

УДК 531.38

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. Вин Ко Ко^{1,*}, А. Н. Темнов^{1,**}¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: win.c.latt@gmail.com

**e-mail: antt45@mail.ru

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 15.09.2023 г.

В статье рассмотрена задача о нелинейных колебаниях жидкостей, полностью заполняющих осесимметричный цилиндрический сосуд, совершающий движение вокруг горизонтальной оси. Движение каждой жидкости предполагается потенциальным. Приведена оценка влияния нелинейных коэффициентов на динамические характеристики процессов при вращательных движениях сосуда. Рассмотрен случай вынужденных угловых колебаний сосуда с жидкостями относительно неподвижной оси. В статье приведено приближенное решение нелинейных уравнений, полученное методом Бубнова–Галёркина, а также выявлены основные нелинейные эффекты, связанные с вращением поверхности раздела жидкостей. Приведены амплитудно-частотные характеристики и области устойчивости движений двухслойной жидкости при вынужденных угловых колебаниях круглого цилиндрического сосуда.

Ключевые слова: механическая система, цилиндрическая полость, гидродинамические коэффициенты, основной резонанс, возмущенная поверхность, вращательное движение

DOI: 10.31857/S0032823523060103, EDN: YDLUQT

1. Введение. Для описания многих физических систем, требуется создание нелинейных математических моделей. К ним относится и рассматриваемая далее механическая система, состоящая из твердого тела, полость которого полностью заполнена двумя несмешивающимися жидкостями.

Задача о движении такого тела, в линейной постановке рассматривалась многими авторами. В частности, исследовалась [1, 2] проблема о движениях двухслойной тяжелой жидкости. Была решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости. Решена задача о колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и скрепленного упругой связью с неподвижным основанием.

В статье [3] показано качественное отличие движений твердого тела с полостью, целиком наполненной двумя жидкостями от аналогичных случаев движений твердого тела с одной однородной жидкостью, рассмотренное Н.Е. Жуковским [4]. Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, рассмотрены в книгах [5–7].

Изучена [8] задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей (нижняя жидкость считалась вязкой, а верхняя идеальной), частично заполняющих неподвижный сосуд.

Исследованы [9] нелинейные задачи динамики однородной жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Выведены [10] частотные уравнения собственных колебаний двухслойной жидкости в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на “свободной” и внутренних поверхностях жидкости.

Были исследованы [11–15] нелинейные эффекты колебаний двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объем и построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке при поступательных и угловых движениях. При проведении экспериментов [16] с жидкостями, полностью заполняющими круглый цилиндрический бак, вблизи основного резонанса были зафиксированы особенности нелинейных движений поверхности раздела слоев жидкостей, подобные движениям свободной поверхности однородной жидкости.

Рассмотрены [17] свободные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде. Представлена [18] регуляризация баротропных гравитационных волн в двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. Следует также отметить статьи по нелинейным колебаниям двух жидкостей [19, 20], в которых кроме теоретических результатов приведено исследование на экспериментальной установке, состоящей из осциллирующего бака, наполненного двумя несмешивающимися жидкостями. Математическая модель в этих работах получена в результате применения вариационного подхода Лагранжа.

Целью настоящей работы является дальнейшее исследование нелинейных колебательных движений двух жидкостей в цилиндрической полости твердого тела, совершающего угловые колебания.

2. Постановка задачи. Рассмотрим круглый цилиндрический сосуд, полностью заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, и совершающий колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси O^*Y (рис. 1). С твердым телом свяжем систему координат O^*XYZ и расположим ось O^*X так, чтобы в невозмущенном положении механической системы тело–жидкости ось O^*X была перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 . Движение твердого тела вокруг оси O^*Y будем описывать угловой координатой θ и вектором угловой скорости вращения $\vec{\omega}_2$ так, что $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{j}$, $\theta(t) = \theta_0 \sin pt$.

Введем также переносную систему координат $Oxyz$, с началом, в середине невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 , $\vec{R} = H\vec{i} + \vec{r}$, где H – расстояние от оси вращения до поверхности раздела жидкостей, $\vec{R}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O^* ; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми, остальные обозначения ясны из рис. 1. Вектор абсолютной скорости произвольной точки бака имеет вид

$$\vec{V}_a = \vec{\omega}_2 \times \vec{R} \quad (2.1)$$

Предположим, что движение каждой жидкости потенциальное, удовлетворяет уравнениям Лапласа, граничным условиям непротекания на смачиваемых поверхностях, кинематическим условиям и динамическим условиям на поверхности раздела (см. [13]).

Используя цилиндрическую систему координат $Ox\eta\eta$, потенциалы скоростей $\Phi^{(k)}$ каждой жидкости можно записать в виде рядов Фурье

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t) B_i^{(k)}(x, r, \eta) \quad (k = 1, 2), \quad (2.2)$$

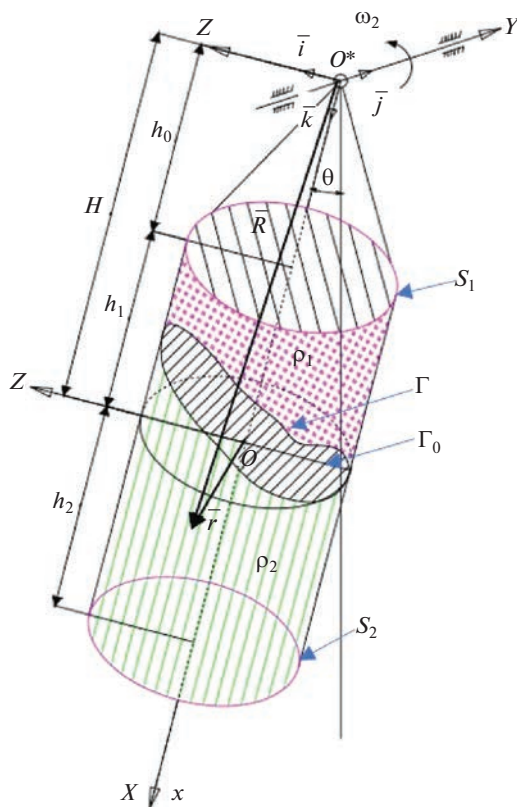


Рис. 1. Геометрия задачи и системы координат.

где $A^{(k)}$ и $B_i^{(k)}$ — гармонические скалярные функции, коэффициенты α_i — функции времени, подлежащие определению (обобщенные координаты i -й гармоники). Верхние индексы k принимают значения 1 и 2, и относятся соответственно к верхней и нижней жидкостям. Определение функций $A^{(k)}$, $B_i^{(k)}$ подробно приведено в предыдущих работах авторов [12, 13].

3. Вынужденные угловые колебания цилиндрического сосуда с двухслойной жидкостью. Ранее были изучены нелинейные колебания жидкостей в сосудах, совершающих вынужденные поступательные движения [12]. При этом были выявлены основные нелинейные эффекты, связанные с вращением диаметра поверхности раздела жидкостей. Для того чтобы оценить влияние остальных нелинейных коэффициентов на характеристики динамических процессов при конечных вращательных движениях сосуда рассмотрим другой частный случай движения, а именно случай вынужденных угловых колебаний сосуда с жидкостями, закрепленного относительно неподвижной оси и находящегося в поле тяжести.

Проекции ускорения и угловых скоростей на оси связанной системы координат будут равны

$$g_x = g_0 \cos \theta, \quad g_y = 0, \quad g_z = g_0 \sin \theta \quad (3.1)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \dot{\theta}, \quad \omega_z = 0 \quad (3.2)$$

Согласно исходным предпосылкам о порядке малости величин угловых скоростей будем пренебрегать слагаемыми пропорциональными θ^3 , как малыми величинами порядка ε^2 . В связи с этим квадрат парциальной частоты σ^2 , пропорциональный g , и боковое ускорение можно с точностью до малых высшего порядка представить в следующем виде

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2\right), \quad g_z = g_0 \theta \quad (3.3)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\omega_{nm}^2 (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 f_{nm} + \rho_1)}, \quad \omega_{nm}^2 = g k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h_1, \quad \bar{f}_{nm} = \operatorname{th} k_{nm} h_1 \operatorname{cth} k_{nm} h_2 \quad (3.4)$$

Тогда система уравнений для обобщенных координат $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \beta$, при возбуждении основной моды колебаний поверхности раздела жидкостей примет вид [13]

$$L_1(\alpha, \beta) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha - d_0 \ddot{\theta} + d_1 (\alpha^2 \ddot{\alpha} + \alpha \dot{\alpha}^2 + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \dot{\beta}^2) + (d_3 \alpha^2 - d_4 \beta^2) \ddot{\theta} + \\ + d_2 (\beta^2 \ddot{\alpha} + 2\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\beta} - 2\alpha \dot{\beta}^2) - (d_3 + 3d_4) \beta \dot{\beta} \ddot{\theta} - d_5 \alpha \dot{\theta}^2 = 0 \quad (3.5)$$

$$L_2(\alpha, \beta) = \ddot{\beta} + \sigma^2 \beta + d \ddot{\theta} + d_1 (\alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta^2 \ddot{\beta} + \beta \dot{\alpha}^2 + \beta \dot{\beta}^2) + (d_3 + d_4) \alpha \beta \ddot{\theta} + \\ + d_2 (-\alpha \beta \ddot{\alpha} + \alpha^2 \ddot{\beta} - 2\beta \dot{\alpha}^2 + 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta}) + (d_3 + 3d_4) \beta \dot{\alpha} - d_6 \beta \dot{\theta}^2 = 0, \quad (3.6)$$

где $d = \lambda/\mu$, $d_0 = \lambda_0/\mu$, $d_1 = \mu_1/\mu$, $d_2 = \mu_2/\mu$, $d_3 = \lambda_3/\mu$, $d_4 = \lambda_2/\mu$, $d_5 = J_1/\mu$, $d_6 = J_2/\mu$.

Постоянные коэффициенты, выражающиеся через параметры первой и второй жидкостей [11, 13]

$$\mu = \mu^{(2)} - \mu^{(1)}, \quad \mu_i = \mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)}, \quad \lambda = \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}, \quad \lambda_0 = \lambda_0^{(2)} - \lambda_0^{(1)}, \quad J_i = J_i^{(2)} - J_i^{(1)},$$

$$\mu^{(k)} = \rho_k \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \rho_k r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2}, \quad \lambda_0^{(i)} = \rho_i r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2} \left[(h_0 + h_2) + \frac{2r_0}{\xi_{11}} \operatorname{th} (k_{11} h_i / 2) \right],$$

$$\mu_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left[6Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} - 3k_{11}^2 \right) Y_{11}^2 \right] Y_{11} +$$

$$+ \sum_n \frac{4c_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} \left(Y_{n0}' Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11} \right) + \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} \left[Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11} \right] \} Y_{11} r dr,$$

$$\mu_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left[2Y_{11}'^2 - \left(\frac{2}{r^2} + k_{11}^2 \right) Y_{11}^2 \right] Y_{11} +$$

$$+ \sum_n \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} \left[Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11} \right] \} Y_{11} r dr,$$

$$J^{(1)} = \rho_1 r_0^2 \pi \left[\frac{(H + h_1)^3}{3} - \frac{(h_0 + h_2)^3}{3} - \frac{3}{4} h_1 r_0^2 - r_0^3 \frac{16}{\xi_{11}^3 (\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th} (k_{11} h_1 / 2) \right],$$

$$J^{(2)} = \rho_2 r_0^2 \pi \left[\frac{(h_0 + h_2)^3}{3} - \frac{h_0^3}{3} - \frac{3}{4} h_2 r_0^2 + r_0^3 \frac{16}{\xi_{11}^3 (\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th} (k_{11} h_2 / 2) \right]; \quad i = 1, 2.$$

В уравнениях (3.5), (3.6) параметр β характеризует деформацию поверхности раздела жидкостей в плоскости перпендикулярной плоскости колебаний сосуда. Пусть сосуд совершает угловые колебания по закону

$$\theta = \theta_0 \cos pt \quad (3.7)$$

Если параметрический резонанс отсутствует в рассматриваемом случае, т.е. $\beta \equiv 0$, то вынужденные угловые колебания системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha, \beta) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha - d_0 \ddot{\theta} + d_1 (\alpha^2 \ddot{\alpha} + \alpha \dot{\alpha}^2) + d_3 \alpha^2 \ddot{\theta} - d_5 \alpha \dot{\theta}^2 = 0 \quad (3.8)$$

Приближенное решение этого уравнения, найденное методом Бубнова–Галёркина [6], можно представить в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kpt + \bar{\alpha}_k \sin kpt), \quad (3.9)$$

где α_k и $\bar{\alpha}_k$ — неизвестные постоянные.

Удержав в (3.9) только основные гармоники

$$\alpha(t) = A \cos pt + \bar{A} \sin pt, \quad (3.10)$$

получим уравнение

$$d_0 \theta_0 + \left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{1}{4} d_3 \theta_0^2 A - \frac{3}{4} d_3 \theta_0 A^2 - \frac{1}{2} d_1 A^3 = 0, \quad \bar{A} \equiv 0, \quad (3.11)$$

где $\bar{p}^2 = p^2 / \sigma^2$.

Уравнение зависимости амплитуд свободных колебаний двухслойной жидкости от частот колебаний (скелетная линия) может быть получено из уравнения (3.11) при $\theta_0 = 0$,

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{d_1}{2} A^3 = 0 \quad (3.12)$$

Проведем исследование устойчивости полученного стационарного решения системы, предположив

$$\bar{\alpha}(t) = A \cos pt, \quad \bar{\beta}(t) \equiv 0 \quad (3.13)$$

Рассмотрим возмущенное движение системы

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) + \xi(t), \quad \beta(t) = \bar{\beta}(t) + \eta(t) \quad (3.14)$$

Начальные условия для функций $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ достаточно мало отличаются друг от друга. Такие движения будем называть возмущенными, а величины $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — возмущениями. Движение называется устойчивым по Ляпунову, если малые изменения в начальных условиях достаточно мало отклоняют систему от невозмущенного движения. Уменьшая начальные возмущения, можно сделать отклонения при $t > t_0$ сколь угодно малыми.

Подставляя (3.14) в (3.5)–(3.6) и, учитывая, что $\bar{\alpha}(t)$ является частным решением (3.8), получаем уравнения возмущенного движения системы в виде

$$(1 + d_1 \bar{\alpha}^2) \ddot{\xi} + 2d_1 \bar{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\xi} + (\sigma^2 + d_1 (2\bar{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) - d_5 \bar{\alpha}^2 + 2d_3 \bar{\alpha} \ddot{\theta}) \xi + \bar{\sigma}(\xi, \eta, \theta) = 0 \quad (3.15)$$

$$(1 + d_2 \bar{\alpha}^2) \dot{\eta} + 2d_2 \bar{\alpha} \ddot{\eta} + (\sigma^2 + c \bar{\alpha} \ddot{\alpha} + k_3 \ddot{\alpha}^2 + k_4 \ddot{\alpha} \dot{\theta} + k_5 \bar{\alpha} \ddot{\theta} - d_2 \dot{\theta}^2) \eta + \bar{d}(\xi, \eta, \theta) = 0 \quad (3.16)$$

Оставляя в уравнениях (3.15) и (3.16) только линейные члены, с учетом (3.13) приходим к уравнениям первого приближения

$$L_3(\xi) = (p' + q \cos \Omega t) \ddot{\xi} - \varepsilon_1 \dot{\xi} \sin \Omega t + (\gamma - \delta \cos \Omega t) \xi = 0 \quad (3.17)$$

$$L_4(\eta) = (\bar{p} + \bar{q} \cos \Omega t) \ddot{\eta} - \varepsilon \dot{\eta} \sin \Omega t + (\bar{\gamma} - \bar{\delta} \cos \Omega t) \eta = 0 \quad (3.18)$$

Здесь для удобства написания решения в дальнейшем были приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} d_1 A^2, \quad p' = 1 + q, \quad \varepsilon_1 = d_1 p A^2, \quad \bar{q} = \frac{1}{2} d_2 A^2, \quad \varepsilon = d_2 p A^2, \quad \bar{p} = 1 + \bar{q} \\ \gamma &= \sigma^2 - \left[\frac{1}{2} d_1 A^2 - d_3 A \theta_0 - \frac{1}{2} d_5 \theta_0^2 \right] p^2, \quad \delta = \left[\frac{3}{2} d_1 A^2 + d_3 A \theta_0 + \frac{1}{2} d_5 \theta_0^2 \right] p^2 \\ k_4 &= d_3 + 3d_4, \quad k_5 = d_3 + d_4, \quad c = d_1 - d_2 \\ \bar{\gamma} &= \sigma^2 - \frac{1}{2} \left[d_2 A^2 - d_4 A \theta_0 - d_5 \theta_0^2 \right] p^2, \quad k_3 = d_1 - 2d_2 \\ \bar{\delta} &= \left[A^2 \left(d_1 - \frac{3}{2} d_2 \right) + (d_3 + 2d_4) A \theta_0 - \frac{1}{2} d_6 \theta_0^2 \right] p^2, \quad \Omega = 2p \end{aligned} \quad (3.19)$$

Переходим к построению областей неустойчивости решений уравнений (3.17)–(3.18). Рассмотрим сначала уравнение (3.17) относительно функции $\xi(t)$, характеризующее возмущение периодического решения $\bar{\alpha}(t) = A \cos pt$. Амплитуда A этого решения определяется уравнением (3.11). Установим, какая пара значений A и p , приводит к устойчивым решениям и какая пара к неустойчивым. Имея в виду построение основной области неустойчивости решения уравнения (3.17), представим его в виде

$$\xi(t) = a_1 \cos pt + b_1 \sin pt \quad (3.20)$$

Воспользовавшись методом Бубнова–Галёркина [6],

$$\int_0^{2\pi/p} L_3(\xi) \cos pt \, dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/p} L_3(\xi) \sin pt \, dt = 0, \quad (3.21)$$

после интегрирования получим следующие соотношения, в которых отражены границы области неустойчивости

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{3}{2} \left(d_1 A^3 + d_3 \theta_0 A^2 + \frac{3}{2} d_5 \theta_0^2 A \right) = 0 \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 \right) A - \frac{1}{2} \left(d_1 A^3 + d_3 \theta_0 A^2 + \frac{1}{2} d_5 \theta_0^2 A \right) = 0 \quad (3.23)$$

Из уравнения (3.22), (3.23) получаем левую и правую границы динамической неустойчивости исходной формы основной моды колебаний поверхности раздела (линии АМО и АВ).

Далее рассмотрим второе уравнение (3.18) в вариациях относительно возмущения $\eta(t)$ тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$. Исследование решений уравнения (3.18) дает ответ на вопрос об устойчивости тривиального решения. В соответствии с изложенным выше, областям неустойчивости уравнения (3.18) отвечают области параметрически возбуждаемых колебаний ($\beta \neq 0$), т.е. области динамической неустойчивости режима движения (3.11). Для построения основной области неустойчивости положим

$$\eta(t) = a_0 \cos pt + b_0 \sin pt \quad (3.24)$$

Подставляя выражения (3.24) в уравнения (3.25) и применяя метод Бубнова–Галёркина [6], получаем следующие соотношения для определения границ областей динамической устойчивости:

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1\right)A + \left(\frac{1}{2}d_1 - 2d_2\right)A^3 + \left(\frac{1}{2}d_3 + 2d_4\right)\theta_0 A^2 - \frac{3}{4}d_6\theta_0^2 A = 0 \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1\right)A - \frac{1}{2}d_1 A^3 - \frac{1}{2}d_3\theta_0 A^2 - \frac{1}{4}d_6\theta_0^2 A = 0 \quad (3.26)$$

Уравнения (3.25), (3.26) описывают левую и правую границы параметрически возбуждаемых колебаний (линии ADE и AJ).

Рассмотрим теперь вопрос о построении установившихся режимов движения жидкостей, происходящих в основной области динамической неустойчивости. Предположим, что в области основного резонанса приближенное решение системы нелинейных уравнений (3.17)–(3.18) можно представить в виде

$$\alpha(t) = A \cos pt + \bar{A} \sin pt, \quad \beta(t) = \bar{B} \cos pt + B \sin pt \quad (3.27)$$

Используя метод Бубнова–Галёркина для постоянных A, B ($\bar{A} = 0, \bar{B} = 0$), получаем следующие алгебраические соотношения:

$$-\frac{1}{2}d_1 AB^2 + \left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 - \frac{3}{4}d_6\theta_0^2\right)A + \left(\frac{1}{2}d_3 + 2d_4\right)\theta_0 A^2 + \left(\frac{1}{2}d_1 - 2d_2\right)A^3 = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{1}{2}d_1 - 2d_2\right)A + \frac{1}{4}(d_3 + 3d_4)\theta_0\right)B^2 + \left(\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 - \frac{1}{4}d_5\theta_0^2\right)A - \\ &-\frac{1}{4}(3d_3 - d_4)\theta_0 A^2 - \frac{1}{2}d_1 A^3 + d_0\theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Исключив B^2 из (3.29) и подставляя результат в выражение (3.28), находим уравнение для определения амплитудно-частотных характеристик в области динамической неустойчивости

$$\frac{1}{\bar{p}^2} - 1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 = &4d_2 \left(1 - 2\frac{d_2}{d_1}\right)A^3 - \left[\left(1 - 4\frac{d_2}{d_1}\right)\left(\frac{3}{2}d_3 + 5d_4\right) - \frac{1}{4}(3d_3 - d_4)\right]A^2\theta_0 - \\ &- \left[\frac{d_3 + 3d_4}{2d_1}\left(\frac{1}{2}d_3 + 2d_4\right) - \frac{1}{4}d_5\right]A\theta_0^2 + \frac{3d_6}{8d_1}(d_3 + 3d_4)\theta_0^3 - \\ &- \frac{3}{4}d_6 \left(1 - 4\frac{d_2}{d_1}\right)A\theta_0 - d_0\theta_0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$m_2 = 2 \left(1 - 2\frac{d_2}{d_1}\right)A + \frac{1}{2} \left(\frac{d_3}{d_1} + 3\frac{d_4}{d_1}\right)\theta_0 \quad (3.32)$$

На рис. 2 построены амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний двухслойной жидкости для цилиндрической полости при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{p}_1 = 0.85$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1$, $\bar{h}_0 = 0$ при двух значениях $\theta_0 = 0.01$ и $\theta_0 = 0.1$.

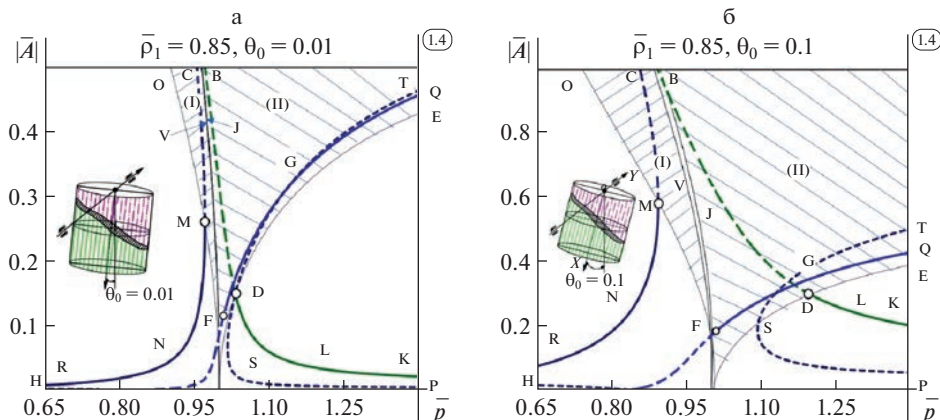


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{\rho}_1 = 0.85$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1$, $\bar{h}_0 = 0$ при $\theta_0 = 0.01 - \text{a}$, $\theta_0 = 0.1 - \text{б}$.

Соответствующие уравнению (3.30) резонансные кривые представлены на рис. 2 сплошными синими линиями FGQ – возникновение устойчивых изменений координаты $\beta(t)$, взаимодействие которых с основной формой приводит к вращению узлового диаметра.

Сплошные линии черные RNM и зеленые KLD показывают плоские линейные устойчивые колебания, пунктирные линии HF и PT – отображают неустойчивые режимы возникновения параметрических колебаний, пунктирные линии черные MC и зеленые DB – неустойчивые режимы возникновения нелинейных колебаний основной формы.

Из полученных всех соотношений построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний жидкостей. При отсутствии верхней жидкости $\bar{\rho}_1 = 0$, построенные характеристики качественно совпадают с результатом задачи о вынужденных угловых колебаниях одной жидкости в цилиндрическом сосуде [5].

Вид амплитудно-частотных характеристик и области неустойчивости I и II угловых нелинейных колебаний цилиндрического сосуда, целиком заполненного двумя жидкостями показаны на (рис. 2), для двух уровней амплитуды входного сигнала $\theta_0 = 0.01$ и 0.1 .

При малых значениях $\theta_0 = 0.01$ на (рис. 2,а) поведение амплитудно-частотных характеристик угловых колебаний двухслойной жидкости мало чем отличается от аналогичных характеристик поступательных колебаний двухслойной жидкости [12], что и следовало ожидать, т.к. эффект дополнительных нелинейных коэффициентов, стоящих множителями перед малыми θ_0 и θ_0^2 , не может существенно проявиться. При увеличении амплитуды θ_0 область II расширяется, увеличивается расстояние между устойчивой и неустойчивой ветвями кривой параметрического резонанса FGQ и PST (рис. 2,б). Видно (рис. 2,б), что точка S пересечения ветви PST и границы $ADSE$ области II не совпадает с точкой D пересечения ветви KLD и этой же границы $ADSE$, хотя на (рис. 2,а) они практически совпали. Левая ветвь RNM и правая ветвь KLD с ростом

амплитуды θ_0 поднимаются. Устойчивая ветвь FGQ с увеличением θ_0 несколько поднимается по значениям.

Таким образом, учет нелинейных слагаемых, при коэффициентах d_3, d_4, d_5, d_6 приводит к некоторому количественному изменению, но не вносит никаких новых качественных свойств в динамическую систему.

Заключение. На основании приведенных теоретических исследований нелинейных колебаний жидкостей, возбуждаемых угловыми колебаниями твердого тела вокруг горизонтальной оси, можно сделать следующий вывод. В определенном диапазоне амплитуд возбуждения колебаний твердого тела при одинаковой частоте возбуждения амплитуды плоских колебаний поверхности раздела увеличиваются. Переход из плоских колебаний поверхности раздела в пространственные движения происходит при сравнительно больших амплитудах колебаний поверхности раздела.

Следует заметить, что амплитудно-частотная характеристика реальных жидкостей, обладающих вязкостными свойствами, может отличаться от приведенных теоретических кривых, сужением областей неустойчивости и отсутствием кривых, характеризующих пространственные движения поверхности раздела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Изв. РАН. МТТ. 1986. № 1. С. 27–36.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Изв. РАН. МТТ. 1987. № 2. С. 52–58.
3. Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде // В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск: НЭТИ, 1974. С. 82–88.
4. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. М.: Гостехиздат, 1948. 143 с.
5. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990. 296 с.
6. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
7. Микушев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
8. Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы “идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ” в цилиндрическом контейнере // Crimean Int. Math. Conf. (СІМС-2003). Abstracts. Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. Т. 3. С. 51–52.
9. Лимарченко О.С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Киев: Адверта, 2017. 130 с.
10. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инж. ж.: наука и иннов. Электрон. ж. 2013. № 12 (24).
11. Вин Ко Ко, Ян Хаинг У. Нелинейные колебания поверхности раздела двух жидкостей при угловых колебаниях бака // Инж. ж.: наука и иннов. 2021. Вып. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-5-2076
12. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объеме // Вестн. Томского ГУ. Матем. и мех. 2021. № 69.
13. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Тр. МАИ. 2021. № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03
14. Win Ko Ko, Temnov A.N. Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318. Art. № 020004. DOI: 10.1063/5.0035840
15. Win Ko Ko, Temnov A.N. Research of amplitude-frequency characteristics of nonlinear oscillations of the interface of two-layered liquid // Int. J. Mech.&Mechatron. Engng. 2020. V. 14. № 1. P. 7–13.

16. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci.&Engng. 2018. V. 468. Art. № 012031.
17. *Sekerzh-Zen'kovich S.Y.* The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel // JAMM. 1990. V. 54. № 1. P. 39–45.
18. *Kalinichenko V.A.* Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dyn. 2019. V. 54. №. 6. P. 761–773.
19. *La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A.* Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Phys. Fluids. 2005. № 17. P. 062101.
20. *Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C.* Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // J. Ocean Engng.&Marine Energy. 2018. V. 4. P. 243–257.

Amplitude-Frequency Characteristics and Stability Regions of a Two-Layer Liquid Under Angular Vibrations of a Solid Body

Win Ko Ko^{a,*} and A.N. Temnov^{a,**}

^a*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: win.c.latt@gmail.com*

^{**}*e-mail: antt45@mail.ru*

The article considers the problem of nonlinear oscillations of the motion of liquids completely filling an axisymmetric cylindrical vessel moving around a horizontal axis O^*Y . The motion of each fluid is assumed to be potential and formulated in a cylindrical coordinate system. The influence of nonlinear coefficients on the characteristics of dynamic processes during finite rotational movements of the vessel is estimated and the case of forced angular oscillations of a vessel with liquids relative to a fixed axis is considered. The main nonlinear effects associated with the rotation of the diameter of the interface of liquids are also revealed. An approximate solution of the obtained non-linear equations, found by the Bubnov-Galerkin method, was used in the article. As a result of the transformation, the amplitude-frequency characteristics and stability regions of a two-layer liquid are constructed under forced angular oscillations of a round cylindrical vessel.

Keywords: mechanical system, cylindrical cavity, hydrodynamic coefficients, basic resonance, disturbed surface, rotational motion

REFERENCES

1. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Vibrations of a solid body with a cavity containing a heavy inhomogeneous liquid // Mech. Solids, 1986, no. 1, pp. 27–36.
2. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Nonresonant vibrations of a solid body with a cavity containing a heavy two-layer liquid // Mech. Solids, 1987, no. 2, pp. 52–58.
3. *Lukovskii I.A.* Introduction to the Nonlinear Dynamics of a Solid Body with Cavities Containing a Liquid. Kiev: Nauk. Dumka, 1990. 296 p.
4. *Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskii I.A.* Nonlinear Dynamics of an Aircraft with a Liquid. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 208 p.
5. *Mikishev G.N., Rabinovich B.I.* Dynamics of a Solid Body with Cavities Partially Filled with Liquid. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 532 p.
6. *Zhukovskii N.E.* On the Motion of a Solid Body Having Cavities Filled with a Homogeneous Drop-let Liquid. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 143 p.
7. *Kozlov N.V., Shuvalova D.A.* Experimental measurement of inertial oscillations of the interface of immiscible liquids in a horizontal cylindrical cavity during rotation // Modern Probl. Sci.&Educ., 2014, no. 6. <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16669>
8. *Gaziev E.L.* Modeling of natural oscillations of the “ideal capillary liquid-barotropic gas” system in a cylindrical container // Crimean Int. Math. Conf. (CIMC-2003), Abstracts, Simferopol', KNTS NANU, 2013, vol. 3, pp. 51–52.

9. *Limarchenko O.S.* Nonlinear Problems of Fluid Dynamics in Non-Cylindrical Tanks. Kiev: Adver-ta, 2017. 130 p.
10. *Pozhalostin A.A., Goncharov D.A.* Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers in the presence of surface tension forces // Engng. J.: Sci.&Innov., 2013, no. 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147
11. *Win Ko Ko, Yan Naing Oo.* Nonlinear oscillations of the interface of two liquids with angular oscil-lations of the tank // Engng. J.: Sci.&Innov., 2021, vol. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-5-2076
12. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Theoretical investigation of the effects of vibrations of two immiscible liq-uids in a limited volume // Bull. Tomsk State Univ., Math.&Mech., 2021, no. 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8
13. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Angular oscillations of a solid body with a two-layer liquid near the main resonance // Proc. MAI. 2021, no. 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03
14. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel // AIP Conf. Proc. 2318, 2021, 020004. DOI: 10.1063/5.0035840
15. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Research of amplitude-frequency characteristics of nonlinear oscillations of the interface of two-layered liquid // Int. J. Mech.&Mechatron. Engng., 2020, vol. 14, no. 1. pp. 7–13.
16. *Win Ko Ko, Temnov A.N.* Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conf. Ser.: Materials Sci.&Engng. 468, 2018, 012031.
17. *Sekerzh-Zen'kovich S.Y.* The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel // JAMM, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 39–45.
18. *Kalinichenko V.A.* Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761–773.
19. *La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A.* Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Phys. Fluids, 2005, no. 17, pp. 062101.
20. *Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C.* Experimental inves-tigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // J. Ocean Engng.&Marine Energy, 2018, vol. 4, pp. 243–257.