

УДК 531.36

О ПЕРВОМ ИНТЕГРАЛЕ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

© 2024 г. Б. Я. Локшин^{1,*}, В. А. Самсонов^{1,**}¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

*e-mail: blokshin@imec.msu.ru,

**e-mail: samson@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 02.02.2024 г.

После доработки 29.02.2024 г.

Принята к публикации 10.03.2024 г.

Обсуждается хорошо забытый специалистами трансцендентный первый интеграл классической задачи внешней баллистики. Подобрана замена переменных, придавшая ему компактный вид, позволивший довести анализ до конструктивных квадратур.

Ключевые слова: внешняя баллистика, первый интеграл, новые переменные, фазовый портрет

DOI: 10.31857/S0032823524020024 EDN: XVFMFK

1. Введение. Классическая задача внешней баллистики – задача о движении тяжелой материальной точки с учетом сопротивления, квадратично зависящего от скорости (рис. 1), сформулирована еще И. Ньютоном. Но уже Л. Эйлер, сообщая об установлении И. Бернулли в этой задаче первого интеграла, выразил удивление тому, что искусный математик Ньютон не заметил этого интеграла [1]. Однако оба они формулировали задачу в декартовых координатах, и соответствующий интеграл имел весьма громоздкий вид, не позволивший ни самому Эйлеру, ни его многочисленным последователям получить конструктивных следствий.

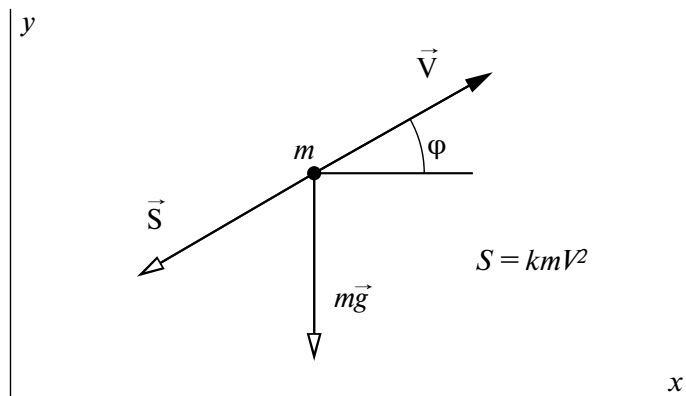


Рис. 1

Обсуждаемая задача редуцируется до системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -g \sin \varphi - kV^2 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{g}{V} \cos \varphi,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где V – скорость материальной точки, φ – угол наклона вектора ее скорости к горизонтали, g – ускорение свободного падения, k – размерный коэффициент сопротивления среды, отнесенный к массе; параметры g и k считаются постоянными.

Прежде всего, обратим внимание, что система (1.1) содержит лишь два параметра: g и k . За счет перехода к нормированным переменным можно избавиться и от этих параметров. Действительно, пусть

$$V = \bar{V}v, \quad t = \frac{\bar{V}}{g}\tau, \quad \bar{V} = \sqrt{\frac{g}{k}}\tag{1.2}$$

(Отметим, что значение \bar{V} задает величину установившейся скорости вертикального спуска тела). Тогда уравнения (1.1) примут вид [2]

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau} &= -\sin \varphi - v^2 \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{v} \cos \varphi\end{aligned}\tag{1.3}$$

Эти уравнения допускают вышеупомянутый трансцендентный первый интеграл в форме

$$\frac{1}{v^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = C\tag{1.4}$$

Аналогичный вид, но содержащий параметры g и k , был получен уже к концу XIX века, что отражено в учебнике П. Аппеля [3].

Отметим также, что в [4] хотя бы упоминается об этом интеграле, но в некоторых учебниках (например, в [5]) о нем нет и речи.

2. Замена переменных. Введем в системе (1.3) естественную (на взгляд авторов) замену переменных [6], хотя до сих пор ее использование в известной литературе авторы не нашли:

$$z = 1/v^2, \quad s = \sin \varphi\tag{2.1}$$

Тогда уравнения (1.3) в области $|s| < 1$ примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= 2\sqrt{z}(1 + sz) \\ \frac{ds}{d\tau} &= -\sqrt{z}(1 - s^2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Эта система имеет одну неподвижную точку $s = -1, z = 1$, отвечающую аналогичной неподвижной точке в системе (1.3). Однако в ней существует дополнительное множество неподвижных точек $z = 0$, которые не имеют физического смысла.

Обратим внимание на следствие из второго уравнения системы (2.2) – координата s монотонно уменьшается от своего начального значения до -1 .

Дальнейший анализ будем проводить в фазовом пространстве переменных (s, z) . Из системы (2.2) следует, казалось бы, уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{2(1+sz)}{1-s^2} \quad (2.3)$$

Именно в этих переменных можно увидеть некоторые замечательные свойства фазовых траекторий. Прежде всего, выпишем общее решение уравнения (2.3) (первый интеграл системы (2.2) в неявном виде)

$$z = (1-s^2) \left(C - \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s} \right) - s \quad (2.4)$$

Как и в (1.4), оно представляет собой семейство функций $z = z(s, s_*, z_*)$, зависящих от координат (s_*, z_*) некоторой начальной точки. Строго говоря, (2.4) содержит лишь один параметр C , и интересно раскрыть его смысл. Видно, что если положить $s_* = 0$, то $C = z_*$. Постоянная интеграла в (2.4) может иметь любой знак, а переменная z — только положительна. Оказывается, что в уравнении (2.3) был потерян множитель \sqrt{z} . Поэтому в его решении (2.4) исчезло множество равновесий $z = 0$. Нижняя полуплоскость области $|s| < 1$ тоже заполнена интегральными кривыми, симметричными относительно начала координат, но эти кривые отражают, так сказать, “мнимую реальность”, поскольку вдоль этих кривых не определен физический смысл изменения координат!

Если в качестве одного из начальных значений принять $z_* = z_0 = 0$ (что отвечает бесконечно большой скорости), то, обозначая соответствующее значение $s_* = s_\infty$, константа C будет зависеть только от параметра s_∞ :

$$C = \frac{s_\infty}{1-s_\infty^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+s_\infty}{1-s_\infty}$$

На рис. 2 представлено это семейство (фазовый портрет), кривые которого образуют универсальную номограмму зависимости фазовых траекторий от s_∞ , не зависящую от параметров исходной задачи.

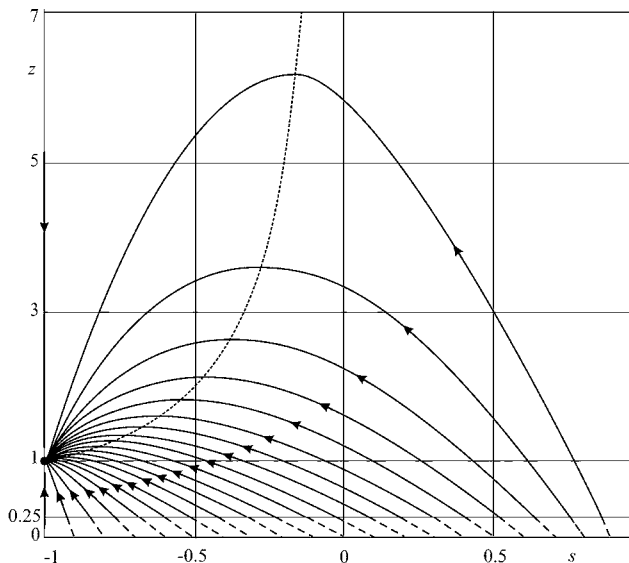


Рис. 2

3. Некоторые свойства фазового портрета. Прежде всего, отметим на этом портрете множества точек, в которых производные фазовых переменных обращаются в ноль. Первое множество, отвечающее равенству $\frac{ds}{d\tau} = 0$, состоит из неподвижной точки $(s = -1, z = 1)$ и трех прямолинейных фазовых траекторий: $(s = 1, z > 0)$, $(s = -1, z > 1)$, $(s = -1, s = -1, 0 < z < 1)$. Второе множество, отвечающее равенству $\frac{dz}{d\tau} = 0$, состоит из множества точек (отмеченного частым пунктиром), отвечающих достижению максимального значения z_m координаты z (минимальному значению скорости V в исходных переменных). Из первого уравнения системы (2.2) следует, что точки последнего множества удовлетворяют уравнению $s_m z_m = -1$.

Отметим, что указанные максимальные значения достигаются при отрицательных значениях s . Это означает, что минимальное значение скорости V достигается только *после* прохождения материальной точкой вершины своей траектории в вертикальной плоскости (на вершине, очевидно, $s = 0$).

На рисунке хорошо видно, что изображающая точка, двигаясь по любой фазовой траектории, войдет в точку $s = -1, z = 1$, то есть все движения материальной точки завершаются на стационарном вертикальном спуске с постоянной скоростью.

Предположим, что (s_*, z_*) — это начальные условия старта. Тогда, очевидно, что отрезок кривой от этой точки до $(0, s_\infty)$ существует лишь виртуально, так сказать, на предыстории движения. На рис. 2 в качестве начальной точки принято значение $z_* = 1/4$ ($v(0) = 2$), соответствующая виртуальная часть выделена пунктиром. Точки с координатами $(0, s_\infty)$ оказываются полезными для анализа. В частности, из рис. 2 следует, что каждому значению $s_m = -1/z_m$ отвечает единственная точка s_∞ , так что s_m является некоторой монотонной функцией от s_∞ . Отметим, что эта функция не зависит от начальных условий и исходных параметров, она носит универсальный характер.

Еще одно удобство состоит в том, что при построении фазового портрета системы (1.3) возникает вопрос [2] определения предельных значений угла φ при $t \rightarrow -\infty$. В предложенном варианте можно задать значение s_∞ и к нему “пристроить” фазовую траекторию, что облегчает проведение глобального параметрического анализа.

Из уравнения (2.3) видно, что наклон $\frac{dz}{ds}$ фазовых траекторий при $z = 0$ не зависит от знака s_∞ . Этот факт легко наблюдается и на рис. 2. Нетрудно показать, что при $z = 0$ вторая производная по s тождественно равна нулю. Это означает, что для достаточно малых значений z имеет место приближенное равенство

$$z \approx -\frac{2(s - s_\infty)}{1 - s_\infty^2}$$

Как можно использовать построенную номограмму? Пусть, например, нам нужна траектория системы (1.1), проходящая через точку (V_1, φ_1) (в частности, это могут быть начальные стартовые условия). Вычисляем по ним значения $z_1 = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{V_1}$, $s_1 = \arcsin \varphi_1$, находим на номограмме эту точку, соответствующую ей кривую и соответствующее значение параметра s_∞ , после чего вычисляем значение $C(s_\infty)$, определяем искомую траекторию из (2.3) сначала в переменных s, z , а затем в исходных переменных V, φ . Рассмотрим для иллюстрации числовой пример. Пусть параметры тела таковы, что $k = 0.00011$, и нас интересует фазовая траектория, проходящая через точку $V_1 = 210$, $\varphi_1 = 0.411$ ($\approx 23^\circ - 24^\circ$). Вычисляем значения

$$z_1 = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{V_1} = 2.04, s_1 = \arcsin \varphi_1 = 0.4$$

На номограмме находим эту точку, соответствующую ей кривую и значение $s_\infty = 0.8$ на ней. Вычисляем $C(s_\infty) \approx 3.32$ и получаем аналитическое выражение $z = (1 - s^2) \left(3.32 - \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s} \right) - s$ искомой фазовой траектории в новых переменных или, если это необходимо, в исходных переменных

$$V^2 = \frac{g}{k} \frac{1}{\cos^2 \varphi \left(3.32 - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) - \sin \varphi}$$

Эту формулу можно было бы получить и непосредственно из (1.1), если воспользоваться первым интегралом в исходных переменных [3]. Такой подход менее удобен для дальнейшего анализа.

4. О траекториях в вертикальной плоскости. Рассмотрим теперь вопрос о траектории материальной точки в вертикальной плоскости. Известно, что эта траектория может быть найдена с помощью квадратур после решения основной задачи внешней баллистики. Соответствующие уравнения в исходных переменных V , φ , t имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \cos \varphi \\ \frac{dY}{dt} &= V \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Введем наряду с (1.2) еще нормированные переменные

$$x = \frac{gX}{V^2} = kX, \quad y = \frac{gY}{V^2} = kY,$$

и кинематические уравнения (4.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= v \cos \varphi \\ \frac{dy}{d\tau} &= v \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

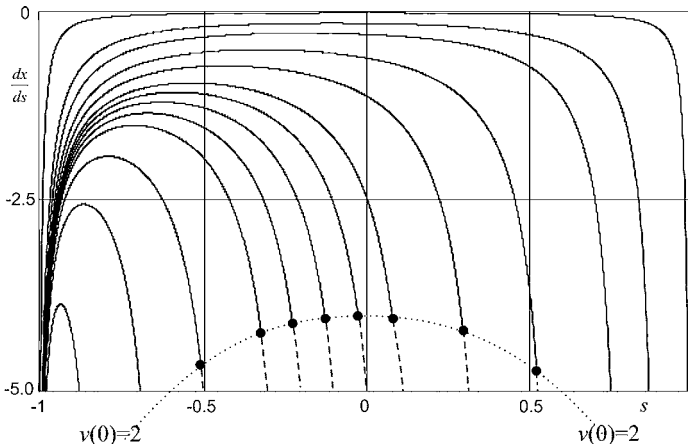


Рис. 3

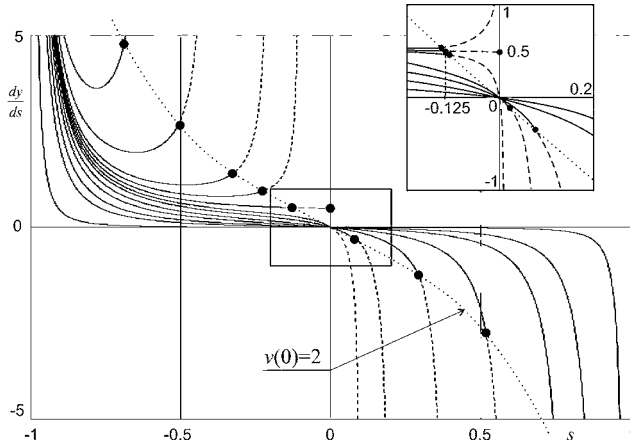


Рис. 4

Нетрудно преобразовать зависимость $z(s)$ в графики зависимостей $v_x(s) = v \cos \varphi = \frac{\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{z(s)}}$ и $v_y(s) = v \sin \varphi = \frac{s}{\sqrt{z(s)}}$, но они непригодны для вычисления квадратур в (4.2).

После замены (2.1) кинематические уравнения примут окончательную форму

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\frac{1}{z(s)\sqrt{1-s^2}} \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{s}{z(s)(1-s^2)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $z(s)$ определяется выражением (2.4); функция $z(s)$ зависит не только от переменной s , но также и от параметра C .

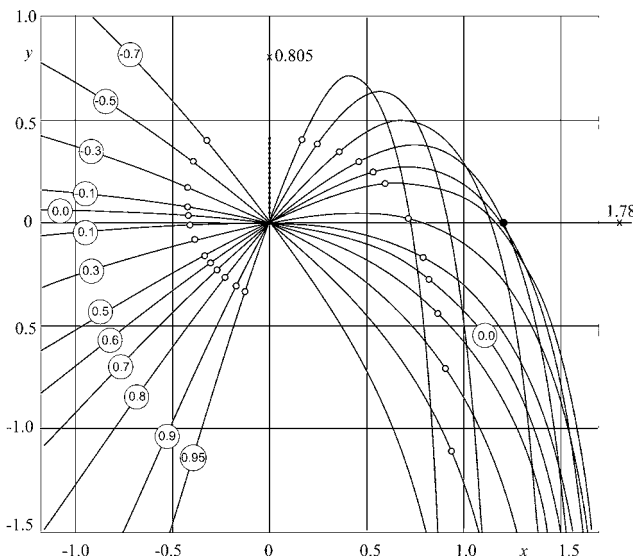


Рис. 5

На рис. 3, 4. приведены графики правых частей системы (4.2).

Эти графики позволяют в принципе осуществлять квадратуры (4.3), так сказать, даже вручную качественно и численно!

Отметим необычное распределение знаков соответствующих величин. Дело в том, что интегрирование этих функций будет осуществляться, так сказать, в обратном направлении, от большего предела к меньшему.

Соответствующие квадратуры вычисляются в любую сторону от любой выбранной начальной точки. Это свойство было использовано авторами настоящей статьи для аппроксимации траектории полета [6] тела даже с учетом переменности коэффициента сопротивления.

Наконец, построим “веер” траекторий движения точки с начальной скоростью $v = 2$ и с различными начальными углами бросания (рис. 5). На левых участках траекторий в кружочках указаны соответствующие значения параметра s_∞ . Кроме того, на траекториях маленькими кружками отмечены точки, в которых скорость v принимает значение 3 (слева) и 1 (справа). Если мы захотим построить такой же веер, но для другой начальной скорости, надо просто сдвинуть каждую траекторию так, чтобы все нужные кружочки собрались в начале координат! Для перевода нормированных значений x и y в натуральные X, Y необходимо использовать коэффициент k .

На осях выделены две точки, на оси y точка $y \approx 0.805$, соответствующая максимальной высоте подъема материальной точки при $s_0 = 1$, на оси x — точка $x \approx 1.2$, обозначающая максимальную горизонтальную дальность, ей отвечает $s_\infty \approx 0.7$, при этом $\varphi(0) \approx 0.689 (\approx 39^\circ)$.

Очевидно, что каждая траектория имеет две асимптоты, одна — “в прошлом”, слева — выше траекторий, вторая — в будущем, вертикальная справа. В [3] основное внимание уделялось именно обоснованию существования этой правой асимптоты. Самая правая из них имеет координату $x_\infty \approx 1.78$, и ей соответствует $s_\infty \approx 0.2$. Все левые асимптоты — прямые, по которым двигалась бы материальная точка при отсутствии тяжести. Они пересекают ось y , на этой оси **полужирными** точками выделен тот ее участок, который пересекается асимптотами построенных траекторий.

Выводы. Представленные в настоящей статье свойства классической задачи внешней баллистики позволяют использовать их для построения оценок траекторий движения объекта в различных практических задачах. В принципе все отмеченные вычислительные процедуры могли быть реализованы вручную уже во времена Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонард Эйлер.* Исследования по баллистике. М.: ГИФМЛ, 1961. 590 с.
2. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. М.: Изд-во МГУ, 2012. 237 с.
3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1960, 515 с.
4. *Чернозубов А.Д., Кириченко В.Д., Разин И.И. и др.* Внешняя баллистика. Т. 1. М.: ВАИА им. Ф.Э. Держинского, 1954. 463 с.
5. *Гуськов А.В., Милевский К.Е., Сотенко А.В.* Внешняя баллистика. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 188 с.
6. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Об аппроксимации траектории полета баллистического объекта // Изв. РА РАН. 2023. № 3. С. 38–43.

About the First Integral in the Classical Problem of External Ballistics**B. Ya. Lokshin^{a,#}, V. A. Samsonov^{a,##}**^a*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*[#]*e-mail: blokshin@imec.msu.ru,*^{##}*e-mail: samson@imec.msu.ru*

The transcendental first integral of the classical problem of external ballistics has been retrieved from oblivion. A change of variables was proposed that transformed the integral to a compact form. This allowed for reducing the solution of the problem to constructive quadratures.

Keywords: external ballistics, first integral, new variables, phase portrait

REFERENCES

1. *Leonhard Euler*: Ballistics Studies. Moscow: GIFML, 1961. 590 p. (in Russian)
2. *Lokshin B.Ya., Samsonov V.A.* The Problem of the Motion of a Body in a Resisting Medium. Qualitative Analysis. Moscow: MSU, 2012. (in Russian)
3. *Appell P.* Theoretical Mechanics. Vol. 1. Moscow: Fizmatlit, 1960.
4. *Chernozubov A.D., Kirichenko V.D., Razin I.I. et al.* External Ballistics. Vol. 1. Moscow: Dzerzhinsky VAIA Pub., 1954. 463 p.
5. *Guskov A.V., Milevsky K.E., Sotenko A.V.* External Ballistics. Novosibirsk: NSTU Pub., 2010. 188 p.
6. *Lokshin B.Ya., Samsonov V.A.* On the approximation of the flight path of a ballistic object // *Izv. RAN*, 2023, no. 3, pp. 38–43.