

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРОЧНЕНИЯ ПОЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЗАГОТОВОК С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО И ТЕМПЕРАТУРНОГО АВТОФРЕТИРОВАНИЯ

© 2024 г. А. Н. Прокудин^{1,*}

¹Институт машиноведения и металлургии Хабаровского ФИЦ ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия
*e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Поступила в редакцию 06.10.2023 г.

После доработки 21.01.2024 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Исследуется распределение остаточных и эксплуатационных напряжений в полых сферической заготовке, предварительно упрочненной с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования. Постановка задачи основана на теории малых упругопластических деформаций, условия пластичности Треска или Мизеса, ассоциированном законе течения и законе линейного изотропного упрочнения. При разгрузке материал сферы может проявлять эффект Баушингера. Все механические и теплофизические параметры считаются независимыми от температуры. Найдены точные аналитические решения для стадии нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение. Установлены значения технологических параметров, при которых эффект упрочнения достигается вблизи внутренней поверхности сферы. Анализ полученных результатов показал, что использование положительного градиента температуры позволяет повысить абсолютную величину остаточных напряжений на внутренней поверхности сферы. С другой стороны, с помощью отрицательного градиента можно добиться снижения эксплуатационных напряжений в сфере.

Ключевые слова: автофретирование, сфера, упругопластические деформации, температурные напряжения, малые деформации, линейное изотропное упрочнение, эффект Баушингера

DOI: 10.31857/S0032823524010091 EDN: YUEIPQ

1. Введение. Технология автофретирования [1, 2] предназначена для упрочнения полых деталей цилиндрической и сферической формы и обычно состоит из одного цикла нагрузки-разгрузки. На первой стадии заготовка нагружается с тем расчетом, чтобы некоторая ее часть вблизи внутренней поверхности или вся заготовка в целом перешла в пластическое состояние. В ходе разгрузки в окрестности внутренней поверхности заготовки формируется поле остаточных напряжений, причем тангенциальные напряжения являются сжимающими, что положительно влияет на прочностные характеристики детали. Кроме повышения диапазона рабочих нагрузок, заметно улучшаются трещиностойкость, сопротивление коррозии и долговременная прочность. В зависимости от природы нагрузки различают несколько видов автофретирования: гидравлическое [3], взрывное [4], температурное [5], ротационное [6] и автофретирование протяжкой [7]. Подробный обзор

теоретических и экспериментальных работ, посвященных автофретированию, опубликован в [1, 2].

Помимо перечисленных разновидностей автофретирования [3–7] предложен ряд комбинированных методов [8, 9], в которых основное нагружающее усилие дополняется действием температурного градиента. С помощью конечно-элементного анализа установлено [8], что комбинация гидравлического и температурного автофретирования существенно увеличивает максимальное рабочее давление в полый цилиндрической трубе по сравнению с чисто гидравлическим методом. Как следствие, присутствие температурного градиента позволяет достичь одинакового уровня упрочнения заготовки при использовании меньшего давления. Следует отметить, что выраженный положительный эффект достигается даже при достаточно умеренной величине температурного градиента. Аналогичные выводы получены при численном моделировании комбинации ротационного и температурного автофретирования [9]: температурный градиент позволяет снизить скорость вращения заготовки при сохранении степени упрочнения. Кроме того, комбинированный метод позволяет сформировать после разгрузки сжимающие осевые напряжения вблизи внутренней поверхности цилиндра [9] в то время, как при ротационном автофретировании эти напряжения всегда являются растягивающими [10].

Основная масса работ в области автофретирования посвящена изучению деталей цилиндрической геометрии. Автофретирование деталей сферической формы рассматривается значительно реже, несмотря на их широкое применение в машиностроении. Изучалось [11] гидравлическое автофретирование полый сферы с учетом изотропного упрочнения и эффекта Баушингера; в ряде частных случаев авторами получены аналитические решения для напряженно-деформированного состояния сферы в ходе нагрузки и после разгрузки. Работа [12] посвящена оптимизации процесса гидравлического автофретирования полый сферы с целью минимизации эксплуатационных напряжений при известном рабочем давлении. Повторное автофретирование сферических заготовок изучалось в [13]. Было установлено, что второй цикл нагрузки–разгрузки позволяет повысить уровень остаточных сжимающих напряжений и максимальное рабочее давление. Более сложные модели упругопластических материалов, включающие нелинейное изотропное упрочнение, использовались [14, 15] для расчета процесса автофретирования. Достаточно близкое отношение к теме настоящей статьи имеет работа [16], в которой рассматривается полая сфера под действием внутреннего и внешнего давления. Авторами [16] получено приближенное аналитическое решение для произвольных условия текучести и законов изотропного упрочнения на стадии нагрузки/разгрузки. Рассматривалось [17] влияние повреждаемости материала на распределение остаточных напряжений в сфере в результате гидравлического автофретирования. Задача восстановления поля остаточных напряжений после упрочнения сферы при наличии ограниченных экспериментальных данных поставлена и решена в [18]. Авторы [19] использовали градиентную теорию пластичности для оценки влияния размерных эффектов на процесс автофретирования полый сферической заготовки.

Разумеется, для упрочнения сферических деталей кроме гидравлического [11–19] может использоваться и температурное автофретирование. Упругопластический анализ полый сферы из идеального материала под действием температурного градиента для стадий нагрузки и разгрузки представлен в [20]. Схожая проблема также рассматривалась для линейно [21] и нелинейно упрочняемого [22] материала. Задача оптимизации толщины сферической оболочки при сохранении ее несущей способности с помощью температурного автофретирования рассматривалась в [23, 24]. Исследовалось [25] термоупругопластическое деформирование многослойного шара при последовательном присоединении к его внешней поверхности предварительно разогретых слоев. Необратимое деформирование полого сферического слоя в ус-

ловиях вязкоупругопластического течения изучалось в работах [26–29]. Авторы [30] исследовали влияние, которое оказывает направление температурного градиента на упругопластический отклик и распределение остаточных напряжений в сфере.

Приведенный выше обзор показывает, что автофретирование деталей сферической формы привлекает значительное внимание исследователей. В то же время следует отметить, что возможности упрочнения сферических заготовок с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования ранее не изучались. Настоящая работа призвана заполнить этот пробел. Предполагается, что традиционный процесс гидравлического автофретирования дополняется действием стационарного температурного градиента. Материал сферы деформируется в соответствии с законом линейного изотропного упрочнения. Кроме того, в ходе разгрузки может возникнуть повторное пластическое течение, для расчета которого в модель упрочнения включен эффект Баушингера.

2. Постановка задачи. Рассматривается полая сфера, внутренний и внешний радиусы которой равны r_{in} и r_{out} соответственно. На стадии нагрузки в сфере присутствует неоднородное стационарное температурное поле, вызванное разностью температур на внутренней и внешней поверхностях. К внутренней поверхности сферы приложено давление, которое монотонно возрастает с течением времени от 0 до некоторого P_a . При разгрузке температурное поле в сфере однородно, а внутреннее давление медленно убывает до нуля. Предполагается, что в ходе эксплуатации сферическая деталь нагружается только внутренним давлением. Все механические и теплофизические параметры материала считаются независимыми от температуры.

Для решения используется сферическая система координат (r, θ, φ) , и предположение, что состояние сферической симметрии сохраняется в течение всего процесса. При таких допущениях u_r является единственным ненулевым перемещением. Для удобства введены следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{r_{in}}{r_{out}}, \beta = \frac{r}{r_{out}}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_t}, \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_t}, \bar{P} = \frac{P}{\sigma_t}, \bar{u} = \frac{E}{\sigma_t} \frac{u_r}{r_{out}} \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{E}{\sigma_t} \varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{E}{\sigma_t} \varepsilon_{ij}^e, \bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{E}{\sigma_t} \varepsilon_{ij}^p, \bar{T} = \frac{T}{T_0} - 1, \bar{\alpha} = \frac{E}{\sigma_t} T_0 \alpha, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ_{ij} — напряжения, σ_t, σ_y — начальный/актуальный предел текучести при одноосном растяжении, P — давление, приложенное к внутренней поверхности сферы, E — модуль Юнга, $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ — полные, упругие и пластические деформации соответственно, T — температура, T_0 — отсчетная температура, α — коэффициент линейного теплового расширения. Далее в тексте статьи, если не сказано иное, используются переменные (2.1), а знак подчеркивания для краткости опущен.

В силу сформулированных выше допущений касательные напряжения в сфере равны нулю, а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\sigma'_{rr} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})\beta^{-1} = 0, \quad (2.2)$$

здесь и далее штрих обозначает производную по координате β .

Предполагается, что внутреннее давление и температурный градиент не слишком высоки и геометрически-линейная теория справедлива с необходимой степенью точности. Тогда кинематические соотношения запишутся следующим образом

$$\varepsilon_{rr} = u', \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = u\beta^{-1} \quad (2.3)$$

Полные деформации представляют собой сумму упругих, пластических и температурных деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^t \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^t, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^t\end{aligned}\quad (2.4)$$

Закон Гука связывает напряжения и обратимые деформации в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left((1-\nu)\varepsilon_{rr}^e + \nu\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - (1+\nu)\alpha T \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left(\nu\varepsilon_{rr}^e + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}^e + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi}^e - (1+\nu)\alpha T \right),\end{aligned}\quad (2.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Условия пластичности Треска и Мизеса сводятся к условию

$$|\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = \sigma_y, \quad (2.6)$$

в котором предел текучести σ_y определяется линейным законом изотропного упрочнения [31]

$$\sigma_y = 1 + H\varepsilon_{eq}^p, \quad (2.7)$$

где ε_{eq}^p — эквивалентная пластическая деформация.

Далее в статье используются следующие дополнительные ограничения на параметры задачи: $\delta \geq \frac{1}{2}$, $\nu > 0$, $H \geq 0$. Кроме того, предполагается, что действия только температурного градиента недостаточно для начала пластического течения в сфере.

Приращения пластических деформаций вычисляются в соответствии с ассоциированным законом течения

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad (2.8)$$

где $d\varepsilon_{ij}^p$ — приращения пластических деформаций, $d\lambda$ — положительный множитель, f — пластический потенциал, соответствующий условию (2.6).

Приращение эквивалентной пластической деформации $d\varepsilon_{eq}^p$ определяется законом

$$\sigma_y d\varepsilon_{eq}^p = \sigma_{rr} d\varepsilon_{rr}^p + \sigma_{\theta\theta} d\varepsilon_{\theta\theta}^p + \sigma_{\varphi\varphi} d\varepsilon_{\varphi\varphi}^p \quad (2.9)$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{rr}(\delta) = -P, \quad \sigma_{rr}(1) = 0 \quad (2.10)$$

В свою очередь, граничные условия по температуре задаются следующим образом

$$T(\delta) = T_{in}, \quad T(1) = T_{out}, \quad (2.11)$$

где T_{in} и T_{out} — температура внутренней и внешней поверхности сферы.

Решая стационарное уравнение теплопроводности с учетом граничных условий (2.11), нетрудно получить распределение температуры

$$T(\beta) = T_{in} + \frac{\delta}{1-\delta}(\delta^{-1} - \beta^{-1})\Delta, \quad (2.12)$$

где $\Delta = T_{out} - T_{in}$.

3. Упругое равновесие и начало пластического течения. Рассмотрим напряженное состояние сферы до начала пластического течения ($\varepsilon_{ij}^p = 0$). Соотношения (2.5) преобразуются к форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left((1-\nu)u' + 2\nu u\beta^{-1} - (1+\nu)\alpha T \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ &\times \left(\nu u' + u\beta^{-1} - (1+\nu)\alpha T \right) \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2.2) с учетом предыдущих соотношений запишется следующим образом

$$u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T'$$

Решение полученного выше уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{2}d_1\beta^{-2} + (1-2\nu)d_2\beta + \alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}J(\beta)\beta^{-2} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{d_1}{\beta^3} + d_2 - \frac{2\alpha}{1-\nu}J(\beta)\beta^{-3} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{d_1}{2\beta^3} + d_2 + \\ &+ \frac{\alpha}{1-\nu}J(\beta)\beta^{-3} - \frac{\alpha}{1-\nu}T(\beta) \\ J(\beta) &= \int T\beta^2 d\beta = \frac{2\beta - 3\delta}{6(1-\delta)}\Delta\beta^2 + \frac{T_{in}}{3}\beta^3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где d_1, d_2 — константы интегрирования.

Из граничных условий (2.10) следует

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \frac{\alpha \delta^3}{(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta \\
 d_2 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \\
 &+ \frac{\alpha(2 + \delta)}{3(1 + \delta + \delta^2)(1 - \nu)} \Delta + \frac{2\alpha}{3(1 - \nu)} T_{in}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Итоговое распределение напряжений в сфере до наступления пластического течения следует из (3.1) и (3.2)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -\frac{\delta^3(1 - \beta^3)}{\beta^3(1 - \delta^3)} P + \\
 &+ \alpha \delta \frac{(1 - \beta)(\beta - \delta)(\beta + \delta + \beta\delta)}{\beta^3(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta \\
 \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\delta^3(1 + 2\beta^3)}{2\beta^3(1 - \delta^3)} P + \\
 &+ \alpha \delta \frac{(\delta^2 + (1 + \delta + \delta^2)\beta^2 - 2(1 + \delta)\beta^3)}{2\beta^3(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку эксплуатационной нагрузкой для сферы принято внутреннее давление, то для достижения эффекта упрочнения необходимо выполнение следующих условий: пластическое деформирование происходит вблизи внутренней поверхности сферы, а напряжения в пластической области удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$. Если оба этих условия справедливы, то после разгрузки на месте пластической области формируется поле напряжений такое, что $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$, и поскольку в разгруженном состоянии $\sigma_{rr}(\delta) = 0$, то остаточные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ будут сжимающими. Однако известно [32], что в зависимости от параметров задачи δ, ν, P, Δ в сфере возможно появление одной или двух пластических областей, соответствующих разным формам условия пластичности (2.6). Далее необходимо определить условия, при которых пластическое течение в сфере зарождается на поверхности $\beta = \delta$ и в соответствии с условием $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$.

Вначале найдем значение температурного градиента Δ_0 , соответствующее началу пластического течения, в отсутствии внутреннего давления ($P = 0$). Рассмотрим разность напряжений (3.3)

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\alpha \delta (3\delta^2 \beta^{-3} - (1 + \delta + \delta^2) \beta^{-1})}{2(1 - \delta^3)(1 - \nu)} \Delta \tag{3.4}$$

Используя стандартные методы математического анализа, нетрудно показать, что знак производной от разности (3.4) противоположен знаку температурного градиен-

та Δ , и указанная производная имеет нулевое значение в некоторой точке $\beta^* \in [\delta, 1]$, только если $\delta < \frac{1}{16}(1 + \sqrt{33}) \approx 0.42$. Также нетрудно убедиться, что модуль разности напряжений (3.16) достигает максимума на внутренней поверхности сферы $\beta = \delta$. Отсюда найдем абсолютное значение градиента, соответствующее началу течения

$$\Delta_0 = \frac{2(1 + \delta + \delta^2)(1 - \nu)}{\alpha(2 + \delta)} \quad (3.5)$$

Заметим, что если $\Delta > 0$, то течение начинается в соответствии с условием $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$, а в противном случае — при условии $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 1$, но точка ($\beta = \delta$), в которой начинается пластическое течение, не меняется. Далее предполагаем, что действия только температурного градиента недостаточно для зарождения пластического течения в сфере, откуда следует ограничение на температурный градиент

$$|\Delta| < \Delta_0 \quad (3.6)$$

Рассмотрим общий случай $P > 0$. Поле напряжений представляет собой сумму механических напряжений, вызванных действием внутреннего давления, и температурных напряжений. Нетрудно убедиться, что механические напряжения всегда удовлетворяют неравенству $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, а максимум разности $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ достигается на внутренней поверхности сферы. С другой стороны, температурные напряжения в сфере удовлетворяют неравенствам $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ и $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$. Очевидно, что с увеличением внутреннего давления P область $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta}$ уменьшается, как и величина разности $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ в ней. Поэтому при выполнении неравенства (3.6) началу пластического течения всегда будет соответствовать условие $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$. Если $\Delta > 0$, то максимум и температурной, и механической составляющей разности напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ достигается на внутренней поверхности сферы, где и начнется пластическое течение. Из (3.3) найдем внутреннее давление, соответствующее началу течения

$$P_0 = \frac{2}{3}(1 - \delta^3) - \alpha \frac{(1 - \delta)(2 + \delta)}{3(1 - \nu)} \Delta \quad (3.7)$$

Если $\Delta < 0$, то в общем случае разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ может достигать максимума как на внутренней или внешней поверхности, так и внутри сферы. Найдем условия, при которых пластическое течение будет начинаться на внутренней поверхности сферы. Рассмотрим величину $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ при $P = P_0$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})|_{P=P_0} = \\ &= \frac{\delta^3}{\beta^3} - \frac{\alpha\delta}{2(1 - \delta)(1 - \nu)} \frac{\beta^2 - \delta^2}{\beta^3} \Delta \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы предыдущее выражение монотонно убывало с увеличением координаты β . Найдем производную

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= \frac{\alpha\delta\Delta}{2(1 - \delta)(1 - \nu)} \beta^{-2} - \\ &- \frac{3\delta^3(\alpha\Delta + 2(1 - \delta)(1 - \nu))}{2(1 - \delta)(1 - \nu)} \beta^{-4} \end{aligned}$$

После преобразований условие $\sigma'_0 < 0$ сводится к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \Delta &> \frac{6(1-\delta)(1-\nu)}{\alpha(\beta^2 - 3\delta^2)} \delta^2 \geq \\ &\geq -\frac{3(1-\delta)(1-\nu)}{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда окончательно

$$\Delta > -\frac{3(1-\delta)(1-\nu)}{\alpha} \quad (3.8)$$

Подведем итог: если ограничения (3.6) и (3.8) на температурный градиент выполняются, то пластическое течение в сфере начинается на ее внутренней поверхности ($\beta = \delta$) при условии пластичности $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 1$, а соответствующее давление P_0 определяется выражением (3.7).

4. Уругопластическое деформирование. Сфера состоит из внутренней пластической и внешней упругой областей, граница между которыми обозначена как β_{ep} . В пластической области справедливо неравенство $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{rr}$. Из сферической симметрии и законов (2.8), (2.9) следует

$$\varepsilon_{\theta\theta}^p = \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \quad \varepsilon_{rr}^p = -2\varepsilon_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = -\varepsilon_{rr}^p = 2\varepsilon_{\theta\theta}^p$$

Отсюда закон Гука (2.5) с учетом (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{(1-\nu)u' + 2\nu u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{1+\nu} - \frac{\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\nu u' + u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \\ &- \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{1+\nu} - \frac{\alpha T}{1-2\nu} \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (2.2) с учетом вышеприведенных соотношений запишется следующим образом

$$\begin{aligned} u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} &= \\ = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T' - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(3\varepsilon_{\varphi\varphi}^p \beta^{-1} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{p'} \right) \end{aligned}$$

Общее решение полученного выше уравнения и распределение напряжений в пластической области имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{2} c_1 \beta^{-2} + (1-2\nu) c_2 \beta + \\ &+ \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} J(\beta) \beta^{-2} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} Y(\beta) \beta \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -c_1\beta^{-3} + c_2 - 2\alpha \frac{J(\beta)}{1-\nu} \beta^{-3} - \frac{Y(\beta)}{1-\nu} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{c_1}{2}\beta^{-3} + c_2 - \frac{\alpha T}{1-\nu} + \\ &+ \alpha \frac{J(\beta)}{1-\nu} \beta^{-3} - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{2(1-\nu)} - \frac{Y(\beta)}{1-\nu} \\ Y(\beta) &= \int \varepsilon_{eq}^p \beta^{-1} d\beta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования.

Далее преобразуем условие пластичности $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_y$ с помощью (2.7) и (4.1) и в результате получим уравнение относительно эквивалентной пластической деформации

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}c_1\beta^{-3} - \frac{\alpha T}{1-\nu} + 3\alpha \frac{J(\beta)}{1-\nu} \beta^{-3} - \\ - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{2(1-\nu)} = 1 + H\varepsilon_{eq}^p, \end{aligned}$$

решение которого представлено ниже

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eq}^p = \left(\begin{aligned} &-2(1-\nu) + 3(1-\nu)c_1\beta^{-3} + \\ &+ 6\alpha\beta^{-3}J(\beta) - 2\alpha T(\beta) \end{aligned} \right) \times \\ \times (1 + 2H(1-\nu))^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решение (4.1) и (4.2) справедливо для любого температурного распределения (разумеется, в пластической области должно выполняться неравенство $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$). С помощью известного температурного распределения (2.12) найдем функцию $Y(\beta)$

$$\begin{aligned} Y(\beta) = - \left(\begin{aligned} &(1-\nu)(2\ln\beta + c_1\beta^{-3}) - \\ &- \alpha \frac{\delta}{1-\delta} \Delta\beta^{-1} \end{aligned} \right) \times \\ \times (1 + 2H(1-\nu))^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Константы c_1, c_2 в пластической области могут быть найдены из следующих соображений. Во-первых, на внутренней поверхности сферы должно выполняться первое из граничных условий (2.10). Во-вторых, пластические деформации на упругопластической границе равны нулю. Решение системы уравнений $\sigma_{rr}^{pl}(\delta) = -P, \varepsilon_{eq}^p(\beta_{ep}) = 0$ относительно c_1, c_2 имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3}\beta_{ep}^2 \left(2\beta_{ep} + \frac{\alpha\delta}{(1-\delta)(1-\nu)} \Delta \right) \\ c_2 &= -P + \frac{2\alpha(1-H(1-\nu)(1-\delta^{-2}\beta_{ep}^2))}{3(1-\nu)(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} \Delta + \\ &+ \frac{4H(1-\nu)\delta^{-3}\beta_{ep}^3 - 6\ln\delta}{3(1+2H(1-\nu))} + \frac{2\alpha T_{in}}{3(1-\nu)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Окончательно распределение напряжений и пластических деформаций в пластической области с учетом (4.1)–(4.4) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -P + \frac{4H(1-\nu)\beta_{ep}^3(\delta^{-3} - \beta^{-3}) - 6\ln(\delta\beta^{-1})}{3(1+2H(1-\nu))} - \\ &\quad - \frac{2H\alpha\Delta(3(1-\delta\beta^{-1}) + \beta_{ep}^2(\delta\beta^{-3} - \delta^{-2}))}{3(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + \frac{3+2H(1-\nu)\beta_{ep}^3(2\delta^{-3} + \beta^{-3}) - 6\ln(\delta\beta^{-1})}{3(1+2H(1-\nu))} - \\ &\quad - \frac{H\alpha\Delta(3(2-\delta\beta^{-1}) - \beta_{ep}^2(2\delta^{-2} + \delta\beta^{-3}))}{3(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} \\ \varepsilon_{eq}^p &= \frac{\alpha\delta\Delta}{(1-\delta)(1+2H(1-\nu))}(\beta_{ep}^2\beta^{-3} - \beta^{-1}) + \frac{2(1-\nu)}{1+2H(1-\nu)}(\beta_{ep}^3\beta^{-3} - 1)\end{aligned}\quad (4.5)$$

В упругой области решение (3.1) остается справедливым, а константы d_1, d_2 определяются из условий $\sigma_{\theta\theta}^{el}(\beta_{ep}) - \sigma_{rr}^{el}(\beta_{ep}) = 1$, $\sigma_{rr}^{el}(1) = 0$. Первое условие обеспечивает выполнение условия пластичности (2.6) на упругопластической границе, а второе соответствует второму из граничных условий (2.10). Решая данную систему условий, найдем

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{1}{3} \left[2\beta_{ep}^3 + \frac{\alpha\delta\beta_{ep}^2}{(1-\delta)(1-\nu)}\Delta \right] \\ d_2 &= \frac{1}{3} \left[2\beta_{ep}^3 + \alpha \frac{2 - (3 - \beta_{ep}^2)\delta}{(1-\delta)(1-\nu)}\Delta + \frac{2\alpha}{1-\nu}T_{in} \right]\end{aligned}\quad (4.6)$$

В итоге из (3.1) и (4.6) следует распределение напряжений в упругой области

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2}{3}\beta_{ep}^3(1 - \beta^{-3}) + \frac{\alpha\delta\Delta}{3(1-\delta)(1-\nu)} \times \\ &\quad \times (\beta_{ep}^2(1 - \beta^{-3}) - 3(1 - \beta^{-1})) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}\beta_{ep}^3(2 + \beta^{-3}) + \frac{\alpha\delta\Delta}{6(1-\delta)(1-\nu)} \times \\ &\quad \times (\beta_{ep}^2(2 + \beta^{-3}) - 3(2 - \beta^{-1}))\end{aligned}\quad (4.7)$$

Координата β_{ep} определяется из условия непрерывности перемещения на упругопластической границе $u^{pl}(\beta_{ep}) = u^{el}(\beta_{ep})$, где верхние индексы "pl" и "el" обозначают пластическую и упругую области соответственно. Данное уравнение является трансцендентным и может быть решено численными методами. Кроме того,

из уравнения следует полезная зависимость внутреннего давления от координаты упругопластической границы

$$P = - \frac{\alpha \Delta \left[2\delta \beta_{ep}^{-1} + 6H(1-\delta)(1-\nu) - 3\delta + (\delta - 2H(\delta^{-2} - \delta))(1-\nu) \right] \beta_{ep}^2}{3(1-\nu)(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} + \frac{2 - (2 + 4H(1-\delta^{-3})(1-\nu))\beta_{ep}^3 - 6\ln(\delta\beta_{ep}^{-1})}{3(1+2H(1-\nu))}, \quad (4.8)$$

из которой, в свою очередь, можно найти предельное давление P_1 , соответствующее полному переходу сферы в пластическое состояние

$$P_1 = \frac{2}{1+2H(1-\nu)} \times \left[\frac{2H}{3\delta^3} (1-\delta^3)(1-\nu) - \ln\delta + \frac{H\alpha}{3\delta^2} (1-\delta)(1+2\delta)\Delta \right] \quad (4.9)$$

Интересно отметить, что в частном случае $H = 0$ (идеальный упругопластический материал) предельное давление (4.9) является функцией только геометрического параметра δ .

С увеличением внутреннего давления P в упругой области возможно зарождение и второй пластической области. Однако, повторяя рассуждения из предыдущего раздела, нетрудно доказать, что при выполнении ограничений (3.6) и (3.8) на температурный градиент пластическое течение будет происходить только в одной области.

5. Остаточные напряжения и повторное пластическое течение. В ходе разгрузки с тела вначале снимается температурный градиент, после чего внутреннее давление P медленно снижается от P_a до нуля. В силу того, что действия только температурного градиента недостаточно для зарождения пластического течения в сфере, то его снятие приводит к незначительному снижению напряжений в соответствии с упругим законом. Далее подробно рассматривается снижение внутреннего давления.

Первоначально сфера вновь ведет себя как упругое тело, но уже с накопленными пластическими деформациями. Кроме того, при определенных условиях в сфере возможно повторное пластическое течение. В дальнейших рассуждениях механические параметры материала ν, E, H предполагаются независимыми от накопленной пластической деформации. Вначале рассмотрим упругую составляющую разгрузки. Введем следующие обозначения

$$\hat{\beta}_{ep} = \beta_{ep}(P = P_a), \quad \hat{\varepsilon}_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p(P = P_a),$$

где $\hat{\beta}_{ep}$ — максимальная координата упругопластической границы, $\hat{\varepsilon}_{eq}^p$ — пластические деформации, накопленные в процессе нагрузки. С помощью третьего из соотношений (4.5) найдем

$$\hat{\varepsilon}_{eq}^p = \frac{1}{1+2H(1-\nu)} \times \left[\frac{\alpha\delta\Delta}{1-\delta} (\hat{\beta}_{ep}^2 \beta^{-3} - \beta^{-1}) + 2(1-\nu) (\hat{\beta}_{ep}^3 \beta^{-3} - 1) \right]$$

Давление P_a , необходимое для продвижения области пластического течения до точки $\hat{\beta}_{ep}$, определяется с помощью (4.8).

Сфера состоит из двух областей: во внутренней области $\beta \in [\delta, \hat{\beta}_{ep}]$ происходило пластическое течение, а во внешней $\beta \in [\hat{\beta}_{ep}, 1]$ деформирование было чисто упругим. Разделение деформаций (2.4) во внутренней области примет вид

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}^p, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \hat{\varepsilon}_{zz}^p \quad (5.1)$$

Физические соотношения (2.5) с учетом (5.1) запишутся как

$$\sigma_{rr} = \frac{(1-\nu)u' + 2\nu u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p}{1+\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\nu u' + u\beta^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p}{1+\nu}$$

Далее уравнение равновесия (2.2) с учетом предыдущих соотношений преобразуется к форме

$$u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(3\hat{\varepsilon}_{eq}^p\beta^{-1} + \hat{\varepsilon}_{eq}^{p'} \right)$$

Из решения предыдущего уравнения следует

$$u = \frac{1+\nu}{2}d_3\beta^{-2} + (1-2\nu)d_4\beta - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\hat{Y}(\beta)\beta$$

$$\sigma_{rr} = -d_3\beta^{-3} + d_4 - \frac{\hat{Y}(\beta)}{1-\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_3}{2}\beta^{-3} + d_4 - \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p}{2(1-\nu)} - \frac{\hat{Y}(\beta)}{1-\nu} \quad (5.2)$$

$$\hat{Y}(\beta) = -\frac{\alpha\delta\Delta\left(\hat{\beta}_{ep}^2\beta^{-3} - 3\beta^{-1}\right)}{3(1-\delta)(1+2H(1-\nu))} - \frac{2(1-\nu)\left(\hat{\beta}_{ep}^3\beta^{-3} + 3\ln\beta\right)}{3(1+2H(1-\nu))}$$

где d_3, d_4 — константы интегрирования.

Во внешней области $\beta \in [\hat{\beta}_{ep}, 1]$ решение имеет вид

$$u = \frac{1+\nu}{2}d_5\beta^{-2} + (1-2\nu)d_6\beta$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{d_5}{\beta^3} + d_6 \quad (5.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_5}{2\beta^3} + d_6$$

В (5.2) и (5.3) d_3, d_4, d_5, d_6 — константы интегрирования, которые вычисляются из граничных условий (2.10) и условий непрерывности в точке $\beta = \hat{\beta}_{ep}$ вида $u^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) = u^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep})$, $\sigma_{rr}^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) = \sigma_{rr}^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep})$, где верхний индекс «unl» обозначает область упругой разгрузки. Решая перечисленные уравнения, найдем

$$\begin{aligned}
 d_3 = d_5 = d_6 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \\
 &+ \frac{\alpha \delta (\hat{\beta}_{ep} - \delta)^2 (1 + 2\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1})}{C} \Delta + \\
 &+ \frac{2 \left(\hat{\beta}_{ep}^3 - \delta^3 + 3\delta^3 \ln(\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1}) \right)}{D} \\
 d_4 &= \frac{\delta^3}{1 - \delta^3} P + \frac{\alpha \delta \left(2\hat{\beta}_{ep}^{-1} + (\hat{\beta}_{ep}^2 - 3\delta^2) \right)}{C} \Delta - \\
 &- \frac{2 \left(1 - \hat{\beta}_{ep}^3 + 3 \ln \hat{\beta}_{ep} - 3\delta^3 \ln \delta \right)}{D} \\
 C &= 3(1 - \delta)^2 (1 + \delta + \delta^2) (1 + 2H(1 - \nu)) (1 - \nu) \\
 D &= 3(1 - \delta^3) (1 + 2H(1 - \nu))
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Соотношения (5.2)—(5.4) описывают упругую разгрузку сферы. Однако при достаточной большой толщине сферы или высоком давлении автофретирования P_a в ходе разгрузки возможно повторное (или обратное) пластическое течение. Также известно, что многие конструкционные материалы в той или иной степени проявляют эффект Баушингера, заключающийся в снижении предела текучести при сжатии после предварительного пластического деформирования на растяжение (и наоборот). Повторное пластическое течение и эффект Баушингера в совокупности значительно снижают абсолютную величину остаточных напряжений. Для количественной оценки эффекта Баушингера обычно вводят коэффициент k_{bef} , равный отношению предела текучести σ_c при сжатии к пределу текучести σ_t на растяжение. Данный коэффициент в первую очередь зависит от величины пластической деформации, накопленной при нагрузке. Экспериментальные исследования ряда материалов выявили характерную зависимость, согласно которой с увеличением пластической деформации коэффициент k_{bef} достаточно быстро стремится к некоторому предельному значению [33—35]. В рассматриваемой задаче повторное пластическое течение будет происходить в относительно небольшой области (по сравнению с областью течения при нагрузке) вблизи внутренней поверхности сферы, где накопленные пластические деформации максимальны. Поэтому коэффициент k_{bef} для простоты принимается постоянной величиной, независимой от накопленной пластической деформации.

Введем вторичные пластические деформации ε_{ij}^{sp} , которые можно рассматривать в качестве величины снижения пластических деформаций, накопленных в процессе разгрузки. Тогда разделение деформаций запишется следующим образом

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}^p + \varepsilon_{rr}^{sp} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^e + \hat{\varepsilon}_{\theta\theta}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^{sp} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{sp}\end{aligned}\quad (5.5)$$

В области повторного течения справедливо неравенство $\sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, а условие пластичности (2.6) примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = k_{bef} + H\varepsilon_{eq}^{sp}; \quad k_{bef} = \frac{\sigma_c}{\sigma_t}, \quad (5.6)$$

где ε_{eq}^{sp} — эквивалентная вторичная пластическая деформация.

Из (5.2), (5.4) и (5.6) найдем давление, при котором на внутренней поверхности сферы зарождается повторное пластическое течение

$$\begin{aligned}P_2 &= -\frac{2}{3}(1 - \delta^3)k_{bef} - \\ &\frac{\alpha \left(2 \left(\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1} - 1 \right) + \delta \left(\hat{\beta}_{ep}^2 - \delta^2 \right) \right)}{3(1 - \delta)(1 + 2H(1 - \nu))(1 - \nu)} \Delta - \\ &- 2 \frac{\left(\hat{\beta}_{ep}^3 - \delta^3 + 3 \ln \left(\delta \hat{\beta}_{ep}^{-1} \right) \right)}{3 + 6H(1 - \nu)}\end{aligned}$$

Разумеется, предыдущее выражение имеет смысл только, если $P_2 > 0$, в противном случае разгрузка является упругой. Введем величину P_{sp} , равную минимальному давлению P_a , при котором в ходе разгрузки возникнет повторное течение. В общем случае зависимость P_{sp} задачи не может быть выражена аналитически. При известных значениях параметров уравнение $P_2 = 0$ (повторное течение начинается в момент полного снятия нагрузки) решается численно относительно $\hat{\beta}_{ep}$, далее P_{sp} вычисляется с помощью зависимости (4.8).

Из условия (5.6) найдем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{sp} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^{sp} \\ \varepsilon_{rr}^{sp} &= -2\varepsilon_{\theta\theta}^{sp} \\ \varepsilon_{eq}^{sp} &= \varepsilon_{rr}^{sp} = -2\varepsilon_{\theta\theta}^{sp}\end{aligned}$$

По аналогии с тем, как это было сделано в разд. 4, преобразуем уравнение равновесия (2.2) к виду, в котором независимым является перемещение

$$u'' + 2u'\beta^{-1} - 2u\beta^{-2} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(3\hat{\varepsilon}_{eq}^p \beta^{-1} + \hat{\varepsilon}_{eq}^{p'} - 3\varepsilon_{eq}^{sp} \beta^{-1} - \varepsilon_{eq}^{sp'} \right)$$

Решая полученное уравнение, найдем

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{2} c_3 \beta^{-2} + (1-2\nu) c_4 \beta - \\ &\quad - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\hat{Y}(\beta) - S(\beta)) \beta \\ \sigma_{rr} &= -c_3 \beta^{-3} + c_4 + \frac{S(\beta) - \hat{Y}(\beta)}{1-\nu} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{c_3}{2} \beta^{-3} + c_4 - \\ &\quad - \frac{\hat{\varepsilon}_{eq}^p - \varepsilon_{eq}^{sp}}{2(1-\nu)} - \frac{S(\beta) - \hat{Y}(\beta)}{1-\nu} \\ S(\beta) &= \int \varepsilon_{eq}^{sp} \beta^{-1} d\beta, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где c_3, c_4 — константы интегрирования.

Из условия пластичности (5.6) с учетом (5.7) следует

$$\hat{\varepsilon}_{eq}^{sp} = \frac{\varepsilon_{eq}^p - (1-\nu)(2k_{bef} + 3c_3\beta^{-3})}{1+2H(1-\nu)} \tag{5.8}$$

Соотношения (5.7) — (5.8) описывают напряженно-деформированное состояние в области повторного пластического течения. В упругой области остаются справедливыми решения (5.2) и (5.3). Граница между областями обозначается как β_{esp} . Константы интегрирования $c_3, c_4, d_3, d_4, d_5, d_6$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{sp}(\delta) &= 0 \\ \varepsilon_{eq}^{sp}(\beta_{esp}) &= 0 \\ \sigma_{rr}^{unl \cap pl}(\beta_{esp}) - \sigma_{\theta\theta}^{unl \cap pl}(\beta_{esp}) &= k_{bef} \\ u^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) &= u^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep}) \\ \sigma_{rr}^{unl \cap pl}(\hat{\beta}_{ep}) &= \sigma_{rr}^{unl \cap el}(\hat{\beta}_{ep}) \\ \sigma_{rr}^{unl \cap el}(1) &= 0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где индекс «sp» обозначает область повторного течения. Упругопластическая граница β_{esp} вычисляется из решения нелинейного уравнения $u^{sp}(\beta_{esp}) = u^{unl \cap pl}(\beta_{esp})$ с учетом решения системы (5.9).

6. Эксплуатационные напряжения. Введем обозначения

$$\hat{\beta}_{esp} = \beta_{esp} (P = 0)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{sp} = \varepsilon_{ij}^{sp} (P = 0)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \hat{\varepsilon}_{ij}^p + \hat{\varepsilon}_{ij}^{sp},$$

где $\hat{\beta}_{esp}$ — максимальная координата границы β_{esp} , $\hat{\varepsilon}_{eq}^{sp}$ — вторичные пластические деформации, накопленные при разгрузке, $\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ — остаточные пластические деформации, накопленные в ходе автофретирования.

Разделение деформаций запишется в виде:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \bar{\varepsilon}_{rr}^p$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^e + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^p, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p$$

В ходе эксплуатации сфера находится под действием внутреннего давления и граничные условия (2.10) имеют вид

$$\sigma_{rr}(\delta) = -P_w, \quad \sigma_{rr}(1) = 0, \quad (6.1)$$

где P_w — рабочее давление.

Если $P_2 \leq 0$, то $\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \hat{\varepsilon}_{ij}^p$ и рабочие напряжения определяются соотношениями (5.2) — (5.4) с учетом того, что $P = P_w$. Если же $P_2 > 0$ (в ходе разгрузки происходило повторное пластическое течение), то в области $[\delta, \hat{\beta}_{esp}]$ решение запишется следующим образом

$$u = \frac{1+\nu}{2} d_7 \beta^{-2} + (1-2\nu) d_8 \beta - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \bar{Y}(\beta) \beta$$

$$\sigma_{rr} = -d_7 \beta^{-3} + d_8 - \frac{\bar{Y}(\beta)}{1-\nu}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{d_7}{2} \beta^{-3} + d_8 - \frac{\bar{\varepsilon}_{eq}^p}{2(1-\nu)} - \frac{\bar{Y}(\beta)}{1-\nu},$$

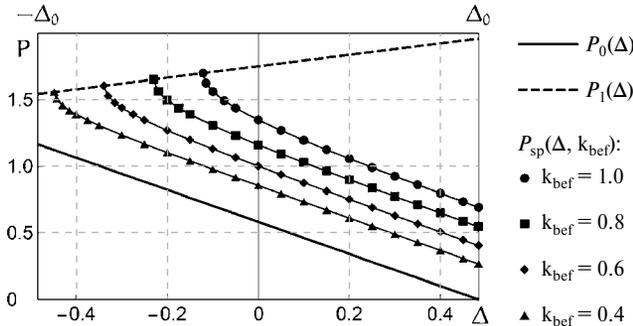


Рис. 1. Зависимости давления P_0 и P_1 от градиента температуры Δ .

где d_7, d_8 — константы интегрирования, $\bar{\varepsilon}_{eq}^p = \hat{\varepsilon}_{eq}^p + \hat{\varepsilon}_{eq}^{sp}$, $\bar{Y}(\beta) = \int \bar{\varepsilon}_{eq}^p \beta^{-1} d\beta$. В области $[\hat{\beta}_{esp}, \hat{\beta}_{ep}]$ справедливо решение (5.2), а в области $[\hat{\beta}_{ep}, 1]$ — решение (5.3). Константы интегрирования d_3, d_4, \dots, d_8 определяются с помощью граничных условий (6.1) и условий непрерывности радиального напряжения и перемещения в точках $\hat{\beta}_{esp}$ и $\hat{\beta}_{ep}$.

7. Результаты. В качестве примера рассматривается алюминиевый сплав со следующими параметрами $\nu = 0.33$, $E = 66$ ГПа, $H = 6.195$ ГПа, $\alpha = 2.32 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ [36]. Отсчетная температура принята равной $T_0 = 300 \text{ K}$. Безразмерные характеристики материала принимают значения $\bar{H} = 0.094$, $\bar{\alpha} = 1.938$. Геометрический параметр выбран равным $\delta = 1/2$. Следствием ограничений (18) и (20) на температурный градиент является неравенство

$$\Delta_{\min} < \Delta < \Delta_{\max}$$

$$\Delta_{\max} = -\Delta_{\min} = \Delta_0 \approx 0.484$$

Зависимости предельного давления P_0 , соответствующего началу течения (3.7), и давления P_1 , при котором вся сфера переходит в пластическое состояние (4.9), от градиента температуры изображены на рис. 1. Интересно отметить, что увеличение температурного градиента в сфере приводит к значительному увеличению диапазона возможных значений технологического давления P_a . В то же время при отрицательных и высоких по модулю значениях градиента сфера относительно быстро переходит в пластическое состояние. Следовательно, чем выше температурный градиент, тем более высокие значения пластических деформаций в окрестности внутренней поверхности могут быть достигнуты в ходе нагрузки, и тем выше абсолютная величина остаточных сжимающих напряжений после разгрузки. Однако данное заключение в полной мере справедливо только для чисто упругой разгрузки. На рис. 1 также представлены зависимости давления P_{sp} от градиента температуры для нескольких

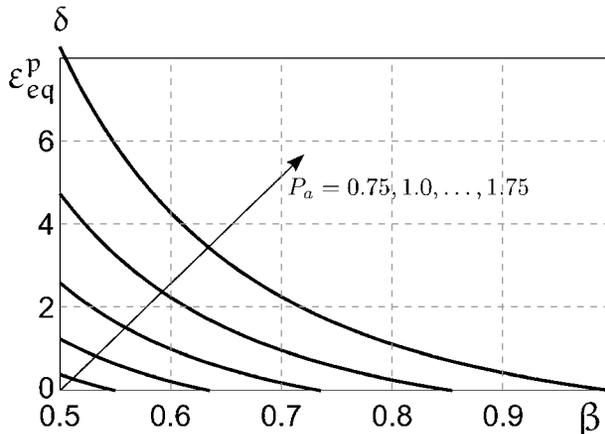


Рис. 2. Распределение эквивалентных пластических деформаций в сфере для $P_a = 0.75, 1.0, \dots, 1.75$ при $\Delta = 0$.

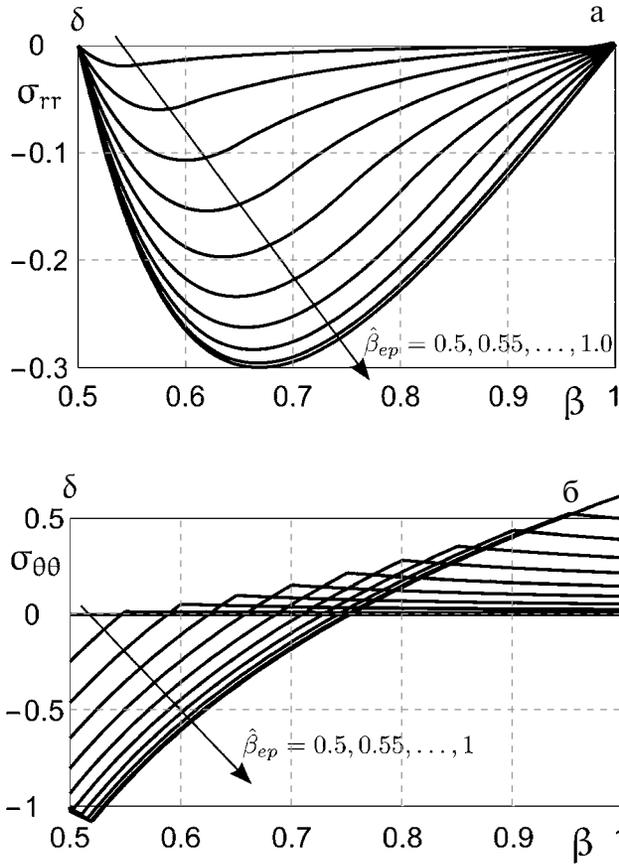


Рис. 3. Остаточное радиальное (а) и тангенциальное (б) напряжение в сфере для $\hat{\beta}_{ep} = 0.5, 0.55, \dots, 1$ при $\Delta = 0$ и $k_{bef} = 1$.

значений параметра k_{bef} . Видно, что эффект Баушингера существенно ограничивает область параметров (Δ, P_a) , при которых разгрузка является чисто упругой, что в особенности характерно для положительных значений температурного градиента. При отрицательном градиенте возможно достичь упругой разгрузки даже при очень выраженном эффекте Баушингера.

На рис. 2 представлено распределение эквивалентных пластических деформаций (4.5) в сфере в зависимости от величины рабочего давления P_a . Температурный градиент принят равным нулю. Для выбранных значений параметров имеем $P_0 \approx 0.58, P_1 \approx 1.75$. Видим, что увеличение внутреннего давления приводит к росту пластических деформаций в сфере, который особенно выражен вблизи ее внутренней поверхности. Далее не будем подробно останавливаться на процессе нагрузки и перейдем к анализу остаточных и эксплуатационных напряжений в сфере.

На рис. 3 представлены типичные зависимости радиального и тангенциального остаточных напряжений от координаты упругопластической границы $\hat{\beta}_{ep}$ в ходе нагрузки; градиент температуры в ходе нагрузки принят равным нулю ($\Delta = 0$), а эф-

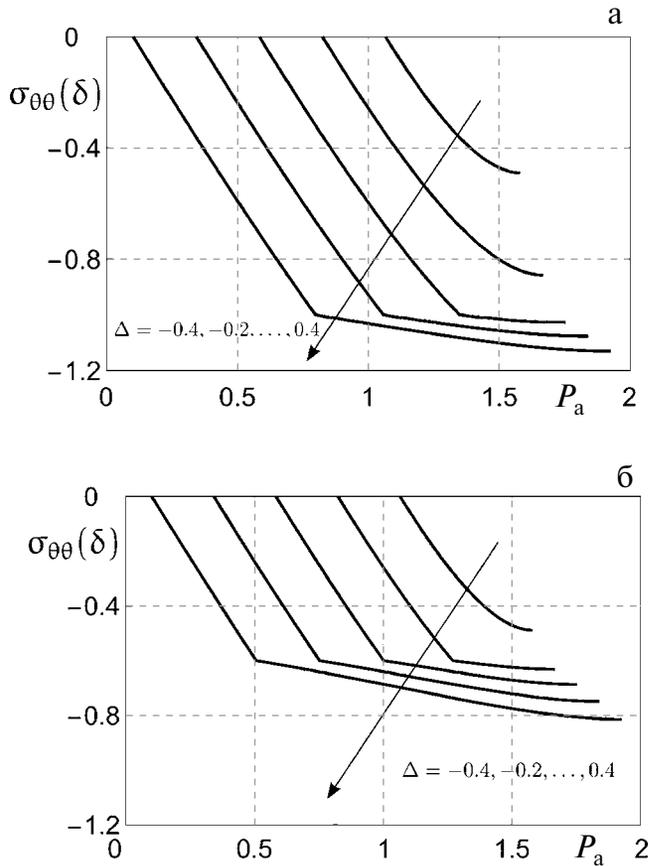


Рис. 4. Эксплуатационное тангенциальное — а и эквивалентное — б напряжение в сфере для $\hat{\beta}_{ep} = 0.5, 0.55, \dots, 1.0$ при $\Delta = 0$, $k_{bef} = 1.0$, $P_w = 0.5$.

фekt Баушингера не рассматривается ($k_{bef} = 1.0$). Видно, что с увеличением области пластического деформирования абсолютная величина остаточных напряжений также растет, однако при значениях технологического давления $P_a \geq P_{sp}$ (при выбранных значениях параметров $P_{sp} \approx 1.35$, а соответствующая координата границы $\hat{\beta}_{ep} \approx 0.78$) тангенциальное напряжение на внутренней поверхности сферы стабилизируется и далее с ростом давления меняется незначительно. Данная закономерность объясняется повторным пластическим течением в окрестности внутренней поверхности при значениях давления. Очевидно, что чем сильнее выражен эффект Баушингера (т.е. чем меньше k_{bef}), тем меньше величина давления P_{sp} , и тем ниже абсолютная величина напряжений вблизи внутренней поверхности сферы. Также следует отметить, что повторное течение и эффект Баушингера влияют на величину тангенциальных напряжений лишь в небольшой области вблизи внутренней поверхности сферы, а в ее оставшейся части остаточные напряжения продолжают расти (по модулю). В частности, заметно увеличиваются растягивающие остаточные напряжения на внешней поверхности сферы, что является нежелательным эффектом.

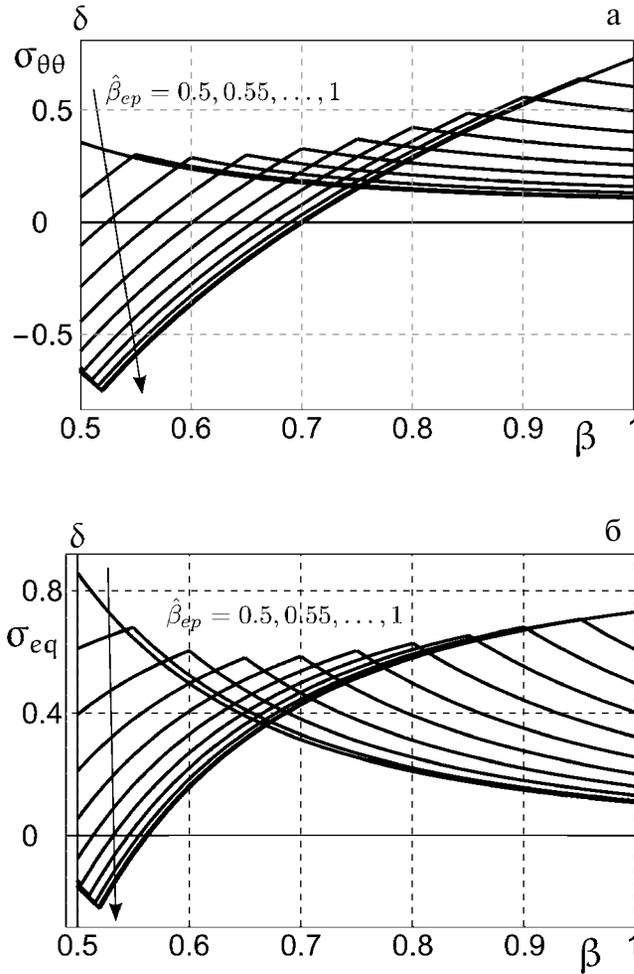


Рис. 5. Максимальное тангенциальное — а и эквивалентное — б напряжение в сфере в зависимости от технологического давления P_a и градиента температуры Δ для $k_{bef} = 1$ и $P_w = 0.5$.

Таким образом, использование высоких значений технологического давления $P_a \geq P_{sp}$ не только практически не имеет положительного эффекта, но может и ухудшать эксплуатационные характеристики детали.

На рис. 4 представлены зависимости остаточного тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}(\delta)$ от давления P_a и температурного градиента Δ . Из рис. 4а видно, что присутствие даже небольшого по величине температурного градиента способно значительно повысить уровень сжимающих остаточных напряжений. В частности, при $P_a \leq 1.0$ градиент $\Delta = 0.2$ позволяет увеличить абсолютную величину тангенциального напряжения практически на 40% от предела текучести по сравнению с изотермическим случаем. Однако если у материала сферы достаточно ярко выражен эффект Баушингера (рис. 4б), то положительное влияние температурного градиента выражено значительно слабее, а существенное увеличение $|\sigma_{\theta\theta}(\delta)|$ имеет место в более узком диапазоне технологического давления.

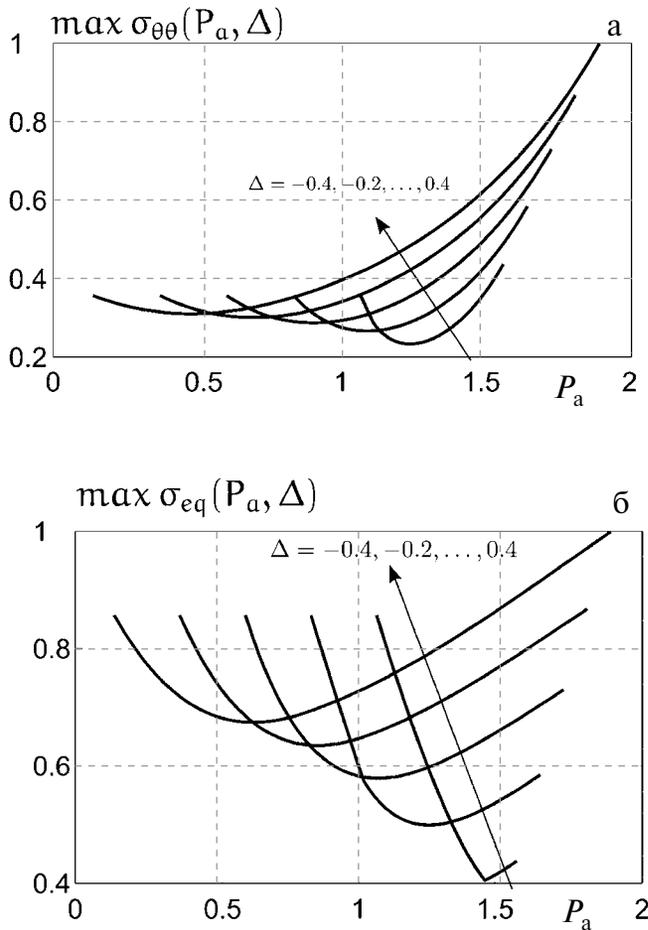


Рис. 6. Максимальное тангенциальное (а) и эквивалентное (б) напряжение в сфере в зависимости от технологического давления P_a и градиента температуры Δ для $k_{bef} = 1$ и $P_w = 0.5$.

Типичные распределения тангенциального и эквивалентного эксплуатационного напряжения в сфере для различных значений координаты упругопластической границы $\hat{\beta}_{ep}$ представлены на рис. 5; градиент температуры в ходе нагрузки принят равным нулю ($\Delta = 0$), эффект Баушингера не рассматривается ($k_{bef} = 1.0$). Выбранное рабочее давление равняется $P_w = 0.5$. Под эквивалентным напряжением подразумевается разность $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$. Графики для $\hat{\beta}_{ep} = 0.5$ соответствуют неупрочненной сфере. Интересно отметить, что у каждого из графиков на рис. 5 есть заметный пик, соответствующий максимальному значению напряжения. В свою очередь, зависимость максимального рабочего напряжения (как тангенциального, так и эквивалентного) от координаты упругопластической границы $\hat{\beta}_{ep}$ имеет ярко выраженный U-образный вид. Низкие значения $\hat{\beta}_{ep}$ несущественно снижают напряжения в ходе эксплуатации, а высокие приводят к значительному росту растягивающих напряжений на внешней поверхности сферы. Из рис. 5 видно, что

процесс автофретирования может быть оптимизирован с целью минимизации тангенциального или эквивалентного рабочего напряжения в сфере. При этом соответствующие оптимальные значения $\hat{\beta}_{ep}$ различны.

На рис. 6 представлены огибающие графиков тангенциальных и эквивалентных эксплуатационных напряжений для нескольких значений температурного градиента Δ . Для большей наглядности в качестве независимого параметра вместо $\hat{\beta}_{ep}$ используется рабочее давление P_a . Левая точка каждого из графиков на рис. 6 соответствует неупрочненной сфере. Видим, что оптимальное значение технологического давления P_a существенно зависит от величины температурного градиента. Если целью оптимизации является снижение тангенциальных напряжений, то использование положительного градиента позволяет заметно снизить рабочее давление P_a при небольшом росте рабочих напряжений (рис. 6а, графики для $\Delta = 0.0, 0.2, 0.4$). В то же время отрицательный градиент температуры позволяет снизить тангенциальное напряжение в ходе эксплуатации по сравнению с чисто гидравлическим автофретированием, однако для достижения этого эффекта требуется более высокое давление P_a (рис. 6а, графики для $\Delta = 0.0, -0.2, -0.4$). Аналогичные выводы можно получить, если в качестве целевой функции используется эквивалентное рабочее напряжение. Положительный градиент температуры позволяет уменьшить технологическое давление P_a , при этом напряжения в процессе эксплуатации возрастают достаточно заметно (рис. 6б, графики для $\Delta = 0.0, 0.2, 0.4$), но остаются значительно ниже напряжений в неупрочненной сфере. С другой стороны, отрицательным градиентом можно добиться существенного снижения напряжений в сфере (до 30% при $\Delta = -0.4$). Как видно из рис. 6б, данного положительного эффекта можно добиться и при небольшом увеличении P_a . Более того, градиент может быть подобран таким образом, что эксплуатационные напряжения в результате снизятся даже при использовании неизменного P_a ($\Delta = 0$). Также интересно отметить, что использование достаточно большого отрицательного градиента может привести к тому, что в ходе эксплуатации эквивалентное напряжение будет даже ниже рабочего давления P_w (рис. 6б, графики для $\Delta = -0.2, -0.4$).

Заключение. В работе рассмотрено упрочнение полых сферических заготовок с помощью комбинации гидравлического и температурного автофретирования. Получены точные аналитические решения для напряженно-деформированного состояния сферы в ходе нагрузки и разгрузки, включая повторное пластическое течение, а также в процессе эксплуатации после предварительного упрочнения. Основные выводы приведены ниже.

1. Присутствие температурного градиента существенно влияет на остаточные и эксплуатационные напряжения в сфере по сравнению с чисто гидравлическим автофретированием. Диапазон технологического давления и его оптимальное значение также заметно меняются в зависимости от приложенного температурного градиента.

2. Положительный градиент расширяет диапазон технологического давления и приводит к повышению абсолютной величины остаточных напряжений в окрестности внутренней поверхности сферы и увеличению максимума эксплуатационных напряжений. Кроме того, использование положительного градиента позволяет существенно снизить давление в процессе автофретирования при некотором увеличении уровня эксплуатационных напряжений, которые тем не менее заметно ниже напряжений в неупрочненной сфере.

3. Отрицательный градиент температуры сужает диапазон технологического давления, а также приводит к уменьшению абсолютной величины остаточных

сжимающих напряжений вблизи внутренней поверхности и снижению эксплуатационных напряжений. Данное заключение, как и вывод № 2, в полной мере справедливо только для оптимального технологического давления. Оптимизацией технологических параметров можно добиться значительного снижения эксплуатационных напряжений в сфере по сравнению с чисто гидравлическим методом. Однако для достижения этого эффекта может потребоваться увеличение технологического давления.

Работа выполнена в рамках государственного задания ХФИЦ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dixit U.S., Kamal S.M., Shufen R.* Autofrettage Processes: Technology and Modelling. Boca Raton: CRC Press, 2019. 276 p.
2. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *J. Pressure Vessel Technol.* 2018. V. 140. № 5. P. 050802.
3. *Jacob L.* La Résistance et L'équilibre Élastique des Tubes Frettés // *Memorial de L'artillerie Navale.* 1907. V. 1. P. 43–155.
4. *Zhan R., Tao C., Han L., Huang Y., Han D.* The residual stress and its influence on the fatigue strength induced by explosive autofrettage // *Explos. Shock Waves.* 2005. V. 25. № 3. P. 239–243.
5. *Kamal S.M., Dixit U.S.* Feasibility study of thermal autofrettage of thick-walled cylinders // *J. Pressure Vessel Technol.* 2015. V. 137. № 6. P. 061207.
6. *Zare H.R., Darijani H.* A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Mater. Des.* 2016. V. 105. P. 366–374.
7. *Davidson T.E., Barton C.S., Reiner A.N., Kendall D.P.* New approach to the autofrettage of high-strength cylinders // *Exp. Mech.* 1962. V. 2. № 2. P. 33–40.
8. *Shufen R., Dixit U.S.* A finite element method study of combined hydraulic and thermal autofrettage process // *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. V. 139. № 4. P. 041204.
9. *Shufen R., Singh N.P., Dixit U.S.* Thermally assisted rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *J. Pressure Vessel Technol.* 2023. V. 145. № 5. P. 051303.
10. *Shufen R., Dixit U.S.* Effect of length in rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *Proc. Inst. Mech. Eng., Pt. C.* 2022. V. 236. № 6. P. 2981–2994.
11. *Adibi-Asl R., Livieri P.* Analytical approach in autofrettaged spherical pressure vessels considering the Bauschinger effect // *J. Pressure Vessel Technol.* 2007. V. 129. № 3. P. 411–419.
12. *Kargarnovin M.H., Darijani H., Naghdabadi R.* Evaluation of the optimum pre-stressing pressure and wall thickness determination of thick-walled spherical vessels under internal pressure // *J. Frankl. Inst.* 2007. V. 344. № 5. P. 439–451.
13. *Parker A.P., Huang X.* Autofrettage and reautofrettage of a spherical pressure vessel // *J. Pressure Vessel Technol.* 2007. V. 129. № 1. P. 83–88.
14. *Perl M., Perry J.* The beneficial contribution of realistic autofrettage to the load-carrying capacity of thick-walled spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.* 2010. V. 132. № 1. P. 011204.
15. *Maleki M., Farrahi G.H., Haghpanah Jahromi B., Hosseinian E.* Residual stress analysis of autofrettaged thick-walled spherical pressure vessel // *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2010. V. 87. № 7. P. 396–401.
16. *Alexandrov S., Pirumov A., Jeng Y.-R.* Expansion/contraction of a spherical elastic/plastic shell revisited // *Contin. Mech. Thermodyn.* 2015. V. 27. № 3. P. 483–494.
17. *Altenbach H., Lvov G., Naumenko K., Okorokov V.* Consideration of damage in the analysis of autofrettage of thick-walled pressure vessels // *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. C.* 2016. V. 230. № 20. P. 3585–3593.
18. *Ali Faghidian S.* Analytical approach for inverse reconstruction of eigenstrains and residual stresses in autofrettaged spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. V. 139. № 4. P. 041202.
19. *Wen J.-F., Gao X.-L., Xuan F.-Z., Tu S.-T.* Autofrettage and shakedown analyses of an internally pressurized thick-walled spherical shell based on two strain gradient plasticity solutions // *Acta Mech.* 2017. V. 228. № 1. P. 89–105.

20. *Johnson W., Mellor P.B.* Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient // *Int. J. Mech. Sci.* 1962. V. 4. № 2. P. 147–158.
21. *Śloderbach Z., Pajak J.* Analysis of thick-walled elastic-plastic sphere subjected to temperature gradient // *J. Therm. Stress.* 2013. V. 36. № 10. P. 1077–1095.
22. *Orçan Y., Gamer U.* The elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening subject to a radial temperature gradient // *Acta Mech.* 1994. V. 102. № 1. P. 183–198.
23. *Kargarnovin M.H., Rezaei Zarei A., Darijani H.* Wall thickness optimization of thick-walled spherical vessel using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2005. V. 82. № 5. P. 379–385.
24. *Darijani H., Kargarnovin M.H., Naghdabadi R.* Design of spherical vessels under steady-state thermal loading using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2009. V. 86. № 2. P. 143–152.
25. *Мурашкин Е.В., Дац Е.П.* Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 5. С. 30–36.
26. *Ковтаниук Л.В.* Необратимое деформирование и последующая разгрузка сферического упруговязкопластического слоя // *ПМТФ.* 2013. Т. 54. № 1. С. 170–178.
27. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Терлецкий И.А.* О необратимом деформировании и последующей разгрузке сферического вязкоупругопластического слоя // *Изв. РАН. МТТ.* 2014. № 3. С. 44–55.
28. *Бажиин А.А., Буренин А.А., Мурашкин Е.В.* К моделированию процесса накопления больших необратимых деформаций в условиях пластического течения и ползучести // *ПММ.* 2016. Т. 80. № 2. С. 254–264.
29. *Буренин А.А., Панченко Г.Л., Ковтаниук Л.В., Галимзянова К.Н.* О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // *Докл. РАН.* 2018. Т. 482. № 4. С. 403–406.
30. *Kholdi M., Rahimi G., Loghman A., Ashrafi H., Arefi M.* Analysis of thick-walled spherical shells subjected to various temperature gradients: thermo-elasto-plastic and residual stress studies // *Int. J. Appl. Mech.* 2021. V. 13. № 09. P. 2150105.
31. *Ивлев Д.Д., Быковоцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
32. *Alexandrov S., Jeng Y.-R.* An elastic/plastic solution for a hollow sphere subject to thermo-mechanical loading considering temperature dependent material properties // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 200–201. P. 23–33.
33. *Perry J., Perl M., Shneck R., Haroush S.* The influence of the Bauschinger effect on the yield stress, Young's modulus, and Poisson's ratio of a gun barrel steel // *J. Pressure Vessel Technol.* 2005. V. 128. № 2. P. 179–184.
34. *Shim W.S., Kim J.H., Lee Y.S., Cha K.U., Hong S.K.* A study on hydraulic autofrettage of thick-walled cylinders incorporating Bauschinger effect // *Exp. Mech.* 2010. V. 50. № 5. P. 621–626.
35. *Weiss M., Kupke A., Manach P.Y., Galdos L., Hodgson P.D.* On the Bauschinger effect in dual phase steel at high levels of strain // *Mater. Sci. Eng. A.* 2015. V. 643. P. 127–136.
36. *Meng Q., Zhao J., Mu Z., Zhai R., Yu G.* Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manuf. Process.* 2022. V. 76. P. 251–263.

Strengthening of Hollow Spheres Using Combined Method of Hydraulic and Thermal Autofrettage

A.N. Prokudin^{a,#}

^a*Institute of Machinery and Metallurgy, Khabarovsk FRC, FEB RAS,
Komsomolsk-on-Amur, Russia*
[#]*e-mail: sunbeam_85@mail.ru*

The distributions of residual and working stresses in hollow spheres pre-strengthened using a combination of hydraulic and thermal autofrettage are investigated. The analysis is based on the theory of infinitesimal elastoplastic strains, the Tresca or von Mises yield condition,

the associated flow rule and the linear isotropic hardening law. During unloading, the sphere material may exhibit the Bauschinger effect. All mechanical and thermophysical parameters are assumed to be independent of temperature. Exact analytical solutions are found for both loading and unloading stages including secondary plastic flow. The values of technological parameters are established at which the strengthening effect is achieved near the inner surface of the sphere. Analysis of the results shows that the use of a positive temperature gradient makes it possible to increase the absolute value of residual stresses on the inner surface of the sphere. On the other hand, with the help of a negative gradient it is possible to reduce working stresses in the sphere.

Keywords: autofrettage, sphere, elastoplastic strains, thermal stresses, infinitesimal strains, linear isotropic hardening, Bauschinger effect

REFERENCES

1. *Dixit U.S., Kamal S.M., Shufen R.* Autofrettage Processes: Technology and Modelling. Boca Raton: CRC Press, 2019. 276 p.
2. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2018, vol. 140, no. 5, pp. 050802.
3. *Jacob L.* La Résistance et L'équilibre Élastique des Tubes Frettés // *Memorial de L'artillerie Navale*, 1907, vol. 1, pp. 43–155.
4. *Zhan R., Tao C., Han L., Huang Y., Han D.* The residual stress and its influence on the fatigue strength induced by explosive autofrettage // *Explos. Shock Waves*, 2005, vol. 25, no. 3, pp. 239–243.
5. *Kamal S.M., Dixit U.S.* Feasibility study of thermal autofrettage of thick-walled cylinders // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2015, vol. 137, no. 6, pp. 061207.
6. *Zare H.R., Darijani H.* A novel autofrettage method for strengthening and design of thick-walled cylinders // *Mater. Des.*, 2016, vol. 105, pp. 366–374.
7. *Davidson T.E., Barton C.S., Reiner A.N., Kendall D.P.* New approach to the autofrettage of high-strength cylinders // *Exp. Mech.*, 1962, vol. 2, no. 2, pp. 33–40.
8. *Shufen R., Dixit U.S.* A finite element method study of combined hydraulic and thermal autofrettage process // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2017, vol. 139, no. 4, pp. 041204.
9. *Shufen R., Singh N.P., Dixit U.S.* Thermally assisted rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2023, vol. 145, no. 5, pp. 051303.
10. *Shufen R., Dixit U.S.* Effect of length in rotational autofrettage of long cylinders with free ends // *Proc. Inst. Mech. Eng., Pt. C*, 2022, vol. 236, no. 6, pp. 2981–2994.
11. *Adibi-Asl R., Livieri P.* 2007. Analytical approach in autofrettaged spherical pressure vessels considering the Bauschinger effect // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2007, vol. 129, no. 3, pp. 411–419.
12. *Kargarnovin M.H., Darijani H., Naghdabadi R.* Evaluation of the optimum pre-stressing pressure and wall thickness determination of thick-walled spherical vessels under internal pressure // *J. Frankl. Inst.*, 2007, vol. 344, no. 5, pp. 439–451.
13. *Parker A.P., Huang X.* Autofrettage and reautofrettage of a spherical pressure vessel // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2007, vol. 129, no. 1, pp. 83–88.
14. *Perl M., Perry J.* The beneficial contribution of realistic autofrettage to the load-carrying capacity of thick-walled spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2010, vol. 132, no. 1, pp. 011204.
15. *Maleki M., Farrahi G.H., Haghpanah Jahromi B., Hosseinian E.* Residual stress analysis of autofrettaged thick-walled spherical pressure vessel // *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 2010, vol. 87, no. 7, pp. 396–401.
16. *Alexandrov S., Pirumov A., Jeng Y.-R.* Expansion/contraction of a spherical elastic/plastic shell revisited // *Contin. Mech. Thermodyn.*, 2015, vol. 27, no. 3, pp. 483–494.
17. *Altenbach H., Lvov G., Naumenko K., Okorokov V.* Consideration of damage in the analysis of autofrettage of thick-walled pressure vessels // *Proc. Inst. Mech. Eng., Pt. C*, 2016, vol. 230, no. 20, pp. 3585–3593.
18. *Ali Faghidian S.* Analytical approach for inverse reconstruction of eigenstrains and residual stresses in autofrettaged spherical pressure vessels // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2017, vol. 139, no. 4, pp. 041202.

19. *Wen J.-F., Gao X.-L., Xuan F.-Z., Tu S.-T.* Autofrettage and shakedown analyses of an internally pressurized thick-walled spherical shell based on two strain gradient plasticity solutions // *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 1, pp. 89–105.
20. *Johnson W., Mellor P.B.* Elastic-plastic behaviour of thick-walled spheres of non-work-hardening material subject to a steady-state radial temperature gradient // *Int. J. Mech. Sci.*, 1962, vol. 4, no. 2, pp. 147–158.
21. *Šloderbach Z., Pajak J.* Analysis of thick-walled elastic-plastic sphere subjected to temperature gradient // *J. Therm. Stress.*, 2013, vol. 36, no. 10, pp. 1077–1095.
22. *Orçan Y., Gamer U.* The elastic-plastic spherical shell with nonlinear hardening subject to a radial temperature gradient // *Acta Mech.*, 1994, vol. 102, no. 1, pp. 183–198.
23. *Kargarnovin M.H., Rezai Zarei A., Darijani H.* Wall thickness optimization of thick-walled spherical vessel using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 2005, vol. 82, no. 5, pp. 379–385.
24. *Darijani H., Kargarnovin M. H., Naghdabadi R.* Design of spherical vessels under steady-state thermal loading using thermo-elasto-plastic concept // *Int. J. Press. Vessels Pip.*, 2009, vol. 86, no. 2, pp. 143–152.
25. *Murashkin E.V., Dats E.P.* Thermoelastoplastic deformation of a multilayer ball // *Mech. Solids*, 2017, vol. 52, no. 5, pp. 495–500.
26. *Kovtanyuk L.V.* Irreversible deformation and subsequent unloading of a spherical elastovisco-plastic layer // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 148–155.
27. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Terletskii I.A.* Irreversible deformation with subsequent unloading of a spherical viscoelastoplastic layer // *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 3, pp. 270–279.
28. *Bazhin A.A., Burenin A.A., Murashkin E.V.* Simulation of the process of the accumulation of large irreversible deformations under plastic flow and creep conditions // *JAMM*, 2016, vol. 80, no. 2, pp. 182–189.
29. *Burenin A.A., Galimzyanova K.N., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression // *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 10, pp. 407–410.
30. *Kholdi M., Rahimi G., Loghman A., Ashrafi H., Arefi M.* Analysis of thick-walled spherical shells subjected to various temperature gradients: thermo-elasto-plastic and residual stress studies // *Int. J. Appl. Mech.*, 2021, vol. 13, no. 09, pp. 2150105.
31. *Ivlev D.D., Bykovcev G.I.* Theory of Hardening Plastic Solid. Moscow: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian)
32. *Alexandrov S., Jeng Y.-R.* An elastic/plastic solution for a hollow sphere subject to thermo-mechanical loading considering temperature dependent material properties // *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200–201, pp. 23–33.
33. *Perry J., Perl M., Shneck R., Haroush S.* The influence of the Bauschinger effect on the yield stress, Young's modulus, and Poisson's ratio of a gun barrel steel // *J. Pressure Vessel Technol.*, 2005, vol. 128, no. 2, pp. 179–184.
34. *Shim W.S., Kim J.H., Lee Y.S., Cha K.U., Hong S.K.* A study on hydraulic autofrettage of thick-walled cylinders incorporating Bauschinger effect // *Exp. Mech.*, 2010, vol. 50, no. 5, pp. 621–626.
35. *Weiss M., Kupke A., Manach P.Y., Galdos L., Hodgson P.D.* On the Bauschinger effect in dual phase steel at high levels of strain // *Mater. Sci. Eng. A*, 2015, vol. 643, pp. 127–136.
36. *Meng Q., Zhao J., Mu Z., Zhai R., Yu G.* Springback prediction of multiple reciprocating bending based on different hardening models // *J. Manuf. Process.*, 2022, vol. 76, pp. 251–263.