ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2024, том 88, № 1, с. 67–78

УДК: 517.9

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ОТ РАЗРЕЖЕННЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Л. П. Югай[1,*]

[1]*Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, Чирчик, Узбекистан*
**e-mail: yugailp@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 25.01.2024 г.
Принято к публикации 27.01.2024 г.

Для нелинейных конфликтно управляемых процессов (дифференциальных игр) рассматривается задача уклонения траекторий в постановке Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко. Терминальное множество имеет разреженную структуру. В отличие от известных работ оно может иметь предельную точку. Получены новые достаточные условия и методы уклонения, позволяющие решить задачи уклонения траекторий нелинейных колебательных систем. В качестве примера приведено решение задачи о раскачке обобщенного математического маятника.

Ключевые слова: уклонение, убегание, преследователь, уклоняющийся игрок, управление, разреженное, дискретное, терминальное множество, маятник

DOI: 10.31857/S0032823524010058 **EDN:** YUOZHZ

1. Введение. Постановка глобальной задачи уклонения траекторий**.** Пусть конфликтно управляемый процесс описывается уравнением

$$\dot{z} = f(z,u,v), \tag{1.1}$$

где $z \in R^n$, $\dot{z} \in R^n$, точка над z означает производную по времени, $u \in P \subset R^p, v \in Q \subset R^q, P$ и Q — компакты с началами своих несущих пространств ($0_p \in P$ и $0_q \in Q$). Функция $f(z,u,v)$ непрерывна по $(z,u,v) \in X = R^n \times P \times Q$ и удовлетворяет условиям:

1) Для каждого компакта $K \subset X$ найдется константа Липшица $L = L(K) > 0$, такая, что при всех $(z_1,u,v),(z_2,u,v) \in K$ выполняется условие Липшица:

$$\left|f\left(z_2,u,v\right) - f\left(z_1,u,v\right)\right| \le L\left(K\right)\left|z_2 - z_1\right| \tag{1.2}$$

2) Для любых компактов $K_1 \subset K_2 \subset X$ найдутся такие константы Липшица $L(K_1)$ и $L(K_2)$, что $L(K_1) \le L(K_2)$ (монотонность $L(K)$ по включению).

3) Для всех $(z,u,v) \in X$ выполняется неравенство (оценка) Филиппова:

$$\left\langle z, f(z,u,v)\right\rangle \le C(1 + |z|^2);\ C = \text{const} \ge 0 \tag{1.3}$$

Терминальное множество M имеет вид:

$$\begin{gathered} M = \left\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_i, \ldots\right\} \\ m_i \in R^n,\ i \in N = \left\{1,2,3,\ldots\right\} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Параметры u и v в (1.1) выбираются двумя сторонами (игроками) в виде измеримых функций $u = u(t) \in P$, $v = v(t) \in Q$; $t \geq 0$, при этом каждый игрок решает свою задачу. Игрок, выбирающий $v = v(t) \in Q$ (уклоняющийся игрок), стремится при любом допустимом $u(t) \in P$ уклонить соответствующую выбранным управлениям траекторию $z(t)$ уравнения (1.1), $z(0) = z_0 \notin M$, от терминального множества M при всех $t \geq 0$. Такую задачу называют глобальной задачей уклонения (убегания) от M. Задача второго игрока (преследующего) заключается в приведении траектории в некоторый конечный момент времени на терминальное множество при любом допустимом поведении уклоняющейся стороны. Впервые глобальная задача уклонения (убегания) была изложена в работе Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко [1, стр. 335–338], при этом постановка задачи существенно отличалась от постановок дифференциальных игр в [2, 3].

Множества вида (1.4) имеют разреженную структуру. Задачи управления и конфликтного управления траекториями (1.1) относительно таких терминальных множеств возникают при исследовании различных колебательных процессов [3–13]. Действительно, при исследовании конфликтно управляемых колебательных систем важным является приведение траектории системы в одно из ее положений равновесия (задача преследования) или уклонение траектории от всех положений равновесия исследуемой системы (задача уклонения). В совокупности указанные положения равновесия образуют терминальное множество, которое для многих колебательных систем является дискретным (разреженным), и имеют вид (1.4), соответствующий пример приведен и исследован ниже.

В данной работе исследуется глобальная задача уклонения траекторий (1.1) от разреженного терминального множества (1.4). Предполагается, что уклоняющийся игрок при формировании управления уклонения $v(t) \in Q$ знает начальную позицию, терминальное множество, параметры (1.1) и значение управления $u(t) \in P$ в тот же момент времени, но не знает значения $u(s) \in P$ при $s > t$. Заметим, что выбранное управление преследователя $u(t) \in P$ и конструируемое управление уклоняющегося игрока $v(t) \in Q$ в паре должны порождать единственную траекторию системы (1.1), удовлетворяющую заданным начальным условиям. Такие пары управлений называются совместными. Все типы совместных пар управлений (стратегий) для позиционных дифференциальных игр рассмотрены в [17].

В настоящей статье решена глобальная задача уклонения, указано правило построения стратегии уклонения на основе локальных управлений маневров обхода точек терминального множества (Теорема 4.1) и приведен пример.

2. Основные определения и леммы

2.1. Свойства решений на компактах. Пусть $B(a,r)$ и $S(a,r)$, соответственно, замкнутый шар и сфера радиусов $r \geq 0$ с центрами в точке $a \in R^n, S = S(0_n,1), B = B(0_n,1), 0_n$ – начало R^n, $\mathrm{co}\{X\}$ — выпуклая оболочка множества X, $\langle , \rangle$ — знак скалярного произведения, $\mathrm{Int}_{R^n} A$ — внутренность множества A относительно R^n, $|a|^2 =< a,a >$, $a \in R^n$. Всюду ниже константами будут называться положительные числа, зависящие от исходных параметров процесса (1.1) ($P,Q,M,L = L(K),C$ и др.), но не зависящие от управлений и хода процесса уклонения.

Лемма 2.1. (о выборе компакта). Пусть в задаче уклонения (1.1) — (1.4) точка $m_i \in M$, $z(t)$ — некоторое допустимое решение (1.1), $z(0) = z_0 \notin M$. Тогда для всех $t \in I = [0,1]$ выполняется:

$$1)\ \max\{|z(t)|, |z(t) - m_i|, |z(t) - z_0|\} \leq \rho_i(t), \tag{2.1}$$

где $\rho_i(t) = 2(1 + |z_0 - m_i| + |m_i|)e^{Ct}$

2) Решение $z(t) \in B(0_n, \rho_i(1))$ и будет единственным на отрезке I.

Доказательство. Пусть $z(t)$ — любое допустимое решение (1.1), определенное при $t \in \left[0, t_*\right)$, $t_* > 0$. Тогда из (1.1) и (1.3) получаем:

$$\left\langle z(t), \dot{z}(t) \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1 + \left|z(t)\right|^2) \le C(1 + \left|z(t)\right|^2)$$

Интегрирование последнего неравенства приводит к оценкам:

$$\left|z(t)\right|^2 \le 1 + \left|z(t)\right|^2 \le (1 + \left|z_0\right|^2)e^{2Ct} \le (1 + \left|z_0\right|)^2 e^{2Ct},$$

из которых следует неравенство для $\left|z(t)\right|$ в (2.1):

$$\left|z(t)\right| \le (1 + \left|z_0\right|)e^{Ct} \le (1 + \left|z_0 - m_i\right| + \left|m_i\right|e^{Ct} \tag{2.2}$$

Второе неравенство из (2.1) для оценки $\left|z(t) - m_i\right|$ легко следует из (2.2):

$$\left|z(t) - m_i\right| \le \left|z(t)\right| + \left|m_i\right| \le 2(1 + \left|z_0 - m_i\right| + \left|m_i\right|)e^{Ct} \le \rho_i(t) \tag{2.3}$$

Из (2.2) следует, что траектория $z(t)$ за конечное время не сможет "уйти в бесконечность", поэтому она продолжаема вправо при всех $t \ge 0$, тем самым будет существовать и при всех $t \in I = [0,1]$.

Оставшееся неравенство из (2.1) доказывается аналогично.

Выберем в (1.2) компакт $K = B(0_n, \rho_i(1)) \times P \times Q$, и пусть $L(K)$ — соответствующая константа Липшица. Тогда (1.2) и (2.2) обеспечивают существование и единственность решения $z(t)$, $z(0) = z_0 \notin M$ и условие $z(t) \in B(0_n, \rho_i(1))$ при всех $t \in I = [0,1]$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если в Лемме 2.1 дополнительно положить, что $\left|z_0 - m_i\right| \le \delta_i$, где константа $\delta_i \in (0;1]$, то найдутся константы d_{1i} и d_{2i}, для которых при всех $t \in \left[0,1\right]$ справедливо неравенство

$$\left|z(t) - m_i\right| \le d_{1i}\delta_i + d_{2i}t \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $z(t)$ — решение (1.1), удовлетворяющее начальным условиям $z(0) = z_0$ и определенное при $t \in I = \left[0,1\right]$. По лемме 2.1 $z(t) \in B(0_n, \rho_i)$, $\rho_i = \rho_i(1)$. Пусть далее $K_i = B(0_n, \rho_i) \times P \times Q$, $L_i = L(K_i)$ — константа Липшица для K_i. Тогда из интегрального представления решения (1.1) равенства

$$f(z(s), u(s), v(s)) = f(z(s), u(s), v(s)) - f(m_i, u(s), v(s)) + f(m_i, u(s), v(s))$$

и условия Липшица (1.2) имеем неравенство

$$\left|z(t) - m_i\right| \le \left|z_0 - m_i\right| + \int_0^t \left[L_i \left|z(s) - m_i\right| ds + \beta_i\right] ds, \tag{2.5}$$

где $\beta_i = \max\limits_{(u,v) \in P \times Q} \left|f(m_i, u, v)\right|$. Применение к (2.5) известного неравенства Гронуолла–Беллмана [13] приводит к неравенству

$$\left|z(t) - m_i\right| \le e^{L_i t}\left|z_0 - m_i\right| + \frac{\beta_i}{L_i}(e^{L_i t} - 1); \; t \in I,$$

отсюда можно видеть, что

$$\left|z(t) - m_i\right| \le e^{L_i}\left|z_0 - m_i\right| + \beta_i e^{L_i} t \tag{2.6}$$

Положим $\rho_{i0} = 2(2+|m_i|)\,e^C$ и $K_i^0 = B(0_n,\rho_{i0}) \times P \times Q$. Поскольку $\rho_i < \rho_{i0}$, то $K_i \subset K_i^0$, поэтому по условию монотонности констант Липшица будет $L_i \le L_{i0}$, где $L_{i0} = L(K_i^0)$ является, очевидно, константой. С учетом этих замечаний, заменяя в (2.6) L_i на L_{i0}, получим (2.4), в котором за константы можно принять $d_{1i} = e^{L_{i0}}$, $d_{2i} = \beta_i e^{L_{i0}}$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Неравенства (2.3) и (2.4) дают различные верхние оценки для $|z(t) - m_i|$, что необходимо для использования в следующих целях: (2.3) позволяет траектории находиться внутри определенного компакта, а "более тонкое" неравенство (2.4) понадобится ниже при доказательстве локального маневра уклонения (обхода) траектории от точки m_i внутри того же компакта. Кроме того, оценка (2.3) зависит от ρ_i и L_i, не являющихся, вообще говоря, константами (они зависят от z_0), в то время как в (2.4) входят только константы.

2.2. Свойства наборов Каратеодори. Пусть $m_i \in M$, $i \in N$. Введем обозначения:

$$g(m_i,u,v) = f(m_i,u,v) - f\left(m_i,{}^0p,{}^0q\right)$$

$$A_{1i} = \mathrm{co}\left\{\psi \in S : \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left\langle \psi, g(m_i,u,v)\right\rangle > 0\right\} \tag{2.7}$$

$$A_{2i} = \mathrm{co}\left\{\psi \in S : \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left\langle \psi, g(m_i,u,v)\right\rangle > 0\right\} \tag{2.8}$$

Определение 2.1. [14, стр.6]. Набор векторов $\left\{\psi_j \in R^n, j = 1,2,\ldots,n+1\right\}$ называется аффинно независимым, если линейно независимы векторы

$$\psi_2 - \psi_1, \psi_3 - \psi_1, \ldots, \psi_{n+1} - \psi_1$$

Определение 2.2. Множество векторов $\left\{\psi_j \in R^n, j = 1,2,\ldots,n+1\right\}$ называется набором Каратеодори (или K-набором), если эти векторы аффинно независимые и их выпуклая комбинация равна 0_n. Множество всех наборов Каратеодори, составленных из векторов множеств A_{li} ((2.7) — (2.8)) обозначим через K_{li}, $i \in N$, $l = 1,2$.

Определение 2.3. *Пусть* $N_{1i} = \sup\limits_{K_\alpha \in K_{1i}} \min\limits_{1\le k\le n+1} \max\limits_{v\in Q}\min\limits_{u\in P}\left\langle \psi_k^\alpha, g(m_i,u.v)\right\rangle,$

$$N_{2i} = \sup_{K_\beta \in K_{2i}} \min_{1\le k\le n+1} \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left\langle \psi_k^\beta, g(m_i,u.v)\right\rangle,$$

где $K_\alpha = \left\{\psi_k^\alpha, k = 1,2,\ldots,n+1\right\} \in K_{1i}$, $K_\beta = \left\{\psi_k^\beta, k = 1,2,\ldots,n+1\right\} \in K_{2i}$.

Ясно, что если $K_{li} \ne \varnothing$, то числа $N_{li} > 0$. Условия, при которых числа N_{1i} и N_{2i} положительны, даются в нижеследующей лемме.

Лемма 2.3. Пусть $0_n \in \mathrm{co}\,A_{li}$ ($l = 1,2$; $i \in N$). Тогда $\dim \mathrm{co}\,A_{li} = n$, $K_{li} \ne \varnothing$, $0_n \in \mathrm{Int}_{R^n}\,\mathrm{co}\,A_{li}$.

Доказательство. Непрерывная функция $\left\langle \psi, g(m_i,u,v)\right\rangle$ после операций минимума и максимума на компакте $P \times Q$ будет непрерывной по $\psi \in S$, поэтому для каждого $\psi_0 \in A_{li}$ найдется число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\psi_0) > 0$, такое, что при каждом

$\psi \in S(\psi_0, \varepsilon_0) = B(\psi_0, \varepsilon_0) \cap S$ строгое неравенство в определении A_{li} будет сохраняться, тем самым будет выполняться включение

$$\psi \in S(\psi_0, \varepsilon_0) \subset A_{li} \tag{2.9}$$

$S(\psi_0, \varepsilon_0)$ является окрестностью радиуса $\varepsilon_0 > 0$ точки $\psi_0 \in A_{li}$ на сфере S, тогда $\operatorname{co} S(\psi_0, \varepsilon_0)$ представляет собой n-мерный "шаровой сегмент", поэтому из (2.9) будет следовать включение

$$\operatorname{co} S(\psi_0, \varepsilon_0) \subset \operatorname{co} A_{li} \subset R^n, \tag{2.10}$$

отсюда в силу $\dim \operatorname{co} S(\psi_0, \varepsilon_0) = n$ (размерность "шарового сегмента") и (2.10) следует, что $\dim \operatorname{co} A_{li} = n$. Здесь под размерностью множества понимается размерность его несущего пространства.

Теперь легко показать, что $K_{li} \neq \varnothing$. Действительно, в силу $\dim \operatorname{co} A_{li} = n$, в A_{li} можно выбрать систему из n линейно независимых векторов. Добавление к этой системе любого вектора из A_{li}, не равного выбранным векторам, приведет к системе из $n+1$ векторов, которая, очевидно, образует K — набор из A_{li}.

Докажем, что $0_n \in \operatorname{Int}_{R^n} \operatorname{co} A_{li}$. Пусть при выбранных $l = 1,2;\ i \in N$, будет $0_n \in \operatorname{co} A_{li}$. Тогда по теореме Каратеодори [14,15] для некоторых

$$\lambda_k \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1,\ \varphi_k \in \operatorname{co} A_{li} \tag{2.11}$$

будет справедливо представление

$$\lambda_1 \varphi_k + \lambda_2 \varphi_k + \ldots + \lambda_{n+1} \varphi_k = 0_n \tag{2.12}$$

Далее, для каждого φ_k найдется такое число $\omega_k > 0$, что в силу (2.9)

$$\operatorname{co} S(\varphi_k, \omega_k) \subset \operatorname{co} A_{li};\ k = 1,2,\ldots,n+1 \tag{2.13}$$

Очевидно, что в каждый "шаровой сегмент" $\operatorname{co} S(\varphi_k, \omega_k)$ можно вписать шар радиуса $\delta_k = \omega_k^2 / 4 < 1$, с центром, расположенным на векторе φ_k. Пусть $\min\limits_{1 \leq k \leq n+1} \delta_k = \delta$. Из простых геометрических соображений следует, что

$$\begin{gathered} (1-\delta)\varphi_k + \delta B \subset (1-\delta_k)\varphi_k + \delta_k B, 1 \leq k \leq n+1 \\ B((1-\delta)\varphi_k, \delta) \subset B((1-\delta_k)\varphi_k, \delta_k) \end{gathered} \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) имеем включения

$$B((1-\delta_k)\varphi_k, \delta_k) \subset \operatorname{co} S(\varphi_k, \delta_k) \subset \operatorname{co} S(\varphi_k, \omega_k) \subset \operatorname{co} A_{li} \tag{2.15}$$

Далее, из (2.11)–(2.15) получаются соотношения

$$\begin{gathered} 0_n + \delta B = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k (\varphi_k + \delta B) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \left[(1-\delta)\varphi_k + \delta \varphi_k + \delta B \right] = \\ = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k B((1-\delta)\varphi_k, \delta) + \delta \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k B((1-\delta)\varphi_k, \delta) \subset \\ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k B((1-\delta_k)\varphi_k, \delta_k) \subset \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \operatorname{co} S(\varphi_k, \omega_k) \subset \operatorname{co} A_{li}, \end{gathered}$$

которые показывают, что $0_n \in \operatorname{Int}_{R^n} \operatorname{co} A_{li}$. Лемма доказана.

3. Теорема о локальном уклонении

Предположение 3.1 (о разреженности M). Существует число $r_0 \geq 0$ такое, что множество $M \cap B(0_n, r) = \varnothing$ при $r \in [0; r_0)$, а при каждом $r \geq r_0$ состоит из конечного числа точек терминального множества M.

Предположение 3.2. $n = \dim R^n \geq 2$ и $0_n \in A_1 \cup A_2$, где $A_1(A_2)$ является пересечением всех множеств $A_{1i}(A_{2i})$; $i \in N$.

Теорема 3.1 (о локальном уклонении). Пусть для конфликтно управляемого процесса (1.1)–(1.4) выполняются Предположения 3.1, 3.2 и $m_i \in M$ — фиксированная точка. Тогда существуют такие константы $\delta_i, \varepsilon_i, \theta_i, \sigma_i$, что для любой начальной позиции $z(0) = z_0 \notin M$ с условием $|z_0 - m_i| \leq \delta_i$ и любого допустимого управления $u(t) \in P$ существует специально конструируемое измеримое управление $\tilde{v}(t) \in Q$, такое, что траектория $z(t)$ уравнения (1.1), $z(0) = z_0$, соответствующая управлениям $u(t) \in P$ и $\tilde{v}(t) \in Q$, удовлетворяет при всех $t \in (0; \theta_i]$ неравенствам:

$$1)\ z(t) \in B(0_n, \rho_i),\ \rho_i = 2(1 + |z_0 - m_i| + |m_i|)e^C \tag{3.1}$$

$$2)\ \frac{\varepsilon_i}{2} \geq |z(t) - m_i| \geq \frac{1}{3} N_{2i} t > 0 \tag{3.2}$$

$$3)\ |z(\theta_i) - m_i| > \sigma_i \tag{3.3}$$

Далее, неравенства (3.1)–(3.3) обеспечивают уклонение траектории $z(t)$ от терминального множества M на “малом” отрезке времени $[0; \theta_i]$.

Доказательство. Пусть $K_i = B(0_n, \rho_i) \times P \times Q$ и $L_i = L(K_i)$ — константа Липшица для K_i. В силу выбора ρ_i и Леммы 2.1, точки z_0 и m_i находятся внутри шара $B(0_n, \rho_i)$. Будем считать, что в Предположении 3.2 $0_n \in A_2$ (случай $0_n \in A_1$ рассматривается аналогично). Тогда по Лемме 2.3 $K_{2i} \neq \varnothing$ и $N_{2i} > 0$, поэтому найдется набор $K_{i0} = \{\psi_{ij}^0, j = 1, 2, \ldots, n+1\} \notin K_{2i}$, для которого

$$\min_{1 \leq j \leq n+1} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left\langle \psi_{ij}^0, g(m_i, u, v) \right\rangle \geq \frac{2}{3} N_{2i} > 0 \tag{3.4}$$

Для выбранной точки $m_i \in M$ зафиксируем K-набор $K_{i0} \in K_{2i}$ и выберем в этом наборе вектор $\psi_{ik}^0 \in K_{i0}$, для которого при всех $t \in [0,1]$ имеет место неравенство:

$$\left\langle \psi_{ik}^0, z_0 - m_i + tf(m_i, 0_p, 0_q) \right\rangle \geq 0 \tag{3.5}$$

Такой вектор $\psi_{ik}^0 \in K_{i0}$ существует, потому что K_{i0} является набором Каратеодори и $n \geq 2$ (Предположение 3.2). Далее, для вектора ψ_{ik}^0 и управления $u(t) \in P$, согласно Лемме Филиппова об измеримом выборе для дифференциальных игр [15], найдется такая измеримая функция $\tilde{v}(t) \in Q$, что справедливо неравенство

$$\left\langle \psi_{ik}^0, g(m_i, u(t), \tilde{v}(t)) \right\rangle \geq \frac{2}{3} N_{2i} > 0;\ t \in [0,1] \tag{3.6}$$

Управление $\tilde{v}(t) \in Q$ называется специальным управлением уклонения от точки $m_i \in M$ при $t \in [0,1]$, а процесс применения $\tilde{v}(t) \in Q$ — локальным маневром уклонения (обхода) [1]. Рассмотрим решение $z(t)$, $z(0)=z_0 \notin M$, соответствующее выбранному преследователем допустимому управлению $u(t)\in P$ и специальному управлению уклонения $\tilde{v}(t)\in Q$. По лемме 2.1 для построенных K_i и $L_i=L(K_i)$ траектория $z(t)$ будет находиться в шаре $B(0_n,\rho_i)$ при всех $t\in[0,1]$.

Из интегрального представления решения уравнения (1.1), равенства

$$f(z,u,v)=f(z,u,v)-f(m_i,u,v)+$$
$$+f(m_i,u,v)-f(m_i,0_p,0_q)+f(m_i,0_p,0_q)$$

условия Липшица (1.2) и неравенств (3.4)–(3.6) вытекает, что

$$\left\langle \psi_{ik}^0, z(t)-m_i\right\rangle \geq \frac{2}{3}N_{2i}t-\int_0^t L_i\left|z(s)-m_i\right|ds \tag{3.7}$$

Для интеграла в (3.7), согласно неравенству (2.4) Леммы 2.2, имеем оценку:

$$\int_0^t L_i\left|z(s)-m_i\right|ds \leq L_i\left(d_{1i}\delta_i t+\frac{1}{2}d_{2i}t^2\right) \tag{3.8}$$

Введем следующие константы:

$$\gamma_i=\min_{j\neq i}\left|m_i-m_j\right|>0,\ \varepsilon_i=\min\left\{1;\frac{1}{2}\gamma_i\right\},\ \theta_i=\min\left\{1;\frac{N_{2i}}{6\beta_i e^{2L_{i0}}};\frac{\varepsilon_i}{2\beta_i e^{L_{i0}}}\right\} \tag{3.9}$$

$$\delta_i=\min\left\{1;\frac{N_{2i}}{6\beta_i e^{L_{i0}}};\frac{\varepsilon_i}{2e^{L_{i0}}}\right\},\ \sigma_i=\min\left\{1;\frac{1}{8}N_{2i}\theta_i;\frac{\varepsilon_i}{4}\right\} \tag{3.10}$$

В (3.9) константы γ_i существуют в силу Предположения 1 о разреженности M, константа L_{i0} введена в Лемме 2.2 (формула (2.4)).

Далее, непосредственное применение к неравенствам (3.7) и (3.8) результатов Леммы 2.2 с выбранными константами (3.9)–(3.10) приводит к выполнению при всех $t\in[0,\theta_i]$ следующих неравенств:

$$\left|z(t)-m_i\right|\leq d_{1i}\delta_i+d_{2i}\theta_i\leq\frac{\varepsilon_i}{2} \tag{3.11}$$

$$\left\langle \psi_{ik}^0, z(t)-m_i\right\rangle \geq \frac{2}{3}N_{2i}t-$$
$$-L_i\left(d_{1i}\delta_i t+\frac{1}{2}d_{2i}t^2\right)\geq\frac{1}{3}N_{2i}t$$

$$\left|z(t)-m_i\right|\geq\left\langle \psi_{ik}^0, z(t)-m_i\right\rangle\geq\frac{1}{3}N_{2i}t\ ;\ t\in[0,\theta_i] \tag{3.12}$$

Объединяя (3.11) и (3.12), получаем доказательство аналогов неравенств (3.2) и (3.3):

$$0<\frac{1}{3}N_{2i}t\leq\left|z(t)-m_i\right|\leq\frac{\varepsilon_i}{2}\ ;\ t\in[0,\theta_i] \tag{3.13}$$

$$\left|z(\theta_i)-m_i\right|\geq\frac{1}{4}N_{2i}\theta_i>\frac{1}{8}N_{2i}\theta_i\geq\sigma_i>0 \tag{3.14}$$

Неравенства (3.13) и (3.14) показывают, что при $t\in[0,\theta_i]$ траектория $z(t)$ не будет совпадать с точкой m_i, оставаясь в $\varepsilon_i/2$-окрестности точки m_i, а в момент θ_i

траектория покидает σ_i -окрестность точки m_i, но остается по-прежнему в ее $\varepsilon_i/2$ — окрестности, значит, не будет находиться в $\varepsilon_i/4$ -окрестностях остальных точек M и не попадает на все M, тем самым уклоняясь отнего при всех $t \in [0,\theta_i]$. Таким образом, специальное управление уклонения $\tilde{v}(t) \in Q$ обеспечивает локальное уклонение траектории (1.1) от M “на малом” положительном отрезке времени $[0,\theta_i]$ при этом, за время локального уклонения от точки $m_i \in M$ траектория $z(t)$ не покидает шар $B(0_n,\rho_i)$.Теорема доказана.

Замечание 3.1. Специальное управление уклонения формируется на основе (3.4)–(3.6) в виде измеримой функции $\tilde{v}(t) \in Q$, $t \in [0,\theta_i]$, которая в каждый момент времени $t \in [0,\theta_i]$ зависит еще от начальной позиции z_0, точки $m_i \in M$ и значения управления $u(t) \in P$.

Замечание 3.2. В дальнейшем при $t > \theta_i$ уклоняющемуся игроку предлагается полагать $v(t) = 0_q \in Q$ до тех пор, пока при некотором $j = 1,2,...,$ в некоторый первый момент $t_j > \theta_i$ будет выполняться неравенство

$$\left|z(t_j) - m_j\right| = \sigma_j$$

Тогда значения t_j и $z(t_j)$ выбираются за новые начальные данные, и уклоняющийся игрок совершает при $t \geq t_j$ маневр уклонения от точки m_j, при этом локальное управление обхода точки m_j строится в соответствии с (3.4)–(3.6). Здесь возможен случай, когда $j = i$, что соответствует повторному маневру обхода точки $m_i \in M$.

4. Глобальное уклонение (основной результат)

Теорема 4.1 (о глобальном уклонении). Пусть для конфликтно управляемого процесса (1.1) с разреженным терминальным множеством (1.4) выполняются Предположения 3.1 и 3.2. Тогда из любой начальной позиции $z_0 \notin M$, при всех $t \geq 0$ возможно уклонение от M траектории $z(t), z(0) = z_0$, уравнения (1.1). Доказательство будет следовать идеям [1, 4, 12] и заключаться в применении Теоремы 3.1 о локальном уклонении к возможности глобального уклонения траектории при всех $t \geq 0$.

Выберем константу $r_1 > 0$ такой, что $M_1 = B(0_n,r_1) \cap M \neq \varnothing$ (Предположение 3.1) и пусть

$$M_1 = \left\{ \begin{matrix} m_{11}, m_{12}, ..., m_{1q_1} \\ m_{1j} \in M, j = 1,2,...,q_1 < \infty \end{matrix} \right\} \tag{4.1}$$

Дополнительно выберем $r_1 > 0$ так, чтобы для точек z_0 и $m_{1j} \in M_1$ выполнялись условия Леммы 2.1 о выборе компакта, для этого достаточно взять

$$r_1 = 2 \max_{1\leq j\leq q_1} (\left|z_0 - m_{1j}\right| + 1 + \left|m_{1j}\right|)e^C \tag{4.2}$$

В силу (4.2) и Леммы 2.1 все точки z_0 и m_{1j} находятся в шаре $B(0_n,r_1)$. Для каждой точки $m_{1j} \in M_1 \subset M$ можно определить в соответствии с Теоремой 3.1 набор констант $\delta_{1j}, \varepsilon_{1j}, \theta_{1j}, \sigma_{1j}$, которые обеспечивают локальный маневр уклонения от каждой точки $m_{1j} \in M_1$; $j = 1,2,...,q_1$.

Введем для каждого $j = 1,2,...,q_1$ следующие множества:

$$D_{1j} = \left\{z \in B(0_n,r_1) : \left|z - m_{1j}\right| \leq \sigma_{1j}\right\},\ F_{1j} = D_{1j} \setminus \partial D_{1j}, \tag{4.3}$$

где ∂ — символ границы множества. Заметим, что в силу выбора констант σ_{1j} (3.9)–(3.10) множества D_{1j} попарно не пересекаются при $j \neq k$. Из открытых множеств F_{1j} выделим те, для которых

$$Int_{R^n}\left\{F_{1j} \cap (R^n \setminus B(0_n, r_1))\right\} \neq \varnothing \tag{4.4}$$

Пусть это будут множества F_{1j} при $j = p_1 + 1, \dots, q_1, p_1 \leq q_1$, при этом, увеличивая, если нужно r_1, можно добиться выполнения включений

$$D_{1j} \subset B(0_n, r_1), \text{ при } j = 1, 2, \dots, p_1, p_1 \leq q_1 \tag{4.5}$$

Введем следующие множества: F_1 — объединение F_{1j} при $j = p_1 + 1, \dots, q_1$; D_1 есть объединение D_{1j} при $j = 1, 2, \dots, p_1$; $B_1 = B(0_n, r_1) \setminus F_1$. В силу открытости множеств F_{1j} B_1 будет компактным и содержать точки $m_{11}, m_{12}, \dots\dots, m_{1p_1}$ из M (остальные точки исключены из B_1 по построению). По существу B_1 представляет собой шар $B(0_n, r_1)$ с удаленными из него открытыми шарами F_{1j} радиусов σ_{1j} с центрами в точках $m_{1j}, j = p_1 + 1, \dots, q_1$, $p_1 \leq q_1$, имеющими непустые пересечения с границей множества $B(0_n, r_1)$.

Организуем первый цикл процесса уклонения, которое будет происходить в множестве B_1. Пусть $z(t)$ — некоторая допустимая траектория конфликтно управляемой системы (1.1) с начальным условием $z(0) = z_0 \in B_1 \setminus M_1$.

Для поведения $z(t)$ в B_1 возможны следующие два случая:

E_1) Траектория $z(t)$ начинается и находится внутри B_1, не выходя на границу ∂B_1 при всех $t \geq 0$. При этом во время пребывания в B_1 и формирования $z(t)$ уклоняющийся игрок может совершить конечное или бесконечное число маневров обхода точек из M_1. Напомним, что в периоды между маневрами уклоняющийся игрок может применять любое допустимое управление, например, равное нулевому вектору;

E_2) Траектория $z(t)$ начинается внутри B_1, и в некоторый первый конечный момент времени $t_1 > 0$ выходит на границу B_1. При этом до выхода на границу уклоняющийся игрок может совершить конечное число маневров обхода точек из M_1.

Рассмотрим случай E_1). Здесь каждый маневр обхода (если он имеет место) уклоняет траекторию от некоторой точки из M_1, значит, и от всего M (Теорема 3.1). Конечное число маневров не приводит траекторию $z(t)$ на M, а пребывание в множестве B_1 при всех $t \geq 0$ указывает на то, что $z(t) \notin M$ при всех $t \geq 0$, то есть из точки z_0 возможно уклонение. Если же уклоняющийся игрок, находясь в B_1, совершает бесконечное число маневров обхода от точек конечного множества M_1, то найдется точка M_1, относительно которой происходит бесконечное число маневров обхода с фиксированным временем обхода. Тогда общее время обхода будет бесконечным, значит, в рассматриваемом случае из начальной точки возможно уклонение от M при всех $t \geq 0$.

Рассмотрим случай (E_2). Прежде всего заметим, что уклоняющийся игрок в этом случае может совершить лишь конечное число маневров обхода, поскольку бесконечное число маневров обхода потребует бесконечного времени (см. E_1)), и тогда конечного времени выхода на границу ∂B_1 не будет. Таким образом, уклоняющийся игрок после конечного числа маневров обхода выходит на границу ∂B_1 в некоторый момент времени $t_1 > 0$, т.е. $z(t_1) \in \partial B_1$.

На этом первый цикл уклонения во множестве $B_1 \subset B(0_n, r_1)$ завершается и начинается организация второго цикла уклонения.В этом случае принимаем за новые начальные данные $t_1 = 0$, $z(t_1) = z(0) = z_0$. Заметим, что новое начальное значение $z(t_1) \notin M$, поскольку граница ∂B_1 по построению множества B_1 не содержит точек из M. Далее, все построения производятся аналогично первому циклу. Сначала определяется шар $B(0_n, r_2)$, такой, что $M_2 = B(0_n, r_2) \bigcap M \neq \varnothing$ и

$$M_2 = \left\{ \begin{array}{c} m_{21}, m_{22}, \ldots\ldots, m_{2q_2} \\ m_{2j} \in M, j = 1,2,\ldots,q_2 < \infty \end{array} \right\},$$

для этого можно положить $r_2 = 2 \max\limits_{1\le j\le q_2} (\left|z_0 - m_{2j}\right| + 1 + \left|m_{2j}\right|)e^C + r_1 + 2$.

Для M_2 повторяем все рассуждения, аналогичные (4.1)–(4.5), и строим множество B_2 (аналог B_1), для которого рассматривают два случая типа $E_1)$ и $E_2)$. Очевидно, что по построению $B_1 \subset B_2$. Продолжая индуктивно этот процесс, получаем для случаев типа $E_2)$ (случаи типа $E_1)$ легко анализируются) последовательность вложенных множеств

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots \tag{4.6}$$

с радиусами $r_{n+1} \ge r_n + 2, n \in N$. Процесс уклонения траектории $z(t), z(0) = z_0 \notin M$, на n-м цикле состоит в уклонении $z(t)$ внутри множества B_n и выходом ее в случае $E_2)$ на границу ∂B_n в первый момент времени $t_n > 0$, который принимается за начало следующего цикла. Заметим, что в (4.6) цепочка включений может оказаться конечной, т.е. на некотором конечном цикле выхода на границу множества не происходит, и процесс бесконечного уклонения разрешается случаем $E_1)$. Покажем, что в случае бесконечной цепочки включений (4.6), когда каждый цикл завершается выходом траектории на границу множества (случай $E_2)$), траектория $z(t), z_0 \notin M$, не попадет на M при всех $t \ge 0$. Время перехода из $z_0 \notin M$ на границу ∂B_n за n циклов уклонения будет равно $T_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$, где все слагаемые положительны. Ясно, что по построению траектория $z(t) \notin M$ при всех $t \in [0, T_n]$.

Покажем, что $T_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Допустим противное: $T_n \to T < +\infty$. Тогда траектория $z(t)$ не выйдет из шара $B(0_n, R_0)$, где $R_0 = \max\limits_{0\le t\le T} z(t) < +\infty$, что противоречит тому, что радиусы r_n шаров B_n неограниченно возрастают. Поскольку $T_n \to +\infty$, при $n \to +\infty$, то убегание из точки $z_0 \notin M$ возможно при всех $t \ge 0$. Теорема доказана.

5. Пример. Задача о раскачке обобщенного математического маятника. Уравнения движения конфликтно управляемой системы (обобщенного математического маятника) имеют вид (ср. [3, 4]):

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2 \\ \dot z_2 &= -a\sin(z_1 + \mu z_1^2) + u + v, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $z = (z_1, z_2) \in R^2$; $a > 0$, $|u| \le \alpha$, $|v| \le \beta$; $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\mu \ge 0$.

Терминальное множество M есть объединение положений равновесия (5.1), имеющих вид $m_k = (z_1^k; 0)$, где z_1^k — неотрицательные корни уравнения $z_1 + \mu z_1^2 = \pi k$; $k = 0,1,2,\ldots$. Нетрудно показать, что для корней этого уравнения справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\sqrt{1 + 8\pi(k+1)}} \le \left| z_1^{k+1} - z_1^k \right| \le \\ &\le \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 8\pi k}};\ k = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{5.2}$$

из которой легко следует, что M имеет предельную точку на бесконечности.

Рассмотрим для (5.1) задачу уклонения (раскачки маятника) от M [3,4]. Проверим выполнимость Предположений 3.1 и 3.2 теоремы 4.1 об уклонении. Предположение 3.1 (о дискретности) выполнено в силу (5.2). Далее, для (5.1) в условиях (1.2) и (1.3) можно положить (ср. [3,4]) $C = (1 + a + \alpha + \beta)$, $L(K) = L(B(0_2,r)) = (1 + a + 2\mu ar + \alpha + \beta)$, отсюда видна их выполнимость. Предположение 3.2 выполнено, если $\beta > \alpha$. Поэтому по Теореме 4.1 задача о раскачке обобщенного математического маятника (5.1) разрешима.

Замечание 5.1. Для (5.1) при $\mu > 0$ не выполняются условия разрешимости задачи о раскачке маятника из работ [3, 4], в которых требуется строгая дискретность терминального множества (отсутствие предельных точек). При $\mu = 0$ условия разрешимости данной работы и [3, 4] совпадают.

Замечание 5.2. Выбор аргумента синуса в (5.1) связан с возможными неточностями при его измерении либо с неопределенностью в точном определении самих значений синуса (см. например [16]).

Заключение. Для глобальной задачи уклонения траекторий от разреженных множеств получены эффективные достаточные условия уклонения, указаны способы построения управления уклонения и приведен пример (обобщенный математический маятник). Основные результаты статьи изложены в [12].

Автор выражает глубокую благодарность Академику РАН Ф.Л. Черноусько за поддержку и советы, способствовавшие улучшению полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.
2. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир., 1967. 480 с.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 496 с.
4. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц// Тр. МИАН. 1977. Вып. 143. С. 105–128.
5. *Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями // Дифф. ур-я. 1973. Т. 9. № 10. С. 1792–1797.
6. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 484 с.
7. *Reshmin S.A., Chernousko F.L.* Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system // JOTA. 2014. V.163. № 1. P. 230–252.
8. *Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А.* Колебательные конфликтно управляемые процессы// ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 3–14.
9. *Bolotnik N.N., Nunuparov A.M., Chashchukhin V.G.* Capsule-type vibration-driven robot an electromagnetic actuator and an opposing spring: dynamics and control of motion // J. Comput.&Syst. Sci. Int. 2016. V. 55. № 6. P. 986–1000.
10. *Гусятников П.Б., Югай Л.П.* Об одной задаче убегания в нелинейных дифференциальных играх с терминальным множеством сложной структуры // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1977. № 2. С. 8–13.
11. *Мамадалиев Н.* Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков// Сиб. матем. ж. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.
12. *Югай Л.П.* Задача уклонения траекторий от разреженного терминального множества // Докл. РАН. Матем. Инф. Проц. упр. 2020. Т. 495. **С**. 80–84. DOI: 10.31857/S268695432006020X
13. *Yugay L.P.* Nonlinear integral inequalities and differential games of avoiding encounter // in: Recent Developments in Automatic Control Systems. Alsbergvej: River Pub., 2022. P. 97–111.
14. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.
15. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит. 2014. 524 с.

16. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
17. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизации гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

The Problem of Trajectories Avoiding from Rarefied Terminal Sets

L. P. Yugay[1,#]

[1]*Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchik, Uzbekistan*
[#]*e-mail: yugailp@mail.ru*

The problem of trajectories avoiding in nonlinear conflict-controlled processes (differential games) in L.S. Pontrjagin and E.F. Mishchenko statement is considered. Terminal sets have a particular rarefied structure. Unlike other works, they consist of countable points and may have a limit points. New sufficient conditions and evasion methods are obtained, which make it possible to solve a number of avoiding trajectory problems of oscillatory systems, including the swinging problem of the generalized mathematical pendulum.

Keywords: avoiding, evasion, pursuer, evader, control, rare, discrete terminal set, pendulum

REFERENCES

1. *Pontrjagin L.S.* Selected Proceedings. Moscow: MAKS Press, 2004. 552 p. (in Russian)
2. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965.
3. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Positional Differential Games. Moscow: Nauka, 1974. 496 p.
4. *Mishchenko E.F., Nikolskii M.S., Satimov N.* The problem of avoiding encounter in several person differential games// Proc. Steklov Inst. of Math., 1977, iss. 143, pp. 105–128. (in Russian)
5. *Mishchenko E.F., Satimov N.* The problem of avoiding encounter in differential games with nonlinear controls // Diff. Eqns., 1973, vol. 9, no. 10, pp. 1792–1797. (in Russian)
6. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N.* Control of Oscillations. Moscow: Nauka, 1980. 484 p. (in Russian)
7. *Reshmin S.A., Chernousko F.L.* Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system // JOTA, 2014, vol.163, no. 1, pp. 230–252.
8. *Pilipenko Yu.V., Chikrii A.A.* The oscillatory conflict controlled processes // JAMM, 1993, vol. 57, iss. 3, pp. 3–14. (in Russian)
9. *Bolotnik N.N., Nunuparov A.M., Chashchukhin V.G.* Capsule-type vibration-driven robot an electromagnetic actuator and an opposing spring: dynamics and control of motion // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2016, vol. 55, no. 6, pp. 986–1000.
10. *Gusyatnikov P.B., Yugay L.P.* On an evasion problem in nonlinear differential games with terminal set of compound structure// Izv. AN SSSR Techn. Kibern., 1977, no. 2, pp. 8–13. (in Russian)
11. *Mamadaliev N.* On an one pursuit problem with integral restrictions on control of players // Sib. Math. J., 2015, vol. 56, no. 1, pp. 129–148. (in Russian)
12. *Yugay L.P.* The problem of trajectories avoiding from rarefied terminal set // Dokl. Math., Inform., Control Proc., 2020, vol. 495,pp. 80–84.
DOI: 10.31857/S268695432006020X
13. *Yugay L.P.* Nonlinear integral inequalities and differential games of avoiding encounter // in: Recent Developments in Automatic Control Systems. Alsbergvej: River Pub., 2022, pp. 97–111.
14. *Leihtweis K.* Convex Sets. Moscow: Nauka, 1985. 336 p. (in Russian)
15. *Polovinkin E.S.* Multi-Valued Analysis and Differential Inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014. 524 p. (in Russian)
16. *Kurzhanskii A.B.* Control and Observation under Uncertainty. Moscow: Nauka, 1977. 392 p. (in Russian)
17. *Subbotin A.I., Chentsov A.G.* Optimization of Guarantee in Control Problems. Moscow: Nauka, 1981. 288 p. (in Russian)