

УДК 539.376

РАЗГОН СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ГЛУБИНЕ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{1-3,*}, В. А. Банько^{1,**}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

**e-mail: mr.banko.vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.

После доработки 08.12.2023 г.

Принята к публикации 10.12.2023 г.

Аналитически исследуется задача о разгоне из состояния покоя сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости при задании на границе касательного напряжения. Предполагается, что динамическая вязкость и плотность среды постоянны, а предел текучести может меняться непрерывным либо разрывным образом в зависимости от глубины. Вся полуплоскость в любой момент времени состоит из заранее неизвестных слоев, где реализуется сдвиговое течение, и жестких зон. Последние могут перемещаться как жесткое целое, а могут быть неподвижны, как, например, полуплоскость, до которой возмущения, вызванные действием касательных усилий, еще не дошли. Для нахождения полей напряжения и скорости развивается метод, основанный на квазиавтомодельных диффузионно-вихревых решениях параболических задач в областях с движущимися границами. Обсуждается вопрос о том, какие выводы о распределении предела текучести по глубине можно сделать по доступным измерениям скорости границы полуплоскости.

Ключевые слова: вязкопластическая среда, предел текучести, разгон, касательное напряжение, интенсивность напряжений, одномерное сдвиговое течение, жесткая зона, диффузия вихревого слоя

DOI: 10.31857/S0032823524010071 EDN: YUONUJ

1. Диффузия вихревого слоя в вязкопластической полуплоскости. В работе [1] ставится и исследуется начально-краевая задача о нестационарном сдвиговом течении несжимаемой вязкопластической среды с плотностью ρ , динамической вязкостью μ и пределом текучести σ_s в полуплоскости

$$\begin{aligned}\Omega_\infty &= \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 > 0\} \\ \partial\Omega_\infty &= \{-\infty < x_1 < \infty, x_2 = 0\}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Тензорно-линейные определяющие соотношения двухконстантного тела Бингама, связывающие декартовы компоненты девиатора напряжений s_{ij} и тензора скоростей деформаций v_{ij} , в силу несжимаемости совпадающего со своим девиатором, принимаются в виде

$$s_{ij} = \left(\frac{\sigma_s}{v_u} + 2\mu \right) v_{ij}; \quad v_u = \sqrt{v_{kl}v_{kl}} \quad (1.2)$$

Кинематика и напряженное состояние при нестационарном одномерном сдвиге в условиях плоской деформации характеризуются единственной отличной от нуля компонентой скорости $v_1(x_2, t) \equiv v(x, t)$ и единственной ненулевой компонентой девиатора напряжений $s_{12}(x_2, t) \equiv \sigma(x, t)$. Интенсивность скоростей деформаций имеет вид $v_u = |\partial v / \partial x| / \sqrt{2}$.

Изначально вся полуплоскость Ω_∞ покоилась, а начиная с момента времени $t = 0$ на границе $\partial\Omega_\infty$ действует заданное касательное напряжение

$$\sigma(0, t) = S(t)h(t), \quad (1.3)$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда, $S(t)$ — неотрицательная, кусочно-непрерывная, монотонно неубывающая функция, ограниченная при конечных t . Обозначим через $t_0 \geq 0$ момент времени такой, что $S(t) > \sigma_s / \sqrt{2} = \tau_s$ при $t > t_0$. Величину τ_s называют пределом текучести при сдвиге.

Вся полуплоскость Ω_∞ (1.1) в любой момент $t > t_0$ состоит из двух частей [2]: Ω_f и Ω_r . Зона сдвигового течения Ω_f представляет собой расширяющийся со временем слой

$$\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x < x^*(t)\}, \quad (1.4)$$

где $x^*(t)$ — определяемая в процессе решения монотонно возрастающая функция; $x^*(t_0) = 0$. При $t \leq t_0$ подобласть Ω_f отсутствует.

Остальная часть полуплоскости Ω_∞ — неподвижная полуплоскость

$$\Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty, x \geq x^*(t)\}, \quad (1.5)$$

занятая жесткой зоной. В ней $|\sigma(x, t)| \equiv \tau_s$ вплоть до бесконечности по x .

Таким образом, в зоне сдвига имеет место система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \sigma &= \tau_s \operatorname{sign} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 &< x < x^*(t), \quad t > t_0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

с граничными условиями (1.3) и

$$|\sigma(x^*(t), t)| = \tau_s \quad (1.7)$$

Начальных условий ставить не требуется, поскольку в момент начала сдвига $t = t_0$ толщина слоя Ω_f равна нулю, т. е. $\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} x^*(t) = 0$.

В жесткой зоне вместо уравнений (1.6) справедлива система

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

$$x \geq x^*(t), \quad t > t_0$$

с одним граничным условием $\lim_{x \rightarrow \infty} v = 0$. Разыскиваются функции $\sigma(x, t)$ и $v(x, t)$ соответственно классов C_0 и C_1 во всей полуплоскости Ω_∞ (1.1), занятой вязкопластическим материалом. Из указанных требований непрерывности и системы (1.8) следует неподвижность жесткой полуплоскости и равенство $|\sigma| = \tau_s$ всюду в ней.

В качестве дополнительного условия для нахождения подвижной границы $x^*(t)$ принимается следующее альтернативное в теории задач Стефана [3] требование к решению. Оно при любых фиксированных x и t должно стремиться к решению соответствующей задачи вязкого течения (задачи о диффузии вихревого слоя в ньютоновской вязкой полуплоскости) в предельном переходе $\tau_s \rightarrow 0$. Это означает, что вязкое течение должно быть устойчивым по отношению к малому возмущению предела текучести среды.

Выпишем [1] точное решение поставленной начально-краевой задачи в области сдвигового течения в случае, когда в (1.3)

$$S(t) \equiv S_0, \quad (1.9)$$

где S_0 — приложенное касательное напряжение, разумеется, большее чем τ_s . При этом $\text{sign } \sigma = \text{sign}(\partial v / \partial x) = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta \right) \equiv \\ &\equiv S_0 \operatorname{erfc} \xi; \quad 0 < x < x^*(t) = 2\xi^* \sqrt{vt}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\nu = \mu / \rho$ — кинематическая вязкость; $\xi = x / (2\sqrt{vt})$ — классическая в параболических задачах автомодельная переменная; $\operatorname{erfc} \xi$ — дополнительная функция ошибок; ξ^* — постоянная величина ($0 < \xi^* \leq \infty$), которая находится из алгебраического уравнения

$$\operatorname{erfc} \xi^* = \gamma; \quad \gamma = \frac{\tau_s}{S_0} < 1 \quad (1.11)$$

Интегрируя второе уравнение (1.6) $\partial v / \partial x = (\sigma - \tau_s) / \mu$ с граничным условием $v(x^*(t), t) = 0$, найдем профиль скорости

$$v(x, t) = \frac{2S_0}{\mu} \sqrt{vt} \left[\xi (\operatorname{erfc} \xi - \gamma) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\xi^2} - e^{-\xi^{*2}} \right) \right]; \quad 0 < x < x^*(t) \quad (1.12)$$

$$v(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu} \sqrt{\frac{vt}{\pi}} \left(1 - e^{-\xi^{*2}} \right) \quad (1.13)$$

Скорость границы $x = 0$ слоя Ω_f (1.4) неограниченно растет пропорционально $\sqrt{t}$.

Заметим, что известное автомодельное решение, называемое диффузией вихревого слоя в ньютоновской вязкой жидкости, получается из (1.10), (1.12) и (1.13) в пределе $\xi^* \rightarrow \infty$. При этом в любой момент времени области Ω_∞ (1.1) и Ω_f (1.4) совпадают, а жесткая зона Ω_r (1.5) отсутствует.

2. Зависимость предела текучести от глубины. Рассмотрим случай неоднородной вязкопластической среды, занимающей область Ω_∞ (1.1), когда предел текучести при сдвиге τ_s — заданная неотрицательная кусочно-непрерывная функция координаты x , в то время как динамическая вязкость μ , плотность ρ , а следовательно, и кинематическая вязкость ν — как и ранее, постоянные величины. На границе полуплоскости Ω_∞ , по-прежнему, задано касательное напряжение (1.3), (1.9) в виде ступеньки Хевисайда.

Распределение жестких зон по глубине в каждый момент времени $t > 0$, естественно, зависит от вида функции $\tau_s(x)$, в частности от ее монотонности. Вязкопластический сдвиг может реализовываться не только в расширяющемся со временем слое Ω_f (1.4), но и в более сложных образованиях, состоящих из нескольких слоев, способных смыкаться и расходиться друг от друга. То же можно сказать и о наборе жестких зон по толщине.

В любой момент $t > 0$ сдвиговое течение имеет место при значениях x , удовлетворяющих алгебраическому неравенству

$$\operatorname{erfc} \xi > \frac{\tau_s(x)}{S_0}; \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \quad (2.1)$$

Точки, находящиеся внутри жестких зон, неподвижных либо движущихся поступательно как твердое целое, имеют координаты x , удовлетворяющие обратному к (2.1) неравенству

$$\operatorname{erfc} \xi < \frac{\tau_s(x)}{S_0} \quad (2.2)$$

В зонах сдвигового течения вид касательного напряжения $\sigma(x, t)$, как следует из системы уравнений (1.6), совпадает с распределением (1.10). Из системы же (1.8) можно заключить, что в жестких зонах касательное напряжение — линейная функция от x , восстанавливаемая очевидным образом так, чтобы функция $\sigma(x, t)$ была непрерывной на всей полуоси $x > 0$.

Поясним сказанное графически. На рис. 1 для двух моментов времени t_1 и t_2 ($0 < t_1 < t_2$) и фиксированного непрерывного по глубине распределения предела текучести $\tau_s(x)$ приведены профили касательного напряжения $\sigma(x, t_1)$ и $\sigma(x, t_2)$. Пря-

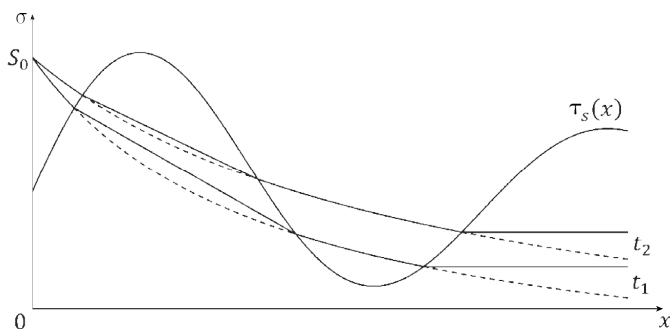


Рис. 1

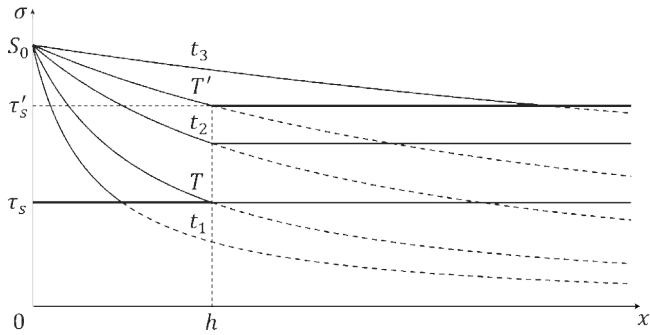


Рис. 2

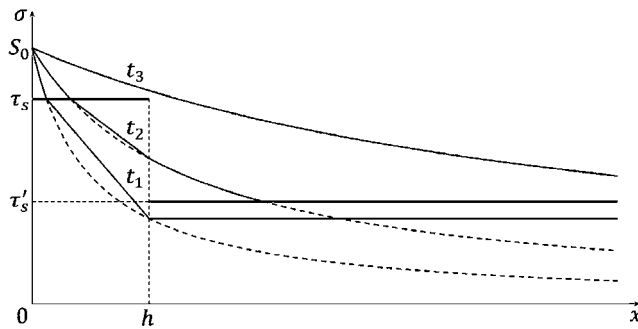


Рис. 3

молинейные отрезки и предельные горизонтальные лучи на графиках соответствуют областям жестких зон, а криволинейные участки — областям вязкопластического сдвига, в которых решение $\sigma(x, t)$ описывается выражением (1.10).

На рис. 2 и 3 приведены случаи кусочно-постоянных функций $\tau_s(x)$, т. е. слоистых композитов. Выбраны три характерных момента t_1 , t_2 и t_3 ($0 < t_1 < t_2 < t_3$), для которых построены профили касательного напряжения $\sigma(x, t_1)$, $\sigma(x, t_2)$ и $\sigma(x, t_3)$. Эти профили на определенных интервалах по x включают в себя прямолинейные отрезки и предельные лучи, соответствующие жестким слоям и полуплоскостям.

Поскольку рассматриваемая задача статически определима, по известной функции $\sigma(x, t)$ из определяющего соотношения (1.6) и требования того, что в жесткой зоне скорость постоянна по x , восстанавливается профиль скорости $v(x, t)$. Для любого конечного момента времени t_1 интегрирование уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu} (\sigma(x, t_1) - \tau_s(x)) \quad (2.3)$$

с уже известной правой частью начинается с последней по глубине зоны сдвигового течения, у которой одна из границ примыкает к неподвижной полуплоскости. Непрерывно-дифференцируемая по x функция $v(x, t_1)$ находится последовательно по слоям по направлению из глубины к границе $x = 0$. Характерный профиль скорости $v(x, t_1)$ в случае непрерывного распределения предела текучести $\tau_s(x)$ приведен на рис. 4.

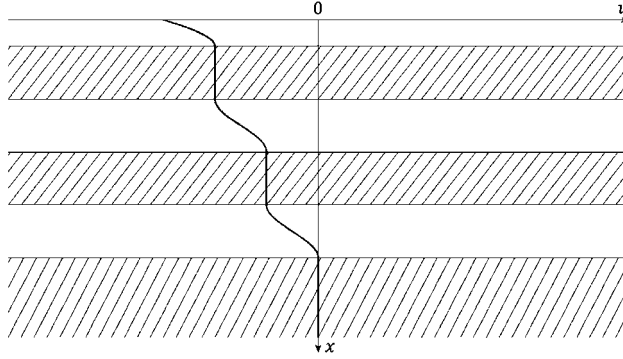


Рис. 4

3. Определение недоступных для измерения параметров по движению границы.

Рассмотрим аналитически подробнее случай слоистого композита (рис. 2) с кусочно-постоянным распределением предела текучести

$$\tau_s = \begin{cases} \tau_s, & 0 < x < h \\ \tau'_s, & h < x < \infty \end{cases} \quad \tau_s < \tau'_s < S_0, \quad (3.1)$$

где h — неизвестная толщина примыкающего к границе $\partial\Omega_\infty$ менее жесткого слоя, причем параметры h и τ'_s не доступны для прямого измерения.

Выделим три интервала времени: $0 < t < T$, $T < t < T'$ и $T' < t < \infty$, где моменты T и T' находятся из условий

$$x^*(T) = h \text{ или } T = \frac{h^2}{4v\xi^{*2}}, \quad \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{vT'}} = \frac{\tau'_s}{S_0}, \quad (3.2)$$

а ξ^* — по-прежнему корень уравнения (1.11). На рис. 2 кривые $\sigma(x, T)$ и $\sigma(x, T')$ проходят соответственно через нижнюю и верхнюю точки разрыва функции (3.1).

1°. На первом интервале времени $0 < t < T$ решения для касательного напряжения $\sigma_{(1)}(x, t)$ и продольной скорости $v_{(1)}(x, t)$ совпадают с (1.10) и (1.12). При этом скорость $v_{(1)}(0, t)$ границы $\partial\Omega_\infty$ имеет вид (1.13).

2°. На втором интервале $T < t < T'$ толщина области сдвига Ω_f не меняется со временем и равна h . Непрерывный по x профиль касательного напряжения следующий:

$$\sigma_{(2)}(x, t) = \begin{cases} S_0 \operatorname{erfc} \xi, & 0 < x < h \\ S_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h/(2\sqrt{vt})} e^{-\eta^2} d\eta \right), & h \leq x < \infty \end{cases} \quad (3.3)$$

Как видно из (3.2) и (3.3), с момента $t = T$ до момента $t = T'$ функция времени $\sigma(h, t)$ возрастает от значения τ_s до τ'_s .

Поскольку на втором временном интервале оба граничных условия для функции v заданы на фиксированных по x границах и не зависят от t :

$$v_{(2)}|_{x=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\mu}(S_0 - \tau_s), \quad (3.4)$$

профиль скорости перестраивается с (1.12) и начинает стремиться к отрезку

$$v_{(2)}^{\infty}(x) = -\frac{1}{\mu}(S_0 - \tau_s)(h - x) \equiv -\frac{S_0}{\mu}(1 - \gamma)(h - x), \quad (3.5)$$

соответствующему стационарному сдвиговому движению среды.

Точное решение для $v_{(2)}(x, t)$ имеет следующий вид:

$$v_{(2)}(x, t) = \frac{2S_0}{\mu}\sqrt{vt} \times \left[\xi \operatorname{erfc} \xi + \frac{1}{2\sqrt{vt}} \left(\gamma(h - x) - h \operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{vt}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\xi^2} - e^{-h^2/(4vt)} \right) \right] \\ 0 < x < h, \quad (3.6)$$

$$v_{(2)}(0, t) = -\frac{2S_0}{\mu}\sqrt{\frac{vt}{\pi}} \left(1 - e^{-h^2/(4vt)} \right) - \\ - \frac{S_0 h}{\mu} \left(\operatorname{erfc} \frac{h}{2\sqrt{vt}} - \gamma \right) \quad (3.7)$$

Сравнивая выражения (1.12) и (3.6), заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow T-0} v_{(1)}(x, t) = \lim_{t \rightarrow T+0} v_{(2)}(x, t); \quad 0 < x < h \quad (3.8)$$

Кроме того, если $\tau'_s \geq S_0$, т.е. $T' = \infty$, то имеет место стремление к прямолинейному профилю (3.5):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_{(2)}(x, t) = v_{(2)}^{\infty}(x) \quad (3.9)$$

3°. На третьем интервале $t > T'$ толщина области Ω_f вновь начинает увеличиваться, начиная с $x = h$. Профиль касательного напряжения имеет вид

$$\sigma_{(3)}(x, t) = \begin{cases} S_0 \operatorname{erfc} \xi, & 0 < x < x^{*'}(t) = 2\xi^{*'}\sqrt{vt} \\ \tau'_s, & x^{*'}(t) < x < \infty \end{cases}, \quad (3.10)$$

где $\xi^{*'}$ — постоянная величина, определяемая из алгебраического уравнения

$$\operatorname{erfc} \xi^{*'} = \gamma'; \quad \gamma' = \frac{\tau'_s}{S_0} < 1 \quad (3.11)$$

Так как $\tau'_s > \tau_s$, то $\xi^{*'} < \xi^*$.

Продольная скорость $v(x, t)$ находится в результате интегрирования по x уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu}(\sigma_{(3)}(x, t) - \tau_s(x)); \quad 0 < x < x^{*'}(t) \quad (3.12)$$

с граничным условием $v(x^*(t), t) = 0$ и разрывным пределом текучести (3.1).

Таким образом, в момент $t = T'$ происходит еще одна после $t = T$ перестройка профиля скорости и, в частности, скорости границы $v(0, t)$, считающейся доступной для измерения. Характерный график функции $v(0, t)$ на всем временном интервале $t > 0$ приведен на рис. 5. Находя из наблюдения за движением границы $x = 0$ времена T и T' , можно из формул (3.2) последовательно вычислить сначала h , а затем τ_s , т. е. не доступные для прямого измерения толщину вязкопластического слоя, примыкающего к границе, и предел текучести глубинно залегающей среды. Эти данные могут быть полезны в различного рода гидро- и геофизических приложениях.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00077).

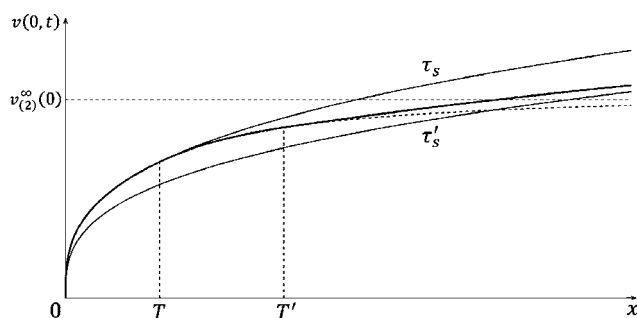


Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банько В.А., Георгиевский Д.В. Квазиавтомодельные решения некоторых параболических задач в теории вязкопластического течения // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2023. № 4. С. 39–45.
2. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 372 с.
3. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.

Acceleration of Shear Flow in a Viscoplastic Half-Plane with a Depth-Varying Yield Stress

D. V. Georgievskii^{a-c, #}, V. A. Banko^{a, ##}

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^bIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

^cMoscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

[#]e-mail: georgiev@mech.math.msu.su,

^{##}e-mail: mr.banko.vlad@mail.ru

The problem of acceleration from a state of rest of a shear flow in a viscoplastic half-plane is studied analytically when a tangential stress is specified at the boundary. It is assumed that the dynamic viscosity and density of the medium are constant, and the yield stress can change in a continuous or discontinuous manner depending on the depth. The entire half-plane at any moment

of time consists of previously unknown layers where shear flow occurs and rigid zones. The latter can move as a rigid whole, or they can be motionless, such as, for example, a half-plane, to which disturbances caused by the action of tangential forces have not yet reached. To find the stress and velocity fields, a method is developed based on quasi-self-similar diffusion-vortex solutions of parabolic problems in areas with moving boundaries. The question of what conclusions about the depth distribution of the yield stress can be drawn from available measurements of the velocity of the half-plane boundary is discussed.

Keywords: viscoplastic medium, yield stress, acceleration, shear stress, stress intensity, one-dimensional shear flow, rigid zone, diffusion of vortex layer

REFERENCES

1. *Banko V.A., Georgievskii D.V.* Quasi-self-similar solutions of some parabolic problems in the theory of viscoplastic flow // *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2023, vol. 78, no. 4, pp. 102–109.
2. *Ogibalov P.M., Mirzadzhanzade A.Kh.* Nonsteady Motions of Viscoplastic Media. Moscow: Moscow Univ. Press, 1977. (in Russian)
3. *Meirmanov A.M.* The Stefan Problem. Novosibirsk: Nauka, 1986. (in Russian)