости от параметра ω .

4. Случай одностороннего смятия при реактивной силе трения. Рассмотрим дальнейшее обобщение задачи Хилла на случай одностороннего смятия клина шероховатым штампом (рис. 3, а), при упрощающем предположении равенства наклона граней $\gamma^+ = \gamma^- = \gamma$. Геометрическое подобие задачи сохраняется и в этом случае. Вначале рассмотрим случай ($\omega = \omega_0 > \pi / 4$), когда сила сдвига, равная силе трения, является реакцией и препятствует скольжению материала.

С учетом уже принятых обозначений из геометрического подобия и равенства площадей соответствующих треугольников следуют равенства

$$2cx = h \cos \delta \left(\frac{h}{\sqrt{2} \sin \omega} - 2x \right), \quad \frac{c}{x} = \frac{h \cos \delta}{\frac{h}{\sqrt{2} \sin \omega} - 2x + h \sin \delta} \quad (4.1)$$

Разрешая (4.1), получаем квадратное уравнение на h / c

$$\left(\frac{h}{c} \right)^2 \frac{\cos \delta}{\sqrt{2} \sin \omega} - \frac{2h}{c} \sin \delta - \frac{2(1 + \sqrt{2} \sin \omega \sin \delta)}{\cos \delta} = 0 \quad (4.2)$$

Положительный корень уравнения (4.2)

$$\left(\frac{h}{c} \right) = \frac{\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + \sqrt{(\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + 1)^2 + 1}}{\cos \delta}$$

Откуда получаем зависимость между h / c и углом γ в параметрической форме

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(h / c)^2 \cos \delta}{2\sqrt{2} \sin \omega (1 + (h / c) \cos \delta)}$$

Усилие P одностороннего смятия линейно связано с осадкой штампа и равно

$$\frac{P_*(c)}{c} = \frac{pa}{c} = k \frac{(1 + 2\psi + \sin 2\omega) \left(\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + \sqrt{(\sqrt{2} \sin \omega \sin \delta + 1)^2 + 1} \right)}{\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta}, \quad (4.3)$$

где $a = NA = h / (\sqrt{2} \sin \omega)$ – ширина площадки контакта.

Важным свойством полученного решения для симметричного клина с учетом трения является устойчивость процесса одностороннего смятия. Действительно, поскольку в силу геометрического подобия $\delta < \gamma$, то возникновение скольжения в противоположную сторону приводит к сетке линий скольжения, доставляющих большее значение сжимающей силы P . В силу экстремальных теорем для жестко-пластического тела действительное решение должно приводить к наименьшему значению

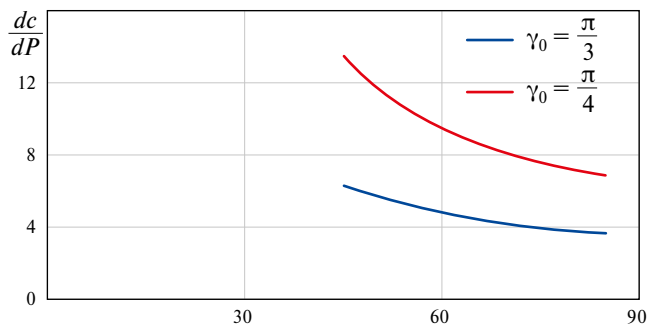


Рис. 2. Зависимость dc/dP податливости от ω для клина с углом раствора.

Из геометрического подобия следует, что горизонтальная проекция скорости движения частицы на физической плоскости Oxy

$$U \geq \eta V = \frac{b}{c} V = \frac{\sqrt{2} \cos \omega_0 \sin \delta + 1}{\sqrt{2} \cos \omega_0 \cos \delta} V,$$

т.е. работа, отнесенная к единичному смятию, с учетом работы сил трения равна

$$\frac{dA_p}{dc} = k \left(1 + 2\psi + \sin 2\omega_0 + \cos \omega_0 \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{\sqrt{2} \cos \delta} \right) \quad (5.1)$$

Сравнение механической работы по схеме 3 (реактивная сила трения $\omega_0 < \pi/4$) и по схеме 4 (активная сила трения $\omega_0 > \pi/4$) к механической работе для гладкого штампа ($\omega = \pi/4$) дано на рис. 5.

Видно, что смятие шероховатым штампом более затратное, чем гладким, и если для случая реактивного трения этот результат предсказуем, то для активного сдвига неочевиден.

6. Двухзвенный процесс нагружения клина шероховатым штампом при действии усилий сжатия и сдвига. Фрикционный контакт характеризуют два состояния: 1-я стадия – прикладывается и фиксируется усилие сжатия $P = P_0$, 2-я стадия – нагружение касательным усилием $T < T^*$, где T^* – несущая способность фрикционного контакта. Для определения T^* рассмотрим двухзвенный процесс нагружения клина. Когда к клину прикладывается вертикальная нагрузка P , возникающие под штампом касательные напряжения являются реактивными, ($\omega = \omega_0$) определены решением автомодельной задачи одностороннего смятия (в силу замечания о минимальном значении). Действие активного сдвига T может быть направлено как в сторону действия реактивных касательных напряжений, так и в противоположную. Однако в сторону действия реактивных касательных напряжений увеличение T невозможно без увеличения контактной площадки и сжимающей силы, следовательно, при $P = P_0$ возможно действие активного сдвига только в противоположную сторону. Прежнее положение равновесия штампа при этом нарушается, происходит процесс увеличения площадки контакта и продолжающаяся осадка клина. Т.е. задача о смятии клина комбинацией сжимающей P и сдвигающей T сил оказывается связанной. Процесс осаживания клина и распределение напряжений на площадке контакта определяются параметрами (c, ω) . В каждый момент процессу деформирования отвечает процесс нагружения – значения равнодействующих усилий сжатия и сдвига (P, T) , определяемых интегрированием напряжений с учетом условия предельного равновесия.

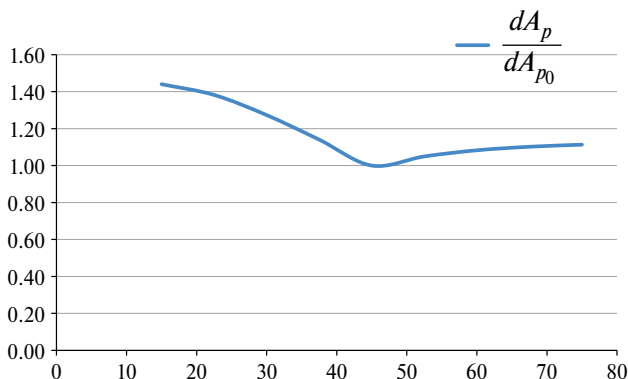


Рис. 5. Сравнение механической работы для обеих схем действия силы трения.

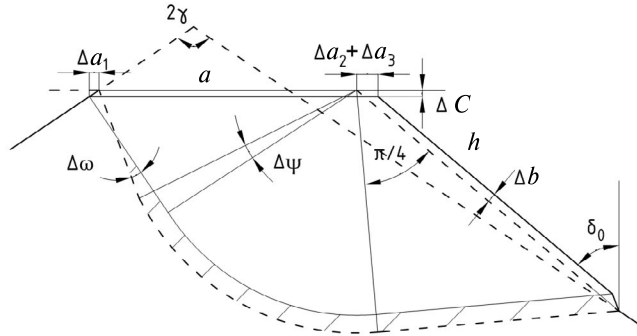


Рис. 6. Изменение ширины площадки на 2-м этапе.

При передаче на клин усилия сдвига T посредством шероховатого штампа происходит изменение угла ω и смена схемы деформирования (рис. 6), заключающейся в исчезновении геометрического подобия. Однако выполняется следующее более частное геометрическое свойство: в любой момент процесса сдвига, определяемого углом ω , выполнено: $d\delta = 0$, откуда $d\psi = d\omega$. В силу постоянства силы $P = P_0$ необходимо выполнение условия интегрального равновесия:

$$p(\omega)\Delta a + \Delta p(\omega)a = 0 \quad (6.1)$$

Горизонтальная составляющая усилия T равна разности интегралов от действующих касательных напряжений на площадке контакта и от реактивных касательных напряжений 1-й стадии нагружения $\tau_n(\omega)a - \tau_n(\omega_0)a_0 = T(\omega)$, где a_0 – ширина площадки смятия при $c = c_0$, откуда следует $T(\omega_0) = 0$ в качестве начального условия для 2-й стадии нагружения.

Найдем изменение нормального давления и касательных напряжений, связанное с $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_n &= \Delta(k \cos 2\omega) = -2k \sin 2\omega \Delta\omega \\ \Delta p &= k\Delta(1 + \sin 2\omega + 2\psi) = 2k(\cos 2\omega \Delta\omega + \Delta\omega) = 2k \cos^2 \omega \Delta\omega \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что изменение напряжений не зависит от исходной геометрии клина и определяется только углом ω , их отношение равно:

$$\Delta\tau_n = -\operatorname{tg} \omega \Delta p \quad (6.3)$$

Заметим, что полученное соотношение, хотя внешне схоже, отличается от закона Кулона, поскольку ω – переменная величина.

Найдем изменение ширины площадки контакта. Из (6.1) и (6.2) следует $\Delta a/a = -\Delta p/p$ или

$$\frac{\Delta a}{a^2} = -\frac{\Delta p}{pa} = -\frac{2k(\cos 2\omega + 1)}{P_0} \Delta\omega \quad (6.4)$$

Интегрируя (6.4) $\frac{1}{a} = \frac{k}{P_0}(2\omega + \sin 2\omega + D)$, найдем постоянную D из условия $a(\omega_0) = a_0 = P_0/k(1 - \pi/2 + 2\delta_0 + 2\omega_0 + \sin 2\omega_0)$, откуда $D = 1 - \pi/2 + 2\delta_0$.

Тогда ширина контактной площадки в каждый момент перехода равна

$$a(\omega) = a_0 \frac{1 - \pi/2 + 2\delta_0 + 2\omega_0 + \sin 2\omega_0}{1 - \pi/2 + 2\delta_0 + 2\omega + \sin 2\omega} \quad (6.5)$$

Связь приращения площадки Δa с осадкой штампа Δc может быть найдена из геометрических соображений (рис. 6) по изменению составляющих ширины площадки контакта $\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3$, где $\Delta a_1 = \Delta c \operatorname{tg} \gamma$, $\Delta a_2 = \Delta c \operatorname{tg} \delta_0$, $\Delta a_3 = \Delta b / \cos \delta_0$.

Из условия сохранения объема следует $a\Delta c = h\Delta b$, откуда

$$\Delta b = \frac{\Delta c}{\sqrt{2} \sin \omega} \text{ и } \Delta a_3 = \frac{\Delta b}{\cos \delta_0} = \frac{\Delta c}{\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta_0},$$

следовательно

$$\Delta a = A(\omega) \Delta c, \quad (6.6)$$

где $A(\omega) = \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta_0 + (\sqrt{2} \sin \omega \cos \delta_0)^{-1}$.

Из (6.6) следует уравнение $\Delta c = a'(\omega) \Delta \omega / A(\omega)$, интегрируя которое при условии $c(\omega_0) = c_0$, получим величину осадки штампа при действии сдвиговой нагрузки

$$c(\omega) - c_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{a'(\omega) d\omega}{A(\omega)} \quad (6.7)$$

Найдем предельное усилие сдвига T^* , зная касательные напряжения, действующие на площадке контакта.

Из (6.5) при $\omega = \frac{\pi}{2} - \omega_0$ следует, что ширина площадки в конце этапа нагружения активной сдвиговой нагрузкой равна

$$a_1 = a\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0\right) = a_0 \frac{1 - \frac{\pi}{2} + 2\delta_0 + 2\omega_0 + \sin 2\omega_0}{1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta_0 - 2\omega_0 + \sin 2\omega_0}$$

Откуда

$$T_* = k \cos 2\omega_0 (a_1 + a_0) = 2k \cos 2\omega_0 \frac{1 + 2\delta_0 + \sin 2\omega_0}{1 + 2\delta_0 + \sin 2\omega_0 + \pi/2 - 2\omega_0} \quad (6.8)$$

С учетом $\omega_0 > \pi/4$ из (6.8) следует, что $T_* > 2|T(\omega_0)|$, т.е. предельное значение сдвиговой нагрузки более чем двукратно превышает реактивное усилие.

Найдем пластическую податливость на 2-м этапе нагружения при продолжающемся смятии сдвигом

$$\left. \frac{dc}{dT} \right|_{P=P_0} = \frac{1}{(p(\omega) \operatorname{ctg} \gamma + k \cos 2\omega) A(\omega)} \quad (6.9)$$

На диаграмме (рис. 7) построена зависимость (6.9) для частного случая ($2\gamma = 2\pi/3$, $\omega_0 = 5\pi/12$) в интервале изменения угла $\omega \in (\pi/12, 5\pi/12)$. Из расчетов, проведенных также и для других значений параметров, следует, что зависимость пластической осадки штампа при сдвиге близка к линейной.

Заключение. Понятие предельного значения усилия сдвига для дискретного контакта введено из следующих соображений физического характера. Силы трения всегда направлены в сторону, противоположную движению частиц относительно штам-

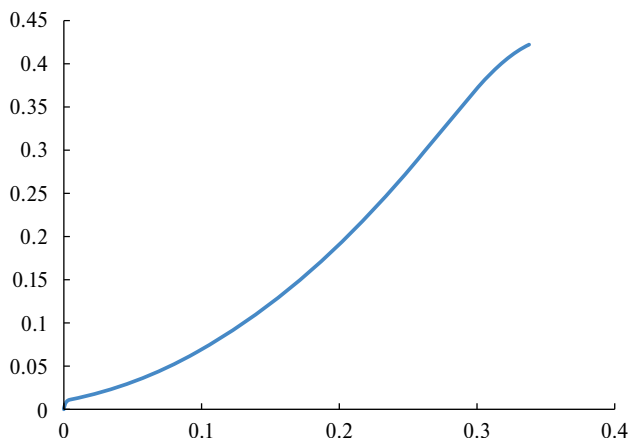


Рис. 7. Диаграмма зависимости $\frac{\Delta c}{c_0} \left(\frac{T}{P_0} \right)$.

па, поэтому максимальные касательные напряжения при действии активной силы сдвига будут такими же по величине, что и реактивные, и противоположны им по знаку, т.е. $\tau_n(\omega_0) = -\tau_n \left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 \right)$. Следовательно, предельное значение силы сдвига — это максимальное значение силы сдвига, равное

$$T_* = \max T = k \cos 2\omega_0 (a_0 + a_1)$$

Если ввести условную величину $\mu = T_*/P_0$, которую можно назвать коэффициентом трения пары «тело-штамп», то можно заметить, что коэффициент трения пары не зависит от усилия предварительного сжатия P_0 и от предела текучести материала на сдвиг.

Применительно к задаче о несущей способности сжатых шероховатых поверхностей использование линейной аппроксимации $\frac{\Delta c}{c_0} \left(\frac{T}{P_0} \right)$ открывает возможность перехода к расчету статистического ансамбля неровностей. В случае насыщенного пластического контакта шероховатых поверхностей, можно использовать модель упругого основания, жесткость которого неоднородна и определяется профилем шероховатости и адгезионными свойствами поверхности. В отличие от классической модели вертикальное перемещение вызывается как сжатием, так и сдвигом; зависит от их комбинации и истории нагружения.

Работа выполнена в рамках НИР «Феноменологические модели деформирования и разрушения перспективных материалов и конструкций» и НИР «Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений, критериев прочности и устойчивости процессов деформирования».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саввин А.П. О расчете стыков на высокопрочных болтах по состоянию предельного трения // Строит. механика и расчет сооруж. 1965. № 3.
2. Kulak G.L. et al. Measurement of slip coefficient for grade // ASTM A588 Steel. Univ. of Alberta. 2009. Rep. No. 268. 168 p.
3. Крагельский И. В. Трение, изнашивание и смазка. М.: Машиностроение, 1978.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

5. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
6. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Механика дискретного контакта // в сб.: Механика контактных взаимодействий / под. ред. Воровича И. И., Александрова В. М. М.: Физматлит, 2001. С. 419–437
7. Бородин Ф. М., Мосолов А. Б. Фрактальная шероховатость в контактных задачах // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 786–795.
8. Демкин И. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970.
9. Крагельский И. В. О расчете коэффициента сухого трения по профилограмме поверхностей // Трение и износ в машинах. 1948. Вып. 3. С. 24–36.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально-пластических тел. М.: Иностран. лит., 1956. 398 с.
12. Ушицкий М. У. Пластическое деформирование шероховатой поверхности // ПМТФ. 1978. № 4. С. 183–187.
13. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

Compression and Shear of an Ideal-plastic Wedge with a Rough Stamp (Frictional Contact Model)

A. N. Sakharov^{a, #}, A. U. Riabinina^{a, ##}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: alexandr.sakharov@math.msu.ru,*

^{##}*e-mail: alina.riabinina@math.msu.ru*

The transfer of shear force through frictional contact on rough surfaces of precompressed plastic bodies is studied. As a contact model, we consider the problem of plastic compression of a wedge by a rough flat stamp with the condition of Prandtl friction on the contact surface. A technique is proposed for determining the maximum shear load perceived by frictional contact

Keywords: frictional contact, slip-critical connection, ideal plastic wedge, Prandtl's friction law

REFERENCES

1. Savvin A. P. On the calculation of joints on high-strength bolts based on the state of ultimate friction // Struct. Mech. & Anal. of Constr., 1965, no. 3.
2. Kulak G. L. et al. Measurement of slip coefficient for grade // ASTM A588 Steel. Univ. of Alberta, 2009, Rep. no. 268, 168 p.
3. Kragel'skij I. V. Friction, Wear and Lubrication. Moscow: Mech. Engng, 1978. (in Russian)
4. Rabotnov Yu. N. Solid Mechanics. Moscow: Nauka, 1979. 744 p. (in Russian)
5. Goriacheva I. G. The Mechanics of Frictional Interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
6. Goriacheva I. G., Chekina O. G. Mechanics of discrete contact // in: Mechanics of Contact Interactions / ed. by Vorovich I. I., Alexandrova V. M. Moscow: Fizmatlit, 2001. pp. 419–437. (in Russian)
7. Borodich F. M., Mosolov A. B. Fractal roughness in contact problems // AMM, 1992, vol. 56, no. 5, pp. 786–795.
8. Demkin I. B. Contacting of Rough Surfaces. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)
9. Kragelsky I. V. On calculating the coefficient of dry friction according to the surfaces' profilogram // Friction & Wear in Machines, 1948, iss. 3, pp. 24–36.
10. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon, 1950. 407 p.
11. Prager W., Hodge Ph. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. N.Y.: Wiley, 1951. 398 p.
12. Ushitsky M. U. Plastic deformation of a rough surface // J. Appl. Mech. & Tech. Phys., 1978, no. 4, pp. 183–187.
13. Sokolovsky V. V. Theory of Plasticity. Moscow: Vysshaya Shkola, 1969. 608 p.