

УДК 534-13

**СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В РЕЗОНАТОРЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**© 2023 г. Пью Ко Ко^{1,*}¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: phyokoko4387@gmail.com

Поступила в редакцию 02.09.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

В рамках длинноволнового приближения исследованы частоты и формы собственных колебаний газа в резонаторе Гельмгольца имеющего форму трубы периодического сечения. Задача сводится к задаче Штурма–Лиувилля с краевыми условиями первого рода, решение которой проводится методом ускоренной сходимости. Проведен детальный анализ зависимостей собственных чисел и собственных функций от параметров трубы. Выявлен “автомодельный” тип зависимости собственной частоты для различных мод. Определены значения параметров периодичности трубы, при которых происходит резкое изменение собственной частоты.

Ключевые слова: резонатор, собственные колебания газа, метод ускоренной сходимости

DOI: 10.31857/S0032823523060073, **EDN:** HWCNOX

1. Введение. Впервые на задачу о проникновении звука через цилиндрическое отверстие обратил внимание Дж.В. Стретт [1], который заменил бесконечномерную задачу газовой механики конечномерной введя понятие присоединенной массы отверстия. Этот подход был развит в 40-е годы XX века в Советском Союзе для случая задачи о собственных колебаниях газа в цилиндрическом сосуде с перегородкой теоретически [2] и подтвержден экспериментально [3]. Несмотря на длительную историю и в последние годы задача о собственных колебаниях в резонаторе Гельмгольца вызывает значительный интерес, ей посвящено ряд работ как теоретических [4, 5], где изучались особенности спектра собственных колебаний газа в трубе с единственным сингулярным дефектом, так и экспериментальных [6].

Настоящая работа посвящена собственным колебаниям газа в резонаторе Гельмгольца цилиндрической формы (далее трубы), сечение площадь поперечного сечения которого – периодическая функция продольной координаты, а именно $S = S_0 h^2$, $h = 1 - a \sin \pi b x$, где параметр a далее будет именоваться амплитудой дефекта, а b – волновым числом трубы. Основное внимание в работе уделено изучению изменений вносимых периодическим изменением радиуса трубы в спектральные свойства задачи, особенно в предельных случаях, когда в трубе существует периодическая структура из сингулярных дефектов.

2. Постановка задачи. Итак, имеется резонатор Гельмгольца длины l с открытыми концами. Радиус поперечного сечения резонатора меняется по периодическому закону $h = 1 - a \sin \pi b x$ (рис. 1). Пусть поперечные размеры трубы значительно меньше, чем продольный размер. Будем исследовать зависимость параметров собственных колебаний газа (частоты и формы продольных колебаний) от геометрических параметров

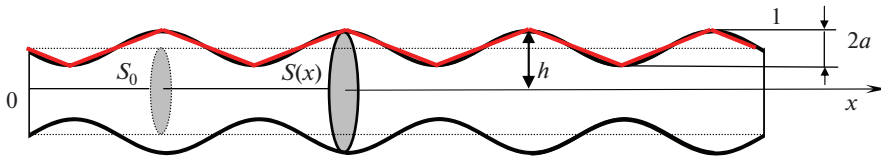


Рис. 1. Геометрия задачи. Резонаторы в форме трубы с периодически изменяющимся радиусом $h = 1 - a \sin \pi bx$ (кривая черного цвета) и пилообразной формы (красные линии).

трубы (амплитуды изменения радиуса трубы a — амплитуды дефекта и волнового числа трубы b).

В приближении линейной акустики уравнения для звукового потенциала после разделения переменных можно записать в безразмерном виде [4, 5]

$$\frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{du}{dx} \right) + \omega^2 h^2 u = 0; \quad a < 1, \quad b < 1, \quad (2.1)$$

где $x = z/l$, $\omega = \Omega/c$, Ω — размерная собственная частота, l — длина трубы, c — скорость звука.

Предполагается, что концы резонатора открыты, что соответствует краевым условиям первого рода

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2.2)$$

Ставится задача определить собственные числа и собственные функции задачи (2.1)–(2.2) и их зависимость от амплитуды деформации профиля трубы a и волнового числа трубы b .

Решение задачи (2.1)–(2.2) проводилось численно методом ускоренной сходимости, основные элементы которого состоят в следующем [7].

Пусть дана задача Штурма–Лиувилля с граничными условиями первого рода

$$(p(x)\varphi')' + [\lambda r(x) - q(x)]\varphi = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (2.4)$$

Причем коэффициенты уравнения — ограниченные функции на некотором расширенном интервале, содержащем отрезок $[0, 1]$

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \quad 0 < r_0 \leq r(x) \leq r^+ < \infty$$

Тогда, используя метод Рэлея–Ритца, найдем оценку сверху первого собственного числа

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* = \int_0^1 (p(x)\psi'^2 + q\psi^2) dx \Big/ \int_0^1 r(x)\psi^2 dx,$$

где $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Рассмотрим две задачи Коши для уравнения (1), в котором положено I. $\lambda = \lambda_1^*$ и II. $\lambda = \xi^2 \lambda_1^*$ ($\xi < 1$) с начальными условиями вида

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

Выбираем параметр ξ таким образом, чтобы решение второй задачи Коши оставалось знакопостоянным на интервале $[0, 1]$. Тогда согласно осцилляторным теоремам Штурма такому значению ξ будет соответствовать оценка снизу для собственного

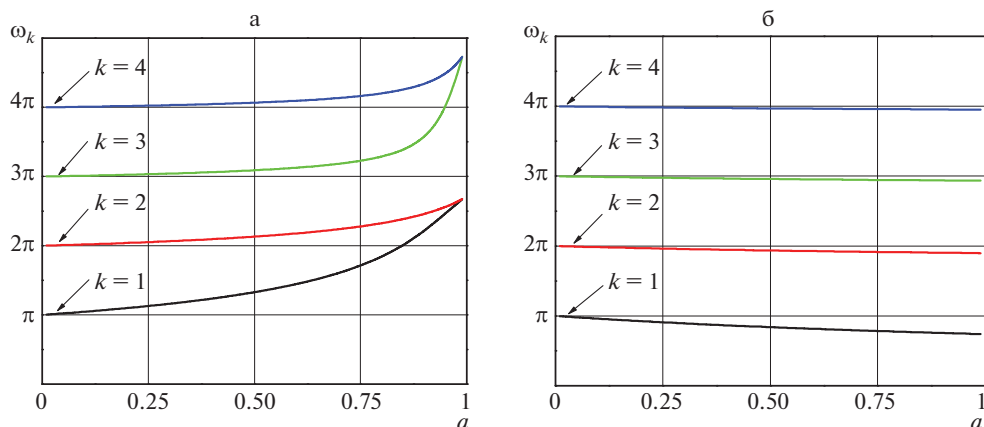


Рис. 2. Зависимость собственных частот от величины дефекта a первых четырех мод колебаний при $b = 1$ для трубы а. сужающегося профиля $h = 1 - a \sin \pi bx$; б. расширяющегося профиля $h = 1 + a \sin \pi bx$.

числа $\xi^2 \lambda_1^*$. Таким образом получаем двустороннюю оценку собственного числа $\xi^2 \lambda_1^* \leq \lambda \leq \lambda_1^*$. Затем повторяем процедуру необходимое число раз до достижения заданной точности вычисления собственного значения.

3. Собственные частоты резонатора Гельмгольца периодического сечения. Проведенные по методу ускоренной сходимости расчеты первых четырех собственных частот для волнового числа трубы соответствующего половине периода показали, что в случае трубы сужающегося профиля собственные частоты существенно зависят от величины амплитуды дефекта. Предельные величины нечетных и последующих четных собственных частот совпадают. Спектр резонатора единичной длины переходит в спектр резонатора разделенного в месте максимума амплитуды дефекта (рис. 2). В случае трубы расширяющегося профиля происходит незначительное уменьшение собственных частот, слабо зависящее от амплитуды дефекта.

Поведение частот колебаний значительно усложняется при дальнейшем увеличении волнового числа трубы. На рис. 3 для набора амплитуд дефекта приведены зависимости первых четырех собственных частот от волнового числа трубы в случае, когда ее профиль первоначально сужается. Первоначально нарастание частот, увеличивающееся вместе с ростом амплитуды дефекта, затем сменяется падением до минимума, причем величина частот становится значительно меньше, чем у трубы постоянного радиуса. В районе волнового числа трубы, соответствующего одному периоду изменения профиля трубы для первой моды (k -кратному для k -й моды) значения частот возвращаются к исходным значениям и слабо зависят от амплитуды дефекта. После достижения минимума значения частот слабо зависят от величины волнового числа трубы. На фоне медленного возрастания наблюдаются периодические возмущения, отражающие периодичность в изменении профиля трубы.

Чтобы подчеркнуть общие особенности в поведении зависимостей для разных мод справа на рис. 3 приведены масштабированные зависимости частот от сдвинутого на соответствующие значения аргумента. Учитывая такое подобие, далее анализируются особенности поведения только первой моды собственных колебаний.

Для верификации и качественного обсуждения полученных результатов были использованы упрощенные модели, допускающие аналитическое решение задачи. В качестве первой из них была выбрана модель, в которой, возникающая в уравнении (2.1)

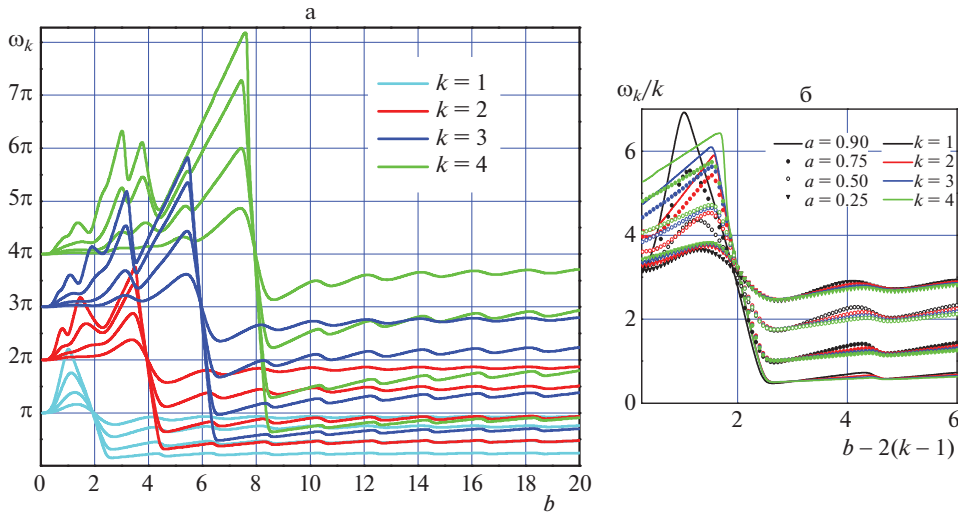


Рис. 3. Зависимость собственных частот первых четырех мод колебаний от “волнового числа” трубы для разных значений амплитуды дефекта $a = 0.25; 0.5; 0.75; 0.9$ (слева). Справа частотная зависимость приведена в измененных координатах.

логарифмическая производная радиуса трубы, заменялась ее средним значением на каждом из интервалов монотонного поведения радиуса.

$$u_n'' + (-1)^n 2f_n u_n' + \omega^2 u_n = 0; \quad f_n = |\langle d \ln h/dx \rangle_n|$$

На каждом интервале разбиения задача сводилась к решению уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_n = e^{(-1)^{n+1} f_n x} (A_n \cos \omega_n x + B_n \sin \omega_n x); \quad \omega_n^2 = \omega^2 - f_n^2, \quad (3.1)$$

после чего проводилась сшивка решений. Результатом процедуры сшивки оказывалась система трансцендентных алгебраических уравнений, из которых определялась собственная частота. В частности, при $n = 1$ ($0 < b < 1/2$) сшивка не требуется, а краевые условия на концах трубы приводят к росту частоты собственных колебаний $\omega^2 = \pi^2 + f_1^2$.

Во второй модели рассматривалась труба пилообразного профиля, радиус которой меняется по закону

$$h_1 = 1 - 2abx, \quad h_n = 1 - (-1)^n 2a(n - bx); \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

а решение на n -м участке имеет вид

$$u_n(x) = \frac{1}{h_n} (A_n \sin \omega x + B_n \cos \omega x) \quad (3.3)$$

На стыке участков гладкости профиля трубы опять задавались условия сшивки, условие совместности приводит к системе уравнений, из которой определяется частота собственных колебаний.

Проведенные в рамках первой и второй моделей расчеты зависимости первой собственной частоты от волнового числа трубы (рис. 4) показали качественное совпадение с результатами численного моделирования методом ускоренной сходимости на интервале выхода зависимости на асимптотику больших чисел b .

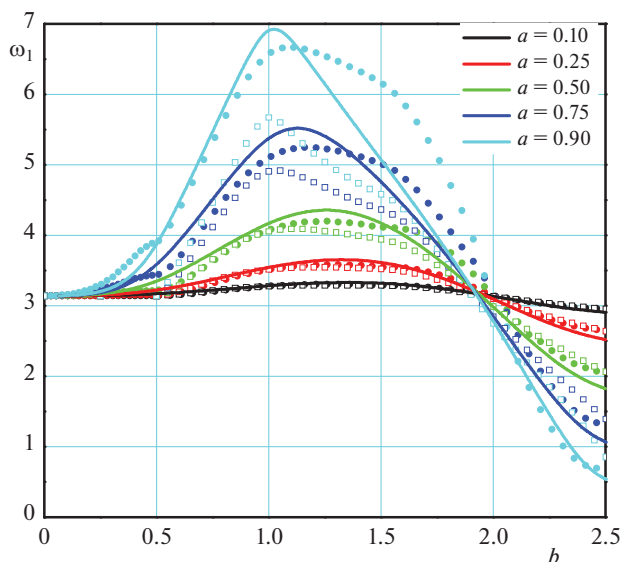


Рис. 4. Зависимость первой собственной частоты от “волнового числа” трубы: сплошная линия — численное моделирование МУС; ● — результаты аналитического решения уравнений с осредненными коэффициентами; □ — результаты аналитического решения задачи для резонатора пилообразного профиля.

Изучение изменения вида профилей первой собственной формы при увеличении амплитуды дефекта трубы и степени ее изрезанности (росте волнового числа трубы b) выявило ряд характерных особенностей рис. 5. При малом изменении волнового числа $b < 1/2$ и с ростом амплитуды дефекта максимум первоначально синусоидального профиля смещается в сторону уменьшения радиуса, с обострением профиля собственной моды u_1 справа и относительным выполаживанием слева от максимума, причем при стремлении амплитуды дефекта к единице производные u_1 могут стремиться к бесконечности в окрестности точки с радиусом трубы близким к нулю. В интервале изменения волнового числа $1/2 < b < 3/2$ минимум профиля трубы смещается из правого края влево (при равных значениях амплитуды дефекта) вместе с положением максимума профиля (при $b = 1$ профиль собственной моды становится симметричным). Увеличение параметра b будет приводить к постепенному выполаживанию профиля собственной моды в окрестности его максимума и обострению производных в окрестности правого конца трубы, где радиус обращается в нуль при $b = 5/2$ и $a = 1$. В последнем случае профиль собственной функции принимает форму ступеньки, ограниченной вертикальной асимптотой в правом конце. Далее профиль собственной функции имеет вид ступенчатой функции, его максимум смещается влево вместе с положениями минимумов радиуса трубы. При возникновении очередного нуля у радиуса трубы $b = 9/2$ в профиле собственной функции возникает вторая ступенька, которая, однако, в дальнейшем исчезает в окрестности симметричного профиля трубы $b = 5$. Физическая интерпретация последней особенности связана с тем, что положению максимума, который в силу симметрии находится в центре трубы, соответствует нуль скорости газа. Таким образом, уменьшение до нуля радиуса отверстия ($a \rightarrow 1$) в силу отсутствия потока не приводит к изменению профиля собственной функции. Третья ступенька в профиле собственной функции возникает при появлении четвер-

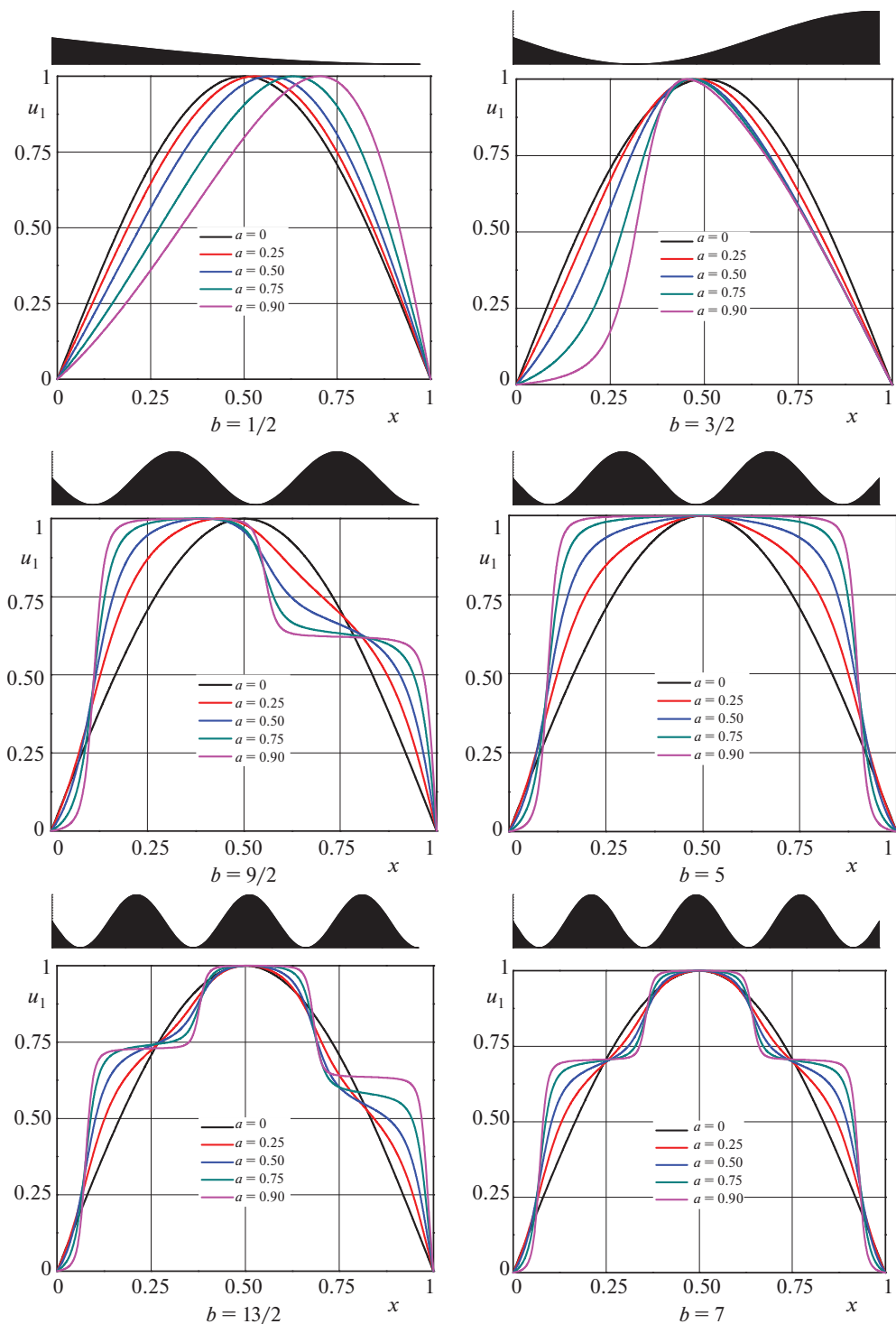


Рис. 5. Деформация профилей первой собственной моды при изменении “волнового числа” трубы.

того нуля у радиуса трубы ($b = 13/2$). Причем такая структура сохраняется и в следующем симметричном случае, когда $b = 7$.

Заключение. Следует отметить, что полученные результаты при относительно небольших значениях параметра b согласуются с ранее выполненными исследованиями [4, 5], в которых анализировалось поведение собственных функций резонатора Гельмгольца с единичным дефектом. Было получено, что собственные функции при стремлении величины дефекта к критическому значению, соответствующему полному разделению резонатора на две части, локализуются в зависимости от моды в одной из двух частей резонатора. Спектр задачи, при этом, можно разделить на две части соответствующие спектрам двух взятых по отдельности частей резонатора. С точки зрения гашения звуковых колебаний это означает, что уменьшение радиуса отверстия, соединяющего две части резонатора, будет приводить к локализации звуковых колебаний в одной из частей. При этом напряжения вызванные звуком в корпусе резонатора будут сосредоточены практически исключительно в перегородке, где производные звукового потенциала, а соответственно и скорость потока, будут обращаться в бесконечность.

В настоящей работе для трубы периодического сечения определены условия, когда звуковые колебания соответствующие первой собственной моде будут распространяться по всей длине трубы. Максимум их интенсивности будет сосредоточен в окрестности минимумов радиуса сечения трубы. Таким образом, в случае резонатора переменного сечения возможно возникновение значительных звуковых нагрузок на корпус даже на больших расстояниях от узкого входного отверстия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Релей (Стретт Дж. В.) Теория звука. Т. 2. М.; Л.: ГИТТЛ, 1944. 476 с.
2. Фок В. А. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 875–878.
3. Нестеров В. С. Экспериментальное исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 879–882.
4. Нестеров С. В., Акуленко Л. Д., Байдулов В. Г. Собственные колебания акустического резонатора с локальной перегородкой // Докл. РАН. 2016. Т. 470. № 3. С. 279–282. DOI: 10.1134/S1028335816090093
5. Акуленко Л. Д., Байдулов В. Г., Нестеров С. В. Зависимость собственных частот и форм колебаний идеального газа от параметров акустического резонатора // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 52–64. DOI: 10.3103/S002565441701006X
6. Быков А. И., Комкин А. И., Миронов М. А. Исследование акустического импеданса отверстия при высоких уровнях звука // Уч. зап. физ. фак-та МГУ. 2017. № 5. 1751403.
7. Akulenko L. D., Nesterov S. V. High Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.

Natural Vibrations of a Gas in a Helmholtz Resonator with a Periodically Varying Cross-section

Phyo Ko Ko^{a, #}

^aBauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

[#]e-mail: phyokoko4387@gmail.com

Within the framework of the long-wave approximation, the frequencies and shapes of gas natural oscillations in a Helmholtz resonator having the shape of a pipe of periodic cross-section have been studied. The problem is reduced to the Sturm–Liouville problem with boundary conditions of the first kind, the solution of which is carried out by the method of accelerated convergence. A detailed analysis of the dependences of eigenvalues and eigenfunctions on pipe parameters was carried out. A “self-similar” type of dependence of the

natural frequency for various modes has been revealed. The values of the resonator periodicity parameters at which a sharp change in the natural frequency occurs are determined.

Keywords: resonator, gas natural oscillations, accelerated convergence method

REFERENCES

1. *Strutt J.W.* Theory of Sound. V. II. L.: Macmillan, 1926.
2. *Fok V.A.* Theoretical study of conductivity of a circular hole in a wall across a tube // Dokl. AN SSSR, 1941, vol. 31, no. 9, pp. 875–878.
3. *Nesterov V.S.* Experimental study of conductivity of a circular hole in a wall across a tube // Dokl. AN SSSR, 1941, vol. 31, no. 9, pp. 879–882.
4. *Nesterov S.V., Akulenko L.D., Baidulov V.G.* Eigenoscillations of an acoustic cavity with a local membrane // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, no. 9, pp. 467–470. DOI: 10.1134/S1028335816090093
5. *Akulenko L.D., Baidulov V.G., Nesterov S.V.* Dependence of the natural frequencies and mode shapes of vibrations of an ideal gas on the acoustic resonance parameters // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 1, pp. 41–51. DOI: 10.3103/S002565441701006X
6. *Bykov A.I., Komkin A.I., Mironov M.A.* Study of the acoustic impedance of a hole at high sound levels // Uch. Zap. Phys. Fac. MSU, 2017, no. 5, 1751403.
7. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.