

ISSN 0023-4206

Том 61, Номер 5

Сентябрь - Октябрь 2023



КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 5, 2023

Оптимизация маневра обеспечения большой скорости входа космического аппарата в атмосферу <i>М. С. Константинов</i>	355
Статистические характеристики излучения стационарных плазменных двигателей при работе на различных рабочих телах <i>А. П. Плохих, Н. А. Важенин</i>	360
Проектирование низкоэнергетических перелетов к Луне с малой тягой на траектории временного захвата <i>А. В. Иванюхин, В. В. Ивашкин, В. Г. Петухов, С. У. Юн</i>	368
Метод расчета траектории одноимпульсного перелета к гало-орбите вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна <i>Чжоу Жуи</i>	382
Влияние рабочих веществ на электромагнитную обстановку, создаваемую стационарными плазменными двигателями <i>А. П. Плохих, Н. А. Важенин, Д. В. Меркурьев</i>	393
Проблема оптимальной энергии разряда в абляционном импульсном плазменном двигателе <i>А. В. Богатый, Г. А. Дьяконов, Н. В. Любинская, Д. А. Муратаева, Г. А. Попов, С. А. Семенухин</i>	400
Оптимизация гелиоцентрических траекторий с малой тягой между коллинеарными точками либрации различных планет <i>В. Г. Петухов, С. У. Юн</i>	406
Оптимизация маневра перевода космического аппарата из одной точки эллиптической орбиты в другую точку той же орбиты <i>М. С. Константинов</i>	420
Исследовательские испытания ионного двигателя с электродами ионно-оптической системы, изготовленными из углерод-углеродного композиционного материала на основе нетканого углеродного каркаса <i>Р. В. Ахметжанов, А. В. Богатый, Е. А. Богачев, С. В. Гордеев, А. Б. Елаков, Д. А. Каширин, Ю. С. Перминова, Г. А. Попов, М. В. Черкасова</i>	439

УДК 629.785

ОПТИМИЗАЦИЯ МАНЕВРА ОБЕСПЕЧЕНИЯ БОЛЬШОЙ СКОРОСТИ ВХОДА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРУ

© 2023 г. М. С. Константинов*

*Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия*

**mkonst@bk.ru*

Поступила в редакцию 29.03.2023 г.

После доработки 21.04.2023 г.

Принята к публикации 30.04.2023 г.

Оптимизируется схема полета, обеспечивающая параболическую скорость входа космического аппарата (КА) в земную атмосферу. Такой маневр может быть интересным для экспериментальной отработки входа КА, возвращающегося на Землю от Луны или после межпланетного перелета. Предполагается, что КА выведен на низкую околоземную орбиту и имеет химическую двигательную установку с двигателем ограниченной тяги, которая должна обеспечить маневр входа КА в земную атмосферу. Критерием оптимизации рассматривается характеристическая скорость маневра. Основой разработанного метода оптимизации схемы полета и самой траектории КА выбран принцип максимума. Анализируются одновитковые и многовитковые траектории перелета. Показано, что для одновитковых траекторий перелета существует оптимальное время и оптимальная угловая дальность перелета. Дается оценка их значений и минимальной характеристической скорости маневра. В отличие от одновитковых траекторий перелета для многовитковых траекторий характеристическая скорость перелета монотонно убывает с увеличением времени перелета. Приведены зависимости характеристической скорости от времени перелета для одновитковых, двух-, трех- и четырехвитковых траекторий перелета. Проанализированы диапазоны времен перелета, в которых целесообразно использовать конкретный тип траектории перелета.

DOI: 10.31857/S0023420623700188, EDN: GSJEDU

ВВЕДЕНИЕ

Программы освоения космоса предполагают возвращение КА на Землю после реализации лунной или межпланетной миссии. При возвращении зонда с поверхности Луны или из окололунного пространства скорость его входа в земную атмосферу оказывается близкой к местной параболической скорости. При возвращении КА после реализации межпланетных миссий скорость входа в атмосферу будет еще больше. Представляется интересным проработать этапы входа зонда в атмосферу с большой скоростью, отработать конструкцию спускаемого аппарата с теплозащитой, используя макет спускаемого аппарата (демонстратор). Реализация маневра входа космического аппарата в земную атмосферу с большой скоростью является энергетически сложной задачей. Маневр требует большой характеристической скорости. Оптимизация схемы полета КА с обеспечением необходимой скорости его входа в атмосферу, анализ характеристик оптимальной схемы полета КА являются предметом настоящей работы. В ней формулируется постановка проблемы нахождения рациональных схем полета

для обеспечения больших скоростей входа КА в земную атмосферу, представлена математическая модель для анализа схемы одновитковой и многовитковой траектории полета такого зонда и оптимизации этой траектории. Основой метода оптимизации служит принцип максимума. Разработанный алгоритм позволил провести численный анализ конкретной транспортной системы для реализации проекта демонстратора.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА ДЕМОНСТРАТОРА

Анализируется и оптимизируется схема полета КА для реализации больших скоростей входа демонстратора в земную атмосферу для следующей постановки проблемы:

- КА выведен на низкую круговую орбиту искусственного спутника Земли (в представленном ниже численном анализе эта высота принята равной 200 км).
- Известны масса КА m_0 , тяга P и массовый расход q двигателя КА.

• Задана скорость входа КА в земную атмосферу V_{entry} и угол входа θ_{entry} .

Оптимизация рассматриваемой схемы перелета предполагает нахождение:

• оптимального закона включения-выключения двигательной установки $\delta(t)$ (закон определяет число активных и пассивных участков, их расположение на траектории перелета);

• оптимальной программы угла тангажа на активных участках траектории $\vartheta(t)$.

Критерием оптимальности рассматривается характеристическая скорость маневра. Анализируется зависимость характеристической скорости от времени выполнения маневра t_p .

Два важных замечания. Рассматриваемая оптимизационная проблема имеет много экстремумов, которые, прежде всего, отличаются числом витков КА на траектории перелета. Поэтому отдельно рассматриваются одновитковые, двухвитковые и т.д. траектории перелета. Фиксирование числа витков не означает фиксирование угловой дальности перелета. Эта угловая дальность находится оптимальной.

Как будет показано ниже, для одновитковых траекторий перелета существует оптимальное время перелета. Но для многовитковых траекторий перелета оптимальное время перелета, если и существует, то оно очень большое. На траектории перелета КА удаляется от Земли на такое расстояние, что математическая модель, описывающая движение КА становится некорректной. В этом случае время перелета целесообразно фиксировать и перебирать в некотором целесообразном диапазоне.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ КА

Независимой переменной рассматривается угловая дальность перелета β [1–3]. Она отсчитывается от радиус-вектора точки старта. Угловую дальность конечной точки траектории перелета обозначим β_f . Фазовый вектор, описывающий движение КА, рассматривается состоящим из следующих компонент: V_r , V_n – радиальная и трансверсальная компоненты скорости КА; r – длина радиус-вектора КА; t – время полета; m – масса КА.

При этом движение КА вдоль оптимальной траектории перелета может быть описано следующей безразмерной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV_r}{d\beta} = \frac{Pr\lambda_{V_r}}{mV_n\lambda_V}\delta_{opt} - \frac{1}{rV_n} + V_n;$$

$$\frac{d\lambda_{V_r}}{d\beta} = \lambda_{V_n} - \lambda_r \frac{r}{V_n};$$

$$\frac{dV_n}{d\beta} = \frac{Pr\lambda_{V_n}}{mV_n\lambda_V}\delta_{opt} - V_r;$$

$$\frac{d\lambda_{V_n}}{d\beta} = \frac{r}{V_n^2} \left(-\lambda_{V_r} \frac{1+rV_n^2}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t + \Psi\delta_{opt} \right);$$

$$\frac{dr}{d\beta} = \frac{rV_r}{V_n}; \quad \frac{d\lambda_r}{d\beta} = \frac{-1}{V_n} \left(\frac{\lambda_{V_r}}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t + \Psi\delta_{opt} \right);$$

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}; \quad \frac{d\lambda_t}{d\beta} = 0;$$

$$\frac{dm}{d\beta} = -q \frac{r}{V_n} \delta_{opt}; \quad \frac{d\lambda_m}{d\beta} = \frac{Pr\lambda_V}{m^2 V_n} \delta_{opt}.$$

В этой системе P – безразмерная величина тяги двигателя; q – безразмерный массовый расход двигателя; $(\lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_r, \lambda_t, \lambda_m)$ – вектор сопряженных переменных к фазовому вектору (V_r, V_n, r, t, m) ; $\lambda_V = \sqrt{\lambda_{V_r}^2 + \lambda_{V_n}^2}$; $\Psi = \frac{P}{m} \lambda_V - \lambda_m q$ – функция переключения двигателя; δ – функция тяги $\delta_{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi > 0 \\ 0, & \text{если } \Psi < 0 \end{cases}$ [4]. За единицу расстояния принимается радиус начальной орбиты, за единицу скорости – скорость на начальной орбите, за единицу массы – начальная масса КА.

ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Фазовые переменные в начальной точке траектории перелета полностью известны: $V_r(0) = 0$; $V_n(0) = 1$; $r(0) = 1$; $t(0) = 0$; $m(0) = 1$. Для варианта постановки задачи с оптимизируемой угловой дальностью перелета β_f и фиксированным временем перелета t_f краевая задача принципа максимума формулируется следующим образом. Неизвестными параметрами краевой задачи рассматриваются: величина угла тангажа в начальной точке траектории перелета $\vartheta(0)$, величины трех сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета $\lambda_r(0), \lambda_t(0), \lambda_m(0)$ и угловая дальность перелета β_f . Значения сопряженных переменных к радиальной и трансверсальной скорости в начальной точке находятся с использованием таких соотношений:

$$\lambda_{V_r}(0) = \lambda_m(0) \frac{q}{P} \sin(\vartheta(0)); \quad \lambda_{V_n}(0) = \lambda_m(0) \frac{q}{P} \cos(\vartheta(0)).$$

Перечисленные пять параметров краевой задачи должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись следующие пять условий в конечной

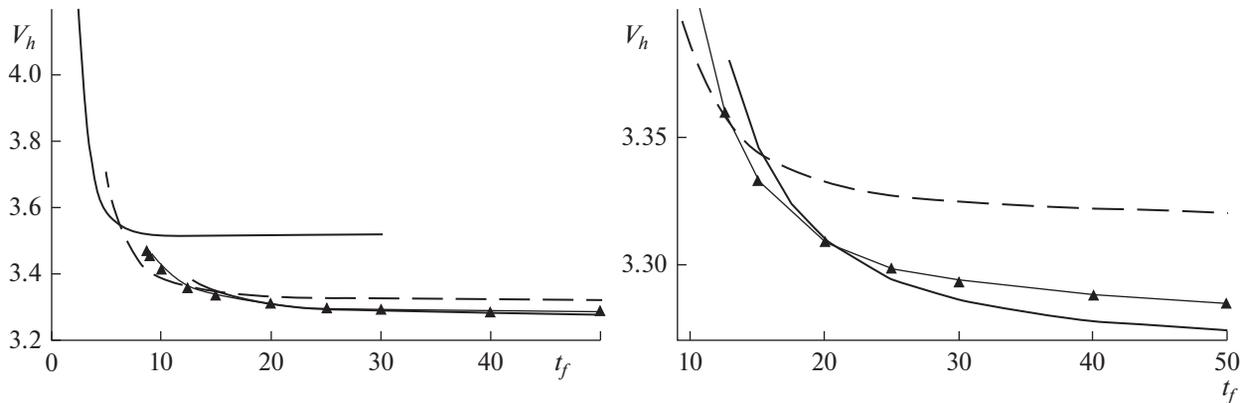


Рис. 1. Характеристическая скорость маневра (км/с) как функция времени перелета (часы) для одновитковых (верхняя сплошная линия), двух витковых (пунктирная линия), трех витковых (линия с треугольниками) и четырех витковых траекторий (жирная сплошная линия).

точке траектории перелета: $V_r(\beta_f) = V_{entry} \sin(\theta_{entry})$; $V_n(\beta_f) = V_{entry} \cos(\theta_{entry})$; $r(\beta_f) = r_{am}$; $\lambda_m(\beta_f) = 1$; $t(\beta_f) = t_f$.

При решении краевой задачи использовались следующие приемы: решение задачи с идеально-регулируемым двигателем с нулевым набором сопряженных переменных, входящих в вектор неизвестных параметров краевой задачи [5–7]; гладкое продолжение по параметру для перехода к траектории с двигателем ограниченной тяги [8, 9]; сглаживание функции тяги [4]; гладкое продолжение по параметру сглаживания; гладкое продолжение по времени перелета для конкретной схемы перелета; математический аппарат комплексных чисел для вычисления производных от краевых условий по параметрам краевой задачи [4, 10, 11].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для численного анализа были выбраны следующие характеристики КА: масса КА 5 т, тяга двигателя 5 кН, удельная тяга 330 с, массовый расход 1.545 кг/с. Угол входа КА в земную атмосферу принят равным -10° .

На рис. 1 приведены зависимости характеристической скорости маневра V_h (в км/с) от времени перелета (в часах) для оптимальных одновитковых, двух-, трех- и четырехвитковых траекторий перелета. Справа показан фрагмент зависимости в большем масштабе.

Анализ рисунка показывает, что реализовать быстрый перелет со временем меньшим 6 ч целесообразно, используя одновитковую траекторию перелета. При этом характеристическая скорость маневра больше 3.55 км/с. В диапазоне времени перелета от 6 до 13 ч целесообразно использовать двухвитковую траекторию перелета. При этом характеристическая скорость маневра находится в диапазоне 3.355...3.55 км/с. В диапазоне времени перелета от 13 до 20.4 ч целесообразно использо-

вать трехвитковую траекторию перелета. При этом характеристическая скорость маневра находится в диапазоне 3.308...3.355 км/с. Если использовать траектории с временем перелета большим 20.4 ч, то рационально использовать четырехвитковые траектории перелета. При этом характеристическая скорость маневра будет немного меньше 3.308 км/с. Например, при времени перелета 50 ч характеристическая скорость маневра составит 3.274 км/с.

Приведем результаты анализа оптимальной одновитковой траектории перелета. На рис. 2 показана зависимость характеристической скорости одновиткового перелета как функции времени перелета. Зависимость имеет четко выраженный минимум. Этот минимум оказывается равен 3512.16 м/с. Для одновитковой траектории существует оптимальное время перелета. В рассматриваемом случае оно равно 12.315 ч. Уменьшение времени перелета приводит к значительному увеличению характеристической скорости. Например, для 2.5 ч характеристическая скорость равна 4119.746 м/с; для 5 ч характеристическая скорость составит 3585.759 м/с. Увеличение времени перелета (от оптимального времени 12.315 ч) приводит к небольшому увеличению характеристической скорости. Например, для 30 ч характеристическая скорость будет равна 3521.741 м/с (она увеличилась всего на 9.7 м/с).

Оптимальная величина угловой дальности одновиткового перелета как функция времени перелета монотонно увеличивается от 332.6° , при времени перелета 2.5 ч, до 411.8° , при времени перелета 30 ч. С увеличением времени перелета максимальное удаление КА от Земли на траектории перелета монотонно увеличивается. Если при времени перелета 2.5 ч максимальная величина радиус-вектора КА на траектории перелета не-

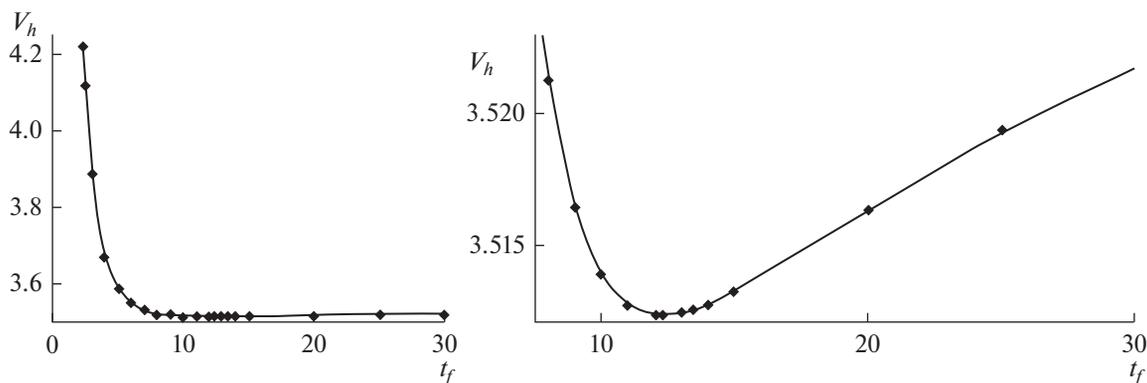


Рис. 2. Характеристическая скорость одновиткового перелета (км/с) как функция времени перелета (часы). Справа зависимость представлена в более крупном масштабе.

много меньше 13 тыс. км, то для 30 ч максимальный радиус-вектор КА — больше 90 тыс. км.

То обстоятельство, что на траектории одновиткового перелета существует оптимальное время перелета, дает возможность искать оптимальную траекторию одновиткового перелета в постановке, когда и время перелета, и угловая дальность перелета — оптимизируемые параметры. При этом крайняя задача принципа максимума оказывается менее трудоемкой, чем в случае фиксирования времени перелета, когда приходится находить решения для всего интересного для практики диапазона времени перелета.

Найденные параметры краевой задачи: $t_p = 12.315$ ч; $\beta_f = 403.099^\circ$; $\vartheta_o = -19.151^\circ$; $\lambda_{vo} = -0.22945$; $\lambda_{mo} = 0.29062$. Характеристическая скорость маневра 3512.254 м/с. Масса топлива, затраченного на перелет, 3311.0 кг. Конечная масса КА 1689.0 кг.

Анализ зависимости характеристической скорости маневра как функции времени перелета (при оптимизации угловой дальности перелета) для многовитковых траекторий перелета показал, что эти зависимости монотонны. С увеличением времени перелета характеристическая скорость маневра для многовитковых траекторий убывает. В области малых времен перелета наблюдается сильное уменьшение характеристической скорости. При больших временах перелета с увеличением времени перелета характеристическая скорость убывает слабо. В отличие от одновитковых траекторий перелета оптимального времени перелета не существует.

То обстоятельство, что на траекториях многовиткового перелета не существует оптимального времени перелета, усложняет исследование. Появляется необходимость анализировать два показателя (характеристическую скорость и время перелета). Варианты схемы перелета приходится сравнивать при фиксированном времени перелета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показал, что характеристическая скорость рассматриваемого маневра обеспечения параболической скорости входа КА в атмосферу весьма велика (более 3.25 км/с).

Использование многовитковых перелетов при реализации рассматриваемого космического маневра дает возможность существенно уменьшить характеристическую скорость маневра. Так, если при использовании одновитковой траектории минимальная характеристическая скорость маневра 3.512 км/с, то использование, например, четырехвитковой траектории с временем перелета 50 ч может позволить уменьшить эту скорость до 3.274 км/с. То есть на 238 м/с.

Показано, что число витков оптимальной схемы перелета зависит от времени перелета. Так двухвитковые перелеты оказываются оптимальными в диапазоне времен перелета 6...13 ч. В диапазоне времен перелета 13...20.4 ч оптимальная схема перелета оказывается трехвитковой. Если время перелета больше 20.4 ч, то целесообразно использовать схему четырехвиткового перелета.

Показано, что для одновиткового перелета зависимость характеристической скорости от времени перелета не монотонна. Существует оптимальное время перелета, при котором характеристическая скорость маневра минимальна. Для многовитковых перелетов характеристическая скорость монотонно убывает с увеличением времени перелета.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-19-00329.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al. Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // Acta Astronautica. 2022. V. 197. P. 354–367. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>
2. Petukhov V. Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the prob-

- lems of optimizing low-thrust trajectories // *Cosmic Research*. 2019. V. 57. Iss. 5. P. 351–363.
<https://doi.org/10.1134/S001095251905006X>
3. *Ivanyukhin A., Petukhov V.* Optimization of multi-revolution limited power trajectories using angular independent variable // *J. Optimization Theory and Applications*. 2021. V. 191. Iss. 2. P. 575–599.
<https://doi.org/10.1007/s10957-021-01853-8>
 4. *Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М.* Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. М.: Изд. МАИ, 2015. 259 с.
 5. *Petukhov V.G.* One Numerical Method to Calculate Optimal Power Limited Trajectories. IEPC-95-221. М., 1995.
 6. *Petukhov V.G.* One Numerical Method to Calculate Optimal Power Limited Trajectories // 24th Intern. Electric Propulsion Conf. 19–23 Sept. Moscow. 1995. Art. ID. IEPC-95-221. 7 p.
 7. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // *Косм. исслед.* 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237. (*Cosmic Research*. P. 219–232.)
<https://doi.org/10.1134/S0010952508030052>
 8. *Haberhorn T., Martinon P., Gergaud J.* Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2004. V. 27. Iss. 6. P. 1046–1060.
 9. *Петухов В.Г.* Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // *Косм. исслед.* 2012. Т. 50. № 3. С. 258–270.
 10. *Lyness J.N., Moller C.B.* Numerical differentiation of analytic functions // *SIAM J. Numer. Anal.* 1967. Iss. 4. P. 202–210.
 11. *Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J.* The complex-step derivative approximation // *ACM Transaction on Mathematical Software*. 2003. V. 29. Iss. 3. P. 245–262.

УДК 629.7.036

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ РАБОТЕ НА РАЗЛИЧНЫХ РАБОЧИХ ТЕЛАХ

© 2023 г. А. П. Плохих¹, *, Н. А. Важенин¹

¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

*riame@mai.ru

Поступила в редакцию 28.03.2023 г.

После доработки 04.04.2023 г.

Принята к публикации 06.04.2023 г.

Описана процедура экспериментального определения статистических характеристик собственного электромагнитного излучения лабораторного макета стационарного плазменного двигателя СПД-70 разработки Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института. Исследовались временные комплексные реализации процессов излучения СПД-70 при длительности выборки 1 мс и полосе анализа 140 МГц для характерных центральных частот 0,9, 1,050, 1,200, 1,350 ГГц (мощность разряда 600 Вт, горизонтальная поляризация) при работе на различных рабочих телах. Проведенные исследования позволили получить оценки статистических характеристик излучения СПД-70 для перспективных рабочих тел. К новым результатам следует отнести, что полученные законы распределения для синфазной и квадратурной компоненты комплексной огибающей процесса излучения существенно отличаются от гауссовского. Что касается распределения амплитудной огибающей процесса, то в общем случае имеет место отличие от рэлеевского закона распределения. При переходе с ксенона на криптон степень негауссовости и отличие от рэлеевского закона увеличиваются. При этом закон распределения фазы комплексной огибающей процесса близок к равномерному и инвариантен к типу рабочего тела.

DOI: 10.31857/S0023420623700176, EDN: XTDOMT

ВВЕДЕНИЕ

Общая проблема обеспечения безопасности космических полетов напрямую связана с решением задач обеспечения электромагнитной совместимости (ЭМС) на борту космических аппаратов (КА) со стационарными плазменными двигателями (СПД). Это особенно актуально в связи с тенденцией перехода на более дешевые и доступные рабочие тела с целью снижения затрат на эксплуатацию КА. Такая замена газообразного рабочего вещества в СПД существенно меняет рабочие процессы в двигателе и требует их дополнительной оптимизации [1, 2]. В этой связи возникает вопрос о степени влияния рабочих веществ на электромагнитную обстановку, создаваемую стационарными плазменными двигателями.

Данная задача рассматривалась в работе [3], где была проведена экспериментальная оценка влияния рабочих веществ на электромагнитную обстановку, создаваемую стационарными плазменными двигателями при работе на ксеноне и криптона. Было показано, что перевод СПД-70 с ксенона на криптон существенно повышает его

уровень излучения в диапазоне частот 1...2 ГГц. При этом максимальное превышение уровня излучения для криптона может составлять порядка 10 дБ для горизонтальной поляризации.

Таким образом, смена рабочего вещества существенно меняет электромагнитную обстановку, создаваемую стационарным плазменным двигателем (для одинаковой мощности разряда), что требует проведения дополнительных мероприятий по обеспечению ЭМС с целью сохранения функциональной безопасности КА.

Вопросы обеспечения ЭМС плотно сопрягаются с классическими задачами обеспечения помехоустойчивости систем космической связи. Наличие широкополосного собственного излучения СПД в радиодиапазоне дополнительно понижает отношение сигнал/шум на входе приемных трактов бортовых радиосистем КА. При определенных условиях это может существенно ограничить энергетический потенциал и характеристики помехоустойчивости радиолиний при связи с КА, оборудованными плазменными двигателями. При этом количественные оценки помехоустойчивости могут быть получены в рамках

классической радиотехники с применением методов теории связи, что требует разработки и верификации математических моделей помехового излучения СПД.

С точки зрения математического описания собственного электромагнитного излучения плазменных двигателей возможны два основных подхода: электродинамический и феноменологический [4]. Электродинамический подход основывается на разработке математических моделей процессов генерации электромагнитного излучения, базирующихся на фундаментальных законах плазменной электродинамики. Феноменологический подход, не углубляясь в тонкую физическую природу генерации электромагнитного излучения плазмы, базируясь в основном на результатах экспериментальных исследований, формирует некоторые эквивалентные математические модели такого излучения, удобные с точки зрения использования в инженерной практике. Упомянутые два подхода не противоречат, а эффективно дополняют друг друга. Электродинамические модели чрезвычайно важны с точки зрения понимания физической природы и закономерностей формирования электромагнитного излучения плазмы, но, как правило, представляются весьма сложными для использования при оценке помехоустойчивости космических систем связи. В то же время феноменологические модели, не претендуя на детальное раскрытие физических механизмов формирования излучения плазменного двигателя, позволяют эффективно решать конкретные инженерные задачи проектирования бортовых радиосистем КА, такие, например, как оценка электромагнитной совместимости СПД и бортовых радиосистем, оценка помехоустойчивости, дальности действия, скорости передачи информации в условиях функционирования плазменного двигателя. Разработка феноменологических моделей, как правило, осуществляется как на основе результатов экспериментальных исследований, так и с использованием данных, полученных в рамках электродинамического подхода.

Для разработки эквивалентных математических моделей необходимо знать статистические характеристики и тонкую спектрально-временную структуру излучения СПД при работе на различных рабочих телах. Решению этих задач посвящена данная статья.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве объекта исследований рассматривалась модель стационарного плазменного двигателя СПД-70 с внешним диаметром ускорительного канала 70 мм. Подробное описание конструкции дано в публикации [3]. В данной модели геометрия ускорительного канала и топо-



Рис. 1. Модель двигателя СПД-70.

логия магнитного поля на срезе двигателя были оптимизированы для работы на криптоне [1]. Внешний вид стационарного плазменного двигателя представлен на рис. 1.

Для измерения помехоэмиссии СПД использовалась установка, подробно описанная в исследованиях [3, 5, 6]. Ее основу составляла мобильная безэховая экранированная камера (БЭК), в которой устанавливался тонкостенный диэлектрический вакуумный отсек, соединенный с основной вакуумной камерой, образующий общий откачиваемый вакуумный объем. Внутри диэлектрического отсека устанавливалась модель двигателя СПД-70. Испытания модели двигателя СПД-70 проводились для трех уровней мощности разряда — 600, 800 и 1000 Вт при напряжении разряда 300 В и работе на ксеноне и криптоне.

Возникающее при работе плазменного двигателя излучение через стенки диэлектрического отсека с известным затуханием поступало на измерительные антенны, размещенные внутри БЭК.

Применяемые измерительные средства аналогичны описанным в работах [3, 6]. Использовалась рупорная измерительная антенна с рабочим диапазоном частот от 0.9 до 12.4 ГГц и линейной поляризацией. Угловое положение антенны составляло $(90 \pm 5)^\circ$ относительно направления плазменной струи двигателя. Выход антенны подключался к анализатору спектра.

При анализе временных характеристик излучения СПД анализатор спектра работал в режиме реального времени на фиксированных частотах и оцифровывал квадратурные составляющие входного процесса в полосе анализа 140 МГц. С помощью перестройки центральной частоты анализатора спектра были получены временные реализации амплитудной огибающей процесса на заданных участках исследуемого диапазона частот, которые были

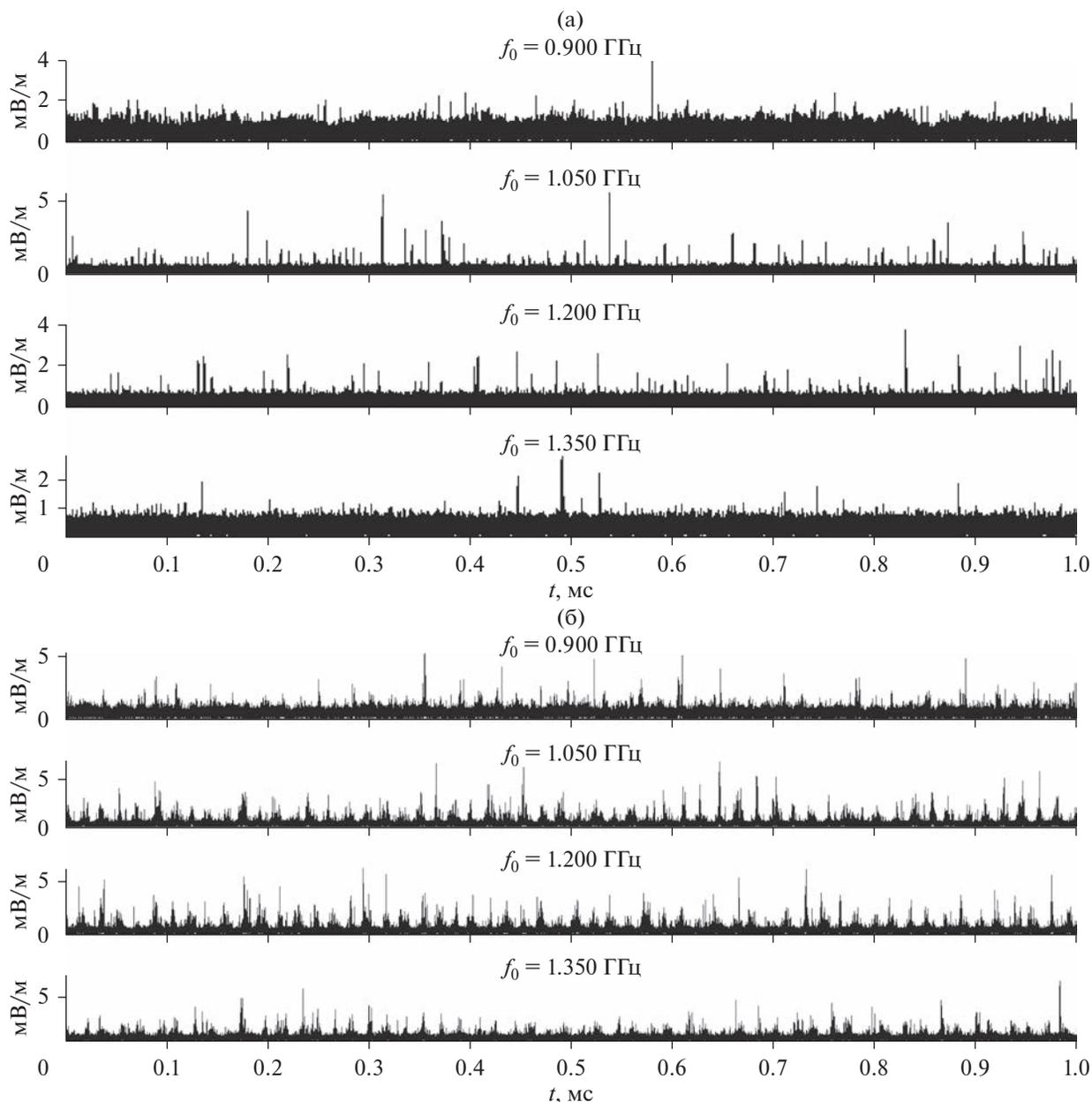


Рис. 2. Временные реализации амплитудной огибающей излучения СПД-70: а – ксенон, мощность разряда 600 Вт, горизонтальная поляризация; б – криптон, мощность разряда 600 Вт, горизонтальная поляризация.

пересчитаны в напряженность электрического поля в апертуре измерительной антенны.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На первом этапе работ исследовались временные комплексные реализации процессов излучения на типовых частотах при работе СПД-70 на различных рабочих телах. Примеры реализаций при длительности выборки 1 мс и полосе оцифровки 140 МГц приведены на рис. 2 для характерных центральных частот 0.9, 1.050, 1.200 и 1.350 ГГц.

Представленные реализации соответствуют мощности разряда 600 Вт и горизонтальной поляризации, при которых рассматриваемые эффекты выражены наиболее ярко.

Анализ полученных временных реализаций амплитудной огибающей показывает, что при работе на ксеноне и криптоне они представляют собой случайные последовательности импульсов, длительность и интервал следования которых зависят от частотных поддиапазонов и видов рабочих веществ, что качественно подтвердили результаты, полученные в работах [3,

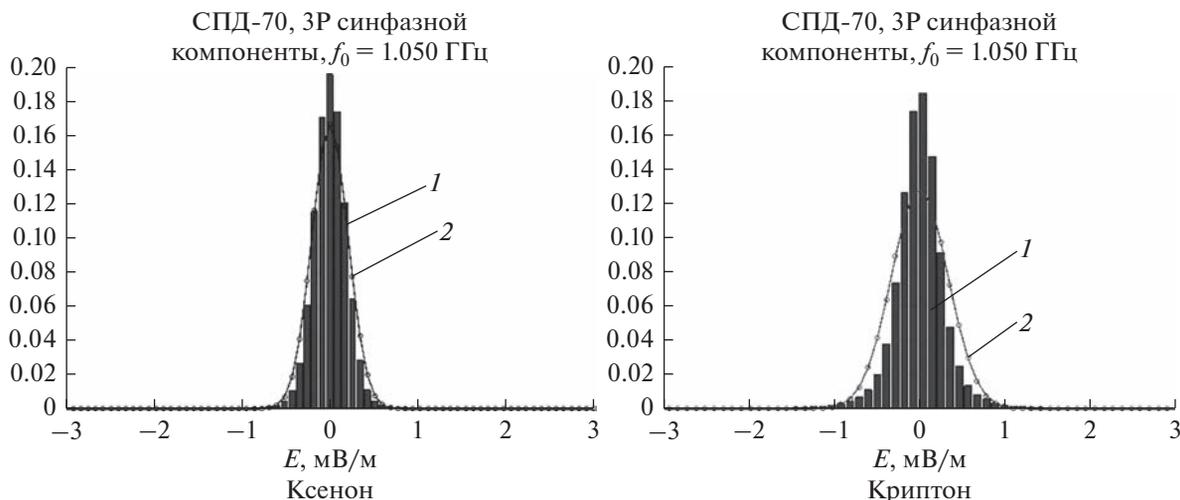


Рис. 3. Гистограмма распределения синфазной составляющей: 1 – эксперимент; 2 – теория. Мощность разряда 600 Вт.

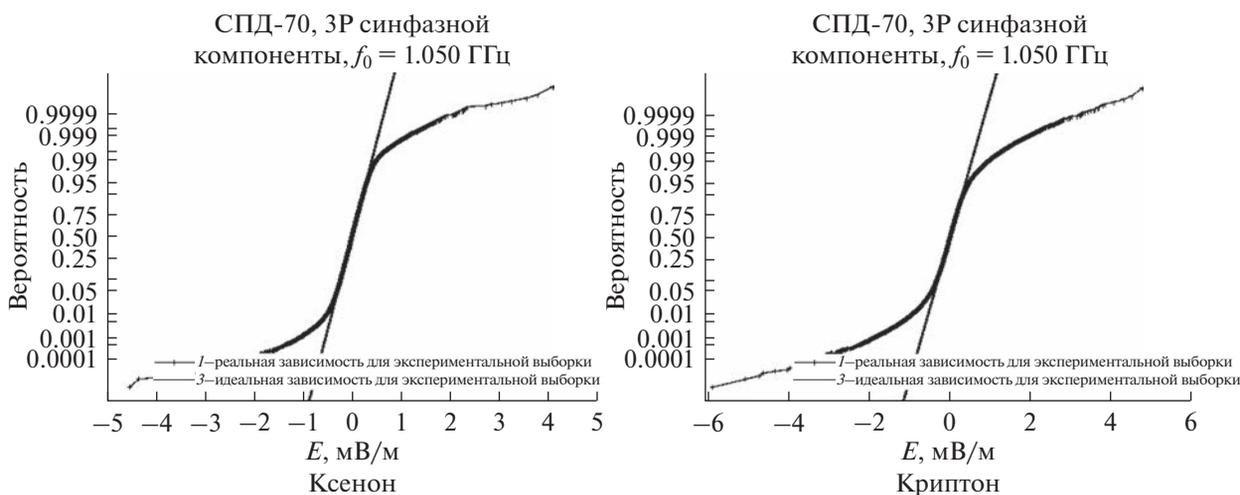


Рис. 4. Закон распределения синфазной компоненты на вероятностной бумаге: 1 – закон распределения экспериментальной выборки; 3 – гауссовый закон распределения. Мощность разряда 600 Вт.

7–9]. При этом на фоне последовательности случайных импульсов возникают квазипериодические группы импульсов увеличенной (более чем в два раза) амплитуды, образующие ярко выраженные “пачки”. Так, например, при использовании ксенона (режим 600 Вт, частота 1.05 ГГц, горизонтальная поляризация) средний интервал следования одиночных импульсов лежит в диапазоне 1...5 мкс, а интервал следования “пачек” составляет 6...10 мкс. Для криптона заметна более упорядоченная периодичность “пачек” с увеличенной по отношению к ксенону длительностью. При этом средний период повторения импульсов “пачки” для криптона лежит в диапазоне 16...20 мкс при средней длительности “пачки” равной примерно полупериоду их следования (8...10 мкс).

Способность спектроанализатора представлять оцифрованные значения в виде квадратурных

составляющих процесса была использована для проведения анализа закона распределения (ЗР) квадратурных реализаций, имеющих выраженные импульсные компоненты. На рис. 3 приведены гистограммы распределения синфазной составляющей принятого сигнала, на которую наложен идеальный гауссовский закон распределения, соответствующий параметрам реализации. На рис. 4 для тех же условий представлен интегральный закон распределения соответствующих реализаций на “вероятностной бумаге”, позволяющей визуально оценить степень близости закона распределения конкретной реализации к гауссовскому с математическим ожиданием и дисперсией такими же, как и у экспериментально полученной реализации. Гауссовский закон распределения в этом случае отображается наклонной прямой. Из результатов видно, что для синфазных компонент ком-

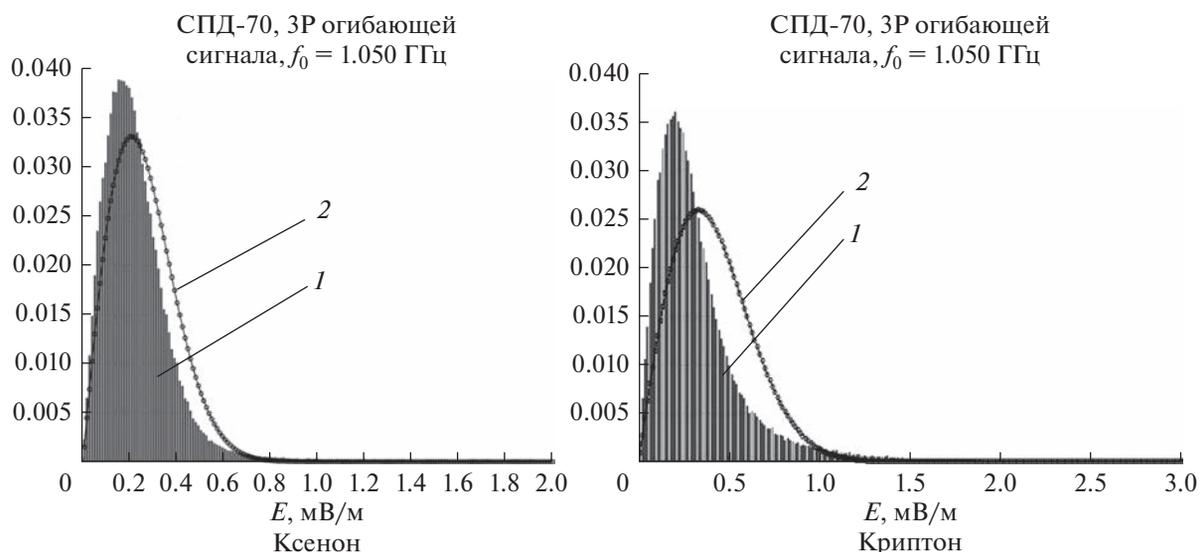


Рис. 5. Гистограмма распределения амплитудной огибающей: 1 – эксперимент; 2 – теория. Мощность разряда 600 Вт.

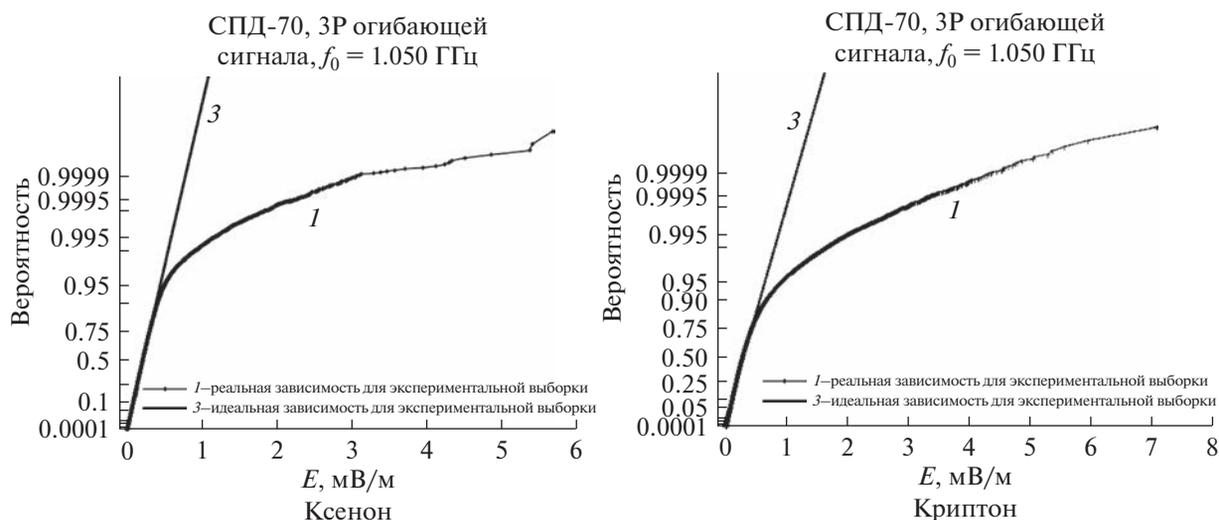


Рис. 6. Закон распределения амплитудной огибающей на вероятностной бумаге: 1 – закон распределения экспериментальной выборки; 3 – закон распределения Рэлея. Мощность разряда 600 Вт.

плексной огибающей процессов излучения при использовании ксенона и криптона, их дифференциальные (рис. 3) и интегральные (рис. 4) законы распределения существенно отличаются от гауссовского. Причем степень расхождения законов распределения для криптона начинается при существенно меньших амплитудах, чем для ксенона. Аналогичные результаты были получены и для квадратурной компоненты излучения СПД-70.

Результаты исследований для амплитудных огибающих процессов для ксенона и криптона представлены на рис. 5, 6. На графиках хорошо видно отличие от рэлеевского закона распределе-

ния. Причем в случае криптона это отличие более существенно.

Что касается фазовых статистических характеристик процессов, то для выбранных рабочих тел законы распределения фазы комплексной огибающей близки к равномерному (рис. 7).

При изучении внутриимпульсной структуры реализаций большой интерес представляют спектрально-временные характеристики групп импульсов, которые формируют “пачечную” структуру. Для анализа на рис. 8 представлены одиночные “пачки” импульсов для ксенона и криптона. Как видно из графиков, для ксенона

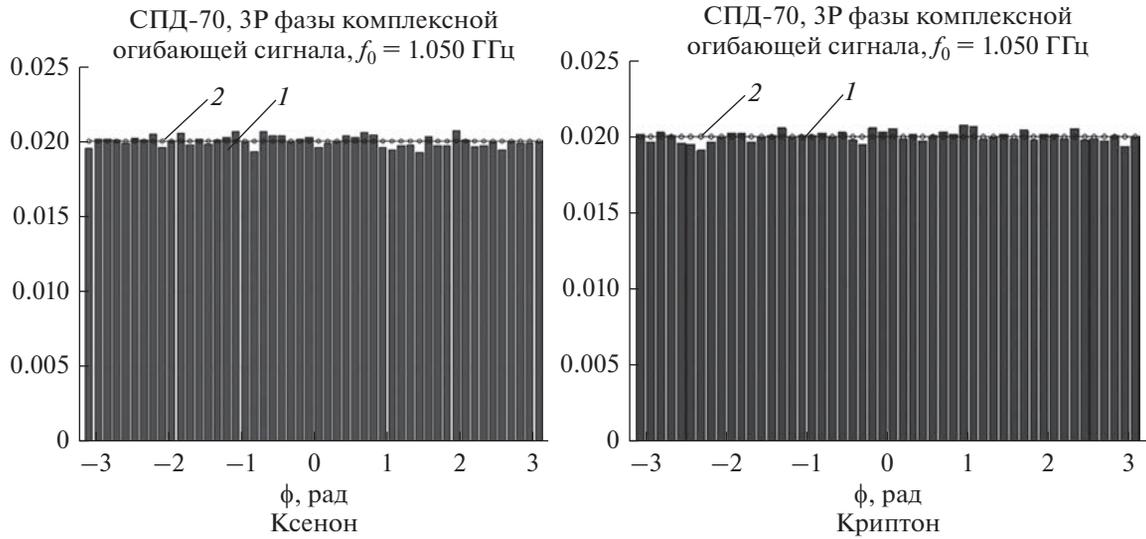


Рис. 7. Закон распределения фазы процесса: 1 – эксперимент; 2 – теория. Мощность разряда 600 Вт.

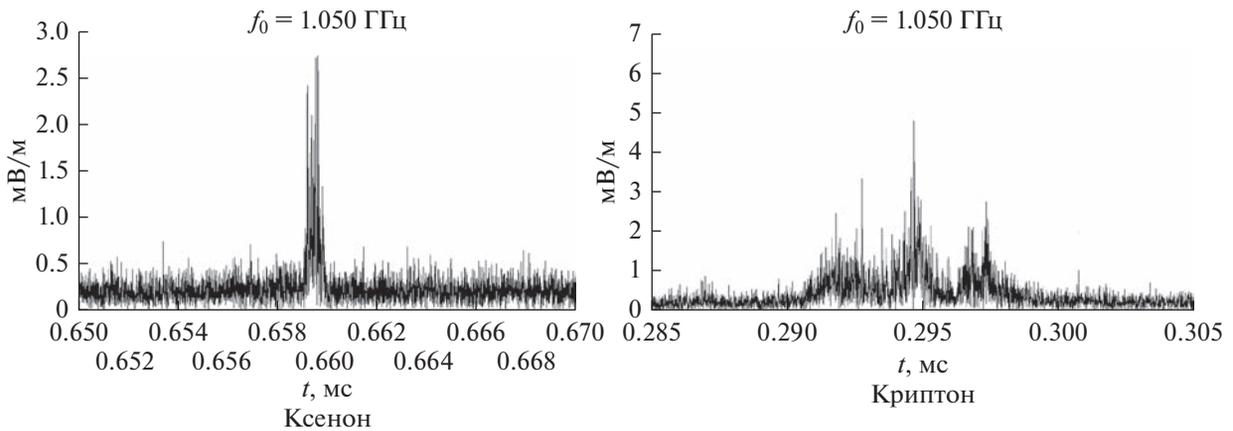


Рис. 8. Импульсы “пачек” излучения СПД-70. $f_0 = 1.050$ ГГц, мощность разряда 600 Вт.

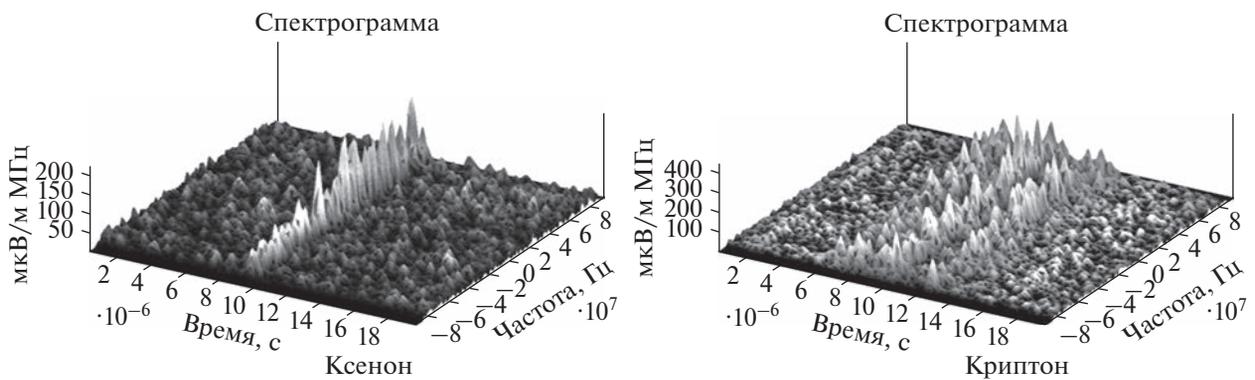


Рис. 9. Спектрограммы импульсов “пачек” излучения СПД-70. $f_0 = 1.050$ ГГц, мощность разряда 600 Вт.

длительность по уровню 0.5 составляет порядка 0.7 мкс, а для криптона — порядка 6 мкс.

Для реализаций (рис. 8) были построены спектрограммы, представленные на рис. 9.

Анализ рис. 9 показывает, что полученные спектрограммы соответствуют широкополосным шумоподобным импульсным процессам, которые в пределах полосы анализа спектроанализатора (140 МГц) в среднем имеют практически равномерный спектральный уровень. Такие результаты свидетельствуют, что оцифрованные выборки, следующие с интервалом 5 нс и определяющие структуру импульсов, практически не коррелированы.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для обсуждения результатов предварительно рассмотрим сравнительные характеристики ксенона и криптона. Ксенон имеет высокую атомную массу — 131 а.е.м. — и относительно низкий потенциал ионизации — 12.1 эВ. Криптон имеет меньшую атомарную массу — 83.8 а.е.м., но более высокий потенциал ионизации — 14.0 эВ. Указанные различия приведут к тому, что при прочих равных условиях скорость атомов криптона в разрядном канале СПД будет выше, концентрация соответственно ниже, что приведет к увеличению длины их свободного пробега, снижению эффективности ионизации и, как следствие, уменьшению “ионной” составляющей разрядного тока. Учитывая, что сравнение результатов при использовании ксенона и криптона проводилось для одинаковых мощностей разряда, уменьшение величины “ионной” компоненты разрядного тока соответственно приводит к увеличению “электронной” компоненты. Учитывая, что процессы возбуждения, ионизации и релаксации атомов рабочего тела в СПД напрямую определяются “электронной” компонентой, можно ожидать, что изменение ее параметров будет существенно влиять на характеристики возникающего электромагнитного излучения, что и подтверждают проведенные эксперименты.

Что касается некоррелированности отсчетов в пределах импульсов, то это похоже на проявление эффектов дробового шума, который возникает, когда носители заряда пересекают некоторый потенциальный барьер. При этом каждый носитель генерирует в цепи импульс тока, а суперпозиция таких импульсов образует суммарный флуктуирующий ток. При работе стационарного плазменного двигателя такие эффекты могут возникнуть при вводе пучка электронов катода-компенсатора в плазменную струю и сопровождаться импульсным излучением, которое было обнаружено в ходе эксперимента.

Для подтверждения этой гипотезы необходимо проведение дополнительных исследований и разработка соответствующих электродинамических моделей.

Что касается феноменологического моделирования излучения стационарных плазменных двигателей во временной области, то процесс, описывающий излучение в полосе пропускания приемника, может быть представлен в виде случайной, а в случае использования криптона — квазипериодической последовательности некоррелированных шумоподобных импульсов с заданной средней длительностью, куполообразной формой амплитудной огибающей и статистическими характеристиками, полученными в результате экспериментальных измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

Анализ временных реализаций амплитудной огибающей излучения СПД-70, полученных в полосах анализа шириной 140 МГц для частоты 0.9, 1.050, 1.200 и 1.350 ГГц, показал, что при работе на ксеноне и криптоне они представляют собой случайные последовательности импульсов, в которых присутствуют группы импульсов, образующих квазипериодические “пачки” увеличенной амплитуды. При этом для ксенона длительность “пачек” по уровню 0.5 составляет порядка 0.5...1 мкс при периоде повторения 6...10 мкс, а для криптона порядка 8...10 мкс при периоде повторения 16...20 мкс.

Исследование статистических характеристик излучения модели СПД-70 по временным реализациям, полученным в полосах анализа шириной 140 МГц для частот 0.9, 1.050, 1.200 и 1.35 ГГц показало, что для синфазной и квадратурной компонент комплексной огибающей процесса излучения полученные законы распределения существенно отличаются от гауссовского. Что касается распределения амплитудной огибающей процесса, то в общем случае имеет место отличие от рэлеевского закона распределения. При переходе с ксенона на криптон степень негауссовости и отличия от рэлеевского закона увеличиваются. При этом закон распределения фазы комплексной огибающей процесса близок к равномерному и инвариантен к типу рабочего тела.

При разработке феноменологических моделей можно рекомендовать представлять процесс, описывающий излучения СПД во временной области, в виде случайной, а в случае использования криптона — квазипериодической последовательности некоррелированных шумоподобных импульсов с заданной средней длительностью, куполообраз-

ной формой амплитудной огибающей и статистическими характеристиками, полученными в результате экспериментальных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kim V., Zakharchenko V., Merkurev D. et al.* Influence of Xenon and Krypton Flow Rates through the Acceleration Channel of Morozov's Stationary Plasma Thruster on the Thrust Efficiency // *Plasma Physical Reports*. 2019. V. 45. Iss. 1. P. 11–20. <https://doi.org/10.1134/S1063780X19010082>
2. *Kim V., Merkurev D., Shilov E., Zakharchenko V., Kalyazin V.* Study of the low-power krypton-operated stationary plasma thruster plume // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. V. 927. 13th Intern. Conf. Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2020). 6–13 Sept. 2020, Alushta, Russia. 2020. Art. ID. 012053. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/927/1/012053>
3. *Плохих А.П., Важенин Н.А., Меркурьев Д.В.* Влияние рабочих веществ на электромагнитную обстановку, создаваемую стационарными плазменными двигателями // *Косм. исслед.* 2023. Т. 61. № 5. <https://doi.org/10.31857/S0023420623700140>
4. *Важенин Н.А.* Эмпирические модели законов распределения импульсных помех от стационарных плазменных двигателей // *Тр. МАИ*. 2012. Т. 59. 15 с.
5. *Плохих А.П., Важенин Н.А., Попов Г.А.* Анализ влияния электромагнитного излучения стационарных плазменных двигателей на помехоустойчивость канала связи “Земля – космический аппарат” // *Косм. исслед.* 2019. Т. 57. № 5. С. 339–346. (Cosmic Research. 2019. V. 57. № 5. P. 317–324.) <https://doi.org/10.1134/S0023420619050078>
6. *Плохих А.П., Важенин Н.А., Попов Г.А., Шилов С.О.* Спектральные характеристики собственного излучения электрических ракетных двигателей с замкнутым дрейфом электронов в радиодиапазоне для различных рабочих тел // *Косм. исслед.* 2022. Т. 60. № 5. С. 396–403.
7. *Важенин Н.А., Плохих А.П.* Имитационное моделирование электромагнитного излучения стационарных плазменных двигателей // *Изв. Российской Акад. наук. Энергетика*. 2014. № 6. С. 118–131.
8. *Beiting E., Pollard J., Khayms V., Werthman L.* Electromagnetic Emissions to 60 GHz from a BPT4000 EDM Hall Thruster // *Intern. Electric Propulsion Conf. Toulouse France*. 17–21 March 2003. Art. ID. IEPC-03-129. P. 17–21.
9. *Beiting E., Eapen X., Pollard J. et al.* Electromagnetic Emissions from PPS®1350 Hall Thruster // *31st Intern. Electric Propulsion Conf.* 20–24 Sept. 2009, Ann Arbor, USA. Art. ID. IEPC-2009-071. 13 p.

УДК 629.78

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ К ЛУНЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ НА ТРАЕКТОРИИ ВРЕМЕННОГО ЗАХВАТА

© 2023 г. А. В. Иванюхин^{1, 2, *}, В. В. Ивашкин^{1, 3}, В. Г. Петухов¹, С. У. Юн⁴

¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

²Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

³Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

⁴Московский авиационный институт, Москва, Россия

*ivanyukhin.a@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 02.04.2023 г.

Рассматривается задача расчета низкоэнергетических траекторий перелета космического аппарата с малой тягой к Луне на орбиту временного захвата. Перелет осуществляется с использованием транзитной траектории в окрестности одной из коллинеарных точек либрации L_1 или L_2 системы Земля–Луна. Использование транзитной траектории позволяет снизить затраты топлива на перелет за счет использования динамики движения космического аппарата в системе Земля–Луна. После выхода на орбиту временного захвата в зависимости от целей миссии может быть сформирована необходимая окололунная орбита или совершен маневр для выхода на отлетную межпланетную траекторию. Предлагается метод решения задачи, заключающийся в определении подходящей транзитной траектории и в расчете оптимальной траектории перелета космического аппарата с малой тягой с начальной околоземной орбиты на транзитную траекторию к Луне. В качестве двигателя рассматривается модель электроракетного двигателя ограниченной тяги. Для решения задачи оптимального управления и определения оптимальной точки выхода на транзитную траекторию используется принцип максимума Понтрягина в сочетании с методом продолжения по параметру. Приводятся численные примеры расчета низкоэнергетических траекторий перелета на окололунную орбиту временного захвата с оптимизацией точки выхода на транзитную траекторию.

DOI: 10.31857/S0023420623700164, EDN: XSEUTM

ВВЕДЕНИЕ

Луна является ближайшим и одним из самых притягательных объектов Солнечной системы, ее исследования с помощью окололунных космических аппаратов (КА) начались всего через полтора года после запуска первого спутника Земли. Со временем стало понятно, что траектории лунных миссий сильно отличаются от перелетов в околоземном пространстве, что обусловлено сложностью гравитационного поля на траекториях, включающих в себя сближение с двумя разными массивными телами (Землей, Луной) и испытывающих воздействие удаленного массивного тела (Солнца).

В этих условиях очевидным направлением повышения эффективности транспортных лунных операций представляется целенаправленное использование эффектов динамики задач трех и четырех тел, что породило новый класс перелетов — низкоэнергетические траектории. Этот термин подразумевает минимальное изменение энергии при перелете между Землей и Луной.

Одним из перспективных инструментов для проектирования низкоэнергетических перелетов выступают траектории временного захвата, в частности осуществляющие транзит КА от одного массивного тела к другому. Такие траектории при проектировании лунных миссий начали исследоваться еще в середине прошлого века в работах В.А. Егорова [1–4], В.Г. Фесенкова [5], Девидсона [6] и др.

Егоров приводит условие, устанавливающее невозможность захвата Луной КА, “орбита которого начинается вблизи Земли” [2, 4]. Основная идея доказательства заключается в том, что запускаемый от Земли КА имеет слишком малую константу площадей, и селеноцентрическая скорость в апогее перелетной траектории значительно превышает местную параболическую скорость относительно Луны и, следовательно, КА, попав в сферу действия Луны, неминуемо ее покинет. Из этого делается вывод о невозможности захвата на первом витке траектории. Фесенков [5] также пытался теоретически обосновать невозможность

постоянного захвата с помощью анализа задачи трех тел и интеграла Якоби. Однако анализ задачи трех тел показывает существование транзитных траекторий, допускающих достаточно длительное пребывание КА у каждого массивного тела. Кроме того, использование символьной динамики и анализа финальных движений задачи трех тел позволило получить доказательство существования траекторий захвата с бесконечным временем пребывания в окрестности одного из тел [7]. Тем не менее эти результаты получены без интегрирования системы уравнений движения и определения параметров орбит, в связи с чем невозможно на их основе проектировать соответствующие траектории. Кроме того, с практической точки зрения КА не обязательно навсегда оставаться на орбите захвата, достаточно находиться на ней лишь некоторое конечное время.

Значительным шагом в проектировании траекторий временного захвата стало их рассмотрение в рамках четырех тел с учетом влияния Солнца, за счет которого оказалось возможным реализовать перелет по траектории с промежуточным оскулирующим апогеем, сопоставимым с размерами грависферы Земли, т.е. появление WSB-траекторий (*англ.* Weak Stability Boundary), предложенных Е.А. Белбруно [8, 9] и исследованных В.В. Ивашкиным [10–13].

Следуя работам Егорова [2, 4], Бельбруно [9] и Ивашкина [11] будем называть захватом пребывание в грависфере Луны КА, попавшего туда от Земли или из внешней части пространства, при отрицательных значениях селеноцентрической энергии. Соответствующий период времени определяется следующим образом:

$$h(t) = v^2(t) - \frac{2\mu}{r(t)} \leq 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (1)$$

где h – селеноцентрическая энергия; r , v – положение и скорость относительно Луны; μ – гравитационная постоянная Луны; t_1 – момент гравитационного захвата; t_2 – момент гравитационного освобождения.

Еще одним способом повышения эффективности лунных миссий представляется использование для их реализации электроракетных двигателей установок (ЭРДУ) с высоким удельным импульсом тяги, что позволяет существенно сократить затраты топлива на перелет. Использование ЭРДУ приводит к значительному увеличению длительности перелета к Луне, поскольку величина тяги ЭРДУ мала по сравнению с химическими ракетными двигателями. Это также означает, что требуемое число витков может исчисляться десятками и сотнями. Многовитковая задача становится многоэкстремальной – для фиксированной длительности перелета существует множество локально-оптимальных решений с разным числом витков. Эта особенность затрудняет обеспечение

вычислительной устойчивости применяемых численных методов оптимизации.

Одним из вариантов решения задачи проектирования многовитковых перелетов к Луне с малой тягой служит использование приближенных: локально-оптимальных законов управления на основе функций Ляпунова [14, 15] и квазиоптимального управления с обратной связью [16, 17].

Перелет с малой тягой трудно сочетать с WSB-траекторией ввиду необходимости достижения больших значений константы энергии (большой полуоси) и фактора, что траектории перелета с малой тягой характеризуются медленным изменением константы энергии. Поэтому типичная траектория перелета между околоземной и окололунной орбитой с малой тягой входит в сферу Хилла Луны через горловину в окрестности точки либрации L_1 . Чем меньше величина реактивного ускорения, тем уже должна быть горловина константы Якоби в окрестности точки либрации. Целесообразным оказывается включение в траекторию перелета движения по инвариантным многообразиям точек либрации и гало-орбит [17–20], на основе которых тоже можно получить траектории временного захвата.

WSB-траектория перелета на орбиту временного захвата, предложенная Бельбруно [9], была впервые реализована на КА *Hiten* [21]. К настоящему времени успешно реализован перелет на окололунную орбиту КА с ЭРДУ *SMART-1* [22]. Низкоэнергетическая траектория перелета использовалась для выведения на гало-орбиту вокруг точки либрации L_2 спутника-ретранслятора “*Цюэцяо*” (*пиньинь* Qüèqiáo, “сорочий мост”) [23]. Планируется использовать ЭРДУ для выведения базового модуля лунной орбитальной станции [24], рассматриваются варианты использования КА и буксиров с ЭРДУ для обеспечения лунной пилотируемой программы [25–27].

Основной проблемой проектирования низкоэнергетических траекторий на основе орбит временного захвата считается получение этих орбит. Рассматриваются различные методы проектирования орбит временного захвата, в целом преобладают два подхода: первый заключается в определении двух- или трехимпульсного перелета для подходящего сближения с Луной [2, 4, 27–29], второй основан на подборе самой орбиты захвата относительно Луны [10, 11, 30]. Для проектирования перелетов с малой тягой эти варианты имеют недостаток: при их использовании энергетические характеристики траектории в момент транзита не представляют собой выбираемые параметры.

В данной работе предлагается метод определения орбиты захвата на основе анализа транзитных орбит, порожденных инвариантными многообразиями точек либрации L_1 и L_2 . Транзитные траектории такого типа позволяют получить не только орбиты долговременного захвата, но и отлетные траектории для межпланетных траекторий.

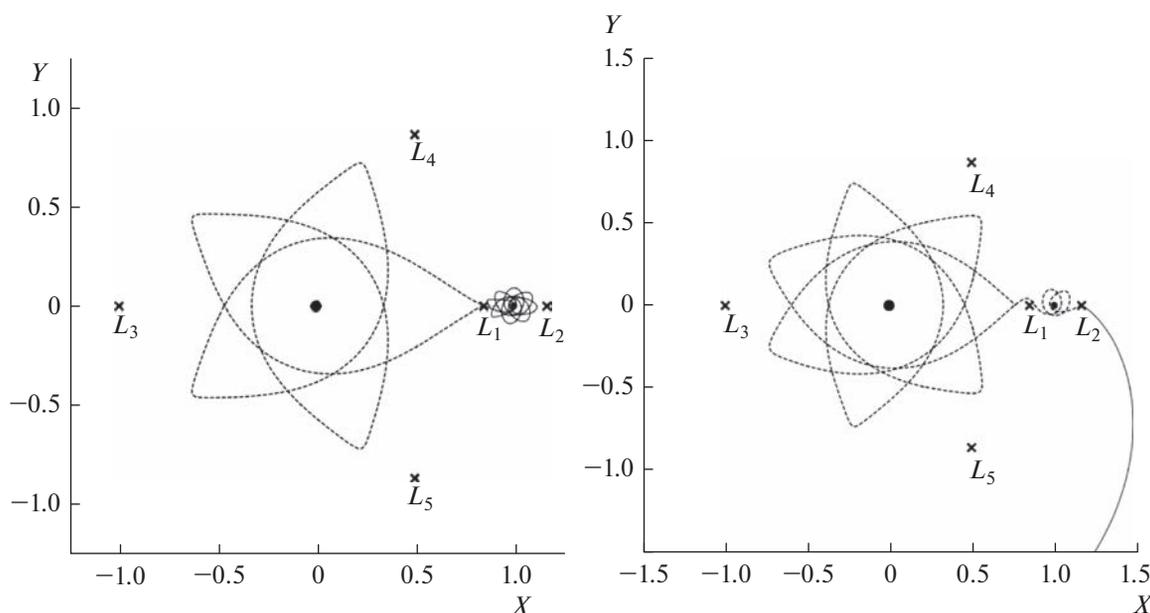


Рис. 1. Устойчивое (прерывистая линия) и неустойчивое (сплошная линия) многообразие у точек либрации L_1 (слева) и L_2 (справа).

ОГРАНИЧЕННАЯ КРУГОВАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Для определения основных эффектов, влияющих на движение КА в системе Земля–Луна, рассмотрим математическую постановку ограниченной круговой задачи трех тел (ОКЗТТ).

Пусть три материальных точки (тела) P_1 , P_2 и P_3 движутся под действием сил взаимного притяжения. Тела P_1 и P_2 имеют массы m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), а масса тела P_3 пренебрежимо мала и не влияет на движение P_1 и P_2 . То есть, тела P_1 и P_2 движутся вокруг их общего центра масс, и в случае, когда они движутся по круговым орбитам, задача называется ограниченной круговой задачей трех тел. Запишем движение третьего тела в безразмерной синодической барицентрической системе координат. Пусть единицей длины будет расстояние между P_1 и P_2 , единицей массы – сумма m_1 и m_2 , а единицу времени выберем так, чтобы период обращения этих точек вокруг их центра масс был равен 2π . Направим ось x вдоль вектора от P_1 к P_2 , ось z – по вектору кинетического момента этих точек, а ось y дополняет систему до правой тройки. Тогда уравнения движения P_3 можно записать в виде [31–33]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \\ \ddot{z} = U_z, \end{cases} \quad (2)$$

где $U = (x^2 + y^2)/2 + (1 - \mu)/r_1 + \mu/r_2$, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$.

Точки либрации выступают стационарными решениями системы (2). Кроме того, система уравнений имеет один первый интеграл, найденный Якоби, который задает кривые нулевой скорости ($v = 0$), ограничивающие область возможных движений точки P_3 :

$$v^2 = 2U - C_J, \quad (3)$$

где C_J – константа Якоби; v – скорость.

Уравнения (2) имеют пять стационарных решений, называемых точками либрации. Так, Л. Эйлер заметил, что существует три равновесных решения: L_1 , L_2 и L_3 , которые лежат на прямой, проходящей через P_1 и P_2 , их называют прямолинейными точками либрации. Позднее Ж.Л. Лагранж обнаружил, что существует еще два частных решения, соответствующих движениям, для которых P_1 , P_2 и P_3 образуют равносторонний треугольник – это треугольные точки либрации L_4 и L_5 . Расположение точек либрации во вращающейся системе координат приведено на рис. 1.

Прямолинейные и треугольные точки либрации имеют разные свойства, в данной работе нас интересуют точки L_1 и L_2 . Для анализа движения в их окрестности рассмотрим линеаризованную модель, которую можно получить из системы (2), перенеся начало координат в соответствующую точку либрации. После преобразований линейную модель движения можно представить в следующем виде [31, 32, 35]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (2c_2 + 1)x = 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - (1 - c_2)y = 0, \\ \ddot{z} + c_2z = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где константа c_2 определяется для одной из коллинеарных точек либрации следующим образом

$$c_2 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^3} \left(\mu + \frac{(1-\mu)\gamma^3}{(1 \pm \gamma)^3} \right) & \text{для } L_1^- \text{ и } L_2^+, \\ \frac{1}{\gamma^3} \left(1 - \mu + \frac{\mu\gamma^3}{(1 + \gamma)^3} \right) & \text{для } L_3, \end{cases}$$

а константа γ связана с координатой x точки либрации

$$x_{L_1} = 1 - \mu - \gamma, \quad x_{L_2} = 1 - \mu + \gamma, \quad x_{L_3} = -\mu - \gamma.$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет корни

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}{2}} = \pm s, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{c_2 - 2 - \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}{2}} = \pm \omega_p i, \\ \lambda_{5,6} &= \pm \sqrt{c_2} = \pm \omega_v i. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

А решение системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{st} + \beta e^{-st} + A_x \cos(\omega_p t + \varphi_p), \\ y(t) = k_1 \alpha e^{st} - k_1 \beta e^{-st} - k_2 A_x \sin(\omega_p t + \varphi_p), \\ z(t) = A_z \cos(\omega_v t + \varphi_v), \end{cases} \quad (6)$$

где $\alpha, \beta, A_x, A_z, \varphi_p, \varphi_v$ – константы интегрирования, зависящие от начальных условий; а коэффициенты k_1 и k_2 определяются следующим образом

$$k_1 = \frac{s^2 - 1 - 2c_2}{2s}, \quad k_2 = \frac{\omega_p^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_p}. \quad (7)$$

Исходя из вида решения линеаризованной системы (6) в малой окрестности коллинеарных точек либрации можно выделить следующие типы движений [35]:

- плоские орбиты Ляпунова, при $A_x \neq 0, A_z = \alpha = \beta = 0$;
- вертикальные орбиты Ляпунова, при $A_z \neq 0, A_x = \alpha = \beta = 0$;
- квазипериодические орбиты, при $A_x \neq 0, A_z \neq 0, \alpha = \beta = 0$;
- асимптотические траектории, при $\alpha \neq \beta, \alpha\beta = 0$;
- транзитные траектории, при $\alpha\beta < 0$;
- нетранзитные траектории, при $\alpha\beta > 0$.

Кроме того, существуют два множества асимптотических траекторий, связанных с точками либрации: устойчивые и неустойчивые многообразия. Траектории устойчивого многообразия стремятся к точке либрации при $t \rightarrow \infty$, в то время как траектории неустойчивого многообразия стремятся к

точке либрации при $t \rightarrow -\infty$. Наличие таких траекторий для точек либрации следует из присутствия положительного и отрицательного собственного значения в решении линеаризованной системы (5).

Для определения устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий точек либрации необходимо сделать малый сдвиг из нее в направлении соответствующего собственного вектора и проинтегрировать систему в обратном и прямом времени:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{v}_L \end{pmatrix} + \varepsilon \mathbf{\Lambda}_s, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{v}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{v}_L \end{pmatrix} + \varepsilon \mathbf{\Lambda}_u, \quad (8)$$

где $(\mathbf{r}_L, \mathbf{v}_L)$ – координаты и скорость точки либрации; $\mathbf{\Lambda}_s$ – собственный вектор; соответствующий отрицательному собственному значению (устойчивому многообразию); $\mathbf{\Lambda}_u$ – собственный вектор, соответствующий положительному собственному значению (неустойчивому многообразию); ε – малая вариация.

Вид устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий для точек либрации L_1 и L_2 системы Земля–Луна в ОКЗТТ приведен на рис. 1.

За счет малости сдвига устойчивое и неустойчивое многообразие в совокупности формируют транзитную траекторию с пролетом точки либрации с околонулевой скоростью.

ОГРАНИЧЕННАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Ограниченная круговая задача трех тел позволяет получить представление о многих значимых эффектах движения КА в системе Земля–Луна, однако она представляет собой идеализированную модель. Поскольку орбита Луны является эллиптической с эксцентриситетом 0.0549, отметим ряд важных качественных отличий, влияющих на движение КА в окрестности точек либрации.

Уравнения (2) в барицентрической вращающейся системе координат после введения пульсирующей системы (связанной с непостоянством расстояния между массивными телами) могут быть записаны в следующем виде [31, 32]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} U_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} U_y, \\ \ddot{z} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} U_z, \end{cases} \quad (9)$$

где функция U совпадает с аналогичной для системы (2), e, ν – эксцентриситет и истинная аномалия орбиты меньшего из массивных тел (в данном случае Луны).

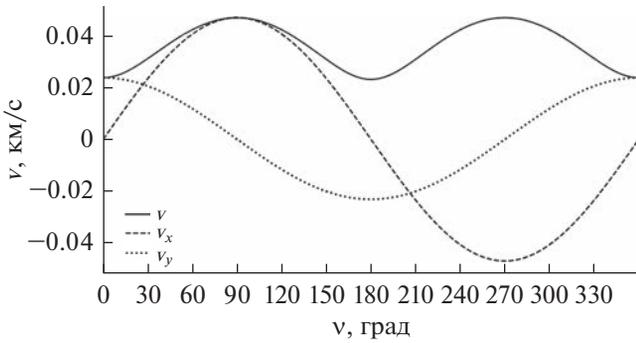


Рис. 2. Скорость и компоненты скорости оскулирующей точки либрации L_1 .

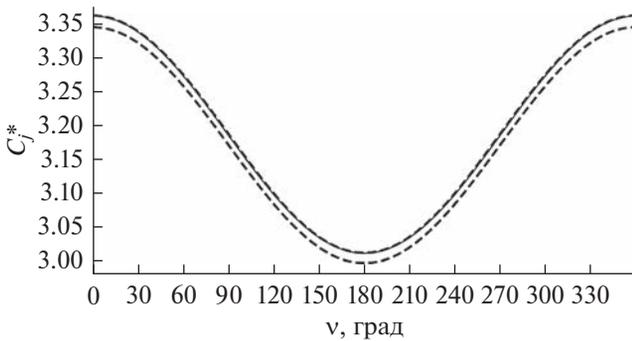


Рис. 3. Константа Якоби для точек либрации L_1 (верхняя прерывистая линия), L_2 (нижняя прерывистая линия) и оскулирующей точки либрации L_1 (сплошная линия).

Очевидно, что система (9) не имеет стационарных решений, и обнуление правых частей возможно только при конкретном значении истинной аномалии, а значит и расстояния между массивными телами. Таким образом, можно говорить только о мгновенном положении точки либрации в пульсирующих координатах [31, 32]. Тогда точка либрации становится исключительно геометрическим понятием, вообще говоря, слабо связанным с динамикой эллиптической задачи трех тел. Однако остаются интересными траектории в окрестности оскулирующей точки либрации [36, 38, 39].

Кроме того, появление пульсации координат и зависимость потенциальной функции U от истинной аномалии препятствует получению интеграла Якоби в эллиптической задаче. Можно записать интегральное выражение, аналогичное интегралу Якоби (3) [32, 37]:

$$\frac{v^2(t)}{2} - U(t) = \frac{v^2(t_0)}{2} - U(t_0) - \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{\partial U}{\partial v} dv. \quad (10)$$

Следуя исследованию [32] и рассматривая достаточно малый интервал времени, в течение которого основные тела описывают достаточно малые дуги, кривые нулевой скорости приближенно можно получить из уравнения

$$2U - C_J(1 + e \cos v) = v^2. \quad (11)$$

Это соотношение выполняется, если в уравнении (10) опущен интеграл, что приводит к пульсации кривых нулевой скорости, каждому моменту времени (или при каждом значении истинной аномалии) соответствует своя кривая нулевой скорости. Или, что то же самое, происходит перенормировка кривых нулевой скорости. Изменение текущего значения константы Якоби можно записать через константу Якоби из ОКЗТТ (3) в виде:

$$C_J^* = C_J(1 + e \cos v). \quad (12)$$

Поскольку оскулирующая точка либрации не является стационарным решением, она обладает скоростью во вращающейся системе, но при движении Луны сохраняется геометрическая пропорция ее положения. Следовательно, скорость оскулирующей точки либрации пропорциональна скорости Луны, поэтому траектория движения оскулирующей точки либрации не является решением системы (9). Так как вращающаяся система координат имеет местную круговую скорость, с учетом ориентации осей скорость точки либрации во вращающейся системе координат можно определить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_x^{L_i} &= x_{L_i} \sqrt{\frac{\mu_E + \mu_M}{p}} \sin v, \\ v_y^{L_i} &= x_{L_i} \sqrt{\frac{\mu_E + \mu_M}{p}} (1 + e \cos v - \sqrt{1 + e \cos v}), \\ v_z^{L_i} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где p – фокальный параметр орбиты Луны.

Таким образом, оскулирующая точка либрации имеет скорость, отличную от нуля, и это значит, что в ее окрестности всегда есть небольшая горловина, соединяющая области вокруг Земли и Луны, через которую может быть реализована транзитная траектория. Изменение компонент скорости и величина скорости оскулирующей точки либрации L_1 показаны на рис. 2. На рис. 3 приведены значения константы Якоби для точек либрации L_1, L_2 , вычисленных по формуле (12), и оскулирующей точки либрации как функции истинной аномалии (11) с учетом скорости (13). Как видно, значение для оскулирующей точки либрации всегда немного меньше значения для L_1 , что и демонстрирует наличие горловины для перелета.

Однако для совершения транзита недостаточно одного подходящего значения константы Якоби, также необходима подходящая ориентация вектора скорости. Как видно из рис. 2 обе ненулевые компоненты вектора скорости меняют свое направление в зависимости от значения истинной аномалии. При этом очевидно, что для совершения транзита в первую очередь интересно направление вектора скорости, а не его величина.

Для определения ориентации скорости, обеспечивающей транзит через точку либрации, проанализируем, каким коэффициентам решения

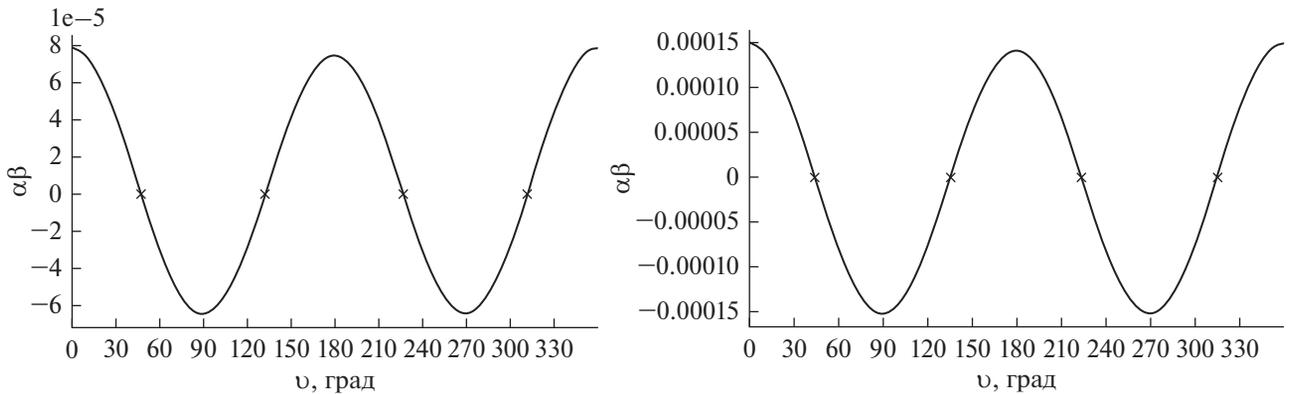


Рис. 4. Произведение $\alpha\beta$ для точек L_1 (слева) и L_2 (справа).

линеаризованной системы (6) она соответствует. Продифференцируем уравнения (6) для получения соотношения для скоростей, положим $t = 0$ и исключим периодические слагаемые. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант α и β :

$$\begin{pmatrix} s & -s \\ k_1 s & k_1 s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^{L_i} \\ v_y^{L_i} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

График зависимости произведения $\alpha\beta$ от истинной аномалии Луны для точек L_1 и L_2 приведен на рис. 4. Как видно, транзит возможен только в определенных границах истинной аномалии, причем окрестности апоцентра и перигея исключены из них. Диапазоны значений истинной аномалии, допускающих транзит, находятся в окрестности 90° и -90° по истинной аномалии, что соответствует области максимальных значений компоненты v_x в барицентрической системе координат (радиальной в орбитальной). При этом в этих областях транзит имеет различное направление, так для L_1 в диапазоне $47.64^\circ \dots 132.90^\circ$ перелет происходит от Луны к Земле, а при $-47.64^\circ \dots -132.90^\circ$ – от Земли к Луне. При этом склонение скорости θ , вычисленное во вращающейся системе координат $\text{tg}(\theta) = v_x^{L_i} / v_y^{L_i}$, в этих диапазонах меняется от 65.29° до 114.71° и от -65.29° до -114.71° соответственно. Для L_2 истинная аномалия, подходящая для транзита от Луны во внешнюю часть пространства, изменяется от -44.53° до -136.03° , склонение вектора скорости при этом принимает значения от -63.05° до -117.40° . И для транзита к Луне из внешней области пространства наблюдается симметричная картина: для истинной аномалии от 44.53° до 136.03° , и склонение скорости от 63.05° до 117.40° .

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Для использования этих решений в рамках возмущенной эфемеридной модели необходимо сделать переход из вращающейся системы координат,

связанной с барицентром системы или точкой либрации, в неподвижную экваториальную гелиоцентрическую или селеноцентрическую систему координат, связанную с эпохой J2000.

Введем мгновенную синодическую систему координат, связанную с текущим положением и скоростью Луны ($\mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M$) в геоцентрической системе координат J2000. Для этого запишем единичные векторы этой системы в системе J2000 ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$):

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M}{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x. \quad (15)$$

И мгновенную угловую скорость вращения Луны:

$$\dot{\vartheta} = \frac{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}{|\mathbf{r}_M|^2}. \quad (16)$$

После этого положение и скорость КА относительно Земли в инерциальной системе координат можно получить из координат и скорости в синодической системе относительно Земли в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{J2000} \\ \mathbf{v}_{J2000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\vartheta} \mathbf{e}_y & -\dot{\vartheta} \mathbf{e}_x & 0 & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{r}_M| \cdot \mathbf{r} \\ |\mathbf{v}_M| \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где (\mathbf{r}, \mathbf{v}) – безразмерные положение и скорость КА в синодической системе координат.

Преобразование (17) соответствуют введению координат Нехвилла в ограниченной эллиптической задаче трех тел [31, 32].

Расчеты будем проводить с учетом возмущения от Солнца в системе координат J2000 связанной с Землей, в этом случае уравнения, описывающие пассивные движения КА имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & -\frac{\mu_E \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \mu_S \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3} + \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} \right) - \\ & - \mu_M \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^3} + \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|^3} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где μ_E, μ_S, μ_M – гравитационные параметры Земли, Солнца и Луны; $\mathbf{a}_S, \mathbf{r}_M$ – геоцентрические радиус-векторы Солнца и Луны соответственно. Векторы положения и скорости Солнца и Луны вычисляются с помощью эфемеридного обеспечения JPL (*англ.* Jet Propulsion Laboratory NASA) DE405.

Для анализа траектории в окрестности Луны и расчета соответствующих оскулирующих кеплеровских элементов будем использовать селеноцентрическую экваториальную систему координат J2000. Для перехода к ней воспользуемся следующей матрицей [34]:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) & \cos\alpha(t) & 0 \\ -\cos\alpha(t)\sin\delta(t) & -\sin\alpha(t)\sin\delta(t) & \cos\delta(t) \\ \cos\alpha(t)\cos\delta(t) & \sin\alpha(t)\cos\delta(t) & \sin\delta(t) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $\alpha(t), \delta(t)$ – координаты северного полюса Луны в момент времени t .

Вычисления координат северного полюса Луны проводились в соответствии с рекомендациями Международного астрономического союза (*англ.* International Astronomical Union – IAU), представленными в публикации [34].

Матрица перехода (19) связывает геоэваториальную $\mathbf{r}_E(t)$ и селеноэваториальную $\mathbf{r}_M(t)$ системы координат следующим образом:

$$\mathbf{r}_M(t) = \mathbf{Q}\mathbf{r}_E(t), \quad \mathbf{r}_E(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{r}_M(t), \quad (20)$$

при этом оба вектора $\mathbf{r}_E(t)$ и $\mathbf{r}_M(t)$ селеноцентрические и отличаются только ориентацией.

Очевидно, что при переходе от эллиптической задачи трех тел к возмущенной модели четырех тел произойдет значительное возмущение полученных решений. В частности, интервалы захвата по оскулирующей истинной аномалии теряют симметрию, начинают двигаться и меняют свое значение примерно в пределах 10° каждый синодический период Луны.

Рассматриваемые факторы от возмущений орбиты Луны и воздействия Солнца имеют независимый характер и приводят к следующим эффектам. В целом в возмущенной задаче трех тел Земля–Луна – КА при использовании эфемеридной модели движения наблюдается подобие транзитных траекторий на каждом синодическом периоде Луны. В частности, удается определить траекторию временного захвата с длительностью пребывания у Луны порядка 1000 сут в окрестности значений оскулирующей истинной аномалии $260^\circ \dots 280^\circ$. Воздействие Солнца в качестве основного эффекта приводит к осцилляции эксцентриситета, что при существенных значениях большой полуоси порождает WSB-траектории. Кроме того, нарушается подобие транзитных траекторий между соседними синодическими периодами Луны, так как появляется еще одно близкое к периодическому возмущение. При этом указанные траектории длительного захвата сохраняются, но

типичная длительность сокращается до ~ 100 сут. Однако внутри года остаются траектории захвата с длительностью более 1000 сут.

Например, в 2026 г. при пролете 3.VII.2026 в 15.05.50 (юлианская дата 2461256.12905) точки либрации L_1 по транзитной траектории временного захвата, образованной ее инвариантными многообразиями, длительность пребывания у Луны превышает 1400 сут. Кеплеровская энергия относительно Луны и расстояние до Луны приведены на рис. 5 и рис. 6.

На рис. 7 и 8 представлены изменения большой полуоси, эксцентриситета и наклона в экваториальных гео- и селеноцентрических системах координат J2000. Можно отметить, что выбором даты пролета точки либрации удастся получить различные наклонение и расстояние пролета на селеноцентрическом участке. Наклонение на гелиоцентрическом участке практически не меняется при вариации даты пролета точки либрации и определяется оскулирующим наклоном орбиты Луны.

Кроме формирования орбиты длительного захвата транзитные траектории в окрестности точек либрации представляют интерес для формирования отлетной от Земли траектории с выходом на гелиоцентрическую траекторию. Хотя такие траектории в возмущенной модели можно получить и на основе многообразий L_1 , предложенная методика наиболее полно описывает решения, полученные на основе многообразий L_2 .

Наиболее эффективные по скорости пересечения грависферы Земли отлетные траектории формируются при совместном воздействии эффектов трех и четырех тел: перехода неустойчивого многообразия L_2 в WSB-траекторию. Анализ совместного влияния Луны и Солнца на отлетную траекторию весьма затруднен. Численные расчеты транзитных траекторий у L_2 позволяют подбором даты пролета получить несколько таких траекторий за год. Скорость при пересечении грависферы Земли на таких траекториях составляет порядка 0.7 км/с. Дополнительно повысить эту скорость может возврат к Земле после сближения с границей грависферы и совершение гравитационного маневра у Луны. После гравитационного маневра рассматриваемые траектории увеличивают скорость на грависфере до 1.3 км/с. Направление скорости при пересечении грависферы может как увеличивать скорость КА относительно Солнца по сравнению со скоростью Земли, так и уменьшать ее в зависимости от фазы Луны и Солнца. Такую траекторию удалось получить для пролета L_2 10.V.2026 в 11.34.16, она изображена на рис. 9 и рис. 10 в геоцентрической неподвижной системе координат, за единицу расстояния взято среднее расстояние от Земли до Луны. На рис. 11 приведены геоцентрические оскулирующие орбитальные элементы отлетной траектории (боль-

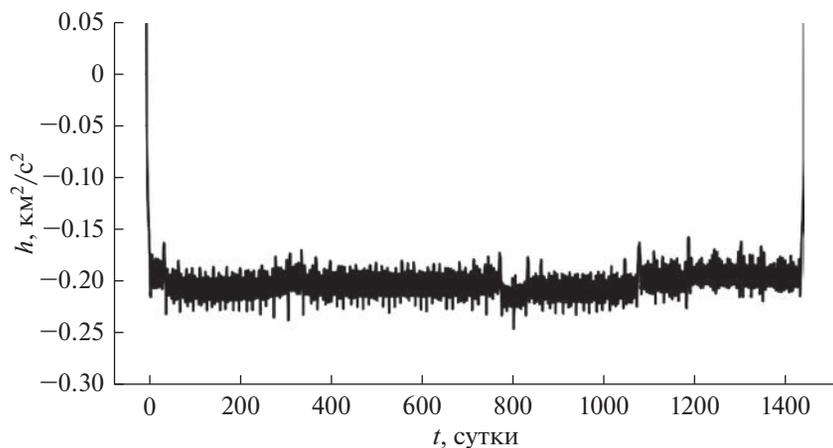


Рис. 5. Селеноцентрическая кеплеровская энергия на траектории временного захвата.

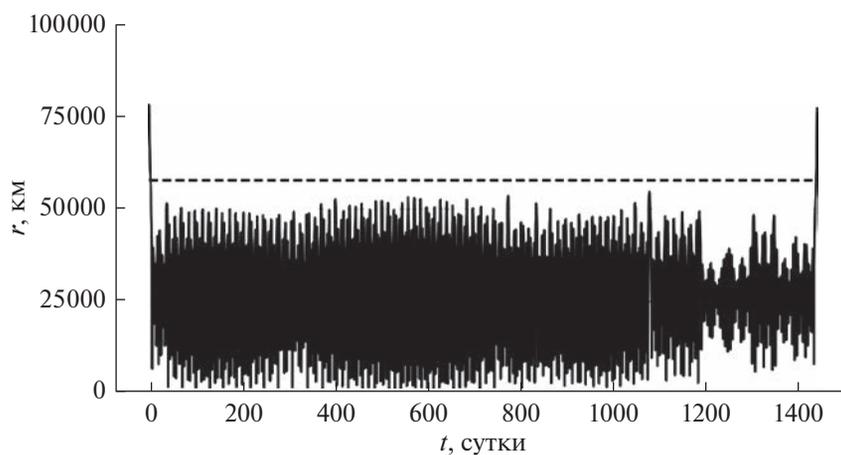


Рис. 6. Расстояние до Луны на траектории временного захвата.

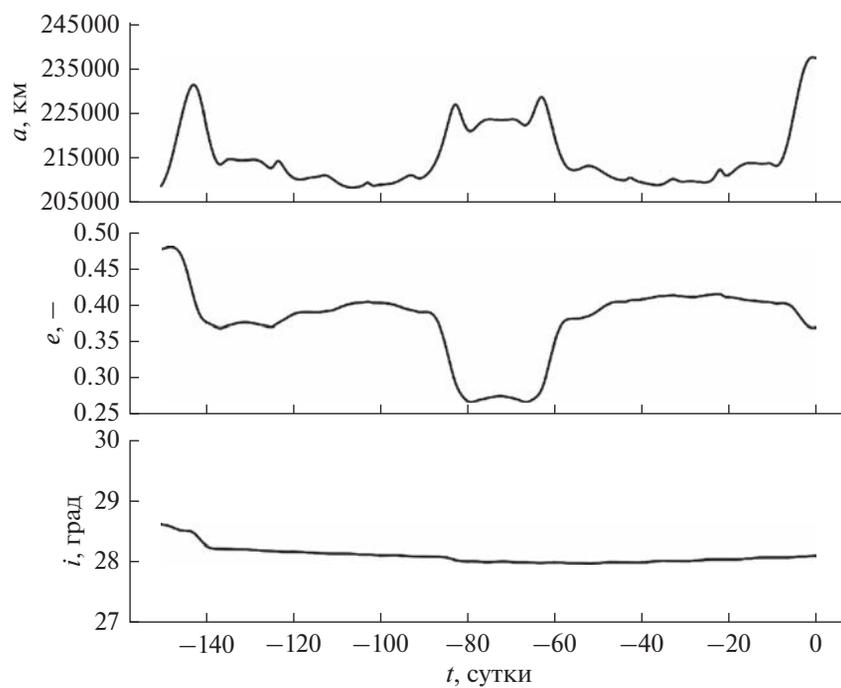


Рис. 7. Оскулирующие элементы околоземного участка транзитной траектории.

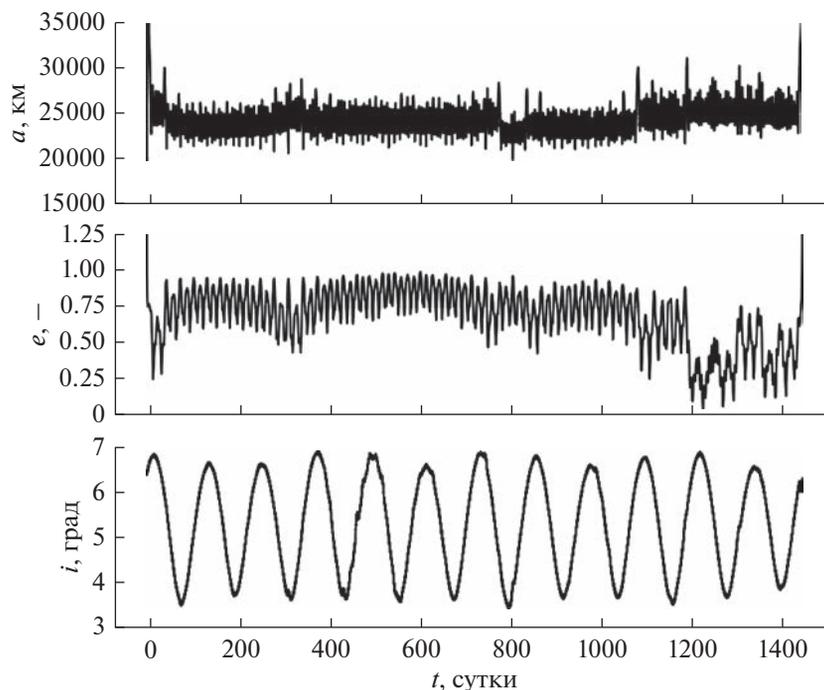


Рис. 8. Оскулирующие элементы окололунного участка траектории временного захвата.

шая полуось, эксцентриситет и наклонение). Первое сближение с Луной происходит через окрестность L_1 , и длится 18.3 сут, после чего происходит выход во внешнюю часть пространства

через L_2 , минимальное сближение с Луной происходит на расстоянии 1913 км. После пролета Луны под воздействием Солнца реализуется WSB-маневр длительностью 88.6 сут, за время которого эксцентриситет меняется с 0.47 до 0.87, а большая полуось возрастает в 2.1 раза. Следующий за этим гравитационный маневр переводит траекторию в гиперболу и через 11 сут происходит выход за пределы грависферы Земли. При совершении гравитационного маневра пролет Луны происходит с минимальным радиусом 9728 км, а время пребывания в грависфере Луны составляет 1.56 сут.

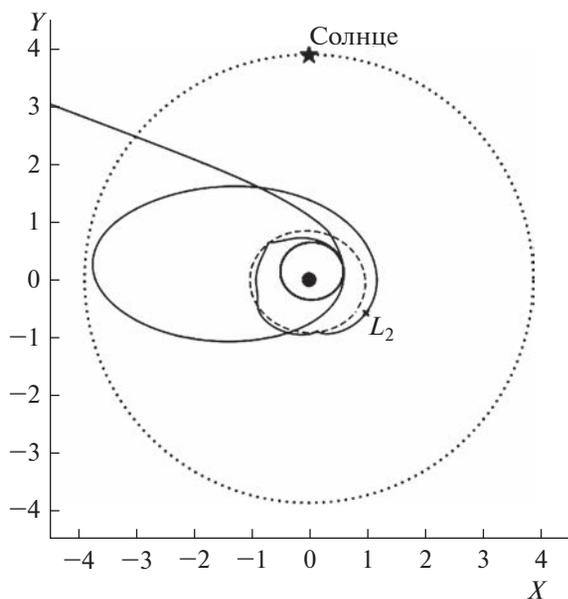


Рис. 9. Отлетная транзитная траектория в неподвижной геоцентрической системе (сплошная линия), орбита Луны (прерывистая линия) и грависфера Земли (точки) с отмеченным направлением на Солнце в момент пролета L_2 .

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Недавно авторами был предложен новый подход к оптимизации траекторий малой тяги с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета для оптимизации межорбитальных перелетов [40–42]. Отличительной особенностью предложенного подхода представляется использование новой независимой угловой переменной — вспомогательной долготы, которая в невозмущенном движении совпадает с истинной долготой. Этот подход позволяет эффективно оптимизировать время перелета при фиксированной угловой дальности.

Рассмотрим задачу оптимизации возмущенной многовитковой траектории перелета с малой тягой на устойчивое многообразие точек либрации L_1 и L_2 для реализации полученных ранее траекторий и максимизирующую конечную массу КА с двигате-

лем ограниченной тяги. Будем использовать модифицированные равноденственные элементы и вспомогательную долготу K , совпадающую с истинной долготой в невозмущенном движении, в качестве независимой переменной так, как это представлено в работах [41–43]. Уравнения возмущенного движения КА с малой тягой при использовании вспомогательной долготы K имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dK} = \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t, \\ \frac{de_x}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^2} \left[\sin La_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^2} \left[-\cos La_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{di_x}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos La_n, \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin La_n, \\ \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi a_n, \quad \frac{dm}{dK} = -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{T}{c}, \\ \frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2, \end{cases} \quad (21)$$

где $e_x = e \cos(\omega + \Omega)$; $e_y = e \sin(\omega + \Omega)$; $i_x = \text{tg}(i/2) \cos \Omega$; $i_y = \text{tg}(i/2) \sin \Omega$; $L = \nu + \omega + \Omega$; $s^2 = i_x^2 + i_y^2$; $q = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$; $\xi = i_x \sin L - i_y \cos L$; $a_t = \delta(T/m) \cos \vartheta \cos \psi + a_{pt}$; $a_r = \delta(T/m) \sin \vartheta \cos \psi + a_{pr}$; $a_n = \delta(T/m) \sin \psi + a_{pn}$; T – тяга; c – скорость истечения; m – масса, δ – функция дросселирования; ϑ – тангаж; ψ – рысканье; a_{pt} , a_{pr} , a_{pn} – трансверсальная, радиальная и бинормальная компоненты возмущающего ускорения соответственно; p , e , ω , i , Ω – кеплеровские орбитальные элементы (фокальный параметр, эксцентриситет, аргумент перигея, наклонение, долгота восходящего узла); $L = K + L_K$ – истинная долгота; ν – истинная аномалия, μ – гравитационный параметр.

Рассмотрим перелет между двумя точками: положением на начальной орбите и заданной точкой в окрестности L_1 . Известны начальная и конечная истинная долгота L_0 и L_f , и соответственно угловая дальность перелета $\Delta L = L_f - L_0$. Время перелета не задано, известно время прибытия в конечную точку $t(K_f) = t_{L_1}$.

Функционал, минимизирующий затраты топлива при переходе к K , имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{T}{c} dt = \int_{K_0}^{K_f} \delta \frac{T}{c} \frac{1}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK. \quad (22)$$

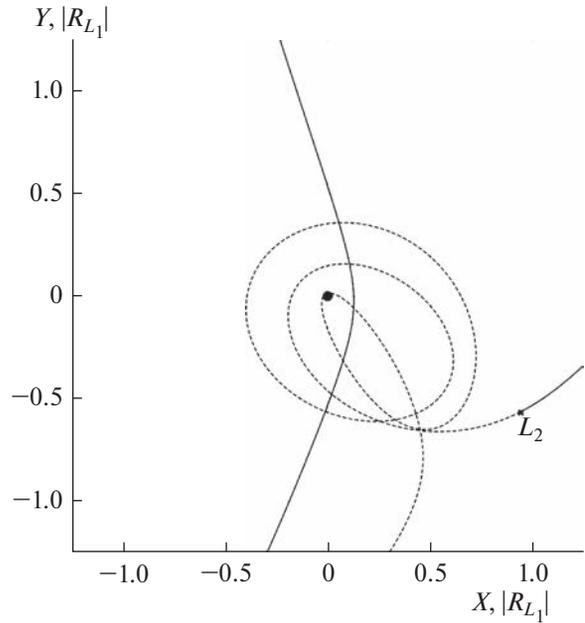


Рис. 10. Отлетная транзитная траектория в неподвижной селеноцентрической системе: устойчивое многообразиие (прерывистая линия) и неустойчивое многообразиие (сплошная линия) L_2 .

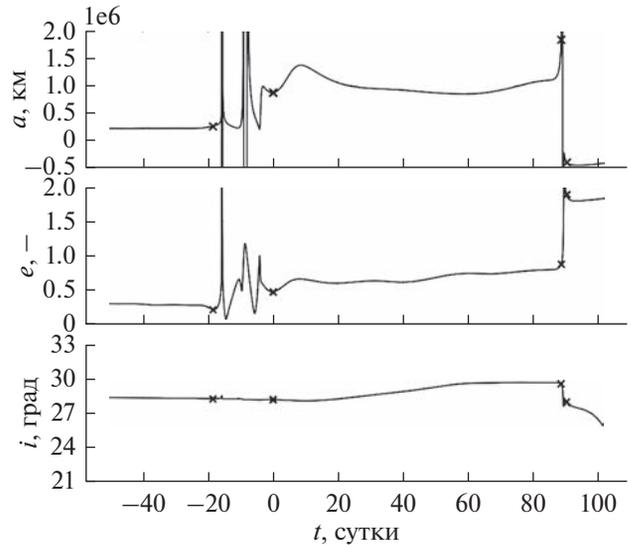


Рис. 11. Оскулирующие элементы отлетной транзитной траектория относительно Земли, маркерами отмечено пересечение грависферы Луны.

Функция Понтрягина рассматриваемой задачи имеет вид:

$$H = H_T + H_p + H_t, \quad (23)$$

где H_T , H_p , H_t – части функции Понтрягина, зависящие от тяги, возмущающих ускорений и сопряженной к времени переменной p_t соответственно:

$$\begin{aligned}
H_T &= \delta T k_1 \left(\frac{k_2}{m} (A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_t \cos \vartheta \cos \psi + \right. \\
&\quad \left. + A_n \sin \psi) - \frac{p_m + 1}{c} \right), \\
H_p &= k_1 k_2 (A_r a_{pr} + A_t a_{pt} + A_n a_{pn}), \\
H_t &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 p_t, \\
A_t &= 2pp_p + [(q+1) \cos L + e_x] p_{ex} + \\
&\quad + [(q+1) \sin L + e_y] p_{ey}, \\
A_r &= q(\sin L p_{ex} - \cos L p_{ey}), \\
A_n &= \xi(-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK}) + \\
&\quad + \frac{s^2}{2} (\cos L p_{ix} + \sin L p_{iy}),
\end{aligned}$$

$p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m$ – сопряженные переменные к $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K$ и m соответственно.

Максимизируя выражение (23) по управлению ϑ, ψ и δ , получим следующие выражения для оптимального управления:

$$\left. \begin{aligned}
\sin \vartheta &= A_r / A_{rt}, & \cos \vartheta &= A_t / A_{rt}, \\
\sin \psi &= A_n / A, & \cos \psi &= A_{rt} / A, \\
\delta &= (1 + \text{sign} S) / 2, & S \neq 0, \delta \in [0; 1], & S = 0;
\end{aligned} \right\} (24)$$

где $S = \frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m}{c}$ – функция переключения;
 $A = \sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}$.

В итоге краевая задача принципа максимума состоит из системы обыкновенных дифференциальных уравнений оптимального движения

$$\frac{dx}{dK} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (25)$$

с краевыми условиями для геоцентрического участка траектории, которые с учетом возможности установить $K_0 = 0$ без потери общности можно записать в виде

$$\begin{aligned}
L_K(0) &= L_0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), \quad m(0) = m_0, \\
p_t(0) &= 0, \quad p_{LK}(0) + H(0) = 0,
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
L_K(K_f) + K_f &= L_f, \quad \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), \\
t(K_f) &= t_{L1}, \quad p_m(K_f) = 0,
\end{aligned} \quad (27)$$

где $\mathbf{x}^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t)$ – фазовый вектор; $\mathbf{p}_x^T = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t)$ – вектор сопряженных переменных. Подробный вывод краевой задачи (25)–(27) для задачи перелета между околоземными орбитами приведен в работах [40–42].

В качестве конечной точки перелета для траектории долговременного захвата использовалась точка, определяющая устойчивое многообразие L_1 , вычисляемая с помощью выражения (8). Для отлетной транзитной траектории в качестве конеч-

ной использовалась точка устойчивого многообразия L_2 максимального сближения с L_1 .

Для решения краевой задачи (25)–(27) использовалась методика автоматического дифференцирования на основе комплексно-дуальных чисел [43–45] и последовательного решения задачи с ограниченной мощностью (ОМ-задачи), задачи с минимальной тягой (T_{\min} -задачи) и задачи с ограниченной тягой (ОТ-задачи), представленные в работах [46–48].

ПРИМЕРЫ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА

В качестве примера рассмотрим перелеты в системе Земля–Луна на транзитные траектории в окрестности точек либрации L_1 и L_2 , порожденные их инвариантными многообразиями. При этом работа двигательной установки КА предполагается только на геоцентрическом участке.

Для перелета на транзитную траекторию временного захвата конечным положением выступает точка инициализации устойчивого многообразия L_1 , такой выбор в данной задаче позволяет автоматически оптимизировать выход на устойчивое многообразие в ОТ-задачи. Так как в точке оптимального выхода функция переключения (24) равна нулю, это соответствует выключению тяги и пассивному движению до конечного положения – точки инициализации устойчивого многообразия. Само инвариантное многообразие может быть получено интегрированием уравнений пассивного движения из любой его точки, таким образом, последний пассивный участок становится инвариантным многообразием точки L_1 . Отметим, что этот подход не представляется универсальным и не подходит для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги, так как в них на оптимальном решении отсутствуют участки пассивного движения.

На рис. 12 приведена траектория перелета КА на орбиту захвата с двигателем малой тяги, на рис. 13 приведены соответствующая функция тяги и функция переключения. Для расчетов были приняты следующие характеристики двигательной установки: тяга 0.32 Н, удельный импульс 3500 с., начальная масса 1000 кг. Начальная точка находилась на круговой орбите высотой 35793 км, наклоном 28° , долготой восходящего узла 355° и истинной долготой начальной точки 9.3° . Выбранная ориентация начальной орбиты соответствует оскулирующим элементам точки либрации в конечный момент перелета. Положение на начальной орбите определялось оскулирующей истинной долготой точки либрации и угловой дальностью перелета, которая в приведенном решении составляла 30 витков. В результате решения было получено, что длительность всего перелета к точке либрации с указанной угловой дальностью занимает 86.12 сут, а выход на инвариантное многообразие происходит за 8.06 сут до сближения с

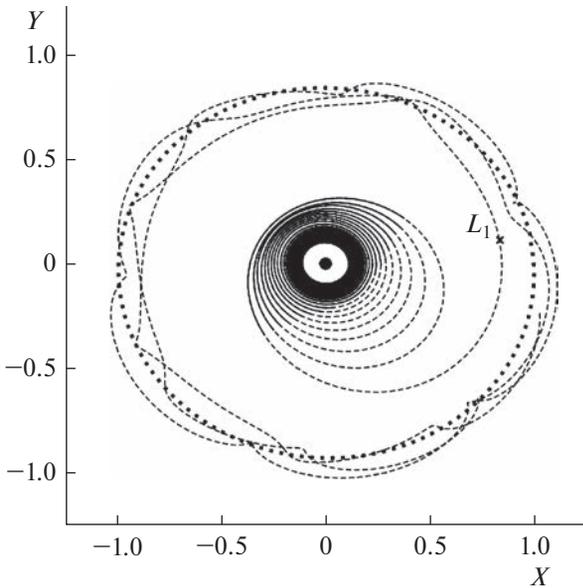


Рис. 12. Траектория перелета на транзитную траекторию временного захвата: активный участок (сплошная линия), пассивный участок (прерывистая линия), орбита Луны (точки).

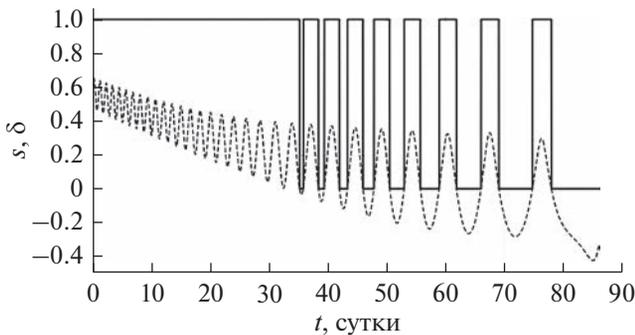


Рис. 13. Функция переключения (прерывистая линия) и функция тяги (сплошная линия) для траектории перелета на транзитную траекторию временного захвата.

точкой либрации. Конечная масса КА составила 953.51 кг.

В качестве второго примера рассматривается перелет на отлетную транзитную траекторию, приведенную на рис. 9 и рис. 10. Для расчетов были приняты следующие характеристики двигательной установки: тяга 0.30 Н, удельный импульс 3500 с, начальная масса 1000 кг. Начальная точка находилась на такой же круговой орбите, что и ранее, с истинной долготой 110.2°. Конечная точка перелета была выбрана как точка минимального сближения с L_1 устойчивого многообразия L_2 . Угловая дальность перелета составляла 30 витков. В результате решения было получено, что длительность всего перелета занимает 80.02 сут, а выход на инвариантное многообразие происходит за 5.82 сут до попадания в конечную точку. Конечная масса КА составила 951.9 кг. Ак-

тивный участок траектории представлен на рис. 14, на рис. 15 приведены соответствующая функция тяги и функция переключения.

Для оценки полученного результата можно отметить, что аналогичная задача набора параболической скорости с помощью трансверсального направления тяги за наименьшее время требует длительности маневра 97.7 сут, при этом конечная масса КА составит 926.25 кг, т.е. необходимая масса топлива в 1.5 раза больше, чем при использовании предложенной траектории, и пересечение грависферы Земли будет происходить с окололунулевой скоростью.

Приведенные численные примеры иллюстрируют возможность использования описанной методики определения транзитных траекторий для получения орбит длительного захвата и отлетных траекторий для межпланетных миссий. Затраты топлива в обоих приведенных случаях оказались эквивалентными и составили всего порядка 5% начальной массы, что обусловлено входом в грависферу Луны в окрестности точки L_1 с близкими значениями константы Якоби в обоих случаях.

Выключение двигателя до достижения конечной точки, выбранной для расчетов, гарантирует, что и на всей остальной траектории движения по инвариантным многообразиям пассивное движение представляется оптимальным. То есть активный участок заканчивается до входа в грависферу Луны. Таким образом, единственными активными маневрами, необходимыми для реализации приведенных примеров, могут быть коррекции, связанные с экстремальными сближениями с Луной, однако они не потребуют больших затрат топлива.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод проектирования транзитных траекторий временного захвата на основе инвариантных многообразий точек либрации, позволяющий осуществлять проектирование низкоэнергетических перелетов космических аппаратов с электроракетными двигательными установками малой тяги к Луне, с длительным пребыванием в ее окрестности, и отлетных траекторий для межпланетных миссий.

Представлены численные результаты оптимизации перелетов в системе Земля–Луна на транзитные траектории в окрестности точек либрации L_1, L_2 . При этом предположение о работе двигательной установки космического аппарата только на геоцентрическом участке траектории при типичных характеристиках электроракетных двигательных установок подтвердилось, так как удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина.

Приведенные примеры показывают, что затраты топлива при перелете в окрестность точки либрации L_1 для формирования орбиты временного захвата и отлетной траектории в межпланет-

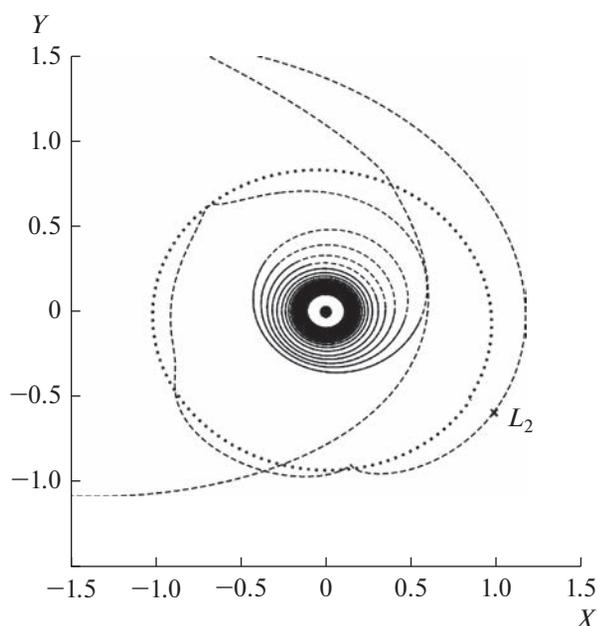


Рис. 14. Траектория перелета на отлетную транзитную траекторию: активный участок (сплошная линия), пассивный участок (прерывистая линия), орбита Луны (точки).

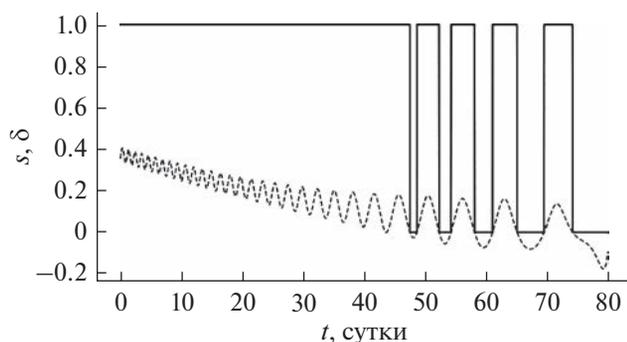


Рис. 15. Функция переключения (прерывистая линия) и функция тяги (сплошная линия) для траектории перелета на отлетную транзитную траекторию.

ное пространство оказались эквивалентными и составили около 5% начальной массы. Предложенный метод определения транзитных траекторий, в частности, позволяет определять наиболее эффективные по скорости пересечения грависферы Земли отлетные траектории, формирующиеся при совместном воздействии эффектов трех и четырех тел: перехода неустойчивого многообразия L_2 в WSB-траекторию. Скорость при пересечении грависферы Земли на таких траекториях составляет порядка 0.7 км/с. Подбором даты пролета точки либрации и фазы Солнца можно получить траектории с возвратом после пролета границы грависферы Земли обратно в окрестности Луны и совершения гравитационного маневра, что также увеличивает скорость выхода КА из грависферы Земли. По сравнению с маневром набора параболической скорости с помощью

трансверсального направления тяги за наименьшее время реализация предложенной траектории отлета от Земли требует на 50% меньше топлива.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206 “Низкоэнергетические межпланетные перелеты с малой тягой” (<https://rscf.ru/project/22-79-10206/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне // Успехи физ. наук. 1957. Т. 43. № 1. С. 73–117.
2. Егоров В.А. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек // Искусственные спутники Земли. 1959. № 3. С. 3–12.
3. Егоров В.А. Пространственная задача достижения Луны. М.: Наука, 1965. 224 с.
4. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной. М.: Наука, 1980. 544 с.
5. Фесенков В.Г. О возможности захвата при близком прохождении // Астрон. журн. 1946. Т. 23. № 1. С. 45–58.
6. Davidson M.C. Numerical examples of transition orbits in the restricted three body problem // Astronautica Acta. 1964. Iss. 10. P. 308–313.
7. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. Ижевск: Ижевская республик. тип., 1999. 160 с.
8. Belbruno E.A. Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth-Moon Trajectories and the Lunar GAS Mission // 19th AIAA/DGLR/JSASS intern.electric propulsion conf. 11–13 May 1987, Colorado Springs, Co. / eds. H. Takegahara, S. Shimada, H. Kimura. Washington, 1987. Art. ID. 87-1054. <https://doi.org/10.2514/6.1987-1054>
9. Belbruno E.A., Miller J.K. Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture // J. Guidance, Control and Dynamics. 1993. V. 16. Iss. 4. P. 770–775.
10. Ивашкин В.В. Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля–Луна–Солнце: препринт. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2001. № 85. 32 с.
11. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной // Докл. Акад. наук. 2002. Т. 387. № 2. С. 196–199.
12. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением от лунного притяжения // Докл. Акад. наук, 2004. Т. 398. № 3. С. 340–343.
13. Ivashkin V.V. Low energy trajectories for the Moon-to-Earth space flight // J. Earth System Science. 2005. V. 114. Iss. 6. P. 613–618. <https://doi.org/10.1007/BF02715945>
14. Ельников Р.В. Использование функций Ляпунова для вычисления локально-оптимального управления вектором тяги при межорбитальном перелете с малой тягой // Косм. исслед. 2021. Т. 59. № 3. С. 255–264. (Cosmic Research, P. 212–221.) <https://doi.org/10.31857/S0023420621030043>
15. Shannon J., Ozimek M., Atchison J., Hartzell C. Rapid design and exploration of high-fidelity low-thrust transfers to the Moon // IEEE Aerospace Conf. 7–14 March 2020, Big Sky, Montana, USA. P. 4598–4610.
16. Ивашкин В.В., Петухов В.Г. Траектории перелета с малой тягой между орбитами спутников Земли и Луны при использовании орбиты захвата Луной: препринт. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008. № 81. 32 с.

17. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г.* Низкоэнергетические квазиоптимальные траектории с малой тягой к точкам либрации и гало-орбитам // *Косм. исслед.* 2020. Т. 58. № 2. С. 165–176. <https://doi.org/10.31857/S0023420620020053>
18. *Ozimek M.T., Howell K.C.* Low-Thrust Transfers in the Earth–Moon System, Including Applications to Libration Point Orbits // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. V. 33. Iss. 2. P. 533–549. <https://doi.org/10.2514/1.43179>
19. *Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F.* Low-energy, low-thrust transfers to the Moon // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009. V. 105. Iss. 1. P. 61–74.
20. *Singh S.K., Anderson B.D., Taheri E., Junkins J.L.* Exploiting manifolds of L_1 halo orbits for end-to-end Earth–Moon low-thrust trajectory design // *Acta Astronautica*. 2021. V. 183. P. 255–272. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.017>
21. *Uesugi K.* Results of the MUSES-A “HITEN” mission // *Advances in Space Research*. 1996. V. 18. Iss. 11. P. 69–72. [https://doi.org/10.1016/0273-1177\(96\)00090-7](https://doi.org/10.1016/0273-1177(96)00090-7)
22. *Foing B.H., Racca G.D., Marini A.E.A. et al.* SMART-1 after lunar capture: First results and perspectives // *J. Earth System Science*. 2005. V. 114. Iss. 6. P. 687–697. <https://doi.org/10.1007/BF02715952>
23. *Wu W., Tang Y., Zhang L., Qiao D.* Design of communication relay mission for supporting lunar-farside soft landing // *Science China Information Sciences*. 2018. V. 61. Iss. 4. Art. ID. 040305. 14 p. <https://doi.org/10.1007/s11432-017-9202-1>
24. *McGuire M.L., Burke L.M., McCarty S.L. et al.* Low thrust cis-lunar transfers using a 40 kW-class solar electric propulsion spacecraft // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf.* Washington, 2017. Art. ID. AAS 17-583. 21 p.
25. *Davis D.C., Phillips S.M., Howell K.C. et al.* Station-keeping and Transfer Trajectory Design for Spacecraft in Cislunar Space // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf.* Washington, 2017. Art. ID. AAS 17-826. 20 p.
26. *Легостаев В.П., Лопота В.А., Синявский В.В.* Перспективы и эффективность применения космических ядерно-энергетических установок и ядерных электроракетных двигательных установок // *Косм. техника и технологии*. 2013. № 1. С. 6–17.
27. *Topputo F.* On optimal two-impulse Earth–Moon transfers in a four-body model // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. V. 117. Iss. 3. P. 279–313. <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9513-8>
28. *Боровенко В.Н.* Об использовании захвата космического аппарата Луной для формирования орбиты ее искусственного спутника // *Космонавтика и ракетостроение*. 2015. № 1. С. 30–36.
29. *Константинов М.С., Тант А.М.* Использование точки либрации L_2 системы Земля–Луна при перелете космического аппарата на окололунную орбиту // *Космонавтика и ракетостроение*. 2022. № 3. С. 30–43.
30. *Qi Y., Xu S.* Lunar capture in the planar restricted three-body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2014. V. 120. P. 401–422. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9582-3>
31. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
32. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 655 с.
33. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 456 с.
34. *Archinal B.A., Acton C.H., A’Hearn M.F. et al.* Report of the IAU working group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. V. 130. 46 p. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5>
35. *Conley C.C.* Low energy transit orbits in the restricted three-body problems // *SIAM J. Applied Mathematics*. 1968. V. 16. Iss. 4. P. 732–746.
36. *Fitzgerald J., Ross S.D.* Geometry of transit orbits in the periodically-perturbed restricted three-body problem // *Advances in Space Research*. 2022. V. 70. Iss. 1. P. 144–156. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.04.029>
37. *Лукьянов Л.Г.* Аналог поверхностей нулевой скорости в ограниченной эллиптической, параболической и гиперболической задачах трех тел // *Письма в Астрон. журн.* 2010. Т. 36. № 11. С. 869–880.
38. *Hyeraci N., Topputo F.* The role of true anomaly in ballistic capture // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. V. 116. P. 175–193. <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9481-z>
39. *Circi C.* Properties of transit trajectory in the restricted three and four-body problem // *Advances in Space Research*. 2012. V. 49. Iss. 10. P. 1506–1519. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.02.034>
40. *Петухов В.Г.* Применение угловой независимой переменной и ее регуляризирующего преобразования в задачах оптимизации траекторий с малой тягой // *Косм. исслед.* 2019. Т. 57. № 5. С. 373–385. (Cosmic Research. P. 351–363.) <https://doi.org/10.1134/S0023420619050066>
41. *Ivanyukhin A., Petukhov V.* Optimization of multi-revolution limited power trajectories using angular independent variable // *J. Optimization Theory and Applications*. 2021. V. 191. Iss. 2. P. 575–599. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01853-8>
42. *Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al.* Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // *Acta Astronautica*, 2022. V. 197. P. 354–367. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>
43. *Yoon S.W., Petukhov V.G.* Perturbed low-thrust trajectory optimization using the algebra of complex dual numbers // *8th Intern. Conf. Astrodynamics Tools and Techniques*. ESA. 23–25 June 2021. 15 p. <https://www.researchgate.net/publication/354144026>
44. *Petukhov V.G., Yoon S.W.* Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 1: Theory and method // *Cosmic Research*. 2021. V. 59. Iss. 5. P. 401–413. <https://doi.org/10.1134/S0010952521050099>
45. *Petukhov V.G., Yoon S.W.* Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Pt. 2: Numerical Results // *Cosmic Research*. 2021. V. 59. Iss. FF. 6. P. 517–528. <https://doi.org/10.1134/S0010952521060083>
46. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г.* Задача минимизации тяги и ее приложения // *Косм. исслед.* 2015. Т. 53. № 4. С. 320–331. (Cosmic Research. P. 300–310.) <https://doi.org/10.7868/S0023420615040044>
47. *Иванюхин А.В.* Область существования решений в задаче оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной тягой // *Современная математика. Фундам. направления*. 2016. Т. 62. С. 100–123.
48. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Юн С.У.* Траектории перелета к Луне с минимальной тягой // *Косм. исслед.* 2022. Т. 60. № 6. С. 517–527. <https://doi.org/10.31857/S002342062205003X>

УДК 629.78.

МЕТОД РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ОДНОИМПУЛЬСНОГО ПЕРЕЛЕТА К ГАЛО-ОРБИТЕ ВОКРУГ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ–ЛУНА

© 2023 г. Чжоу Жуи*

Московский авиационный институт, Москва, Россия

*420790076@qq.com

Поступила в редакцию 18.03.2023 г.

После доработки 28.03.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2023 г.

Рассматривается задача расчета низкоэнергетических импульсных траекторий к гало-орбитам в окрестности точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Представлен новый метод расчета траекторий одноимпульсного низкоэнергетического перелета к гало-орбите. Анализируется ограниченная задача четырех тел, в рамках которой учитывается притяжение Земли, Луны и Солнца, а их положение и скорость вычисляются с использованием высокоточного эфемеридного обеспечения. Особое внимание при разработке метода уделено обеспечению его вычислительной устойчивости для расчета траекторий с длительным нахождением космического аппарата в зоне слабой устойчивости вблизи границы сферы Хилла Земли. Приведены результаты расчета одноимпульсных траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Проведен анализ зависимости основных характеристик одноимпульсных траекторий от даты полета к гало-орбите.

DOI: 10.31857/S0023420623700152, EDN: PJVLGM

ВВЕДЕНИЕ

Точки либрации и гало-орбиты представляют собой частные решения задачи трех тел [1, 2]. Периодические гало-орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел и порожденные ими квазипериодические орбиты в эфемеридной задаче многих тел имеют существенные преимущества перед окололунными орбитами в целом ряде прикладных задач. Космический аппарат (КА) на гало-орбите вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна может использоваться в качестве ретранслятора для обеспечения непрерывной связи с посадочными аппаратами на обратной стороне Луны и с орбитальными лунными КА в зоне отсутствия прямой радиовидимости с Земли. Размещение пилотируемой лунной орбитальной станции на такой гало-орбите позволяет обеспечить расширение окон пуска для обеспечения срочного возврата пилотируемых космических кораблей с этой станции на Землю, срочной посадки в заданные районы поверхности Луны и срочного возвращения из этих районов на лунную орбитальную станцию. В последние годы проведены обширные исследования гало-орбит вокруг коллинеарных точек либрации системы Земля–Луна и траекторий перелета к ним [3–15, 19–21]. В этих исследованиях, в частности, обна-

ружен класс низкоэнергетических слабоустойчивых траекторий, которые позволяют существенно снизить требуемое приращение скорости для перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту за счет притяжения Солнца при длительном движении КА вблизи границы сферы Хилла Земли. Найдены низкоэнергетические траектории перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точек либрации L_1 и L_2 системы Земля–Луна с малыми величинами импульса скорости для выхода на устойчивое инвариантное многообразие к гало-орбите. В предельном случае для реализации таких траекторий необходим единственный импульс скорости для выведения КА с околоземной орбиты на траекторию перелета к гало-орбите, которая принадлежит устойчивому многообразию заданной гало-орбиты. Требуемый отлетный импульс скорости в этом случае близок по величине к импульсу, необходимому для выведения КА на параболическую отлетную от Земли траекторию. Одноимпульсные низкоэнергетические траектории обычно требуют меньшего приращения скорости, чем суммарное приращение скорости на многоимпульсных траекториях и представляют значительный практический интерес. Однако до настоящего времени остается не до конца решенной задача разработки

устойчивого метода расчета таких траекторий с начальной низкой круговой орбиты с заданной высотой и наклоном на заданную гало-орбиту, свойства таких траекторий недостаточно изучены.

Исходя из вышесказанного, цель данного исследования заключается в разработке устойчивого численного метода расчета одноимпульсных низкоэнергетических перелетов между заданными околоземной орбитой и гало-орбитой вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна и применении этого метода для анализа основных свойств таких траекторий. Предлагаемый метод основан на построении семейства траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию к заданной гало-орбите, использовании специально введенной метрики для отбора из этого семейства траекторий, проходящих в окрестности заданной начальной низкой околоземной орбиты с близким наклоном, решении трехпараметрической краевой задачи для двухимпульсного перелета с заданной низкой околоземной орбиты в среднюю точку выбранной траектории перелета и использовании полученного решения в качестве начального приближения для решения шестипараметрической краевой задачи вычисления одноимпульсной траектории перелета на заданную гало-орбиту.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАЛО-ОРБИТ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В разделе приведена методика вычисления гало-орбит и их устойчивых инвариантных многообразий в ограниченной круговой задаче трех тел (ОКЗТТ), рассматривается математическая модель возмущенного движения КА.

Для вычисления номинальных гало-орбит в настоящей работе используется математическая модель ОКЗТТ. В рамках этой математической модели два притягивающихся небесных тела P_1 (Земля) и P_2 (Луна) движутся вокруг общего центра масс (барицентра) по круговым орбитам. Массы тел P_1 и P_2 равны m_1 и m_2 соответственно, масса m_3 третьего тела P_3 (КА) намного меньше m_1 и m_2 , поэтому его влиянием на движение Земли и Луны можно пренебречь. Рассмотрим барицентрическую синодическую систему координат с центром в центре масс системы Земля–Луна, ось X которой направлена от Земли к Луне, ось Z – в направлении вектора кинетического момента системы Земля–Луна, а ось Y дополняет систему до правой. Дифференциальные уравнения движения КА в безразмерных переменных в геоцентрической синодической системе координат в рамках математической модели ОКЗТТ можно записать в следующем виде [1]:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = -U_y, \quad \ddot{z} = -U_z, \quad (1)$$

где $U = -\frac{1}{2}[(x - \mu)^2 + y^2] - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) -$
 потенциальная функция ОКЗТТ; $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$;

$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – геоцентрическое удаление КА; $r_2 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}$ – селеноцентрическое удаление КА. Здесь в качестве единицы расстояния рассматривается расстояние между Землей и Луной, а в качестве единицы времени – величина, обратная среднему движению Луны.

Для вычисления гало-орбит в настоящей работе проводится дифференциальная коррекция приближенного решения Ричардсона третьего порядка [16, 17], в результате чего гало-орбиты в ОКЗТТ вычисляются с требуемой точностью.

Из-за симметрии математической модели гало-орбиты делятся на северные и южные семейства. Семейство северных гало-орбит абсолютно симметрично семейству южных гало-орбит и отличается только знаком координаты Z . На рис. 1 показано южное семейство гало-орбит вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна.

Для представления положения КА на гало-орбите вводится параметр τ , равный отношению к периоду гало-орбиты длительности движения КА от точки пересечения гало-орбитой плоскости XZ в направлении увеличения Y до заданной точки ($0 \leq \tau \leq 1$). В дальнейшем в этой работе параметр τ условно называется фазой гало-орбиты.

Матрица монодромии гало-орбиты имеет шесть собственных значений со следующими свойствами:

$$\lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \quad (2)$$

$$\lambda_5 = \bar{\lambda}_6, \quad |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1,$$

где верхняя черта над переменной означает комплексно-сопряженное значение.

Собственный вектор Λ_s матрицы монодромии, соответствующий собственному значению λ_2 , предполагается касательным устойчивому многообразию гало-орбиты. Чтобы определить инвариантное устойчивое многообразие гало-орбиты, необходимо сделать небольшой сдвиг от заданной точки гало-орбиты в направлении этого собственного вектора и проинтегрировать систему в обратном времени. Начальное приближение устойчивого многообразия вблизи периодической орбиты можно получить по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \pm \varepsilon \Lambda_s, \quad (3)$$

где (\mathbf{r}, \mathbf{v}) – координаты и скорость фиксированной точки на гало-орбите; ε – малая величина (в настоящей статье принята раной 10^{-6}).

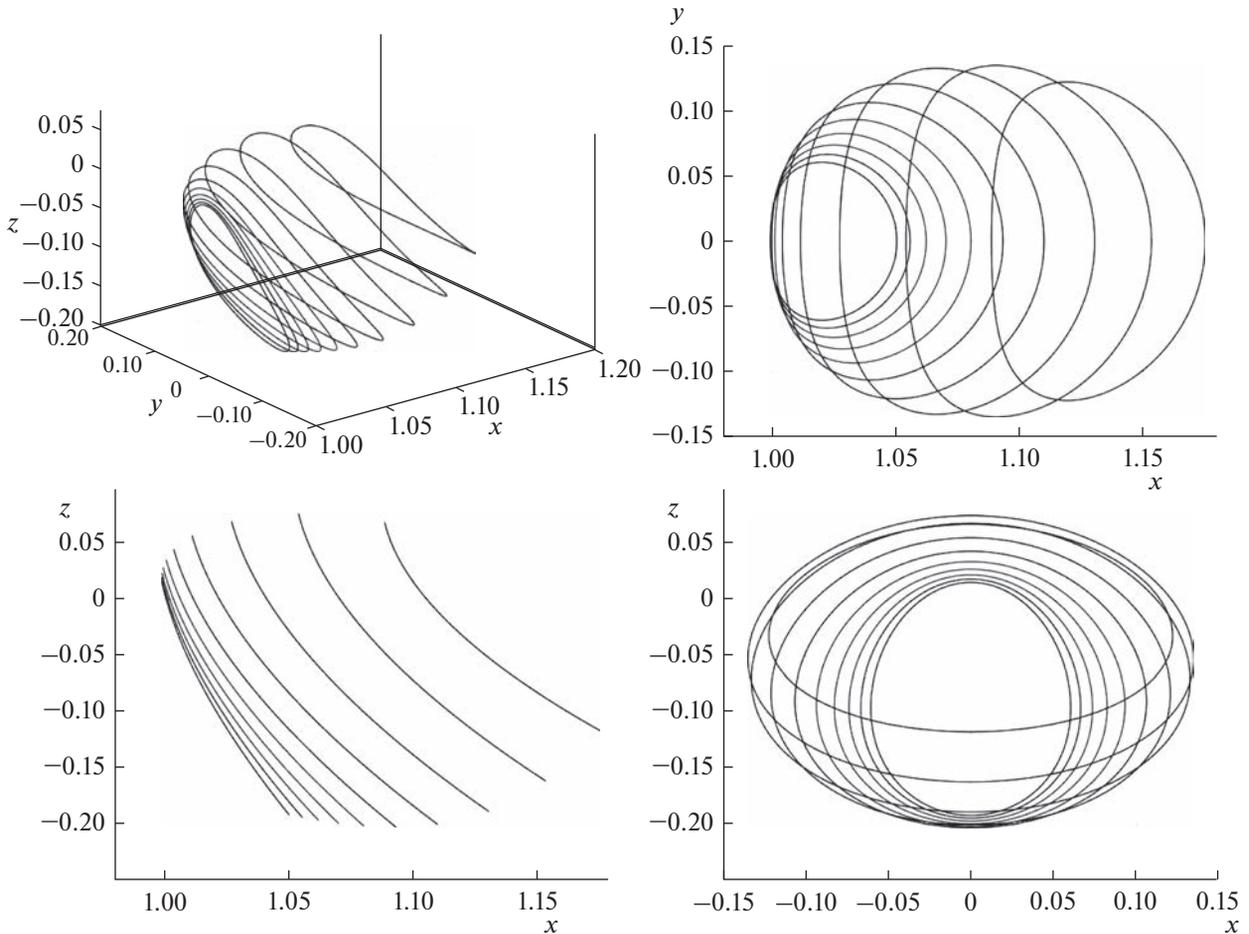


Рис. 1. Семейство южных гало-орбит вокруг точки либрации L_2 в геоцентрической синодической системе координат.

В выражении (3) разные знаки соответствуют разным ветвям устойчивого многообразия. Знак “+” соответствует положительной ветви устойчивого многообразия, а знак “-” – отрицательной. Для анализа слабоустойчивых низкоэнергетических схем перелета мы используем положительную ветвь устойчивого многообразия.

Чтобы применять полученные решения в рамках возмущенной эфемеридной математической модели движения КА, необходимо осуществить переход от синодической системы координат в стандартную инерциальную геоцентрическую экваториальную систему координат J2000 (EME2000). Для этого вычисляются единичные векторы мгновенной синодической системы координат в EME2000 e_x, e_y, e_z и мгновенная угловая скорость геоцентрического движения Луны ω :

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|}, & e_z &= \frac{\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M}{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}, \\
 e_y &= e_z \times e_x, & \omega &= \frac{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}{|\mathbf{r}_M|^2},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где \mathbf{r}_M – вектор геоцентрического положения Луны, а \mathbf{v}_M – вектор геоцентрической скорости Луны, рассчитанные с использованием эфемерид JPL DE405. После этого векторы положения \mathbf{r}_{J2000} и скорости \mathbf{v}_{J2000} КА относительно Земли в инерциальной геоцентрической экваториальной системе координат J2000 могут быть вычислены по безразмерным векторам положения \mathbf{r} и скорости \mathbf{v} в геоцентрической синодической системе координат следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{J2000} \\ \mathbf{v}_{J2000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z & 0 & 0 & 0 \\ \omega \mathbf{e}_y & -\omega \mathbf{e}_x & 0 & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_M^* \\ \sqrt{\frac{\mu_E + \mu_M}{r_M^*}} \mathbf{v} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где r_M^* – геоцентрическое удаление Луны в момент времени, когда удовлетворяются условия (3); μ_E и μ_M – гравитационные параметры Земли и Луны соответственно.

В возмущенной эфемеридной математической модели в настоящей статье учитываются основные внешние ускорения, включающие в себя ускорения от сил притяжения Земли, Луны и Солнца как материальных точек и ускорение от второй зональной гармоники геопотенциала. В дальнейшем опустим нижний индекс “J2000”, тогда в инерциальной геоцентрической системе координат J2000 уравнения возмущенного движения КА имеют вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ f(\mathbf{r}) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – вектор геоцентрического положения КА, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ – вектор геоцентрической скорости КА, $\mathbf{x} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T)^T$ – фазовый вектор КА, $a f(\mathbf{r})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_{J_2}, \\ \mathbf{a}_M &= \mu_M \left(\frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_M}{r_M^3} \right), \\ \mathbf{a}_S &= \mu_S \left(\frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где \mathbf{a}_M и \mathbf{a}_S – ускорения от сил притяжения Луны и Солнца как материальных точек; \mathbf{r}_M – вектор геоцентрического положения Луны; \mathbf{r}_S – вектор геоцентрического положения Солнца, $r = |\mathbf{r}|$ – геоцентрическое удаление КА; $r_M = |\mathbf{r}_M|$ – геоцентрическое удаление Луны; $r_S = |\mathbf{r}_S|$ – геоцентрическое удаление Солнца (векторы положения Луны и Солнца рассчитываются с использованием эфемерид JPL DE405); μ_S – гравитационный параметр Солнца, \mathbf{a}_{J_2} – вектор возмущающего ускорения, обусловленного второй зональной гармоникой геопотенциала:

$$\mathbf{a}_{J_2} = \frac{3\mu_E J_2 R_E^2}{2r^5} \begin{pmatrix} \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)x \\ \left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)y \\ \left(5\frac{z^2}{r^2} - 3\right)z \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где J_2 – коэффициент второй зональной гармоники геопотенциала; R_E – экваториальный радиус Земли.

Интегрирование в обратном времени для вычисления устойчивых многообразий проводится с использованием приведенной возмущенной эфемеридной модели (6)–(8) с конечным фазовым вектором (3) в синодической системе координат, который преобразуется в J2000 с использованием выражений (4), (5). Типичный вид полученного та-

ким образом устойчивого многообразия, подходящего для решения поставленной задачи, представлен на рис. 2 (единицей длины на этом рисунке является среднее удаление Луны от Земли – 384400 км).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

В разделе приводится описание метода вычисления одноимпульсных траекторий перелета на гало-орбиты. Вводится метрика для отбора траекторий из множества траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию заданной гало-орбиты и приводится формулировка задачи для расчета двухимпульсного перелета на выбранную траекторию, принадлежащую устойчивому многообразию. Далее полученная двухимпульсная траектория используется в качестве начального приближения при вычислении одноимпульсного перелета, для чего рассматривается краевая задача расширенной размерности для обеспечения возможности уточнения параметров траектории перелета, обеспечивающих обнуление второго импульса скорости.

Для вычисления одноимпульсной траектории перелета с круговой околоземной орбиты на гало-орбиту с минимальным приращением скорости необходимо, чтобы импульс скорости был направлен вдоль орбитальной скорости КА. В рассматриваемом случае высота и наклонение начальной круговой околоземной орбиты считаются заданными, поэтому направление орбитальной скорости в точке приложения импульса можно регулировать двумя свободными параметрами: долготой восходящего узла этой орбиты Ω_0 и аргументом широты u_0 точки приложения импульса. Для реализации касательного к начальной околоземной орбите импульса скорости необходимо выполнение условий ее касания отлетной траектории. Эти условия состоят из требования равенства высоты перигея и наклона отлетной траектории высоте и наклону начальной околоземной орбиты. В конечном итоге для вычисления одноимпульсного низкоэнергетического перелета на гало-орбиту требуется найти траекторию, принадлежащую устойчивому многообразию гало-орбиты, которая проходит на минимальной над Землей высоте, равной заданной высоте начальной околоземной орбиты, имея при этом наклонение, равное наклонению начальной околоземной орбиты. Выбираемыми параметрами при этом будут величина отлетного импульса скорости ΔV_1 , Ω_0 , u_0 , время выведения КА на целевую гало-орбиту t_k , фаза гало-орбиты τ и суммарное время перелета T . Эти шесть параметров должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворить шесть конечных условий формулы (3).

Для решения такой краевой задачи необходимо хорошее начальное приближение. Для выбора

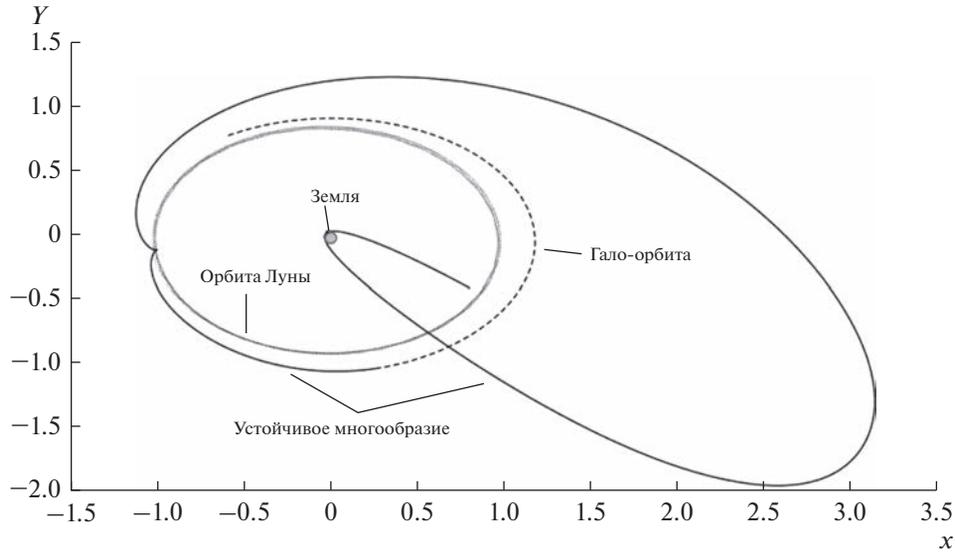


Рис. 2. Вид рассматриваемого устойчивого многообразия в рамках возмущенной эфемеридной модели в системе координат J2000.

начального приближения параметров t_k , τ и T проводится исследование поведения траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию гало-орбиты. Для этого система дифференциальных уравнений возмущенного движения (6) интегрируется в обратном направлении по времени от заданного момента времени t_k , при котором выполняются конечные условия выхода на гало-орбиту (3). Для преобразования синодического фазового вектора (3) в систему координат J2000 используется выражение (5). Длительность интегрирования принята равной 120 сут, что гарантированно превышает ожидаемую длительность перелета по одноимпульсной траектории. Интегрирование проводится для различных значений времени t_k и различных фаз гало-орбиты τ в этот момент времени, в результате получается множество траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию гало-орбиты. Для определения близости полученных траекторий к тем, которые требуются для одноимпульсного перелета с круговой околоземной орбиты с заданной высотой и наклоном в процессе интегрирования с постоянным шагом по времени (в настоящей работе – 1 сут), вычисляется функционал L , характеризующий отклонение траектории в текущей точке по высоте и наклону от заданной начальной околоземной орбиты. Этот функционал имеет вид

$$L(\tau, \mathbf{r}(t_k - T), \mathbf{v}(t_k - T)) = \sqrt{(|\mathbf{r}(t_k - T)| - r_0)^2 + |\mathbf{r}(t_k - T)|^2 \Delta i^2}, \quad (9)$$

где r_0 – заданный радиус начальной околоземной орбиты; T – длительность перелета от заданной точки до выхода на гало-орбиту; Δi – разница

между наклоном траектории перелета в момент $t_k - T$ и заданным наклоном начальной околоземной орбиты i_0 :

$$\Delta i = \arccos \frac{c_z}{|\mathbf{c}|} - i_0, \quad (10)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{r}(t_k - T) \times \mathbf{v}(t_k - T) = (c_x, c_y, c_z)^T$. Функционал (9) обращается в нуль при совпадении текущего геоцентрического удаления и оскулирующего наклона перелетной орбиты с заданными радиусом и наклоном начальной околоземной орбиты и монотонно увеличивается при увеличении отклонения этих параметров. Следует отметить, что условие $L = 0$ не означает касания перелетной траектории и начальной околоземной орбиты, так как радиус перигея перелетной траектории может быть меньше r_0 .

По завершении интегрирования каждой траектории, т.е. для каждого набора t_k и τ , вычисляется минимальное значение этого функционала L_{\min} и время перелета T от точки, в которой функционал принимает минимальное значение до гало-орбиты. Таким образом, каждая траектория характеризуется значениями τ , t_k , T и L_{\min} .

На следующем этапе из множества полученных траекторий выбираются траектории с малым значением L_{\min} , например с $L_{\min} < 40000$ км, фазовый вектор которой можно записать в виде

$$\mathbf{x}_{\text{manifold}}(t_k) = \left(\mathbf{r}_{\text{manifold}}^T(t_k), \mathbf{v}_{\text{manifold}}^T(t_k) \right)^T.$$

В процессе выбора играть роль может не только значение функционала L_{\min} , но и значения параметров τ , t_k , T . Выбранная траектория использу-

ется для вычисления двухимпульсной траектории перелета к гало-орбите. Первый импульс скорости выдается в некоторой выбираемой точке начальной околоземной орбиты в момент $t_0 = t_k - T$, а второй – в некоторой точке выбранной траектории, принадлежащей устойчивому многообразию гало-орбиты, в момент t_m ; $t_0 < t_m < t_k$. Схема двухимпульсного перелета представлена на рис. 3.

Для расчета двухимпульсной траектории необходимо определить длительность перелета до устойчивого многообразия T_1 ($T_1 = t_m - t_0$) и длительность перелета КА по устойчивому многообразию T_2 ($T_2 = t_k - t_m$). Поскольку целью становится вычисление траектории одноимпульсного перелета, T_1 и T_2 могут быть выбраны произвольно при выполнении ограничения $T_1 + T_2 = T$. Однако для обеспечения хорошей сходимости в последующем процессе вычисления одноимпульсной траектории T_1 и T_2 не должны быть близки к нулю, поэтому в этом исследовании выбрано $T_1 = T_2 = T/2$. При таком выборе на слабоустойчивой траектории второй импульс будет прилагаться на большом геоцентрическом удалении, что позволяет реализовать большое изменение траекторных параметров малым приращением скорости во втором импульсе.

Задача вычисления траектории двухимпульсного перелета сводится к вычислению траектории перелета между околоземной орбитой и заданной точкой входа на устойчивое многообразие. Неизвестными параметрами задачи, которые требуется найти, выступают долгота восходящего узла начальной околоземной орбиты Ω_0 , аргумент широты точки выдачи первого импульса скорости на околоземной орбите u_0 , а также величина отлетного импульса скорости ΔV_1 . Вектор отлетного импульса скорости направляется вдоль вектора орбитальной скорости КА на начальной околоземной орбите в момент t_0 . Параметры ΔV_1 , Ω_0 , u_0 выбираются таким образом, чтобы в момент t_m выполнялись условия:

$$\mathbf{r}(t_m) - \mathbf{r}_{\text{manifold}}(t_m) = 0. \quad (11)$$

Второй импульс скорости в момент t_m рассчитывается как векторная разность между скоростью в заданной точке устойчивого многообразия и скоростью КА в момент подлета к этой точке:

$$\Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\text{manifold}}(t_m) - \mathbf{v}(t_m). \quad (12)$$

Подробное описание использованной методики в приложении к задаче расчета двухимпульсных траекторий перелета между околоземной и окололунной орбитами приведено в работе [18].

Таким образом, краевая задача для расчета двухимпульсного перелета свелась к удовлетворению краевых условий (11) за счет выбора параметров $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1)$. Чтобы получить одноим-

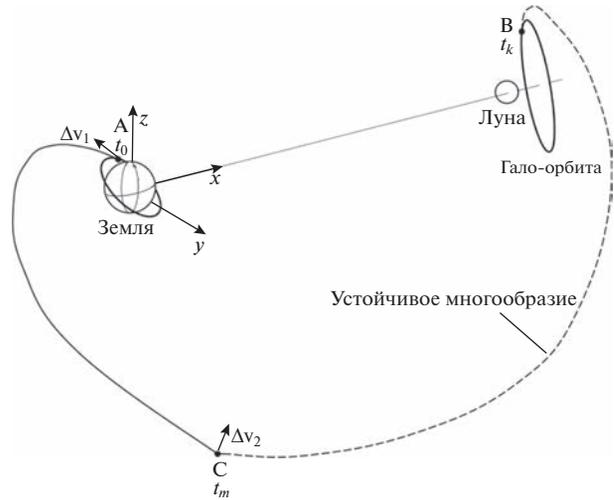


Рис. 3. Схема двухимпульсного перелета между начальной круговой околоземной орбитой и выбираемой точкой устойчивого многообразия гало-орбиты.

пульсную траекторию, необходимо к краевым условиям (11) добавить условия, обеспечивающие равенство нулю второго импульса скорости (12):

$$\mathbf{v}(t_m) - \mathbf{v}_{\text{manifold}}(t_m) = 0. \quad (13)$$

Для удовлетворения этих условий необходимо дополнить вектор выбираемых параметров краевой задачи еще тремя параметрами, которые влияют на траекторию, принадлежащую устойчивому многообразию к целевой гало-орбите. В настоящей статье рассматриваются два варианта выбора параметров этой краевой задачи. Первый соответствует задаче перелета с начальной околоземной орбиты с заданной высотой и наклонением на заданную гало-орбиту, тогда $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1, T, t_k, \tau)$. Второй – задаче перелета с начальной околоземной орбиты с заданной высотой на заданную гало-орбиту в заданный момент времени, тогда $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1, T, i, \tau)$. В качестве начального приближения для выбираемых параметров используются их значения, полученные при вычислении двухимпульсной траектории.

Системы уравнений (11), (13) в сочетании с упомянутым ранее начальным приближением в обоих вариантах может быть решена с использованием классических методов. В этой статье для ее решения использовался алгоритм Левенберга–Марквардта.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В разделе приводятся численные примеры найденных двух- и одноимпульсных траекторий к двум различным гало-орбитам вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна, включая почти прямолинейную гало-орбиту [8, 22–25], а также

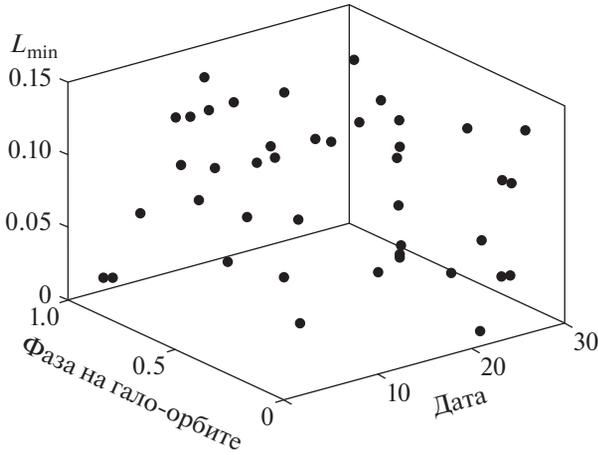


Рис. 4. Зависимость L_{\min} от фазы гало-орбиты и суммарного время перелета.

анализируются свойства полученных траекторий перелета.

Рассмотрим задачу доставки космического аппарата в июне 2026 г. на заданную гало-орбиту вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна. Заданная целевая гало-орбита представляет собой южную гало-орбиту с амплитудой A_z по оси Z равной 20000 км. В синодической системе координат эта гало-орбита определяется безразмерным начальным фазовым вектором (1.117160372, 0, 0.044332712, 0, 0.219723818, 0), ее период равен 14.7635 сут. В начальный момент времени КА находится на низкой круговой околоземной орбите высотой 200 км с наклоном 45° .

Чтобы получить хорошее начальное приближение времени t_k , фазы гало-орбиты τ и суммарного времени перелета T , функционал (9) вычисляется при изменении t_k с 1 июня 2026 г. в 00.00.00 по 1 июля 2026 г. в 00.00.00 UTC с шагом в 1 сут, $0 \leq \tau \leq 1$, $80 \leq T \leq 120$ сут [19]. Зависимость безраз-

мерного значения L_{\min} от фазы гало-орбиты и суммарного времени перелета показана на рис. 4 (за масштаб длины здесь и далее на графиках принято среднее удаление Луны от Земли 384400 км).

Для дальнейшего анализа выбрана траектория с $L_{\min} = 0.043776$, временем прибытия на гало-орбиту 3 июня 2026 г. в 00.00.00 UTC, $\tau = 0.0528$, $T = 93$ сут. Для этого варианта были вычислены двухимпульсная и одноимпульсная траектории, параметры которых показаны в табл. 1 и 2 соответственно.

Вид полученной траектории одноимпульсного перелета в безразмерных координатах приведен на рис. 5.

В случае изменения наклона начальной околоземной орбиты в пределах определенного диапазона соответствующая траектория одноимпульсного перелета может быть рассчитана с использованием того же начального приближения. Зависимость требуемого импульса скорости от наклона начальной околоземной орбиты показана на рис. 6. Видно, что при изменении наклона начальной орбиты от $\sim 35^\circ$ до 55° требуемый импульс скорости изменяется не более чем на 3 м/с.

В табл. 3 приведены результаты расчета одноимпульсных траекторий выведения КА на заданную гало-орбиту в заданный момент времени t_k (второй вариант краевой задачи). Время подлета равно 00.00.00 UTC, а дата подлета перебирается с шагом в одни сутки в течение июня 2026 г. На отсутствующие в табл. 3 даты решения краевой задачи найти не удалось. На некоторые даты (3, 15, 20–27 июня) удалось найти по два решения. Из табл. 3 видно, что величина отлетного импульса скорости на рассматриваемом интервале времени подлета изменяется не более чем на 8.3 м/с.

На рис. 7 представлена зависимость наклона начальной околоземной орбиты от времени

Таблица 1. Параметры начальной двухимпульсной траектории перелета к гало-орбите

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	ΔV_2 , км/с	$\Delta V_1 + \Delta V_2$, км/с
8.5632726	133.6257639	3.1991534	0.1226633	3.3218167

Таблица 2. Параметры одноимпульсной траектории перелета к гало-орбите

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	T , сут	t_k	τ
158.2279722	-24.4439507	3.1985209	94.3814972	3.VI. 2026 01:33:07.14	0.0496473

Невязки F

Δx , м	Δy , м	Δz , м	Δv_x , м/с	Δv_y , м/с	Δv_z , м/с
0.17774810	0.0609830	0.0328266	$-1.22 \cdot 10^{-07}$	$-1.67 \cdot 10^{-08}$	$-6.91 \cdot 10^{-10}$

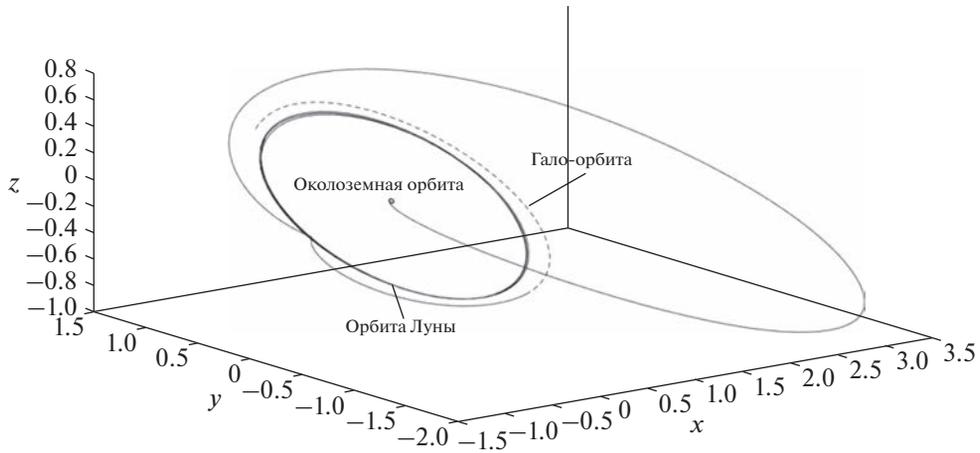


Рис. 5. Траектория одноимпульсного перелета к гало-орбите в системе координат J2000.

Таблица 3. Результаты расчетов траектории одноимпульсного перелета в июне 2026 г.

Дата	u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	T , сут	i , град	τ
1	147.211802	-10.15784146	3.198662717	91.75891858	30.19644083	0.30541403
3	157.6187739	-23.93553459	3.198684436	94.14318517	43.79220254	0.054957676
3	154.6445865	-45.7376915	3.202419109	97.9432365	61.44824335	0.966002115
4	160.6928459	-33.78171973	3.198626309	96.02442053	65.79036142	0.960543937
7	116.2822029	9.196244849	3.202106311	98.50539511	27.23263114	0.778016654
10	155.8944137	-45.42112063	3.201489757	102.872579	73.51096953	0.366564837
12	88.50715984	22.18613751	3.20618772	113.9768558	26.48203633	0.838800437
13	156.9193554	-35.10896341	3.198790895	104.9769356	73.67469282	0.127412693
15	157.5636041	-41.07058254	3.201105686	107.4125283	64.14402471	0.776318891
15	320.3291654	2.7137075	3.200647023	92.80242547	25.81667537	0.87618438
19	111.6906253	14.71138481	3.20340118	98.6204266	29.58608574	0.052328515
20	157.9374391	-40.82059196	3.212733607	102.8127365	72.50461667	0.331110003
20	143.8307576	-3.077697462	3.205265282	89.34717797	31.44125651	0.015950892
21	151.0048703	-2.352163822	3.203551651	85.40251037	29.76102025	-0.000039769
21	161.1912672	-37.58940231	3.206973184	95.85025372	81.59052775	0.370646886
22	163.6142506	-33.1227754	3.204574188	92.38961206	86.19850868	0.407619136
22	158.3480673	-3.696198025	3.202620428	84.13662775	29.60262929	0.993160011
23	165.1411146	-29.61577084	3.203075402	90.9085509	88.0732667	0.446973382
23	164.2212393	-5.772197799	3.20173613	84.39740942	31.10001174	0.997972829
24	168.2911376	-7.439412711	3.20095334	85.35542145	33.44512069	0.012817471
24	166.2329871	-27.09276287	3.202284701	90.62083926	88.91487205	0.491595072
25	170.6952164	-8.429868031	3.200376261	86.56945978	35.7376638	0.039558524
25	166.8922697	-25.77106113	3.20190512	91.07193555	89.3569737	0.54471078
26	171.5818849	-8.799770062	3.200136547	87.71124503	36.90085879	0.083418699
26	166.9504378	-26.21171698	3.201984007	92.19617061	89.64369815	0.611559384
27	170.3628567	-8.450086485	3.200504774	88.52458305	35.59787838	0.157831945
27	165.4128097	-30.62398467	3.203349503	95.32764966	88.00660166	0.708180104
28	162.72577	-5.730694691	3.202056904	89.6571816	30.88427246	0.300899886

Таблица 4. Параметры двухимпульсной траектории перелета на NRHO

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	ΔV_2 , км/с	$\Delta V_1 + \Delta V_2$, км/с
319.2675005	351.3852813	3.2044983	0.1110967	3.3155950

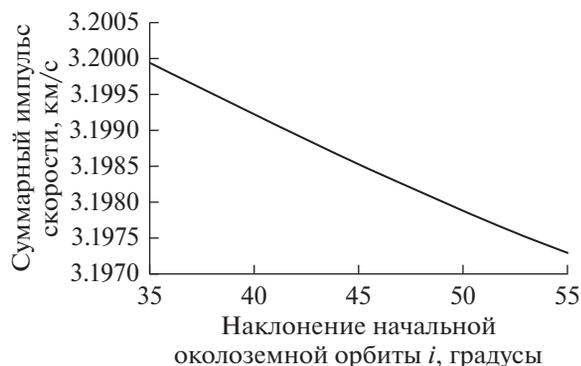


Рис. 6. Зависимость импульса скорости от наклона начальной околоземной орбиты.

подлета к гало-орбите при изменении этого времени в пределах одних суток (от 00.00.00 UTC до 24.00.00 UTC 3 июня 2026 г.). На этом интервале времени подлета существуют два решения. На решении А наклонение начальной околоземной орбиты изменяется от 43.8° до 54.8° , а на решении В — от 61.4° до 65.8° .

В качестве следующего примера рассмотрим задачу перелета на почти прямолинейную гало-орбиту (*англ.* Near Rectilinear Halo Orbit — NRHO). NRHO — это подмножество гало-орбит, обеспечивающих периодическое сближение с Лунной на расстояние в несколько тысяч километров. NRHO рассматривается как целевая орбита в перспективных лунных программах [22–25], в частности, в пилотируемой лунной программе США Artemis (“Артемида”) [26].

Рассмотрим перелет на NRHO вокруг точки либрации L_2 , которая в синодической системе координат определяется безразмерным начальным фазовым вектором $(0.99944790, 0, 0.00987520, 0, 1.53793698, 0)$ и имеет период 6.75934 сут. Будем рассматривать траектории с подлетом к этой орбите 15 июня 2026 г., время подлета и фаза гало-орбиты в момент подлета должны быть вычислены. Будем считать, что в начальный момент времени КА находится на круговой околоземной орбите высотой 200 км с наклоном 19.33° (север-

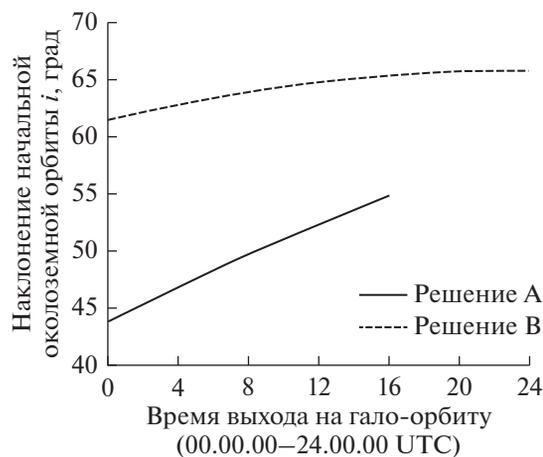


Рис. 7. Зависимость наклона начальной околоземной орбиты от времени подлета к гало-орбите.

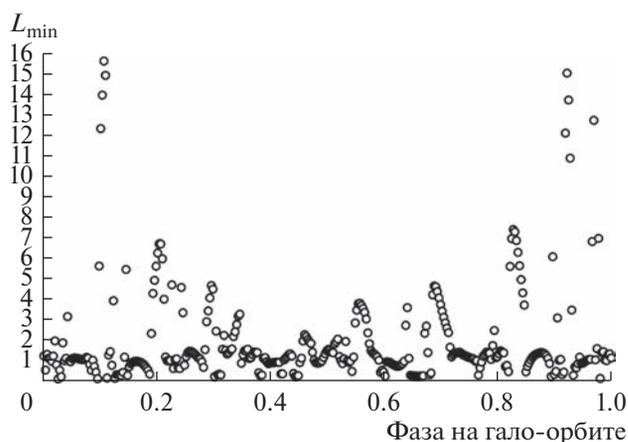


Рис. 8. Зависимость функционала L_{\min} от фазы гало-орбите τ в момент подлета.

ная широта космодрома Вэньчан, Китай (*англ.* China Wenchang Spacecraft Launch Site).

На рис. 8 приведена зависимость минимального безразмерного значения функционала (9) от фазы гало-орбиты τ в момент полета.

В качестве начального приближения выберем траекторию с минимальным значением L_{\min} . Па-

Таблица 5. Параметры одноимпульсной траектории перелета к NRHO

u_0 , град	Ω_0 , град	ΔV_1 , км/с	T , сут	t_k	τ
219.0356989	97.8385133	3.203380154	94.79436766	14.VI.2026 22:13:23.53	0.9812228
Невязки F					
Δx , м	Δy , м	Δz , м	Δv_x , м/с	Δv_y , м/с	Δv_z , м/с
-1.8907719	2.5390708	0.2414302	$1.76 \cdot 10^{-06}$	$-2.84 \cdot 10^{-07}$	$-2.73 \cdot 10^{-07}$

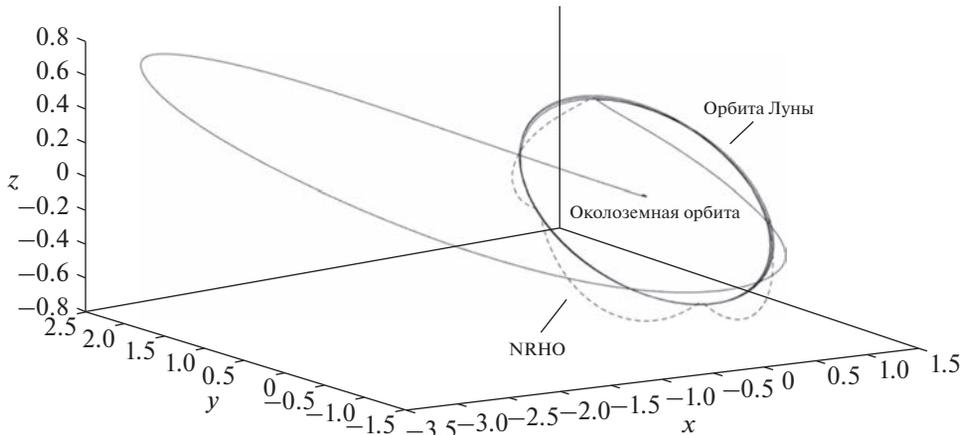


Рис. 9. Одноимпульсная траектория перелета к NRHO в системе координат J2000.

параметры двухимпульсной траектории перелета на NRHO с использованием этого решения представлены в табл. 4.

Параметры одноимпульсной траектории, полученные с использованием этой двухимпульсной траектории в качестве начального приближения, приведены в табл. 5, а внешний вид одноимпульсной траектории представлен на рис. 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый устойчивый численный метод, позволяющий вычислять одноимпульсные слабоустойчивые траектории перелета с начальной круговой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки либрации L_2 системы Земля–Луна.

Для обеспечения вычислительной устойчивости метода решение задачи проводится в три этапа:

1. Вычисляется начальное приближение к траектории перелета интегрированием в обратном времени уравнений возмущенного движения для вычисления множества траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию гало-орбиты. При вычислении этого множества перебирается фаза гало-орбиты τ и время подлета к гало орбите t_k . На рассчитываемых траекториях вычисляется функционал L_{\min} , характеризующий промах по высоте и наклонению относительно заданных высоты и наклонения начальной околоземной орбиты. Из полученного множества траекторий выбирается траектория с малым значением L_{\min} . Время T достижения на этой траектории функционалом (9) значения L_{\min} принимается за начальное приближение для продолжительности перелета.

2. Рассчитывается двухимпульсная траектория перелета в среднюю точку выбранной в п. 1 траектории. Для этого вычисляется геоцентрический

вектор положения такой траектории в момент времени $t_m = t_k - T/2$, и выбором начальных значений долготы восходящего узла Ω_0 , аргумента широты u_0 и величины первого импульса скорости ΔV_1 обеспечивается попадание траектории перелета с начальной околоземной орбиты в момент t_m в заданную точку намеченной траектории, принадлежащей устойчивому многообразию. Первый импульс скорости направляется вдоль вектора орбитальной скорости КА на начальной орбите, а второй импульс скорости вычисляется как разность скоростей движения КА по выбранной траектории устойчивого многообразия и скорости КА при подлете к этой траектории в момент t_m .

3. Рассчитывается одноимпульсная траектория перелета на гало-орбиту с использованием в качестве начального приближения двухимпульсной траектории, полученной в п. 2. Для этого решается краевая задача, в число краевых условий которой, кроме промаха по координатам в момент t_m , добавляется промах по компонентам скорости в этот же момент, а к трем выбираемым параметрам краевой задачи Ω_0 , u_0 , ΔV_1 добавляется либо T , t_k , τ (при заданном наклонении начальной околоземной орбиты), либо T , i , τ (при заданном времени подлета к гало-орбите).

В результате применения разработанного метода удалось получить одноимпульсные траектории перелета к гало-орбитам с низких околоземных орбит различного наклонения в диапазоне от 26° до 90° . Характерной особенностью полученных траекторий представляется слабая зависимость величины импульса скорости от других параметров траектории перелета. Требуемый отлётный импульс скорости близок по величине к импульсу, требуемому для выведения КА на параболическую отлётную траекторию, а его вариация на множестве полученных траекторий не превышает 8.3 м/с (менее 0.4%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / пер. с англ.; под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1982. 657 с.
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F. et al. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations // *Acta Astronaut.* 2014. V. 94. Iss. 1. P. 421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
4. Shan G., Wenyan Z., Weiguang L. et al. Trajectory analysis and design for relay satellite at Lagrange L_2 point of Earth–Moon system // *J. Deep Space Exploration.* 2017. V. 4. Iss. 2. P. 122–129. <https://doi.org/10.15982/j.issn.2095-7777.2017.02.004>
5. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F. et al. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations // *Acta Astronaut.* 2014. V. 94. Iss. 1. P. 421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
6. Gordon D.P. Transfers to earth-moon L_2 halo orbits: Master Thesis of Science in Aeronautics and Astronautics. Purdue University West Lafayette, Indiana, 2008. 182 p.
7. Wu W., Tang Y., Zhang L., Qiao D. Design of communication relay mission for supporting lunar-farside soft landing // *J. Science China Information Sciences.* 2018. V. 61. Iss. 4. 14 p. <https://doi.org/10.1007/s11432-017-9202-1>
8. Davis D., Bhatt S., Howell K. et al. Orbit maintenance and navigation of human spacecraft at cislunar near rectilinear halo orbits // 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. 5–9 Feb. 2017, San Antonio, Texas. 2017. Art. ID. JSC-CN-38626. 21 p.
9. Starchville T.F., Melton R.G. Optimal low-thrust trajectories to Earth–Moon L_2 Halo orbits (circular problem). // *Advances in the Astronautical Sciences.* 1997. V. 97. P. 1741–1756.
10. Parrish N.L., Parker J.S., Hughes S.P. et al. Low-thrust transfers from distant retrograde orbits to L_2 halo orbits in the Earth–Moon system // 6th Intern. Conf. Astrodynamics Tools and Techniques. 14–17 March 2016, Darmstadt. 2016. Art. ID. GSFC-E-DAA-TN30224. 10 p.
11. An R., Wang M., Liang X.G. Transfer trajectory optimal design for Earth–Moon L_2 based on invariant manifolds // *J. Deep Space Exploration.* 2017. V. 4. Iss. 3. P. 252–257.
12. Ivanyukhin A.V., Petukhov V.G. Low-Energy Sub-Optimal Low-Thrust Trajectories to Libration Points and Halo-Orbits // *Cosmic Research.* 2019. V. 57. Iss. 5. P. 378–388. <https://doi.org/10.1134/S0010952519050022>
13. Lei H., Xu B., Sun Y. Earth–Moon low energy trajectory optimization in the real system // *Advances in Space Research.* 2013. V. 51. Iss. 5. P. 917–929. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.10.011>
14. Parker J.S., Born G.H. Modeling a low-energy ballistic lunar transfer using dynamical systems theory // *J. Spacecraft and Rockets.* 2008. V. 45. Iss. 6. P. 1269–1281. <https://doi.org/10.2514/1.35262>
15. Qi Y., Xu S. Earth–Moon transfer with near-optimal lunar capture in the restricted four-body problem // *Aerospace Science and Technology.* 2016. V. 55. P. 282–291.
16. Richardson D.L. Halo orbit formulation for the ISEE-3 mission // *J. Guidance and Control.* 1980. V. 3. Iss. 6. P. 543–548.
17. Richardson D.L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points // *Celestial mechanics.* 1980. V. 22. Iss. 3. P. 241–253.
18. Петухов В.Г., Чжоу Ж. Расчет возмущенной импульсной траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами методом продолжения по параметру // *Вестник Московского авиац. ин-та.* 2019. Т. 26. Iss. 2. P. 155–165.
19. Kokou P., Le Bihan B., Receveur J.B. et al. Computing an optimized trajectory between Earth and an EML2 halo orbit // *Proc. 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conf. (CGNCC).* Yantai, China, 8–10 Aug. 2014. Art. ID. 0450.
20. Belbruno E., Carrico J. Calculation of weak stability boundary ballistic lunar transfer trajectories // *Astrodynamics Specialist Conf.* 2000. Art. ID. AIAA 2000-4142. 11 p. <https://doi.org/10.2514/6.2000-4142>
21. Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V. Low-energy trajectories to the Earth–Moon libration points and to halo-orbits // *IAA/AAS SciTech Forum 2019 on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials.* Moscow. V. 174: *Advances in the Astronautical Sciences Series.* 2021. P. 81–94.
22. Guzzetti D., Zimovan E.M., Howell K.C. et al. Station-keeping analysis for spacecraft in lunar near rectilinear halo orbits // 27th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. American Astronautical Society. 5–9 Feb. 2017, San Antonio, TX, USA. 2017. 20 p.
23. Zimovan E.M., Howell K.C., Davis D.C. Near rectilinear halo orbits and their application in cis-lunar space // 3rd IAA Conf. Dynamics and Control of Space Systems. Moscow, Russia. 2017. P. 20–40.
24. Whitley R.J., Davis D.C., Burke L.M. et al. Earth–Moon near rectilinear halo and butterfly orbits for lunar surface exploration // *Proc. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf.* 19–23 Aug. 2018, Snowbird, UT, USA.
25. Zimovan-Spreen E.M., Howell K.C., Davis D.C. Near rectilinear halo orbits and nearby higher-period dynamical structures: orbital stability and resonance properties // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 2020. V. 132. Iss. 5. Art. ID. 28. 25 p. <https://doi.org/10.1007/s10569-020-09968-2>
26. Smith M., Craig D., Herrmann N. et al. The Artemis program: an overview of NASA’s activities to return humans to the Moon // *Proc. 2020 IEEE Aerospace Conf. Big Sky, MT, USA.* 7–14 Mar. 2020. 10 p.

УДК 629.7.036

ВЛИЯНИЕ РАБОЧИХ ВЕЩЕСТВ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНУЮ ОБСТАНОВКУ, СОЗДАВАЕМУЮ СТАЦИОНАРНЫМИ ПЛАЗМЕННЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

© 2023 г. А. П. Плохих¹, *, Н. А. Важенин¹, Д. В. Меркурьев¹

¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

*riame@mai.ru

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 02.04.2023 г.

Рассматриваются возможные аспекты нарушения функциональной безопасности космических аппаратов в части электромагнитной совместимости с электрическими ракетными двигателями при их работе на альтернативных рабочих веществах. Описана процедура экспериментального определения спектрально-временных характеристик собственного электромагнитного излучения лабораторного макета стационарного плазменного двигателя СПД-70 разработки Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института. Измерения помехоэмиссии проводились на вакуумной установке с “радиопрозрачным” отсеком и экранированной безэховой камерой в диапазоне частот 1...12 ГГц для типовых мощностей разряда (600, 800, 1000 Вт), вертикальной и горизонтальной поляризации и различных используемых рабочих веществ (криптон и ксенон). Проведенные исследования позволили получить новые сравнительные результаты оценки спектральных характеристик излучения СПД-70 для типовых режимов и перспективных рабочих тел в рамках ортогональных поляризационных базисов. К новым результатам следует отнести и сведения о характеристиках излучения СПД-70 во временной области. Показано, что переход с ксенона на криптон сохраняет импульсный характер излучения стационарного плазменного двигателя, приводя не только к увеличению амплитуды импульсов, но и к увеличению частоты повторения “пачек” и увеличению их длительности, что требует проведения дополнительных мероприятий по обеспечению электромагнитной совместимости с целью сохранения функциональной безопасности космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0023420623700140, EDN: HJLCFG

ВВЕДЕНИЕ

Общая проблема обеспечения безопасности космических полетов напрямую связана с решением таких задач как обеспечение электромагнитной совместимости (ЭМС) на борту космических аппаратов (КА). Потенциальные потери из-за сбоев в аппаратуре и в электронных системах, связанных с внешней электромагнитной обстановкой, могут быть отнесены к категории нарушения функциональной безопасности [1, 2].

Несмотря на то что процедуры решения задач ЭМС для КА давно отработаны [3, 4], нельзя утверждать, что все они окончательно решены по причине того, что электромагнитная обстановка постоянно эволюционирует. Это связано как с изменением характеристик естественных источников радиоизлучений в космическом пространстве, так и с расширением функциональных возможностей штатной и полезной нагрузок КА, создающих дополнительные помеховые излучения.

В этом направлении следует отметить, что в настоящее время наблюдается бурное развитие малых космических аппаратов (МКА) и многоспутниковых группировок на их основе. Устанавливаются требования к обеспечению достаточно большого срока активного существования МКА при относительно небольшой стоимости разработки, изготовления и эксплуатации таких аппаратов, которые успешно удовлетворяются за счет использования электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) в их составе [5]. При этом интеграция ЭРДУ с КА требует проведения широкого комплекса испытаний, который в настоящее время хорошо освоен [6–9].

С целью снижения затрат на эксплуатацию таких МКА наметилась тенденция перехода на более дешевые и доступные рабочие тела. Так, американская компания SpaceX при создании многоспутниковой группировки Starlink [10] использовала стационарные плазменные двигатели (СПД)



Рис. 1. Модель двигателя СПД-70.

на криптона вместо традиционного и более дорогого ксенона.

Такая замена газообразного рабочего вещества в СПД существенно меняет рабочие процессы в двигателе и требует их дополнительной оптимизации [11, 12]. В этой связи определенным интересом представляет оценка влияния рабочих веществ на электромагнитную обстановку, создаваемую стационарными плазменными двигателями.

Следует отметить, что одна из основных процедур ЭМС – оценка помехоэмиссии СПД в наземных условиях – представляется нетривиальной задачей, так как помимо создания условий космической среды по вакууму необходимо обеспечить отсутствие переотражений в измерительном объеме. Решению этой задачи ЭМС применительно к электрическим ракетным двигателям посвящены многочисленные работы [13–16].

В настоящей работе представлены результаты сравнительного исследования собственного излучения стационарного плазменного двигателя в спектральной и временной областях при работе на криптона и ксеноне с позиций обеспечения функциональной безопасности КА.

МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Исследование собственного электромагнитного излучения стационарного плазменного двигателя проводилось на созданной в Научно-исследовательском институте прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института экспериментальной модели двигателя СПД-70 с внешним диаметром ускорительного канала 70 мм.

Для снижения потерь ускоряющихся ионов на стенках разрядной камеры, выходная часть ускорительного канала была расширена с дополнительным перемещением в нее слоя ионизации и

ускорения. Топология магнитного поля на срезе двигателя и геометрия ускорительного канала были оптимизированы для работы на режимах с большей плотностью расхода, что необходимо при использовании криптона [11]. Внешний вид стационарного плазменного двигателя представлен на рис. 1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ СТЕНД

Для измерения помехоэмиссии СПД использовался электровакуумный стенд, подробно описанный в публикациях [13, 17] (рис. 2).

Кратко отметим, что использовалась мобильная безэховая экранированная камера (БЭК) 1 с интегрированной в нее “радиопрозрачной” вакуумной камерой из стеклопластика 2. В рабочем положении “радиопрозрачная” вакуумная камера стыковалась с основной, образуя общий откачиваемый вакуумный объем. Внутреннее пространство БЭК облицовано абсорберами пирамидальной формы, выполненными из радиопоглощающего материала. Диапазон эффективной работы абсорберов от 0.3 до 18 ГГц и выше при коэффициенте безэховости не более –20 дБ. Измерительные антенны 17 размещались на диэлектрическом помосте 10, смонтированном внутри БЭК. Через панель с проходными разъемами они были соединены с измерительной аппаратурой 18, расположенной снаружи БЭК.

Двигатель СПД-70 устанавливался в радиопрозрачную вакуумную камеру, при этом ось двигателя совпадала с осью симметрии вакуумного объема.

Применяемые измерительные средства аналогичны описанным в работе [17]. Использовалась рупорная измерительная антенна с рабочим диапазоном частот от 0.9 до 12.4 ГГц и линейной поляризацией. Угловое положение антенны составляло $(90 \pm 5)^\circ$ относительно направления плазменной струи двигателя. Обеспечивалась возможность изменения плоскости поляризации антенны на 90° . Выход антенны подключался к анализатору спектра.

Испытания модели двигателя СПД-70 проводились для трех уровней мощности разряда – 600, 800 и 1000 Вт, при напряжении разряда 300 В и работе на ксеноне и криптона.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В процессе работы двигателя регистрация его излучения осуществлялась двумя способами.

1. Анализатор спектра работал под управлением компьютера в режиме сканирования по частоте в диапазоне от 1000 до 12 000 МГц. Получаемые значения пересчитывались в напряженность электрического поля в апертуре измерительной

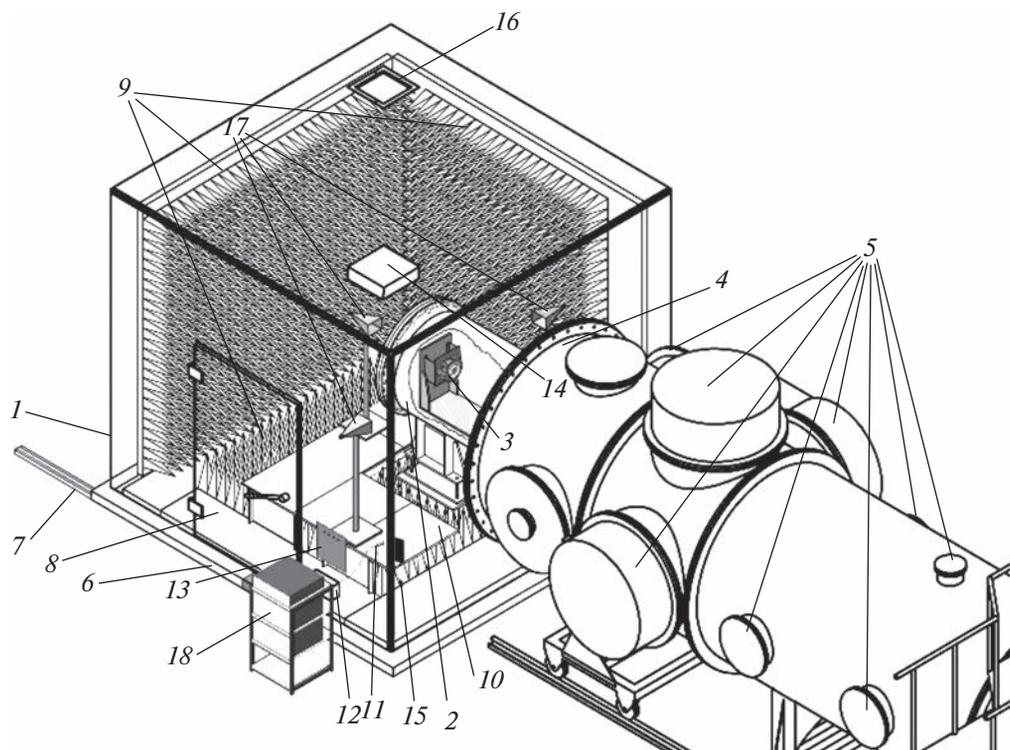


Рис. 2. Экспериментальный стенд. 1 – БЭК; 2 – радиопрозрачный цилиндр; 3 – ЭРД; 4 – основная вакуумная камера; 5 – система откачки; 6 – подвижная платформа; 7 – рельсовый путь; 8 – дверь; 9 – радиопоглощающее покрытие; 10 – диэлектрический помост; 11 – сетевой удлинитель; 12 – проходной сетевой фильтр; 13 – панель с проходными разъемами; 14 – реверсивный вентилятор; 15 – пульт управления вентилятором; 16 – дополнительное окно вентиляции; 17 – измерительные антенны; 18 – стойка с измерительным оборудованием.

антенны с учетом ее антенн-фактора и затухания в кабельной сети. Такой подход соответствует методике, описанной в публикации [17].

2. Анализатор спектра работал под управлением компьютера в режиме “Zero-Span” и оцифровывал квадратурные составляющие входного процесса в полосе анализа 140 МГц. Путем перестройки центральной частоты анализатора спектра с шагом 140 МГц были получены временные реализации амплитудной огибающей процесса на всех участках исследуемого диапазона частот, которые были пересчитаны в значения напряженности электрического поля в апертуре измерительной антенны.

Для первого способа результаты обработки приведены в виде графиков спектральных характеристик для вертикальной и горизонтальной поляризации (рис. 3), где по горизонтальной оси отложена частота от 1000 до 12000 МГц, по вертикальной – напряженность электрического поля в размерности децибел-микровольт на метр на мегагерц (дБмкВ/м/МГц). На всех графиках присутствует фоновый уровень излучения, соответствующий выключенному двигателю.

Проведенные измерения дают хорошее совпадение с результатами, описанными в работе [17].

Подтверждается, что двигатель СПД-70 имеет широкополосный спектр излучения, основная часть которого сосредоточена в полосе частот от 1 до 3 ГГц как для ксенона, так и для криптона, при этом для всех режимов работы и поляризаций фиксируются дополнительные спектральные составляющие на частотах в районе 10 ГГц.

Анализ поляризационных характеристик излучения показал, что для двух рабочих тел значительно доминирует излучение с горизонтальной поляризацией. Максимальное превышение уровня излучения при работе на криптоне по сравнению с ксеноном для модели СПД-70 составляет порядка 10 дБ в диапазоне частот от 1 до 2 ГГц для горизонтальной поляризации.

Для мощности разряда 600 Вт при работе на криптоне обнаружено возникновение дополнительных максимумов излучения в диапазоне 2...7 ГГц, которые пропадают с увеличением мощности разряда.

Обобщая результаты, можно констатировать, что перевод СПД-70 на криптон существенно повышает его уровень излучения в диапазоне частот 1...2 ГГц. Начиная с 3 ГГц, уровни излучения для двух рабочих тел становятся сопоставимыми с не-

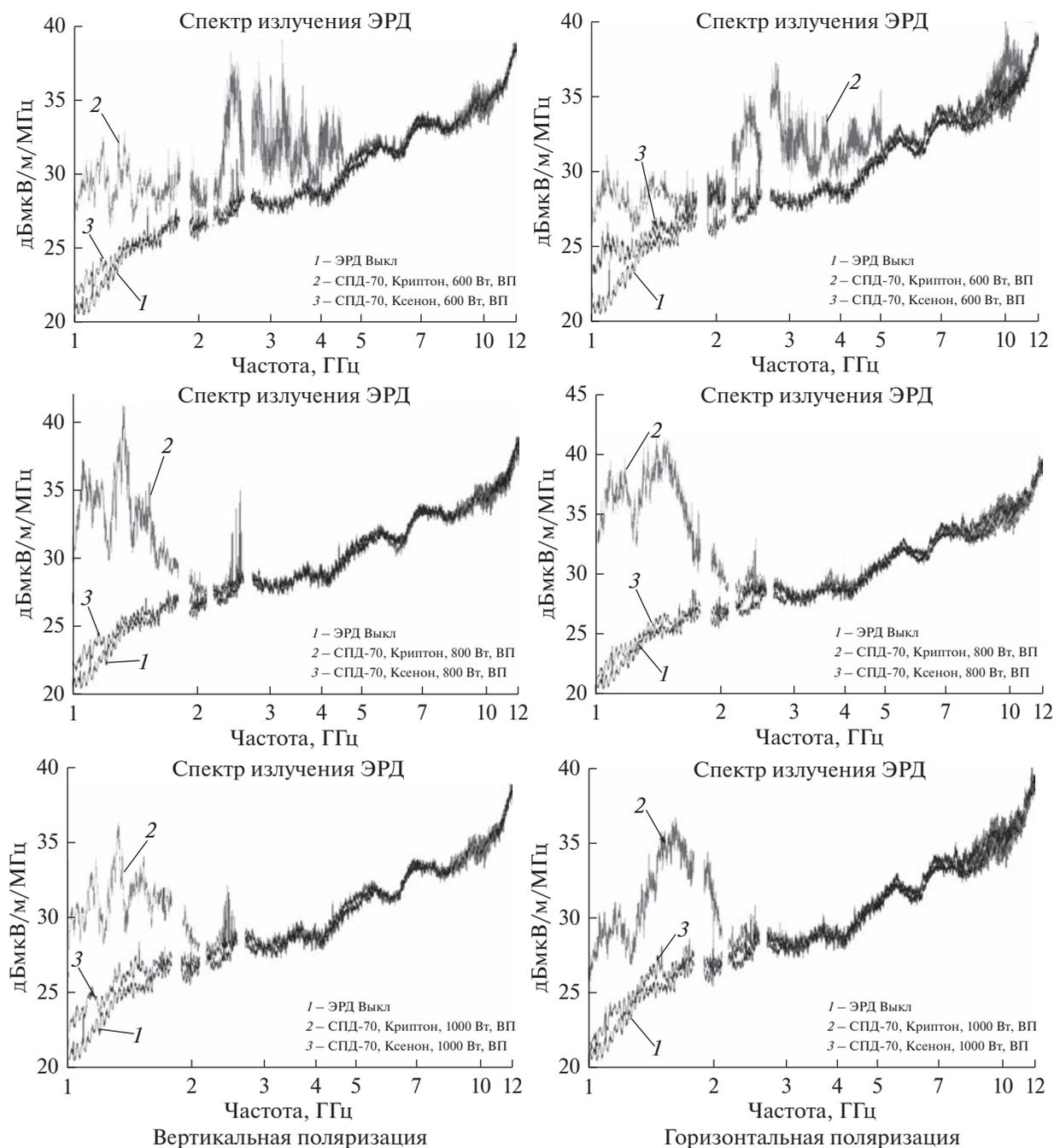


Рис. 3. Сравнение спектров излучения модели СПД-70 при работе на ксеноне и криптоне.

значительным превышением излучения при работе на ксеноне.

Второй способ регистрации позволил получить информацию о временной структуре излучения. На рис. 4, 5 приведены примеры реализации амплитудной огибающей излучения модели СПД-70 для вертикальной и горизонтальной поляризации при работе на ксеноне и криптоне (режим 600 Вт).

Анализ полученных временных реализаций показывает, что при работе на ксеноне и крипто-

не они представляют собой случайные последовательности импульсов, длительность и интервал следования которых зависят от частотных поддиапазонов и видов рабочих веществ. При этом на фоне последовательности случайных импульсов возникают квазипериодические группы импульсов увеличенной (более чем в два раза) амплитуды, образующие ярко выраженные “пачки”. Так, например, при использовании ксенона (режим 600 Вт, частота 1.05 ГГц, горизонтальная

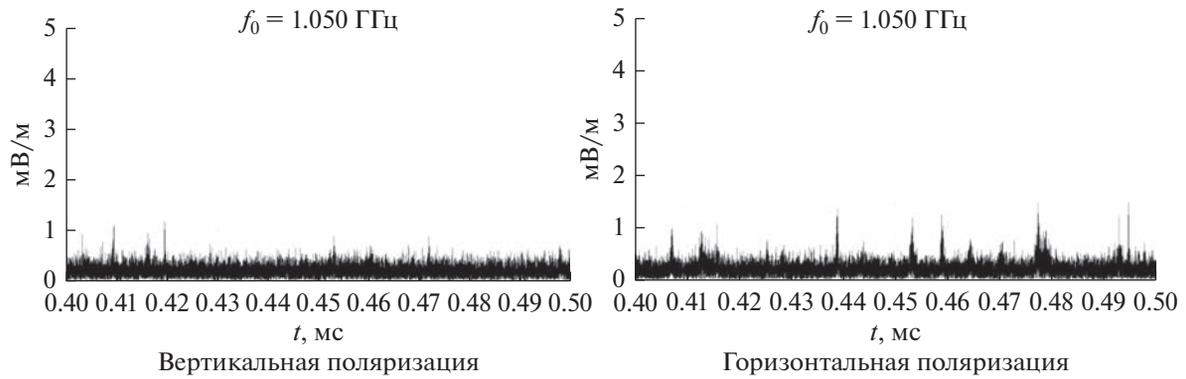


Рис. 4. Реализации амплитудной огибающей излучения модели СПД-70 при работе на ксеноне. $f_0 = 1.050$ ГГц.

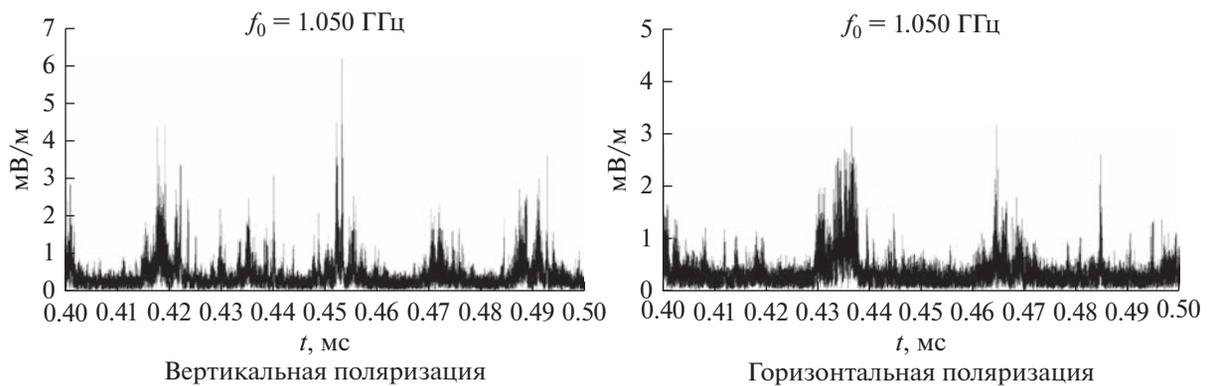


Рис. 5. Реализации амплитудной огибающей излучения модели СПД-70 при работе на криптоне. $f_0 = 1.050$ ГГц.

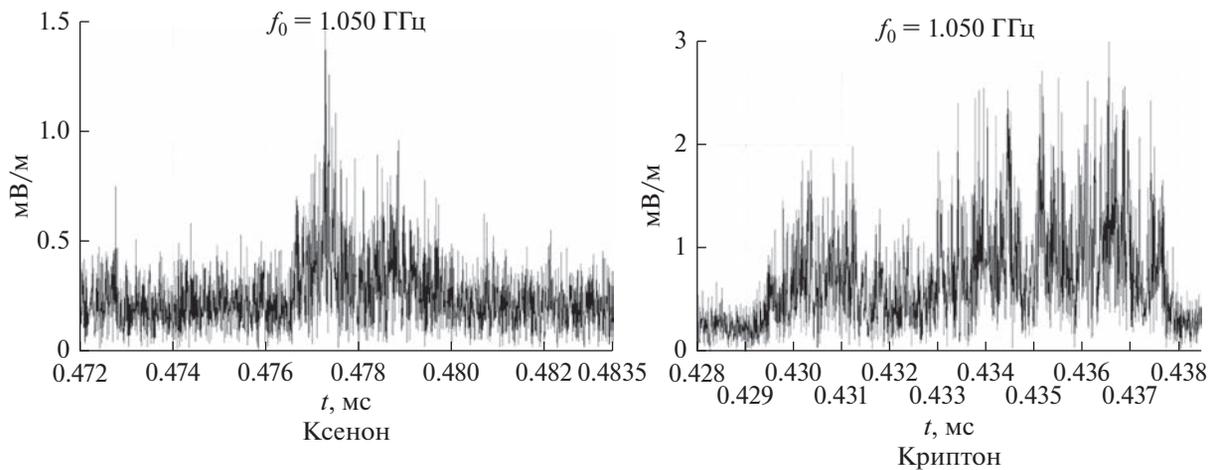


Рис. 6. Примеры амплитудных огибающих “пачек” импульсов излучения модели СПД-70 при работе на ксеноне и криптоне. $f_0 = 1.050$ ГГц, мощность 600 Вт.

поляризация) средний интервал следования одиночных импульсов лежит в диапазоне 1...5 мкс, а интервал следования “пачек” составляет 6...10 мкс. При этом длительность “пачки” может достигать 3 мкс по уровню 0.5 (рис. 6, слева).

Переход на криптон для аналогичного режима незначительно увеличивает амплитуду основной последовательности импульсов, сохраняя их интервал следования. При этом растет амплитуда “пачек”, число которых увеличивается. В результа-

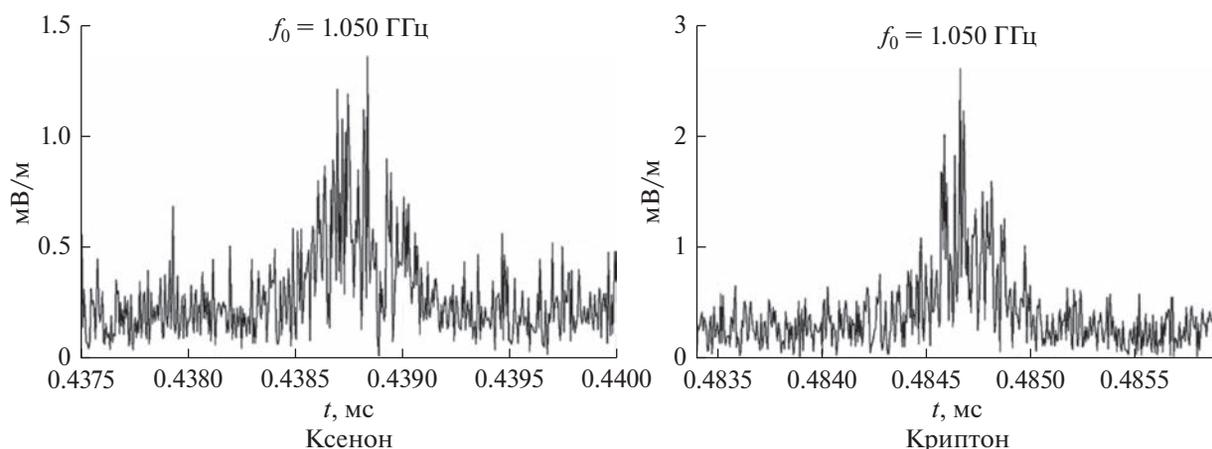


Рис. 7. Примеры амплитудных огибающих одиночных импульсов излучения модели СПД-70 при работе на ксеноне и криптоне. $f_0 = 1.050$ ГГц, мощность 600 Вт.

те интервал следования “пачек” сокращается до 2...4 мкс, а их длительность может увеличиваться за счет взаимного перекрытия, достигая 10 мкс (рис. 6, справа).

Что касается длительности одиночных импульсов, то для сравнения на рис. 7 представлены огибающие одиночных импульсов для различных рабочих веществ и горизонтальной поляризации.

Как видно из рисунка, при переходе от ксенона к криптому увеличивается амплитуда импульсов. Что касается средней длительности, то в этом примере она слабо зависит от вида рабочего вещества и при измерении по уровню 0.5 лежит в диапазоне от 0.15 до 0.25 мкс. Для получения более точных оценок параметров импульсов необходима дополнительная статистическая обработка по всем ансамблям реализаций в исследованных диапазонах частот.

Как видно из представленных результатов, излучение СПД-70 представляет собой широкополосное излучение сложной импульсной природы, параметры которого существенно зависят от вида рабочего вещества.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

Перевод СПД-70 с ксенона на криптон существенно повышает его уровень излучения в диапазоне частот 1...2 ГГц. Начиная с 3 ГГц, уровни излучения для двух рабочих тел становятся сопоставимыми с незначительным превышением уровня излучения при работе на ксеноне. Для двух рабочих тел зарегистрировано максимальное превышение уровня излучения для криптона порядка 10 дБ для горизонтальной поляризации.

Для режима разряда 600 Вт при работе на криптоме обнаружено возникновение дополнительных максимумов излучения в диапазоне 2...7 ГГц, которые пропадают с увеличением мощности разряда.

Зарегистрирован импульсный характер излучения модели СПД-70 во временной области, представляющий собой случайную последовательность импульсов, длительность и интервал следования которых зависят от частотных поддиапазонов и видов рабочих веществ. В выявленных случайных последовательностях присутствуют группы импульсов увеличенной амплитуды, образующие “пачки”, следующие с квазипериодическим интервалом повторения.

Показано, что переход с ксенона на криптон может приводить не только к увеличению амплитуды импульсов, но и к увеличению частоты повторения “пачек” и увеличению их длительности, что требует дополнительного статистического исследования.

Таким образом, смена рабочего вещества существенно меняет электромагнитную обстановку, создаваемую стационарным плазменным двигателем (для случая одинаковых режимов), что требует проведения дополнительных мероприятий по обеспечению ЭМС с целью сохранения функциональной безопасности КА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith D.J., Simpson K.G.L.* Functional Safety: A Straightforward Guide to IEC61508 and Related Standards. 1st ed. L.: Butterworth-Heinemann, 2001. 263 p.
2. *Smith D.J., Simpson K.G.L.* The Safety Critical Systems Handbook: A Straightforward Guide to Functional Safety: IEC 61508 (2010 Edition), IEC 61511 (2016 Edition) and Related Guidance. 5th ed. L.: Butterworth-Heinemann, 2020. 360 p.

3. *Fortescue P., Swinerd G., Stark J.* Spacecraft Systems Engineering. 4th ed. John Wiley and Sons Limited, 2011. 728 p.
4. *Nikitina V.F., Smirnova N.N., Smirnova M.N. et al.* On-board electronic devices safety subject to high frequency electromagnetic radiation effects // *Acta Astronautica*. 2017. V. 135. P. 181–186.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.09.012>
5. *Ахметжанов Р.В., Бозатый А.В., Дьяконов Г.А. и др.* Электрические ракетные двигатели нового поколения для малых космических аппаратов // *Изв. Российской акад. наук. Энергетика*. 2019. № 3. С. 3–13.
<https://doi.org/10.1134/S0002331019030038>
6. *Kuge J., Bodin P., Persson S., Rathsmann P.* Accommodating electric propulsion on SMART-1 // *Acta Astronautica*. 2004. V. 55. Iss. 2. P. 121–130.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.04.003>
7. *Krejcia D., Seiferta B., Scharlemann C.* Endurance testing of a pulsed plasma thruster for nanosatellites // *Acta Astronautica*. 2013. V. 91. P. 187–193.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.06.012>
8. *Yu Qin, Kan Xie, Ning Guo, Zun Zhang et al.* The analysis of high amplitude of potential oscillations near the hollow cathode of ion thruster // *Acta Astronautica*. 2017. V. 134. P. 265–277.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.02.012>
9. *Shuai Cao, Xuan Wang, Junxue Ren et al.* Performance and plume evolutions during the lifetime test of a Hall-effect thruster // *Acta Astronautica*. 2020. V. 170. P. 509–520.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.12.036>
10. *Pelton J.N., Madry S.* Handbook of Small Satellites: Technology, Design, Manufacture, Applications, Economics and Regulation. Springer, 2020. 1702 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-36308-6>
11. *Kim V., Zakharchenko V., Merkurev D. et al.* Influence of Xenon and Krypton Flow Rates through the Acceleration Channel of Morozov's Stationary Plasma Thruster on the Thrust Efficiency // *Plasma Physical Reports*. 2019. V. 45. Iss. 1. P. 11–20.
<https://doi.org/10.1134/S1063780X19010082>
12. *Kim V., Merkurev D., Shilov E. et al.* Study of the low-power krypton-operated stationary plasma thruster plume // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. V. 927. 13th Intern. Conf. Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2020). 6–13 Sept. 2020, Alushta, Russia. 2020. Art. ID. 012053.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/927/1/012053>
13. *Плохих А.П., Важеннин Н.А., Попов Г.А.* Анализ влияния электромагнитного излучения стационарных плазменных двигателей на помехоустойчивость канала связи “Земля – космический аппарат” // *Косм. исслед.* 2019. Т. 57. № 5. С. 339–346. (*Cosmic Research*. 2019. V. 57. Iss. 5. P. 317–324.)
<https://doi.org/10.1134/S0023420619050078>
14. *Beiting E., Pollard J., Khayms V. et al.* Electromagnetic Emissions to 60 GHz from a BPT4000 EDM Hall Thruster // *Intern. Electric Propulsion Conf. Toulouse France*. 17–21 March 2003. Art. ID. IEPC-03-129. P. 17–21.
15. *Beiting E., Eapen X., Pollard J. et al.* Electromagnetic Emissions from PPS®1350 Hall Thruster // *31st Intern. Electric Propulsion Conf.* 20–24 Sept. 2009, Ann Arbor, USA. Art. ID. IEPC-2009-071. 13 p.
16. *Ciarallia S., Colettib M., Gabriela S.B.* Results of the qualification test campaign of a Pulsed Plasma Thruster for Cubesat Propulsion (PPTCUP) // *Acta Astronautica*. 2016. V. 121. P. 314–322.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.08.016>
17. *Плохих А.П., Важеннин Н.А., Попов Г.А., Шилов С.О.* Спектральные характеристики собственного излучения электрических ракетных двигателей с замкнутым дрейфом электронов в радиодиапазоне для различных рабочих тел // *Косм. исслед.* 2022. Т. 60. № 5. С. 396–403.
<https://doi.org/10.31857/S0023420622050065>

УДК 621.455.32

ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ РАЗРЯДА В АБЛЯЦИОННОМ ИМПУЛЬСНОМ ПЛАЗМЕННОМ ДВИГАТЕЛЕ

© 2023 г. А. В. Богатый¹, *, Г. А. Дьяконов¹, Н. В. Любинская¹,
Д. А. Муратаева¹, Г. А. Попов¹, С. А. Семенихин¹

¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

*boga-alex@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.

После доработки 09.04.2023 г.

Принята к публикации 12.04.2023 г.

Одно из перспективных направлений развития малых космических аппаратов (МКА) – создание малоразмерных электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) на основе абляционных импульсных плазменных двигателей (АИПД). Рассмотрена проблема оптимальной энергии разряда в АИПД, обеспечивающая минимальную полную массу ЭРДУ. Показано, что при заданном суммарном импульсе тяги энергия разряда АИПД имеет оптимум, зависящий от удельной энергоемкости силовых конденсаторов, удельного импульса тяги двигателя, а также от массы блоков электроники и других элементов структурной схемы двигательной установки. Сделан вывод, что при проектировании ЭРДУ на базе АИПД расчет оптимальной энергии разряда позволяет снизить полную массу двигательной установки.

DOI: 10.31857/S0023420623700139, EDN: HJVTLE

ВВЕДЕНИЕ

Создание малоразмерных электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) на основе абляционных импульсных плазменных двигателей (АИПД) представляется одним из перспективных направлений развития двигательных установок.

Исторически АИПД – это первые ЭРДУ, нашедшие практическое применение на борту космических аппаратов. 14 декабря 1964 г. на автоматической межпланетной станции “Зонд-2” в качестве исполнительных органов системы ориентации в космосе впервые были испытаны АИПД с электротермическим ускорением плазмы, созданные в Институте атомной энергии имени И.В. Курчатова [1]. В 1968 г. на борту американского спутника *LES-6* (англ. Lincoln Experimental Satellite) успешно работал созданный в США АИПД с электродинамическим ускорением плазмы [2]. В обоих случаях в качестве плазмообразующего вещества использовался фторопласт-4 (тефлон). Успешные летные испытания первых АИПД способствовали дальнейшему развитию работ в этой области. Были проведены исследования и получены результаты, свидетельствовавшие о целесообразности практического применения двигательных установок данного типа.

Сейчас можно говорить о начале нового этапа в развитии АИПД в России – этапа разработки и летных испытаний двигательных установок, предназначенных для выполнения конкретных задач на перспективных космических аппаратах. В Научно-исследовательском институте прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института (национальном исследовательском университете) (НИИ ПМЭ МАИ) создан ряд таких электроракетных двигательных установок, представленных в табл. 1 [3, 4]. Часть из них успешно прошла полный объем наземной экспериментальной отработки. ЭРДУ АИПД-45-2 в 2014 г. была выведена на орбиту в составе малого космического аппарата научного назначения *МКА-ФКИ ПН2* (“Вернов”) (ФКИ – фундаментальные космические исследования; ПН – порядковый номер), разработанного в Научно-производственном объединении им. С.А. Лавочкина [5, 6]. В Научно-исследовательском институте электромеханики совместно с НИИ ПМЭ МАИ создана самая мощная в мире ЭРДУ на основе АИПД – АИПД-95М, предназначенная для МКА научного назначения “*Ионосфера-М*” [7]. В настоящее время проводятся ресурсные испытания АИПД-95М. За рубежом наиболее активно АИПД развиваются в США, где в 2000-е гг. были проведены летные испытания АИПД, использовавшегося в системе точной ориентации космического аппарата

Таблица 1. Характеристики ЭРДУ на базе АИПД

ЭРДУ	АИПД-130	АИПД-350	АИПД-250	АИПД-45-2	АИПД-155	АИПД-95М	ЕО-1 (США)
Энергия разряда W , Дж	33	50	66	60	88	155	56
Потребляемая мощность N , Вт	75*	85	70	75	70	180	60
Удельный импульс тяги J_{sp} , м/с	9000*	12000	12000	11000	13200	13600	10400
Средняя тяга P , мН	1.5*	1.5	1.2	1.45	1.4	3.0	0.86
Суммарный импульс тяги J_{Σ} , кН с	10.0*	15.6	15.6	20.0	30.0	60.5	0.46
Запас рабочего тела m_p , кг	1.2	1.3	1.3	1.8	2.2	4.5	0.045
Полная масса ЭРДУ с запасом рабочего тела M , кг	5.0	7.5	8.2	10.5	14.0	20.63	4.95
Тяговая эффективность	0.10*	0.12	0.12	0.11	0.15	0.15	0.075
Цена тяги C_p , Вт/мН	50*	57	58	52	50	60	70
Частота импульсов f , Гц	2.0	1.5	0.9	1.2	0.7	0.9	1.0
Ресурс по числу импульсов	$1.3 \cdot 10^7$	$1.5 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^7$	$2.0 \cdot 10^7$	$1.8 \cdot 10^7$	$5.3 \cdot 10^5$

* Расчетные значения.

дистанционного зондирования Земли *Earth Observer-1 (EO-1)* [8]. Двигатель *EO-1* имеет довольно высокую энергию разряда и потребляемую мощность, но существенно меньший, по сравнению с отечественными аналогами, суммарный импульс тяги.

ЭРДУ на основе АИПД обладают следующими основными преимуществами:

- отсутствие зависимости удельных характеристик ЭРДУ от потребляемой мощности (линейная зависимость тяги от мощности);
- простота конструкции и электрической схемы, отсутствие дорогих материалов, что приводит к низкой стоимости ЭРДУ в целом;
- малая масса и простота системы питания и управления;
- простота и надежность системы хранения и подачи твердого рабочего тела;
- дешевое и недефицитное рабочее тело (фторопласт-4);
- постоянная готовность к работе и точное значение импульса тяги, что объясняется малой величиной единичного импульса.

СУЩЕСТВУЮЩИЙ РЯД ИМПУЛЬСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ И ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ РАЗРЯДА

В настоящее время в НИИ ПМЭ МАИ разработан ряд ЭРДУ на основе АИПД с энергией разряда от 33 до 155 Дж (табл. 1). Все они двухканальные, имеют общую компоновочную схему, показанную на рис. 1.

В состав типовой двухканальной ЭРДУ на основе АИПД входят два разрядных канала рельсового типа с боковой подачей твердого плазмообразующего вещества (фторопласт-4), две системы хранения и подачи рабочего тела (СХПРТ) с пружинными толкателями фторопластовых шашек, два высоковольтных блока инициирования разряда (БИР) со свечами поджига, двухканальная система питания и управления (СПУ), блок конденсаторного накопителя энергии (БНЭ). Все блоки ЭРДУ, за исключением БНЭ, дублированы, что повышает вероятность безотказной работы, а кроме того, увеличивает суммарный импульс тяги ЭРДУ за счет удвоенного запаса рабочего тела. В состав БНЭ входят включенные

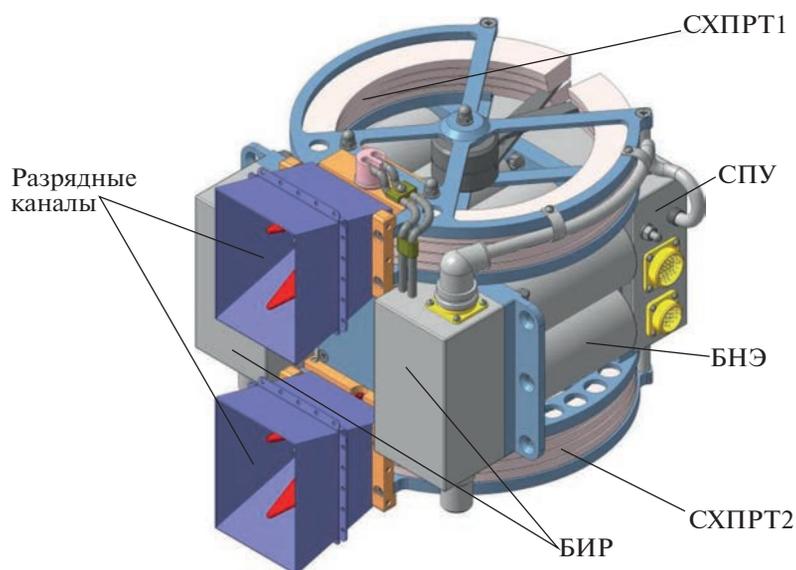


Рис. 1. Внешний вид ЭРДУ с АИПД.

параллельно от 4 до 18 импульсных конденсаторов, обрыв одного из которых не приводит к выходу из строя накопителя в целом, поэтому этот блок не требует резервирования [9].

Обращает на себя внимание обстоятельство, что при существенно различающихся энергии разряда (от 33 до 88 Дж), суммарных импульсах тяги (от 10 до 30 кН с) и массогабаритных характеристиках (полная масса ЭРДУ от 5 до 14 кг) потребляемая мощность и средняя тяга большинства двигательных установок примерно одинаковы (70...85 Вт и 1.2...1.5 мН). Это объясняется тем, что двигательные установки рассматриваемого ряда предназначены для КА с мощностью бортовой системы электропитания не более 100 Вт, а потребляемая мощность и средняя тяга регулируются частотой импульсов.

Таким образом, при близких тяговых характеристиках рассматриваемые двигатели имеют существенно различающуюся энергию разряда конденсаторного накопителя энергии, что неизбежно отражается на полной массе двигательных установок. Вместе с тем, известно, что от энергии разряда зависят удельные характеристики двигателей, такие как удельный импульс тяги и тяговая эффективность.

В настоящее время из-за сложности и нестационарности рабочих процессов в разрядном канале АИПД получить зависимость удельного импульса тяги от энергии разряда расчетным путем не представляется возможным. Имеющиеся аналитические и численные модели ускорения плазмы в импульсных плазменных ускорителях, например модель, описываемая в статье [10], включают варьируемые эмпирические коэффициенты, позволяющие подогнать расчетные осциллограммы тока и напряжения под экспериментально измеренные.

Однако имеющийся в НИИ ПМЭ МАИ большой опыт разработки и испытаний импульсных плазменных двигателей позволил выявить простые эмпирические закономерности, общие для всего ряда летных АИПД и их прототипов, представленных в табл. 1. В частности, зависимость удельного импульса тяги J_{sp} от энергии разряда W подчиняется простой эмпирической формуле, впервые предложенной в работе [11]:

$$J_{sp} = K\sqrt[3]{W}, \quad (1)$$

где K – некоторый размерный коэффициент, величина которого зависит от конструктивных особенностей двигателя. В частности, для АИПД рельсовой геометрии с боковой подачей плазмообразующего вещества и энергией разряда от 5 до 200 Дж коэффициент K равен:

$$K \approx 3 \cdot 10^3 \text{ кг}^{1/3} \text{ м}^{1/3} \text{ с}^{1/3}. \quad (2)$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 2, где на кривую, определяемую формулой (1), нанесены точки, соответствующие представленным в табл. 1 двигательным установкам. Часть точек лежит немного выше или ниже кривой, что определяется степенью совершенства разрядного контура АИПД.

Таким образом, хотя масса ЭРДУ с ростом энергии разряда увеличивается, при этом увеличивается и удельный импульс тяги, что приводит при заданном суммарном импульсе к уменьшению необходимого запаса рабочего тела. Это позволяет предположить, что существует некоторая оптимальная энергия разряда, при которой полная масса ЭРДУ минимальна.

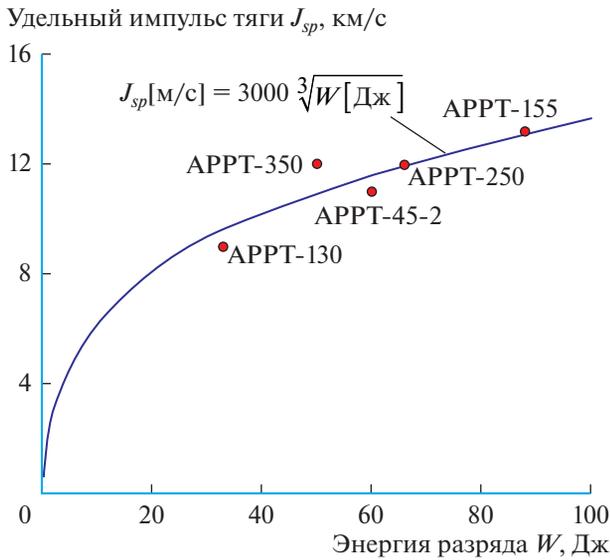


Рис. 2. Эмпирическая зависимость удельного импульса тяги АИПД от энергии разряда.

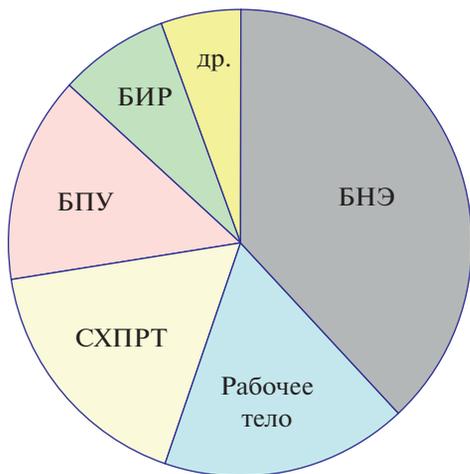


Рис. 3. Структура полной массы ЭРДУ на основе АИПД.

СТРУКТУРА ПОЛНОЙ МАССЫ ЭРДУ НА ОСНОВЕ АИПД И РАСЧЕТНАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ РАЗРЯДА

Основные закономерности, влияющие на величину полной массы ЭРДУ, рассмотрены в работе [11]. Структура полной массы ЭРДУ наглядно показана на рис. 3.

Как следует из диаграммы, основными составляющими полной массы ЭРДУ с АИПД выступают масса блока накопителя энергии и масса рабочего тела с системой его хранения и подачи. Вместе они составляют 70...75% его полной массы.

Масса блока накопителя энергии. Масса БНЭ определяется удельной энергоемкостью накопительных конденсаторов, а также массой разрядных шин, изоляторов, силовых элементов конструкции

и плотностью компаунда, используемого для заливки высоковольтных цепей. Удельная энергоемкость лучших современных сильноточных импульсных конденсаторов составляет $\omega_c = 25...30$ Дж/кг.

Из опыта конструирования АИПД следует, что масса остальных элементов конструкции БНЭ приблизительно пропорциональна суммарной массе конденсаторов M_C :

- масса разрядных шин, электродов разрядных каналов и других медных элементов разрядной цепи 20...30% массы конденсаторов M_C ;
- масса изоляторов, наибольший вклад в которую вносит масса заливочного компаунда 20...30% M_C ;
- масса силовых элементов конструкции (БНЭ, как правило, служит основным силовым элементом АИПД в целом) 40...50% M_C .

Масса БНЭ $M_{БНЭ}$ в целом приблизительно равна удвоенной массе конденсаторов и пропорциональна энергии разряда:

$$M_{БНЭ} \approx \frac{(1.0 + 0.3 + 0.2 + 0.5)W}{\omega_c} = 2 \cdot W / \omega_c.$$

Таким образом, основными направлениями снижения массы БНЭ следует считать уменьшение (оптимизацию) энергосодержания конденсаторной батареи и применение конденсаторов повышенной энергоемкости.

Масса рабочего тела и системы хранения и подачи рабочего тела. Масса запасаемого рабочего тела M_p определяется заданным суммарным импульсом тяги J_Σ и характерным для данного двигателя удельным импульсом тяги J_{sp} в соответствии с соотношением:

$$M_p = J_\Sigma / J_{sp}. \tag{3}$$

При этом зависимость удельного импульса тяги от энергии разряда определяется приближенной формулой (1).

Как показывает опыт конструирования АИПД, сухая масса системы хранения и подачи рабочего тела, включающая массу направляющих для подачи шашек, рычажно-пружинных механизмов и т.п., получается приблизительно равной массе запасаемого рабочего тела:

$$M_{СХПРТ} \approx M_p. \tag{4}$$

Таким образом, масса рабочего тела с системой его хранения и подачи составляет приблизительно

$$M_p + M_{СХПРТ} \approx 2 J_\Sigma / J_{sp}. \tag{5}$$

Основными резервами снижения массы рабочего тела и СХПРТ служат, как следует из соотношения (5), повышение удельного импульса тяги и снижение массы конструктивных элементов СХПРТ.

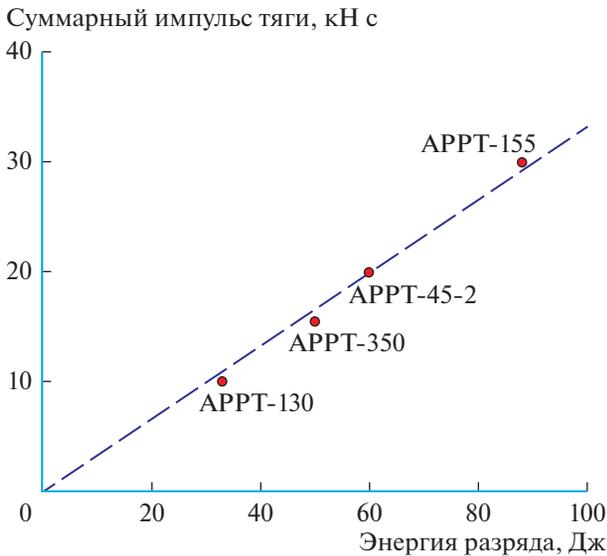


Рис. 4. Зависимость суммарного импульса тяги ЭРДУ с АИПД от энергии разряда.

Таким образом, так как масса БНЭ пропорциональна энергии разряда, следует рассмотреть возможность снижения запасаемой энергии, естественно, при сохранении средней тяги и суммарного импульса тяги двигательной установки. Сохранение заданной средней тяги при уменьшении запасаемой энергии и единичного импульса тяги достигается простым увеличением частоты импульсов. Сложнее сохранить суммарный импульс тяги J_{Σ} , так как он пропорционален удельному импульсу J_{sp} , в свою очередь зависящему от энергии разряда. Снижение удельного импульса J_{sp} влечет за собой пропорциональное увеличение массы запасаемого рабочего тела в соответствии с соотношением (5). Соответственно, полная масса ЭРДУ равна

$$M_{\text{ЭРДУ}} \approx M_{\text{констр}} + 2W/\omega_C + 2J_{\Sigma}/J_{sp}, \quad (6)$$

где масса конструктивно-силовых элементов двигательной установки $M_{\text{констр}} \approx 0.25M_{\text{ЭРДУ}}$, $J_{sp} [\text{м/с}] = 3000\sqrt[3]{W [\text{Дж}]}$ по формуле (1).

Из формулы (6), если найти и приравнять к нулю ее производную по энергии разряда W , следует, что энергия конденсаторного накопителя имеет оптимум по полной массе ЭРДУ, определяемый простым соотношением:

$$W_{\text{opt}} [\text{Дж}] = \left(\frac{\omega_C [\text{Дж/кг}] \cdot J_{\Sigma} [\text{Нс}]}{9000} \right)^{3/4}. \quad (7)$$

Оценочные расчеты энергии разряда по формуле (7) проводились для удельной энергоемкости конденсаторов $\omega_C = 28 \text{ Дж/кг}$. При этом сум-

марный импульс тяги J_{Σ} принимался равным 10, 20 и 30 кН·с. Рассчитанная энергия разряда W_{opt} составила соответственно 13.2, 22.2 и 30.0 Дж.

Таким образом, можно сделать вывод, что, несмотря на приближенный характер расчетов, опирающихся на эмпирическую формулу (1), энергия разряда существующих образцов АИПД существенно выше оптимальной с точки зрения получения минимальной массы ЭРДУ. Однако опыт разработки и испытаний АИПД в НИИ ПМЭ МАИ показывает, что снижение энергии разряда сопровождается увеличением цены тяги. Кроме того, снижение энергии разряда при условии получения заданной тяги неизбежно приводит к повышению частоты импульсов. Поэтому необходимо также учитывать ограничение срока службы электронных компонентов по числу разрядных импульсов. В настоящее время этот фактор считается основным препятствием на пути снижения массы ЭРДУ на базе АИПД.

ОПЫТ СНИЖЕНИЯ ПОЛНОЙ МАССЫ ЭРДУ С АИПД ЗА СЧЕТ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ РАЗРЯДА К ОПТИМАЛЬНОЙ

В 2020 г. в НИИ ПМЭ МАИ разработан экспериментальный образец абляционного импульсного плазменного двигателя АИПД-350. От ранее созданного образца АИПД-250 того же класса тяги и потребляемой мощности новый двигатель отличается:

- модульной конструкцией, допускающей раздельную сборку, регулировку и испытания двигательных блоков и блока накопителя энергии;
- приближенным к оптимальному для данного класса тяги энергосодержанием накопительной конденсаторной батареи;
- характеристиками разрядной цепи, обеспечивающими лучшее локально-временное согласование ввода энергии и массы плазмообразующего вещества в разрядные каналы.

Указанные особенности позволили уменьшить полную массу двигательной установки с СПУ и запасом рабочего тела с 8.2 до 7.5 кг при сохранении удельного импульса тяги 12 000 м/с и суммарного импульса тяги 15.6 кН·с.

Вместе с тем, на диаграммах, представленных на рис. 4 и 5, видно, что сохраняется прямо пропорциональная зависимость суммарного импульса тяги и полной массы ЭРДУ с АИПД от энергии разряда конденсаторного накопителя энергии. Полная масса АИПД-350 лишь незначительно меньше ожидаемой для заданного суммарного импульса тяги. С одной стороны, это позволяет уверенно прогнозировать массогабаритные характеристики ЭРДУ с АИПД на стадии эскизного проектирования, с другой — дальнейшее снижение массы возможно только при совершенствовании

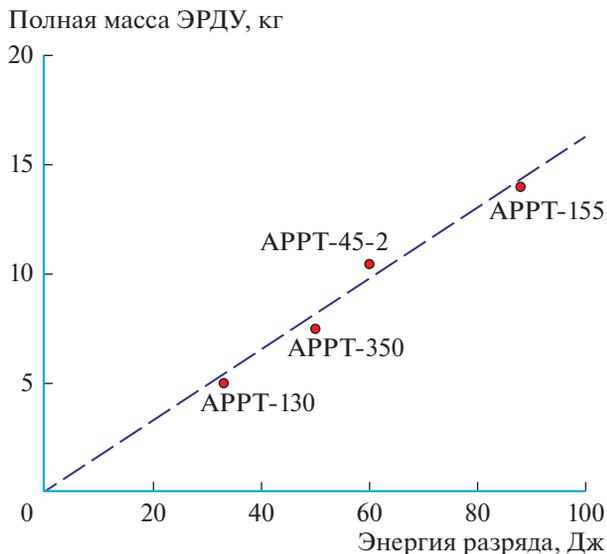


Рис. 5. Зависимость полной массы ЭРДУ с АИПД от энергии разряда.

электронной компонентной базы или при развитии новых схем импульсного ускорения плазмы, таких как двухступенчатые, многоканальные схемы, схемы с усилением магнитного поля и т.п., часть из которых рассмотрена в работе [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [11] показано, что наиболее перспективным способом улучшения массогабаритных характеристик ЭРДУ с АИПД представляется снижение массы конденсаторного накопителя энергии за счет оптимизации его энергосодержания и использования силовых конденсаторов с повышенной удельной энергоемкостью. Однако вопрос об оптимальной энергии разряда АИПД, предназначенных для различных целей, оставался открытым. Показано, что если в качестве критерия оптимальности использовать суммарную массу ЭРДУ при заданном суммарном импульсе тяги, то энергия разряда АИПД будет иметь оптимум в зависимости от удельной энергоемкости силовых конденсаторов, удельного импульса тяги двигателя и массы электронных блоков и других конструктивных элементов двигательной установки.

По результатам анализа структуры полной массы ЭРДУ с АИПД и возможности ее снижения можно сделать вывод, что энергия разряда в пределах от 30 до 60 Дж близка к оптимуму по минимальной полной массе ЭРДУ при энергоемкости существующих конденсаторов от 28 до 35 Дж/кг и при сохранении приемлемых удельных характеристик двигателя. При дальнейшем улучшении массогабаритных характеристик конденсаторов оптимум энергии разряда сместится в сторону больших значений при соответствующем увеличении удельного

импульса тяги и снижении цены тяги. При расчете оптимальной энергии разряда необходимо также учитывать ограничение срока службы электронных компонентов по числу разрядных импульсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пец Л.А., Симонов А.И., Храбров В.А.* Как создавали первые ЭРД // *Земля и Вселенная*. 2005. № 6. С. 57–60.
2. *Vondra R., Tomassen K., Solbes A.* Analysis of Solid Teflon Pulsed Plasma Thruster // *J. Spacecraft and Rockets*. 1970. V. 7. Iss. 12. P. 1402–1406. <https://doi.org/10.2514/3.30181>
3. *Antropov N.N., Bogatyu A.V., Boykachev V.N. et al.* Development of Russian Next-generation Ablative Pulsed Plasma Thrusters // *Procedia Engineering*. 2017. V. 185. P. 53–60. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.291>
4. *Богатый А.В., Дьяконов Г.А., Любинская Н.В. и др.* Современное состояние работ по созданию ЭРДУ с АИПД в НИИ ПМЭ МАИ // *Изв. РАН. Энергетика*. 2019. № 3. С. 96–109. <https://doi.org/10.1134/S0002331019030075>
5. *Антропов Н.Н., Богатый А.В., Дьяконов Г.А. и др.* Новый этап развития абляционных импульсных плазменных двигателей в НИИ ПМЭ // *Вестн. НПО им. С.А. Лавочкина*. 2011. № 5. С. 30–40.
6. *Antropov N.N., Bogaty A.V., Dyakonov G.A. et al.* New Stage in the Development of Ablative Pulsed Plasma Thrusters at RIAME MAI // *The Solar System Exploration*. 2012. V. 46. Iss. 7. P. 531–541. <https://doi.org/10.1134/S0038094612070064>
7. *Макриденко Л.А., Волков С.Н., Горбунов А.В. и др.* Космический комплекс “Ионозонд” // *Вопросы электромеханики*. Тр. ВНИИЭМ. 2019. Т. 170. № 3. С. 40–48.
8. *Zakrzewski C., Benson S., Sanneman P., Hoskins A.* On-Orbit Testing of the EO-1 // *38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. and Exhibit*. Indianapolis, Indiana, 7–10 July 2002. Art. ID. AIAA 2002-3973. <https://doi.org/10.2514/6.2002-3973>
9. *Антропов Н.Н., Богатый А.В., Данышов Ю.Т. и др.* Корректирующая двигательная установка с абляционным импульсным плазменным двигателем для малых космических аппаратов // *Вестн. НПО им. С.А. Лавочкина*. 2013. № 5. С. 33–37.
10. *Popov G.A., Khrustalev M.M., Khrabrov V.A. et al.* Physicomathematical Model of Plasma Acceleration in an Ablative Pulsed Plasma Thruster // *Plasma Physics Reports*. 2014. V. 14. Iss. 5. P. 336–342.
11. *Богатый А.В., Дьяконов Г.А., Нечаев И.Л. и др.* Перспективы улучшения массогабаритных характеристик абляционных импульсных плазменных двигателей // *Вопросы электромеханики*. Тр. ВНИИЭМ. 2013. Т. 133. С. 19–26.
12. *Богатый А.В., Дьяконов Г.А., Нечаев И.Л.* Абляционный импульсный плазменный двигатель с раздельным механизмом ионизации и ускорения рабочего тела // *Тр. МАИ*. 2012. Т. 52. С. 20.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ С МАЛОЙ ТЯГОЙ МЕЖДУ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТОЧКАМИ ЛИБРАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНЕТ

© 2023 г. В. Г. Петухов¹, *, С. У. Юн², **

¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

*PetukhovVG@mai.ru

**YunSU@mai.ru

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.

После доработки 26.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Цель исследования заключается в оптимизации межпланетного перелета космического аппарата с малой тягой с использованием коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 для стыковки геоцентрического или планетоцентрического участков траектории с гелиоцентрическим участком. Рассматривается задача оптимизации возмущенного гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета с малой тягой в рамках эфемеридной модели четырех тел, включающей Солнце, Землю, планету назначения и космический аппарат. Для оптимизации траекторий используется непрямой подход, основанный на использовании принципа максимума Понтрягина и метода продолжения. Показывается возможность сокращения требуемых затрат характеристической скорости по сравнению с оценками, полученными с применением метода точечных сфер действия.

DOI: 10.31857/S0023420623700127, EDN: PJLNХО

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно на начальном этапе проектирования межпланетных траекторий космических аппаратов (КА) используется метод точечных сфер действия (ТСД). В рамках допущений этого метода при расчете гелиоцентрических участков траектории пренебрегается протяженностью сферы действия. При этом точная стыковка планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории не используется. Вектор положения КА в начале и конце гелиоцентрического участка считается совпадающим с вектором положения планеты отправления в начальный момент времени и планеты прибытия в конечный момент времени соответственно, вектор гелиоцентрической скорости КА в начальный момент времени принимается равным сумме вектора гелиоцентрической скорости планеты отправления в этот момент времени и отлетного гиперболического избытка скорости КА, а вектор гелиоцентрической скорости КА в конечный момент времени — сумме гелиоцентрической скорости планеты назначения в этот момент времени и подлетного гиперболического избытка скорости КА. Для расчета гелиоцентрических и планетоцентрических участков траектории используется математическая модель движения КА в централь-

ном ньютоновском поле тяготения. Метод ТСД широко используется при проведении проектно-баллистического анализа межпланетных миссий с большой и малой тягой и во многих случаях дает удовлетворительные оценки основных траекторных параметров. Однако в рамках этого метода не рассчитывается непрерывная траектория межпланетного перелета, а пренебрежение притяжением Солнца на планетоцентрических участках и притяжением планет на гелиоцентрических участках может приводить к существенной методической погрешности, особенно при расчете межпланетных траекторий с малой тягой и малыми величинами отлетного и подлетного гиперболического избытка скорости. Именно такая ситуация возникает при расчете межпланетных траекторий, включающих планетоцентрические участки спиральной раскрутки при отлете с начальной орбиты вокруг планеты отправления и скрутки при выходе на конечную орбиту вокруг планеты назначения.

Поэтому актуальной представляется задача разработки подхода к оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой, который бы позволил, с одной стороны, получить более реалистичные результаты, а с другой стороны, был бы достаточно простым и обеспечивал возможность



Рис. 1. Схема межпланетного перелета КА с малой тягой между точками либрации ESL_2 и JSL_1 .

его применения на самых ранних стадиях проектирования космических миссий.

Устранить недостатки метода ТСД позволяет переход к более полной модели движения, учитывающей притяжение Солнца и планет на всех участках траектории. Разумеется, при использовании таких математических моделей возникает большее число вариантов решения, что осложняет проектирование космических миссий с их использованием, но и предоставляет больше возможностей для их оптимизации.

Существует большое количество работ по проектированию схем перелета межпланетных КА с использованием особенностей задачи трех или четырех тел, включая использование инвариантных многообразий точек либрации и орбит вокруг них [1–5]. Применение таких схем полета к межпланетным миссиям привело к новой концепции низкоэнергетических межпланетных перелетов Interplanetary Superhighway (межпланетная магистраль) [6, 7]. Применение таких схем перелета приводит, как правило, к значительному увеличению длительности перелета, а их расчет становится достаточно трудоемким.

В настоящей работе рассматривается другой подход решения задачи оптимизации межпланетной траектории КА с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) с учетом притяжения Солнца и планет на всех участках траектории. В рамках этого подхода планетоцентрические и гелиоцентрический участки стыкуются в коллинеарных точках либрации у планет отправления и прибытия. Рассматриваемая схема представляет интерес для межпланетных траекторий, включающих планетоцентрические участки раскрутки и скрутки с малой тягой, таких как траектории марсианской пилотируемой экспедиции с использованием ЭРДУ в качестве маршевой двигательной установки марсианского комплекса [8]. Разумеется, стыковка в точках либрации не считается

оптимальной, но ее можно использовать в качестве начального приближения для поиска оптимальных точек стыковки планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории с использованием метода, аналогичного методу, представленному в работе [9] для сквозной оптимизации траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами. На рис. 1 представлена схема перелета с малой тягой между точкой либрации L_2 системы Солнце–Земля (ESL_2) и точкой либрации L_1 системы Солнце–Юпитер (JSL_1). На этом рисунке, в частности, показаны оскулирующие гелиоцентрические орбиты этих точек либрации на моменты отправления и прибытия. Видно, что радиус афелия оскулирующей орбиты ESL_2 больше радиуса орбиты Земли, а радиус перигелия оскулирующей орбиты JSL_1 существенно меньше радиуса орбиты Юпитера. Это позволяет надеяться, что требуемые затраты характеристической скорости между этими точками либрации окажутся заметно меньше, чем затраты характеристической скорости на гелиоцентрический участок перелета Земля–Юпитер в рамках метода ТСД.

Для оценки перспективности рассматриваемого подхода в настоящей статье ограничимся только оптимизацией гелиоцентрических траекторий перелета с малой тягой между точками либрации у планеты отправления и планеты назначения. Вопросы оптимизации планетоцентрических траекторий и сквозной оптимизации всей межпланетной траектории планируем рассмотреть в последующих работах.

На всех участках траектории учитывается притяжение Солнца, планеты отправления, планеты прибытия и, при необходимости, притяжение других небесных тел. Рассматривается задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории с малой тягой между точками либрации планет в рамках математических моделей

идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности и двигателя ограниченной тяги. Для оптимизации траекторий используется не прямой подход, основанный на использовании принципа максимума и метода продолжения по гравитационному параметру. Приводится сравнение полученных оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации и траекторий с применением метода ТСД.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОГО УЧАСТКА МЕЖПЛАНЕТНОЙ ТРАЕКТОРИИ С КОНЕЧНОЙ ТЯГОЙ

Рассмотрим задачу минимизации затрат топлива на перелете между двумя заданными точками либрации за фиксированное время Δt с использованием уравнений движения в декартовых координатах. Уравнения движения КА в инерциальной гелиоцентрической системе координат и краевые условия такой задачи могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{r}} + \delta \frac{T}{m} \mathbf{e}_T, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{T}{c}, \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad m(t_0) = m_0, \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$ – силовая функция ($\Omega_0 = \mu_s/r$ – основная часть силовой функции, связанная с центральным притягивающим телом (Солнцем),

$\Omega_p = \sum_{j=1}^2 \mu_j \left[\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right]$ – возмущающая часть

силовой функции, связанная с притяжением удаленных небесных тел (планет); \mathbf{r} – вектор положения КА; \mathbf{v} – вектор скорости КА; μ_s – гравитационный параметр Солнца; $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{r}_j , μ_j – векторы положения и гравитационные параметры Земли ($j = 1$) и целевой планеты ($j = 2$); δ – релейная функция тяги ($\delta = 1$ при включенном двигателе и $\delta = 0$ при выключенном); T – тяга; \mathbf{e}_T – единичный вектор в направлении тяги; m – масса КА; c – скорость истечения; t – время, нижний индекс “0” означает, что переменная относится к начальной точке траектории, а нижний индекс “ f ” – что переменная относится к конечной точке траектории, $t_f = t_0 + \Delta t$.

Рассмотрим следующий функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{T}{c} dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

соответствующий задаче минимизации затрат топлива. Задачу с таким функционалом будем называть задачей с ограниченной тягой, или ОТ-за-

дачей. Применяя принцип максимума, можно записать функцию Понтрягина в виде:

$$H = -\delta \frac{T}{c} + \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{r}} + \delta \frac{T}{m} \mathbf{p}_v^T \mathbf{e}_T - \delta \frac{T}{c} p_m. \quad (3)$$

Следующее оптимальное управление обеспечивает максимум H по направлению и величине тяги:

$$\mathbf{e}_T = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad \delta = \frac{1 + \text{sign} S}{2}, \quad S = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m + 1}{c}. \quad (4)$$

Подстановка этого оптимального управления в функцию Понтрягина приводит к следующему гамильтониану:

$$H = \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{r}} + \delta T S. \quad (5)$$

Уравнения оптимального движения рассматриваемой задачи оптимального управления имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_r} = \mathbf{v}, & \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_v} = \Omega_{\mathbf{r}} + \delta T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}_v}, \\ \frac{dm}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m} = \delta T \frac{\partial S}{\partial p_m}, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\Omega_{\mathbf{r}\mathbf{r}} \mathbf{p}_v, & \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{p}_r, \\ \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\delta T \frac{\partial S}{\partial m}. \end{cases} \quad (6)$$

С учетом условия трансверсальности, граничные условия для задачи перелета между точками либрации на гелиоцентрическом участке траектории можно записать в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad m(t_0) = m_0, \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad p_m(t_f) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Задача оптимального управления (1), (2) с использованием принципа максимума сводится к двухточечной краевой задаче (6), (7). Эта краевая задача может быть формально представлена как система нелинейных уравнений для невязок \mathbf{f} , для решения которой необходимо вычислить вектор неизвестных начальных значений сопряженных переменных \mathbf{z} . Таким образом, необходимо найти такую \mathbf{z} , для которой $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$, где

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \\ p_m(t_f) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r(t_0) \\ \mathbf{p}_v(t_0) \\ p_m(t_0) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Эффективным методом решения такого класса краевых задач выступает метод продолжения [10–14]. Для обеспечения возможности проведения оптимизации траектории без необходимости задания начального приближения начальных значений сопряженных переменных \mathbf{p}_{r0} , \mathbf{p}_{v0} , p_{m0} требуется последовательность оптимизации траекторий с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ОМ-задачи) и с двигателем ограниченной тяги. В работах [10–12] приведены методы решения задачи оптимизации межпланетного перелета ОМ-траекторий при использовании метода продолжения по гравитационному параметру, позволяющего находить экстремали ОМ-задачи с заданной угловой дальностью с нулевым начальным приближением для неизвестных параметров.

Для продолжения решения ОМ-задачи в решении ОТ-задач (гомотопии между ОМ- и ОТ-траекториями), используется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{0rr} + \tau\Omega_{pr} + \frac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau mp_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} = -\Omega_{0rr}\mathbf{p}_v - \tau\Omega_{prr}\mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_r, \\ \frac{dm}{dt} = -\tau\delta\frac{T}{c}, \quad \frac{dp_m}{dt} = \tau\delta\frac{T}{m^2} p_v. \end{cases} \quad (9)$$

Эта система при $\tau = 0$ совпадает с системой дифференциальных уравнений для невозмущенного межпланетного перелета с идеально-регулируемым двигателем, а при $\tau = 1$ – с системой (6). При вычислении системы дифференциальных уравнений (9) используется сглаживание функции тяги $\delta(S)$ с применением аналитической аппроксимации функции в виде гиперболического представления [15]:

$$\delta(S) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 + c\varepsilon^2(\tau)}} \right), \quad (10)$$

где $c = 2(\sqrt{2} + 1) \approx 4.828427$; $\varepsilon(\tau)$ – положительный регуляризирующий член, регулирующий степень близости аппроксимации к ступенчатой функции: чем меньше ε , тем ближе аппроксимация к ступенчатой функции. При проведении вычислений в этой работе использовалась зависимость $\varepsilon(\tau) = 1 - \tau + \varepsilon_f \tau$, где $\varepsilon_f = 10^{-4} \dots 10^{-5}$.

Метод продолжения сводит краевую задачу к задаче Коши. Для вычисления правых частей

дифференциальных уравнений метода продолжения требуется вычислить частные производные от \mathbf{f} по \mathbf{z} и параметру продолжения τ . Частные производные $\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}}$ и $\frac{d\mathbf{f}}{d\tau}$ могут быть вычислены с использованием совместного интегрирования дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных с уравнениями для их производных по \mathbf{z} и τ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{z}} = \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} + \tau\Omega_{prr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\tau\mathbf{p}_v}{1-\tau+\tau mp_v} \times \\ \times \left[\frac{\partial \delta T}{\partial \mathbf{z}} - \frac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau mp_v} \left(p_v \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} + m \frac{\partial p_v}{\partial \mathbf{z}} \right) \right] + \\ + \frac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau mp_v} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Omega_{0rr}\mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} - \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} - \\ - \tau \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\Omega_{prr}\mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{prr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} \right], \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} = -\tau \frac{T}{c} \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{z}} = \tau \frac{\partial \delta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{z}} \frac{T}{m^2} p_v + \tau\delta \frac{T}{m^2} \left[\frac{\partial p_v}{\partial \mathbf{z}} - \frac{2p_v}{m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{z}} \right]. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \Omega_{pr} + \tau\Omega_{prr} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{p}_v}{1-\tau+\tau mp_v} \times \\ \times \left[-1 + \delta T - \frac{(-1+mp_v)(1-\tau+\tau\delta T)}{1-\tau+\tau mp_v} + \right. \\ \left. + \tau T \frac{\partial \delta}{\partial \tau} - \frac{\tau}{1-\tau+\tau mp_v} \left(p_v \frac{\partial m}{\partial \tau} + m \frac{\partial p_v}{\partial \tau} \right) \right] + \\ + \frac{1-\tau+\tau\delta T}{1-\tau+\tau mp_v} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega_{0rr}\mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} - \Omega_{0rr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} - \Omega_{prr}\mathbf{p}_v - \\ - \tau \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega_{prr}\mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} + \Omega_{prr} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \right], \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} = -\frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial m}{\partial \tau} = -\delta \frac{T}{c} - \tau \frac{T}{c} \frac{\partial \delta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial p_m}{\partial \tau} = \delta \frac{T}{m^2} p_v + \tau \frac{\partial \delta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{T}{m^2} p_v + \\ + \tau\delta \frac{T}{m^2} \left[\frac{\partial p_v}{\partial \tau} - \frac{2p_v}{m} \frac{\partial m}{\partial \tau} \right]. \end{cases} \quad (12)$$

со следующими начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \Big|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \Big|_{t=t_0} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \\
 \frac{\partial m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \Big|_{t=t_0} = 0,
 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_{m0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_{m0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial p_{m0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial p_{m0}} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial p_m}{\partial p_{m0}} \Big|_{t=t_0} = 1, \\
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = 0, \\
 \frac{\partial m}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial p_m}{\partial \tau} \Big|_{t=t_0} = 0.
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \quad (13)$$

Конечные условия, как и раньше, следующие:

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad p_m(t_f) = 0.$$

Матрица $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ может быть вычислена с использованием конечных значений производных от фазовых и сопряженных переменных следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \left. \begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_{m0}} \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p_{m0}} \\
 \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \quad \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \quad \frac{\partial p_m}{\partial p_{m0}} \\
 \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{r0}} \quad \frac{\partial p_m}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \quad \frac{\partial p_m}{\partial p_{m0}}
 \end{aligned} \right\} \\
 &\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \\
 \frac{\partial p_m}{\partial \tau} \\
 \frac{\partial p_m}{\partial \tau}
 \end{aligned} \right\} \Big|_{t=t_f}
 \end{aligned} \right\}$$

Вектор $\partial \mathbf{f} / \partial \tau$ вычисляется аналогично:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \left. \begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \\
 \frac{\partial p_m}{\partial \tau} \\
 \frac{\partial p_m}{\partial \tau}
 \end{aligned} \right\} \Big|_{t=t_f}
 \end{aligned} \right\}$$

Отметим, что правые части дифференциальных уравнений для сопряженных переменных содержат производные от силовой функции по фазовым переменным, другими словами, производные от возмущающей части функции по фазовым переменным. В рассматриваемой математической модели задачи многих тел эти производные ($\Omega_{0r}, \Omega_{0rr}, \Omega_{0rrr}, \Omega_{pr}, \Omega_{prt}$ и Ω_{prrr}) достаточно просто представляются в аналитическом виде, поэтому в

рассматриваемой задаче, в отличие от исследования [16], не требуется специализированный алгоритм высокоточного вычисления производных от возмущающих ускорений по фазовым координатам.

Вычислительная схема оптимизации гелиоцентрического участка ОТ-траектории между точками либрации следующая:

1. Задается время прохождения точки либрации L_2 системы Земля–Солнце t_{L_2} и длительность перелета Δt . Тогда момент прохождения точки либрации L_1 системы планета–Солнце $t_{L_1} = t_{L_2} + \Delta t$. Вычисляются векторы положения и скорости двух точек либрации $\mathbf{r}_{L_2}, \mathbf{v}_{L_2}, \mathbf{r}_{L_1}$ и \mathbf{v}_{L_1} , для заданных дат пролета.

2. Методом продолжения по гравитационному параметру вычисляется оптимальная невозмущенная ОМ-траектория. При решении ОМ-задачи задается число целых витков вокруг Солнца.

3. Методом продолжения решается краевая задача (6), (7) для вычисления оптимальной возмущенной ОТ-траектории. При этом используются системы дифференциальных уравнений (9), (11), (12) с дополнительными начальными условиями (13). В качестве начального приближения для начальных значений сопряженных переменных используются значения из решения ОМ-задачи.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Верификация численных результатов

Для проверки корректности используемого подхода была проведена верификация полученных с его помощью численных результатов с результатами других авторов.

В публикации [17], представлено решение задачи оптимизации возмущенной траектории межпланетного перелета с конечной тягой с использованием программного обеспечения T_3D. В исследовании [17] была рассмотрена оптимальная траектория перелета КА от Земли с начальным гиперболическим избытком скорости 2000 м/с до Марса с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта принималась равной 25.XII.2010, 00.00.00, длительность перелета к Марсу – 877 сут, начальная масса КА – 1000 кг, тяга ЭРДУ – 100 мН, удельный импульс ЭРДУ – 1630 с. В работе [17] учитывались возмущающие ускорения от светового давления и притяжения Земли. Однако влияние возмущения от светового давления оказалось незначительным, поэтому в процессе верификации учитывалось только возмущающее ускорение от притяжения Земли. Конечная масса КА, полученная в исследовании [17], равна 763.21 кг для невозмущенной задачи и 760.276 кг для возмущенной, а с помощью представленной в настоя-

шей статье методики – 763.213 кг для невозмущенной задачи и 760.251 кг для возмущенной. Относительная разница в конечной массе КА составляет 0.0004 и 0.0033% для невозмущенной и возмущенной задач соответственно. На рис. 2 представлены зависимости функций тяги δ (толстые линии) и переключения S (тонкие линии) от времени для невозмущенной (сплошные линии) и возмущенной (пунктирные линии) траектории.

В публикациях [18, 19] были приведены оптимальные траектории перелета к Юпитеру с конечной тягой с использованием метода ТСД с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта принималась равной 12.XII.2008, 00.00.00, длительность перелета к Юпитеру – 1965 сут, начальная масса КА – 1500 кг, тяга ЭРДУ – 330 мН, удельный импульс ЭРДУ – 3801.29 с. Для этой задачи в работе [18] были получены затраты топлива 508.04 кг, в работе [19] – 508.7 кг. При использовании приведенной в настоящей работе методики получены затраты топлива 508.06 кг, что близко к решению из работы [18]. По сравнению с результатом в публикации [19], ЭРДУ выключается на конечном участке траектории в выводах работы [18] и нашем исследовании. На рис. 3 представлены зависимости функций тяги δ (толстые линии) и переключения S (тонкие линии) от времени для рассматриваемой траектории.

Определение оптимальной даты отлета КА с использованием метода точечных сфер действия

Характеристики оптимальных гелиоцентрических участков межпланетных траекторий КА с малой тягой сильно зависят от даты отправления и длительности перелета. Поэтому для сравнения гелиоцентрических траекторий, рассчитанных методом ТСД и рассматриваемым в этом статье методом, целесообразно использовать оптимальные даты старта для фиксированной длительности перелета.

Рассмотрим задачу оптимизации гелиоцентрических траекторий с малой тягой к Марсу, Юпитеру и Сатурну. Для поиска оптимальных дат старта проварируем их с шагом в один день в течение синодического периода целевой планеты по отношению к Земле (2.135 г. для перелета к Марсу, 1.092 г. для перелета к Юпитеру и 1.035 г. для перелета к Сатурну). В результате определяется ОМ-траектория с минимальным значением функционала $J_{LP} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2 dt$ [10–12], а ОТ-траектория – с минимальном значением затрат характеристической скорости в рассматриваемом диапазоне периода даты отлета. В табл. 1 представлены основные исходные данные решаемых задач: диапазон рассматриваемых дат отлета КА от Земли, длительность перелета КА, число целых вит-

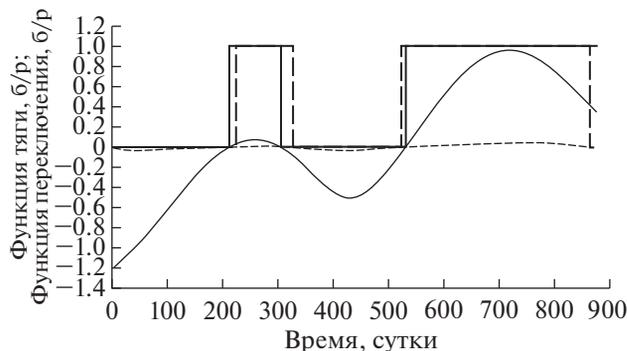


Рис. 2. Зависимости функции тяги и переключения от времени для оптимальных невозмущенной и возмущенной траекторий перелета к Марсу.

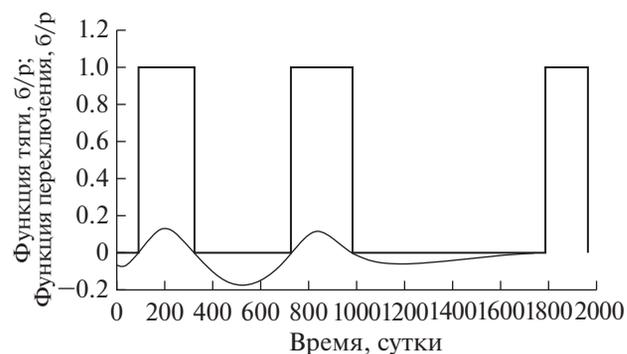


Рис. 3. Зависимости функции тяги и переключения от времени для оптимальных траекторий перелета к Юпитеру с использованием метода ТСД.

ков гелиоцентрической траектории, начальная масса КА и характеристики ЭРДУ для рассматриваемых вариантов перелета.

Сначала найдем оптимальные даты отлета для оптимальных гелиоцентрических траекторий с использованием метода ТСД. Для перелета к Юпитеру рассмотрим оптимальные ОМ-траектории продолжительностью 2200 сут с угловой дальностью от 360° до 1080° . Зависимости функционала для таких ОМ-траекторий от даты отлета КА представлены на рис. 4. Решения с двумя целыми витками ($N_{rev} = 2$) обозначены черными квадратами, а решения с $N_{rev} = 1$ – серыми кружками.

В результате применения метода ТСД вычислена оптимальная дата отлета – 4.III.2022, которой соответствует минимальное значение функционала $J_{LP} = 1.93462 \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. Видно, что, могут существовать четыре разные даты отлета при одинаковом значении функционала, превышающем это минимальное значение (см. пересечения пунктирной линии с кривой на рис. 4).

Колебания функционала при изменении даты старта связаны с движением Земли вокруг барицентра системы Земля–Луна в эфемеридной модели

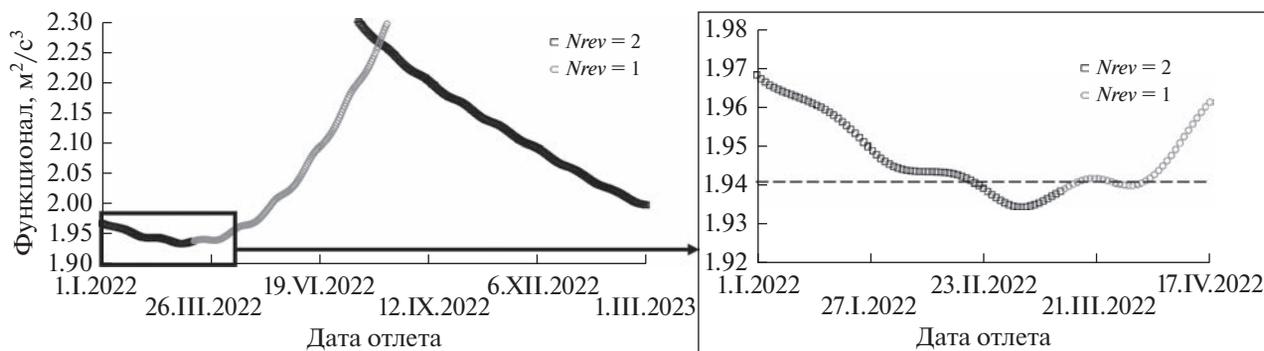


Рис. 4. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета Земля–Юпитера, рассчитанных с использованием метода ТСД.

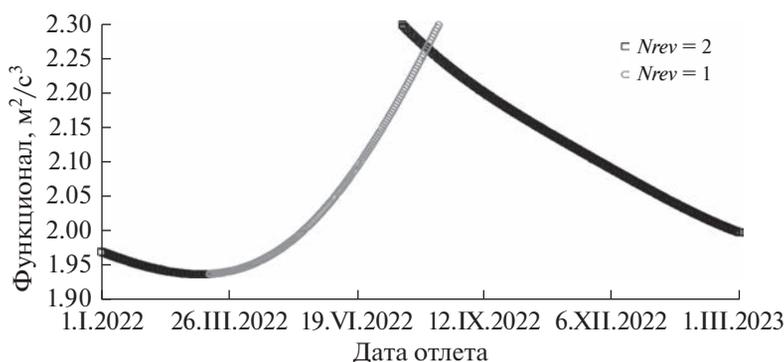


Рис. 5. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета от барицентра системы Земля–Луна до Юпитера, рассчитанных с использованием метода ТСД.

движения. На рис. 5 представлен график зависимости функционала от даты отлета для этой же задачи при использовании в методе ТСД в качестве точки отлета барицентра системы Земля–Луна вместо центра Земли. На этом графике колебания функционала отсутствуют.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета к Юпитеру на основе использования исходных данных из табл. 1. На рис. 6 представлены зависимости затрат характеристической скорости перелета V_{ch} к Юпитеру от даты отлета.

В рассматриваемом синодическом периоде оптимальная дата отлета, обеспечивающая мини-

мум характеристической скорости V_{ch} – 3.III.2022. Таким образом, при использовании метода ТСД, оптимальная дата отлета для ОМ- и ОТ-траекторий отличается всего на одни сутки.

В качестве следующих примеров рассмотрим оптимальные траектории перелета от Земли к Марсу с длительностью перелета 350 сут и от Земли к Сатурну с длительностью перелета 3500 сут. Рассматриваемая угловая дальность траектории Земля–Марс – менее 360° , а траектории Земля–Сатурн – от 720° до 1080° .

На рис. 7 представлены зависимости функционала ОМ-задачи от даты отлета для оптималь-

Таблица 1. Исходные данные для решения задачи оптимизации гелиоцентрических траекторий КА с ЭРДУ

Параметры	Земля–Марс	Земля–Юпитер	Земля–Сатурн
Диапазон дат отлета	1.I.2025–1.III.2027	1.I.2022–1.III.2023	1.III.2038–31.III.2039
Время перелета, сут	350	2200	3500
Число целых витков	0	1–2	2
Начальная масса КА, кг	1000	2000	20000
Тяга, мН	350	220	2000
Удельный импульс, с	2000	3000	5000

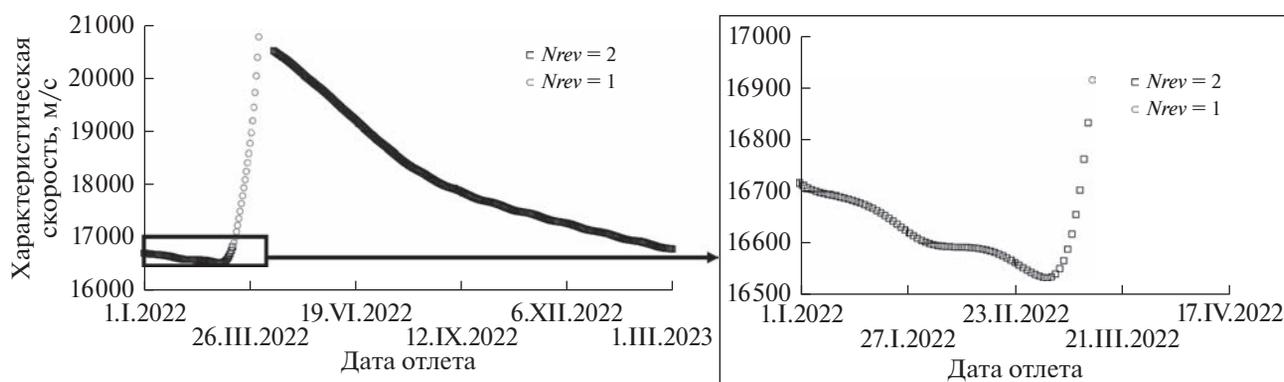


Рис. 6. Зависимости характеристической скорости V_{ch} для оптимальных ОТ-траекторий перелета Земля–Юпитера с методом ТСД от даты отлета.

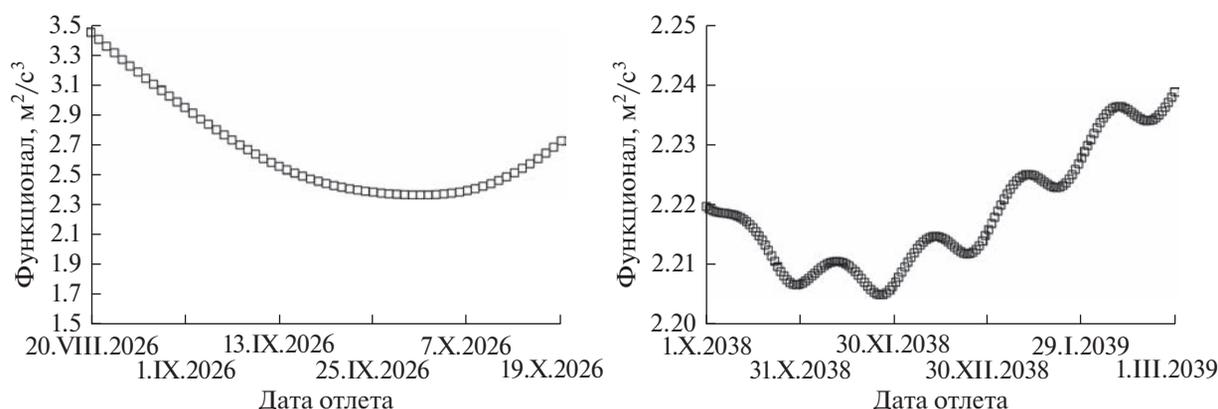


Рис. 7. Зависимости функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета Земля–Марс (слева) и Земля–Сатурн (справа) при использовании метода ТСД.

ных траекторий перелета КА к Марсу и Сатурну при использовании метода ТСД. На представленных графиках показаны результаты в окрестности их оптимальных значений, а не всего рассматриваемого синодического периода.

Для гелиоцентрической траектории перелета к Марсу оптимальная дата отлета – 1.X.2026, а функционал, соответствующий этой дате: $J_{LP} = 2.36546 \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. Для перелета к Сатурну оптимальная дата отлета – 26.XI.2038 г., а соответствующий этой дате функционал равен $2.20484 \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$.

На левом графике рис. 7 не очень хорошо виден колебательный характер зависимости функционала от даты отлета из-за большого диапазона изменения функционала на этом графике. При увеличении длительности перелета и количества витков колебательный характер изменения функционала снова становится хорошо заметным. В качестве примера на рис. 8 представлены зависимости функционала ОМ-задачи от даты отлета для перелета Земля–Марс продолжительностью 1300 сут с угловой дальностью от двух до трех витков.

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета к Марсу при заданных удельном импульсе $I_{sp} = 2000 \text{ с}$ и тяге $T = 350 \text{ мН}$ и к Сатурну при $I_{sp} = 5000 \text{ с}$ и тяге $T = 2000 \text{ мН}$. Начальная масса КА на отлетной от Земли траектории принята равной 1000 кг для перелета к Марсу и 20000 кг для перелета к Сатурну.

На рис. 9 представлены зависимости характеристической скорости перелета V_{ch} от даты отлета для рассматриваемых ОТ-траекторий. Интересно, что значение характеристической скорости перелета КА быстро возрастает после прохождения минимального значения, как и для случая перелета к Юпитеру (рис. 6).

Оптимальная дата отлета к Марсу для ОТ-траектории – 22.IX.2026 г., а для перелета к Сатурну – 19.II.2039 г. В отличие от перелета к Юпитеру, разница между оптимальными датами отлета для ОМ- и ОТ-траекторий получается существенно больше и составляет девять суток для перелета Земля–Марс и 85 сут для перелета Земля–Сатурн.

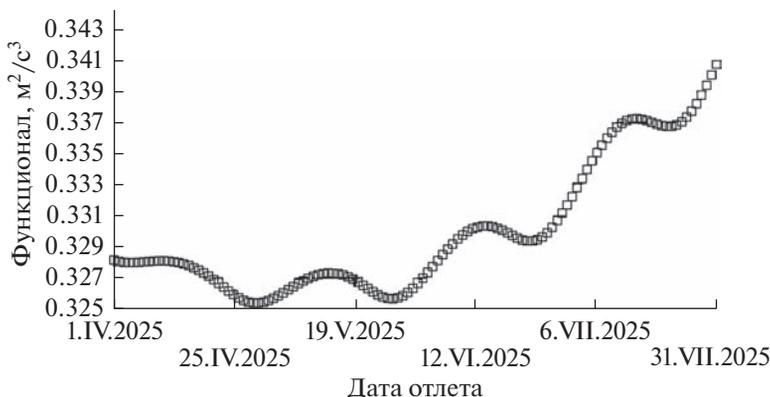


Рис. 8. Зависимость функционала от даты отлета для оптимальных ОМ-траекторий перелета к Марсу продолжительностью 1300 сут с угловой дальностью от двух до трех витков.

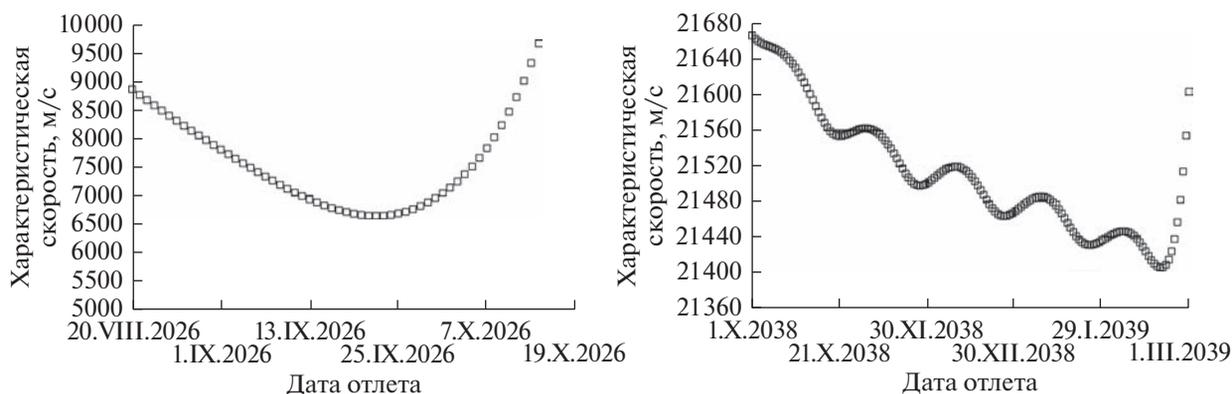


Рис. 9. Зависимости характеристической скорости V_{ch} от даты отлета для оптимальных ОТ-траекторий Земля–Марс (слева) и Земля–Сатурн (справа) при использовании метода ТСД.

Сравнение оптимальных гелиоцентрических траекторий между точками либрации с результатами оптимизации траекторий с использованием метода точечных сфер действия

Рассмотрим численные результаты решения задачи оптимизации гелиоцентрического участка межпланетного перелета между точками либрации ESL_2 системы Земля–Солнце и L_1 системы планета–Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. В табл. 2 представлены принятые значения гравитационных параметров планет и положения точек либрации L_1 и L_2 системы планета–Солнце в мгновенной синодической системе координат, в которой за единицу расстояния принято текущее гелиоцентрическое удаление планеты. Гравитационный параметр Солнца принят равным $132\,712\,440\,018\text{ км}^3/\text{с}^2$.

Рассмотрим три типа оптимальных траекторий перелета между точками либрации, начинающихся от точки либрации L_2 системы Земля–Солнце (ESL_2): 1) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Юпитер–Солнце (JSL_1), 2) траектории перелета к точке либрации L_1 системы Марс–Солнце (MSL_1), 3) траектории перелета к точке

либрации L_1 системы Сатурн–Солнце (SSL_1). При вычислении оптимальных траекторий перелета между точками либрации используются даты отлета КА, определенные с помощью метода ТСД при той же длительности перелета.

В результате решения задачи оптимизации возмущенной ОМ-траектории межпланетного перелета с использованием в качестве граничных условий точек либрации получены следующие величины функционала: $1.56095\text{ м}^2\text{ с}^{-3}$ для перелета ESL_2 – JSL_1 , $1.83791\text{ м}^2\text{ с}^{-3}$ для перелета ESL_2 – MSL_1 и $1.9153\text{ м}^2\text{ с}^{-3}$ для перелета ESL_2 – SSL_1 .

Можно сделать вывод, что полученные значения функционала ОМ-траектории перелета между точками либрации уменьшаются по сравнению с траекториями, рассчитанными с использованием метода ТСД во всех рассмотренных случаях перелета (на 19.315% для перелета Земля–Юпитер, на 22.302% для перелета Земля–Марс и на 13.132% для перелета Земля–Сатурн).

На рис. 10 показаны рассматриваемые траектории перелета к Юпитеру в проекции на плоскость xy в эллиптической гелиоцентрической системе координат. На левом рисунке представлена

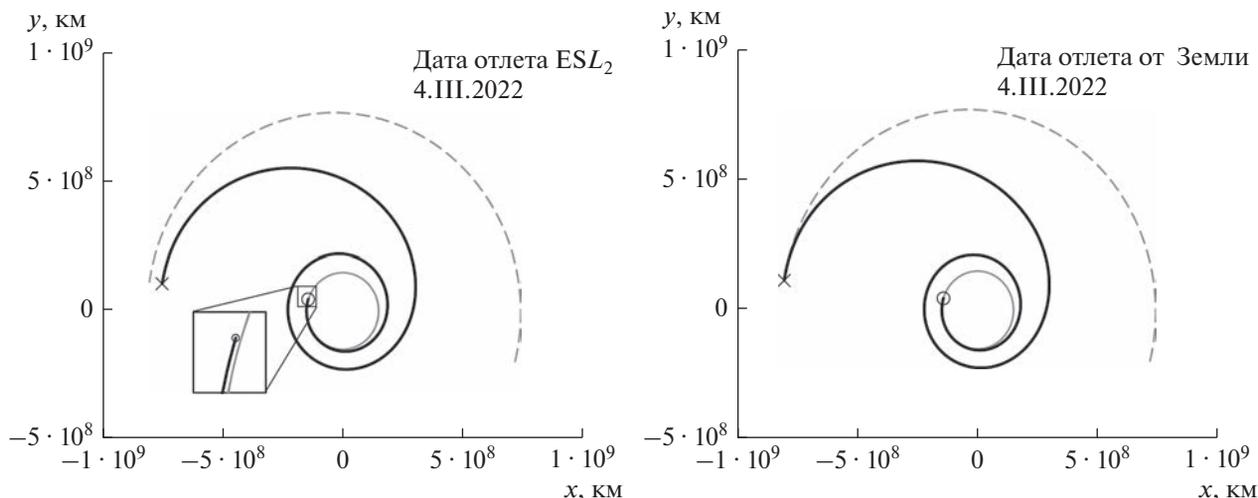


Рис. 10. Сравнение ОМ-траекторий межпланетного перелета КА к Юпитеру (слева – возмущенная траектория перелета между точками либрации, справа – траектория, полученная с использованием метода ТСД).

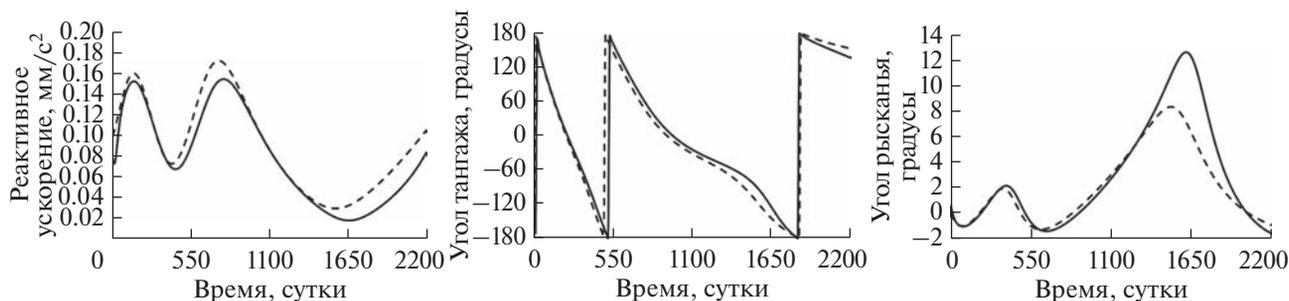


Рис. 11. Сравнение программ управления на ОМ-траекториях перелета КА к Юпитеру: пунктирная линия – траектория, рассчитанная с использованием метода ТСД, сплошная линия – возмущенная траектория между точками либрации ESL_2 – JSL_1 .

оптимальная траектория между точками либрации ESL_2 – JSL_1 , а на правом – траектория перелета Земля–Юпитер с минимальным значением функционала при использовании метода ТСД. Начальное и конечное положение КА помечены черными знаками “o” и “x”, орбита Земли обозначена серой сплошной линией, а орбита Юпитера – серой пунктирной линией. На рис. 11 представлены зависимости реактивного ускорения и углов ориентации реактивного ускорения от времени перелета для обоих решений.

Для перелета к Юпитеру проводились тестовые расчеты ОМ-траектории межпланетного перелета ESL_2 – JSL_1 с дополнительным учетом притяжения Луны и Марса. Для рассматриваемого варианта учет этих дополнительных возмущений привел к очень малому изменению величины функционала (с 1.56095 до 1.56119 $m^2 c^{-3}$). В связи с этим можно утверждать, что рассматриваемая модель возмущений (притяжение Земли и Юпитера) дает достаточно точные результаты для оценки эффективности предложенной схемы межпланетного полета КА с малой тягой.

Таблица 2. Гелиоцентрическое положение точек либрации системы планета–Солнце

Система	$\mu, km^3 c^{-2}$	x_{L_1}	x_{L_2}
Земля–Солнце	398600.435507	0.9900295973	1.010037119
Марс–Солнце	42828.375816	0.9952516495	1.004763429
Юпитер–Солнце	126712764.1	0.9333193308	1.069784541
Сатурн–Солнце	37940584.8418	0.9550308982	1.046359330

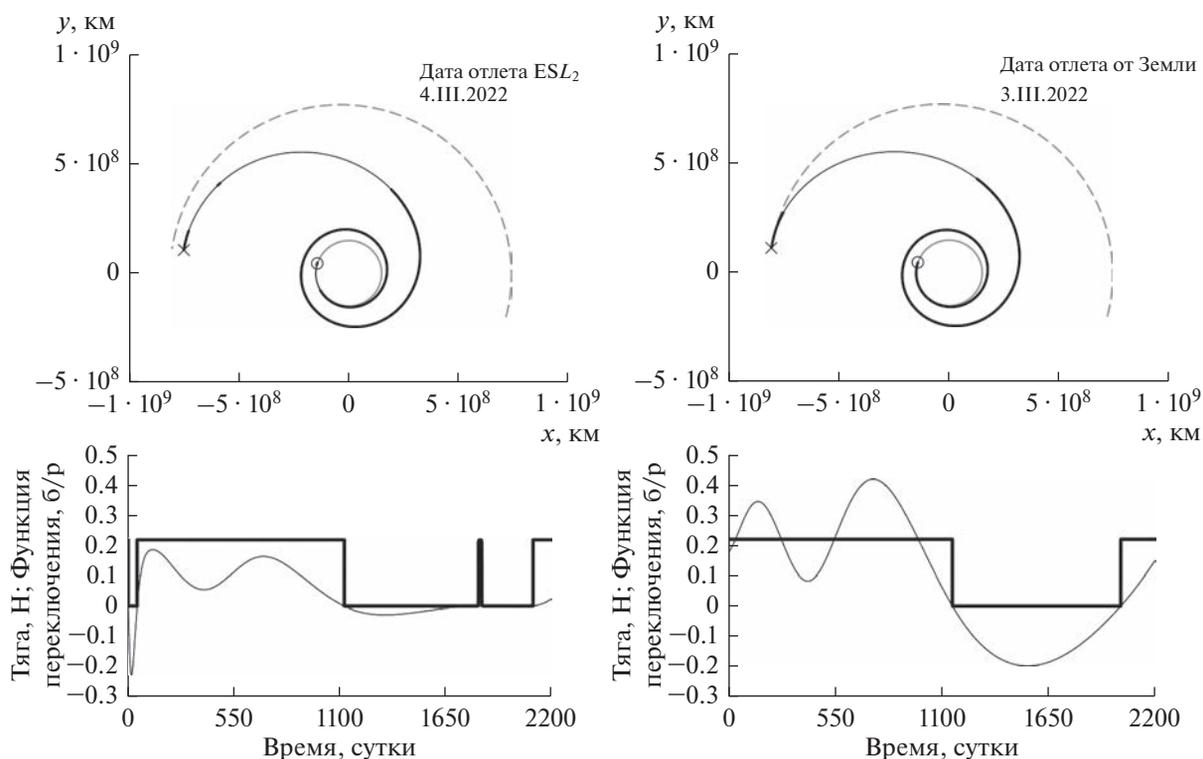


Рис. 12. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2 – JSL_1 (слева) и для перелета к Юпитеру с методом ТСД (справа).

Рассмотрим оптимальные ОТ-траектории перелета от точки либрации ESL_2 системы Земля–Солнце до точки L_1 системы планета–Солнце. В табл. 3 приведены результаты оптимизации возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации и невозмущенных траекторий перелета к целевой планете, рассчитанных с ис-

пользованием метода ТСД, для даты отлета, соответствующей минимальному значению характеристической скорости при расчете с помощью метода ТСД. В табл. 3 используются следующие обозначения: n_b – число включений ЭРДУ; T_b – моторное время; m_{fuel} – затраты топлива; V_{ch} – характеристическая скорость перелета.

Таблица 3. Результаты оптимизации ОТ-траекторий перелета к Юпитеру, Марсу и Сатурну

Тип перелета	Дата отлета	Дата прибытия	Параметры	Перелет между точками либрации	Перелет, рассчитанный с использованием метода ТСД
Земля–Юпитер	3.03.2022 г.	11.03.2028 г.	n_b	4	2
			T_b , сут	1190.4014	1330.7285
			m_{fuel} , кг	769.109	859.7733
			V_{ch} , м/с	14280.706	16531.661
Земля–Марс	22.09.2026 г.	7.09.2027 г.	n_b	2	2
			T_b , сут	163.5282	186.2947
			m_{fuel} , кг	252.1295	287.2312
			V_{ch} , м/с	5698.164	6641.029
Земля–Сатурн	19.02.2039 г.	25.09.2048 г.	n_b	3	2
			T_b , сут	1863.8517	2007.495
			m_{fuel} , кг	6568.473	7074.691
			V_{ch} , м/с	19521.489	21405.217

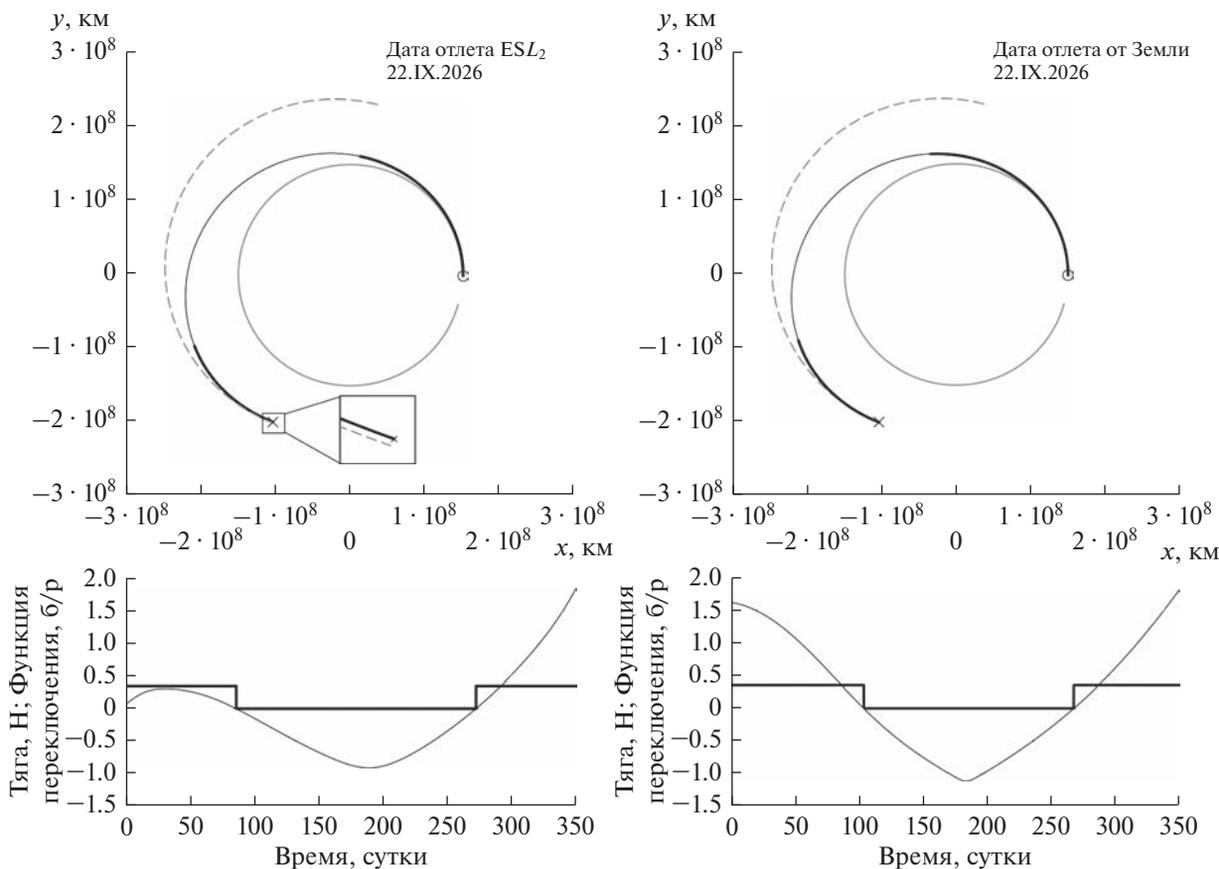


Рис. 13. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2 – MSL_1 (слева) и для перелета к Марсу с методом ТСД (справа).

На рис. 12–14 представлены проекции на плоскость xu эллиптической гелиоцентрической системы координат приведенных в табл. 3 возмущенных траекторий перелета между точками либрации, невозмущенных траекторий, рассчитанных методом ТСД, а также зависимости от времени функций переключения (тонкая линия) и тяги (толстая линия) для этих траекторий. Активные участки траектории на этих рисунках обозначены толстыми сплошными линиями, пассивные – тонкими сплошными черными линиями, орбиты планет – серой сплошной и серой пунктирной линией. Во всех случаях длительность работы ЭРДУ на перелетах между точками либрации уменьшается по сравнению с длительностью работы ЭРДУ на траекториях, рассчитанных методом ТСД. Видно, что для типа перелета между точками либрации ESL_2 – JSL_1 длительность работы двигательной установки существенно уменьшается. Соответственно, характеристическая скорость перелета уменьшается на 13.616% при перелете к Юпитеру, 14.198% при перелете к Марсу и 8.800% при перелете к Сатурну. Следует отметить существенную разницу в зависимостях функции переключения от времени на траекториях перелета между точками либрации и на тра-

екториях, рассчитанных методом ТСД, приводящую к изменению числа включения ЭРДУ для перелетов к Юпитеру и Сатурну.

Оптимизация даты отлета при расчете возмущенной траектории перелета между точками либрации приводит к дальнейшему сокращению затрат характеристической скорости. Зависимость характеристической скорости от даты отлета для траектории перелета к Марсу (от ESL_2 до MSL_1) приведена на рис. 15. Оптимальная дата отлета для такого перелета – 1.X.2026 г., при этом затраты характеристической скорости составляют 5475.456 м/с. При расчете методом ТСД траектории перелета к Марсу с этой датой отлета затраты характеристической скорости составляют 7040.032 м/с, т.е. затраты характеристической скорости на возмущенной траектории перелета между точками либрации меньше на 22.224% по сравнению с затратами характеристической скорости на невозмущенной траектории перелета к Марсу, рассчитанной с использованием метода ТСД. Если сравнивать траектории с оптимальными датами старта (1.X.2026 г., $V_{ch} = 5475.456$ м/с для перелета между точками либрации и 22.IX.2026 г., $V_{ch} = 6641.029$ м/с для перелета,

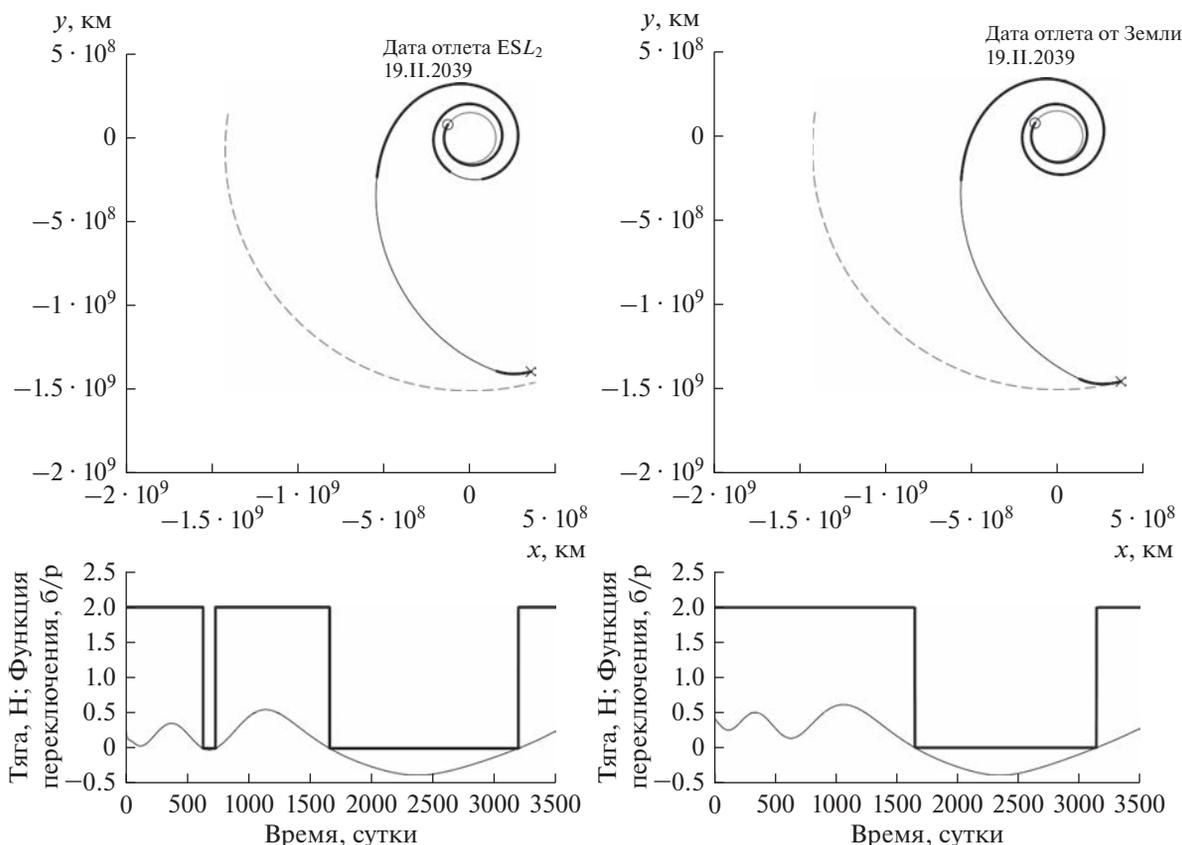


Рис. 14. Функции тяги (толстые линии) и переключения (тонкие линии) от времени полета и оптимальные ОТ-траектория для перелета между ESL_2 – SSL_1 (слева) и для перелета к Сатурну с методом ТСД (справа).

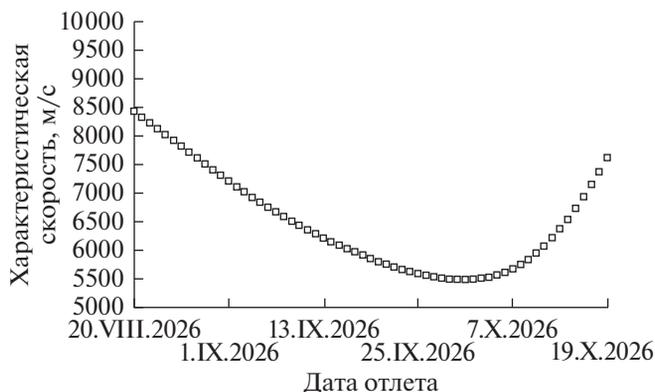


Рис. 15. Зависимость характеристической скорости V_{ch} от даты отлета для оптимальных возмущенных ОТ-траекторий перелета между точками либрации ESL_2 и MSL_1 .

рассчитанного с использованием метода ТСД), то выигрыш перелета между точками либрации в характеристической скорости составит 17.551%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача оптимизации гелиоцентрического участка траектории межпланетного перелета при использовании схемы полета со

стыковкой планетоцентрических и гелиоцентрических участков траектории в точках либрации L_2 системы Земля–Солнце и L_1 системы планета назначения – Солнце с учетом притяжения Солнца, Земли и планеты назначения. Представлен метод оптимизации возмущенной гелиоцентрической траектории с конечной тягой с использованием эфемеридной модели движения небесных тел для вычисления возмущающих ускорений.

Представлены численные примеры оптимальных траекторий между точкой либрации L_2 системы Земля–Солнце и точками либрации L_1 систем Марс–Солнце, Юпитер–Солнце, Сатурн–Солнце. Проведено сравнение полученных результатов с оптимальными решениями, полученными с использованием метода точечных сфер действия. В рассмотренных случаях оказалось, что затраты характеристической скорости на перелет между точками либрации существенно (на 8...22%) меньше оценки характеристической скорости перелета, которую можно получить с использованием метода ТСД, причем чем ближе орбита планеты к орбите Земли, тем больше относительная разница в затратах характеристической скорости.

Для окончательной оценки эффективности предложенной схемы межпланетного перелета с малой тягой необходимо провести оптимизацию планетоцентрических участков между начальной околоземной орбитой и точкой либрации L_2 системы Земля–Солнце, а также между точкой либрации L_1 системы планета назначения – Солнце и конечной орбитой вокруг планеты. После этого необходимо сравнить полученные результаты с теми, что вычислены с использованием метода точечных сфер действия. Для сквозной оптимизации траектории перелета между начальной орбитой вокруг Земли и конечной орбитой вокруг планеты назначения можно использовать метод, аналогичный представленному в исследовании [9], который использует траекторию со стыковкой в точке либрации в качестве начального приближения для траектории с оптимальной точкой стыковки отдельных участков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда “Развитие теории и методов проектирования траекторий космических аппаратов с двигательными установками большой и малой тяги” № 22-19-00329, <https://rscf.ru/project/22-19-00329/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Toppo F., Belbruno E.* Earth–Mars transfers with ballistic capture // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015. V. 121. Iss. 4. P. 329–346. <https://doi.org/10.1007/s10569-015-9605-8>
2. *Mingotti G., Toppo F., Bernelli-Zazzera F.* Earth – Mars transfers with ballistic escape and low-thrust capture // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 110. Iss. 2. P. 169–188. <https://doi.org/10.1007/s10569-011-9343-5>
3. *Mingotti G., Gurfil P.* Mixed low-thrust invariant-manifold transfers to distant prograde orbits around Mars // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. V. 33. Iss. 6. P. 1753–1764. <https://doi.org/10.2514/1.49810>
4. *Toppo F., Vasile M., Bernelli-Zazzera F.* Low Energy Interplanetary Transfers Exploiting Invariant Manifolds of the Restricted Three-Body Problem // *The J. Astronautical Sciences*. 2005. V. 53. Iss. 4. P. 353–372. <https://doi.org/10.1007/BF03546358>
5. *Ovchinnikov M.* Interplanetary Small-Satellite Missions: Ballistic Problems and Their Solutions // *Gyros-coppy and Navigation*. 2021. V. 12. Iss. 4. P. 281–293. <https://doi.org/10.1134/S2075108721040064>
6. *Lo M., Ross S.* The Lunar L_1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond // *AIAA Space 2001 Conference*. 28–30 Aug. 2001, Albuquerque, New Mexico. <https://doi.org/10.2514/6.2001-4768>
7. *Ross S., Koon W., M.W. Lo et al.* Design of a Multi-Moon Orbiter // *13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*. 9–13 Feb. 2003, Ponce, Puerto Rico. Art. ID. AAS 03-143. P. 669.
8. *Loeb H., Petukhov V., Popov G.A. et al.* A Realistic concept of a manned Mars mission with nuclear-electric propulsion // *Acta Astronautica*. 2015. V. 116. P. 299–306. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.07.019>
9. *Petukhov V., Yoon S.W.* End-to-End Optimization of Power-Limited Earth – Moon Trajectories // *Aerospace*. 2023. V. 10. Iss. 3. Art. ID. 231. 21 p. <https://doi.org/10.3390/aerospace10030231>
10. *Petukhov V.G.* One numerical method to calculate optimal power-limited trajectories // *Intern. Electric Propulsion Conf. IEPC-95-221*. Moscow, 1995. P. 1474–1480.
11. *Petukhov V.G.* Optimization of Interplanetary Trajectories for Spacecraft with Ideally Regulated Engines Using the Continuation Method // *Cosmic Research*. 2008. V. 46. Iss. 3. P. 219–232. <https://doi.org/10.1134/S0010952508030052>
12. *Petukhov V.G.* Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // *Cosmic Research*. 2012. V. 50. Iss. 3. P. 249–261. <https://doi.org/10.1134/S0010952512030069>
13. *Haberkorn T., Martinon P., Gergaud J.* Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2004. V. 27. Iss. 6. P. 1046–1060. <https://doi.org/10.2514/1.4022>
14. *Jiang F., Baoyin H., Li J.* Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. V. 35. Iss. 1. P. 245–258. <https://doi.org/10.2514/1.52476>
15. *Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al.* Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // *Acta Astronautica*. 2022. V. 197. P. 354–367. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>
16. *Petukhov V.G., Yoon S.W.* Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part. 1: Theory and method // *Cosmic Research*. 2021. V. 59. Iss. 5. P. 401–413. <https://doi.org/10.1134/S0010952521050099>
17. *Dargent T.* Automatic Minimum Principle Formulation for Low Thrust Optimal Control in Orbit Transfers using Complex Numbers // *Proc. 21st Intern. Symp. Space flights Dynamics*. 28 Sep.–2 Oct. 2009, Toulouse, France. 2009. 9 p.
18. *Dargent T.* An integrated tool for low thrust optimal control orbit transfers in interplanetary trajectories // *Proc. 18th Intern. Symp. Space Flight Dynamics*. 11–15 Oct. 2004, Munich, Germany. 2004. ESA SP-548. P. 143.
19. *Bertrand R., Epenoy R.* CNES Technical note n°147. December 2002. P. 36.

УДК 629.785

ОПТИМИЗАЦИЯ МАНЕВРА ПЕРЕВОДА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ В ДРУГУЮ ТОЧКУ ТОЙ ЖЕ ОРБИТЫ

© 2023 г. М. С. Константинов*

*Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия*

**mkonst@bk.ru*

Поступила в редакцию 24.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Анализируется проблема смены орбитальной позиции космического аппарата (КА), находящегося на некоторой эллиптической орбите в ньютоновском гравитационном поле. Предполагается, что КА имеет нерегулируемый двигатель, который может быть включен многократно. Разработан алгоритм определения оптимальной (по критерию минимальной характеристической скорости) схемы перелета. Особое внимание уделяется анализу числа активных участков на траектории перелета и их расположению на витках траектории. Алгоритм базируется на принципе максимума и методе продолжения по параметру. Начальное приближение для схемы перелета находится с использованием траектории оптимального перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой (двигателем ограниченной мощности). Используется продолжение этой траектории в траекторию перелета для КА с нерегулируемым двигателем. При этом вводится параметр сглаживания функции тяги. На заключительном этапе находятся характеристики оптимальной схемы перелета для КА с нерегулируемым двигателем при релейной функции тяги. Проанализированы свойства оптимальной схемы выполнения рассматриваемого маневра как функции угловой дальности перелета (числа витков траектории перелета) и как функции угла фазирования (угла, характеризующего угловую дальность между точками орбиты, между которыми осуществляется перелет). Показано, что увеличение угловой дальности перелета позволяет значительно уменьшить характеристическую скорость маневра даже при больших углах фазирования.

DOI: 10.31857/S0023420623700115, EDN: SCKHRA

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известна эллиптическая орбита (например, своим фокальным параметром p и эксцентриситетом e). Космический аппарат (КА) двигается по этой орбите. Требуется перевести КА в некоторую другую точку той же орбиты. Будем называть рассматриваемую задачу задачей фазирования. Проблема фазирования на эллиптической орбите может возникать при развертывании спутниковой системы и при анализе проблемы удержания конфигурации спутниковой системы. Проблема удержания конфигурации спутниковой системы, содержащей орбиты типа “Молния”, с использованием электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) рассматривалась, например, в работе [1]. В настоящей работе анализируются оптимальные траектории перелета КА с ЭРДУ в задаче фазирования на эллиптической орбите. Основная рассматриваемая проблема — анализ оптимальной схемы рассматриваемого маневра, т.е. определе-

ние числа активных участков на траектории перелета, их расположение, значения угла атаки на активных участках траектории перелета, оценка характеристической скорости маневра.

Зададим положение точки, в которую должен быть переведен КА, следующим образом. Пусть, когда КА, двигаясь по орбите, попадает в ее перигеум, точка, в которую должен быть переведен КА, характеризуется истинной аномалией $\Delta\theta$. Этот угол будем называть углом фазирования. Полагаем, что КА имеет нерегулируемую двигательную установку, которая многократно может быть включена. В численном анализе будем ориентироваться на электроракетную двигательную установку, т.е. на двигательную установку, обеспечивающую достаточно малое реактивное ускорение. При этом активные участки траектории, как правило, имеют большую продолжительность и протяженность.

Оптимизационная проблема формулируется так. Известны параметры $p, e, \Delta v$. Требуется найти оптимальными:

- точку старта КА с начальной орбиты (истинную аномалию точки старта с начальной орбиты v_o). Будем полагать $-\pi < v_o \leq \pi$;
- закон включения-выключения двигательной установки $\delta(t)$;
- программу угла тангажа на активных участках полета $\varphi(t)$.

Критерием оптимальности рассматривается характеристическая скорость анализируемого космического маневра. Параметром маневра рассматривается угловая дальность перелета, то есть угол между радиус-вектором точки старта и радиус-вектором точки окончания перелета КА (с учетом числа полных оборотов КА вокруг гравитационного центра) β_f . Использование угловой дальности перелета в качестве параметра вместо времени перелета имеет определенные преимущества [2].

Фиксирование точки старта v_o и угловой дальности перелета β_f в анализируемом маневре однозначно определяет время его выполнения t_p . Приведем пояснения, опираясь на рис. 1 эллиптической орбиты. На рисунке точка C – гравитационный центр. Перигеи орбиты обозначены точкой A . Точкой B обозначена точка орбиты, в которую должен быть переведен КА, когда он находится в перигеи орбиты. То есть истинная аномалия этой точки орбиты равна Δv (угол ACB). При анализе будем считать, что этот угол приведен к диапазону $-180^\circ \dots +180^\circ$. Точкой D обозначена точка орбиты, в которой КА начинает перелет (стартует с начальной орбиты). Эта точка будет выбираться, ее истинная аномалия равна v_o (угол ACD). Точка E – точка орбиты, в которую должен быть переведен КА в момент старта КА из точки D . Наконец, точка F – точка окончания перелета КА. Ее положение (истинная аномалия) определяется так:

$$v_f = v_o + \beta_f. \quad (1)$$

Время t_{AD} движения КА от перигея до точки старта КА определяется с использованием уравнения Кеплера:

$$E_D = 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{v_o}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right]; \quad (2)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu(1-e^2)^3}{p^3}}; \quad t_{AD} = \frac{E_D - e \sin(E_D)}{n}.$$

В этих соотношениях μ – гравитационный параметр небесного тела, около которого рассматривается орбита; n – среднее движение по орбите; E_D – эксцентриская аномалия точки старта D . При использовании приведенных соотношений

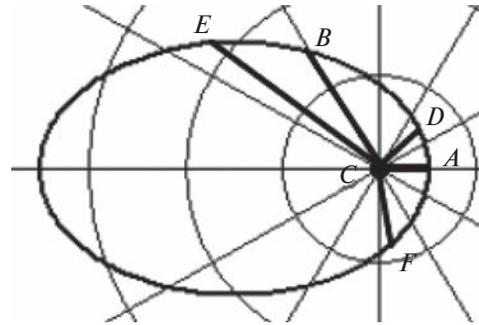


Рис. 1. Эллиптическая орбита. Фазирование на орбите.

величина E_D окажется принадлежащей следующему диапазону $-180^\circ \dots +180^\circ$.

В таком же диапазоне эксцентриская аномалия точки B определяется так:

$$E_B = 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\Delta v}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right]. \quad (3)$$

Эксцентриские аномалии точек $E (E_E)$ и $B (E_B)$ связаны между собой равенством:

$$E_E - e \sin(E_E) = nt_{AD} + E_B - e \sin(E_B). \quad (4)$$

Эксцентриская аномалия конечной точки перелета $F (E_F)$ с учетом того, что угловая дальность перелета может быть больше 2π , может быть найдена с использованием следующего алгоритма:

$$A = 2 \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{v_o + \beta_f}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right]; \quad k = \operatorname{floor} \left(\frac{\beta_f}{2\pi} \right); \quad (5)$$

$$E_F = \begin{cases} A + 2\pi k, & \text{если } A \geq v_o, \\ A + 2\pi(k+1), & \text{если } A < v_o. \end{cases}$$

В приведенных соотношениях floor – наибольшее целое число от аргумента; k – число полных оборотов КА вокруг гравитационного центра на перелетной траектории.

Время перелета КА определяется как время движения по заданной орбите от точки E до точки F . Найти это время можно по следующему соотношению:

$$t_p = t_{EF} = \frac{1}{n} \{ E_F - e \sin(E_F) - [E_E - e \sin(E_E)] \} = \frac{1}{n} \{ E_F - e \sin(E_F) - [E_D - e \sin(E_D)] - [E_B - e \sin(E_B)] \}. \quad (6)$$

Таким образом, время перелета при фиксированной начальной точке перелета и фиксированной угловой дальности перелета находится по приведенному соотношению. Предварительно определяются эксцентриские аномалии трех точек орбиты F, D и B .

Если полагать известными параметры $v_0, \beta_p, \Delta v$ (и, следовательно, время перелета t_p), то рассматриваемая оптимизационная проблема состоит в определении оптимальной программы перелета (программы включения-выключения двигателя и программы угла тангажа на активных участках перелета), при которой КА попадает в точку F орбиты за время t_p .

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА РАССМАТРИВАЕМОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОПЕРАЦИИ

Для описания движения КА будем использовать полярную систему координат. В предлагаемой постановке задачи будем рассматривать независимой переменной не время, а текущую угловую дальность перелета β – рациональность такого подхода отмечена в работах [3, 4]. Ее будем отсчитывать от радиус-вектора точки старта (CD на рис. 1). Фазовый вектор, описывающий состояние КА в процессе его движения, рассматривается состоящим из следующих компонент: V_r, V_n – радиальная и трансверсальная компоненты скорости; r – длина радиус-вектора КА; t – время полета; m – масса КА.

При анализе будем использовать безразмерные переменные. При этом за единицу расстояния примем большую полуось заданной орбиты, за единицу скорости – местную круговую скорость на единичном расстоянии от гравитационного центра, за единицу массы – начальную массу КА. Единицы времени, ускорения и силы тяги примем согласованными с введенными единицами расстояния, скорости и массы. При этом движение КА может быть описано следующей безразмерной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV_r}{d\beta} &= \frac{Pr}{mV_n} \sin(\varphi) \delta - \frac{1}{rV_n} + V_n; \\ \frac{dV_n}{d\beta} &= \frac{Pr}{mV_n} \cos(\varphi) \delta - V_r; \\ \frac{dr}{d\beta} &= \frac{rV_r}{V_n}; \quad \frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}; \quad \frac{dm}{d\beta} = -q\delta \frac{r}{V_n}. \end{aligned} \quad (7)$$

В этой системе P – безразмерная величина тяги двигателя; q – безразмерный массовый расход двигателя; $\delta(\beta)$ – функция тяги; $\varphi(\beta)$ – угол тангажа КА (угол между местным горизонтом и направлением вектора тяги). Функция тяги принимает всего два значения: 0 и 1. Когда $\delta = 1$, двигатель включен; когда $\delta = 0$, двигатель выключен.

Две перечисленные функции ($\delta(\beta)$ и $\varphi(\beta)$), будем рассматривать как оптимизируемые управления движением КА.

ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Оптимизационную проблему будем решать, используя подход принципа максимума. То есть введем в рассмотрение вектор сопряженных переменных к фазовому вектору $(\lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_r, \lambda_t, \lambda_m)^T$ и вспомогательную функцию в виде:

$$\begin{aligned} H &= \lambda_{V_r} \left(\frac{Pr \sin(\varphi)}{mV_n} \delta - \frac{1}{rV_n} + V_n \right) + \\ &+ \lambda_{V_n} \left(\frac{Pr \cos(\varphi)}{mV_n} \delta - V_r \right) + \lambda_r \frac{rV_r}{V_n} + \\ &+ \lambda_t \frac{r}{V_n} - \lambda_m q \delta \frac{r}{V_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с условиями оптимальности принципа максимума выбираемый закон управления обеспечивает супремум гамильтониану. То есть оптимальное управление $\delta_{opt}(\beta)$ и $\varphi_{opt}(\beta)$ можно искать из условия максимума гамильтониана. При этом можно показать [5–7], что

$$\cos(\varphi_{opt}) = \frac{\lambda_{V_n}}{\lambda_V}; \quad \sin(\varphi_{opt}) = \frac{\lambda_{V_r}}{\lambda_V}, \quad (9)$$

$$\text{где } \lambda_V = \sqrt{\lambda_{V_r}^2 + \lambda_{V_n}^2}.$$

$$\delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Функцию δ будем называть функцией тяги. В последнем равенстве используется функция Ψ , которую будем называть функцией переключения двигателя:

$$\Psi = \frac{P}{m} \lambda_V - \lambda_m q. \quad (11)$$

С учетом полученных законов оптимального управления (программы угла тангажа и оптимальной функции тяги) уравнения, описывающие изменение фазовых переменных, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV_r}{d\beta} &= \frac{Pr\lambda_{V_r}}{mV_n\lambda_V} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) - \frac{1}{rV_n} + V_n; \\ \frac{dV_n}{d\beta} &= \frac{Pr\lambda_{V_n}}{mV_n\lambda_V} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) - V_r; \\ \frac{dr}{d\beta} &= \frac{rV_r}{V_n}; \quad \frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}; \\ \frac{dm}{d\beta} &= -q \frac{r}{V_n} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m). \end{aligned} \quad (12)$$

Из условий принципа максимума следует, что сопряженные переменные должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{V_r}}{d\beta} &= \lambda_{V_n} - \lambda_r \frac{r}{V_n}; \\ \frac{d\lambda_{V_n}}{d\beta} &= \frac{r}{V_n^2} \left[-\lambda_{V_r} \frac{1+rV_n^2}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t + \right. \\ &+ \left. \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \right]; \\ \frac{d\lambda_r}{d\beta} &= \frac{-1}{V_n} \left[\frac{\lambda_{V_r}}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t + \right. \\ &+ \left. \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \right]; \\ \frac{d\lambda_t}{d\beta} &= 0; \quad \frac{d\lambda_m}{d\beta} = \frac{Pr \sqrt{\lambda_{V_r}^2 + \lambda_{V_n}^2}}{m^2 V_n} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m). \end{aligned} \quad (13)$$

СЛУЧАЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ СТАРТА. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПЯТОГО ПОРЯДКА

Используя принцип максимума, оптимизационная проблема сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы, состоящей из двух записанных выше систем для фазовых и сопряженных переменных (12) и (13)). Если считать известной точку старта (т.е. значение v_0), то неизвестными параметрами краевой задачи рассматриваются значения сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета: $\lambda_{V_r}(0)$, $\lambda_{V_n}(0)$, $\lambda_r(0)$, $\lambda_t(0)$, $\lambda_m(0)$. Фазовые переменные в начальной точке траектории перелета определяются с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} V_r(0) &= \sqrt{\frac{1}{p}} \operatorname{esin}(v_0); \quad V_n(0) = \sqrt{\frac{1}{p}} (1 + e \cos(v_0)); \\ r(0) &= \frac{p}{1 + e \cos(v_0)}; \quad t(0) = 0; \quad m(0) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Неизвестные параметры краевой задачи должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись следующие условия в конечной точке траектории перелета:

$$\begin{aligned} V_r(\beta_f) &= \sqrt{\frac{1}{p}} \operatorname{esin}(v_0 + \beta_f); \\ V_n(\beta_f) &= \sqrt{\frac{1}{p}} (1 + e \cos(v_0 + \beta_f)); \\ r(\beta_f) &= \frac{p}{1 + e \cos(v_0 + \beta_f)} \\ t(\beta_f) &= t_p(v_0, \beta_f, \Delta v); \quad \lambda_m(\beta_f) = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Удовлетворение последнего равенства из системы (15) обеспечивает максимум рассматри-

ваемого критерия оптимальности (конечной массы КА). Описанная краевая задача имеет пятый порядок.

УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТОЧКИ СТАРТА. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Для практики интересна постановка задачи, в которой начальная точка перелета не фиксирована, а выбирается оптимальной. Поэтому целесообразно изменить постановку краевой задачи принципа максимума, добавляя к неизвестным параметрам краевой задачи и истинную аномалию точки старта v_0 . При этом необходимо добавить еще одно краевое условие: условие оптимальности точки старта. Приведем это условие.

Величина v_0 определяет значение фазовых переменных V_r , V_n , r в начальной точке траектории перелета (14). От этой величины зависят и четыре из пяти конечных условий в равенствах (15). Для получения условия оптимальности рассматриваемого параметра нужно иметь соотношения для расчета производных от значений фазовых координат в начальной и конечной точке траектории перелета по оптимизируемому параметру v_0 . С производными от начальных условий (14) никаких трудностей не возникает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_0} V_r(0) &= \sqrt{\frac{1}{p}} e \cos(v_0); \quad \frac{\partial}{\partial v_0} V_n(0) = -\sqrt{\frac{1}{p}} e \sin(v_0); \\ \frac{\partial}{\partial v_0} r(0) &= \frac{p \operatorname{esin}(v_0)}{(1 + e \cos(v_0))^2}; \\ \frac{\partial}{\partial v_0} t(0) &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial v_0} m(0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Производные от конечных условий по оптимизируемому параметру v_0 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_0} V_r(\beta_f) &= \sqrt{\frac{1}{p}} e \cos(v_0 + \beta_f); \\ \frac{\partial}{\partial v_0} V_n(\beta_f) &= -\sqrt{\frac{1}{p}} e \sin(v_0 + \beta_f); \\ \frac{\partial}{\partial v_0} r(\beta_f) &= \frac{p \operatorname{esin}(v_0 + \beta_f)}{(1 + e \cos(v_0 + \beta_f))^2}; \\ \frac{\partial}{\partial v_0} t(\beta_f) &= \frac{\partial}{\partial v_0} t_p(v_0, \beta_f, \Delta v). \end{aligned} \quad (17)$$

В последнее равенство входит производная от времени перелета по параметру v_0 . Аналитическое выражение для времени перелета было приведено выше (см. соотношение (6)). Используя

его, можно записать производную от времени перелета по параметру v_o в виде:

$$\frac{\partial}{\partial v_o} t_p = \frac{1}{n} \left[(1 - e \cos(E_F)) \frac{\partial}{\partial v_o} E_F - (1 - e \cos(E_D)) \frac{\partial}{\partial v_o} E_D \right]. \quad (18)$$

В последнее равенство входят производные эксцентрических аномалий точек F и D (рис. 1) по параметру v_o . Предлагается использовать для этих производных следующие выражения, которые не содержат вычислительных особенностей:

$$\frac{\partial}{\partial v_o} E_F = \frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{\cos^2\left(\frac{v_o + \beta_f}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{v_o + \beta_f}{2}\right) \frac{1-e}{1+e}}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_o} E_D = \frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{\cos^2\left(\frac{v_o}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{v_o}{2}\right) \frac{1-e}{1+e}}.$$

Используя полученные производные, условие оптимальности параметра v_o можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\lambda_{v_r}(0) \cos(v_o) - \lambda_{v_n}(0) \sin(v_o) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda_r(0) \frac{\sqrt{p^3} \sin(v_o)}{(1 + e \cos(v_o))^2} \right] - \\ & - \left[\lambda_{v_r}(\beta_f) \cos(v_o + \beta_f) - \lambda_{v_n}(\beta_f) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sin(v_o + \beta_f) + \lambda_r(\beta_f) \frac{\sqrt{p^3} \sin(v_o + \beta_f)}{(1 + e \cos(v_o + \beta_f))^2} \right] \\ & - \lambda_r(\beta_f) \frac{\partial}{\partial v_o} t_p = 0. \end{aligned} \right\} \frac{e}{\sqrt{p}} \quad (20)$$

Таким образом, шестипараметрическая краевая задача формулируется так: найти неизвестные параметры краевой задачи v_o , $\lambda_{v_r}(0)$, $\lambda_{v_n}(0)$, $\lambda_r(0)$, $\lambda_r(0)$, $\lambda_m(0)$, при которых удовлетворяются шесть условий. Пять из них — это условия для переменных в конечной точке траектории перелета (15) и условие оптимальности точки старта (20), связывающее переменные в начальной и конечной точках траектории перелета.

ОБЩИЕ ИДЕИ МЕТОДИЧЕСКОГО ПОДХОДА И ЭТАПЫ ИСПОЛЬЗУЕМОГО МЕТОДА

Перечислим общие идеи используемого методического подхода и этапы используемого алго-

ритма. Заметим, что они соответствуют идеям, опубликованным в работах [8–10].

Основным методическим инструментом рассматривается принцип максимума.

При решении краевой задачи принципа максимума, как правило, используются итерационные процедуры. При этом характеристики получаемого решения в большой степени зависят от используемого начального приближения. Схема перелета получаемой в итоге траектории (число активных участков и их расположение) зависит от схемы перелета, используемого начального приближения. Очень желательно, чтобы траектория, используемая в качестве начального приближения, не содержала признаков числа активных участков и их расположения. Именно такое начальное приближение предлагается выбирать. Это обстоятельство во многом определяет весь используемый в работе алгоритм.

Предполагается исследовать многооборотные траектории перелета. При этом на траектории перелета возможны продолжительные пассивные участки. Их исследование можно (и целесообразно) проводить, не используя численного интегрирования уравнений оптимального движения КА. Этот прием применяется в работе. Понятно, что наряду с этим пришлось получить аналитические соотношения для описания изменения сопряженных переменных на оптимальной траектории перелета. Эти соотношения приведены в приложении.

На начальном этапе исследования предполагается решение вспомогательной задачи: нахождение оптимальной траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Решение такой задачи существует всегда (при любой угловой дальности и, следовательно, времени перелета). Применяемый алгоритм предполагает использование метода продолжения по параметру для нахождения оптимальной траектории перелета КА с нерегулируемой двигательной установкой по полученной ранее траектории перелета для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой [8, 9].

При итерационном решении краевой задачи может измениться количество активных или пассивных участков на траектории перелета. При этом появляется скачок в производных анализируемых краевых условий по выбираемым параметрам краевой задачи [5]. Также возникают трудности при использовании практически любых численных методов решения краевой задачи для КА с рассматриваемой нерегулируемой двигательной установкой. Чтобы их преодолеть в соответствии с широко используемыми рекомендациями [5] вводится параметр сглаживания ϵ и осуществляется сглаживание функции тяги. Вместо разрывной функции тяги (10) рассматривает-

ся сглаженная функция тяги. В настоящей работе использовалась сглаженная функция тяги следующего вида:

$$\delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m)}{\varepsilon}\right). \quad (21)$$

Этапы используемого алгоритма следующие.

1. Решение задачи для идеально-регулируемой двигательной установки. Используется метод продолжения по гравитационному параметру с нулевыми начальными условиями по вектору сопряженных переменных. Метод был предложен в работе [10].

2. Решение задачи для нерегулируемого двигателя с большим параметром сглаживания функции тяги. Используется метод продолжения от решения для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой в решение для КА с нерегулируемой двигательной установкой с параметром сглаживания [5].

3. Решение последовательности задач для нерегулируемого двигателя и уменьшающимся параметром сглаживания. Реализуется решением последовательности краевых задач с параметром сглаживания, уменьшающимся в 10 раз.

4. Решение задачи для релейной функции включения-выключения двигателя. Реализуется введением в вектор выбираемых параметров краевой задачи угловой дальности, при которой происходит смена режима тяги (тяга включается или выключается). Одновременно расширяется вектор условий краевой задачи: в момент изменения режима работы двигателя введенная выше функция переключения двигателя (11) должна быть равна нулю.

**АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ
ГРАВИТАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА,
ИСПОЛЪЗУЕМОГО В МЕТОДЕ
ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ
ПАРАМЕТРУ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ
ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

Нахождение начального приближения оптимальной траектории, обеспечивающей заданное фазирование, можно реализовать, используя метод продолжения по гравитационному параметру. В одном из возможных вариантов такого подхода определяется такое значение гравитационного параметра, при котором КА, начиная движение в перигентре, совершит задаваемое число витков k (оно определяет угловую дальность перелета) за время, которое обеспечивает требуемый угол фазирования (время определяется по соотношению (6)). Это время с учетом фиксации началь-

ной точки перелетной траектории ($v_o = v_D = E_D = 0$) и целого числа витков при перелете ($\beta_f = 2\pi k$, $v_f = E_f = 2\pi k$) можно найти, используя следующее равенство:

$$t_p = \frac{1}{n} [2\pi k - E_B + e \sin(E_B)] = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [2\pi k - E_B + e \sin(E_B)]. \quad (22)$$

В последнем равенстве a – большая полуось анализируемой орбиты; μ – гравитационный параметр небесного тела, в окрестности которого анализируется орбита. Введем в рассмотрение воображаемую вспомогательную орбиту, по которой двигался бы КА, если бы гравитационный параметр небесного тела был не μ , а μ_{New} . Пусть большая полуось этой орбиты a_{New} . Время движения КА на k витках траектории этой воображаемой орбиты определяется так:

$$t_p = 2\pi k \sqrt{\frac{a_{New}^3}{\mu_{New}}}. \quad (23)$$

Приравнявая выражения для времени перелета, записанные в виде равенств (22) и (23), получаем уравнение, используя которое можно определить гравитационную константу μ_{New} :

$$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [2\pi k - E_B + e \sin(E_B)] = 2\pi k \sqrt{\frac{a_{New}^3}{\mu_{New}}}. \quad (24)$$

Безразмерный вид последнего равенства представляется как

$$2\pi k - E_B + e \sin(E_B) = 2\pi k \sqrt{\frac{a_{bNew}^3}{\mu_{bNew}}}, \quad (25)$$

где a_{bNew} , μ_{bNew} – безразмерная большая полуось вспомогательной орбиты и безразмерная гравитационная константа.

Большая полуось вспомогательной орбиты зависит от гравитационной константы и может быть представлена в виде:

$$a_{bNew} = \frac{\mu_{bNew}}{2\mu_{bNew} - V_o^2}, \quad (26)$$

где r_o и V_o – радиус и скорость КА в точке орбиты, в которой начинается траектория перелета. Используя выражение (26), равенство (25) можно рассматривать как кубическое уравнение относительно μ_{bNew} :

$$a_3 \mu_{bNew}^3 - a_2 \mu_{bNew}^2 + a_1 \mu_{bNew} - a_0 = 0, \quad (27)$$

где

$$a_3 = 8; \quad a_2 = 12r_o V_o^2 + \frac{4\pi^2 k^2 r_o^3}{[2\pi k - E_B + e \sin(E_B)]^2}; \quad (28)$$

$$a_1 = 6r_o^2 V_o^4; \quad a_0 = r_o^3 V_o^6.$$

Приведенное кубическое уравнение имеет единственный действительный корень, именно его предлагается использовать при анализе.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для численного исследования была выбрана околоземная орбита с эксцентриситетом 0.74179, большой полуосью 26 610 км (12-часовая орбита типа “Молния”). Характеристики анализируемой транспортной системы и анализируемого транспортного маневра выбраны следующими:

- КА массой 1000 кг находится на эллиптической околоземной орбите. Высота перигея орбиты 500 км, высота апогея 39978 км (орбита типа “Молния”);
- КА имеет электроракетную двигательную установку с тягой 290 мН и удельным импульсом 1770 с.
- Рассматриваемый диапазон угла фазирования $0^\circ \dots 180^\circ$.
- Анализируемый диапазон угловой дальности перелета – до 26 витков.
- Анализируемый диапазон времени перелета – до 13 сут.

Итоговым результатом анализа рассматривается зависимость характеристической скорости от угловой дальности перелета КА и (или) от времени выполнения маневра. Важной итоговой информацией служат характеристики оптимальной схемы перелета: число активных участков на траектории перелета, их расположение, истинная аномалия точки старта КА, характеристики программы угла тангажа и атаки на активных участках траектории. Эти характеристики анализируются как функции от тех же аргументов (времени перелета и угловой дальности перелета).

Как было отмечено выше, анализ проводится в безразмерных переменных, когда за единицу расстояния принимается большая полуось орбиты (26610 км), за единицу скорости – местная круговая скорость на расстоянии равной единице расстояния (3.8703 км/с).

Опишем разработанный алгоритм оптимизации на примере нахождения оптимальной траектории перелета для варианта, когда угол фазирования равен 120° , а угловая дальность перелета равна 15 виткам.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Предварительный анализ

Используя соотношение (6) и полагая, что точка старта есть перигей орбиты, определяем время перелета. Оно равно 179.061 ч (7.461 сут).

Определяем с использованием равенств (28) коэффициенты кубического уравнения (27). Решаем это уравнение. Его единственный действительный корень оказался равен 1.0004934. То есть, если бы гравитационный параметр Земли был больше, чем он есть на самом деле, в 1.0004934 раз, то КА сделал 15 полных витков вокруг Земли за 179.061 ч.

Этап 1. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой

Компоненты вектора неизвестных параметров краевой задачи (вектор сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета) были приняты нулевыми. Начальное значение безразмерного гравитационного параметра принято равным 1.0004934. Гравитационный параметр рассматривался как параметр продолжения. Было реализовано продолжение по гравитационному параметру до его значения равного единице. В результате была решена краевая задача, к которой сводится проблема оптимизации траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

$$v_o = 0; \quad \lambda_{v_r}(0) = -3.06850 \cdot 10^{-6};$$

$$\lambda_{v_n}(0) = -2.89001 \cdot 10^{-4};$$

$$\lambda_r(0) = -1.66895 \cdot 10^{-3};$$

$$\lambda_t(0) = -7.94673 \cdot 10^{-7}.$$

На рис. 2 показано реактивное ускорение вдоль траектории перелета (как функция текущей угловой дальности перелета, отложенной в витках траектории). Виден колебательный характер представленной зависимости. На каждом витке траектории максимальное реактивное ускорение сообщается КА в начале и конце каждого витка (в перигейной области витков траектории). Минимальное реактивное ускорение сообщается КА в апогейных областях витков траектории. Приведенная зависимость практически симметрична относительно средней точки траектории перелета. Значения реактивного ускорения на первом витке траектории четко соответствуют значениям ускорения на последнем витке траектории. Точно так же ускорение на втором витке траектории соответствуют ускорению на предпоследнем витке

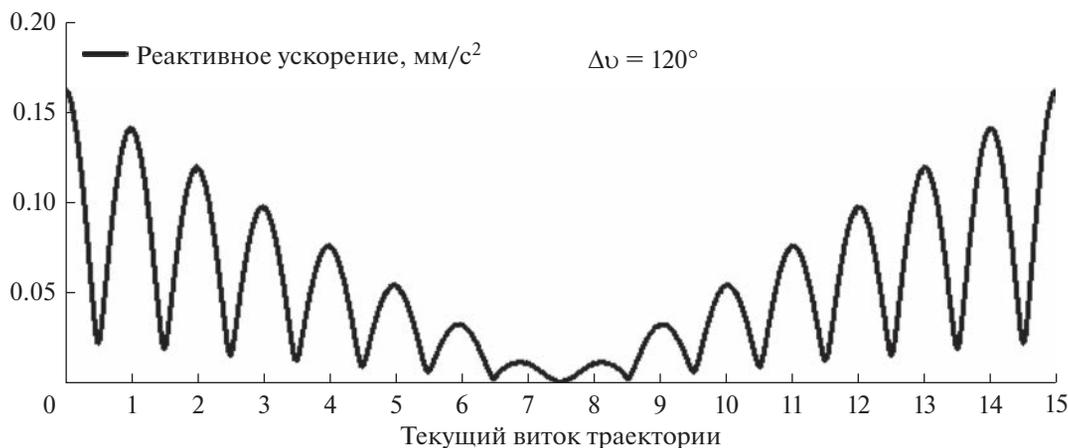


Рис. 2. Реактивное ускорение (мм/с^2) как функция текущей угловой дальности перелета (витки траектории). КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

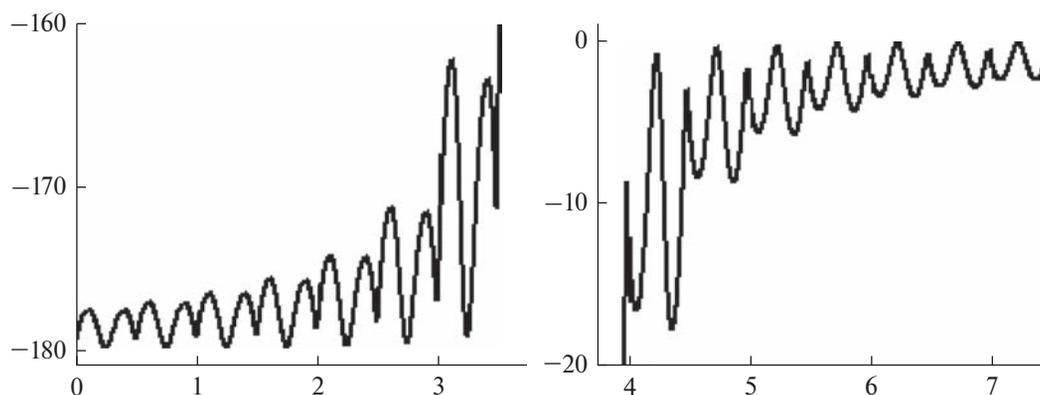


Рис. 3. Угол атаки (град) как функция текущего времени перелета (сут). Левый рисунок — для первой половины траектории перелета, правый — для второй. КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

траектории. Можно утверждать, что справедливо равенство $acs(\beta) = acs(\beta_f - \beta)$, где acs — величина ускорения; β — текущая угловая дальность; β_f — угловая дальность всего перелета.

На первой половине траектории перелета одновременно уменьшаются максимальная и минимальная величина реактивного ускорения, амплитуда колебаний реактивного ускорения. На второй половине траектории перелета наблюдается обратный процесс. Минимальная величина реактивного ускорения практически равна нулю ($5 \cdot 10^{-5} \text{ мм/с}^2$) в средней точке траектории перелета. Максимальная величина реактивного ускорения оказывается равной 0.163 мм/с^2 . Заметим, что она существенно меньше располагаемой величины рассматриваемого КА с его нерегулируемой двигательной установкой. В начале перелета эта установка может обеспечить реактивное ускорение равное 0.290 мм/с^2 . Это свидетельствует о

том, что требуемое фазирование с рассматриваемой угловой дальностью перелета может быть реализовано рассматриваемым транспортным космическим средством.

На рис. 3 показано изменение угла атаки вдоль траектории перелета. Видно, что на первой половине траектории перелета угол атаки изменяется в диапазоне $-180^\circ \dots -160^\circ$. Тяга двигателя тормозит КА, обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты и ее периода. На второй половине траектории перелета угол атаки изменяется в диапазоне $-20^\circ \dots 0^\circ$. Тяга двигателя разгоняет КА, обеспечивая увеличение периода оскулирующей орбиты и выход на рабочую орбиту с требуемым углом фазирования.

Характеристическая скорость анализируемого маневра оказалась равной 2.917 м/с . Требуемая масса топлива 0.168 кг .

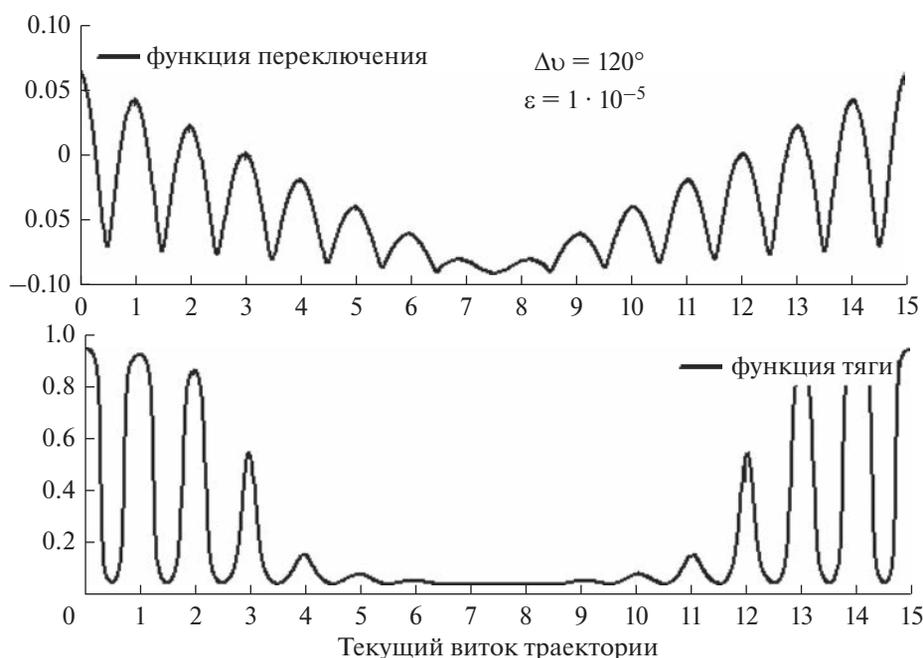


Рис. 4. Изменение функции переключения двигателя (вверху) и функции тяги (внизу) вдоль траектории перелета. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Параметр сглаживания функции тяги $\varepsilon = 10^{-5}$. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

Этап 2. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с нерегулируемой двигательной установкой при сглаженной функции тяги

При реализации продолжения от траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой к траектории перелета КА с нерегулируемой двигательной установкой был выбран относительно большой параметр сглаживания ($\varepsilon = 10^{-5}$). При этом удалось реализовать указанное продолжение и решить краевую задачу принципа максимума КА с нерегулируемой двигательной установкой. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

$$\begin{aligned} v_o &= -7.28400 \cdot 10^{-8}; \quad \lambda_{v_r}(0) = -4.90196 \cdot 10^{-3}; \\ \lambda_{v_n}(0) &= -0.37735; \quad \lambda_r(0) = -2.17942; \\ \lambda_r(0) &= -1.03254 \cdot 10^{-3}; \quad \lambda_m(0) = 0.99949. \end{aligned}$$

На рис. 4 показано изменение функции переключения и функции тяги вдоль траектории перелета. Общий колебательный характер функции переключения и ее симметричность очень похож на характер изменения реактивного ускорения для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой, приведенный на рис. 1. Функция переключения многократно меняет свой знак. Это происходит на четырех первых и четырех последних витках траектории. На семи средних витках траектории функция переключения отрицательна. Если бы анализировалось релейное управле-

ние по тяге (функция тяги рассматривалась в виде выражения (10)), то активные участки существовали бы только на первых и последних четырех витках траектории. При этом эти участки располагались бы в перигейной области витков траектории, а апогейные области витков траектории были бы пассивными. На первых четырех витках траектории протяженность и длительность участков с положительной функцией переключения уменьшается с увеличением номера витка траектории. На последних четырех витках траектории протяженность и продолжительность участков с положительной функцией переключения увеличивается с увеличением номера витка траектории.

На том же рис. 1 приведена и функция тяги. Легко видеть, что она очень далека от релейной функции. При использованном параметре сглаживания $\varepsilon = 10^{-5}$ максимальная величина функции тяги равна 0.95, минимальная величина функции тяги равна 0.35.

На рис. 5 показано изменение угла атаки вдоль траектории перелета. Видно, что на первых трех сутках перелета угол атаки изменяется в диапазоне $-182^\circ \dots -170^\circ$. Тяга двигателя тормозит КА, обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты и ее периода. На последних трех сутках перелета угол атаки изменяется в диапазоне $-10^\circ \dots 3^\circ$. Тяга двигателя разгоняет КА, обеспечивая увеличение периода оскулирующей орбиты и выход на рабочую орбиту с требуемым углом фазирования.

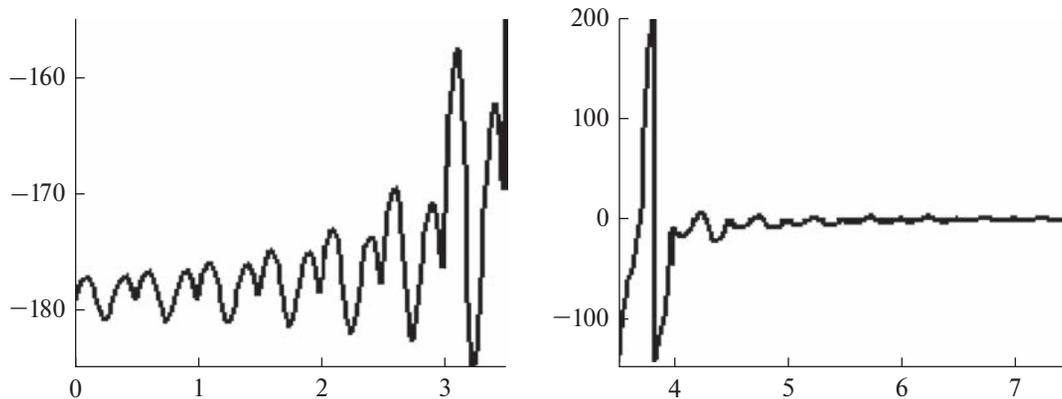


Рис. 5. Угол атаки (град) как функция текущего времени перелета (сут). Левый рисунок – для первой половины траектории перелета, правый рисунок – для второй. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Параметр сглаживания функции тяги $\epsilon = 10^{-5}$. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

Характеристическая скорость анализируемого маневра оказалась равна 13.944 м/с. Требуемая масса топлива 0.803 кг. Обратим внимание, что характеристическая скорость маневра по сравнению с вариантом идеально регулируемой двигательной установки (2.917 м/с) значительно увеличилась, как и требуемая масса топлива.

Этап 3. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с нерегулируемой двигательной установкой для последовательности значений параметра сглаживания ϵ функции тяги

На этапе решается краевая задача принципа максимума при последовательном уменьшении параметра сглаживания функции тяги. Принципиально при этом можно было воспользоваться гладким продолжением по этому параметру [5], но выбран другой, более простой для реализации прием. На предыдущем этапе было получено решение при параметре сглаживания 10^{-5} . Используя параметры краевой задачи этого решения в качестве начального, решается краевая задача для параметра сглаживания, уменьшенного в 10 раз. Эта процедура продолжается до тех пор, пока функция тяги не примет релейный вид или не удастся добиться хорошей точности удовлетворения конечных условий краевой задачи. В анализируемой задаче в большинстве случаев удавалось решить краевую задачу с весьма малым параметром сглаживания, при котором функция тяги была практически релейной.

Приведем характеристики полученной траектории перелета для варианта, когда параметр сглаживания равен $\epsilon = 10^{-9}$. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

$$\begin{aligned} v_o &= 0.12352; \quad \lambda_{v_r}(0) = -0.03130; \\ \lambda_{v_n}(0) &= -0.43107; \quad \lambda_r(0) = -2.48205; \\ \lambda_r(0) &= -1.18862 \cdot 10^{-3}; \quad \lambda_m(0) = 0.99942. \end{aligned}$$

На рис. 6 показано изменение функции переключения и функции тяги вдоль траектории перелета. Общий характер функции переключения по отношению к варианту с параметром сглаживания равным 10^{-5} не изменился. Можно отметить увеличение протяженности и продолжительности четвертого и пятого интервала положительности функции переключения. Анализ приведенной на том же рис. 6 функции тяги дает возможность утверждать, что она имеет весьма четкий релейный характер. Минимальное значение этой функции очень близко к нулю ($3.466 \cdot 10^{-6}$). Максимальное значение очень близко к единице (0.999996).

Можно утверждать, что на оптимальной траектории перелета существует восемь активных участков. Они расположены в перигейной области первых четырех и последних четырех витков траектории. Характеристическая скорость анализируемого маневра уменьшилась почти в два раза до 7.7907 м/с по отношению к варианту траектории с параметром сглаживания равным 10^{-5} (при $\epsilon = 10^{-5}$ ее величина составляет 13.944 м/с). Требуемая масса топлива уменьшилась до 0.449 кг (была 0.803 кг).

Этап 4. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с нерегулируемой двигательной установкой с релейной функцией тяги

Рассматриваемый этап становится заключительным. Фиксируется полученная на предыдущем этапе структура оптимального управления. Конкретнее, считается, что на траектории перелета есть восемь активных участков, разделенных семью пассивными участками. Угловая дальность перелета, при которой меняется режим работы двигательной установки (она включается или выключается) выступает как параметр краевой задачи. В рассматриваемом случае таких параметров оказывается 14. Вместе с шестью ранее рассмат-

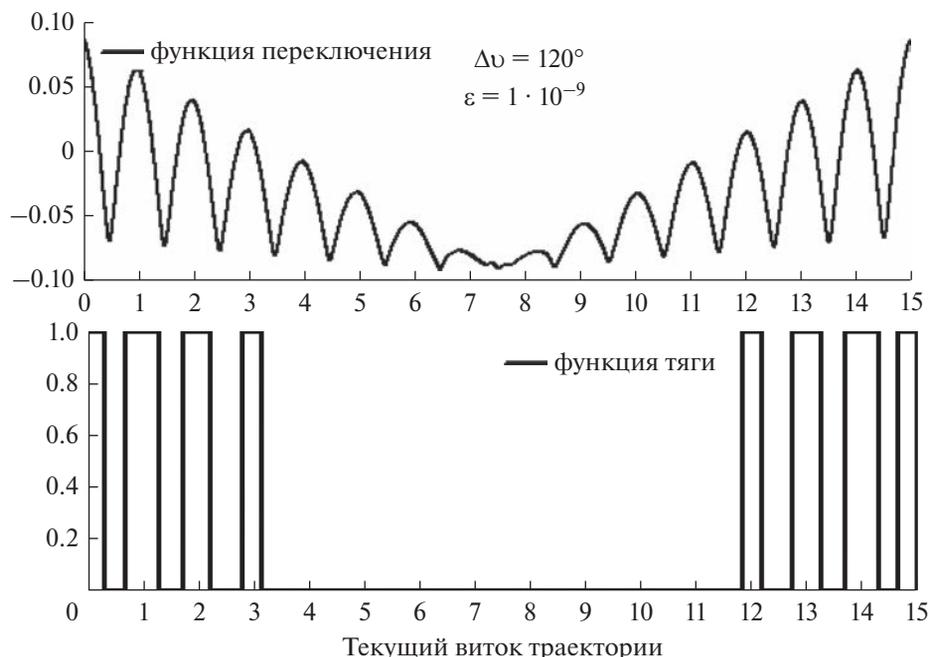


Рис. 6. Изменение функции переключения двигателя (вверху) и функции тяги (внизу) вдоль траектории перелета. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Параметр сглаживания функции тяги $\varepsilon = 10^{-9}$. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

риваемыми параметрами v_o , $\lambda_{v_r}(0)$, $\lambda_{v_n}(0)$, $\lambda_r(0)$, $\lambda_t(0)$, $\lambda_m(0)$ общее число параметров краевой задачи возрастает до 20. Увеличивается до 20 и число условий типа равенства краевой задачи. К ним добавляются 14 условий оптимальности: в момент изменения режима работы двигательной установки функция переключения должна быть равна нулю.

Новые параметры краевой задачи вводятся как отношение угловой дальности перелета при смене режима работы двигателя к полной угловой дальности перелета. При этом эти параметры рассматриваются как компоненты вектора βd размерности 14. Все эти компоненты принадлежат диапазону $0 \dots 1$ и каждая последующая компонента вектора строго больше предыдущей.

Начальное приближение для описываемого вектора вычисляется по траектории, полученной на предыдущем этапе исследования. Для анализируемого маневра компоненты этого вектора оказались такими: $\beta d^* = (0.01999; 0.04405; 0.08443; 0.11357; 0.14783; 0.18526; 0.20888; 0.78890; 0.81180; 0.84970; 0.88373; 0.91301; 0.95334; 0.97740)$.

Приведем характеристики полученной траектории перелета для варианта релейной функции тяги. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

$$\begin{aligned} v_o &= 0.01133; \lambda_{v_r}(0) = -0.01207; \\ \lambda_{v_n}(0) &= -0.43234; \lambda_r(0) = -2.49677; \\ \lambda_t(0) &= -1.18786 \cdot 10^{-3}; \lambda_m(0) = 0.99942. \end{aligned}$$

$$\beta d^* = (0.02101; 0.04504; 0.08541; 0.11456; 0.14874; 0.18628; 0.20966; 0.79017; 0.81342; 0.85104; 0.88519; 0.91436; 0.95472; 0.97875).$$

На рис. 7 показано изменение функции переключения вдоль траектории перелета. Эта функция практически идентична функции переключения, показанной выше на рис. 6 (функции переключения для варианта с параметром сглаживания 10^{-9}).

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА. УГЛОВАЯ ДАЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТА 15 ВИТКОВ. УГОЛ ФАЗИРОВАНИЯ 120°

На оптимальной траектории перелета существует восемь активных участков. Они расположены в перигейной области первых четырех и последних четырех витков траектории. Первые активные участки обеспечивают уменьшение большой полуоси и радиуса апогея оскулирующей орбиты (рис. 8). Большая полуось оскулирующей орбиты за четыре активных участка уменьшается с 26610.2 до 26496.7 км. Одновременно уменьшается и радиус апогея оскулирующей орбиты с 46349.4 до 46125.1 км. На следующих девяти витках траектории двигатель КА не включается, поэтому элементы орбиты не меняются. Работа двигателя на последних четырех активных участках обеспечивает увеличение орбитальной энергии КА. При этом увеличиваются и большая полуось, и радиус апогея оскулирующей

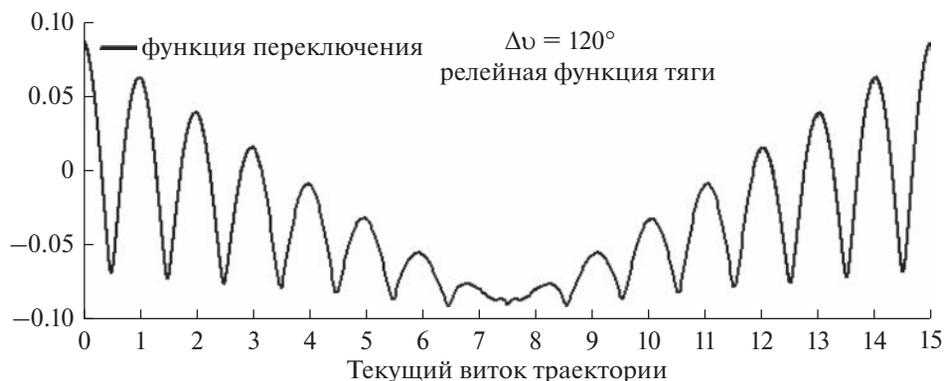


Рис. 7. Изменение функции переключения двигателя вдоль траектории перелета. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Релейная функция тяги. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

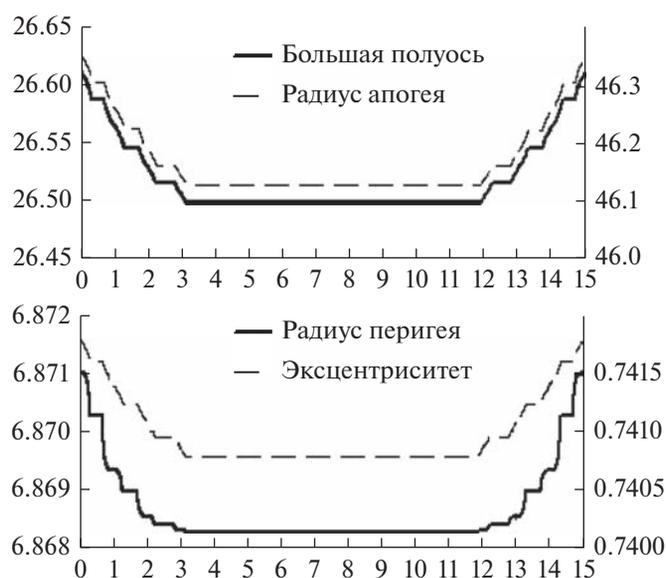


Рис. 8. Большая полуось (сплошная линия, тыс. км), радиус апогея (пунктирная линия, тыс. км), радиус перигея (справа, сплошная линия, тыс. км) и эксцентриситет (справа, пунктирная линия) оскулирующей орбиты как функции текущей угловой дальности перелета (витки). КА с нерегулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

шей орбиты, и обеспечивается выход КА на рабочую орбиту с заданным углом фазирования.

На рис. 8 справа показано изменение эксцентриситета и радиуса перигея оскулирующей орбиты вдоль траектории перелета. Характер изменения этих элементов аналогичен характеру изменения уже проанализированных выше элементов. Следует заметить, что диапазон изменения радиуса перигея существенно меньше диапазона изменения радиуса апогея. Если радиус апогея на первых витках траектории уменьшается на 224.3 км, то радиус перигея уменьшается только на 2.7 км. Это объясняется тем, что активные участки траектории расположены в перигейной области витков траектории.

Диапазон изменения эксцентриситета оскулирующей орбиты вдоль траектории перелета та-

кой: максимальное значение равно 0.741791 (в начальной и конечной точке траектории перелета), минимальное значение равно 0.740787 (на девяти пассивных витках перелетной траектории, расположенных в середине траектории перелета).

На рис. 9 показана оптимальная программа угла тангажа на активных участках траектории перелета. Отдельно слева показана программа по углу тангажа на начальных четырех активных участках траектории полета. Видно, что на каждом активном участке оптимальная программа по тангажу очень близка к линейной программе. Угол тангажа изменяется в диапазоне $140^\circ \dots 230^\circ$. На последних четырех активных участках (правая часть рисунка) диапазон изменения угла тангажа $-45^\circ \dots 40^\circ$.

На рис. 10 показано изменение угла атаки на активных участках траектории перелета. Видно, что на

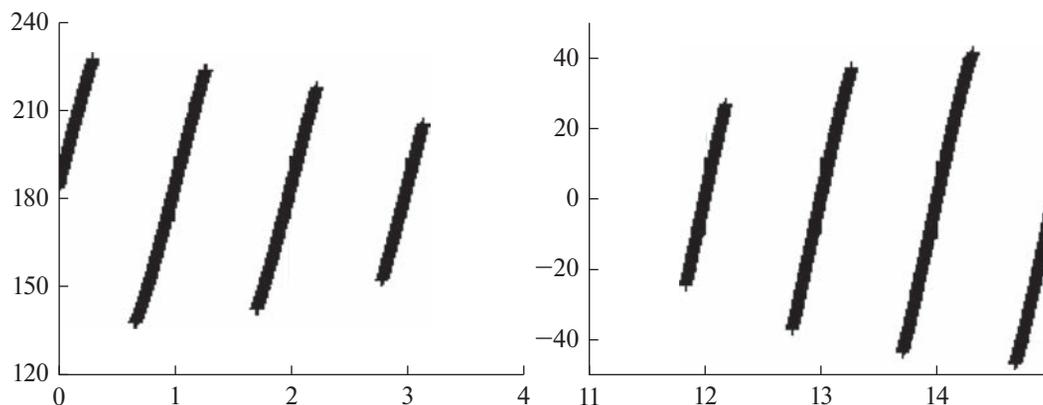


Рис. 9. Программа угла тангажа на активных участках траектории (град) как функция текущей угловой дальности (витки). Левый рисунок для первых четырех витков траектории, правый — для последних четырех витков. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

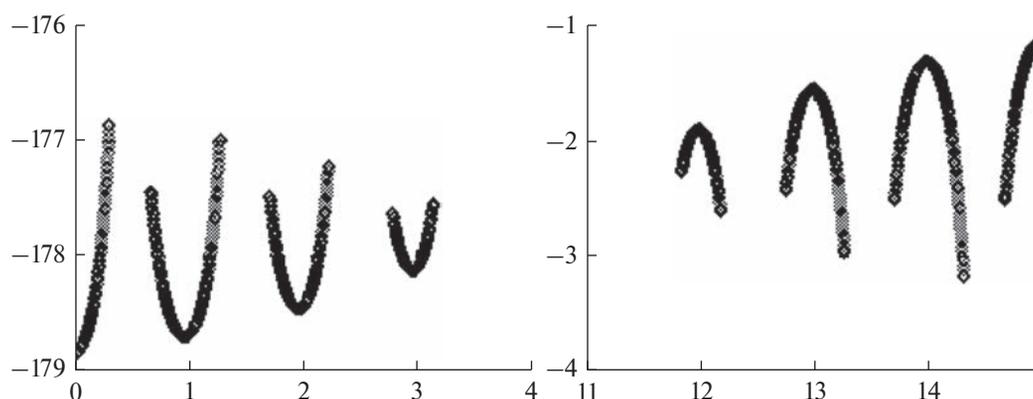


Рис. 10. Угол атаки (град) как функция текущего времени перелета (сут). Левый рисунок для первой половины траектории перелета, правый — для второй. КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120° .

первых четырех активных участках траектории перелета угол атаки изменяется в очень узком диапазоне $-179^\circ \dots -176.8^\circ$. Тяга двигателя тормозит КА, обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты и ее периода. На последних четырех активных участках траектории угол атаки изменяется в узком диапазоне $-3.2^\circ \dots -1.0^\circ$. Тяга двигателя прежде всего разгоняет КА, обеспечивая увеличение периода оскулирующей орбиты и выход на рабочую орбиту с требуемым углом фазирования. Можно отметить, что на всех активных участках есть небольшая компонента реактивного ускорения “прижимающего” КА к Земле.

Характеристическая скорость анализируемого маневра с точностью до четырех значащих цифр не изменилась по отношению к варианту траектории с параметром сглаживания функции тяги равному $\epsilon = 10^{-9}$: она равна 7.791 м/с. Не изменилась и требуемая масса топлива — 448.7 г.

В табл. 1 приведены значения характеристической скорости рассматриваемого маневра и требуемой массы топлива для идеально-регулируемой двигательной установки и для нерегулируе-

мой двигательной установки с несколькими вариантами функции тяги. Видно, что уменьшение параметра сглаживания функции тяги приводит к асимптотическому уменьшению характеристической скорости маневра. При параметре сглаживания $\epsilon = 10^{-5}$ полученная характеристическая скорость почти на 80% больше характеристической скорости маневра при релейной функции тяги. При $\epsilon = 10^{-6}$ эта разница сокращается до 12%, а при $\epsilon = 10^{-7}$ — до 1.2%. Можно считать, что для рассматриваемого маневра оценка характеристической скорости может проводиться с использованием сглаживания функции тяги при параметре сглаживания $10^{-7} \dots 10^{-8}$.

Обратим внимание, что использование идеально-регулируемой двигательной установки дало бы возможность довольно сильно (в 2.5 раза) уменьшить характеристическую скорость маневра (по отношению к варианту КА с нерегулируемой двигательной установкой) с 7.8 до 2.9 м/с.

Перейдем к анализу характеристик оптимальных траекторий перелета КА как функций угла фазирования.

Таблица 1. Характеристическая скорость и масса требуемого топлива для нескольких значений параметра сглаживания функции тяги. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120°

Вариант анализа		Характеристическая скорость, м/с	Масса требуемого топлива, г
Идеально-регулируемый двигатель		2.917	168.0
Нерегулируемый двигатель, параметр сглаживания ϵ	10^{-5}	13.944	803.0
	10^{-6}	8.713	501.9
	10^{-7}	7.882	454.0
	10^{-8}	7.799	449.2
	10^{-9}	7.791	448.7
Релейная функция тяги		7.791	448.7

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КАК ФУНКЦИЙ УГЛА ФАЗИРОВАНИЯ

В разделе рассмотрены результаты оптимизации траектории перелета с угловой дальностью 15 витков для диапазона угла фазирования 15°...180°, т.е. для диапазона, при котором траектория перелета будет находиться внутри заданной орбиты, чтобы “догнать” точку орбиты, в которую КА должен быть переведен.

На левой части рис. 11 показана характеристическая скорость рассматриваемого маневра как функция величины угла фазирования. Характеристическая скорость с увеличением угла фазирования монотонно увеличивается и при угле фазирования 180° (переводе КА в противоположную точку орбиты) достигает 1814 м/с.

На средней части рис. 11 представлено изменение времени перелета и моторного времени перелета при увеличении величины угла фазирования. В рассматриваемой постановке (фиксирована угловая дальность перелета) время перелета практически не изменяется. Время работы двигательной установки с увеличением угла

фазирования монотонно увеличивается и при угле фазирования 180° становится близким к времени перелета. Продолжительность единственного пассивного участка на траектории перелета всего 0.345 сут. Он расположен в середине траектории перелета.

Справа на рис. 11 показано изменение требуемой массы топлива при изменении величины угла фазирования. Эта масса монотонно увеличивается с увеличением угла фазирования и при угле фазирования 180° равна 10.4 кг.

На рис. 12 изображено изменение числа активных участков на перелетной траектории (важнейшей характеристики схемы перелетной траектории) при увеличении угла фазирования. При совсем малом угле фазирования траектория перелета имеет всего два активных участка, которые разделены большим по продолжительности пассивным участком. Активные участки расположены на первом и последнем витках траектории.

При увеличении угла фазирования (при усложнении транспортной задачи) число активных участков увеличивается. Так, при величине угла фазирования, принадлежащего диапазону

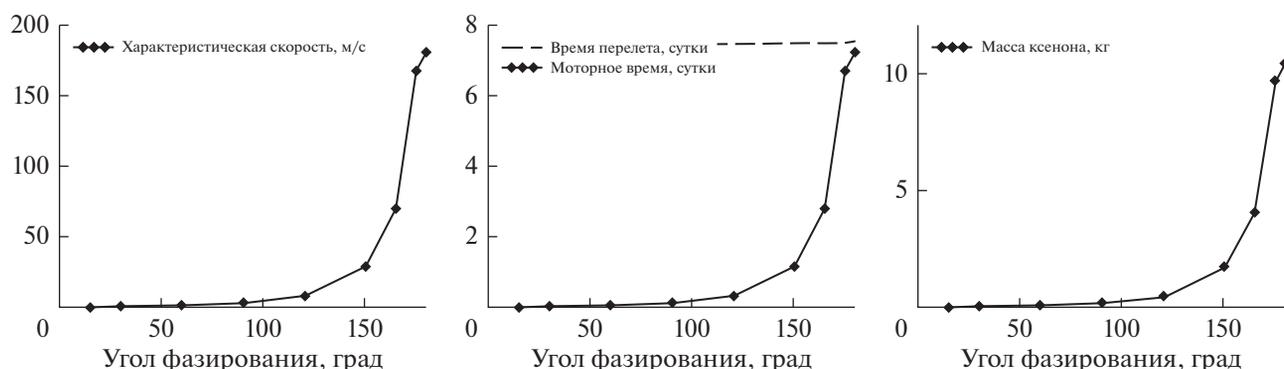


Рис. 11. Характеристическая скорость (левый рисунок, м/с), время перелета и моторное время перелета (средний рисунок, сут) и требуемая масса ксенона (правый рисунок, кг) как функции величины угла фазирования (число витков перелетной траектории). Угловая дальность перелета 15 витков.

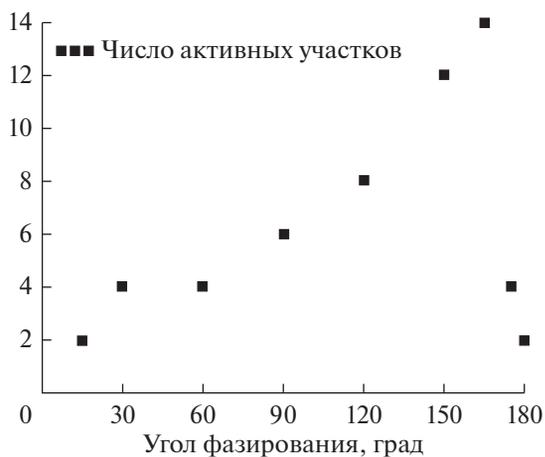


Рис. 12. Число активных участков на траектории перелета как функция величины угла фазирования (град). Угловая дальность перелета 15 витков.

30°...60°, на оптимальной траектории перелета — четыре активных участка, разделенных тремя пассивными участками. При угле фазирования 90° траектория КА состоит из шести активных участков, разделенных пятью пассивными участками. Увеличение числа активных участков продолжается до угла фазирования равного 165°. При таком угле фазирования рассматриваемая 15-витковая траектория КА состоит из 14 активных участков, разделенных 13 пассивными участками. При дальнейшем увеличении угла фазирования рассматриваемая транспортная задача становится такой сложной, что пассивные участки на витках перелета пропадают. Появляются витки траектории, на которых двигатель КА не выключается. Он работает не только в перигейной области витков траектории (как было при меньших величинах угла фазирования), но и в апогейной области. При угле фазирования 175° траектория состоит из четырех активных участков, разделенных тремя пас-

сивными участками. При угле фазирования 180° траектория состоит всего из двух больших по продолжительности активных участков, разделенных одним небольшим пассивным участком. Обратим внимание на то, что число активных участков всегда четное. Они расположены симметрично относительно середины траектории перелета.

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА КАК ФУНКЦИЙ УГЛОВОЙ ДАЛЬНОСТИ И ВРЕМЕНИ ПЕРЕЛЕТА

Угол фазирования в данном разделе предполагается равным 120°. На рис. 13 показаны зависимости характеристической скорости перелета, требуемой массы топлива, времени перелета и моторного времени перелета как функции угловой дальности перелета. Угловая дальность изменяется в диапазоне от 6 до 26 витков траектории. При угловой дальности шесть витков время перелета оказывается близким минимальному времени перелета.

Анализ показывает, что увеличение угловой дальности перелета с 6 до 26 витков траектории приводит к уменьшению характеристической скорости рассматриваемого маневра фазирования более чем в 20 раз (с 73.3 до 3.6 м/с). Особенно резкое изменение характеристической скорости наблюдается в областях малых угловых дальностей перелета. Так, увеличение угловой дальности с 6 до 10 витков траектории позволяет уменьшить характеристическую скорость в 4.5 раза (до величины 16.3 м/с).

Аналогично изменяется с увеличением угловой дальности перелета и требуемая масса топлива. Для 6-виткового перелета эта масса равна 4.27 кг, для 10-виткового — 0.94 кг, для 26-виткового — всего 21 г.

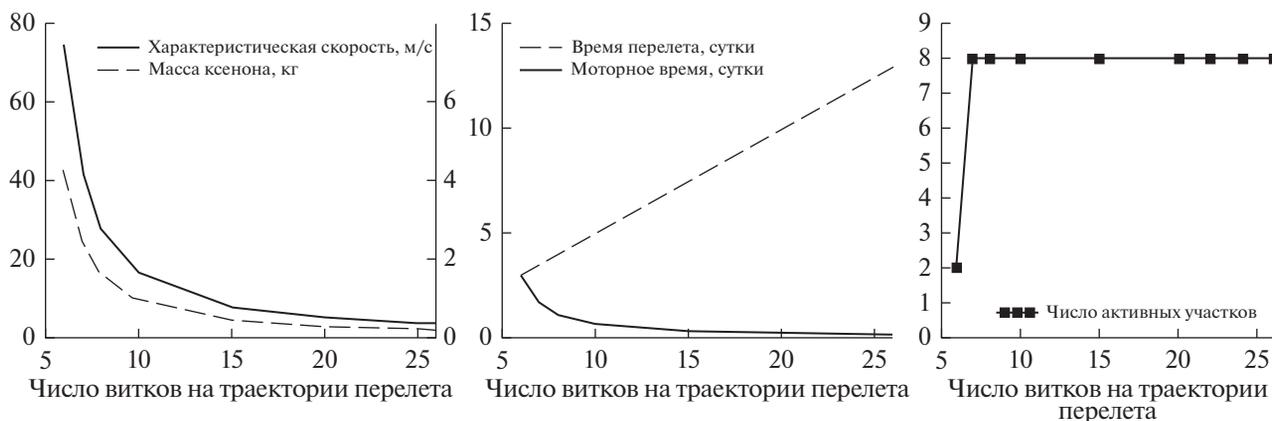


Рис. 13. Характеристическая скорость маневра и требуемая масса топлива (левый рисунок), время перелета и моторное время перелета (центральный рисунок) и число активных участков на траектории перелета как функции угловой дальности перелета (число витков). Угол фазирования 120°.

Время перелета увеличивается практически линейно с увеличением угловой дальности перелета. Для 6-виткового перелета оно равно 2.96 сут, для 26-виткового перелета — 12.96 сут. Время работы двигателя с увеличением угловой дальности перелета монотонно уменьшается и для 26-виткового перелета составляет всего 3.45 ч.

Интересен характер изменения структуры оптимальной траектории (числа активных и пассивных участков) с изменением угловой дальности перелета (зависимость показана на рис. 13 справа). Только траектория с минимально рассмотренной угловой дальностью (6-витковая траектория) имеет всего два активных участка, которые разделены небольшим пассивным участком. Для всех остальных рассмотренных угловых дальностей перелета число активных участков оказалось равно восьми. Увеличение числа витков траектории приводит к тому, что увеличивается пассивный участок между первыми четырьмя и последними четырьмя активными участками. В середине траектории появляется все больше витков, на которых двигатель не включается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании показан разработанный автором алгоритм оптимизации схемы и траектории перевода КА из одной точки эллиптической орбиты в другую точку той же орбиты. Применяемый подход базируется на принципе максимума, использовании метода продолжения по параметру и введении параметра сглаживания функции тяги. Важным свойством используемого метода следует рассматривать утверждение, что используемое начальное приближение не содержит никаких признаков, определяющих число активных участков и их расположение на траектории перелета. Это достигается благодаря использованию в качестве начального приближения траектории перелета с идеально-регулируемой двигательной установкой и применению метода продолжения по гравитационному параметру, начальное значение которого выбирается так, чтобы без включения двигателя была решена рассматриваемая транспортная задача при известной угловой дальности и времени перелета.

Численный анализ выполнен при оптимизации траектории перевода КА между точками сильно вытянутой орбиты (орбиты типа “Молния”). Рассматриваемая ЭРДУ обеспечивает начальное ускорение немного меньше 0.3 мм/с^2 . Анализ численных результатов показал:

- Оптимальная траектория перелета оказывается практически симметричной относительно линии апсид начальной орбиты КА. Расположение активных участков, их число и протяженность практически симметрично средней точке траектории. Типичная траектория перелета со-

стоит из трех участков. На первом из них на каждом витке траектории есть активный участок, расположенный в области перицентра витка. На втором участке двигатель не включается на витках траектории. На третьем участке траектории, как и на первом, двигатель включается на каждом витке в области перицентра этого витка.

- При положительном угле фазирования (при переводе КА в точку орбиты, расположенную впереди точки, в которой находится КА) на первом участке траектории угол атаки на активных сегментах витков находится в весьма узком диапазоне: $-179^\circ \dots -177^\circ$. Тяга двигателя активно тормозит КА и немного прижимает его вектор скорости к гравитационному центру. На третьем участке траектории угол атаки на активных сегментах витков находится в диапазоне $-3^\circ \dots -1^\circ$. При этом тяга двигателя активно разгоняет КА и опять немного прижимает его вектор скорости к гравитационному центру. При отрицательном угле фазирования картина меняется симметрично: тяга двигателя на первых витках траектории КА увеличивает скорость КА, на последних витках — уменьшает.

- За счет увеличения угловой дальности перелета (увеличения числа витков траектории) существует возможность значительно уменьшить характеристическую скорость маневра. Особенно эффективно использовать увеличение угловой дальности перелета при перелетах с малой угловой дальностью, немного большей минимальной угловой дальности.

- Увеличение угловой дальности перелета позволяет реализовать перевод КА в противоположную точку орбиты с относительно малой характеристической скоростью маневра. Для орбиты типа “Молния” величина характеристической скорости такого маневра при 15-витковой траектории перелета составляет 181 м/с.

- Число активных участков на оптимальной траектории остается постоянным при увеличении угловой дальности перелета (числа витков траектории) в широком диапазоне угловой дальности перелета. В этот диапазон не входит только область минимальной угловой дальности. При увеличении угловой дальности перелета в середине перелетной траектории увеличивается протяженность пассивного участка, появляются новые пассивные витки (витки, на которых ЭРДУ не включается). В середине траектории появляется все больше витков, на которых двигатель не включается.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00329 “Развитие теории и методов проектирования траекторий космических аппаратов с двигательными установками большой и малой тяги”, <https://rscf.ru/project/22-19-00329/>.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ,
ОПИСЫВАЮЩАЯ ИЗМЕНЕНИЕ
СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ
НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ ТРАЕКТОРИИ
ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА

Уравнения пассивного движения КА в рамках задачи двух тел интегрируются аналитически. Система дифференциальных уравнений, описывающих это движение, имеет полный набор первых интегралов. Выражения для этих первых интегралов дает возможность описать аналитическими соотношениями изменение и фазовых, и сопряженных переменных на пассивных участках оптимальной траектории перелета КА.

Сначала приведем систему дифференциальных уравнений, описывающую движение КА на пассивном участке траектории.

$$\frac{dV_r}{d\beta} = V_n - \frac{1}{rV_n}; \quad \frac{dV_n}{d\beta} = -V_r; \quad \frac{dr}{d\beta} = \frac{rV_r}{V_n}; \quad \frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}. \quad (\text{П.1})$$

Обратим внимание, что масса КА на пассивных участках не меняется и ее нецелесообразно включать в вектор фазовых переменных. При этом на пассивном участке сопряженная к массе переменная остается постоянной.

Система дифференциальных уравнений, описывающих изменение сопряженных переменных на пассивном участке траектории, при выбранном векторе фазовых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{V_r}}{d\beta} &= \lambda_{V_n} - \lambda_r \frac{r}{V_n}; \\ \frac{d\lambda_{V_n}}{d\beta} &= \frac{r}{V_n^2} \left(-\lambda_{V_r} \frac{1+rV_n^2}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t \right); \\ \frac{d\lambda_r}{d\beta} &= \frac{-1}{V_n} \left(\frac{\lambda_{V_r}}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t \right); \quad \frac{d\lambda_t}{d\beta} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Если известен полный набор независимых первых интегралов для системы дифференциальных уравнений, описывающих изменение вектора фазовых переменных y (его размерность в рассматриваемом случае равна четырем) $\Psi_i(y) = C_i$ (здесь C_i – константы интегрирования, $i = 1...4$), то для нахождения компонент вектора сопряженных переменных λ можно использовать соотношение

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^4 \left(D_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i} \right), \quad i = 1...4. \quad (\text{П.3})$$

В приведенном равенстве D_j – константы интегрирования сопряженной системы дифференциальных уравнений.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ КА
НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ
ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим набор первых интегралов плоского движения задачи двух тел в виде следующего набора первых интегралов:

$$\begin{aligned} \Psi_1(V_n, r) &= rV_n = \sigma; \\ \Psi_2(V_r, V_n, r) &= \sqrt{V_r^2 + V_n^2} \times \\ &\times \sigma \cos \left(\beta - \arctg \left(\frac{V_r}{V_n} \right) \right) - \cos(\beta) = e_x; \\ \Psi_3(V_r, V_n, r) &= \sqrt{V_r^2 + V_n^2} \times \\ &\times \sigma \sin \left(\beta - \arctg \left(\frac{V_r}{V_n} \right) \right) + \sin(\beta) = e_y; \\ \Psi_4(t) &= nt - E + e \sin(E) = nt_\pi. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Первый из перечисленных интегралов есть интеграл площадей (σ – константа площадей); второй и третий интеграл – проекции вектора эксцентриситета; четвертый интеграл – уравнение Кеплера, в нем n – среднее движение; E – эксцентрисическая аномалия; t_π – дата прохождения КА перигея орбиты.

Приведем соотношения, которые были использованы для определения производных $\partial \Psi_j / \partial y_i$, входящих в выражение для сопряженных переменных (П.3).

Производные от Ψ_1 по фазовым переменным:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r} = 0; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n} = r; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = V_n; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = 0. \quad (\text{П.5})$$

Производные от Ψ_2 по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r} &= rV_n \sin(\beta); \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n} &= r(2V_n \cos(\beta) + V_r \sin(\beta)); \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} &= V_n(V_n \cos(\beta) + V_r \sin(\beta)); \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Производные от Ψ_3 по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r} &= rV_n \cos(\beta); \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n} &= r(V_r \cos(\beta) - 2V_n \sin(\beta)); \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} &= V_n(V_r \cos(\beta) - V_n \sin(\beta)); \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Производные от Ψ_4 по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r} &= \sin(E) \frac{\partial e}{\partial V_r} + t \frac{\partial n}{\partial V_r} - (1 - e \cos(E)) \frac{\partial E}{\partial V_r}; \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n} &= \sin(E) \frac{\partial e}{\partial V_n} + t \frac{\partial n}{\partial V_n} - (1 - e \cos(E)) \frac{\partial E}{\partial V_n}; \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial r} &= \sin(E) \frac{\partial e}{\partial r} + t \frac{\partial n}{\partial r} - (1 - e \cos(E)) \frac{\partial E}{\partial r}; \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} &= n. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Входящие в последние соотношения производные эксцентриситета по фазовым переменным, среднее движение, производные от среднего движения по фазовым переменным и производные от эксцентрической аномалии по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{(V_r^2 + V_n^2)r^2 V_n^2 + 1 - 2rV_n^2}, \quad \frac{\partial e}{\partial V_r} = \frac{r^2 V_r V_n^2}{e}; \\ \frac{\partial e}{\partial V_n} &= \frac{rV_n [r(V_r^2 + 2V_n^2) - 2]}{e}; \\ \frac{\partial e}{\partial r} &= \frac{V_n^2 [r(V_r^2 + V_n^2) - 1]}{e}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2 \right)^{3/2}; \\ \frac{\partial n}{\partial V_r} &= -3V_r \sqrt{\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial V_n} &= -3V_n \sqrt{\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial r} &= \frac{-3}{r^2} \sqrt{\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial V_r} &= \frac{V_n^2 \sin(E)}{V_r e} \left(r + \frac{2 - rV_n^2}{hrV_n^2} \right); \\ \frac{\partial E}{\partial V_n} &= \frac{V_n \sin(E)}{e} \left(\frac{1}{h} - r \right); \quad \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\sin(E)}{r^2 e h}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где h – константа энергии, $h = V_r^2 + V_n^2 - \frac{2}{r}$.

В приведенных выражениях для производных входит эксцентрическая аномалия E , точнее: синус и косинус этого угла. Приведем соотношения, определяющие значения этих характеристик по значениям фазовых переменных:

$$\begin{aligned} \sin(E) &= \frac{2 \operatorname{tg}(E/2)}{1 + (\operatorname{tg}(E/2))^2}; \\ \cos(E) &= \frac{1 - (\operatorname{tg}(E/2))^2}{1 + (\operatorname{tg}(E/2))^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

где $\operatorname{tg}(E/2) = \frac{\sqrt{1-e} r V_r V_n}{\sqrt{1+e r V_n^2 - 1 + e}}$.

Система равенств (П.3) для анализируемой модели движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{V_r} &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r}; \\ \lambda_{V_n} &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n}; \\ \lambda_r &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial r}; \\ \lambda_t &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Обратим внимание на то, что от времени зависит только последний из записанных первых интегралов системы дифференциальных уравнений для фазовых переменных (П.4). Поэтому из (П.13) следует, что сопряженная к времени переменная постоянна на пассивном участке траектории и может быть записана так:

$$\lambda_t = D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} = D_4 n. \quad (\text{П.14})$$

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ПАССИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА

Считаем известными значения фазовых (V_{r0} , V_{n0} , r_0 , t_0) и сопряженных ($\lambda_{V_{r0}}$, $\lambda_{V_{n0}}$, λ_{r0} , λ_{t0}) переменных в начальной точке пассивного участка. Считаем известной и угловую дальность перелета $\Delta\beta$, т.е. угол между радиус-векторами начальной и конечной точек рассматриваемого пассивного участка траектории (с учетом полного числа витков на участке). Требуется определить значения сопряженных переменных в конечной точке рассматриваемого пассивного участка траектории $\lambda_{V_{rf}}$, $\lambda_{V_{nf}}$, λ_{rf} , λ_{tf} . Конечно, при этом приходится находить и значения фазовых переменных в конечной точке пассивного участка траектории. Это выполняется по известным соотношениям задачи двух тел [6, 11].

Приведем описание разработанного алгоритма определения значений сопряженных переменных в произвольной (прежде всего, в конечной) точке пассивного участка оптимальной траектории.

1. По значениям фазовых переменных (V_{r0} , V_{n0} , r_0 , t_0) находится константа энергии h , большая полуось и средние движения n орбиты КА. Используя равенство (П.13), находится константа интегрирования D_4 : $D_4 = \lambda_{t0}/n$.

2. По приведенным выше соотношениям (П.5)–(П.8) находятся производные от Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3

по фазовым переменным V_{ro} , V_{no} , r_o в начальной точке пассивного участка.

3. Систему равенств (П.13) рассматриваем как линейную неоднородную систему алгебраических уравнений относительно констант интегрирования D_1 , D_2 и D_3 . Решение этой системы дает значения констант интегрирования D_1 , D_2 , D_3 на анализируемом пассивном участке траектории перелета:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r} \Big|_0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r} \Big|_0 & \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r} \Big|_0 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n} \Big|_0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n} \Big|_0 & \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n} \Big|_0 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \Big|_0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \Big|_0 & \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} \Big|_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_{V_{ro}} - \frac{\lambda_r}{n} \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r} \Big|_0 \\ \lambda_{V_{no}} - \frac{\lambda_r}{n} \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n} \Big|_0 \\ \lambda_{r_o} - \frac{\lambda_r}{n} \frac{\partial \Psi_4}{\partial r} \Big|_0 \end{pmatrix} \quad (\text{П.15})$$

4. Используя соотношения задачи двух тел, определяем фазовые переменные в конечной точке рассматриваемого пассивного участка траектории V_{rf} , V_{nf} , r_f , t_f .

5. По приведенным выше соотношениям (П.5)–(П.8) находятся производные от Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 по фазовым переменным V_{rf} , V_{nf} , r_f в конечной точке рассматриваемого пассивного участка траектории.

6. Используя соотношения, следующие из системы (П.13), определяются сопряженные переменные в конечной точке рассматриваемого участка:

$$\begin{aligned} \lambda_{V_{rf}} &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r} \Big|_f + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r} \Big|_f + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r} \Big|_f + \\ &+ D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r} \Big|_f; \quad \lambda_{V_{nf}} = D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n} \Big|_f + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n} \Big|_f + \\ &+ D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n} \Big|_f + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n} \Big|_f; \quad \lambda_{r_f} = D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \Big|_f + \\ &+ D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \Big|_f + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} \Big|_f + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial r} \Big|_f; \quad \lambda_{t_f} = \lambda_{t_o}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Konstantinov M.S., Obukhov V.A., Petukhov V.G. et al.* Spacecraft station keeping in the Molniya orbit using electric propulsion // Proc. 56th Intern. Astronautical Congress. 17–21 Oct. 2005, Fukuoka, Japan. 2005. Art. ID. IAC-05-C1.1.01. <https://doi.org/10.2514/6.IAC-05-C1.1.01>
2. *Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al.* Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // Acta Astronautica. 2022. V. 197. P. 354–367. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>
3. *Petukhov V.* Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the problems of optimizing low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2019. V. 57. Iss. 5. P. 351–363. <https://doi.org/10.1134/S001095251905006X>
4. *Ivanyukhin A., Petukhov V.* Optimization of multi-revolution limited power trajectories using angular independent variable // J. Optimization Theory and Applications. 2021. V. 191. Iss. 2. P. 575–599. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01853-8>
5. *Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М.* Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. М.: Изд. МАИ, 2015. 259 с.
6. *Konstantinov M.S., Thein M.* Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys // Acta Astronautica. 2017. V. 136. P. 297–311. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.02.018>
7. *Константинов М.С., Тейн М.* Оптимизация траектории выведения космического аппарата на систему гелиоцентрических орбит // Косм. исслед. 2017. Т. 55. № 3. С. 226–235.
8. *Petukhov V.G.* One Numerical Method to Calculate Optimal Power Limited Trajectories // 24th Intern. Electric Propulsion Conf. 19–23 Sept. Moscow. 1995. Art. ID. IEPC-95-221. 7 p.
9. *Петухов В.Г.* Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Косм. исслед. 2012. Т. 50. № 3. С. 258–270.
10. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Косм. исслед. 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237. (Cosmic Research. P. 219–232.) <https://doi.org/10.1134/S0010952508030052>
11. *Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П. и др.* Механика космического полета / под ред. В.П. Мишина. М.: Машиностроение, 1989. 410 с.

УДК 621.455.4, 533.9.07, 678

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ИСПЫТАНИЯ ИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ЭЛЕКТРОДАМИ ИОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ИЗГОТОВЛЕННЫМИ ИЗ УГЛЕРОД-УГЛЕРОДНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ НЕТКАНОГО УГЛЕРОДНОГО КАРКАСА

© 2023 г. Р. В. Ахметжанов¹, *, А. В. Богатый¹, Е. А. Богачев², С. В. Гордеев¹, А. Б. Елаков²,
Д. А. Каширин¹, Ю. С. Перминова², Г. А. Попов¹, М. В. Черкасова¹

¹Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

²АО “Композит”, Королёв, Россия

*ahmetzhanov1991@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 12.04.2023 г.

Представлены результаты тысячасовых испытаний высокочастотного ионного двигателя (ВЧИД) с электродами ионно-оптической системы (ИОС), изготовленными из углерод-углеродного композиционного материала. После проведения испытаний выполнена оценка качества поверхности ускоряющего электрода ИОС-двигателя — ключевого элемента конструкции ВЧИД с точки зрения ресурса, которая проводилась визуальным осмотром и сканирующей электронной микроскопией (СЭМ). Была определена максимальная глубина эрозионной выемки на поверхности ускоряющего электрода. Методом микрорентгеноспектрального анализа был проведен элементный анализ поверхностей электрода.

DOI: 10.31857/S0023420623700103, EDN: NERQOF

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время малые космические аппараты (МКА) оснащаются двигательными установками с недостаточно высокими скоростями истечения рабочего тела, что ограничивает массу полезной нагрузки и срок активного существования аппарата. Для эффективного решения различных задач в космосе (навигация, дистанционное зондирование Земли, связь) с использованием МКА необходимы электроракетные двигатели (ЭРД) малой мощности с относительно высоким удельным импульсом тяги, а также с высоким ресурсом работы.

Требование высокого ресурса ЭРД особенно актуально для низкоорбитальных МКА. Так, для повышения эффективности работы регистрирующей аппаратуры перспективных низкоорбитальных космических аппаратов (НОКА) высоту их орбиты целесообразно выбирать в диапазоне 250...300 км. Однако на этих высотах остаточная атмосфера создает, с учетом орбитальной скорости аппарата, аэродинамическое сопротивление, приводящее к торможению КА и снижению высоты его орбиты [1–4]. Срок активного существо-

вания (САС) КА на низких орбитах колеблется от нескольких дней до нескольких месяцев, поэтому высоту орбиты для длительного существования КА выбирают выше. При этом эффективность целевой аппаратуры снижается. Для увеличения САС КА снижение из-за торможения должно компенсироваться приращением скорости аппарата с помощью корректирующей двигательной установки. В перспективных разработках НОКА предполагается их длительное функционирование на рабочей орбите, что потребует значительного увеличения массы топлива корректирующей двигательной установки. Для существующих двигательных установок с жидкостными ракетными двигателями даже увеличение срока существования КА до одного года приведет к практически полному сокращению массы целевой аппаратуры.

Известен опыт длительной работы (более четырех лет) НОКА *GOCE* (англ. Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer, исследователь гравитационного поля и установившихся океанских течений) Европейского космического агентства на орбитах 240...260 км [5, 6]. Высота орбиты поддерживалась и корректировалась при

помощи двигательной установки с ЭРД T5 фирмы QinetiQ, для этого потребовался запас рабочего тела (ксенона) около 40 кг [7]. Аппарат прекратил существование по завершению выработки всей массы рабочего тела. В России началась успешная эксплуатация ЭРД на орбитах 500...520 км на КА “Канопус-В” [8].

Одними из наиболее подходящих двигателей для низкоорбитальных МКА выступают ионные двигатели, обладающие достаточно высоким ресурсом (десятки тысяч часов) и высоким удельным импульсом. Ионно-оптическая система (ИОС), а точнее ее ускоряющий электрод (УЭ), представляется критическим элементом двигателя с точки зрения его ресурса. В объеме пучка ионов, а также в зоне нейтрализации ионного пучка электронами в результате столкновения быстрых ионов рабочего тела (чаще всего в качестве него используется ксенон) и медленных нейтральных атомов, истекающих из двигателя, образуются медленные ионы перезарядки. Под действием электрического поля часть этих ионов попадает на ускоряющий электрод, вызывая его эрозию [9]. Поэтому выбор материала УЭ, устойчивого к распылению ионами рабочего тела, становится важной задачей при проектировании двигателя.

ВЫБОР МАТЕРИАЛА УСКОРЯЮЩЕГО ЭЛЕКТРОДА

Используемые для электродов ИОС ВЧИД титановые и молибденовые сплавы имеют ряд недостатков, из которых можно отметить: относительно высокие значения коэффициентов термического линейного расширения (КТЛР); относительно высокие значения коэффициентов ионного распыления, характеризующие эрозионный унос; опасность развития межкристаллитной коррозии [10, 11].

В последние годы реальной альтернативой металлическим сплавам применительно к электродам ИОС стали материалы на основе углерода, имеющие наиболее низкий коэффициент ионного распыления. Материалы на основе углерода, такие как изостатический графит или пирографит, обладают более низкими КТЛР $(0...4.5) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, что дает дополнительное преимущество перед традиционно используемыми молибденом, титаном и сплавами на их основе [12, 13]. Это свойство углеродных материалов делает целесообразным изготовление из них не только УЭ, но и очень тонких эмиссионных электродов (ЭЭ), что обеспечивает их стабильность при нагреве работающего ионного двигателя до температуры около 400°C и перепаде температуры на поверхности электрода до 100°C [14].

Углерод-углеродные композиционные материалы (УУКМ) имеют ряд преимуществ: невысокую плотность, низкие значения КТЛР, высокую размеростабильность во всем интервале рабочей температуры, высокую эрозионную стойкость, отсутствие межкристаллитной коррозии [15]. УУКМ отвечают по своим характеристикам практически всем требованиям, предъявляемым к электродам ИОС, за исключением чистоты поверхности. Серийно производимые УУКМ на тканно-выкладочной, стержневой и нитяной основе не обеспечивают требований по шероховатости поверхности из-за структурной неоднородности углеродных каркасов, для которых характерно сочетание областей крупноячеистого межволоконного пространства с мезопористостью межфиламентных пустот внутри волокон. Эта особенность типична для производства, например, деталей на основе ткани УТ-900. Такая неоднородность наследуется и получаемыми на основе данных каркасов конструкционными материалами. Иную структуру имеют углеродные нетканые материалы войлочного типа, например, на основе нетканого окисленного полиакрилонитрила. Выпускаемые промышленностью каркасы на основе углеродных войлоков имеют плотность около 0.2 г см^{-3} , что не позволяет использовать их для достижения высокой конструкционной прочности в композите.

В АО “Композит” совместно с ООО “Ниагара” разработан способ изготовления пористого каркаса-основы композиционного материала [16], позволяющий при помощи иглопробивной технологии получить мелкоячеистый армирующий углеродный каркас марки Ипресскон® плотностью $(0.5...0.6) \text{ г см}^{-3}$, а в последующем – УУКМ на его основе.

Основные характеристики УУКМ-Ипресскон®, из которого были изготовлены электроды, представлены в табл. 1.

Все механические свойства УУКМ-Ипресскон® находятся на уровне либо превышают свойства серийно выпускаемых УУКМ.

ПОДГОТОВКА И ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве образца для проведения эксперимента использовался опытный образец высокочастотного ионного двигателя малой мощности ВЧИД-8, созданный в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) (МАИ) и АО “Конструкторское бюро химавтоматики” в 2013–2015 гг. [12]. В АО “Композит” были изготовлены эмиссионный и ускоряющий электроды для данного образца. Электроды были выполнены из УУКМ-Ипресскон®. Фотографии электродов представлены на рис. 1 и 2.

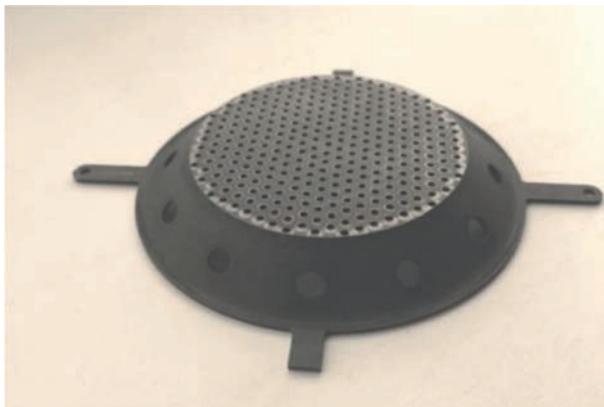


Рис. 1. Ускоряющий электрод.



Рис. 2. Эмиссионный электрод.

При проведении испытаний поддерживались следующие основные параметры двигателя:

- расход рабочего тела (ксенона): 2.3 ст. см³/мин (внесистемная единица измерения “кубический сантиметр в минуту при стандартных условиях”);
- ток ионного пучка: 100 мА;
- потенциал ЭЭ: 2000 В;
- потенциал УЭ: –200 В.

Следует отметить, что при разности потенциалов между ЭЭ и УЭ 2200 В межэлектродный зазор составлял всего лишь 0.8 мм, т.е. пробойная прочность составила 2.75 кВ/мм. Это стало возможным благодаря низкому уровню шероховатости поверхности материала электрода (достижимое значение $R_a = 0.16$ мкм), сопоставимого с металлами. Обычно для УУКМ пробойная прочность составляет не более 2.2...2.3 кВ/мм [17].

Экспериментальные исследования проводились на стенде ИУ-2 Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики (НИИ ПМЭ) МАИ. Данный стенд предназначен для проведения исследовательских испытаний ЭРД мощностью до 1 кВт (рис. 3).

Диаметр вакуумной камеры составляет 1 м, длина 2.5 м. Вакуумный стенд оснащен безмасляными средствами откачки. Для получения пред-



Рис. 3. Исследовательский стенд ИУ-2.

варительного разряда в вакуумной камере используется безмасляный форвакуумный насос Kashiyama MU-603 со скоростью откачки 166 л/с, для достижения высокого вакуума используются (при давлении 10^{-5} Торр): криогенный насос

Таблица 1. Основные характеристики УУКМ на основе преформы Ипрескон®

Параметр	Значение
Объемная плотность	1.88...1.95 г/см
Прочность при растяжении при 20°C, (X–Y)	70...80 МПа
Модуль упругости при растяжении	50...55 ГПа
Прочность при сжатии при 20°C	140...220 МПа
Прочность при трехточечном изгибе при 20°C	90...140 МПа
Коэффициент Пуассона	0.1...0.2
Достижимая шероховатость поверхности R_a	0.16 мкм

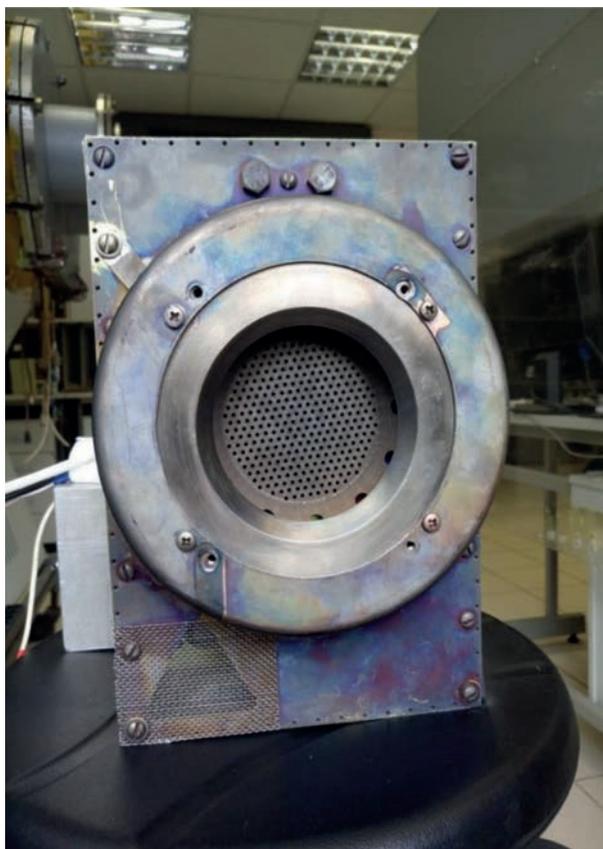


Рис. 4. ВЧИД с электродами из УУКМ-Ипресскон перед установкой в вакуумную камеру.

Velco 402 Xe со скоростью откачки 6800 л/с (по ксенону), криогенный насос СТИ-Cryogenics On-board 400 со скоростью откачки 5000 л/с (по ксенону), два турбомолекулярных насоса Shimadzu TMP-3403 LM со скоростью откачки 3100 л/с (по ксенону). Скорость откачки при давлении 10^{-5} Торр и работе всех насосов составит 18900 л/с (по ксенону). Предельное разрежение (с учетом натекания) составляет $5.0 \cdot 10^{-7}$ Торр.

Вакуумный стенд оснащен системой подачи газа (ксенона) на основе контроллеров подачи газа фирмы MKS (0...10 ст. см³/мин) и фирмы Alicat (0...0.5 и 0...1 ст. см³/мин), которые позволяют обеспечивать раздельную подачу газа к испытываемому образцу и катоду-нейтрализатору.

В ходе проведения эксперимента были задействованы только турбомолекулярные насосы, что позволяло иметь давление в вакуумной камере во время работы двигателя менее $4 \cdot 10^{-5}$ Торр.

Фотография двигателя перед установкой в вакуумную камеру представлена на рис. 4.

Испытания экспериментального образца ВЧИД с электродами из УУКМ-Ипресскон® проводились на протяжении 1000 ч. В ходе исследо-

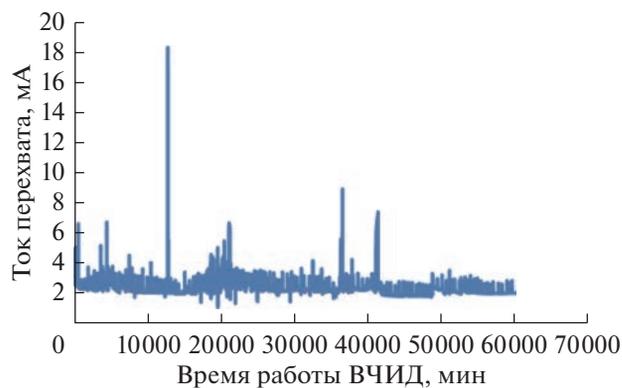


Рис. 5. Изменение тока в цепи источника питания УЭ.

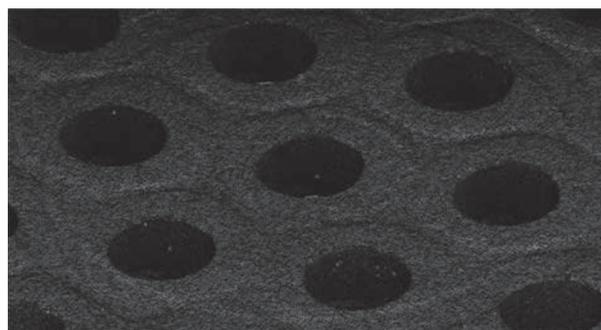


Рис. 6. Эрозия поверхности УЭ ВЧИД.

ваний основным контролируемым параметром был ток в цепи источника питания УЭ, вызванный выпадением ионов перезарядки на УЭ. Среднее значение тока ионов перезарядки составило 2.31 мА, т.е. менее 3% от тока первичного пучка, что говорит о хорошем выборе параметров ИОС и о высоком качестве изготовления и сборки ИОС и ее элементов. График изменения тока в цепи источника питания УЭ представлен на рис. 5. Отдельные повышения тока в цепи источника питания УЭ связаны с разовыми пробоями, не влияющими на характеристики двигателя.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕРИАЛА УСКОРЯЮЩЕГО ЭЛЕКТРОДА ПОСЛЕ ПРОВЕДЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ

Оценка качества поверхности электрода проводилась посредством визуального осмотра и сканирующей электронной микроскопии (СЭМ). При этих исследованиях использовали сканирующий электронный микроскоп JSM-6610 LV с энергодисперсионным анализатором Advanced AZtec. Исследования микроструктуры проводили при увеличениях до 1000 крат. Изображение в сканирующем микроскопе получали во вторичных

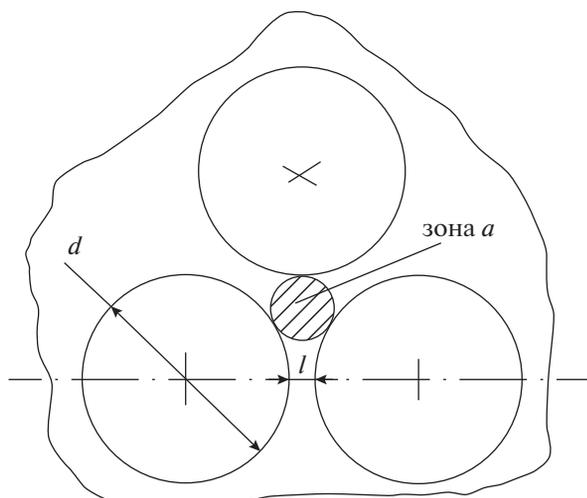


Рис. 7. Зона интенсивной эрозии УЭ.

электронах (secondary electrons – SEI), которые проявляют главным образом контраст рельефа, сформированного на поверхности образца, и в отраженных электронах (back scattered electrons – ВЕС), которые проявляют главным образом контраст атомного номера.

После проведения экспериментальных исследований на поверхности УЭ образовалась характерная картина эрозии “ямки и канавки” (рис. 6). При этом максимальная глубина эрозии составила 0.071 мм, что позволяет оценить время работы ВЧИД до образования паразитных отверстий в ускоряющем электроде в более чем 28 тыс. ч.

Однако двигатель при этом не теряет работоспособность. Критерием отказа двигателя принято считать распыление всего материала УЭ в зоне, ограниченной окружностью, касающейся границ трех соседних отверстий УЭ (рис. 7).

При распылении всего материала УЭ в зоне “а” двигатель перестает быть работоспособным.

Элементный анализ проводился методом микрорентгеноспектрального анализа (МРСА). Данные МРСА являются количественными при исследовании фрагментов полированной поверхности электрода. Использованный анализа-

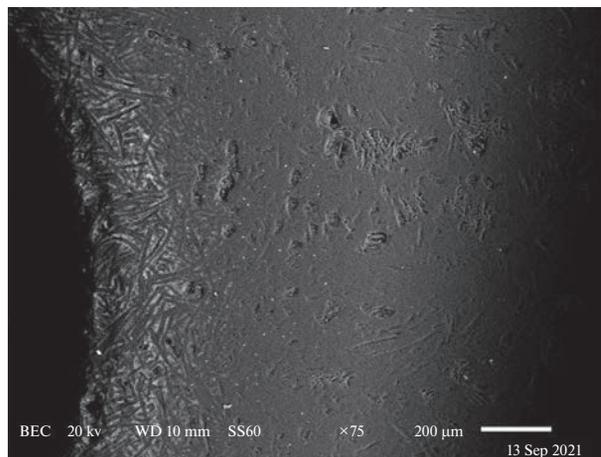


Рис. 8. СЭМ рабочей поверхности ускоряющего электрода после стендовых испытаний.

тор позволяет получать сигналы только элементов с атомным номером больше 4. Чувствительность анализа для легких элементов находится в пределах от 1 до 5%. Содержание элементов в анализируемом образце менее 0.1% не определялось. Результаты количественного анализа структурных составляющих достоверны при их размерах более 3 мкм. Результаты количественного анализа структурных составляющих при определении легких элементов достоверны при их размерах более 5 мкм.

На рабочей поверхности ускоряющего электрода после стендовых испытаний наблюдаются темные области вокруг отверстий шириной 250...300 мкм (рис. 8), при наблюдении этих областей в обратно-отраженных электронах заметно, что пространство между волокнами окрашено в ярко-белый цвет, что свидетельствует о высоком атомном номере элементов.

По результатам МРСА, представленным в табл. 2, между волокон скапливается ксенон – инертный газ, которым насыщается поверхность электрода в процессе стендовых испытаний. Также на рабочей поверхности электрода наблюдаются небольшие сколы на кромках и поры размером около 20 мкм.

Таблица 2. МРСА рабочей поверхности ускоряющего электрода после стендовых испытаний, ат. %

Химический элемент	Спектр 24	Спектр 25	Спектр 26	Спектр 27
С (углерод)	99.96	99.93	99.91	99.88
Si (кремний)	–	0.04	0.09	–
Ti (титан)	0.04	0.04	–	–
Хе (ксенон)	–	–	–	0.12
Сумма	100.00	100.00	100.00	100.00

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В АО “Композит” был создан углерод-углеродный композиционный материал марки Ипресскон[®], и из него были изготовлены эмиссионный и ускоряющий электроды ионно-оптической системы высокочастотного ионного двигателя малой мощности. В НИИ ПМЭ МАИ были проведены исследовательские испытания ВЧИД с этими электродами продолжительностью 1000 ч, показавшие применимость и высокие рабочие характеристики данного материала для производства как эмиссионного, так и ускоряющего электродов ИД. Полученная в ходе экспериментальных исследований скорость эрозии позволяет сделать вывод о возможности достижения высокого ресурса ИД (более 28 тыс. ч) при использовании в их составе ускоряющего электрода из УУКМ-Ипресскон.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kanev S.V., Petukhov V.G., Popov G.A., Khartov S.A. Electro-rocket ramjet thruster for compensating the aerodynamic drag of a low-orbit spacecraft // *Russian Aeronautics*. 2015. V. 58. Iss. 3. P. 286–291. <https://doi.org/10.3103/S106879981503006X>
2. Popov G.A., Suvorov M.O., Syrin S.A., Khartov S.A. Air-Breathing ramjet electric propulsion thruster for controlling low-orbit spacecraft motion and for compensating its aerodynamic drag // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2017. V. 161. P. 833–841.
3. Erofeev A.I., Nikiforov A.P., Popov G.A. et al. Air-Breathing Ramjet Electric Propulsion for Controlling Low-Orbit Spacecraft Motion to Compensate for Aerodynamic Drag // *Solar System Research*. 2017. V. 51. Iss. 7. P. 639–645. <https://doi.org/10.1134/S0038094617070048>
4. Gordeev S., Kanev S., Khartov S. et al. Electric propulsion system based on the air-breathing radio-frequency ion thruster using the upper atmosphere gases as propellant // *Proc. 69th Intern. Astronautical Congress*. Bremen, Germany, 1–5 Oct. 2018. Art. ID: 42673.
5. Wallace N., Jameson P., Saunders C. et al. The GOCE Ion Propulsion Assembly – Lessons Learnt from the First 22 Months of Flight Operations // *32nd Intern. Electric Propulsion Conf.* Wiesbaden, Germany, 11–15 Sept. 2011. Art. ID. IEPC-2011-327.
6. Steiger C., Romanazzo M., Emanuelli P.P. et al. Flying at the edge – Extremely low altitude operations for ESA’s drag-free gravity mission GOCE // *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conf.* Boston, MA, 19–22 Aug. 2013. Art. ID. AIAA 2013-4772.
7. Steiger C., Piñeiro J., Emanuelli P.P. Operating GOCE, the European Space Agency’s low-flying gravity mission // *SpaceOps 2010 Conf. Delivering on the Dream* Hosted by NASA. Huntsville, AL, 25–30 Apr. 2010. Art. ID. AIAA 2010-2125.
8. Asmus V.V., Volgutov R.V., Deryugina V.V. et al. Satellite Technologies Applied to Hydrometeorological Problems in the Arctic Region // *Russian Meteorology and Hydrology*. 2019. V. 44. Iss. 4. P. 250–261. <https://doi.org/10.3103/S1068373919040046>
9. Akhmetzhanov R., Loeb H.W., Cherkasova M.V., Obukhov V.A. Numerical Simulation of a System of Formation of an Intense Ion Beam From Gas Discharge Plasma of an Ion Thruster // *64th Intern. Astronautical Congress*. Beijing, China, 23–27 Sept. 2013. Art. ID. IAC-13-C4.4.1.
10. Антипов Е.А., Балашов В.В., Вебер А.В. и др. Выбор конструкционных материалов для высокочастотных ионных двигателей // *Электрон. журн. Тр. МАИ*. 2013. № 65. 15 с. <http://trudymai.ru/published.php?ID=35964>
11. Абгарян В.К., Ахметжанов Р.В., Леб Х.В. и др. Моделирование эрозии ускоряющего электрода ионно-оптической системы ионного двигателя // *Взаимодействие ионов с поверхностью: ВИП-2013: Тр. 21-й Международ. конф.* 22–26 авг. 2013. Ярославль, Россия. 2013. Т. 1. С. 95–98.
12. Antropov N.N., Akhmetzhanov R.V., Bogatyuy A.V. et al. Experimental research of radio-frequency ion thruster // *Thermal Engineering*. 2016. V. 63. Iss. 13. P. 957–963. <https://doi.org/10.1134/S0040601516130036>
13. Leiter H.J., Loeb H.W., Schartner K.-H. The RIT15 ion engines – A survey of the present state of radio frequency ion thruster technology and its future potentiality European Space Agency // *Spacecraft Propulsion. 3rd Intern. Conf.* 10–13 Oct. 2000, Cannes, France / ed. R.A. Harris; European Space Agency, 2001. ESASP-465. P. 423–432.
14. Abgaryan V.K., Kruglov K.I. Thermal model of RF ion thrusters and ion sources // *J. Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2015. V. 9. Iss. 6. P. 1137–1143
15. Li J., Qiu J., Chu Y., Zhang T. et al. Ion Thruster Grid Lifetime Assessment Based on Its Structural Failure // *Intern. J. Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engin.* 2015. V. 9. Iss. 11. P. 1978–1981.
16. Богачев Е.А., Елаков А.Б., Белоглазов А.П., Денисов Ю.А., Тимофеев А.Н. Способ изготовления пористого каркаса-основы композиционного материала: Патент РФ № 2620810. Оpubл. 29.05.2017. Бюл. № 16.
17. Goebel D., Katz I. Fundamental of electric propulsion: Ion and Hall Thrusters / *Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology. Space and Technology Series*. 2008. 493 p. <https://doi.org/10.1002/9780470436448>