ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 6, с. 915–953

УДК 531.36

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ МОДЕЛЕЙ АСТРОДИНАМИКИ, ПОРОЖДАЕМЫХ ГРАВИТАЦИОННЫМИ СИЛАМИ (ОБЗОР)

Ю. Н. Челноков[1,*]

[1]Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия
**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 04.09.2023 г.
После доработки 11.10.2023 г.
Принята к публикации 15.10.2023 г.

Излагается регуляризация особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых гравитационными силами, с использованием четырехмерных переменных и матриц Кустаанхеймо–Штифеля, а также кватернионная регуляризация уравнений этой задачи, предложенная автором и имеющая ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля. Дается аналитический обзор работ, посвященных кватернионной регуляризации указанных особенностей с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля, которая уникальна в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем. Рассмотрен предложенный автором новый метод регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании идеальных прямоугольных координат Ганзена, переменных Леви-Чивита и параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также на использовании в качестве дополнительных переменных кеплеровской энергии и реального времени и новой независимой переменной Зундмана. Приведены регулярные кватернионные уравнения в переменных Леви-Чивита и параметрах Эйлера этой задачи, которые имеют не только хорошо известные достоинства матричных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, но и обладают своими дополнительными достоинствами.

Ключевые слова: механика космического полета (астродинамика), возмущенная пространственная задача двух тел, регуляризация особенностей, порождаемых гравитационными силами, идеальная система координат, уравнения орбитального движения, переменные Кустаанхеймо–Штифеля, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), координаты Ганзена, переменные Леви-Чивита, кватернион

DOI: 10.31857/S0032823523060036, **EDN:** YDBQRS

1. Введение. Работа носит обзорный аналитический характер и дополняет собой нашу обзорную работу [1]. Обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, лежащих в основе небесной механики и механики космического полета (астродинамики): проблема устранения особенностей типа сингулярностей (деления на ноль), которые порождаются действующими на небесное или космическое тело ньютоновскими гравитационными силами и которые осложняют аналитическое и численное исследование движения тела вблизи гравитирующих тел или его движения по сильно вытянутым орбитам. Для получения различных регулярных уравнений используются четырехмерные параметры

Эйлера (Родрига–Гамильтона), четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменные), двухмерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена, регулярные двухмерные переменные Леви-Чивита и кватернионы Гамильтона.

В нашей работе [1] излагаются кватернионные и бикватернионные методы описания движения, модели теории конечных перемещений и регулярной кинематики твердого тела, основанные на использовании четырехмерных вещественных и дуальных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти модели кинематики не имеют особенностей, порождаемых использованием для описания движения классических углов Эйлера–Крылова и их дуальных аналогов. Обсуждается проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера, четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и кватернионов Гамильтона. Излагается история проблемы регуляризации и регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля, нашедшие широкое применение в небесной механике и астродинамике. Излагаются предложенные нами кватернионные методы регуляризации, имеющие ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля, и различные, предложенные нами, регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (как для абсолютного, так и для относительного движения). Приведены результаты сравнительного исследования точности численного интегрирования различных форм регуляризованных уравнений небесной механики и астродинамики в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и ньютоновских уравнений в декартовых координатах, показывающие, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля значительно выше (на несколько порядков) точности численного интегрирования ньютоновских уравнений.

В настоящей работе кратко описывается матричная регуляризация Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-регуляризация) особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых гравитационными силами, с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Показывается, что предложенный нами кватернионный метод регуляризации уравнений этой задачи имеет ряд преимуществ перед матричной регуляризацией Кустаанхеймо–Штифеля. Дается аналитический анализ работ, посвященных кватернионной регуляризации указанных особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Многие из этих работ опубликованы в ведущих зарубежных изданиях.

В работе также излагается регуляризация Леви-Чивита уравнений возмущенной плоской задачи двух тел (уравнений плоского движения). Изложен предложенный нами новый метод регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании идеальной системы координат, двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и двухмерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение второго (рассматриваемого) тела в идеальной системе координат, в которой уравнения пространственного движения принимают вид уравнений плоского движения, а также основанный на использовании четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Эти параметры Эйлера и кватернион ориентации идеальной системы координат являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты изучаемого (второго) тела (медленно изменяющимися переменными).

Леви-Чивита в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал [2]: “Проблема в пространстве долго сопротивлялась моим усилиям, т.к. я пытался подойти к ней с помощью аналогичных изменений координат…”.

Штифель и Шейфеле в своей широко цитируемой книге [3] отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. В работе [4] (см. также книгу [5]) говорится, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом [6] и Гурвицем [7], невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства).

Тем не менее, автором статьи [8] было показано, что регуляризация Леви-Чивита может быть с успехом использована для построения регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Эта регуляризация регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенная в [8], излагается в нашей обзорной работе.

Для получения регулярных уравнений исходные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в декартовых координатах записываются нами в двух системах координат: орбитальной и идеальной системах координат (название системы координат “идеальная”, по-видимому, было введено Deprit [9]) с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбиты, компоненты которого – параметры Эйлера – являются медленно изменяющимися переменными и характеризуют инерциальную ориентацию в пространстве идеальной системы координат. В этих уравнениях переменными являются расстояние r от центра масс второго тела до центра масс первого тела, производная dr/dt (проекция v_1 вектора скорости $\mathbf{v}$ центра масс второго тела на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ второго (изучаемого) тела), модуль $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ вектора $\mathbf{c}$ момента орбитальной скорости второго тела, обобщенная истинная аномалия φ и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) (скалярные оскулирующие элементы орбиты).

Далее осуществляется переход от этих уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел к уравнениям, записанным в идеальной системе координат с использованием двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена для описания движения второго тела в этой системе координат и дополненным нами кватернионным дифференциальным уравнением ориентации идеальной системы координат в инерциальной системе координат, коэффициенты которого содержат координаты Ганзена. Отметим замечательную особенность идеальной системы координат: в ней трехмерные уравнения пространственного движения принимают вид двухмерных уравнений плоского движения в идеальных прямоугольных координатах Ганзена.

Затем в полученных уравнениях нами осуществляется переход от координат Ганзена к переменным Леви-Чивита и переход к новой независимой переменной τ в соответствии с дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$ (преобразованием времени Зундмана [10]). Кроме этого, также в качестве дополнительной переменной вводится кеплеровская энергия h, через которую выражаются коэффициенты дифференциальных уравнений в переменных Леви-Чивита, и дополнение полученных уравнений дифференциальными уравнениями для кеплеровской энергии и времени.

В итоге получаются скалярные и кватернионные регулярные уравнения движения второго тела (регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел), полученные в работе [8], в которых совместно используются переменных Леви-Чивита и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона).

Эти регулярные уравнения имеют не только хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (регулярность, линейность в новом времени для кеплеровских движений, близость к линейным уравнениям для возмущенных движений), но и обладают своими дополнительными достоинствами:

1) для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармо-

нического осциллятора, как в случае Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора; кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, в этом случае остается постоянным;

2) для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат, входящий в состав используемых переменных и имеющий в качестве своих компонент параметры Эйлера, является кватернионным оскулирующим элементом (медленно изменяющейся кватернионной переменной), что также является полезным свойством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Отметим, однако, что эти уравнения не пригодны для исследования редко встречающихся прямолинейных орбит, когда модуль вектора момента орбитальной скорости второго тела $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ обращается в ноль, поскольку кватернионное дифференциальное уравнение ориентации идеальной системы координат в этом случае вырождается (в знаменателях коэффициентов этого уравнения присутствует величина c). В статье указывается, как можно избавиться от этого недостатка излагаемых регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, в которых совместно используются переменные Леви-Чивита и параметры Эйлера, и приводятся регулярные уравнения в этих переменных, не имеющие указанного недостатка, но являющиеся более сложными.

2. Проблема регуляризации уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики). В основе небесной механики и астродинамики лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. Эти уравнения вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических (ньютоновских) уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название "регуляризация" (Леви-Чивита 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными. Среди методов регуляризации и регулярных моделей прикладной небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных – кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля или четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). Эти методы и модели имеют ряд преимуществ аналитического и вычислительного характера перед другими методами и моделями.

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменных) посвящены работы [11–28], а также работы автора статьи [8, 29–42].

Приводятся [42–50] результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования *KS*-переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Проведено [51, 52] сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором статьи [53] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в *KS*-переменных, принимающих вид регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Регулярные кватернионные уравнения в *KS*-переменных показали значительно более высокую точность, чем уравнения в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на 7 порядков.

Отметим, что в книге Бордовицыной [43] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием уравнений в *KS*-переменных и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в *KS*-переменных перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими результатами [51, 52] показало, что они в целом согласуются между собой. Отметим также, что Бордовицыной и Шарковским использованы регулярные уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля в канонической, а не в осцилляторной форме, выведенные ими с использованием соответствующего гамильтониана.

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в *KS*-переменных, имеющих возмущенный осцилляторный вид, в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе перед уравнениями в декартовых координатах.

3. Регуляризация Кустаанхеймо—Штифеля уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и регуляризация Леви-Чивита уравнений возмущенной плоской задачи двух тел. Векторное и скалярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{p}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right); \quad r = |\mathbf{r}| \\
\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3}\xi_1 = p_1, \quad \frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3}\xi_2 = p_2 \\
\frac{d^2\xi_3}{dt^2} + \frac{f(m+M)}{r^3}\xi_3 = p_3; \quad r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс второго (изучаемого) тела, проводимый из центра масс первого (центрального) тела, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между телами, m и M — массы второго и первого тел; f — гравитационная постоянная; $\mathbf{p}$ — вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела (вектор-функция времени t, радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ второго тела в системе координат ξ, имеющей начало в центре масс первого тела и координатные оси, параллельные осям инерциальной системы координат), t — время; ξ_k — декартовые координаты центра масс изучаемого тела в системе координат ξ, $p_k = p_k(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$ $(k = 1, 2, 3)$ — проекции возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси инерциальной системы координат, совпадающие с его проекциями на оси системы координат ξ, верхняя точка — символ дифференцирования по времени t.

Уравнения (3.1) вырождаются при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния r между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат, как уже отмечалось, создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит к Эйлеру [54] и Леви-Чивита [2, 55, 56]. Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (спинорная или *KS*-регуляризация) была предложена Кустаанхеймо и Штифелем [57, 58]. Она наиболее полно изложена в монографии [3].

В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спиноров: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. На языке вещественного анализа это эквивалентно введению четырех параметров $u_1, u_2, u_3, u_4 = u_0$.

В регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, изложенной в книге [3], использована обобщенная матрица Леви-Чивита, названная *KS*-матрицей. Эта матрица (обозначается нами как $L(\mathbf{u}_{KS})$) – четырехмерная квадратная матрица, содержащая в левом верхнем углу двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита и имеющая вид

$$L(\mathbf{u}_{KS}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

В этой матрице u_j ($j = 0, 1, 2, 3$) – переменные Кустаанхеймо–Штифеля, называемые *KS*-переменными (вместо обозначения u_4 одной из переменных Кустаанхеймо–Штифеля здесь и далее нами используется обозначение u_0).

В матричной записи преобразование Кустаанхеймо–Штифеля имеет вид (3.3) [3]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

В скалярной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2), \tag{3.4}$$

что с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа [59].

Таким образом, в основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, которое основывается на переходе от трехмерных декартовых координат ξ_k к новым четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j (т.е., на переходе от трехмерного пространства декартовых координат к новому четырехмерному пространству).

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля в скалярной записи имеют вид [3]

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = \frac{1}{2} r q_j; \quad j = 0,1,2,3 \tag{3.5}$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2\left(q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_1 \frac{du_1}{d\tau} + q_2 \frac{du_2}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau}\right) \tag{3.6}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{3.7}$$

$$q_0 = u_0 p_1 - u_3 p_2 + u_2 p_3, \quad q_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3$$
$$q_2 = -u_2 p_1 + u_1 p_2 + u_0 p_3, \quad q_3 = -u_3 p_1 - u_0 p_2 + u_1 p_3 \tag{3.8}$$

Здесь τ – новая независимая переменная, называемая фиктивным временем, связанная с временем t дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$ (преобразованием времени Зундмана [10]), h – кеплеровская энергия единицы массы изучаемого тела, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношением

$$h = \frac{1}{2}v^2 - f(m+M)\frac{1}{r}; \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3.9}$$

Время t также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля (3.5)–(3.8) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных, в общем случае нестационарных, дифференциальных уравнений относительно четырех KS-переменных u_j, их первых производных $du_j/d\tau$ по новой независимой переменной τ, кеплеровской энергии h и времени t.

Эти скалярные уравнения эквивалентны матричным уравнениям [3]

$$\frac{d^2\mathbf{u}_{ks}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u}_{ks} = \frac{1}{2}rL(\mathbf{u}_{ks})\mathbf{P}_{ks}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -2\left(\frac{d\mathbf{u}_{ks}}{d\tau}, (L(\mathbf{u}_{ks}))^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{ks}\right)$$
$$\frac{dt}{d\tau} = (\mathbf{u}_{ks}, \mathbf{u}_{ks}) \quad \mathbf{u}_{ks} = (u_1, u_2, u_3, u_0), \quad \mathbf{P}_{ks} = (p_1, p_2, p_3, 0), \tag{3.10}$$

где $\mathbf{u}_{ks}$ – четырехмерный вектор-столбец KS-переменных, $L(\mathbf{u}_{ks})$ – KS-матрица, определяемая соотношением (3.2), $\mathbf{P}_{ks}$ – четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения $\mathbf{p}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение четырехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Уравнения Кустаанхеймо–Штифеля обобщают уравнения Леви-Чивита уравнений возмущенной плоской задачи двух тел, имеющие в скалярной записи вид

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = \frac{1}{2}rq_j; \quad j = 1,2 \tag{3.11}$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2\left(q_1\frac{du_1}{d\tau} + q_2\frac{du_2}{d\tau}\right); \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_1^2 + u_2^2 \tag{3.12}$$

$$q_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2, \quad q_2 = -u_2 p_1 + u_1 p_2 \tag{3.13}$$

Здесь u_1 и u_2 – переменные Леви-Чивита, связанные с декартовыми координатами ξ_1 и ξ_2 соотношениями

$$\xi_1 = u_1^2 - u_2^2, \quad \xi_2 = 2u_1u_2, \quad \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^{1/2} = r = |\mathbf{r}| = u_1^2 + u_2^2 \tag{3.14}$$

В случае плоского движения четырехмерная квадратная матрица $L(\mathbf{u}_{KS})$ Кустаанхеймо–Штифеля, определяемая соотношением (3.2), переходит в двухмерную квадратную матрицу Леви-Чивита, имеющую вид

$$L(\mathbf{u}_{lc}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

В матричной записи преобразование Леви-Чивита (3.14) имеет вид (3.16) [3]:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{lc})\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

В комплексной записи преобразование Леви-Чивита принимает вид (3.17):

$$\xi_1 + i\xi_2 = (u_1 + iu_2)^2 \tag{3.17}$$

и устанавливает отображение параметрической плоскости переменных Леви-Чивита u_1 и u_2 на физическую плоскость переменных ξ_1 и ξ_2 (декартовых координат).

Скалярные регулярные уравнения возмущенной плоской задачи двух тел (3.11)–(3.13) Леви-Чивита эквивалентны его матричным уравнениям [3]

$$\frac{d^2\mathbf{u}_{lc}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u}_{lc} = \frac{1}{2}rL(\mathbf{u}_{lc})\mathbf{P}_{lc}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -2\left(\frac{d\mathbf{u}_{lc}}{d\tau}, (L(\mathbf{u}_{lc}))^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}_{lc}\right); \quad \frac{dt}{d\tau} = (\mathbf{u}_{lc}, \mathbf{u}_{lc}) \tag{3.18}$$
$$\mathbf{u}_{lc} = (u_1, u_2), \quad \mathbf{P}_{lc} = (p_1, p_2),$$

где $\mathbf{u}_{lc}$ – двухмерный вектор-столбец переменных Леви-Чивита, $L(\mathbf{u}_{lc})$ – матрица Леви-Чивита, определяемая соотношением (3.15), $\mathbf{P}_{lc}$ – двухмерный вектор-столбец, сопоставляемый двухмерному вектору возмущающего ускорения $\mathbf{p}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение двухмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отметим основные хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (3.5)–(3.7):

– они, в отличие от ньютоновских уравнений (3.1), регулярны в центре притяжения, когда расстояние между телами $r = 0$;

– линейны во времени τ для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений) и имеют в этом случае вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными половинной кеплеровской энергии h, взятой со знаком "–":

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = 0; \quad h = \mathrm{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

– для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h = \mathrm{const} < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора во времени τ, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус;

– позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Штифелем и Шейфеле [3], Бордовицыной и Шарковским [43] показано, что точность численного интегрирования регуляризованных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля значительно выше точности интегрирования ньютоновских уравнений. Так, Бордовицыной и Шарковским показано, что использование регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например, задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических ньютоновских уравнений. Сравнение этих результатов с нашими, приведенными выше, показало, как уже отмечалось выше, что они в целом согласуются между собой.

Fukushima было также показано [45, 46], что *KS*-регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме. Проводится [46] численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации *KS*, Шперлинга–Бюрде (*SB*), Бюрде–Феррандиса (*BF*) и трехмерное расширение регуляризации Леви-Чивита (*LC*). В аннотации [46] сказано: *KS* и расширенная *LC*-регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел. Подчеркнем, что и Fukushima [46] сравнивает семь схем, описанных в § 1, а также “нерегуляризованную обработку, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах”. Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения.

4. Кватернионная регуляризация и регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенные автором статьи. В основе знаменитой регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит, как уже отмечалось, нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, названное *KS*-преобразованием. Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (к четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля). Поэтому, по мнению Штифеля и Шейфеля прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (т.е. пространственном) случае невозможен ([3], стр. 29).

В книге [3] постулируется матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел (первое из уравнений (3.10)), записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита плоского движения (3.18), и с помощью нескольких теорем доказывается, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение (первое из уравнений (3.1)).

Вскоре после открытия *KS*-преобразования было рассмотрено использование кватернионов Гамильтона (четырехмерных гиперкомплексных чисел) и четырехмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел, поскольку четырехмерность пространства новых координат делало естественным использование для такой регуляризации кватернионов Гамильтона и четырехмерных кватернионных матриц. Однако, Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав в одиннадцатой главе своей книги [3], посвященной геометрии *KS*-преобразования, что “Любая попытка заменить теорию *KS*-матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму”. Поэтому вместо хорошо известных в математике четырехмерных кватернионных матриц Штифель и Шейфеле в [3] для построения теории регуляризации используют новые четырехмерные квадратные матрицы, названные ими *KS*-матрицами, имеющие вид (3.2).

Приведенное утверждение Штифеля и Шейфеле было опровергнуто, по-видимому впервые, автором статьи [29–32]. Известный западный ученый Вальдвогель по поводу цитированного выше высказывания Штифеля и Шейфеле о бесперспективности использования в теории регуляризации кватернионных матриц в работе [20] говорит: “Это утверждение было впервые опровергнуто Челноковым (1981), который представил теорию регуляризации пространственной задачи Кеплера, используя геометрические представления во вращающейся системе координат и кватернионные матрицы. В серии статей (напр., 1992 и 1999) тем же автором была расширена теория кватернионной регуляризации и приведены практические применения.”

Автором статьи было показано [29–32] ([29] – с использованием классических кватернионных матриц, [30] – с использованием кватернионов Гамильтона), что в действительности кватернионный подход к регуляризации

– позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в *KS*-переменных (что, как уже отмечалось, ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение ([3], стр. 29) из-за неоднозначности *KS*-преобразования,

– позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему *KS* преобразованию;

– раскрывает геометрический смысл его неоднозначности;

– позволяет получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Для построения кватернионных регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в [29] была использована четырехмерная кватернионная матрица

$$n\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & u_0 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_3 & u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & u_0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

элементами которой являются переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j.

Эта матрица отличается от *KS*-матрицы (3.2). Если под элементами u_j этой матрицы понимать четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j, то она будет являться хорошо известной кватернионной матрицей поворота, описывающей вращение в трехмерном пространстве.

В работе [30] для этих целей использован кватернион Гамильтона **u**:

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \tag{4.2}$$

элементами которого являются переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j.

В кватернионной записи связи декартовых координат ξ_k с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}; \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i} - u_2\mathbf{j} - u_3\mathbf{k}, \tag{4.3}$$

приведенный Штифелем и Шейфеле в их книге [3].

Показано [29, 30], что регуляризующее *KS*-преобразование координат заключается в переходе от трехмерных декартовых координат центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым четырехмерным переменным, которые являются нормированными определенным образом компонентами сопряженного кватерниона поворота $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$, характеризующего ориентацию вращающейся системы координат η в инерциальной системе координат. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора **r** центра масс второго тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, поэтому кватернионные переменные **u** и $\boldsymbol{\lambda}$ связаны кватернионным соотношением $\mathbf{u} = \sqrt{r}\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, которые эквивалентны скалярным соотношениям: $u_0 = r^{1/2}\lambda_0$, $u_i = -r^{1/2}\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

Также было показано, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1\frac{du_0}{d\tau} - u_0\frac{du_1}{d\tau} + u_3\frac{du_2}{d\tau} - u_2\frac{du_3}{d\tau} = 0 \tag{4.4}$$

связывающее между собой *KS*-переменные u_j и их первые производные по новой независимой переменной τ, накладывает на движение трехгранника η дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (ось η_1):

$$\omega_1 = 2\left(\lambda_0 \frac{d\lambda_1}{dt} - \lambda_1 \frac{d\lambda_0}{dt} - \lambda_2 \frac{d\lambda_3}{dt} + \lambda_3 \frac{d\lambda_2}{dt}\right) =$$
$$= \frac{2}{r}\left(u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_0 \frac{du_1}{d\tau} + u_3 \frac{du_2}{d\tau} - u_2 \frac{du_3}{d\tau}\right) = 0$$

Отметим, что по словам Штифеля и Шейфеле ([3], стр. 29) соотношение вида (4.4):

$$u_4 v_1 - u_3 v_2 + u_2 v_3 - u_1 v_4 = 0,$$

где u_j и v_j – компоненты четырехмерных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, “называется билинейным соотношением и играет основную роль в нашем построении регулярной небесной механики”.

Таким образом, переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от декартовых координат центра масс второго тела к *KS*-переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся системе координат η с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j, являющихся компонентами кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$ этой системы координат.

Дальнейшие преобразования этих уравнений связаны с нормировкой параметров Эйлера λ_j (кватерниона поворота $\boldsymbol{\lambda}$) с помощью множителя $\sqrt{r}$ и с переходом в них к переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j, а также с введением в качестве дополнительных зависимых переменных кеплеровской энергии h и времени t и с переходом к новой независимой переменной Зундмана τ.

Отметим, что автором были получены [29, 30] более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) матричные (с использованием кватернионных матриц) и кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в *KS*-переменных в предположении, что вышеуказанное билинейное соотношение (4.4) не выполняется. Эти уравнения содержат дополнительные слагаемые, в которых присутствуют проекции ω_1 и ε_1 векторов угловой скорости и углового ускорения сопровождающего трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром) и являются более сложными.

Матричные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в общем случае, когда билинейное соотношение (4.4) не выполнется, имеют вид [29]

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_0'' \\ -u_3'' \\ u_2'' \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1 - 3r & -\xi_2 & -\xi_3 \\ \xi_1 + 3r & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 + 3r \\ \xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 - 3r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_0' \\ -u_3' \\ u_2' \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h + \omega_1^2 r^2 & -r^2\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ r^2\varepsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h + \omega_1^2 r^2 & r^2\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -r^2\varepsilon_1 & h + \omega_1^2 r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \\ -u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} r \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$h' = 2\left(q_0u_0' + q_1u_1' + q_2u_2' + q_3u_3'\right), \quad t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$
$$q_0 = u_0p_1 - u_3p_2 + u_2p_3, \quad q_1 = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3, \tag{4.5}$$
$$q_2 = -u_2p_1 + u_1p_2 + u_0p_3, \quad q_3 = -u_3p_1 - u_0p_2 + u_1p_3$$
$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2),$$

где ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ — проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (одна из этих проекций (ω_1 или ε_1) является произвольно задаваемым параметром), верхний штрих, по-прежнему, — символ дифференцирования по независимой переменной τ.

Кватернионные регулярные уравнения этой задачи в общем случае в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют вид [30] (в этой работе эти уравнения записаны в другой кватернионной форме, соответствующей приведенной выше матричной записи этих уравнений (4.5), когда кватернионная переменная $\boldsymbol{\alpha}$, введенная в этой работе и соответствующая вектор-столбцу $(u_1, u_0, -u_3, u_2)$, равна $\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}$):

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{3}{2}r\omega_1\mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{1}{2}\left(r^2\varepsilon_1 + \omega_1\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{u}}\right) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} - \frac{1}{2}\left(h + r^2\omega_1^2\right)\mathbf{u} = -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi$$
$$\frac{dh}{d\tau} = \mathbf{p}_\xi \cdot \left[\frac{d}{d\tau}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u})\right]; \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \quad \frac{d\omega_1}{d\tau} = r\varepsilon_1 \tag{4.6}$$
$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$
$$\mathbf{p}_\xi = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \quad p_k = p_k\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3\right)$$

В этих уравнениях $\mathbf{u}$, h, t — неизвестные функции независимой переменной τ, $\bar{\mathbf{u}}$ — кватернион, сопряженный кватерниону $\mathbf{u}$, проекции p_k вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси инерциальной системы координат являются заданными функциями времени t, декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс второго тела на оси опорной системы координат ξ, которые могут быть представлены как функции времени t и переменных u_j, u_j'; ω_1 и $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ — проекции векторов угловой скорости и углового ускорения трехгранника η на ось η_1, заданные как функции переменных t и u_j, u_j'; центральная точка означает скалярное произведение.

Для нахождения проекций радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ центра масс изучаемого тела на оси инерциальной системы координат (координат ξ_k и их производных $\dot{\xi}_k$ по времени t) через переменные u_j и u_j' необходимо воспользоваться кватернионными соотношениями

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k} = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}'$$

Таким образом, нами были получены более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо–Штифеля) регулярные матричные и кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. Эти уравнения сложнее уравнений Кустаанхеймо–Штифеля. Они, в первую очередь, имеют теоретический интерес, демонстрируя тот факт, что регуляризация достигается и в том случае, когда $\omega_1 \neq 0$, т.е. когда не выполняется билинейное соотношение, являющееся одним из основных в теории регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля. Возможно, эти уравнения будет целесообразно использовать для высокоточных численных расчетов, поскольку при их интегрировании не требуется выполнения билинейного соотношения (4.4), которое неизбежно будет нарушаться в процессе численного интегрирования из-за методических и вычислительных погрешностей.

Полагая $\omega_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, из уравнений (4.6) получаем нашу кватернионную форму регулярных уравнений Кустаанхеймо—Штифеля:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = -\frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \frac{dh}{d\tau} = 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right); \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} \tag{4.7}$$
$$q = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \mathbf{p}_\xi = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$$

Здесь scal(•) — скалярная часть кватернионного произведения $\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{q}$, $\mathbf{p}_\xi$ — кватернион действующих возмущений.

Отметим, что использование кватернионных моделей механики имеет преимущества перед использованием векторных и матричных моделей. Кватернионное исчисление, в отличие от матричного исчисления, имеет геометрическую наглядность векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно более общее и гибкое. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме того, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, можно непосредственно использовать векторные величины, определяемые их проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением, чем векторный. Также отметим, что в кватернионном исчислении, в отличие от матричного, операция аналитического нахождения и численного вычисления обратного кватерниона, в отличие от аналитического нахождения и вычисления обратной матрицы, проста и легко алгоритмизируема.

Автором также были получены другие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и искусственного спутника Земли (ИСЗ) в новых четырехмерных переменных: модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля, введенных в работе [34] (см. также [38]). Эти уравнения обладают всеми достоинствами выше приведенных матричных и кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, но имеют более простую и симметричную структуру для движения второго тела (например, космического аппарата (спутника)) в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная, но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники [34, 41].

Более простые и симметричные структуры уравнений приводят к более эффективным вычислительным алгоритмам при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения спутника. Удобство и эффективность использования полученных уравнений движения спутника в модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля для аналитического исследования движения спутника показано в [41] на примере движения спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются его центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. В этой работе найдены первые интегралы уравнений движения спутника в модифицированных переменных в указанном случае, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Предложен [32, 34] способ однозначного нахождения значений параметров Эйлера и переменных Кустаанхеймо—Штифеля по заданным в рассматриваемый момент времени значениям декартовых координат и их первых производных (проекциям вектора скорости). Этот способ имеет в сравнении со способом неоднозначного нахождения переменных Кустаанхеймо—Штифеля [3] существенные преимущества.

5. Работы по регуляризации Кустаанхеймо—Штифеля (*KS*-регуляризации) и кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел других авторов. В работе Velte [11], посвященной профессору Отто Фольку, дается с помощью кватернионов в векторном изложении новый вывод KS-преобразования, действующего из четырехмерного пространства параметров в трехмерное физическое пространство. Использование кватернионов в векторном изложении (с использованием векторной записи для кватернионов со скалярной составляющей $\xi \in R$ и векторной компонентой $\mathbf{x} \in R^3$) позволило автору дать каждому шагу в выводе KS-преобразования непосредственную геометрическую интерпретацию. В частности, KS-преобразование представлено как преобразование Леви-Чивита, сформулированное в повернутой системе координат. Отмечается, что здесь вполне естественным образом вступают (появляются) углы Эйлера. В качестве простого приложения приводятся явные формулы для KS-преобразования в случае эллиптического движения Кеплера в пространстве.

Во введеннии отмечается, что Volk и Waldvogel указали [60] на геометрическую интерпретацию KS-преобразования, включающую эйлеровы углы повернутой системы координат. Velte также отмечает, что "В этой статье Volk (1973) указал, что KS-преобразование уже встречается в письме Эйлера к Кристиану Гольдбаху в виде особого случая так называемой идентичности Эйлера".

В завершение вывода KS-преобразования говорится: "Таким образом, мы нашли, что преобразование Кустаанхеймо и Штифеля можно вывести следующим образом. Во-первых, в плоскости движения вводится и формулируется посредством кватернионов преобразование Леви-Чивита. Введя теперь повернутую систему координат, получим преобразование Кустаанхеймо и Штифеля".

Далее в разделе "Связь с углами Эйлера" отмечается, что "До сих пор мы описывали поворот системы координат с помощью кватерниона D, заданного в виде (9), содержащим половинный угол поворота и единичный вектор оси вращения. Но можно также выразить угол поворота и единичный вектор оси вращения с помощью трех эйлеровых углов (долготы узла, наклона плоскости движения и угла между линией узла и направлением единичного вектора $\mathbf{e}_1$ в плоскости движения)". Поэтому компоненты кватерниона D являются функциями трех указанных углов Эйлера.

Отметим, что в статье [11], на наш взгляд, Velte фактически реализована прозрачная идея, заключающаяся в том, что если в системе координат $X_1X_2X_3$ точка совершает плоское движение в плоскости X_1X_2 с координатами x_1 и x_2, то в системе координат $X_1'X_2'X_3'$, повернутой на произвольный угол δ относительно исходной системы коооординат $X_1X_2X_3$ вокруг оси, направление которой не совпадает с осью X_3 и задается единичным вектором $\mathbf{d}$, точка будет совершать пространственное (трехмерное) движение в системе координат $X_1'X_2'X_3'$ с тремя координатами x_1', x_2' и x_3', которые могут быть выражены через четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j. Именно такие формулы, связывающие новые координаты x_1', x_2' и x_3' точки с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j, в итоге получены из формул, связывающих декартовы координаты x_1 и x_2 в системе координат $X_1X_2X_3$ с переменными Леви-Чивита ξ и η, в результате проделанных выкладок с использованием кватернионов (в том числе с использованием введенного постоянного произвольного кватерниона $D = \cos\frac{\delta}{2} + \sin\frac{\delta}{2}\mathbf{d}$, описывающего поворот исходной системы координат (переход от системы координат $X_1X_2X_3$ к системе координат $X_1'X_2'X_3'$). Постоянство кватерниона D в статье не оговорено, но это следует из использованного Velte термина "поворот" и проводимых выкладок. При этом полученные переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j выражены им в явном виде через переменные Леви-Чивита ξ и η и компоненты d_j кватерниона D. В четвертом разделе им также представлены формулы, с помощью которых компоненты d_j могут быть найдены с помощью углов Эйлера. Также для эллиптического движения Кеплера в повернутой системе координат $X_1'X_2'X_3'$ получены формулы для переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j, выраженные через параметры орбиты, эксцентрическую аномалию E и компоненты d_j кватерниона D.

Подчеркнем, что Velte-преобразование Кустаанхеймо и Штифеля (KS-преобразование) представлено как преобразование Леви-Чивита, сформулированное в повернутой на постоянный угол δ системе координат. Нами [29, 30] показано, как уже отмечалось в разд. 4, что регуляризующее KS-преобразование координат заключается в переходе от трехмерных декартовых координат центра масс второго (изучаемого) тела в инерциальной системе координат к новым четырехмерным переменным Кустаанхеймо–Штифеля u_j, которые являются нормированными определенным образом компонентами сопряженного кватерниона вращения $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$, где λ_j – параметры Эйлера. Эти параметры Эйлера λ_j и кватернион вращения $\boldsymbol{\lambda}$ характеризуют ориентацию вращающейся (подвижной) системы координат η в инерциальной системе координат. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, поэтому кватернионные переменные $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ связаны соотношением $\mathbf{u} = \sqrt{r}\bar{\boldsymbol{\lambda}}$.

Подробный анализ работы Velte проводится также в связи с тем, что в следующем разделе излагаются полученные нами регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел [8], в состав которых входят регулярные дифференциальные уравнения движения в модифицированных переменных Леви-Чивита второго порядка, описывающие движение второго (изучаемого) тела в идеальной системе координат и имеющие вид регулярных уравнений Леви-Чивита плоского движения, и регулярное кватернионное дифференциальное уравнение в четырехмерных параметрах Эйлера первого порядка, описывающих изменение ориентациии идеальной системы координат в инерциальной системе координат в процессе движения тела. Совместное использование модифицированных переменных Леви-Чивита и параметров Эйлера позволило нам расширить знаменитую регуляризацию Леви-Чивита плоского движения на пространственное движение с использованием идеальной системы координат.

В работе Vivarelli [12] KS-преобразование, введенное Кустаанхеймо и Штифелем в небесную механику, сформулировано в терминах гиперкомплексных чисел как произведение кватерниона и его антиинволюции. Следовательно, оно представляет особый морфизм вещественной алгебры кватернионов, имеющий трехмерное вещественное линейное подпространство, а также представляет собой естественное обобщение преобразования Леви-Чивита. Показано, что кватернионная матрица произведения приводит к KS-матрице; билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля и два тождества, которые играют центральную роль в KS-теории, легко выводятся с использованием кватернионов. Дается подходящее кватернионное калибровочное преобразование, которое приводит к хорошо известному расслоению четырехмерного пространства. В дополнение приводится несколько геометрических интерпретаций.

Отметим, что кватернион q, используемый автором [12], имеет вид

$$q = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k,$$

где i, j, k – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Преобразование Кустаанхеймо–Штифеля представляется в следующей кватернионной форме:

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j = qq_*, \quad q_* = k\bar{q}k^{-1} = u_1 + u_2 i + u_3 j - u_4 k,$$

где q_* – кватернион, антиинволюцивный кватерниону q.

Это представление отличается от кватернионного представления преобразования Кустаанхеймо–Штифеля

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}; \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i} - u_2\mathbf{j} - u_3\mathbf{k},$$

приведенного в [3] и используемого в наших работах.

В работах Vivarelli [13, 14] развивается геометрический и физический взгляд на векторное произведение двух кватернионов и рассматривается связь трех классических задач механики через гиперкомплексное *KS*-преобразование.

Исследование возмущенного кеплеровского движения проводится Штифелем и Шейфеле в [3] не только с использованием регулярных уравнений в осцилляторной форме и методов теории колебаний, но также с использованием регулярных уравнений в канонической форме, для чего ими разработана теория канонического *KS*-преобразования. Такой канонический подход к проблеме регуляризации, использующий *KS*-преобразование, развит в работах Лидова [61, 62] и Лидова и Ляховой [63] и широко используется в настоящее время. В более поздней работе [64] рассмотрено применение в теории регуляризации канонических уравнений задачи двух тел обобщенной *KS*-матрицы и связанных с ней преобразований.

Отметим также работу Шагова [15]. В ней получены дифференциальные уравнения движения космического аппарата в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в орбитальной системе координат и использующие для описания его движения в инерциальном пространстве кватернион поворота, нормированный посредством множителя, равного квадратному корню из модуля c вектора момента скорости спутника. В этих уравнениях в качестве независимой переменной использована переменная τ, связанная с временем t дифференциальным соотношением $d\tau = (1/2)cr^{-2}dt$ (здесь r – расстояние до центра Земли). Уравнения во “времени” τ линейны для невозмущенного кеплеровского движения спутника.

В работе Deprit, Elipe и Ferrer “Линеаризация: Лаплас против Штифеля” [16] матричная *KS*-теория Кустаанхеймо–Штифеля изложена в терминах кватернионов. Авторы рассматривают *KS*-преобразование независимо от его возможного применения к кеплеровским системам, уточняют несколько теорем, сформулированных Штифелем. В аннотации сказано: “с одной стороны, мы отказываемся от формализма матричной теории, чтобы продолжить исключительно в контексте алгебры кватернионов; с другой стороны, мы объясняем, как в иерархии гиперкомплексных систем как *KS*-преобразование, так и классическое проективное разложение возникают путем удвоения преобразования Леви-Чивита”.

Во введении этой работы отмечается: “Будучи свободными от вычислительных сервитутов (вычислительного рабства, вычислительной зависимости), мы даже поставили перед собой задачу переустановить всю *KS*-теорию в терминах кватернионов. К тому времени, как Штифель и Шейфеле завершили свою монографию, они осознали тесную связь между своим матричным формализмом и теорией кватернионов. Было предложено, чтобы они воспользовались этим; они отреагировали на предложение в чрезмерных терминах (Штифель и др., 1971, p. 286). Действительно ли они считают, что переход от матриц к кватернионам приведет к “провалу или, по крайней мере, к очень громоздкому формализму”?. Несмотря на суровые предсказания Штифеля, мы приняли вызов. Мы потерпели неудачу? Читатель – это наше жюри. Построение *KS*-преобразования как эманации альтернативной билинейной формы над алгеброй затрат кватернионов не сложнее, чем матричный формализм Штифеля и Шейфеле. Кроме того, мы находим награды в упражнениях: теоремы обострены, некоторые в значительной степени; доказательства сокращены; общий дизайн Штифеля значительно улучшился в отношении его глобального и внутреннего значения, не говоря уже о том, чтобы обеспечить стиль программирования для манипулирования кватернионами с помощью процессоров символов общего назначения.”

В работе Deprit, Elipe и Ferrer также рассматривается линеаризация уравнений движения, записанных в цилиндрической, сферической и орбитальной системах координат, посредством введения новых переменных и введения новой независимой переменной вместо времени t. В этой работе в качестве альтернативы *KS*-преобразованию было предложено собственное преобразование: *DEF*-преобразование. В отношении этого преобразования и известного *BF*-преобразования, также рассмотренного ими, отмечается следующее:

“Об альтернативах *KS*-преобразованию Штифель и Шейфеле (1971, p. 288) выпустили предупреждение, чуть ли не предписание: “авторы убеждены, что поиск других преобразований [...] не очень многообещающий”. Многим читателям их предзнаменование создало впечатление, что *KS*-методика уникальна в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем. Факты отвергают иск. Кустанхаймо, Штифель и Шейфеле никогда не упоминали о решающем шаге, который Фок (1935, 1936) сделал в этом направлении тридцать пять лет назад, даже в их кратком упоминании того же шага, предпринятого, но независимо, Мозером (Moser 1970). Здесь у нас есть место для последней записи в конкурсе: *BF*-преобразование, предложенное Burdet (1969) для координатной части и завершенное Ferrfandiz (1986a,b, 1987, 1988) для моментальной части. Мы дополняем его нашим собственным преобразованием, *DEF*-преобразованием, которое, как мы утверждаем, одинаково хорошо выполняет все задачи *KS*-преобразования – линеаризацию, регуляризацию и каноничность – хотя, как мы склонны верить, более простым и более интуитивным способом (раздел 4.1). По общему признанию, конструкция включает в себя тяжелые алгебраические манипуляции, однако не более, чем в случае с *KS*- или *BF*-преобразованием. Кроме того, мы передаем эту работу процессору символов.”

Восьмимерное *DEF*-преобразование декартовых координат и проекций вектора скорости материальной точки имеет (в обозначениях авторов этого преобразования) следующий вид [16]:

$$\mathbf{x} = u_0\mathbf{u}$$

$$\mathbf{X} = U_0\mathbf{u} + \frac{1}{u_0}(\mathbf{u}\times\mathbf{U})\times\mathbf{u} = U_0\mathbf{u} + \frac{1}{u_0}((\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{U} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{U})\,\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, $\mathbf{X} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ – ее вектор скорости; u_0, U_0 и $\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$ – новые скалярные и трехмерные векторные переменные.

Независимая переменная (время t) заменяется на обобщенную истинную аномалию f, такую, что

$$u_0^2 df = \beta^2 Q dt; \quad Q = \|\mathbf{Q}\|, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{u}\times\mathbf{U} = \frac{1}{\beta^2}\mathbf{x}\times\mathbf{X},$$

где β – параметр.

DEF-преобразование имеет много общего с *BF*-преобразованием (Burdet–Ferrandiz transformation), имеющим вид

$$\mathbf{x} = u_0\mathbf{u}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\left(U_0\mathbf{u} + \frac{1}{u_0}(\mathbf{u}\times\mathbf{U})\times\mathbf{u}\right) = \left(U_0\mathbf{u} + \frac{1}{u_0}((\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{U} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{U})\,\mathbf{u})\right)$$

Оно отличается от него отсутствием множителя $1/\|\mathbf{u}\|^2$ и является более простым.

Уравнения движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле в *DEF*-переменных (при отсутствии возмущений) после перехода к обобщенной истинной аномалии f в качестве независимой переменной принимают следующий вид [16]:

$$\frac{du_0}{df} = \frac{u_0^2}{Q}U_0, \quad \frac{dU_0}{df} = \frac{Q}{u_0} - \frac{\mu}{\beta^3 Q}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{df} = \frac{1}{Q}\mathbf{Q}\times\mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{U}}{df} = \frac{1}{Q}\mathbf{Q}\times\mathbf{U} - \frac{u_0^2}{\beta^4}\left(2h + 3\frac{\mu}{\beta u_0}\right)\mathbf{u}; \quad \frac{dt}{df} = \frac{u_0^2}{\beta^2 Q},$$

где μ – гравитационная постоянная, $\mathbf{Q} = \mathbf{const}$ – “угловой момент”, h – кеплеровская энергия (постоянная величина).

Дифференцируя третье уравнение приведенной системы уравнений по переменной f, получаем [16] линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно векторной переменной $\mathbf{u}$:

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{df^2} + \mathbf{u} = 0$$

Для новой скалярной переменной $\sigma = Q^2/(\mu u_0)$, введенной вместо переменной u_0, получаем, учитывая первое и второе уравнения вышеприведенной системы, следующее линейное дифференциальное уравнение относительно скалярной переменной σ [16]:

$$\frac{d\sigma^2}{df^2} + \sigma = \frac{1}{\beta^3}$$

После получения двух последних уравнений ([16], p. 191) говорится “Это завершает линеаризацию кеплеровских систем в трех измерениях посредством *DEF*-преобразования”.

Никаких комментариев в отношении второго уравнения и основного четвертого динамического уравнения движения материальной точки (уравнения первого порядка для векторной переменной $\mathbf{U}$) полученной в [16] системы уравнений не дается, хотя видно, что четвертое уравнение содержит в правой части векторное слагаемое

$$\frac{u_0^2}{\beta^4}\left(2h + 3\frac{\mu}{\beta u_0}\right)\mathbf{u},$$

которое после подстановки в него аналитических решений $u_0 = u_0(f)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(f)$ (функций обобщенной истинной аномали f), полученных в результате интегрирования приведенных последних двух линейных уравнений, принимает вид нестационарного выражения, явно зависящего от “времени” f.

Уравнение для переменной $\mathbf{U}$ принимает при этом вид векторного дифференциального неоднородного линейного уравнения, однородная часть которого имеет постоянные коффициенты, а неоднородная часть явно зависит от “времени” f (обобщенной истинной аномалии f), что не позволяет построить аналитическое решение этого уравнения в простой форме.

Кватернионные уравнения движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют вид [30] (в них четырехмерная кватернионная переменная $\mathbf{u}$ отлична от векторной переменной $\mathbf{u}$ DEF)

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = 0; \quad \frac{dt}{d\tau} = r; \quad h = \mathrm{const}$$

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \bar{\mathbf{u}}\circ\mathbf{u} = \mathbf{u}\circ\bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Здесь первое кватернионное уравнение эквивалентно системе четырех независимых линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент u_j кватернионной переменной $\mathbf{u}$ (переменных Кустаанхеймо–Штифеля [3]):

$$\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hu_j = 0; \quad h = \mathrm{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

Эти уравнения имеют постоянные коэффициенты, равные половинной постоянной кеплеровской энергии h материальной точки, взятой со знаком "минус", и легко интегрируются в элементарных функциях в случае эллиптического кеплеровского движения, когда $h < 0$, или, для любого знака энергии h, в функциях Штумпфа. В случае эллиптического кеплеровского движения основное кватернионное уравнение эквивалентно уравнению движения четырехмерного одночастотного осциллятора. Уравнение для времени t может быть проинтегрировано отдельно от этих уравнений.

Радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ материальной точки в инерциальной системе координат связаны с переменными $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ кватернионными соотношениями

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

На наш взгляд, из сравнения приведенных уравнений видно преимущество уравнений в *KS*-переменных перед уравнениями в *DEF*-переменных. Отметим, что из кватернионных уравнений возмущенного движения материальной точки в *KS*-переменных получаются [37] уравнения в кватернионных оскулирующих элементах (в кватернионных медленных переменных), удобные для исследования возмущенного эллиптического движения материальной точки.

Среди других ранних зарубежных работ отметим статьи Vrbik [17, 18], в которых продемонстрирована эффективность применения кватернионов к решению возмущенной задачи Кеплера. Так приведено доказательство формул [18] для построения пертурбативного решения возмущенной задачи Кеплера с использованием алгебры кватернионов в формулировке уравнений Кустанхеймо–Штифеля. Главным преимуществом такого подхода является удаление из соответствующего решения быстрых колебаний (в случае консервативных сил) и малых делителей (в случае зависящих от времени сил).

Среди более поздних работ отметим статьи Вальдфогеля [19, 20], имеющего совместные работы с Штифелем [65, 66]. Утверждается [20], что "кватернионы для регуляризации небесной механики – верный (правильный) путь" и что кватернионы "являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике".

Вальдвогель [20] пишет: "Данная статья подкрепляет это утверждение. Мы начнем с краткого введения в алгебру кватернионов, затем мы опишем процедуру регуляризации и ее следствия в элегантной форме. Кроме того, будет приведен альтернативный вывод теории движения Кеплера, основанный на регуляризации. Также мы рассмотрим регуляризацию ограниченной пространственной задачи трех тел, т.е. пространственное обобщение преобразования Бирхоффа. В завершение будет приведено описание возмущенного движения Кеплера в регуляризованных переменных".

Как уже отмечалось, в [20] признается приоритет автора статьи в области кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел.

Укажем основные особенности кватернионного метода регуляризации Вальдфогеля [20], а именно, для регуляризации предлагается использовать "звездно сопряженный" кватернион ("star conjugate of the quaternion")

$$\mathbf{u}^* = -k\bar{\mathbf{u}}k = u_0 + iu_1 + ju_2 - ku_3$$

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j = qq_*, \quad q_* = k\bar{q}k^{-1} = u_1 + u_2 i + u_3 j - u_4 k,$$

где $\mathbf{u} = u_0 + iu_1 + ju_2 + ku_3$, а также отображение

$$\mathbf{u} \in \mathrm{U} \to \mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^*$$

В этом отображении используется нетрадиционное представление трехмерного вектора $\mathbf{x}$ кватернионом $\mathbf{x} = x_0 + ix_1 + jx_2$ с нулевой k-компонентой (отметим, что специальный символ "$\circ$" кватернионного произведения Вальдфогелем не используется). Такой кватернион $\mathbf{x}$ является формальным обобщением (наращиванием) комплексной переменной $\mathbf{x} = x_0 + ix_1$, использованной Леви-Чивита в теории регуляризации уравнений плоского движения.

Приведенное отображение Вальдфогеля с учетом его предыдущей формулы принимает вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{u}^* = -\mathbf{u}k\bar{\mathbf{u}}k$$

В скалярной записи из последней формулы имеем

$$x_0 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2, \quad x_1 = 2(u_0u_1 - u_2u_3), \quad x_2 = 2(u_0u_2 + u_1u_3),$$

"что в точности является KS-преобразованием в его классической форме или – до перестановки индексов – отображением Хопфа" [20].

Отметим, что кватернионы Вальдфогеля $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^*$ совпадают с кватернионами Vivarelli [12] x, q и q^* с точностью до обозначений индексов их компонент.

В классической теории кватернионов трехмерному вектору $\mathbf{x}$ ставится в соответствие кватернион $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ с нулевой скалярной частью. В работах автора статьи для регуляризации используются кватернионные переменные $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}^* = u_0^* + u_1^*\mathbf{i} + u_2^*\mathbf{j} + u_3^*\mathbf{k}$, не совпадающия (по смыслу) с кватернионной переменной Вальдфогеля, и кватернион $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ с нулевой скалярной частью. В этих работах используется отображение

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u},$$

а также отображение

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}^*$$

В скалярной записи первое из этих отображений дает в точности преобразование Кустаанхеймо–Штифеля

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad x_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2),$$

которое по своей форме отличается от выше приведенного преобразования Вальдфогеля.

В скалярной записи второе из этих отображений дает преобразование координат

$$x_1 = 2\left(u_1^*u_3^* - u_0^*u_2^*\right), \quad x_2 = 2\left(u_2^*u_3^* + u_0^*u_1^*\right), \quad x_3 = u_0^{*2} - u_1^{*2} - u_2^{*2} + u_3^{*2},$$

отличное от преобразования Кустаанхеймо–Штифеля, и позволяет, как показано нами [41], получить регуляризованные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли в ее гравитационном поле в четырехмерных переменных u_j^*, которые обладают всеми достоинствами уравнений движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j (также полученных нами), но имеют более простую и симметричную структуру в случае учета в потенциале гравитационного поля Земли не только его центральной (ньютоновской) составляющей, но и других составляющих: зональных, тессеральных и секториальных гармоник поля тяготения Земли.

Отметим полученное элегантное кватернионное представление [19, 20] пространственного отображения Биркгофа [67], используемого в теории регуляризации уравнений ограниченной задачи трех тел. Такое же преобразование, известное как отображение Жуковского, используется в аэродинамике для отображения поперечных разрезов аэродинамической поверхности до приблизительной круговой формы. В работе [20] это преобразование названо преобразованием Жуковского–Биркгофа (Joukowsky–Birkhoff mapping). Это представление приведено там в качестве дополнения к более ранним работам по теории регуляризации [65, 68].

Saha показано [21], как преобразование Кустанхеймо–Штифеля, записанное в кватернионной форме, можно интерпретировать как вращение в трех измерениях с использованием оси и угла вращения. Отметим, что такая интерпретация преобразования Кустанхеймо–Штифеля была дана значительно ранее в работах автора статьи [29, 30].

Отмечается [21], что “преобразование Кустанхеймо–Штифеля превращает гравитационную проблему двух тел в гармонический осциллятор при переходе к четырем измерениям. В дополнение к интересам математической физики, *KS*-преобразование оказалось очень полезным при моделировании *N*-тел, где оно помогает справляться с близкими встречами. И все же формализм остается несколько загадочным, а роль дополнительного измерения особенно загадочна. В этой статье показано, как базовое преобразование можно интерпретировать как вращение в трех измерениях. Например, если повернуть телескоп из зенита к выбранной звезде за один оборот, то можно представить ось вращения и угол как *KS*-преобразование звезды. Неединственность оси вращения кодирует дополнительное измерение. Эта геометрическая интерпретация становится очевидной при написании *KS*-преобразований в кватернионной форме, что также помогает получить краткие выражения для регуляризованных уравнений движения”.

В статье [22] регуляризация Кустанхеймо–Штифеля пространственной задачи Кеплера представлена в симплектическом и кватернионном подходах.

Рассматриваются [23] устойчивость и хаос в пространстве Кустаанхеймо–Штифеля, индуцированные расслоением Хопфа. Даны [24] полностью регулярные и универсальные решения проблемы относительного движения космического корабля в двух формах, полученных из регуляризаций *KS* и Сперлинга–Бурде (*SB*). В полученных решениях нет особенностей, и на их форму не влияет тип эталонной орбиты (круговая, эллиптическая, параболическая или гиперболическая). Кроме того, решения задачи даны в компактных тензорных выражениях и непосредственно относятся к вектору начального состояния корабля-лидера. Формулировки *SB* и *KS* вводят фиктивное время посредством преобразования Сундмана (Sundman transformation). Из-за использования альтернативной независимой переменной решения строятся на основе теории асинхронного относительного движения. Этот метод упрощает необходимые производные. Замкнутые выражения частных производных орбитального движения по начальному состоянию приведены явно.

Среди последних работ в области преобразований Леви-Чивита и Кустанхеймо–Штифеля отметим работы Breiter и Langner [25–27]. Отмечается [27], что “*KS*-преобразование приобрело популярность в матрично-векторной формулировке Кустанхеймо и Штифеля (1965), но его гораздо проще интерпретировать и обобщать на языке кватернионной алгебры, очень тесно связанной с оригинальной спинорной формулировкой Кустанхеймо (1964)”. Излагается *KS*-преобразование в кватернионной форме, предлагается его обобщенное определение, развивается геометрическая интерпретация *KS*-переменных, предложенная в [21], рассматривается билинейная форма Кустанхеймо–Штифеля и ее обобщение. Однако отметим, что основная цель [27] – “вывести альтернативный набор переменных действие–угол, который не основан на понятии плоскости орбиты (таким образом, избегая сингулярностей, когда орбита вырождается в прямой отрезок), и проверить его на некоторой хорошо известной астрономической проблеме (на проблеме Лидова–Козаи)”.

В связи с этим говорится “Но тем, кто хочет извлечь выгоду из богатства канонического формализма, требуется набор переменных “действие–угол” регуляризованной задачи Кеплера. Первый шаг в этом направлении можно найти в монографии Штифеля и Шейфеле (1971), где симплектические полярные координаты вводятся для каждой отдельной степени свободы. Однако этот подход не учитывает вырождение проблемы и, следовательно, не подходит для методов возмущения на основе усреднения. Более того, не было предпринято никаких попыток связать этот набор с ограничением, известным как “билинейный инвариант”, эффективно сокращающим систему до трех степеней свободы. Обе проблемы были решены Чжао (2015), который предложил переменные “*LCF*” (предположительно названные в честь Леви-Чивита (1906) и Фейоса (2001)). В его подходе движение в *KS*-переменных рассматривается в колеблющейся “плоскости Леви-Чивита” (Деприт и др., 1994) как проблема с двумя степенями свободы. Третья степень свободы добавляется парой переменных действие–угол, ориентирующих плоскость. Избыточная четвертая степень скрыта в определении плоскости Леви-Чивита. Преобразованный кеплеровский гамильтониан зависит от одной переменной действия, два других действия тесно связаны с угловым моментом и его проекцией на полярную ось. Интересно, что результат идентичен “изоэнергетическим переменным”, найденным Леви-Чивита (1913) без регуляризации.”

Задача Лидова–Козаи анализируется [27] в терминах *LKS*-переменных, которые позволяют непосредственно исследовать устойчивость для всех равновесий, кроме круговой экваториальной и полярной радиальной орбит.

Предложен [28] альтернативный угловой подход к *KS*-преобразованию, предложена его интерпретация через симметрию.

Во многих работах проводилось сравнение точности численного решения регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля с решениями других регулярных уравнений, предложенных в этих работах. В частности, в [47] такое сравнение проводилось с уравнениями, предложенными в этой работе. В их состав входят уравнения в параметрах Эйлера, характеризующие ориентацию орбитальной системы координат. В качестве переменных используются расстояние, его производная по новой независимой переменной (а затем величины, являющиеся постоянными интегрирования в решениях уравнений невозмущенного движения для этих переменных), параметры Эйлера, а также момент количества орбитального движения.

В работах Fukushima (2005, 2007) [45, 46], ученого из японской Национальной астрономической обсерватории, показано, что *KS*-регуляризация приводит к очень эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования. Это связано не только со структурой уравнений, но также с использованием нескольких методов, которые приносят важные преимущества численной схеме.

Приводится [46] численное сравнение четырех схем регуляризации трехмерной задачи двух тел в условиях возмущения: регуляризации *SB*, *KS*, *BF* и трехмерное расширение регуляризации *LC*. В аннотации статьи [46] сказано: *KS* и расширенная *LC*-регуляризация с масштабированием энергии Кеплера обеспечивают наилучшую экономическую эффективность при интеграции почти всех возмущенных задач двух тел. Подчеркнем, что Fukushima сравнивает семь схем, описанных в § 1 его статьи, а также “нерегуляризованную обработку, а именно прямое интегрирование в декартовых координатах”. Для каждой из этих формулировок им проводится тестовая интеграция Икара, охватывающая около 1 миллиона лет, и измеряется время его выполнения.

В качестве переменных состояния нового специального метода возмущений для задачи двух тел предложены [48] семь пространственных элементов (в том числе элемент, обратный удвоенной полной энергии, и два первых интеграла (first integrals of the unperturbed motion)) и элемент времени. Новые элементы сохраняют нулевой эксцентриситет и наклон, а также отрицательные значения полной энергии. Предложены уравнения движения, записанные в орбитальной системе координат, для описания ориентации которой используются параметры Эйлера. Уравнения для параметров Эйлера записываются в скалярной и матричной формах. Сравниваются результаты численных решений предлагаемых уравнений и других уравнений, в том числе уравнений в *KS*-переменных. Из приводимых результатов численных решений можно сделать вывод, что для решаемых задач лучшую точность дают уравнения в *KS*-переменных и уравнения, предложенные авторами, причем решения новых уравнений имеют меньшие погрешности, чем решения уравнений в *KS*-переменных.

Показано [49], что специальные методы возмущения, основанные на регуляризованных формулировках, могут конкурировать и даже работать лучше, чем полуаналитические методы для изучения долгосрочного движения (порядка десятилетий) объектов, вращающихся вокруг Земли. Обращается внимание на то, что для такого рода применений формулировка Коуэлла (Cowell) никогда не используется из-за малых требуемых размеров шагов интегрирования, что вызывает сильное накопление ошибки округления и длительное время вычислений. Авторы этой работы разработали код Fortran, названный THALASSA, который включает метод Коуэлла, EDromo, регуляризацию *KS*, и набор регулярных элементов, которые были получены Штифелем и Шейфеле (1971, раздел 19) из уравнений в *KS*-переменных. Сложный числовой решатель, названный LSODAR (решатель для обыкновенных дифференциальных уравнений с автоматическим поиском корней), был включен для интеграции дифференциальных уравнений движения.

Авторы [48] отмечают, что они представили набор неосредненных методов, основанных на интегрировании существующих регуляризованных формулировок уравнений движения через адаптивный решатель, и что ими впервые показано, что эффективные реализации неусредненных регуляризованных формулировок уравнений движения, и особенно методов неособых элементов, являются привлекательными кандидатами для долгосрочного изучения высотного и высокоэллиптического спутника Земли.

Представлен [50] новый метод вычисления орбит в возмущенной задаче двух тел: векторы положения и скорости движущегося объекта в декартовых координатах заменяются восемью орбитальными элементами, то есть константами невозмущенного движения. Два из них связаны с радиальным движением, следующие четыре — параметры Эйлера, задающие ориентацию промежуточной системы координат, эволюция которой отслеживает ориентацию плоскости орбиты и направление отсчета на ней. Полная энергия и элемент времени дополняют вектор состояния. Численные тесты включены для оценки эффективности предлагаемого специального метода возмущений. На примере орбитального движения двух комет показывается, что вычисления с использованием этого метода намного более точные и более быстрые, чем классические вычисления орбит с декартовыми координатами.

6. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием идеальной системы координат, переменных Леви-Чивита, параметров Эйлера и кватернионов. Как известно Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоской задачи двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно.

Рассмотрим предложенную нами кватернионную регуляризацию [8] уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием переменных Леви-Чивита. Она основана на использовании двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена, двухмерных переменных Леви-Чивита, четырехмерных параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватерниона вращения Гамильтона, описывающих ориентацию идеальной системы координат [9], а также основана на использовании в качестве дополнительных переменных кеплеровской энергии и реального времени и на использовании новой независимой переменной Зундмана. Эти уравнения имеют не только хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо—Штифеля, но и имеют свои дополнительные достоинства.

6.1. Уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в орбитальной и идеальной системах координат с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбитального движения. Эти уравнения имеют вид [8, 33, 34]

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + p_{1\mathrm{orb}}, \quad \frac{dr}{dt} = v_1, \quad \frac{dc}{dt} = rp_{2\mathrm{orb}}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d\Lambda_0}{dt} &= -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, \quad 2\frac{d\Lambda_1}{dt} = \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3, \\ 2\frac{d\Lambda_2}{dt} &= \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, \quad 2\frac{d\Lambda_3}{dt} = \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

$$\Omega_1 = \frac{r}{c} p_{3\mathrm{orb}} \cos\varphi, \quad \Omega_2 = \frac{r}{c} p_{3\mathrm{orb}} \sin\varphi, \quad \Omega_3 = 0 \tag{6.3}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{id}}; \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{id}} = \Omega_1\mathbf{i} + \Omega_2\mathbf{j} = \frac{r}{c} p_{3\mathrm{orb}} \left(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}\right), \quad \Omega_3 = 0 \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) является кватернионной записью скалярной системы дифференциальных уравнений (6.2) и (6.3) в параметрах Эйлера Λ_j, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Кватернионная переменная $\boldsymbol{\Lambda}$ в этом уравнении имеет смысл кватернионного оскулирующего элемента орбиты второго (изучаемого) тела: при равенстве нулю составляющей $p_{3\mathrm{orb}}$ вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс второго тела, перпендикулярной плоскости, проходящей через радиус-вектор $\mathbf{r}$ и вектор $\mathbf{v}$ скорости этого тела, то есть, плоскости мгновенной орбиты второго тела, кватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{const}$.

Уравнения (6.1)–(6.3) или (6.1) и (6.4), (6.3) – уравнения движения второго тела, записанные в двух вращающихся системах координат: в орбитальной системе координат η_{orb} и в идеальной системе координат η_{id}. Уравнения (6.1) записаны в орбитальной системе координат, а уравнения (6.2) и (6.3) (или (6.4), (6.3)) – в идеальной системе координат.

Ось $\eta_{1\mathrm{orb}}$ орбитальной системы координат η_{orb}, имеющей начало в центре масс второго тела, направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$, а ее ось $\eta_{3\mathrm{orb}}$ направлена вдоль вектора $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента орбитальной скорости центра масс второго тела. Ось $\eta_{3\mathrm{id}}$ идеальной системы координат η_{id} параллельна оси $\eta_{3\mathrm{orb}}$ орбитальной системы координат, а координатные оси $\eta_{1\mathrm{id}}$ и $\eta_{2\mathrm{id}}$ идеальной системы координат лежат в плоскости координатных осей $\eta_{1\mathrm{orb}}$ и $\eta_{2\mathrm{orb}}$ орбитальной системы координат и получаются из них поворотом вокруг оси $\eta_{3\mathrm{orb}}$ на угол φ по ходу часовой стрелки.

В уравнения (6.1)–(6.3) или (6.1) и (6.4), (6.3) переменными являются расстояние r от центра масс второго тела до центра масс первого тела, производная dr/dt (проекция v_1 вектора скорости $\mathbf{v}$ центра масс второго тела на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (на ось $\eta_{1\mathrm{orb}}$ орбитальной системы координат)), модуль вектора момента орбитальной скорости второго тела $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$, обобщенная истинная аномалия φ и параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), характеризующие ориентацию идеальной системы координат η_{id} в инерциальной системе координат ξ.

Фигурирующие в этих уравнениях величины $p_{k\,\mathrm{orb}}$ являются проекциями вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс второго тела на оси орбитальной системы координат η_{orb}.

Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ абсолютной угловой скорости идеальной системы координат η_{id} параллелен радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс второго тела и определяется формулой

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{p_{3\mathrm{orb}}}{c}\mathbf{r}; \quad c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

Проекции Ω_i вектора $\mathbf{\Omega}$ на оси идеальной системы координат η_{id} запишем в виде

$$\Omega_1 = \frac{r}{c} p_{3\text{orb}} \cos\varphi = \frac{1}{c} H_1 p_{3\text{orb}}, \quad \Omega_2 = \frac{r}{c} p_{3\text{orb}} \sin\varphi = \frac{1}{c} H_2 p_{3\text{orb}}, \quad \Omega_3 = 0,$$

где $H_1 = r\cos\varphi$, $H_2 = r\sin\varphi$ – проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ на оси системы координат η_{id}.

Декартовые координаты ξ_k в инерциальной системе координат и проекции $v_k = v_{k\,\text{orb}}$ вектора скорости центра масс второго тела на оси орбитальной системы координат находятся через указанные переменные по формулам

$$\xi_1 = r\left(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2\right), \quad \xi_2 = 2r(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3), \quad \xi_3 = 2r(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)$$

$$v_1 = v_{1\text{orb}} = \frac{dr}{dt}, \quad v_2 = v_{2\text{orb}} = \frac{c}{r}, \quad v_3 = v_{3\text{orb}} = 0,$$

где λ_j – параметры Эйлера, характеризующих ориентацию орбитальной системы координат в инерциальной системе координат, которые предварительно находятся через переменные Λ_j с использованием формул

$$\Lambda_0 = \lambda_0\varphi_0 + \lambda_3\varphi_3, \quad \Lambda_1 = \lambda_1\varphi_0 - \lambda_2\varphi_3, \quad \Lambda_2 = \lambda_2\varphi_0 + \lambda_1\varphi_3, \quad \Lambda_3 = -\lambda_0\varphi_3 + \lambda_3\varphi_0,$$

в которых $\varphi_0 = \cos(\varphi/2)$, $\varphi_3 = \sin(\varphi/2)$, или с использованием кватернионных формул

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{k}\right); \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{k}\right)$$

Проекции $v_{k\xi}$ вектора скорости центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат ξ определяются кватернионными соотношениями

$$\mathbf{v}_\xi = v_{1\xi}\mathbf{i} + v_{2\xi}\mathbf{j} + v_{3\xi}\mathbf{k} = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{v}_{\eta\,\text{orb}} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ (\dot{r}\mathbf{i} + (c/r)\mathbf{j}) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}},$$

а связи проекций $p_{k\xi}$ вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси инерциальной системы координат с их проекциями $p_{k\,\text{orb}}$ на оси орбитальной системы координат определяются кватернионными соотношениями перепроектирования

$$\mathbf{p}_\xi = p_{1\xi}\mathbf{i} + p_{2\xi}\mathbf{j} + p_{3\xi}\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{p}_{\text{orb}} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}$$
$$\mathbf{p}_{\text{orb}} = p_{1\text{orb}}\mathbf{i} + p_{2\text{orb}}\mathbf{j} + p_{3\text{orb}}\mathbf{k} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda}$$

Отметим, что уравнения возмущенного кеплеровского движения, записанные в идеальной системе координат и состоящие из уравнений для полярных координат и уравнений для угловых переменных, описывающих ориентацию идеальной системы координат, были получены Andoyer (1923) [69] и Musen (1959) [70].

6.2. Уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, записанные в идеальной системе координат с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена и кватернионного оскулирующего элемента орбитального движения. Введем двухмерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена H_1, H_2, являющиеся проекциями радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела на оси идеальной системы координат η_{id}, связанные с переменными r и φ (полярными координатами) соотношениями

$$H_1 = r\cos\varphi, \quad H_2 = r\sin\varphi, \quad H_3 = 0 \tag{6.5}$$

Дифференцируя эти соотношения дважды по времени и используя уравнения (6.1), получим вместо уравнений (6.1)–(6.3) следующие уравнения:

$$\frac{d^2H_1}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}H_1 = p_{1\text{id}}, \quad \frac{d^2H_2}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}H_2 = p_{2\text{id}}, \quad H_3 = 0, \quad r^2 = H_1^2 + H_2^2 \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{d\Lambda_0}{dt} = -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, \quad 2\frac{d\Lambda_1}{dt} = \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3 \\ &2\frac{d\Lambda_2}{dt} = \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, \quad 2\frac{d\Lambda_3}{dt} = \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

$$\Omega_1 = (H_1/c)\, p_{3\text{id}}, \quad \Omega_2 = (H_2/c)\, p_{3\text{id}}, \quad c = H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1, \quad p_{3\text{id}} = p_{3\text{orb}} \tag{6.8}$$

Уравнения (6.7) и (6.8) в кватернионной записи имеют вид

$$2\frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_{\text{id}}, \tag{6.9}$$

где

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{\Omega}_{\text{id}} = \Omega_1\mathbf{i} + \Omega_2\mathbf{j} = (p_{3\text{id}}/c)(H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j}) = p_{3\text{id}}\left(H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1\right)^{-1}(H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j})$$

Декартовые координаты ξ_k центра масс второго тела в инерциальной системе координат и проекции $v_{k\xi}$ вектора абсолютной скорости $\mathbf{v}$ центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат находятся через идеальные координаты Ганзена H_1, H_2 и их производные $\dot{H}_1$, $\dot{H}_2$ по кватернионным формулам

$$\mathbf{r}_{in} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{r}_{\text{id}} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_{\xi} = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{\text{id}} = H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j} \tag{6.10}$$

$$\mathbf{v}_{in} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{v}_{\text{id}} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{v}_{in} = \mathbf{v}_{\xi} = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_{\text{id}} = \dot{H}_1\mathbf{i} + \dot{H}_2\mathbf{j} \tag{6.11}$$

Проекции $p_{k\,\text{id}}$ вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси идеальной системы координат η_{id} связаны с его проекциями $p_{k\xi}$ на оси инерциальной системы координат ξ соотношениями перепроектирования

$$\mathbf{p}_{\text{id}} = \bar{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{p}_{in} \circ \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{p}_{\text{id}} = p_{1\text{id}}\mathbf{i} + p_{2\text{id}}\mathbf{j} + p_{3\text{id}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_{\xi} = p_{1\xi}\mathbf{i} + p_{2\xi}\mathbf{j} + p_{3\xi}\mathbf{k} \tag{6.12}$$

Уравнения (6.6)–(6.8) или (6.6), (6.9) являются уравнениями движения второго тела, записанными в идеальной системе координат η_{id}. В этих уравнениях переменными являются двухмерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена H_1, H_2, их первые производные по времени $\dot{H}_1$, $\dot{H}_2$ и параметры Эйлера Λ_j ($j = 0, 1,2,3$), характеризующие ориентацию идеальной системы координат η_{id} в инерциальной системе координат ξ. Фигурирующие в этих уравнениях величины $p_{i\,\text{id}}$ являются проекциями вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс второго тела на оси идеальной системы координат η_{id} ($p_{3\text{id}} = p_{3\text{orb}}$).

Отметим, что скалярные уравнения возмущенного кеплеровского движения в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера, записанные в идеальной системе координат, ранее были получены в других формах и другими способами Deprit (1976) [9] и Брумбергом (1980) [71]. Уравнения (6.6)–(8.8) получены автором статьи [8] независимо и согласуются с уравнениями [9] и [71].

6.3. Регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Леви-Чивита и параметрах Эйлера. Введем систему координат $O\eta_{\text{id}}$, оси которой параллельны осям идеальной системы координат η_{id}, а начало находится в центре масс O первого тела. Ориентация системы координат $O\eta_{\text{orb}}$, оси которой параллельны осям орбитальной системы координат η_{orb}, а начало находится в центре O, в идеальной системе координат η_{id} (а также и в системе координат $O\eta_{\text{id}}$) характеризуется кватернионом поворота $\mathbf{\Phi}$, имеющим вид

$$\mathbf{\Phi} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{k}$$

Компоненты Φ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) этого кватерниона определяются соотношениями

$$\Phi_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = \sin\frac{\varphi}{2}$$

и являются параметрами Эйлера, характеризующими ориентацию орбитальной системы координат η_{orb} в идеальной системе координат η_{id}.

Ранее введенные двухмерные идеальные прямоугольные координаты Ганзена H_1, H_2, определяемые соотношениями (6.5), являются декартовыми координатами центра масс второго тела в системе координат $O\eta_{id}$ и связаны с переменными r и Φ_j соотношениями

$$H_1 = r\cos\varphi = r\left(\Phi_0^2 - \Phi_3^2\right), \quad H_2 = r\sin\varphi = 2r\Phi_0\Phi_3 \quad (H_3 = 0)$$

Введем переменные Леви-Чивита

$$U_0 = \sqrt{r}\Phi_0, \quad U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3,$$

связанные с ганзеновскими координатами соотношениями

$$H_1 = U_0^2 - U_3^2, \quad H_2 = -2U_0U_3 \tag{6.13}$$

Введение знака “–” в соотношении для переменной Леви-Чивита $U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3$ и, как следствие, для координаты Ганзена $H_2 = -2U_0U_3$ объясняется следующими соображениями. Для пространственного движения связи трехмерных декартовых координат ξ_k с четырехмерными переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j имеют вид соотношений (3.4):

$$\xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2\left(u_1u_2 - u_0u_3\right), \quad \xi_3 = 2\left(u_1u_3 + u_0u_2\right)$$

Для плоского движения координата $\xi_3 = 0$. Двухмерные декартовые координаты ξ_1 и ξ_2 в этом случае совпадают с координатами Ганзена H_1 и H_2 (напомним, что координата Ганзена $H_3 = 0$): $\xi_1 = H_1$ и $\xi_2 = H_2$ (идеальная система координат в случае плоского движения может трактоваться как опорная система кординат ξ).

Нулевому значению координаты ξ_3 соответствуют, как видно из (3.4), нулевые значения либо переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_1 и u_2, либо переменных u_0 и u_3. При этом переменными Леви-Чивита будут либо переменные $u_0 = U_0$ и $u_3 = U_3$, либо переменные $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$.

Выбирая первый вариант выбора переменных $u_0 = U_0$ и $u_3 = U_3$ в качестве переменных Леви-Чивита, получим, учитывая, что $u_1 = u_2 = 0$

$$\xi_1 = H_1 = u_0^2 - u_3^2 = U_0^2 - U_3^2, \quad \xi_2 = H_1 = -2u_0u_3 = -2U_0U_3$$

Для второго варианта выбора переменных $u_1 = U_1$ и $u_2 = U_2$ в качестве переменных Леви-Чивита имеем соответственно

$$\xi_1 = H_1 = u_1^2 - u_2^2 = U_1^2 - U_2^2, \quad \xi_2 = H_1 = 2u_1u_2 = 2U_1U_2$$

Нами, таким образом, выше был выбран первый вариант определения переменных Леви-Чивита: $U_0 = \sqrt{r}\Phi_0$, $U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3$, соответствующий описанию движения орбитальной системы координат относительно идеальной системы координат в параметрах Эйлера Φ_0 и Φ_3.

Отметим, что уравнениям Леви-Чивита (3.11)–(3.14) (они приведены в книге Штифеля и Шейфеле [3]) соответствует второй вариант выбора определения переменных Леви-Чивита.

Дополнительно дадим другое объяснение введения знака "–" в соотношении для переменной Леви-Чивита $U_3 = -\sqrt{r}\Phi_3$ и, как следствие, для координаты Ганзена $H_2 = -2U_0U_3$. По аналогии с соотношениями

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_i = -r^{1/2}\lambda_i; \quad i = 1,2,3,$$

определяющими переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j для пространственного движения через параметры Эйлера λ_j и расстояние r до центра притяжения, для движения в идеальной системе координат (эквивалентного в этом случаю плоскому движению) будем иметь соотношения для переменных Леви-Чивита U_0 и U_3:

$$U_0 = r^{1/2}\Phi_0, \quad U_3 = -r^{1/2}\Phi_3 \quad (U_1 = U_2 = 0),$$

которые определяют движение центра масс второго тела в идеальной системе координат. В этих соотношениях роль параметров Эйлера λ_j играют выше введенные параметры Эйлера Φ_j:

$$\Phi_0 = \cos(\varphi/2), \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = \sin(\varphi/2),$$

характеризующие ориентацию орбитальной системы координат η_{orb} в идеальной системе координат. В соотношениях для переменных Леви-Чивита U_0 и U_3, как видно, присутствует знак "–" в соотношении для переменной U_3. Выражения для координат Ганзена принимают при этом вид

$$H_1 = r\left(\Phi_0^2 - \Phi_3^2\right) = U_0^2 - U_3^2, \quad H_2 = 2r\Phi_0\Phi_3 = -2U_0U_3,$$

согласующийся с формулами (3.4) в случае плоского движения, когда $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. В этих выражениях присутствует знак "–" в выражении для координаты H_2.

Проекции вектора скорости центра масс второго тела на оси системы координат $O\eta_{\text{id}}$ (а также на оси идеальной системы координат η_{id}) связаны с производными по времени от переменных Леви-Чивита соотношениями

$$\begin{gathered} v_{1\text{id}} = v_1\cos\varphi - v_2\sin\varphi = \dot{H}_1 = 2\left(U_0\dot{U}_0 - U_3\dot{U}_3\right) \\ v_{2\text{id}} = v_1\sin\varphi + v_2\cos\varphi = \dot{H}_2 = -2\left(U_3\dot{U}_0 + U_0\dot{U}_3\right) \\ v_{3\text{id}} = v_3 = \dot{H}_3 = 0, \quad v_k = v_{k\,\text{orb}} \end{gathered} \tag{6.14}$$

Формулы для кеплеровской энергии h и модуля c вектора момента орбитальной скорости второго тела, определяемые выражениями

$$\begin{gathered} h = (1/2)v^2 - \mu/r = (1/2)\left(\dot{H}_1^2 + \dot{H}_2^2\right) - \mu\left(H_1^2 + H_2^2\right)^{-1/2} \\ c = |\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = H_1\dot{H}_2 - H_2\dot{H}_1, \end{gathered} \tag{6.15}$$

в новых переменных Леви-Чивиты U_0 и U_3 принимают вид

$$h = 2r\left(\dot{U}_0^2 + \dot{U}_3^2\right) - \mu/r, \quad r = U_0^2 + U_3^2, \quad c = 2\left(U_0^2 + U_3^2\right)\left(U_3\dot{U}_0 - U_0\dot{U}_3\right) \tag{6.16}$$

Перейдем в уравнениях движения второго тела (6.6)–(6.8), записанным в идеальной системе координат с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена H_1, H_2, к переменным Леви-Чивита U_0, U_3 по формулам (6.13), (6.14) и к новой независимой переменной τ в соответствии с дифференциальным соотношением Зундмана $dt = rd\tau$. Введем также в качестве дополнительной переменной кеплеровскую энергию h, определяемую соотношениями (6.15), (6.16) и удовлетворяющую дифференциальному уравнению $dh/dt = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$. В итоге получим следующие скалярные регулярные дифференциальные уравнения движения второго тела (регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел) [8]:

$$\frac{d^2U_0}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hU_0 = \frac{1}{2}rQ_0, \quad \frac{d^2U_3}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hU_3 = \frac{1}{2}rQ_3 \tag{6.17}$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2\left(Q_0\frac{dU_0}{d\tau} + Q_3\frac{dU_3}{d\tau}\right) \tag{6.18}$$

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{d\Lambda_0}{d\tau} = -r\left(\Omega_1\Lambda_1 + \Omega_2\Lambda_2\right), \quad 2\frac{d\Lambda_1}{d\tau} = r\left(\Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3\right) \\ &2\frac{d\Lambda_2}{d\tau} = r\left(\Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3\right), \quad 2\frac{d\Lambda_3}{d\tau} = r\left(\Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r \tag{6.20}$$

Здесь

$$r = |\mathbf{r}| = U_0^2 + U_3^2, \quad Q_0 = U_0 p_{1\mathrm{id}} - U_3 p_{2\mathrm{id}}, \quad Q_3 = -U_3 p_{1\mathrm{id}} - U_0 p_{2\mathrm{id}}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{c}\left(U_0^2 - U_3^2\right)p_{3\mathrm{id}}, \quad \Omega_2 = -\frac{2}{c}U_0U_3p_{3\mathrm{id}}; \quad c = 2\left(U_3\frac{dU_0}{d\tau} - U_0\frac{dU_3}{d\tau}\right), \quad p_{3\mathrm{id}} = p_{3\mathrm{orb}}$$

Эти уравнения необходимо дополнить кватернионными соотношениями перепроектирования (6.10)–(6.12).

Отметим, что регулярные уравнения (6.17)–(6.20) содержат, как подсистему, уравнения (6.17), (6.18), (6.20), имеющие вид регулярных уравнений Леви-Чивита плоской задачи двух тел. Эта подсистема уравнений совпадают с уравнениями Леви-Чивита плоской задачи двух тел (3.11)–(3.14), если в них формально ввести переобозначения $U_0 = u_1, U_3 = -u_2$ и $Q_0 = q, Q_3 = -q_2$.

Скалярные регулярные уравнения движения второго тела (6.17)–(6.20) (регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел) в кватернионной записи имеют следующий вид [8]:

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{U} = \frac{1}{2}r\mathbf{Q}, \quad \frac{dh}{d\tau} = 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{d\tau}\circ\mathbf{Q}\right) \tag{6.21}$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{d\tau} = r\boldsymbol{\Lambda}\circ\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{id}} = \frac{r}{c}p_{3\mathrm{id}}\boldsymbol{\Lambda}\circ\left(\left(U_0^2 - U_3^2\right)\mathbf{i} - 2U_0U_3\mathbf{j}\right); \quad \frac{dt}{d\tau} = r \tag{6.22}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = U_0 + U_3\mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{U}} = U_0 - U_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k}$$

$$r = |\mathbf{r}| = \|\mathbf{U}\| = \mathbf{U}\circ\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}}\circ\mathbf{U} = U_0^2 + U_3^2, \quad c = 2\left(U_3\frac{dU_0}{d\tau} - U_0\frac{dU_3}{d\tau}\right)$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{i}\circ\mathbf{U}\circ\mathbf{P}_{\mathrm{id}}, \quad \mathbf{P}_{\mathrm{id}} = p_{1\mathrm{id}}\mathbf{i} + p_{2\mathrm{id}}\mathbf{j}$$

Отображения радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v}$ центра масс второго тела на оси идеальной и инерциальной систем координат определяются соотношениями

$$\mathbf{r}_{\mathrm{id}} = \mathrm{H}_1\mathbf{i} + \mathrm{H}_2\mathbf{j} = \bar{\mathbf{U}}\circ\mathbf{i}\circ\mathbf{U}, \quad \mathbf{r}_{in} = \boldsymbol{\Lambda}\circ\mathbf{r}_{\mathrm{id}}\circ\bar{\boldsymbol{\Lambda}}, \quad \mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{id}} = \frac{d\mathbf{r}_{\mathrm{id}}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\mathrm{H}_2}{dt}\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{U}}\circ\mathbf{i}\circ\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{U}}\circ\mathbf{i}\circ\frac{d\mathbf{U}}{d\tau}$$

$$\mathbf{v}_{in} = \boldsymbol{\Lambda}\circ\mathbf{v}_{\mathrm{id}}\circ\bar{\boldsymbol{\Lambda}}, \quad \mathbf{v}_{in} = \mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1\mathbf{i} + \dot{\xi}_2\mathbf{j} + \dot{\xi}_3\mathbf{k}$$

Уравнения (6.17)–(6.20) или (6.21) и (6.22) являются регулярными уравнениями возмущенной пространственной задачи двух тел, построенными с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена. В скалярных уравнениях (6.17)–(6.20) регулярными переменными являются переменные Леви-Чивита U_0 и U_3, описывающие движение центра масс второго тела в идеальной системе координат $O\eta_{\mathrm{id}}$, кеплеровская энергия h, время t и параметры Эйлера Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), характеризующие ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. В регулярных кватернионных уравнениях (6.21) и (6.22) переменными являются двухмерный кватернион $\mathbf{U}$, описывающий движение центра масс второго тела в идеальной системе координат $O\eta_{\mathrm{id}}$, кеплеровская энергия h, время t и четырехмерный кватернион (кватернионный оскулирующий элемент) $\mathbf{\Lambda}$, характеризующий ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Фигурирующие в этих уравнениях величины $p_{1\mathrm{id}}$, $p_{2\mathrm{id}}$ являются проекциями вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс второго тела на оси идеальной системы координат. Эти величины находятся через проекции вектора $\mathbf{p}$ на оси инерциальной системы координат с помощью выше приведенных соотношений перепроектирования.

Регулярные уравнения (6.17)–(6.20) или (6.21) и (6.22) возмущенной пространственной задачи двух тел образуют систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля) и обладают всеми достоинствами уравнений Кустаанхеймо–Штифеля:

– они, в отличие от ньютоновских уравнений, регулярны в центре притяжения, линейны для невозмущенных кеплеровских движений и имеют в этом случае скалярный вид

$$\frac{d^2U_i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}hU_i = 0, \quad i = 0,3; \quad h = \mathrm{const}, \quad \Lambda_j = \mathrm{const}, \quad j = 0,1,2,3$$

или кватернионный вид

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{U} = 0; \quad h = \mathrm{const}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{const}$$

(для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком “минус”);

– позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Вместе с тем эти регулярные уравнения имеют существенные отличия:

1) для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, поскольку кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения орбитального движения, в этом случае остается постоянным;

2) для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (т.е. медленно изменяющейся кватернионной переменной), что также является полезным свой-

ством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Отметим, однако, что эти уравнения не пригодны для исследования прямолинейных орбит, когда модуль вектора момента орбитальной скорости второго тела $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ обращается в ноль, поскольку кватернионное дифференциальное уравнение ориентации идеальной системы координат в этом случае вырождается (из-за присутствия в этом уравнении знаменателя c).

От этого недостатка уравнений (6.17)–(6.20) или (6.21) и (6.22) можно избавиться, переходя в них от независимой переменной τ к новой независимой переменной τ^* в соответствии с дифференциальным соотношением $d\tau = cd\tau^*$ и дополняя полученные уравнения дифференциальным уравнением для переменной c. В итоге получаем уравнения, не имеющие указанной особенности:

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau^*} = c\mathbf{S}, \quad \frac{d\mathbf{S}}{d\tau^*} - \frac{1}{2}ch\mathbf{U} = \frac{1}{2}cr\mathbf{Q}$$

$$\frac{dc}{d\tau^*} = cr\left[2p_{1\text{id}}U_0U_3 + p_{2\text{id}}\left(U_0^2 - U_3^2\right)\right]$$

$$\frac{dh}{d\tau^*} = 2\,\text{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{U}}}{d\tau^*} \circ \mathbf{Q}\right)$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{d\tau^*} = cr\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_{\text{id}} = rp_{3\text{id}}\boldsymbol{\Lambda} \circ \left(\left(U_0^2 - U_3^2\right)\mathbf{i} - 2U_0U_3\mathbf{j}\right)$$

$$\frac{dt}{d\tau^*} = cr$$

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{P}_{\text{id}}, \quad \mathbf{P}_{\text{id}} = p_{1\text{id}}\mathbf{i} + p_{2\text{id}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{p}_{id} = \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{p}_{in} \circ \boldsymbol{\Lambda}, \quad \mathbf{p}_{\text{id}} = p_{1\text{id}}\mathbf{i} + p_{2\text{id}}\mathbf{j} + p_{3\text{id}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_\xi = p_{1\xi}\mathbf{i} + p_{2\xi}\mathbf{j} + p_{3\xi}\mathbf{k}$$

В этих регулярных кватернионных уравнениях переменными, по-прежнему, являются двухмерный кватернион $\mathbf{U}$, кеплеровская энергия h, время t, четырехмерный кватернион $\boldsymbol{\Lambda}$, а также двухмерный кватернион $\mathbf{S}$ и модуль c вектора момента орбитальной скорости. Эти уравнения сложнее регулярных кватернионных уравнений (6.21) и (6.22).

Отметим однако, что при движении в ньютоновском гравитацинном поле, как известно, существуют следующие виды траекторий: круговая, эллиптическая, параболическая и гиперболическая. При наличии малых вомущений движение происходит по траекториям, близким к указанным. Прямолинейных тракторий среди них нет. Тем не менее, с теоретической точки зрения прямолинейные и близкие к ним орбиты могут существовать при определенных возмущающих или управляющих силах, поэтому последние приведенные уравнения представляют интерес.

В заключение отметим, что Брумбергом [71] описано применение параметров Эйлера к выводу уравнений возмущенного движения пространственной задачи двух тел в ганзеновских координатах и указано на возможность дальнейшего преобразования полученных им уравнений возмущенного движения с использованием параболических координат Леви-Чивита.

Заключение. Дан аналитический обзор работ, посвященных кватернионной регуляризации особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых действующими гравитационными силами, с помощью использования четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Они демонстрируют актуальность разработки кватернионных методов регуляризации особенностей классических моделей механики типа деления на ноль, порождаемых действующими гравитационными силами, и актуальность применения регулярных кватернионных моделей аналитической механики для решения задач небесной механики и механики космического полета (астродинамики).

Изложен предложенный автором новый метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и двухмерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение второго (рассматриваемого) тела в идеальной системе координат, в которой уравнения пространственного движения принимают вид уравнений плоского движения, а также основанный на использовании четырехмерных параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат.

Изложены полученные с помощью этого метода регулярные скалярные и кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел. В скалярных уравнениях переменными являются переменные Леви-Чивита, кеплеровская энергия, время и указанные параметры Эйлера. В кватернионных уравнениях переменными являются двухмерный кватернион, описывающий движение центра масс второго тела в идеальной системе координат (его компоненты — переменные Леви-Чивита), кеплеровская энергия, время и четырехмернный кватернион ориентации идеальной системы координат (его компоненты — параметры Эйлера). Используемые в качестве переменных параметры Эйлера и кватернион ориентации идеальной системы координат являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты изучаемого (второго) тела (медленно изменяющимися переменными).

Изложенные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, в которых совместно используются переменные Леви-Чивита и параметры Эйлера, образуют в общем случае систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют и регулярные уравнения Кустаанхеймо—Штифеля). Они, также как и уравнения Кустаанхеймо—Штифеля, регулярны в центре притяжения (в отличие от нерегулярных ньютоновских уравнений), линейны для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений для этих движений); позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения (эллиптического, гиперболического, параболического) с использованием функций Штумпфа, близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений, позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их численного решения.

Однако эти регулярные уравнения имеют следующие существенные отличия от регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля:

— для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае Кустаанхеймо—Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, так как для этого случая движения тела кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, и его компоненты (параметры Эйлера) остаются постоянными. Поэтому скалярные и кватернионное дифференциальные уравнения в параметрах Эйлера, описывающие изменение ориентации идеальной системы координат, выпадают в этом случае из рассмотрения;

— для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (т.е. медленно изменяющейся кватернионной переменной), а параметры Эйлера (компоненты этого кватерниона) — скалярными оскулирующими элементами, что также является полезным свойством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Недостатком этих уравнений является то, что эти уравнения не пригодны для исследования прямолинейных орбит. Для этих орбит модуль c вектора момента орбитальной скорости второго тела, стоящий в знаменателях коэффициентов скалярных и кватернионного дифференциальных уравнений в параметрах Эйлера, описывающих изменение ориентации идеальной системы координат, обращается в ноль. Поэтому эти уравнения в этом случае вырождаются. В статье приведены регулярные кватернионные уравнения, свободные от этого недостатка, но имеющие более сложную структуру.

Во введении было отмечено, что Леви-Чивита (1920) в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал их неудачу. Штифель и Шейфеле в своей книге (1971) также отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. Aarseth и Zare (1974), а также Aarseth (2003) отмечали, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом и Гурвицем, невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства).

Изложенные в разд. 3 результаты, полученные ранее автором [8], показывают, что регуляризация дифференциальных уравнений возмущенного плоского движения в задаче двух тел, предложенная Леви-Чивита, может быть с успехом использована для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения в задаче двух тел, если исходные уравнения возмущенного пространственного движения записать в идеальной системе координат, в которой они принимают вид уравнений возмущенного плоского движения, и затем получаемые уравнения дополнить скалярными или кватернионным уравнениями, описывающими изменение ориентации идеальной системы координат в параметрах Эйлера в процессе возмущенного движения тела, а также дополнить уравнениями для кеплеровской энергии и времени, рассматриваемыми в качестве дополнительных переменных (при этом в качестве независимой переменной используется независимая переменная Зундмана).

В заключение отметим недавно опубликованную на английском языке работу автора статьи [42], в которой рассмотрены различные аспекты кватернионной регуляризации особенностей дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, порождаемых действующими гравитационными силами, а также рассмотрена кватернионная регуляризация дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения (возмущенного движения материальной точки в произвольном центральном силовом поле, когда линия действия потенциальной силы проходит во все время движения через точку, называемую центром), а также рассмотрены различные приложения регуляризованных кватернионных уравнений.

Работа выполнена в рамках темы FFNM-2022-0007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные методы и регулярные модели аналитической механики (обзор) // ПММ. 2023. Т. 87. № 4. С. 519–556.
2. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. DOI: 10.1007/BF02418577
3. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 303 с.
4. *Aarseth S.J., Zare K.A.* Regularization of the three-body problem // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 185–205.
5. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. Cambridge: Univ. Press, 2003. 408 p.

6. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 637–665.
7. *Hurwitz A.* Mathematische Werke. Vol. 2. Basel: Birkhauser, 1933.
8. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космич. исслед. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. DOI: 10.7868/S0023420614030029
9. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celest. Mech. 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
10. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois crops // Acta Math. 1912. V. 36. P. 105–179.
11. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
12. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. 1983. V. 29. P. 45–50.
13. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
14. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
15. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // Mech. Solids. 1990. № 2. P. 3–8.
16. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1994. V. 58. P. 151–201.
17. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Canad. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
18. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys. A: Math.&General., 1995. V. 28. P. 193–198.
19. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech.&Dyn. Astr. 2006. V. 95. P. 201–212.
20. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech.&Dyn. Astr. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
21. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2009. V. 400. P. 228–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x.arXiv:0803.4441
22. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // R.&C. Dyn., 2015. V. 20. № 1. P. 19–36. DOI: 10.1134/S1560354715010025
23. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454. DOI: 10.1093/mnras/stw780.arXiv:1604.06673
24. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2017. V. 127. pp. 343–368.
25. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2017. V. 128. P. 323–342.
26. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2018. V. 130. Art. № 68. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
27. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art. № 9. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
28. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-Map. An interpretation through symmetry // J. Geom. Mech. 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
29. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
30. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
31. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: 1985. 36 с. Деп. в ВИНИТИ 13.12.85. № 218628-В.
32. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: 1985. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 13.22.85. № 8629-В.

33. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
34. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космич. исслед. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
35. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.
37. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
38. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. DOI: 10.7868/S0023420613050026
39. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. DOI: 10.7868/S0023420615050040
40. *Челноков Ю.Н.* Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733. DOI: 10.31857/S003282350002736-9
41. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космич. исслед. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. DOI: 10.1134/S002342061902002X
42. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. DOI: 10.1007/s10483-021-2797-9
43. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
44. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
45. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. № 5. Art. № 2496. DOI: 10.1086/429546
46. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. № 6. Art. № 2815.
47. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150. DOI: 10.1007/s10569-006-9056-3
48. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2015. V. 454. P. 2890–2908.
49. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2019. V. 131. Art. № 21. DOI: 10.1007/s10569-019-9897-1
50. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2020. V. 132. Art. № 10. DOI: 10.1007/s10569-020-9952-y
51. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. матер.: XXVIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2021. С. 292–295.
52. *Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Щекутьев А.Ф.* Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и изохронных производных // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156.
53. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
54. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
55. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Mat. Pura Appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
56. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere Math. 1956. № 2. P. 411–417.

57. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7. DOI: 10.1086/518165
58. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
59. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 637–665.
60. *Volk O.* Concerning the derivation of the KS-transformation // Celest. Mech. 1973. V. 8. P. 297–305.
61. *Лидов М.Л.* Увеличение размерности гамильтоновых систем. KS-преобразование, использование частных интегралов // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 2. С. 163–176.
62. *Лидов М.Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 6. С. 787–807.
63. *Лидов М.Л., Ляхова В.А.* Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость // Космич. исслед. 1983. Т. 21. № 1. С. 3–11.
64. *Полещиков С.М.* Регуляризация канонических уравнений задачи двух тел с помощью обобщенной *KS*-матрицы // Космич. исслед. 1999. Т. 37. № 3. С. 322–328.
65. *Stiefel E.L., Waldvogel J.* Generalisation de la regularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace a trois dimensions // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de Lacademie des Sciences. 1965, Paris.
66. *Stiefel E., Rossler M., Waldvogel J., Burdet C.A.* Methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics // NASA Contractor Rep. NASA CR-769. 1967. P. 88–115.
67. *Birkhoff G.D.* The restricted problem of three bodies // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884–1940). 1915. V. 39 (1). P. 265–334.
68. *Waldvogel J.* Die Verallgemeinerung der Birkhoff-Regularisierung fur das raumliche Dreikorperproblem // Bull. Astron. Ser. 3. 1967. V. 2. № 2. P. 295–341.
69. *Andoyer H.* Cours de Mecanigue Celeste. Paris: Gauthier-Vilars, 1923.
70. *Musen P.* Application of Hansen's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth // J. Geoph. Res. 1959. V. 64. P. 2271–2279.
71. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.

Quaternion Regularization of Singularities of Astrodynamic Models Generated by Gravitational Forces (Review)

Yu.N. Chelnokov[a,#]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control Problems RAS, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

The article presents an analytical review of works devoted to the quaternion regularization of the singularities of differential equations of the perturbed three-body problem generated by gravitational forces, using the four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables. Most of these works have been published in leading foreign publications. We consider a new method of regularization of these equations proposed by us, based on the use of two-dimensional ideal rectangular Hansen coordinates, two-dimensional Levi-Civita variables, and four-dimensional Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters. Previously, it was believed that it was impossible to generalize the famous Levi-Civita regularization of the equations of plane motion to the equations of spatial motion. The regularization proposed by us refutes this point of view and is based on writing the differential equations of the perturbed spatial problem of two bodies in an ideal coordinate system using two-dimensional Levi-Civita variables to describe the motion in this coordinate system (in this coordinate system, the equations of spatial motion take the form of equations of plane motion) and based on the use of the quaternion differential equation of the inertial orientation of the ideal coordinate system in the Euler parameters, which are the osculating elements of the orbit, as well as on the use of Keplerian energy and real time as additional variables, and on the use of the new independent Sundmann variable. Reduced regular equations, in which Levi-Civita variables and Euler parameters are used together, have not only the well-known advantages of equations in Kustaanheimo–Stiefel variables (regularity, linearity in new time for Keplerian motions, proximity to linear equations for perturbed motions), but also have their own additional advantages: 1) two-dimensionality, and not four-dimensionality, as in the case of Kustaanheimo-Stiefel, a single-frequency harmonic oscillator describing in new time in Levi-Civita variables the unperturbed elliptic Keplerian motion of the studied (second) body, 2) slow change in the new time of the Euler parameters, which describe the change in the inertial orientation of the ideal coordinate system, for perturbed motion, which is convenient when using the methods of nonlinear mechanics. This work complements our review paper [1].

Keywords: space flight mechanics (astrodynamics), perturbed spatial two-body problem, regularization of singularities generated by gravitational forces, ideal coordinate system, equations of orbital motion, Kustaanheimo–Stiefel variables, Euler (Rodrigues–Hamilton) parameters, Levi-Civita variables, quaternion

REFERENCES

1. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and biquaternion methods and regular models of analytical mechanics (Review) // PMM, 2023, vol. 87, iss. 4, pp. 519–556.
2. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math., 1920, vol. 42, pp. 99–144. DOI: 10.1007/BF02418577
3. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p.
4. *Aarseth S.J., Zare K.A.* Regularization of the three-body problem // Celest. Mech., 1974, vol. 10, pp. 185–205.
5. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. Cambridge: Univ. Press, 2003. 408 p.
6. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann., 1931, vol. 104, pp. 637–665.
7. *Hurwitz A.* Mathematische Werke. Vol. 2. Basel: Birkhauser, 1933.
8. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // Cosmic Res., 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350–361. DOI: 10.1134/S0010952514030022
9. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celest. Mech., 1976, vol. 13, no. 2, pp. 253–263.
10. *Sundman K.F.* Memoire sur le probleme des trois crops // Acta Math., 1912, vol. 36, pp. 105–179.
11. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech., 1978, vol. 17, pp. 395–403.
12. *Vivarelli M.D.* The *KS*-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech., 1983, vol. 29, pp. 45–50.
13. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech., 1988, vol. 41, pp. 359–370.
14. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex *KS*-transformation // Celest. Mech. & Dyn. Astron., 1991, vol. 50, pp. 109–124.
15. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // Mech. Solids, 1990, no. 2, pp. 3–8.
16. *Deprit A., Elipe A., Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech. & Dyn. Astron., 1994, vol. 58, pp. 151–201.
17. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Canad. J. Phys., 1994, vol. 72, pp. 141–146.
18. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys. A: Math. & General, 1995, vol. 28, pp. 193–198.
19. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech. & Dyn. Astron., 2006, vol. 95, pp. 201–212.
20. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way // Mech. & Dyn. Astron., 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
21. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2009, vol. 400, pp. 228–231. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x. arXiv:0803.4441

22. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // R&C Dyn., 2015, vol. 20, no. 1, pp. 19–36. DOI: 10.1134/S1560354715010025
23. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2016, vol. 459, no. 3, pp. 2444–2454. DOI: 10.1093/mnras/stw780.arXiv:1604.06673
24. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2017, vol. 127, pp. 343–368.
25. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2017, vol. 128, pp. 323–342.
26. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2018, vol. 130, Art. no. 68. DOI: 10.1007/s10569-018-9862-4
27. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2019, vol. 131, Art. no. 9. DOI: 10.1007/s10569-019-9887-3
28. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-map. An interpretation through symmetry // J. Geom. Mech., 2018, vol. 10, no. 3, pp. 359–372.
29. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1–10.
30. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 1–7.
31. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods in problems of perturbed motion of a material point. Part 1. General theory. Applications to problem of regularization and to problem of satellite motion // Available from VINITI. No. 8628-B (Moscow, 1985).
32. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods in problems of perturbed motion of a material point. Part 2. Three-dimensional problem of unperturbed central motion. problem with initial conditions // Available from VINITI. No. 8629-B (Moscow, 1985).
33. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Res., 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
34. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Res., vol. 31, no. 3, 1993, pp. 409–418.
35. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // Mech. Solids, vol. 28, no. 1, 1993, pp. 16–25.
36. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // Mech. Solids, vol. 28, no. 2, 1993, pp. 1–12.
37. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material points in a central field with application of quaternions // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2007, vol. 46, no. 5, pp. 688–713.
38. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // Cosmic Res., 2013, vol. 51, no. 5, pp. 353–364. DOI: 10.1134/S001095251305002X
39. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // Cosmic Res., 2015, vol. 53, no. 5, pp. 394–409.
40. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: Regular quaternion equations of relative motion // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 169–178.DOI: 10.3103/S0025654419030075
41. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial earth satellite // Cosmic Res., 2019, vol. 57, no. 2, pp. 101–114. DOI: 10.1134/S0010952519020023
42. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech., 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80. DOI: 10.1007/s10483-021-2797-9
43. *Bordovitsyna T.V.* Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 136 p.
44. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* Theory of Motion of Artificial Satellites of the Earth. Analytical and Numerical Methods. Tomsk: Tomsk Univ. Pub., 2007. 178 p.
45. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astron. J., 2005, vol. 129, no. 5, 2496. DOI: 10.1086/429546
46. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J., 2007, vol. 133, no. 6, 2815.
47. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 2007, vol. 97, pp. 131–150. DOI: 10.1007/s10569-006-9056-3

48. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2015, vol. 454, pp. 2890–2908.

49. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rosengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech.&Dyn. Astron.*,* 2019, vol. 131, no. 21. DOI: 10.1007/s10569-019-9897-1

50. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech.&Dyn. Astron.*,* 2020, vol. 132, no. 10. DOI: 10.1007/s10569-020-9952-y

51. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021, 9470806.

52. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Shchekutiev A.F.* Forecast and correction of spacecraft orbital motion using regular quaternion equations and their solutions in Kustaanheimo–Stiefel variables and isochronic derivatives // PMM, 2023, vol. 87, iss. 2, pp. 124–156.

53. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the eguations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639.
DOI: 10.3103/S0025654417060036

54. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop., 1765, vol. 11, pp. 144–151.

55. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. Mat. Pura Appl., 1904, vol. 9, pp. 1–32.

56. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du probleme restreint des trois corps // Opere Math., 1956, no. 2, pp. 411–417.

57. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku, 1964, vol. 73, pp. 3–7. DOI: 10.1086/518165

58. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math., 1965, vol. 218, pp. 204–219.

59. *Hopf H.* Uber die Abbildung der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann., 1931, vol. 104, pp. 637–665.

60. *Volk O.* Concerning the derivation of the KS-transformation // Celest. Mech., 1973, vol. 8, pp. 297–305.

61. *Lidov M.L.* Increasing the dimension of Hamiltonian systems. KS-transform, use of partial integrals // Cosmic Res., 1982, vol. 20, no. 2, pp. 163–176.

62. *Lidov M.L.* Method for constructing families of spatial periodic orbits in the Hill problem // Cosmic Res., 1982, vol. 20, no. 6, pp. 787–807.

63. *Lidov M.L., Lyakhova V.A.* Families of spatial periodic orbits of the Hill problem and their stability // Cosmic Res., 1983, vol. 21, no. 1, pp. 3–11.

64. *Poleshchikov S.M.* Regularization of the canonical equations of the two-body problem using the generalized KS-matrix // Cosmic Res., 1999, vol. 37, no. 3, pp. 322–328.

65. *Stiefel E.L., Waldvogel J.* Generalisation de la regularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace a trois dimensions // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de Lacademie des Sciences. 1965, Paris.

66. *Stiefel E., Rossler M., Waldvogel J., Burdet C.A.* Methods of regularization for computing orbits in celestial mechanics // NASA Contractor Rep. NASA CR-769, 1967, pp. 88–115.

67. *Birkhoff G.D.* The restricted problem of three bodies // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884–1940), 1915, vol. 39 (1), pp. 265–334.

68. *Waldvogel J.* Die Verallgemeinerung der Birkhoff-Regularisierung fur das raumliche Dreikorperproblem // Bull. Astron. Ser. 3, 1967, vol. 2, no. 2, pp. 295–341.

69. *Andoyer H.* Cours de Mecanigue Celeste. Paris: Gauthier-Vilars, 1923.

70. *Musen P.* Application of Hansen's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth // J. Geoph. Res., 1959, vol. 64, pp. 2271–2279.

71. *Broomberg V.A.* Analytical Algorithms of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1980. 208 p.