

ISSN 0023-4206

Том 61, Номер 2

Март - Апрель 2023



КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 2, 2023

Влияние малых вариаций концентрации плазмы на условия распространения электромагнитных волн свистового диапазона сквозь утреннюю ионосферу <i>В. Г. Мизонова, П. А. Беспалов</i>	91
Оценка пространственно-временного спектра волн на основе циркулярных измерительных решеток <i>И. В. Белоконов, В. М. Журавлев, В. М. Морозов</i>	103
Моделирование мультифрактального турбулентного электромагнитного поля в космической плазме <i>Н. Н. Левашов, В. Ю. Попов, Х. В. Малова, Л. М. Зеленый</i>	116
Исследование зеленой корональной линии с высотой по внезатменным наблюдениям за 24-й цикл солнечной активности <i>С. А. Гусева, А. Д. Шрамко</i>	124
Устойчивость стабилизации космического аппарата в направлении Солнца магнитными исполнительными органами на солнечно-синхронной орбите <i>Д. С. Ролдугин</i>	134
Реализация режима солнечной ориентации космического аппарата с помощью системы двигателей-маховиков <i>А. И. Игнатов, Г. А. Иванов, Е. С. Коломиец, Е. В. Мартыненко</i>	143
Радиационный аспект двух вариантов наклона орбиты Российской орбитальной служебной станции <i>В. Г. Митрикас</i>	157
Оптимальное управление вектором тяги воздушного электрореактивного двигателя для наискорейшего изменения высоты апогея орбиты с ультранизким перигеем <i>А. С. Филатьев, О. В. Янова</i>	163

УДК 550.383

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ ВАРИАЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПЛАЗМЫ НА УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВИСТОВОГО ДИАПАЗОНА СКВОЗЬ УТРЕННЮЮ ИОНОСФЕРУ

© 2023 г. В. Г. Мизонова^{1, 2, *}, П. А. Беспалов^{2, 3}

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия

²Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия

³Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

*vermiz@mail.ru

Поступила в редакцию 01.03.2022 г.

После доработки 27.04.2022 г.

Принята к публикации 15.06.2022 г.

Рассмотрена задача о влиянии вызванных инфразвуковыми волнами возмущений плазменной концентрации на распространение и отражение электромагнитных волн свистового диапазона, падающих на утреннюю ионосферу сверху. Исследовано влияние параметров инфразвуковой волны на коэффициент отражения свистовой волны от ионосферы сверху в общем случае наклонного распространения. Наиболее сильные изменения коэффициента отражения свистовых волн связаны с возмущениями концентрации на высотах порядка 80–100 км, где декремент затухания распространяющихся мод электромагнитного излучения увеличивается более чем на порядок в пределах достаточно локальной по высоте (менее 10–15 км) области. Проанализированы особенности параметрического воздействия колебаний плазменной концентрации в инфразвуковой волне на поле свистовой волны, дошедшей до земной поверхности. При близких значениях горизонтальных волновых чисел свистовой и инфразвуковой волн поле свистовой волны вблизи земной поверхности может увеличиваться в несколько раз. Полученные результаты важны для понимания взаимосвязи магнитосферных волновых процессов различной природы. Исследование модуляции инфразвуковыми волнами коэффициента отражения свистовых волн от ионосферы сверху актуально для объяснения режимов работы плазменного магнитосферного мазера.

DOI: 10.31857/S0023420622100077, EDN: LSBSIO

ВВЕДЕНИЕ

Процессы распространения низкочастотных электромагнитных волн свистового диапазона через ионосферу к поверхности Земли зависят от множества различных факторов. В первую очередь это высотная зависимость плазменной концентрации и пространственное распределение полей в падающей на ионосферу сверху волне. Однако, как следует из многочисленных спутниковых и наземных наблюдений [1], при внешне схожих глобальных условиях характеристики волн как отраженных, так и дошедших до поверхности Земли, могут существенно различаться. Например, существует много данных об одновременной регистрации сигналов на спутниках и наземных обсерваториях [2, 3]. Но в некоторых случаях излучения регистрируются на спутниках и не обнаруживаются на Земле [4, 5]. Одна из причин различий в условиях прохождения волн крайне

низких частот (КНЧ, ниже 3 кГц) и очень низких частот (ОНЧ, ниже 30 кГц) через ионосферу может быть связана с их рассеянием на неоднородностях плазменной концентрации. В частности, рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях можно объяснить возможность попадания электромагнитных волн в узкий конус выхода [6–9].

В настоящей работе изучается влияние слабых вариаций плазменной концентрации, вызванных, например, инфразвуковыми волнами, на условия распространения магнитосферных низкочастотных электромагнитных волн через ионосферу. Источники инфразвуковых волн принято связывать с явлениями как естественного, так и антропогенного характера — например, с молниевыми разрядами, вулканической активностью, землетрясениями, прохождением атмосферных фронтов и цунами, а также с работой реактивных двигателей и др. [10]. Согласно теоретическим

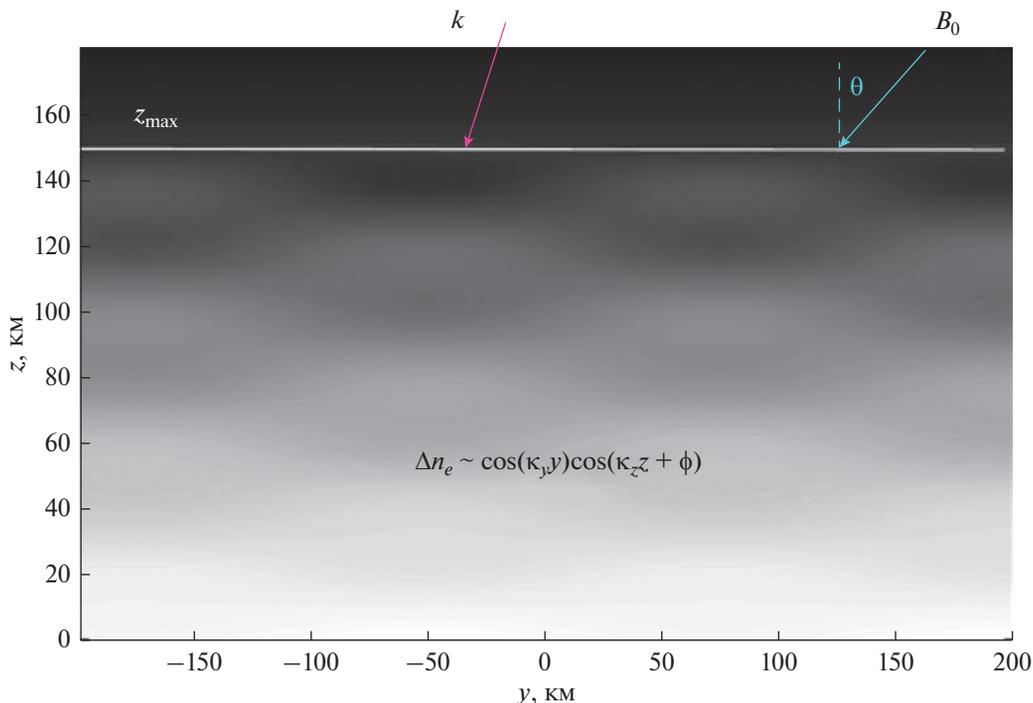


Рис. 1. Схема, поясняющая постановку задачи.

исследованиям, инфразвуковые атмосферные возмущения входят в состав акустико-гравитационных возмущений. При анализе акустико-гравитационных возмущений важную роль играет скорость звука $c_s \approx 370$ м/с, высота однородной атмосферы $H \approx 10$ км, предельная акустическая ω_A и частота Вайсяля Брандта ω_g . Инфразвуковые волны имеют частоты $\omega_s \geq \omega_A$, внутренние гравитационные волны имеют частоты $\omega_s < \omega_g$. Эти частоты (ω_A и ω_g) соответствуют периодам порядка пяти минут. Для модели изотермической атмосферы с постоянной температурой и условии $\kappa H \gg 1$ решения дисперсионного соотношения можно записать в виде [11] $\omega_{s+}^2 \approx c_s^2 (\kappa^2 + 1/4H^2)$, $\omega_{s-}^2 \approx \omega_g^2 \kappa_{\perp}^2 (\kappa^2 + 1/4H^2)$, где κ и κ_{\perp} – волновое число и горизонтальная компонента волнового вектора в инфразвуковой волне, решение ω_{s+}^2 характеризует инфразвуковые волны и решение ω_{s-}^2 – внутренние гравитационные волны.

В настоящей работе рассматривается трехмерная задача о параметрическом воздействии колебаний плазменной концентрации на коэффициент отражения свистовых волн от ионосферы сверху и поле волны, дошедшей до земной поверхности. Для вычислений поля свистовой волны используются метод коллокаций решения

граничной задачи и методы теории возмущений, учитывающие малость вариаций плазменной концентрации. Анализ зависимостей коэффициента отражения свистовых волн и поля вблизи земной поверхности от характеристик регулярных неоднородностей плазменной концентрации важен для понимания взаимосвязи волновых процессов в магнитосфере. Вызванные инфразвуковыми волнами неоднородности ионосферной концентрации объясняют возможность модуляции добротности резонатора в плазменном магнитосферном лазере [12].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть ось z направлена вертикально вверх, значение $z = 0$ соответствует поверхности Земли, магнитное поле лежит в плоскости y, z и составляет с осью z угол ϑ . Будем считать, что плазменная концентрация в ионосфере изменяется по модельному закону

$$n_e(z, \mathbf{r}_{\perp}) = n_{e0}(z) + \Delta n_e \cos(\kappa_z z + \varphi(t)) \cos(\kappa_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}), \quad (1)$$

где первое слагаемое определяет невозмущенную зависимость концентрации $n_{e0}(z)$ от высоты, а второе связано с ее слабым ($|\Delta n_e| \ll n_{e0}$) возмущением в инфразвуковой волне. Предположим, что

на ионосферу сверху падает свистовая электромагнитная волна с частотой ω и поперечной составляющей волнового вектора \mathbf{k}_\perp , и рассмотрим задачу о влиянии малых изменений плазменной концентрации на процесс распространения свистовой волны. Схема, поясняющая постановку задачи, приведена на рис. 1. Частоту ω_s инфразвуковой волны будем считать пренебрежимо малой по сравнению с частотой ω свистовой волны, и рассматривать величину $\varphi(t)$ как параметр, не изменяющийся за время рассматриваемых процессов.

Для нахождения поля свистовой волны воспользуемся стандартным подходом и представим его как сумму невозмущенной части и малой возмущенной добавки. Учитывая зависимость плазменной концентрации (1) и пренебрегая квадратичными по малому параметру $\Delta n_e/n_{e0}$ слагаемыми,

ми, напряженность электрического $\mathbf{E}(z, \mathbf{r}_\perp)$ и магнитного $\mathbf{H}(z, \mathbf{r}_\perp)$ полей будем искать в виде

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{E}_0(z) + \Delta\mathbf{E}_+(z) \exp i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp) + \\ + \Delta\mathbf{E}_-(z) \exp i(-\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)) \exp i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \omega t), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{H}_0(z) + \Delta\mathbf{H}_+(z) \exp i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp) + \\ + \Delta\mathbf{H}_-(z) \exp i(-\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)) \exp i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \omega t). \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения Максвелла для горизонтальных составляющих напряженности удобно записать, используя четырехкомпонентный вектор [13, 14]

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

и матрицу

$$\hat{\mathbf{M}}(n_e(z), \mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_\perp) = \begin{pmatrix} -(k_x + \kappa_x) \frac{g \sin \vartheta}{\varepsilon_{zz}} & -(k_x + \kappa_x) \frac{i(\eta - \varepsilon) \sin 2\vartheta}{2\varepsilon_{zz}} & -\frac{(k_x + \kappa_x) k_y i c}{\varepsilon_{zz} \omega} & \frac{i c (k_x + \kappa_x) k_x}{\omega \varepsilon_{zz}} - \frac{i \omega}{c} \\ -(k_y + \kappa_y) \frac{g \sin \vartheta}{\varepsilon_{zz}} & -(k_y + \kappa_y) \frac{i(\eta - \varepsilon) \sin 2\vartheta}{2\varepsilon_{zz}} & \frac{i \omega}{c} - \frac{i c (k_y + \kappa_y) k_y}{\omega \varepsilon_{zz}} & \frac{i c k_x (k_y + \kappa_y)}{\omega \varepsilon_{zz}} \\ \frac{i c k_x k_y}{\omega} - \frac{\omega g \eta \cos \vartheta}{c \varepsilon_{zz}} & \frac{i \omega \varepsilon \eta}{c \varepsilon_{zz}} - \frac{i c k_x^2}{\omega} & -k_y \frac{i(\eta - \varepsilon) \sin 2\vartheta}{2\varepsilon_{zz}} & k_x \frac{i(\eta - \varepsilon) \sin 2\vartheta}{2\varepsilon_{zz}} \\ \frac{i c k_y^2}{\omega} + \frac{i \omega (g^2 \sin^2 \vartheta - \varepsilon)}{c \varepsilon_{zz}} & -\frac{i c k_x k_y}{\omega} - \frac{g \eta \cos \vartheta \omega}{\varepsilon_{zz} c} & -k_y \frac{g \sin \vartheta}{\varepsilon_{zz}} & k_x \frac{g \sin \vartheta}{\varepsilon_{zz}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{zz} = \varepsilon \sin^2 \vartheta + \eta \cos^2 \vartheta$, элементы ε, g, η тензора диэлектрической проницаемости “холодной” плазмы

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i g \cos \vartheta & i g \sin \vartheta \\ i g \cos \vartheta & \varepsilon \cos^2 \vartheta + \eta \sin^2 \vartheta & (\eta - \varepsilon) \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -i g \sin \vartheta & (\eta - \varepsilon) \sin \vartheta \cos \vartheta & \varepsilon \sin^2 \vartheta + \eta \cos^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (5)$$

зависят от электронной концентрации $n_e(z)$. В выражениях (2) использована система единиц СИ для напряженности электрического поля \mathbf{E} и нормированная величина напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = Z_0 \mathbf{H}_{SI}$ [13]; $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – волновое сопротивление вакуума; c – скорость света в вакууме.

Уравнения для невозмущенной части поля электромагнитной волны имеют вид

$$d\mathbf{F}_0(z)/dz = \hat{\mathbf{M}}(n_{e0}(z), \mathbf{k}_\perp, 0) \mathbf{F}_0(z). \quad (6)$$

Дополним это уравнение четырьмя граничными условиями. Два из них:

$$E_{0x}(z=0) = 0, \quad E_{0y}(z=0) = 0 \quad (7)$$

определим на нижней границе $z=0$, считая поверхность Земли идеально проводящей. Два других:

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{P}}^{-1}(z=z_{\max}) \mathbf{F}_0(z=z_{\max}))_1 = 1, \\ (\hat{\mathbf{P}}^{-1}(z=z_{\max}) \mathbf{F}_0(z=z_{\max}))_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

зададим на верхней границе, используя разложение поля при $z=z_{\max}$ по волновым модам:

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^4 A_j(z) \mathbf{P}_j = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{A}(z), \quad (9)$$

где коэффициенты A_j определяют амплитуду j -й волновой моды (индексы $j=1, 2$ соответствуют падающей и отраженной волновым модам,

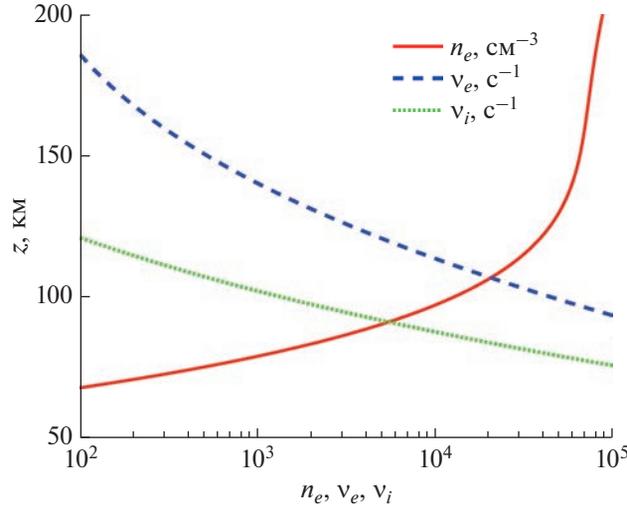


Рис. 2. Плазменная концентрация n_e и частоты столкновений ν_e, ν_i электронов и ионов с нейтральными частицами.

индексы $j = 3, 4$ соответствуют экспоненциально нарастающим вверх и вниз решениям) и матрица поляризаций $\hat{\mathbf{P}}$ образована четырехкомпонентными векторами поляризаций \mathbf{P}_j . Первое из условий (8) определяет амплитуду падающей сверху на границу $z = z_{\max}$ волны, второе исключает экспоненциально нарастающее вверх $z > z_{\max}$ решение; $\hat{\mathbf{P}}^{-1}$ – обратная матрица поляризаций.

Возмущенная часть волнового поля $\Delta \mathbf{E}_{\pm x, y}(z)$, $\Delta \mathbf{H}_{\pm x, y}(z)$ может быть найдена из уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \mathbf{F}_{\pm}(z)}{dz} &= \hat{\mathbf{M}}(n_{e0}, \mathbf{k}_{\perp} \pm \boldsymbol{\kappa}_{\perp}, 0) \Delta \mathbf{F}_{\pm}(z) + \\ &+ \frac{\partial \hat{\mathbf{M}}(n_{e0}, \mathbf{k}_{\perp}, \pm \boldsymbol{\kappa}_{\perp})}{\partial n_{e0}} \Delta n_e \cos(\boldsymbol{\kappa}_z z + \varphi) \mathbf{F}_0(z) \end{aligned} \quad (10)$$

и граничных условий

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}_{\pm x}(z=0) &= 0, \quad \Delta \mathbf{E}_{\pm y}(z=0) = 0, \\ (\hat{\mathbf{P}}^{-1}(z=z_{\max}) \Delta \mathbf{F}_{\pm}(z=z_{\max}))_1 &= 0, \\ (\hat{\mathbf{P}}^{-1}(z=z_{\max}) \Delta \mathbf{F}_{\pm}(z=z_{\max}))_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Два первых условия соответствуют идеально проводящей земной поверхности, два других исключают падающую сверху волну.

Решая последовательно систему уравнений (6) с граничными условиями (7), (8) и систему уравнений (10) с граничными условиями (11), можно найти горизонтальное волновое поле $E_{x, y}, H_{x, y}$ в области $0 \leq z \leq z_{\max}$. Вертикальные компоненты

напряженности E_z, H_z могут быть выражены через поперечные компоненты как

$$\begin{aligned} E_z &= -((\eta - \varepsilon) \sin \vartheta \cos \vartheta / \varepsilon_{zz}) E_y + \\ &+ (i g \sin \vartheta / \varepsilon_{zz}) E_x + c(k_x H_y - k_y H_x) / (\omega \varepsilon_{zz}), \quad (12) \\ H_z &= c(k_y E_x - k_x E_y) / \omega. \end{aligned}$$

В частности, горизонтальное магнитное поле $H_{\perp}(z=0)$ на поверхности Земли и коэффициент отражения по энергии сверху равны соответственно

$$H_{\perp}(z=0) = \sqrt{H_x^2(z=0) + H_y^2(z=0)} / E_i, \quad (13)$$

$$R_{\Sigma} = \frac{S_{z(r)}}{S_{z(i)}}, \quad (14)$$

где $S_{i, r} = (2Z_0)^{-1} \operatorname{Re} [E_{\perp i, r}^* H_{\perp i, r}]$ – вертикальные составляющие вектора Пойнтинга падающего (i) на границу z излучения и отраженного (r) от этой границы. Поскольку на спутниковых высотах обычно измеряется электрическое поле, а в наземных обсерваториях – магнитное, величина горизонтального магнитного поля (13) нормируется на величину электрического поля E_i в падающей волне.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ. ОБСУЖДЕНИЕ

Для расчетов использованы профили плазменной концентрации и частоты столкновений заряженных частиц с нейтральными, изображенные на рис. 2. Данные для плазменной концентрации получены с помощью модели IRI [15] и соответ-

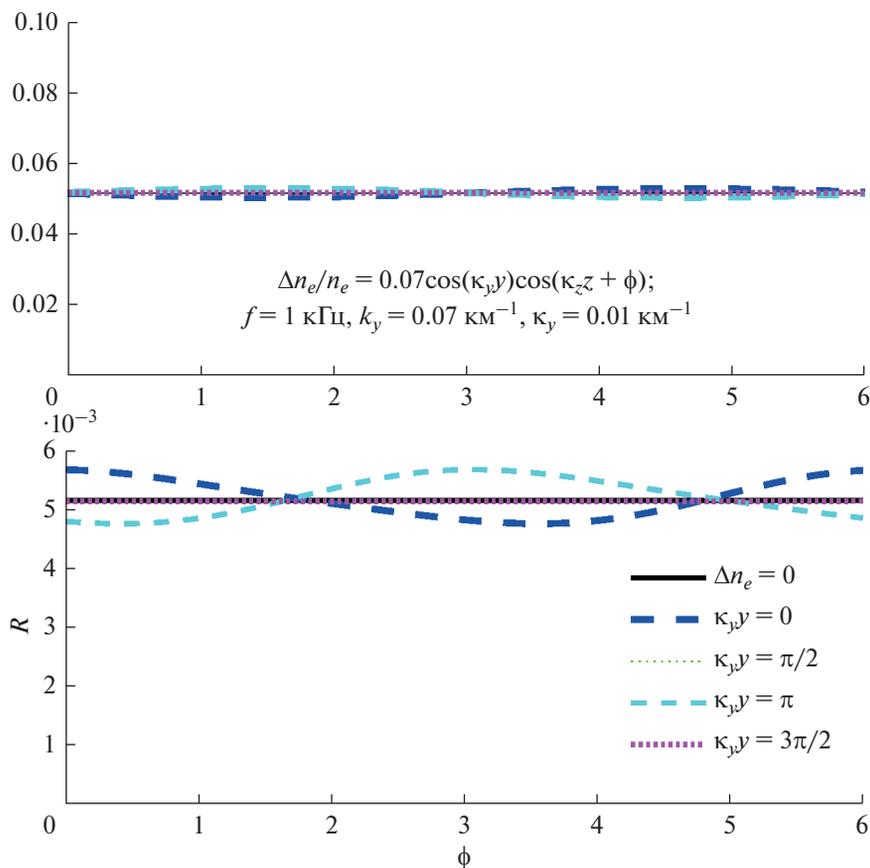


Рис. 3. Амплитуда нормированного волнового магнитного поля на земной поверхности и коэффициент отражения по энергии сверху при разных значениях горизонтальной координаты y : горизонтальные компоненты волнового вектора свистовой и инфразвуковой (k_y) волн существенно различны.

ствуют 50° с.ш. и 40° в.д. 1.IV.2020, 06:00 по местному времени (https://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/models/iri2016_vitmo.php). Угол между направленной вверх вертикальной осью z и магнитным полем при этом равен $\vartheta = 157^\circ$. Зависимости частоты столкновений заряженных частиц с нейтральными соответствуют данным, приведенным в книге [16]. Зависимость возмущений плазменной концентрации (1) соответствует инфразвуковой ветви акустико-гравитационных волн, фазовая скорость которых порядка скорости звука и пренебрежимо мала по сравнению с фазовой скоростью электромагнитных волн свистового диапазона. При учете реалистического высотного профиля температуры атмосферное волновое возмущение может быть проанализировано численно, см., например, [17]. Для атмосферных возмущений с горизонтальными масштабами порядка 100 км и с периодом порядка 150 с возможно формирование стоячей структуры до высот ионосферной области E. При анализе распространения электромагнитных волн свистового диапазона в ионосфере такие возмуще-

ния можно считать квазистационарными, а горизонтальные компоненты волновых векторов инфразвуковых и электромагнитных возмущений могут быть близки.

Численное решение уравнений (6) и (10) получено с помощью решателя обыкновенных дифференциальных уравнений bvp4c Matlab. Решатель является конечно-разностным кодом, реализующим формулы коллокации для граничной задачи [18]. Метод основан на решении начальной задачи с параллельным решением алгебраического уравнения для уточнения “пристрелки”. Использование такого подхода в работах [14, 19] дало возможность получить численно устойчивые решения волновых уравнений для ионосферы на высотах в пределах 250 км. В рассматриваемом случае граница падения излучения составила $z_{\max} = 150$ км. Во-первых, при таком выборе верхней границы удается получить численно стабильное решение системы волновых уравнений. Во-вторых, значения коэффициентов отражения и прохождения к Земле определяются в основном процессами в нижней части ионосферы [20].

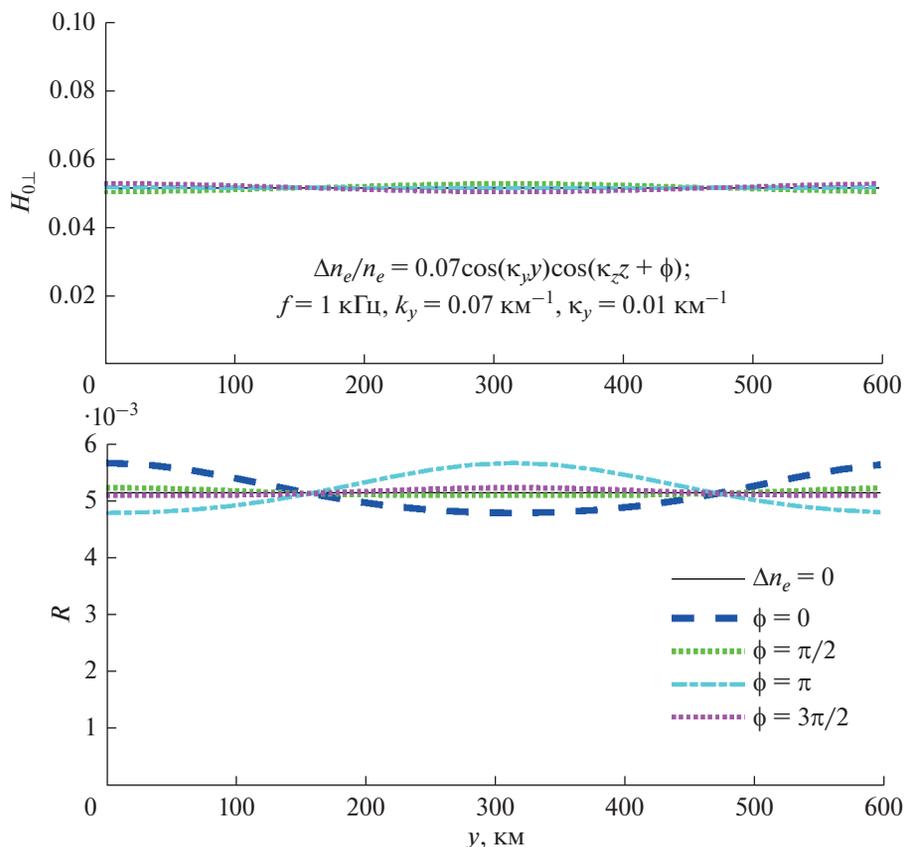


Рис. 4. Амплитуда нормированного волнового магнитного поля на земной поверхности и коэффициент отражения при разных значениях фазы инфразвуковой волны ϕ : компоненты волнового вектора k_y и k_z существенно различны.

Параметрическое воздействие возмущений плазменной концентрации на условия распространения электромагнитных волн свистового диапазона

На рис. 3–6 приведены примеры результатов вычислений горизонтального магнитного поля (13) на земной поверхности и коэффициента отражения по энергии сверху (14) для модельной зависимости плазменной концентрации (1). При расчетах для свистовой волны использованы следующие параметры: частота $f = 1$ кГц, горизонтальный волновой вектор в падающей волне $k_x = 0$, $k_y = 0.07 \text{ км}^{-1}$. При таких параметрах горизонтальное волновое число больше единицы и $n_{\perp} = k_{\perp} c / \omega = 3.3$, волна не попадает в “конус выхода”, ее вертикальный масштаб затухания в вакууме равен $2\pi / \sqrt{k_{\perp}^2 - (\omega/c)^2} \approx 94$ км. Используемые параметры для инфразвуковой волны: максимальная модуляция концентрации $\Delta n_e/n_{e0} = 0.07$, проекции волнового вектора $k_z = 0.3 \text{ км}^{-1}$ (“вертикальная” длина волны 21 км), $k_x = 0$, $k_y = 0.01 \text{ км}^{-1}$ (“горизонтальная” длина волны 630 км) на рис. 3, 4 и

$k_x = 0$, $k_y = 0.07 \text{ км}^{-1}$ горизонтальная длина волны 104 км) на рис. 5, 6. Сплошной линией отмечены магнитное поле и коэффициент отражения в случае невозмущенной плазменной концентрации. Различными пунктирными линиями изображены зависимости магнитного поля (13) и коэффициента отражения (14) от фазы волны при разных значениях горизонтальных координат (рис. 3 и 5) и от горизонтальной координаты при разных значениях фазы волны (рис. 4 и 6).

В случае практически вертикально распространяющихся возмущений концентрации в инфразвуковой волне ($k_y = 0.01 \text{ км}^{-1}$, горизонтальная длина волны более 600 км) глубина модуляции коэффициента отражения изменяется от 0 до приблизительно 10% (при глубине модуляции электронной концентрации 7%) в зависимости от фазы инфразвуковой волны ϕ либо горизонтальной координаты y . Волновое магнитное поле на земной поверхности при этом почти не изменяется, оставаясь достаточно слабым (горизонтальные показатели преломления волн с $k_y \pm k_z$ по-прежнему больше единицы: $n_{\perp} = 2.9$ и $n_{\perp} = 3.8$).

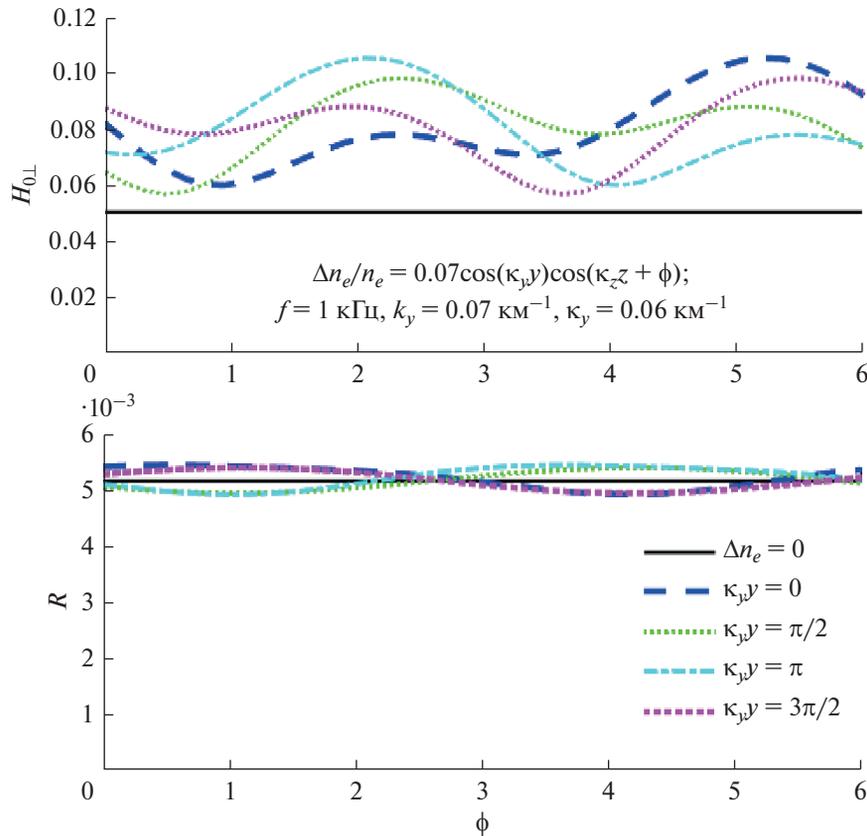


Рис. 5. Амплитуда нормированного волнового магнитного поля на земной поверхности и коэффициент отражения при разных значениях координаты y : близкие значения горизонтальных компонент волнового вектора свистовой (k_y) и инфразвуковой (κ_y) волны.

В случае близких между собой значений горизонтальных компонент волнового вектора электромагнитной ($k_y = 0.07$ км) и инфразвуковой ($\kappa_y = 0.06$ км) волны вариации коэффициента отражения имеют такой же порядок. Однако магнитное поле на земной поверхности может заметно увеличиваться. В рассматриваемом случае горизонтальные показатели преломления волн, возникающих в результате параметрического воздействия инфразвука, равны $n_{\perp} = ((k_{\perp} \pm \kappa_{\perp})c)/\omega = 6.2$ и 0.48 (см. решение (2)). При этом волна с $k_y - \kappa_y$ попадает в “конус выхода”, и ее магнитное поле (13) при глубине модуляции плазменной концентрации 7% увеличивается в два с лишним раза.

Таким образом, горизонтальная структура неоднородностей электронной концентрации в большей степени определяет поле дошедшей до земной поверхности электромагнитной волны и в меньшей степени коэффициент ее отражения сверху.

В реальных условиях атмосферные инфразвуковые возмущения представляют собой целый спектр волн. Это позволяет сделать заключение,

что электромагнитная волна свистового диапазона может “найти” для себя на ионосферных высотах возмущение электронной концентрации с подходящим горизонтальным масштабом. Указанное обстоятельство объясняет причину, по которой хорошее прохождение магнитосферных излучений свистового диапазона до земной поверхности наблюдается не стабильно.

Локальные одномерные вариации электронной концентрации

Выясним, с какими высотами связано наиболее заметное влияние вариаций концентрации на отражение и прохождение волн. Для этого рассмотрим одномерные локальные по высоте изменения плазменной концентрации, имеющие, например, гауссов вид

$$n_e(\mathbf{r}) = n_{e0}(z) \pm \Delta n_e \exp\left(-\frac{(z-h)^2}{2\Delta^2}\right) \quad (15)$$

и схематично представленные на рис. 7. Коэффициент отражения (14) и горизонтальное магнитное поле (13), соответствующие зависимости (15)

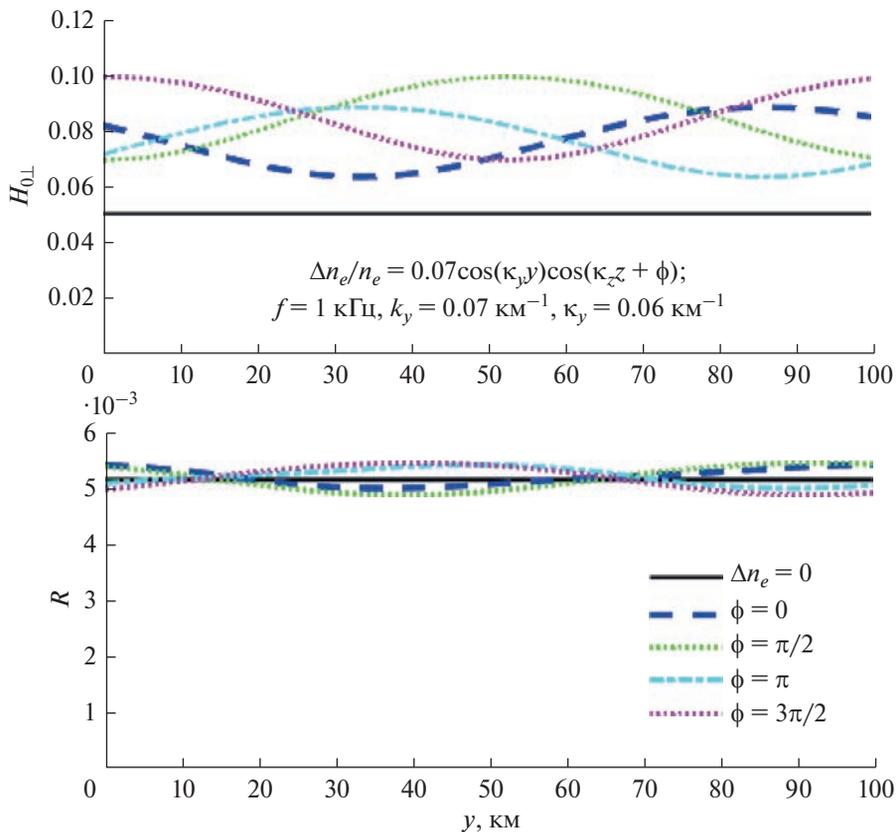


Рис. 6. Амплитуда нормированного волнового магнитного поля на земной поверхности и коэффициент отражения при разных значениях фазы ϕ инфразвуковой волны: близкие значения компонент волнового вектора k_y и k_z .

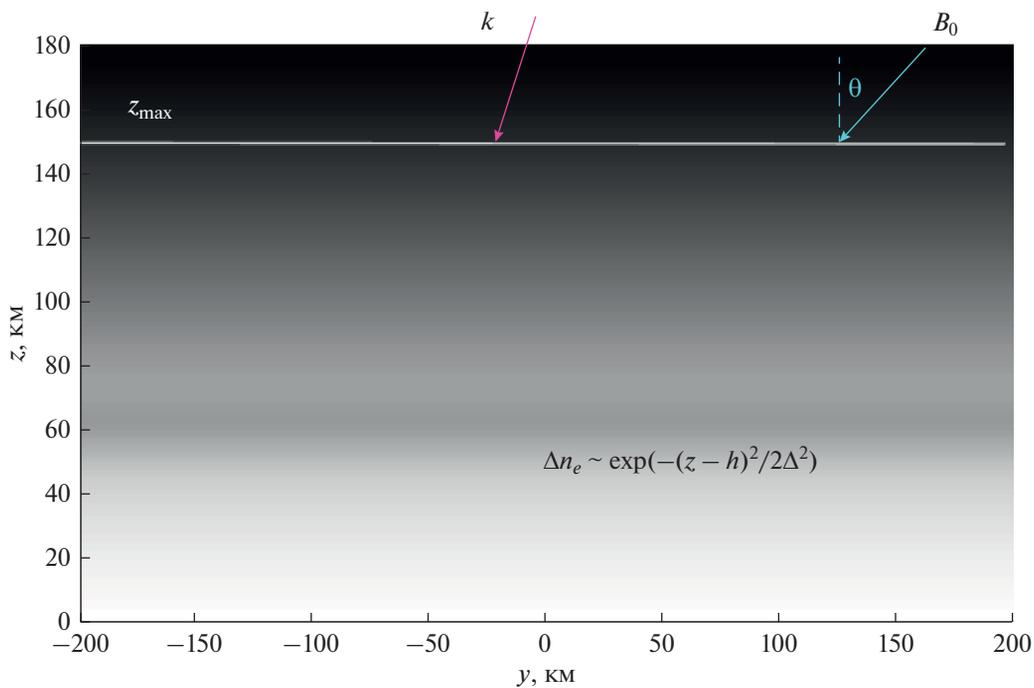


Рис. 7. Модельные одномерные изменения плазменной концентрации.

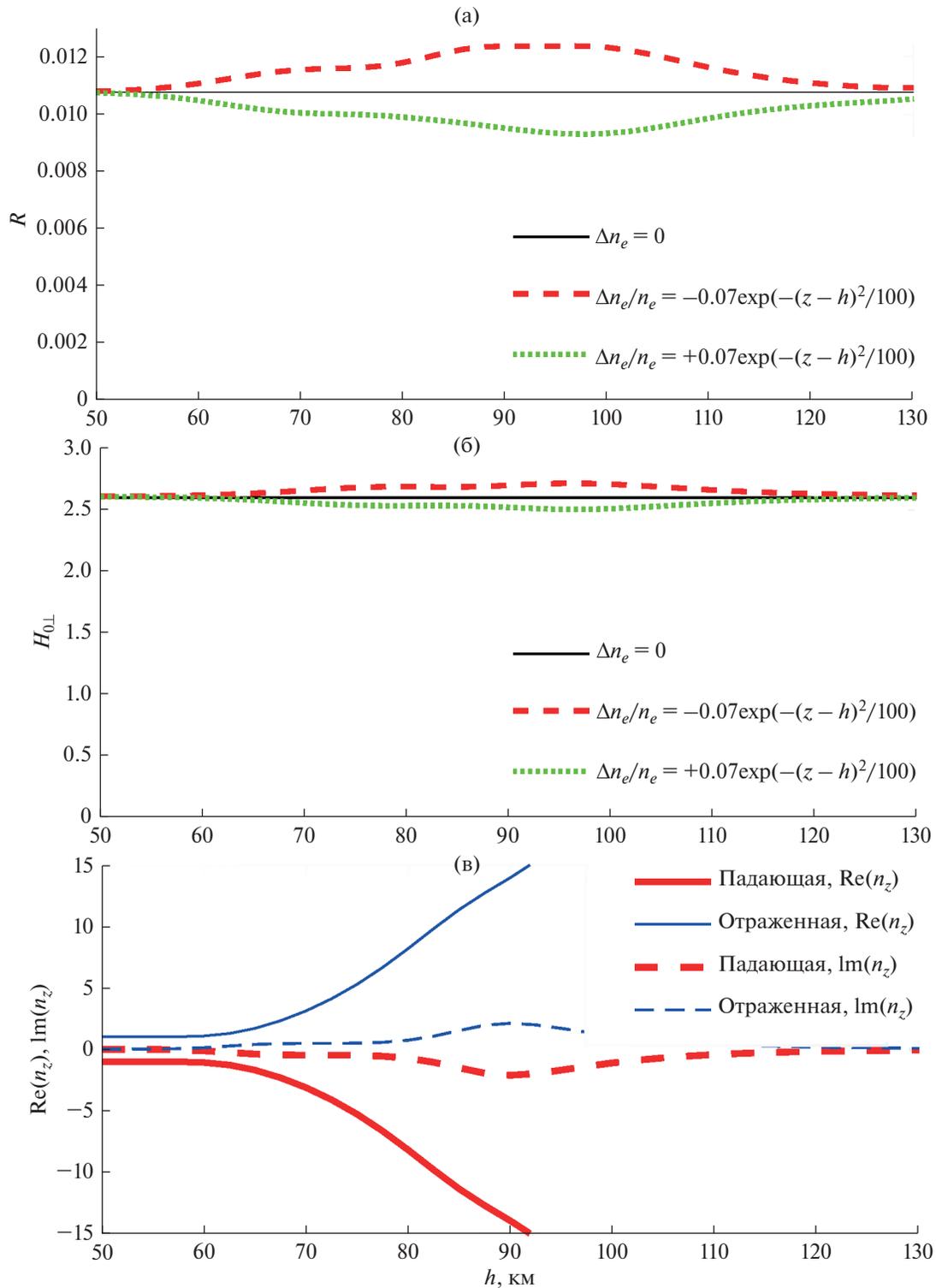


Рис. 8. Коэффициент отражения (а), амплитуда нормированного волнового магнитного поля на земной поверхности (б), показатель преломления и декремент затухания распространяющихся волновых мод (в) для параметров в падающей волне $f = 1$ кГц и $k_{\perp}c/\omega = 0$.

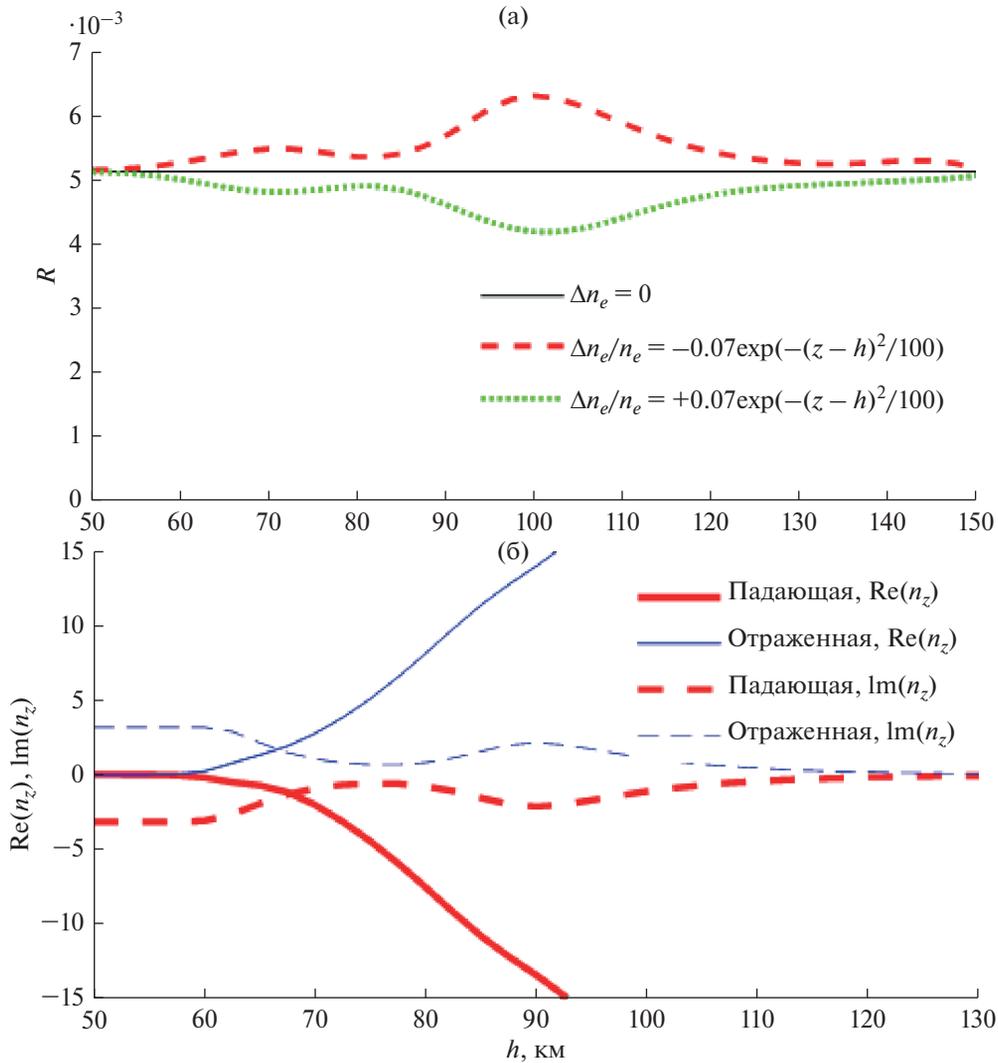


Рис. 9. Коэффициент отражения (а), показатель преломления и декремент затухания распространяющихся волновых мод (б) для параметров в падающей волне $f = 3$ кГц и $k_{\perp}c/\omega = 3.3$.

при $\Delta n_e/n_{e0} = 0.07$ и $\Delta = 7$ км, изображены на рис. 8а, б, 9а. Сплошная черная линия соответствует невозмущенной электронной концентрации, пунктирная линия – отрицательному возмущению концентрации (знак “–” в выражении (15)) и короткий пунктир – положительному возмущению концентрации (знак “+” в выражении (15)). Для сравнения на рис. 8в, 9б приведены решения локального дисперсионного уравнения для распространяющихся волновых мод, показатель преломления $n_z = \text{Re}(k_z)c/\omega$ (сплошными линиями) и нормированный декремент затухания $\text{Im}(k_z)c/\omega$ (пунктирными линиями). В качестве примеров рассматривались нормально падающая ($k_{\perp}c/\omega = 0$) свистовая волна с частотой 1 кГц (см. рис. 8) и наклонно падающая ($k_{\perp}c/\omega = 3.3$) свисто-

вая волна с частотой 3 кГц (см. рис. 9). Как видно из рис. 8, 9, величина относительного изменения коэффициента отражения R может варьироваться от нуля до 15%, горизонтального магнитного поля – от 0 до 4.5%. Наиболее сильные изменения коэффициента отражения и магнитного поля обусловлены изменениями плазменной концентрации на высотах 80–100 км, где декремент затухания распространяющихся мод излучения увеличивается более чем на порядок в пределах достаточно локальной по высоте области. Изменения электронной концентрации на высотах ниже 60 и выше 110 км практически не оказывают влияние на коэффициент отражения и величину магнитного поля на земной поверхности. К вертикальной структуре неоднородностей концентрации (характерной

высоты локализации неоднородности) более чувствителен коэффициент отражения сверху.

Таким образом, вертикальная структура неоднородностей электронной концентрации в большей степени влияет на коэффициент отражения сверху и в меньшей — на поле дошедшей до земной поверхности волны.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача о влиянии возмущений плазменной концентрации, вызванной инфразвуковыми волнами, на отражение и распространение электромагнитных волн свистового диапазона, падающих на утреннюю ионосферу сверху. В общем случае их наклонного распространения исследована взаимосвязь коэффициента отражения свистовой волны от ионосферы сверху, поля электромагнитной волны на земной поверхности и параметров инфразвуковой волны.

- Влияние возмущения плазменной концентрации на отражение и прохождение низкочастотных электромагнитных волн через ионосферу существенным образом зависит от высоты локализации этого возмущения.

- Наиболее сильные изменения коэффициента отражения обусловлены изменениями плазменной концентрации на высотах 80–100 км, где декремент затухания распространяющихся мод излучения увеличивается более чем на порядок в пределах достаточно локальной по высоте области. Относительное изменение коэффициента отражения свистовой волны при этом может достигать 10–15% и более при глубине модуляции плазменной концентрации 7%.

- Максимальное относительное изменение горизонтального волнового магнитного поля на земной поверхности при этом не превышает 4–5%.

- Изменения электронной концентрации на высотах ниже 60 и выше 110 км (вне зоны сильного затухания волн) практически не оказывают влияние на коэффициент отражения и величину волнового магнитного поля на земной поверхности.

- Параметрическое воздействие колебаний плазменной концентрации, вызванного инфразвуковой волной, на прохождение низкочастотных электромагнитных волн через ионосферу к поверхности Земли может быть существенно, если горизонтальные компоненты волнового вектора свистовой k_y и инфразвуковой k_y волны близки по величине. Выполнение такого условия создает условия для попадания электромагнитных волн в конус выхода. При этом волновое магнитное поле на земной поверхности может увеличиваться в разы даже при слабых модуляциях

электронной концентрации в инфразвуковой волне.

Исследование В.Г. Мизоновой (разд. “Введение”, “Результаты...”) выполнено по плану Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-02-00206А). Исследование П.А. Беспалова (разд. “Постановка задачи...”, “Выводы”) выполнено по плану Российского научного фонда (проект № 22-22-00397).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Srivastava R.N.* VLF hiss, visual aurora and geomagnetic activity // *Planet. Space Sci.* 1976. V. 24. P. 375–379. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(76\)90050-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(76)90050-7)
2. *Manninen J., Kleimenova N.G., Kozyreva O.V. et al.* Experimental evidence of the simultaneous occurrence of VLF chorus on the ground in the global azimuthal scale – from pre-midnight to the late morning // *Ann. Geophys.* 2012. V. 30. P. 725–732. <https://doi.org/10.5194/angeo-30-725-2012>
3. *Nemec F., Santolik O., Parrot M. et al.* Conjugate observations of quasi-periodic emissions by Cluster and DEMETER spacecraft // *J. Geophysical Res. Space Physics.* 2013. V. 118. P. 198–208. <https://doi.org/10.1029/2012JA018380>
4. *Manninen J., Kleimenova N.G., Kozyreva O.V. et al.* Non-typical ground-based quasi-periodic VLF emissions observed at L 5.3 under quiet geomagnetic conditions at night // *J. Atmos. Solar Terr. Phys.* 2013. V. 99. P. 123–128. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2012.05.007>
5. *Titova E.E., Kozelov B.V., Demekhov A.G. et al.* Identification of the source of quasiperiodic VLF emissions using ground-based and Van Allen Probes satellite observations // *Geophys. Res. Lett.* 2015. V. 42. P. 6137–6145. <https://doi.org/10.1002/2015GL064911>
6. *Sonwalkar V.S., Harikumar J.* An explanation of ground observations of auroral hiss: Role of density depletions and meter-scale irregularities // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105. P. 18867–18883. <https://doi.org/10.1029/1999JA000302>
7. *Bell T.F., Ngo H.D.* Electrostatic lower hybrid waves excited by electromagnetic whistler mode waves scattering from planar magnetic-field-aligned plasma density irregularities // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. P. 149–172. <https://doi.org/10.1029/JA095iA01p00149>
8. *Shklyar D., Chum J., Jiricek F.* Characteristic properties of Nu whistlers as inferred from observations and numerical modelling // *Ann. Geophys.* 2004. V. 22(10). P. 3589–3606. <https://doi.org/10.5194/angeo-22-3589-2004>
9. *Kuzichev I.V.* On whistler mode wave scattering from density irregularities in the upper ionosphere // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117. Art. № A0632. <https://doi.org/10.1029/2011JA017130>

10. *Blanc E.* Observations in the upper atmosphere of infrasonic waves from natural or artificial sources—A summary // *Ann. Geophys.* 1985. V. 3. P. 673–687.
11. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.
12. *Беспалов П.А., Трахтенгерц В.Ю.* Альфвеновские мазеры. Горький: ИПФ АН СССР, 1986.
13. *Budden K.G.* The Propagation of Radio Waves: The Theory of Radio Waves of Low Power in the Ionosphere and Magnetosphere. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
14. *Беспалов П.А., Мизонова В.Г.* Особенности распространения падающих на ночную ионосферу сверху электромагнитных волн свистового диапазона // *Космич. исслед.* 2018. Т. 56. № 1. С. 33–39. <https://doi.org/10.7868/S0023420618010041>. (*Cosmic Research.* 2018. V. 56. P. 26–31.) <https://doi.org/10.7868/S0023420618010041>
15. *Bilitza D., Reinisch B.* International Reference Ionosphere 2007: Improvements and new parameters // *J. Adv. Space Res.* 2007. V. 42. P. 599–609. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2007.07.048>
16. *Гуревич А.В., Шварцбург А.Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука. 1973.
17. *Савина О.Н., Беспалов П.А.* Особенности фильтрации длинных акустико-гравитационных волн в безветренной атмосфере // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2014. Т. 57. № 2. С. 129–136. <https://doi.org/10.1007/s11141-014-9497-6>
18. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
19. *Bespalov P.A., Mizonova V.G.* Propagation of a whistler wave incident from above on the lower nighttime ionosphere // *Ann. Geophys.* 2017. V. 35. P. 671–675. <https://doi.org/10.5194/angeo-35-671-2017>
20. *Bespalov P.A., Mizonova V.G., Savina O.N.* Reflection from and transmission through the ionosphere of VLF electromagnetic waves incident from the mid-latitude magnetosphere // *J. Atmos. Solar Terr. Phys.* 2018. V. 175. P. 40–48. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2018.04.018>

УДК 520.853.088.6519.254

ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО СПЕКТРА ВОЛН НА ОСНОВЕ ЦИРКУЛЯРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК

© 2023 г. И. В. Белоконов^{1, *}, В. М. Журавлев^{1, 2}, В. М. Морозов¹

¹Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

²Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

*ibelokonov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.04.2022 г.

После доработки 18.08.2022 г.

Принята к публикации 02.11.2022 г.

В работе развит метод оценивания спектров волновых процессов на основе специального вида измерительных решеток, представляющих собой набор вращающихся и статических датчиков, названных в работе циркулярными. Излагается способ корректировки спектров, оцененных на основе дискретных цифровых рядов, полученных от датчиков циркулярных решеток. Оценки спектров строятся на основе многомерного метода максимальной энтропии. Приведены данные тестовых расчетов для нескольких типов циркулярных решеток применительно к волновым процессам в форме гармоник, искаженных белым шумом. Показана эффективность предложенного способа коррекции спектров. Излагаются общие принципы использования циркулярных решеток для оценивания спектров волновых процессов с помощью датчиков, расположенных на вращающихся спутниках. Обсуждается возможность использования данного подхода для оценивания спектров волновых процессов с помощью датчиков, установленных на микро- и наноспутниках.

DOI: 10.31857/S0023420622100144, EDN: LSGQSF

ВВЕДЕНИЕ

Проблема исследования волновых процессов, наблюдающихся в околоземном космическом пространстве, – крайне актуальная задача, имеющая фундаментальное значение и обширное прикладное применение. Не смотря на полученные к настоящему времени результаты [1–3], не достигнуто понимания, например, высокочастотных волновых процессов, происходящих в ионосфере Земли. Стандартный подход к изучению волн в околоземном космическом пространстве с помощью космических аппаратов и наземных станций связан с исследованием спектров колебаний наблюдаемого параметра космической среды, чаще всего электронной концентрации в плазме. Однако для изучения волновых процессов, как правило, не достаточно знания только частотных спектров наблюдаемых колебаний. Для анализа именно волновых процессов необходимо иметь возможность получать данные о пространственно-временных спектрах процессов, которые содержат сведения о преимущественном направлении распространения волн и распределении энергии по волновым числам. Наиболее эффективным методом оценивания пространственно-временных спектров волновых процессов является метод пространственных измерительных решеток [4–12].

С точки зрения применения этого метода в задачах изучения волновых процессов в космической среде наиболее подходящими его реализациями могут служить измерительные решетки из набора датчиков, размещенных на космических аппаратах, как орбитальных, так и межпланетных. Под измерительной решеткой в этом случае понимается набор датчиков, расположенных на некотором удалении друг от друга, измеряющих один и тот же параметр среды синхронно.

Ключевым свойством рассматриваемых далее измерительных решеток представляется их размещение в пространстве и, возможно, изменение геометрического расположения их элементов друг относительно друга. Такие решетки далее будут называться динамическими. Статические измерительные решетки, отдельные датчики которых не меняют своего положения друг относительно друга и относительно выбранной лабораторной системы отсчета, широко используются для оценивания параметров волновых процессов в различных прикладных задачах. Например, такие измерительные решетки используются для оценивания параметров метеорологических волновых процессов [10, 11]. Другой областью приложения таких измерительных решеток могут служить задачи, связанные с измерениями волн по сериям изображе-

ний каких-либо астрономических объектов. Например, в работе [12] такой способ использовался для оценивания параметров распространения волн в атмосфере Солнца и построения их дисперсионных соотношений.

Именно динамические измерительные решетки представляют особый интерес в задачах, связанных с исследованием волновых процессов в космической среде, в том числе и в околоземном космическом пространстве. Примером могут служить группировки спутников, например *GOES* (англ. Geostationary Operational Environmental Satellite) или *NOAA* (англ. National Oceanic and Atmospheric Administration), которые проводят измерения целого набора параметров магнитосферы Земли, включая потоки заряженных частиц, например электронов и протонов, а также параметров магнитного поля Земли. Другим примером могут служить спутниковые кластеры, например, *MMS* (англ. Magnetospheric Multiscale Mission), *Cluster II*, *Swarm*, или кластеры наноспутников. Но при обработке данных, поступающих от таких группировок или кластеров, практически никогда не используют процедуры спектральных методов оценивания параметров волн, опираясь в основном на градиентные измерения параметров космической среды. Основной причиной этого стало нарушение условий стационарности в широком смысле регистрируемых сигналов от датчиков, что обусловлено различиями в движении отдельных элементов решетки друг относительно друга.

В работах [13, 14] была разработана общая процедура оценивания пространственно-временных спектров на основе динамических измерительных решеток в предположении стационарности в широком смысле волнового поля в среде по отношению к лабораторной системе отсчета. Однако такие процедуры требуют больших объемов вычислений и специфических наборов рядов наблюдений, что ограничивает их применение на практике. Тем не менее, в некоторых ситуациях, когда движение датчиков происходит по простым законам, например, в форме вращения решетки относительно некоторой общей оси, можно построить процедуру оценивания параметров волновых процессов, опираясь на стандартную процедуру спектрального анализа для статических измерительных решеток, дополняя ее простой корректировкой спектральной плотности.

В данной работе предложен подход и метод оценивания параметров волновых процессов с помощью перемещающихся в пространстве датчиков, но периодически занимающих в пространстве набор стандартных положений, в которых и проводится измерение параметра среды. В этом случае совместная обработка цифровых рядов, получаемых во время синхронных измере-

ний, позволяет определить направление распространения волн, их длину и частоту. Основа процедуры – оценивание спектральной матрицы цифровых рядов, представляющих последовательность измерений отдельных датчиков решетки. Оценка спектральной матрицы на данной частоте позволяет при высокой когерентности сигналов оценить сдвиг фаз между колебаниями изучаемого параметра для любой пары датчиков и на основе этого построить оценку волнового вектора сигнала на данной частоте.

1. ЦИКЛИЧЕСКИЙ ОТБОР ДАННЫХ

Предположим, что в качестве источника данных о стационарном в широком смысле волновом процессе в пространстве используются измерения, полученные от набора датчиков, движущихся по окружностям вокруг общей оси вращения. Примером могут служить спутники, находящиеся на одной и той же неизменяющейся со временем круговой орбите вокруг некоторого небесного тела. Обозначим через T – период обращения датчиков вокруг оси вращения. Предположим, что каждый из датчиков проводит измерения одного и того же параметра космической среды X синхронно со всеми остальными космическими аппаратами с фиксированной дискретностью Δt . В результате в качестве набора данных мы будем получать совокупность цифровых рядов $X_a(i)$, где a – номер датчика, $a = 1, \dots, M$; i – дискретный отсчет времени, соответствующий моменту $t_i = t_0 + i\Delta t$, $0, \dots, N$ измерения параметра среды, отсчитываемому от некоторого начального момента времени t_0 . Число N обозначает длину ряда измерения данных.

В силу того, что спутники движутся по окружностям, их расположение относительно некоторой лабораторной системы отсчета постоянно меняется. Следовательно, такой набор датчиков невозможно использовать в качестве статической измерительной решетки, если не применять специальный отбор данных. Простейший способ подходящего для этого отбора данных связан с ситуацией, когда датчики расположены симметрично на одной и той же окружности. Предположим, что спутники располагаются на окружности так, что в некоторый момент времени t_0 они занимают положения на окружности, соответствующие углам:

$$\varphi_a = \frac{2\pi}{M} a, \quad a = 1, 2, \dots, M.$$

Такой вариант расположения датчиков представлен на рис. 1. Очевидно, что спустя время $\Delta T_M = T/M$, где T – период обращения спутников по орбите, датчики будут занимать то же самое положение, что и в момент времени t_0 с един-

ственным отличием, что датчик с номером a будет в момент времени $t_M = t_0 + \Delta T_M$ находиться в положении, который занимал датчик $a + 1$ в момент t_0 и т.д. Поэтому измерение, полученное датчиком a в момент времени t_M можно использовать как измерение датчика $a + 1$ в момент времени t_0 . Другими словами, фиксированное положение измерительной решетки для всех моментов времени $t_i = t_0 + KI\Delta t$ будет оставаться статичным. Здесь K – число шагов дискретности измерений, необходимых для перемещения спутников к новому положению в статической решетке: $T_M = K\Delta t$.

Отбор данных, соответствующий такой процедуре превращения решетки в статическую (при круговом движении датчиков по часовой стрелке и нумерацией их против часовой стрелки), должен определяться следующими соотношениями:

$$Y_a(i) = X_{a+(i \bmod M)}(iK),$$

$$a = 1, \dots, M, i = 0, \dots, [N/K]. \quad (1)$$

Здесь $i \bmod M$ – остаток от деления i на M ; $[N/K]$ – целая часть деления числа N на K . Можно видеть, что дискретность по времени рядов $Y_a(i)$ теперь будет равна не Δt , а $K\Delta t$. В силу этого для исключения элайзинга (просачивания высокочастотных составляющих из новой подсеточной области в область оцениваемых частот) следует проводить сглаживание рядов с окном порядка K . Такую процедуру желательно проводить до проведения процедуры отбора данных.

В результате процедуры отбора получаем набор рядов, который представляет собой последовательность измерений строго в фиксированных узлах статической решетки, но имеющих временные задержки между измерениями в отдельных узлах. В результате мы можем для построения оценок спектральной плотности стационарного в широком смысле процесса относительно инерциальной системы отсчета использовать обычную теорию спектрального анализа, дополняя ее процедурой фазовой коррекции спектральной матрицы. Измерительные решетки, построенные по такому принципу, будем называть **циркулярными**.

2. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ РЕШЕТОК

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда датчики располагаются на окружности несимметрично или неравномерно. В этом случае датчики занимают одно и то же положение только спустя строго фиксированный интервал времени полного периода обращения T . Формально такая возможность повторяет рассмотренный в предыдущем разделе случай с той разницей, что дискретность вновь сформированных рядов будет

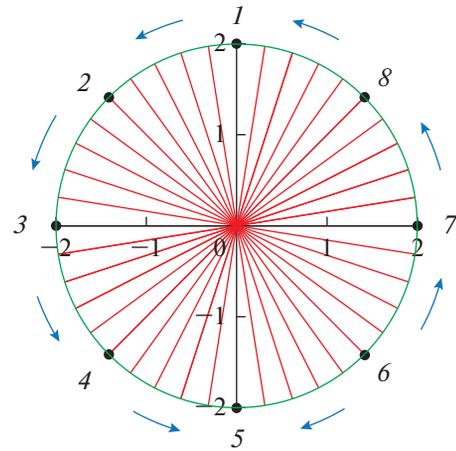


Рис. 1. Пример измерительной решетки с восемью позициями, равномерно расположенными по окружности.

равна периоду обращения T . Измерительные решетки такого типа будем называть **неравномерными циркулярными** решетками.

Решетки, построенные по принципу неравномерной циркулярной решетки, можно усложнить, увеличивая число ее элементов за счет положения датчиков в другие моменты времени, не совпадающие с $t_i = t_0 + iT$. Предположим, что, как и в предыдущем разделе, выполняется правило, состоящее в том, что время дискретности Δt измерений датчиков параметров среды связано с периодом T следующим образом:

$$T = K\Delta t,$$

где K – целое число. Обозначим через T_1 интервал времени, равный $K_1\Delta t$, такой, что $1 \leq K_1 \leq K$. Согласно исходным предположениям, после начала отсчета времени t_0 датчики вернутся в свое начальное положение через любой промежуток времени, кратный T . Спустя время T_1 от начала отсчета датчики займут некоторое новое положение. Предположим, что в этом новом положении ни один из спутников не занимает положения спутников в начальный момент времени. Если теперь рассматривать движение спутников, отсчитывая время от нового начального момента $T_0 + T_1$, то спутники через время, кратное T , будут занимать это же положение. Таким образом, датчики решетки в этом новом положении также можно рассматривать в качестве рядов от статической измерительной решетки, имеющих фиксированную задержку относительно первоначального положения решетки. Поскольку время задержки фиксировано, мы можем рассматривать совокупность из $2M$ цифровых рядов от одних и тех же M датчиков как данные от статической решетки с $2M$ датчиками. Отличием процедуры вычисления спектральной плотности от такой ре-

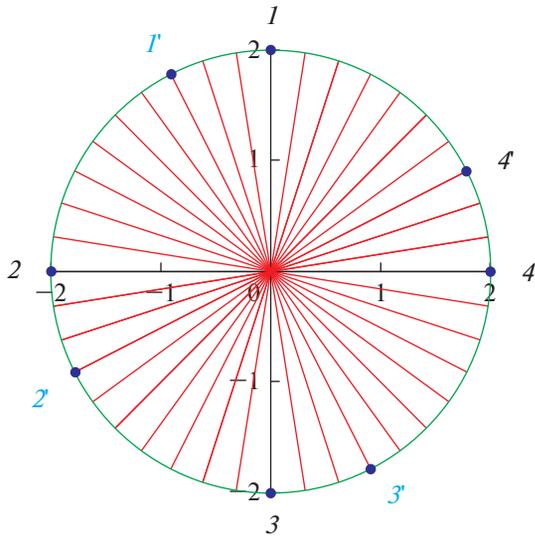


Рис. 2. Пример дополненной неравномерной измерительной решетки с четырьмя позициями. Штрихами обозначены дополнительные положения элементов решетки.

сетки по сравнению с обычной статической решеткой, является необходимость учета сдвига фаз по времени, что не представляет особого труда для всех основных методов оценивания пространственно-временной спектральной плотности. Измерительные решетки такого типа будем называть дополненными циркулярными решетками. Пример такой решетки приведен на рис. 2.

Очевидно, что такая процедура построения циркулярной решетки за счет включения в нее цифровых рядов от датчиков в других положениях M датчиков может продолжаться до тех пор, пока все допустимые положения не будут исчерпаны из всего набора положений, определяемого дискретностью измерений Δt и числом датчиков M . Для этого необходимо лишь указать положения спутников для некоторого набора временных интервалов T_1, T_2, \dots, T_n , имеющих вид: $T_i = K_i \Delta t$, где K_i — целые числа, удовлетворяющие условию: $1 \leq K_1 < K_2 < \dots < K_n < K$. В результате мы будем иметь решетку из nM узлов. В этом случае для построения оценивания спектральной плотности необходимо учитывать фиксированный сдвиг фаз для каждой группы из M спутников. Более того, формально можно рассматривать такие положения M спутников, в которых некоторые из них в моменты времени T_i занимают положение спутников из другой группы. Для формирования решетки в этом случае достаточно исключить совпадающие положения, поскольку в них дискретность измерений будет отличаться от периода обращения T . В этом случае общее число элементов сформированной решетки будет меньше, чем nM .

Таким образом, единственным недостатком неравномерной циркулярной решетки становится неизменная дискретность измерений в ее узлах, равная периоду ее обращения вокруг своей оси, которую невозможно уменьшить или увеличить произвольно. С другой стороны такой подход дает возможность превращать в измерительную решетку даже один датчик, например, орбитальный спутник, что невозможно сделать для истинно неподвижной решетки. Для этого необходимо повторить все построения, описанные в данном разделе в отношении одного датчика, вращающегося вокруг некоторого центра. Примером может служить датчик, расположенный на борту вращающегося вокруг своей оси космического аппарата, находящегося на орбите Земли. Действительно, в случае $M = 1$ мы можем использовать все доступные из K измерений, проводимых датчиками спутника за один период T обращения вокруг орбиты ($T = k\Delta t$), для образования циркулярной решетки. Поскольку при таком периодическом движении временные промежутки между отдельными измерениями фиксированы, можно их использовать для вычисления фиксированного сдвига фаз на любой заданной частоте, что позволяет использовать стандартные методы оценивания спектральной плотности для статической решетки.

Отметим, что обобщением равномерных и неравномерных циркулярных решеток представляются решетки произвольной формы, не обязательно расположенные на круговой орбите, смещение узлов которых происходит также произвольно, но с единственным условием возвращения элементов решетки в исходное базовое положение через заданный интервал времени T , который будет определять шаг дискретности измерений по времени.

3. ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО СПЕКТРА

Изложенные в предыдущих разделах идеи использования данных от датчиков, движущихся по круговым траекториям, в качестве данных от циркулярных измерительных решеток требуют определенной модификации алгоритмов оценивания пространственно-временной спектральной плотности и проверки этих алгоритмов с помощью тестов. Стандартными алгоритмами оценивания пространственно-временной спектральной плотности $S(\mathbf{k}, f)$ по данным от статической антенной решетки выступают два основных алгоритма. Это алгоритм, который часто называют алгоритмом Бартлетта, и метод максимального правдоподобия [4–6]. Оба метода исходят из предположения, что на данной частоте из диапазона $0 \leq f \leq f_N$ имеется оценка элементов $S_{ab}(f)$ спектральной матрицы $S(f)$. Здесь $f_N = 1/(2\Delta t)$ — частота Найквиста,

определяющаяся временной дискретностью цифровых рядов наблюдений, а индексы a и b – номера узлов измерительной решетки. Спектральная матрица для стационарного в широком смысле дискретного по времени векторного процесса $X(i)$ с компонентами $X_a(i)$ может быть представлена в следующей форме:

$$S_{ab}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{ab}(m) \exp(2i\pi f m), \quad (2)$$

$a, b = 1, \dots, M,$

где $R_{ab}(m)$ – компоненты ковариационной матрицы $\mathbf{R}(m)$ процесса $X(i)$.

Оценка Бартлетта $S(\mathbf{k}, f)$ строится как формальное фурье-преобразование спектральной матрицы $S_{ab}(f)$ по координатам узлов измерительной решетки:

$$S(\mathbf{k}, f) = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M S_{ab}(f) \exp(i2\pi(k_x x_a + k_y y_a + k_z z_a)),$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, определенный в декартовой системе координат отсчета, связанной с неподвижными узлами измерительной решетки. Этот метод имеет меньшее разрешение по сравнению с методом максимального правдоподобия в определении направления распространения падающей на решетку волны, од-

нако обладает большей устойчивостью к шуму в узлах решетки [4–6].

Другим подходом к оцениванию пространственно-временного спектра представляется метод максимального правдоподобия [4–9], который эквивалентен методу максимальной энтропии [10, 11], при условии достоверности оценки спектральной матрицы. Метод максимальной энтропии при условии, что исследуемый процесс представляет собой стационарный в широком смысле нормальный процесс, сводится к построению оценки $S(\mathbf{k}, f)$, доставляющей максимум функционалу:

$$H = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \ln(\mathbf{k}, f) dk_x dk_y dk_z df.$$

Здесь f, k_x, k_y, k_z – нормированные частота и компоненты волнового вектора, изменяющиеся в диапазоне $[-1/2, 1/2]$. Предполагается, что точно известна спектральная матрица процесса на частоте f . Последнее условие эквивалентно соотношению:

$$S_{ab}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \exp(i2\pi(k_x(x_a - x_b) + k_y(y_a - y_b) + k_z(z_a - z_b))) S(\mathbf{k}, f) dk_x dk_y dk_z.$$

Таким образом, согласно методу множителей Лагранжа, решение задачи сводится к поиску максимума функционала:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & - \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \ln S(\mathbf{k}, f) dk_x dk_y dk_z df + \\ & + \sum_{a,b=1}^M \left(\int_{-1/2}^{1/2} \Lambda_{ab}(f) \left(\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left(i2\pi \left(\begin{matrix} k_x(x_a - x_b) + \\ + k_y(y_a - y_b) + \\ + k_z(z_a - z_b) \end{matrix} \right) \right) S(\mathbf{k}, f) dk_x dk_y dk_z - S_{ab}(f) \right) df \right). \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_{ab}(f)$ – множители Лагранжа. В результате приходим к оценке следующего вида:

$$S(\mathbf{k}, f) = \left(\sum_{a,b=1}^M \Lambda_{ab}(f) \exp(i2\pi(k_x(x_a - x_b) + k_y(y_a - y_b) + k_z(z_a - z_b))) \right)^{-1}.$$

Как доказывается в исследованиях [10, 11], такая оценка эквивалентна оценке максимального правдоподобия [4–6]:

$$S(\mathbf{k}, f) = \left(\sum_{a,b=1}^M S_{ab}(f) \exp(i2\pi(k_x(x_a - x_b) + k_y(y_a - y_b) + k_z(z_a - z_b))) \right)^{-1}. \quad (3)$$

Именно этой оценкой будем пользоваться в дальнейшем. При этом предполагается, что сама оценка спектральной матрицы строится на основе метода максимальной энтропии [4–11].

4. МОДИФИКАЦИЯ ОЦЕНКИ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННЫХ СДВИГОВ МЕЖДУ РЯДАМИ

Построим теперь модификацию оценки пространственно-временного спектра с использованием данных от одного или нескольких спутников, находящихся на круговой орбите. Для простоты изложения будем предполагать, что исследуемые волны распространяются в плоскости орбиты. Это означает, что пространственно-временной спектр $S(\mathbf{k}, f)$ зависит от волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ с компонентами относительно декартовой системы координат в плоскости орбиты. Начнем со случая движения одного спутника. Для использования оценки пространственно-временного спектра на основе данных, поступающих от одного спутника, необходимо учесть, что ряды измерений, относящихся к узлам статической решетки, смещены друг относительно друга на фиксированный интервал времени. Предположим, что за период обращения спутник проходит M положений в плоскости орбиты с координатами:

$$\begin{aligned} x_k &= R \cos(2\pi k/M), \\ y_k &= R \sin(2\pi k/M), \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (4)$$

где R – радиус орбиты. Как уже обсуждалось, в этих точках датчики спутника проводят измерения с периодом T , однако сами измерения смещены относительно элемента с номером $k = 0$ по времени, соответственно, на интервалы времени:

$$\Delta_k = (Tk)/M, \quad k = 1, \dots, M-1.$$

Следовательно, при формулировании способа оценивания спектральной матрицы необходимо учитывать этот временной сдвиг.

Рассмотрим с формальной точки зрения изменения в форме спектральной матрицы, вычисленной на основе рядов, измеренных с некоторым временным сдвигом τ . Пусть имеются два ряда измерений одной и той же величины $X_1(t)$ и $Y_2(t) = X_2(t + \tau)$, проведенные в моменты времени t и $t + \tau$. В этом случае фурье-образы этих процессов имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_1(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t) \exp(-i2\pi ft) dt, \\ \widehat{Y}_2(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(t + \tau) \exp(-i2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Простым преобразованием подынтегрального выражения для второго ряда находим:

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_2(f) &= \exp(i2\pi f\tau) \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} X_2(t + \tau) \exp(-i2\pi f(t + \tau)) dt = \\ &= \widehat{X}_2(f) \exp(i2\pi f\tau). \end{aligned}$$

Исходя из того, что кросспектральная функция $S_{12}(f)$ (недиагональный элемент спектральной матрицы) процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ может быть вычислена формально с помощью усреднения по ансамблю следующим образом: $S_{12}(f) = \langle \widehat{X}_1(f) \widehat{X}_2(f) \rangle$, находим:

$$S'_{12}(f) = \langle \widehat{X}_1(f) \widehat{Y}_2(f) \rangle = S_{12}(f) \exp(i2\pi f\tau).$$

Поскольку нас интересуют измерения, относенные к фиксированному моменту времени t , то кросспектральная функция, описывающая такие изменения, есть $S_{12}(f)$, а кросспектральная функция $S'_{12}(f)$ отражает данные, поступающие в реальности от датчиков в моменты времени, смещенные по времени на величину τ . В результате находим:

$$S_{12}(f) = S'_{12}(f) \exp(-i2\pi f\tau). \quad (5)$$

Исходя из этих общих рассуждений, находим, что спектральная матрица антенной решетки $S'_{ab}(f)$, сформированная с помощью измерений одного датчика в нескольких положениях круговой орбиты, связана со спектральной матрицей $S_{ab}(f)$ волнового процесса в фиксированный момент времени следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{ab}(f) &= S'_{ab}(f) \exp(-i2\pi fT(a-b)/M), \\ a, b &= 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (6)$$

Вводя стандартные определения автоспектров: $S_a(f) = S_{aa}(f)$, когерентности q_{ab} между узлами a и b : $q_{ab} = |S_{ab}(f)| / \sqrt{S_{aa}(f)S_{bb}(f)}$, и сдвига фаз: $\varphi_{ab} = \arg(S_{ab}(f))$ так, что $S_{ab}(f) = q_{ab}(f) \exp(i\varphi_{ab}(f))$, находим, что в силу преобразования (6) изменяются лишь сдвиги фаз в матрице $S_{ab}(f)$ по отношению к матрице $S'_{ab}(f)$:

$$\varphi_{ab}(f) = \varphi'_{ab}(f) - 2\pi fT(a-b)/M.$$

Таким образом, алгоритм корректировки спектральной матрицы сводится к соотношению (6), что легко реализуется на практике.

В случае неравномерной решетки фазовая коррекция спектральной матрицы будет осуществляться в соответствии со следующими более общими правилами. Обозначим через τ_a , $a = 1, \dots, M$ временную задержку между измерениями датчиков в положении a по отношению к фиксированному времени в течение периода обращения решетки вокруг своей оси. Будем считать, что τ_a выражена в долях периода обращения T . Тогда аналогом соотношения (6) станет соотношение:

$$\begin{aligned} S_{ab}(f) &= S'_{ab}(f) \exp(-i2\pi f(\tau_a - \tau_b)), \\ a, b &= 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти соотношения применимы для любых типов неравномерных циркулярных решеток.

5. ТЕСТ ДЛЯ ОДНОЭЛЕМЕНТНОЙ ЦИРКУЛЯРНОЙ РЕШЕТКИ

В качестве тестового примера рассматривалась на первом этапе циркулярная решетка с одним датчиком, движущимся по окружности радиуса $R = 0.5$ (в относительных единицах), и проводящим измерения в трех и четырех равноотстоящих друг от друга точках. Положение точек, в которых производились измерения, определяется соотношениями (4). Они изображены на рис. 3.

Программа, реализующая оценивание спектральной матрицы, а затем и пространственно-временного спектра, была написана на языке Python. Для демонстрации эффекта фазовой коррективы были сгенерированы тестовые ряды, соответствующие падению на решетку двух плоских волн на нормированных частотах $f_1 = 0.15$ и $f_2 = 0.25$. Волна с частотой f_1 имела проекции нормированного волнового вектора на оси координат $k_x = -0.15$, $k_y = 0.25$, а волна с частотой f_2 – проекции волнового вектора: $k_x = 0.12$, $k_y = 0.2$. Амплитуды волн были одинаковыми и равными единице. В узлах решетки генерировался независимый случайный нормальный белый шум со стандартным отклонением $\sigma = 0.025$. Оценка спектральной матрицы строилась с помощью метода максимальной энтропии, а оценка спектральной плотности пространственного спектра на заданной частоте – с помощью метода максимального правдоподобия. Результаты оценивания компонентов спектральной матрицы представлены на рис. 4.

Результаты оценивания спектральной плотности пространственного спектра на частотах, соответствующих спектральным пикам, представлены на рис. 5 для четырехпозиционной решетки. На рис. 5а, б приведены оценки спектральной плотности без фазовой коррекции. Черными точками указано истинное положение спектрального пика, соответствующее сгенерированному ряду. Максимум оценки спектральной плотности отмечен как перекрестие белых пунктирных линий, в квадратных скобках указаны координаты положения максимума. На рис. 5в, г представлены оценки спектральной плотности с фазовой коррекцией. Из рисунков видно, что в случае коррекции положение максимумов практически не отличается от истинных. Выбор в тесте сравнительно небольшого стандартного отклонения для шума был сделан намеренно для демонстрации самого эффекта фазовой коррекции спектральной плотности.

6. ТЕСТ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ЦИРКУЛЯРНОЙ РЕШЕТКИ

Для возможности сравнения работы алгоритмов оценивания тест для неравномерной цирку-

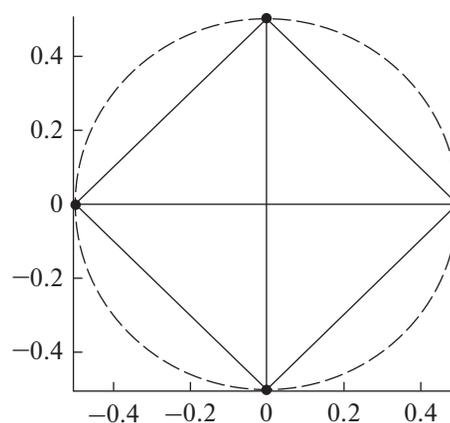


Рис. 3. Циркулярная решетка с четырьмя позициями.

лярной решетки проводится для тех же параметров волнового поля, что и для равномерной. Число позиций решетки выбрано равным четырем, но в качестве дополнительного узла выбрано неподвижное положение датчика в центре циркулярной решетки. В качестве позиций неравномерной решетки выбраны положения, соответствующие задержкам: $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0.2$, $\tau_3 = 0.6$, $\tau_4 = 0.75$, $\tau_5 = 0$ относительно первого элемента. Пятый узел в центре циркулярной решетки в силу его неподвижности имеет задержку равную нулю. Здесь указаны задержки в долях шага дискретизации рядов по времени, который равен периоду обращения циркулярной решетки. Положение узлов измерительной решетки, соответствующее задержкам, приведено на рис. 6.

На рис. 7 приведены нескорректированные и скорректированные оценки пространственного спектра в соответствии с (7).

Из приведенных изображений видно, что и для пятиэлементной неравномерной решетки фазовая коррекция спектральной матрицы является эффективной процедурой получения несмещенной оценки спектральной матрицы. После коррекции положение пика в точности совпадает с истинной величиной волнового вектора, но, кроме этого, ширина пика существенным образом сужается. Это говорит о том, что разрешающая способность метода фазовой коррекции остается такой же, как и в случае оценивания волновых векторов на основе статической решетки. Таким образом, можно констатировать, что неравномерность распределения узлов не влияет на точность фазовой коррекции спектральной матрицы циркулярной решетки.

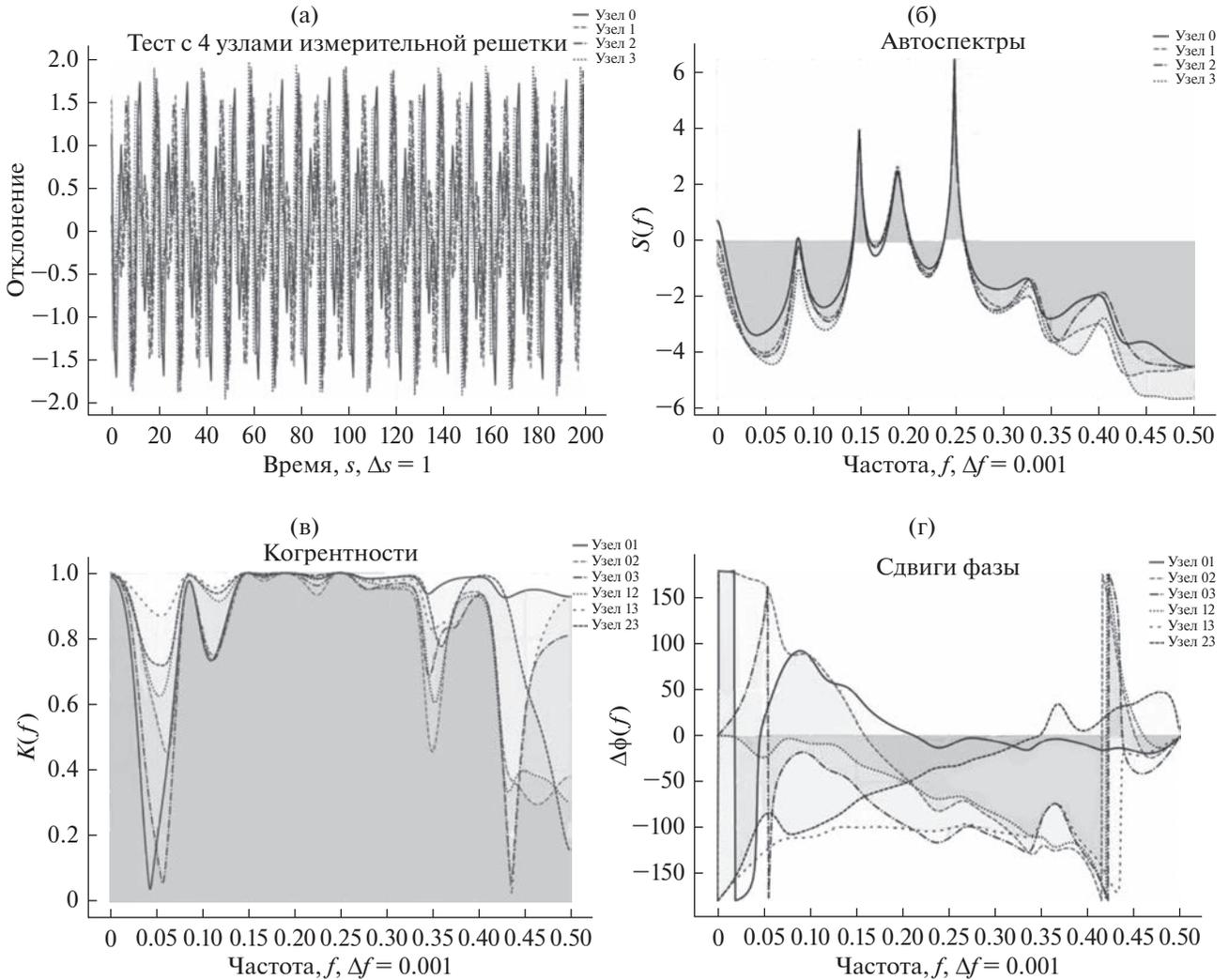


Рис. 4. Графики тестовых рядов (а), оценки автоспектров (б), когерентности (в) и сдвига фаз (г) спектральной матрицы для двух волн на четырехпозиционной решетке.

7. ПРИМЕНЕНИЕ ЦИРКУЛЯРНЫХ РЕШЕТОК

Развитый метод построения спектральных оценок волн на основе циркулярных решеток может применяться в целом ряде реальных систем. Однако для своей реализации он требует выполнения ряда условий. Примером может служить задача оценивания параметров волновых возмущений, генерируемых Солнцем, с помощью циркулярной решетки, сформированной из позиций геостационарных спутников *GOES*. Действительно, с формальной точки зрения датчики на спутниках *GOES* могут быть использованы в качестве элементов циркулярной решетки с шагом дискретизации по времени, равным одним суткам. За период, равный суткам, спутники *GOES* делают полный оборот по орбите вокруг Земли и восстанавливают свое пространственное положение относительно нее. Поэтому даже один из спутников

GOES в нескольких положениях на орбите можно рассматривать в качестве несимметричной циркулярной одноэлементной решетки. Однако положение этих спутников по отношению к Солнцу в гелиоцентрической системе координат не восстанавливается через сутки из-за орбитального движения Земли вокруг Солнца и наклона плоскости экватора Земли, в которой движутся геостационарные спутники, и плоскостью эклиптики. В результате направление волн, генерируемых в космической среде Солнцем, будут непрерывно менять свое направление по отношению к циркулярной решетке, сформированной из позиций спутников *GOES*. Последнее делает практически бесполезным получаемые от такой циркулярной решетки данные о волновых возмущениях, приходящих от Солнца. С другой стороны, использование циркулярной решетки из позиций геостационарных спутников могло бы быть по-

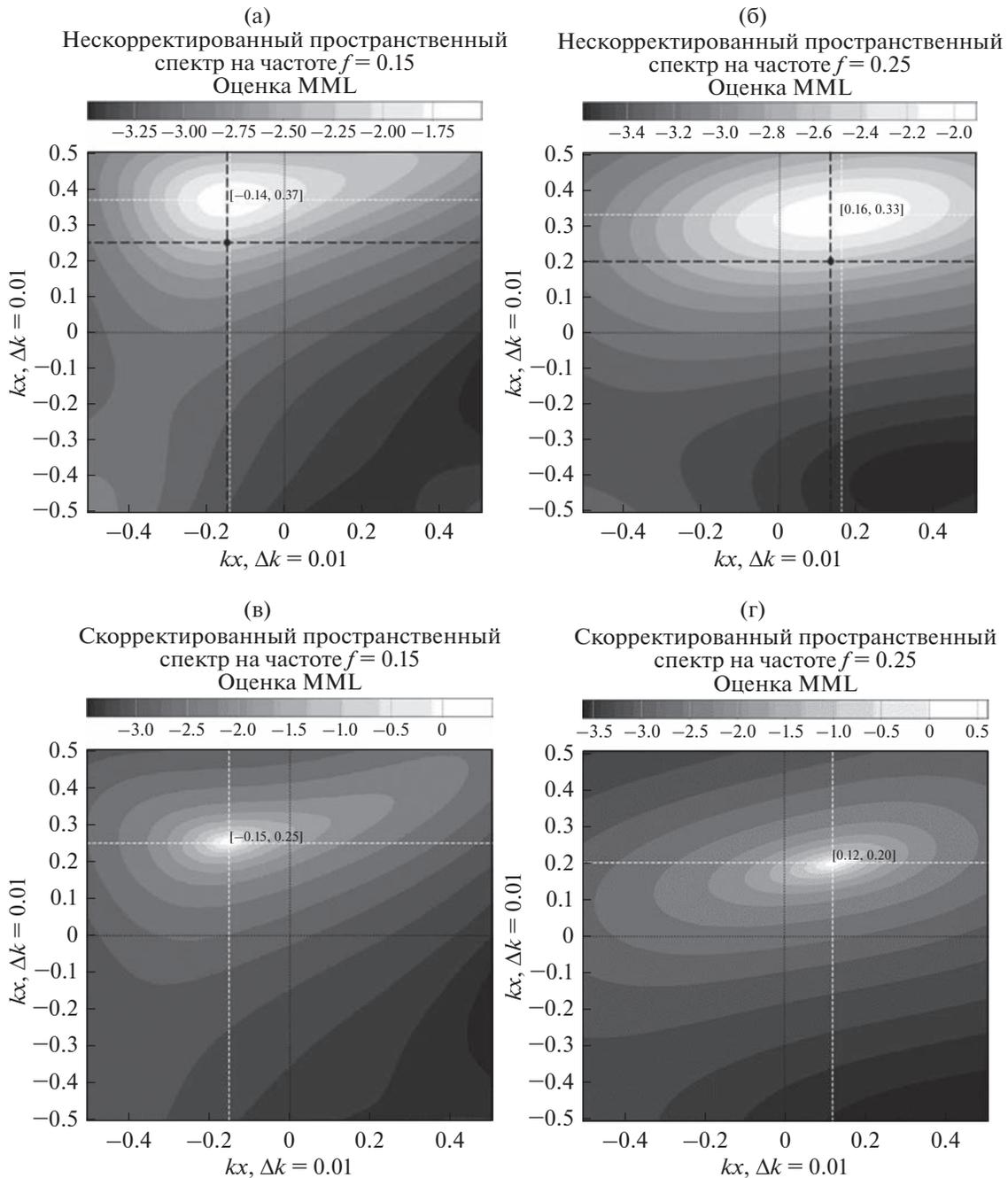


Рис. 5. Нескорректированные (а, б) и скорректированные (в, г) оценки спектральной плотности для двух волн на четырехпозиционной решетке.

лезным в высокочастотной области с периодами значительно меньше суточного. В этой области частот представляют интерес волновые возмущения магнитосферы, связанные с самой Землей. Для реализации процедур спектральной обработки в области частот с периодом дискретности порядка одного часа с помощью геостационарных спутников необходимо размещать на геостационарной орбите с равномерным шагом не менее

24 спутников. В этом случае через каждый час геостационарные спутники будут восстанавливать исходное положение решетки. Однако решение такой задачи представляется достаточно сложной и затратной задачей.

В плане исследования волновых возмущений от Солнца гораздо лучшими с точки зрения статичности циркулярной решетки оказываются данные, получаемые от полярных спутников, на-

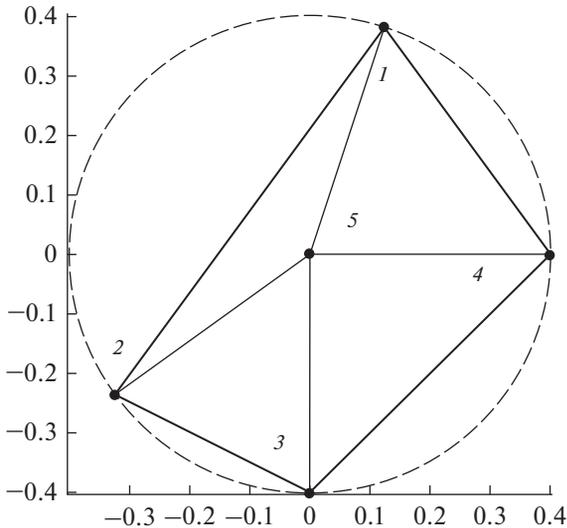


Рис. 6. Неравномерная циркулярная решетка с пятью узлами.

ходящихся на солнечно-синхронных орбитах. В качестве таких группировок спутников, данные от которых имеются в открытом доступе, выступают спутники серии *NOAA*. Поворот плоскости орбиты солнечно-синхронных спутников вместе с орбитальным движением Земли вокруг Солнца решает проблему изменения положения позиций спутников относительно Солнца в полярной системе координат в плоскости эклиптики с началом координат на Солнце. Однако проблема при реализации таких процедур оценивания заключается в том, что высота орбиты таких спутников над поверхностью Земли не превышает 1000 км, что значительно меньше радиуса самой Земли. Близость орбиты к поверхности Земли будет приводить к существенным искажениям волнового поля возмущений космической среды, вызванных процессами на Солнце. Однако циркулярные одноэлементные решетки, связанные с каждым отдельным спутником на круговой орбите, могут быть использованы для анализа волнового поля самой магнитосферы Земли. В этом отношении полезным является то, что характерная дискретность времени такой циркулярной решетки будет порядка 1.5 ч, что позволяет исследовать диапазон частот с периодами значительно меньше суток. Наличие множества малогабаритных спутников на одной и той же круговой орбите с равномерным их распределением по орбите может позволить исследовать еще более высокочастотный диапазон с периодами меньше часа. Такая задача представляется вполне реализуемой с помощью вывода на орбиту наноспутников.

Еще одной областью применения циркулярных решеток могут служить исследования локального волнового поля вблизи каждого отдельного

космического аппарата. Примером подходящей для этого схемы может служить вращающийся вокруг своей оси космический аппарат, снабженный несколькими симметрично расположенными на нем датчиками параметров космической среды. При собственном вращении космического аппарата с периодом T вокруг своей оси датчики будут восстанавливать свое положение через время $\Delta T = T/M$, где M — число датчиков. Пример такого космического аппарата приведен на рис. 8, на котором представлен вариант космического аппарата с двумя вращающимися датчиками (датчики 1 и 2) и двумя датчиками на оси вращения (датчики 3 и 4). Цифрами со штрихами показаны дополнительные позиции циркулярной решетки.

С помощью таких космических аппаратов можно измерять параметры волновых процессов вблизи их траектории на частотах с периодами порядка периода собственного вращения спутника. Если период собственного вращения спутника будет намного меньше, чем период орбитального движения такого аппарата, то на каждом относительно коротком по времени и прямолинейном в пространстве отрезке пути можно получать данные спектрального анализа, корректируя частоты волн с помощью формулы Доплера.

Таким образом, при создании космических аппаратов, реализующих циркулярные измерительные решетки, следует опираться на следующие выводы.

Период вращения спутника вокруг своей оси T определяет дискретность цифровых рядов по времени. Согласно теореме Котельникова, диапазон $[0, f_N]$, доступный для оценивания спектральной плотности волнового поля, определяется частотой Найквиста f_N . Для решеток с полностью несимметричным расположением позиций частота Найквиста определяется соотношением: $f_N = (2T)^{-1}$. В случае же полностью симметричного расположения позиций решетки с N датчиками частота Найквиста будет такой: $f_N = N(2T)^{-1}$, т.е. верхняя граница диапазона может быть существенно увеличена. Следует также отметить, что диапазон, доступный для оценивания, ограничен также и снизу погрешностями в определении временных интервалов на борту КА и чувствительностью датчиков, поскольку они определяют погрешность в измерении сдвига фаз между элементами решетки.

Доступный для надежного определения спектральной плотности диапазон волновых чисел определяется апертурой решетки:

$$D_{\max} = \max \{r_{ij}\}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где r_{ij} — расстояние между всеми парами элементов решетки, $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$. Апертура определяет минимальную длину волны,

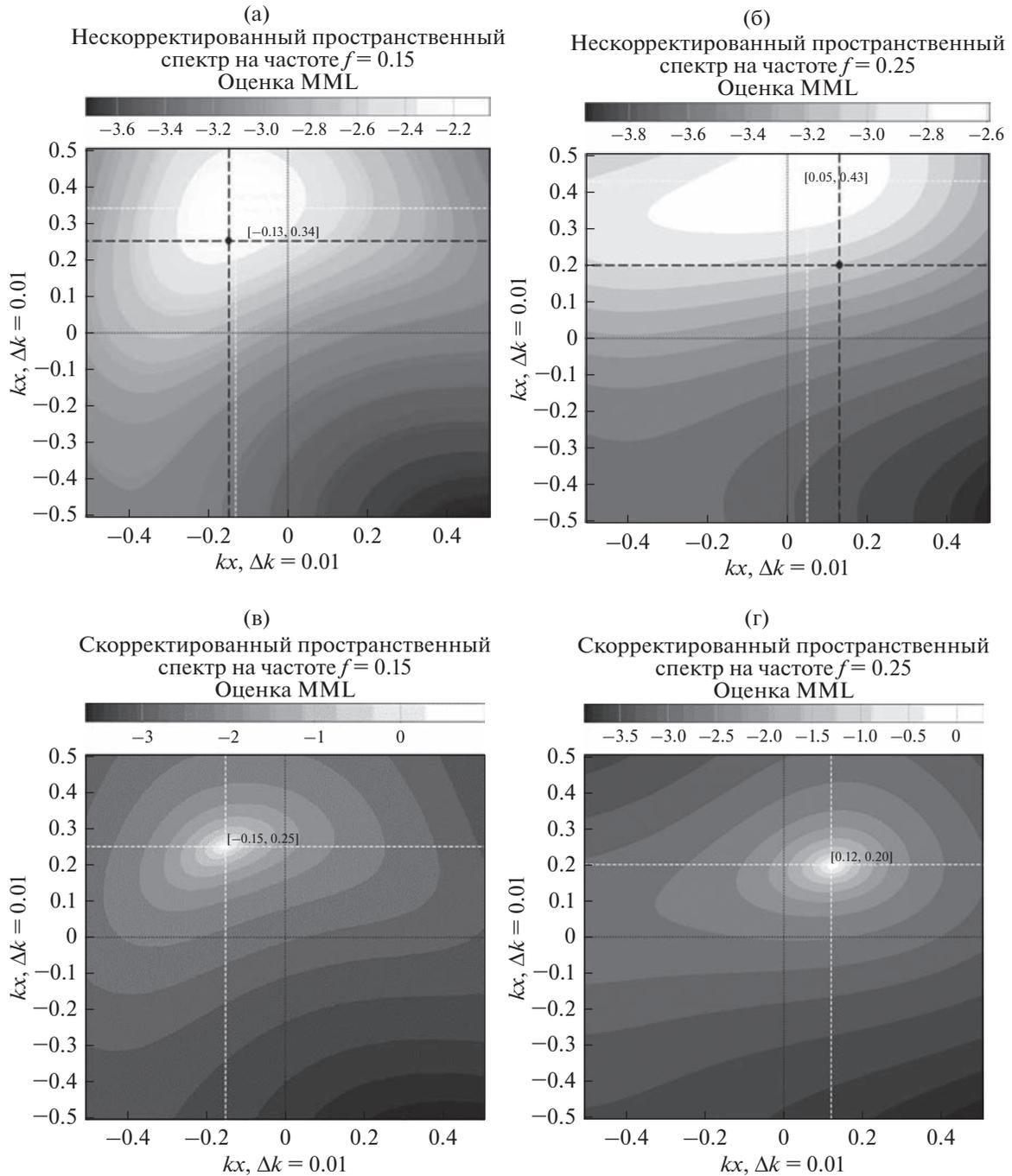


Рис. 7. Нескорректированные (а, б) и скорректированные (в, г) оценки спектральной плотности для двух волн на неравномерной решетке по формуле (6).

для которой согласно теореме Котельникова еще доступна оценка спектральной плотности:

$$\lambda_{\min} = 2D_{\max}. \tag{8}$$

Следует отметить, что диаграмма направленности измерительных решеток не является в общем случае круговой или сферической. Поэтому для некоторых направлений прихода волн минимальная длина волны может быть несколько

меньшей по сравнению с равенством (8). Для циркулярных решеток апертура в основном определяется расстоянием положения датчиков от оси вращения КА.

При реализации процедур измерения волновых процессов в космической среде с помощью КА следует также учитывать, что сам аппарат при движении вносит в среду возмущения, которые

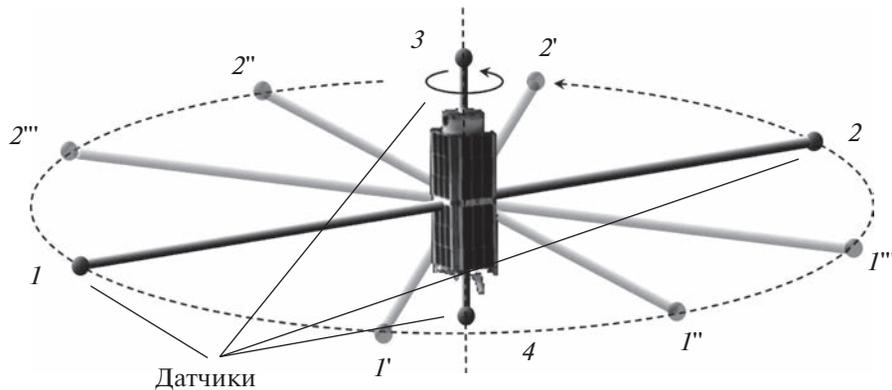


Рис. 8. Примерный вид космического аппарата, реализующего циркулярную решетку за счет своего собственного вращения.

могут исказить структуру волнового поля. Этот фактор может изменять доступные для оценивания спектральной плотности диапазоны частот и длин волн, а также диаграмму направленности циркулярной решетки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из приведенного анализа построения спектральных оценок волнового поля с помощью циркулярных измерительных решеток следует, что динамические решетки такого типа позволяют с достаточной степенью точности получать несмещенные оценки пространственно-временных спектров. Процедура построения таких оценок гораздо проще, чем аналогичные процедуры построения оценок пространственно-временных спектров с помощью динамических решеток с произвольным движением их узлов относительно неподвижной системы отсчета [13, 14].

Приведенный анализ показывает, что циркулярные решетки могут быть использованы для исследования волновых полей в околоземном космическом пространстве с помощью глобальных спутниковых систем, таких как *GOES* или *NOAA*. Однако в этом случае необходимо модифицировать системы, например, увеличить число элементов таких систем как *GOES* с целью уменьшить шаг дискретизации по времени, что позволило бы уменьшить ошибки от изменения структуры циркулярной решетки по отношению к изучаемому волновому полю. Поэтому на данном этапе наиболее перспективным направлением использования циркулярных решеток могут быть малые космические аппараты, в том числе наноспутники. Такие аппараты могут дать новую полезную информацию о волновом поле космической среды, окружающей аппарат, как на орбите, так и на межпланетных траекториях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-58-00018, частично в рамках проекта РФФИ № 20-02-00280, а также в рамках проекта № 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России в части использования циркулярных измерительных решеток при проведении космических экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонович А.С., Мазур В.А., Козлов Д.А.* МГД-волны в геомагнитном хвосте: обзор // Солнечно-земная физика. 2015. Т. 1. № 1. С. 4–22.
2. *Пилипенко В.А.* МГД-волны в космосе и на Земле: Исторический аспект // Вестн. ОНЗ РАН. 2021. Т. 13. № NZ2001. 15 с.
3. *Гульельми А.В., Потапов А.С.* Частотно-модулированные ультранизкочастотные волны в околоземном космическом пространстве // УФН. 2021. Т. 191. № 5. С. 475–491.
4. *Кейпон Д.* Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением // Тр. Ин-та инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1969. Т. 51. С. 69–79.
5. *Джонсон Д.Х.* Применение методов спектрального анализа к задаче определения угловых координат источников излучений // Тр. Ин-та инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1982. Т. 70. № 9. С. 126–139.
6. *Маклеллан Дж.Х.* Многомерный спектральный анализ // Тр. Ин-та инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1982. Т. 70. № 9. С. 139–151.
7. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
8. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.

9. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: Изд. дом “Вильямс”. 2004.
10. Дворянинов Г.С., Журавлев В.М., Прусов А.В. Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе временных рядов // Морской гидрофиз. журн. 1987. № 3. С. 41–48.
11. Dvoryaninov G.S., Zhuravlev V.M., Prusov A.V. Synoptic waves in the Tropical Atlantic atmosphere and their relationship with the dynamics of intra-tropical convergence zone // Soviet J. Physical Oceanography. 1989. V. 1. № 2. P. 77–86.
12. Журавлев В.М., Журавлев А.В., Егоров Г.А. Оценивание пространственно-временных спектров волновых процессов на основе последовательности изображений с помощью многомерного метода максимальной энтропии // Изв. вузов. Поволжский регион. 2008. № 3. С. 71–81.
13. Журавлев В.М., Фундаев С.В. Вычисление спектральной плотности сигнала с помощью антенной решетки переменной конфигурации // Изв. вузов. Поволжский регион. 2009. № 3. С. 101–112.
14. Vinogradov S.V., Zhuravlev V.M., Fundaev S.V. Estimation of the Spectral Composition of the Signal by the Antenna Composed of Multiple Satellites // Procedia Engineering. 2015. V. 104. P. 15–22.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.04.091>

УДК 533.95

МОДЕЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

© 2023 г. Н. Н. Левашов^{1, 2, *}, В. Ю. Попов^{1, 2, 3}, Х. В. Малова^{2, 4}, Л. М. Зеленый²¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт космических исследований РАН, Москва, Россия³Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия⁴Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*nn.levashov@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 01.03.2022 г.

После доработки 23.10.2022 г.

Принята к публикации 24.10.2022 г.

Предложена двумерная модель мультифрактального турбулентного электромагнитного поля, позволяющая гибко варьировать ширину мультифрактального спектра и уровень перемежаемости. Моделирование электромагнитного поля происходит при помощи суперпозиции вейвлетов, которые распределяются равномерно по всей вычислительной области. Путем специального распределения амплитуд мы добиваемся того, чтобы результирующее поле было мультифрактальным и перемежаемым. При помощи данной модели исследовалось влияние мультифрактальности и перемежаемости на ускорение заряженных частиц в турбулентном поле в хвосте магнитосферы Земли. Показано, что в случае мультифрактального поля отдельные частицы способны достичь больших значений энергии по сравнению с монофрактальной турбулентностью.

DOI: 10.31857/S0023420622100089, EDN: LSFWRA

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентное электромагнитное поле в солнечном ветре является нестационарным, в нем могут появляться различные структуры, такие как токовые слои, вихри, жгуты, плазмоиды. Из-за наличия подобных локальных особенностей, поле неоднородно и имеет мультифрактальный перемежаемый характер [1–4]. Ранее уже разрабатывались модели турбулентного поля с перемежаемостью, например, в работах [5–7] моделирование производилось добавлением в однородное турбулентное поле, моделируемое при помощи суперпозиции фурье-гармоник, локальных структур – плазмоидов. Также были работы по исследованию ферми-ускорения между локальными структурами [8, 9]. Однако в указанных работах не учитывалось, что перемежаемое турбулентное поле в солнечном ветре имеет широкий мультифрактальный спектр. Мы предлагаем модель турбулентного поля с перемежаемостью, в которой можно легко варьировать ширину мультифрактального спектра. Свойство мультифрактальности заключается в локально нерегулярном поведении турбулентности, т.е. показатели Херста в разных точках могут различаться, поэтому для описания мультифрактальных процессов недостаточно одного параметра Херста. В связи с

этим используют локальные экспоненты Херста или экспоненты Гельдера $h(x_0)$, которые описывают поведение турбулентного поля в точке x_0 [10]. Также удобным инструментом для описания мультифрактальной турбулентности представляется функция мультифрактального спектра $f(h)$, которая описывает спектр экспонент Гельдера [10–13].

В нашей модели турбулентное поле моделируется при помощи суперпозиции вейвлетов, равномерно распределенных по всей вычислительной области. Вейвлеты позволяют довольно гибко управлять амплитудой полученного поля в любой точке пространства и потому хорошо подходят для описания процессов с различными локальными особенностями. Благодаря специальному распределению амплитудных коэффициентов вейвлетов мы добиваемся того, что в моделируемом нами турбулентном поле появляется целый континуум показателей Гельдера, т.е. широкий мультифрактальный спектр $f(h)$, ширину которого легко варьировать. Полученное мультифрактальное поле также будет перемежаемым, ведь, как известно, для Колмогоровской неперемежаемой турбулентности характерна линейная зависимость показателей структурных

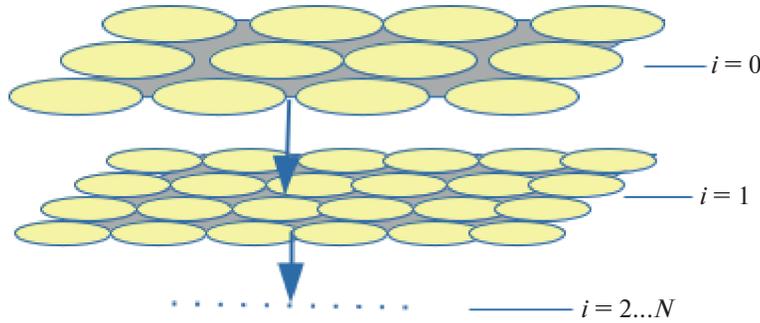


Рис. 1. Распределение вейвлетов по вычислительной области.

функций ζ_q от степени q , а при наличии перемежаемости будут наблюдаться отклонения кривой $\zeta_q(q)$ от прямой $\zeta_q \sim q$. Чем сильнее отклонение, тем больше будет уровень перемежаемости [11]. Для мультифрактальной турбулентности, зависимость показателей структурных функций ζ_q от степени q является нелинейной и имеет следующий вид: $\zeta_q(q) = \inf_h (qh - f(h))$. Таким образом, варьируя ширину мультифрактального спектра, мы можем управлять уровнем перемежаемости полученного поля. Разработанная модель является довольно гибкой, и пригодна к моделированию различных турбулентных систем. В частности, для моделирования турбулентного электромагнитного поля в хвосте магнитосферы во время суббурь.

1.1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования двумерного турбулентного электромагнитного поля сначала при помощи суперпозиции вейвлетов зададим компоненту магнитного поля B_z , затем при помощи уравнений Максвелла найдем электрическое поле. Распределение вейвлетов в вычислительной области происходит следующим образом: вейвлеты самого крупного масштаба равномерно распределяются по всей вычислительной области, затем берутся вейвлеты поменьше и тоже равномерно распределяются по вычислительной области. Число вейвлетов выбирается так, чтобы каждый масштабный класс вейвлетов полностью покрывал всю вычислительную область. На рис. 1 схематично изображено распределение вейвлетов по вычислительной области. Все они движутся в одном направлении и с одинаковой скоростью $V = V_x + V_y$.

В качестве базового вейвлета выбран Гауссов вейвлет:

$$Q_{i,j}(x, y, t) = r_{i,j} c_i \exp\left(\frac{-\pi d r_{i,j}^2(t)}{2a_i^2}\right), \quad (1)$$

где $dr_{i,j}(t) = \sqrt{(x - x_{i,j}(t))^2 + (y - y_{i,j}(t))^2}$, $x_{i,j}(t) = x_{i,j}^0 + V_x t$ и $y_{i,j}(t) = y_{i,j}^0 + V_y t$ – координаты соответствующего вейвлета в зависимости от времени; $x_{i,j}^0$ и $y_{i,j}^0$ – начальные координаты вейвлетов; V_x и V_y – их скорости по осям x и y соответственно; a_i – параметр, характеризующий размер; индекс i характеризует класс вейвлетов с одинаковыми размерами; a_i, c_i – амплитудный коэффициент для каждого масштабного класса вейвлетов; $r_{i,j} \in [-1; 1]$ – случайный коэффициент. Итоговое поле получается путем суперпозиции вейвлетов:

$$Q(x, y, t) = \sum_{i,j} Q_{i,j}(x, y, t). \quad (2)$$

Для того чтобы полученное таким образом поле было самоподобным, соотношение между размерами вейвлетов из соседних классов должно быть независимым от i . Для этого введем некоторое значение l , характеризующее соотношение размеров между соседними классами вейвлетов: $a_{i+1}/a_i = l$. Пусть N_i – количество вейвлетов i -го класса, а D – размерность пространства, в котором моделируется поле. Введем понятие площади $S_i \sim N_i a_i^D$, занимаемой i -м классом вейвлетов. Тогда в силу самоподобия отношение между площадями, занимаемыми соседними классами S_{i+1}/S_i должно иметь степенную зависимость от l : $S_{i+1}/S_i = l^\beta$ (β – варьируемый степенной показатель). Соотношение между амплитудными коэффициентами соседних классов вейвлетов c_{i+1}/c_i так же должно иметь степенную зависимость от l . Определим степенной показатель λ как $c_{i+1}/c_i = l^\lambda$.

Рассчитаем спектр энергии поля, моделируемого таким способом. Фурье-спектр одного вейвлета:

$$\tilde{Q}_{i,j}(k) = a_i^D c_i \exp(-ikr_{i,j})(\sqrt{2\pi})^D \exp\left(-\frac{(ka_i)^2}{2\pi}\right). \quad (3)$$

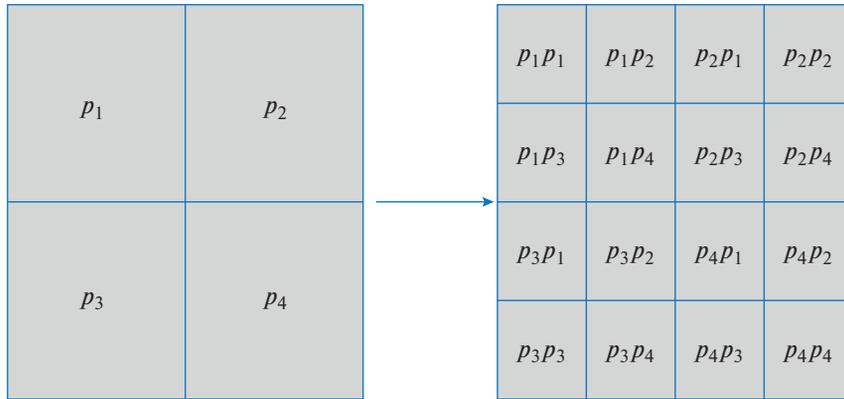


Рис. 2. Распределение весовых коэффициентов по ячейкам.

Спектр моделируемого турбулентного поля можно найти путем суперпозиции спектров отдельных вейвлетов:

$$\tilde{Q}(k) = \sum_{i,j} \tilde{Q}_{i,j}(k). \quad (4)$$

После некоторых преобразований, получаем спектр энергии полученного поля:

$$W(k) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^D}{S} |\tilde{Q}(k)|^2 \sim \left(\frac{ka_1}{\sqrt{\pi}} \right)^{-D-\beta-2\lambda}, \quad (5)$$

где S – площадь нашей вычислительной области [15].

1.2. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ

Для того чтобы полученное поле было мультифрактальным, разобьем вычислительную область по следующей схеме: для класса самых крупных вейвлетов, вычислительная область разбивается на четыре одинаковых квадратных ячейки. Вейвлеты из каждой ячейки умножаются на свой весовой коэффициент $p_1 - p_4$, тем самым мы получим, что суммарный вклад в энергию поля от разных частей класса вейвлетов будет не одинаковым. Для класса вейвлетов размером вдвое меньше первоначально, каждая исходная ячейка разбивается еще на четыре квадратных ячейки, в каждой из которых весовой коэффициент исходной ячейки снова умножается на один из четырех весовых коэффициентов. На рис. 2 изображено разбиение вычислительной области с распределением весовых коэффициентов: слева – для класса самых крупных вейвлетов, справа – для класса вейвлетов, размером вдвое меньше. Для класса вейвлетов с еще вдвое меньшим размером вейвлета – снова разбиваем каждую ячейку на четыре части и т.д. При таком разбиении, показатели Гельдера будут распределены в интервале величин h_{\min} и h_{\max} , значения

которых зависят от выбора весовых коэффициентов p_k .

Найдем значения h_{\min} и h_{\max} . Учитывая, что амплитудные коэффициенты N -го класса вейвлетов будет относиться к амплитудным коэффициентам самого крупного класса вейвлетов как $c_N/c_0 = l^{\lambda N}$, рассчитаем обобщенную статистическую сумму:

$$Z(q, N) = \sum_i c_i^q = l^{\lambda N} (n_1^q + n_2^q + n_3^q + n_4^q)^N, \quad (6)$$

где $n_k = p_k/4, k = 1, \dots, 4$. Из обобщенной статистической суммы можно найти скейлинговую экспоненту $\tau(q)$: $Z(q, N) = a_N^{\tau(q)}$, откуда $\tau(q) = \lim_{a_N \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, N)}{\ln a_N}$. Получив выражение для скейлинговой экспоненты, можно найти значения h_{\min} и h_{\max} :

$$\begin{cases} h_{\min} = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow \infty}, \\ h_{\max} = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty}, \\ \frac{d\tau}{dq} = \\ = \lambda - \frac{n_1^q \ln(n_1) + n_2^q \ln(n_2) + n_3^q \ln(n_3) + n_4^q \ln(n_4)}{(n_1^q + n_2^q + n_3^q + n_4^q) \ln(1/2)}. \end{cases} \quad (7)$$

Функция мультифрактального спектра, представляющая собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств L_h , на которые разбито исходное множество L , равна $f(h) = q(d\tau/dq) - \tau$. Данная функция выпуклая и может быть аппроксимирована параболой:

$$f(h) = D_0 - \frac{(h - h_0)^2}{2(2h_0 - D_0)}, \quad (8)$$

где $D_0 = \lambda + \tau(q)/(q-1)$; $h_0 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q=0}$ [12, 16]. На рис. 3 изображена полученная функция мультифрактального спектра. Подобный колоколообразный спектр характерен для большинства турбулентных мультифрактальных полей [17].

Покажем, что полученное поле будет перемежаемым. Как известно, показатели структурной функции ζ_q , для мультифрактального турбулентного поля рассчитываются следующим образом: $\zeta_q(q) = \inf_h (qh - f(h))$ [11]. Изменением весовых коэффициентов p_1, p_2, p_3, p_4 можно варьировать ширину спектра $f(h)$. Варьируя его ширину, мы можем изменять степень отклонения $\zeta_q(q)$ от прямой $\zeta_q(q) \sim q$, и тем самым регулировать уровень перемежаемости моделируемого электромагнитного поля.

1.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как уже было сказано выше, вейвлеты распределены равномерно по всей вычислительной области. При этом если вейвлеты будут двигаться и выходить за пределы области, то возникнут проблемы, поскольку вместо вейвлетов, вышедших за границу области, необходимо так ввести новые, чтобы в моделируемом поле не образовывалось резких скачков и неоднородностей, не свойственных турбулентному полю в хвосте магнитосферы. Один из способов сделать это – моделировать поле на небольшом участке за границей вычислительной области. Вклад вейвлета в поле при увеличении расстояния от его центра r падает довольно быстро и на расстоянии $r \sim 2.5a$, где a – параметр, характеризующий размер вейвлета, его вклад в поле упадет в 10^{10} раз и будет несущественным, сравнимым с компьютерной ошибкой.

Координаты вейвлетов, в зависимости от времени задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{i,j}(t) &= f \bmod (x_{ij}^0 + vt, L + 2borderLen), \\ y_{i,j}(t) &= f \bmod (y_{ij}^0 + vt, L + 2borderLen), \end{aligned}$$

где v – скорость вейвлета; x_{ij}^0 и y_{ij}^0 – начальные координаты конкретного вейвлета; L – линейный размер вычислительной области; $borderLen$ – размер области, за пределами вычислительной области, в которой мы продолжаем моделировать вейвлеты, $f \bmod(A, B)$ – функция, возвращающая остаток от деления A на B . Таким образом, получается, что вейвлеты, которые выходят за пределы моделируемой области, сразу появляются с противоположной стороны.

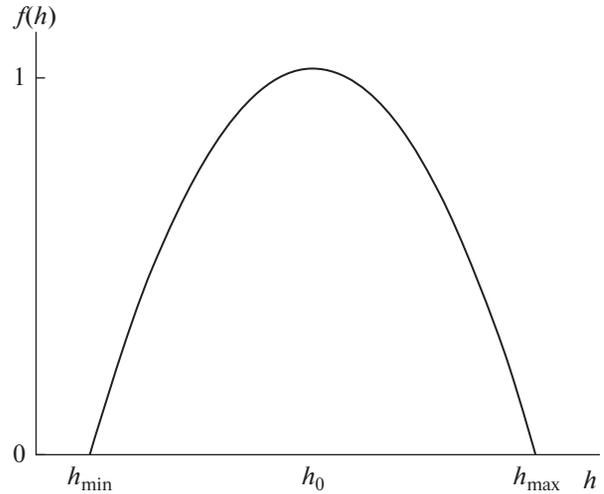


Рис. 3. Функция мультифрактального спектра.

2.1. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Положим далее, что $l = (1/2)^{1/4}$, т.е. размер вейвлетов будет уменьшаться вдвое через каждые четыре класса вейвлетов, а значит, и разбиение каждой квадратной ячейки на более мелкие будет также происходить через каждые четыре класса вейвлетов. Также положим $\beta = 0$, таким образом, каждый класс вейвлетов занимает одинаковую площадь в пространстве; $D = 2$ – размерность пространства, в котором мы моделируем электромагнитное поле; $\lambda = 1/3$ – показательный коэффициент для соотношений между амплитудами соседних классов вейвлетов.

При таком выборе параметров энергетический спектр полученного магнитного поля $W(k) \sim k^{-5/3}$ [15], что соответствует колмогоровскому спектру, наблюдаемому в турбулентном поле в хвосте магнитосферы Земли [18]. Размер вычислительной области $l = 2 \cdot 10^5$ км. Магнитное поле задается как суперпозиция вейвлетов:

$$B_z(x, y, t) = \sum_i \sum_j r_{i,j} c_0 l^{i/3} \exp\left(-\frac{\pi d r_{i,j}^2(t)}{2a_0^2 l^i}\right). \quad (9)$$

Скорость всех вейвлетов одинакова и равна 500 км/с. Электрическое поле можно найти при помощи уравнений Максвелла. Число вейвлетов для самого большого класса $N = 14 \times 14$, их размеры для самого большого класса $a_0 = 2.5 \cdot 10^4$ км. Количество классов вейвлетов $n = 24$. При этом их размеры для самого маленького класса вейвлетов будут равны $a_n = a_0 l^N = a_0 (1/2)^{(1/4) \times 24} = 0.4 \cdot 10^3$ км. Таким образом, частоты моделируемого поля соответствуют частотам турбулентного поля в хвосте магнитосферы, где наблюдаются колмогоровский спектр [19–21].

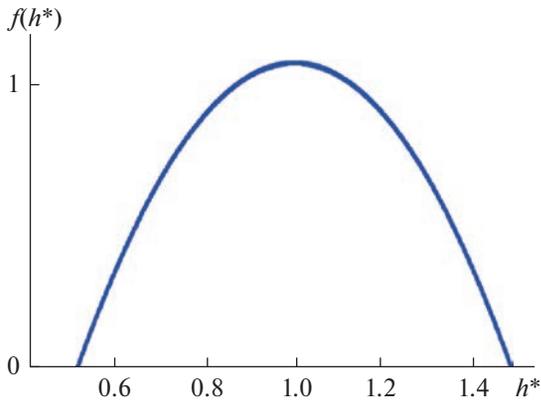


Рис. 4. Функция мультифрактального спектра для полученного мультифрактального поля.

Для моделирования мультифрактального поля выберем следующие значения весовых коэффициентов: $p_1 = 1.4$, $p_2 = 0.48$, $p_3 = 1.6$, $p_4 = 0.72$. При таком выборе значения показателей Гельдера, центрированные на единицу, лежат в пределах от 0.45 до 1.4, что близко к наблюдаемым значениям ширины мультифрактального спектра для многих регистрируемых сигналов [22]. На рис. 4 показана функция мультифрактального спектра для выбранных весовых коэффициентов. На рис. 5а приведено сечение магнитного поля плоскостью XU для монофрактального поля, где $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$, и для мультифрактального поля рис. 5б с указанными ранее весовыми коэффициентами. Видно, что полученное нами мультифрактальное

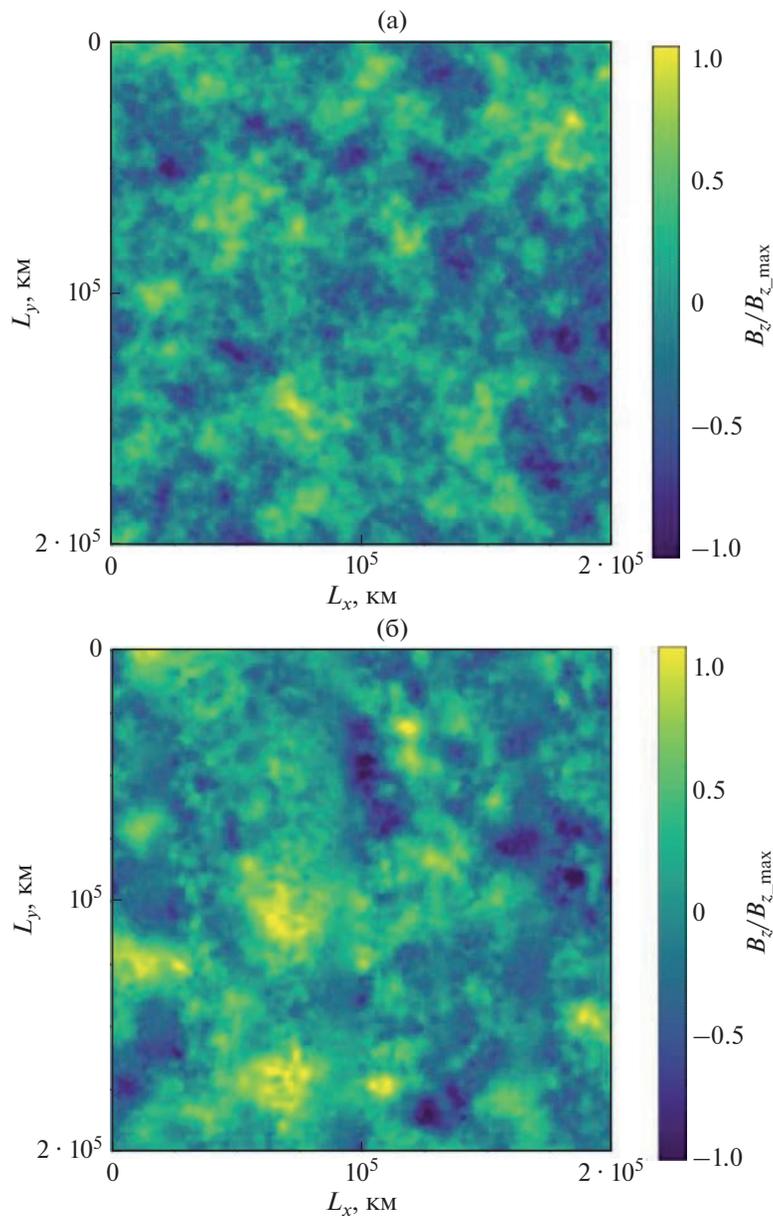


Рис. 5. Компонента B_z магнитного поля в сечении плоскостью XU : а – для монофрактального поля; б – для мультифрактального поля.

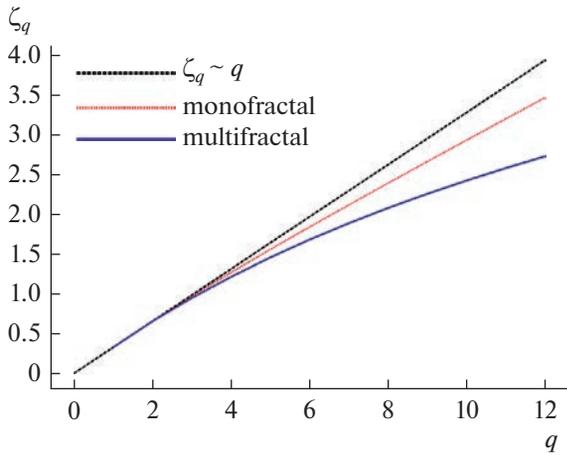


Рис. 6. Зависимость степенного показателя ζ_q от степени q , для мультифрактального и монофрактального случаев.

поле менее однородно и склонно к образованию локализованных структур.

Вычислим структурную функцию для магнитного поля для различных степенных показателей q :

$$S_q = \sum_n \sum_m (|B_z(x_n + \delta, y_m) - B_z(x_n, y_m)| + |B_z(x_n, y_m + \delta) - B_z(x_n, y_m)|)^q$$

и найдем показатели структурной функции ζ_q из выражения $S_q \sim \delta^{\zeta_q}$. На рис. 6 изображена зависимость $\zeta_q(q)$ для монофрактального и мультифрактального случаев. Видно, что для мультифрактального случая отклонение зависимости показателя структурной функции ζ_q от степени q довольно сильно отличается от линейной, из чего можно сделать вывод, что полученное мультифрактальное поле является перемежаемым.

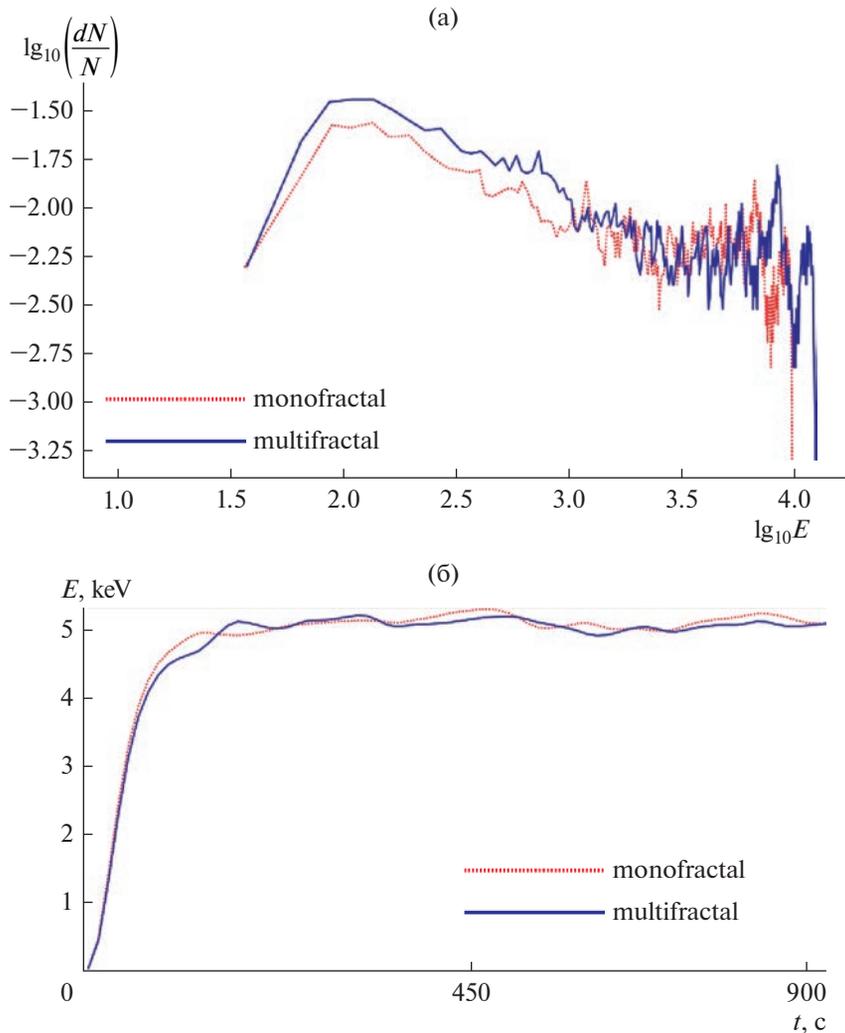


Рис. 7. Распределение частиц по энергиям после 15 мин ускорения в турбулентном поле (а), зависимости средней энергии ансамбля частиц от времени (б).

2.2. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ

На первом этапе исследования модели рассмотрим нерелятивистское ускорение частиц в полученном турбулентном поле для мультифрактального и монофрактального режимов и проведем сравнение между ними. Для этого введем 2000 протонов в вычислительную область со случайными начальными координатами. Начальные скорости частиц распределены по Гауссу с пиковым значением скорости 120 км/с. На границе используются периодические граничные условия. На рис. 7а изображено распределение частиц по энергиям после 15 мин ускорения в турбулентном поле. Видно, что для мультифрактального случая отдельные частицы набрали чуть большую энергию по сравнению с монофрактальной турбулентностью. Мы также рассчитали изменение средней энергии введенных частиц. На рис. 7б показан график средней энергии ансамбля частиц в зависимости от времени. Как видно, средняя энергия частиц для мультифрактального и монофрактального случаев практически одинакова. Подобный характер ускорения можно объяснить следующим образом: когда пространственные или временные масштабы турбулентности близки к гирорадиусам частиц $r_g \sim v_{particle}/B_z$, эти частицы будут ускоряться. Как только частицы набирают столько энергии, что их гирорадиус начинает превышать размер системы или самую длинную существующую длину волны, ускорение становится неэффективным, и процесс почти насыщается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена двумерная модель турбулентного мультифрактального электромагнитного поля. Модель позволяет гибко управлять наклоном энергетического спектра, а также шириной мультифрактального спектра и уровнем перемежаемости, которая в турбулентных полях достаточно тесно связана с мультифрактальностью. Тем самым разработанная модель применима ко многим типам турбулентных полей, в частности к турбулентному полю в хвосте магнитосферы Земли и других планет. При помощи данной модели исследовано ускорение частиц в мультифрактальном и монофрактальном турбулентном поле. Показано, что при ускорении в мультифрактальном турбулентном поле максимальная энергия, которую способны набрать отдельные частицы немного больше, по сравнению с монофрактальной турбулентностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lui A.* Multifractal and intermittent nature of substorm-associated magnetic turbulence in the magnetotail // *J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*.

2001. V. 63. Iss. 13. P. 1379–1385. [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00239-X](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00239-X)
2. *Wawrzaszek A., Echim M., Bruno R.* Multifractal Analysis of Heliospheric Magnetic Field Fluctuations Observed by Ulysses // *The Astrophysical J.* 2019. V. 876. № 2. P. 153–166. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1750>
3. *Chang T.* Self-organized criticality, multi-fractal spectra, sporadic localized reconnections and intermittent turbulence in the magnetotail // *Physics of Plasmas*. 1999. № 6. P. 4137–4145. <https://doi.org/10.1063/1.873678>
4. *Zelenyi L.M., Bykov A.M., Uvarov Y.A. et al.* Intermittency of magnetic field turbulence: Astrophysical applications of in-situ observations // *J. Plasma Physics*. 2015. V. 81. № 4. Art. № 395810401. <https://doi.org/10.1017/S0022377815000409>
5. *Zelenyi L.M., Rybalko S.D., Artemyev A.V. et al.* Charged particle acceleration by intermittent electromagnetic turbulence // *Geophysical Research Letters*. 2011. V. 38. Iss. 17. Art. № L17110. <https://doi.org/10.1029/2011GL048983>
6. *Левашов Н.Н., Попов В.Ю., Малова Х.В., Зеленый Л.М.* Моделирование турбулентности с перемежаемостью в космической плазме // *Космич. исслед.* 2022. Т. 60. № 1. С. 11–16. <https://doi.org/10.31857/S0023420622010083>. (*Cosmic Research*. 2022. V. 60. № 1. С. 9–14).
7. *Левашов Н.Н., Попов В.Ю., Малова Х.В., Зеленый Л.М.* Исследование процессов ускорения заряженных частиц в турбулентной космической плазме с перемежаемостью // *Ученые записки физ. фак. Московского ун-та*. 2021. № 4. № 2140802.
8. *Perri S., Lepreti F., Carbone V. et al.* Position and velocity space diffusion of test particles in stochastic electromagnetic fields // *Europhysics Letters*. 2007. V. 78. № 4. Art. № 40003. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/78/40003>
9. *Perri S., Greco A., Zimbardo G.* Stochastic and direct acceleration mechanisms in the Earth's magnetotail // *Geophysical Research Letters*. 2009. V. 36. Iss. 4. Art. № L04103. <https://doi.org/10.1029/2008GL036619>
10. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сигналов на основе вейвлет-преобразования // *Изв. Саратовского ун-та*. 2007. Т. 7. № 1. С. 3–25.
11. *Frisch U.* Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 296 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139170666>
12. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 128 с.
13. *Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В.* Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. М.: НИИЯФ МГУ, 2004. 82 с.
14. *Dudok de Wit T., Krasnosel'skikh V.V.* Non-Gaussian statistics in space plasma turbulence: Fractal properties and pitfalls // *Nonlinear Processes Geophysics*. 1996. V. 3. № 6. P. 262–273. <https://doi.org/10.5194/npg-3-262-1996>

15. *Keith D.W., Pettit C.L., Vechev S.N.* Wavelet-based cascade model for intermittent structure in terrestrial environments // *Data Analysis, Statistics and Probability*. 2013. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.5649>
16. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
17. *Будаев В.П., Савин С.П., Зелёный Л.М.* Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // *УФН*. 2011. Т. 181. № 9. С. 905–952. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201109a.0905>
18. *Kozak L.V., Petrenko B.A., Lui A.* Turbulent processes in the Earth's magnetotail: spectral and statistical research // *Annales Geophysicae*. 2018. V. 36. № 5. P. 1303–1318. <https://doi.org/10.5194/angeo-36-1303-2018>
19. *Zelenyi L.M., Artemyev A.V., Malova H.V. et al.* Particle transport and acceleration in a time-varying electromagnetic field with a multi-scale structure // *Physics Letters*. 2008. V. 372. Iss. 41. P. 6284–6287. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.08.035>
20. *Artemyev A.V., Zelenyi L.M., Malova H.V. et al.* Acceleration and transport of ions in turbulent current sheets: formation of non-Maxwellian energy distribution // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2009. V. 16. P. 631–639. <https://doi.org/10.5194/npg-16-631-2009>
21. *Chiaravalloti F., Milovanov A.V., Zimbardo G.* Self-similar transport processes in a two-dimensional realization of multiscale magnetic field turbulence // *Physica Scripta*. 2006. V. 122. P. 79–88. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2006/T122/012>
22. *Зелёный Л.М., Милованов А.В.* Фрактальная топология и странная кинетика. От теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *УФН*. 2004. Т. 174. № 8. С. 809–852.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗЕЛЕННОЙ КОРОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ С ВЫСОТОЙ ПО ВНЕЗАТМЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА 24-й ЦИКЛ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

© 2023 г. С. А. Гусева¹, *, А. Д. Шрамко¹, **

¹Горная астрономическая станция Главной (Пулковской) астрономической обсерватории РАН,
Кисловодск, Россия

*svgual@yandex.ru

**a_shramko@inbox.ru

Поступила в редакцию 02.06.2022 г.

После доработки 09.10.2022 г.

Принята к публикации 18.10.2022 г.

Представлены результаты исследований эмиссионной корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ (Fe XIV) за период 24-го цикла солнечной активности. Спектральные данные получены на внезатменном коронографе системы Лио, установленном на Горной астрономической станции ГАО РАН (близ г. Кисловодска). В результате обработки внезатменных наблюдений создана база данных трех видов ежедневных корональных карт с распределением по высоте h от $1R_{\odot}$ до $1.38R_{\odot}$ (R_{\odot} – радиус Солнца) значений интенсивности зеленой линии (I_{5303}). Выявлены и отождествлены некоторые неоднородности вдоль линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$, которые связаны с конфигурацией магнитных полей в короне Солнца над активными областями. Проведены вычисления протяженности зеленой линии от позиционного угла Солнца. Показано, что временное распределение протяженности линии в полярных областях имеет два максимума, которые совпадают с моментами переполусовки полярного магнитного поля на Солнце. Максимальные значения средней протяженности корональной линии по всему лимбу приходятся на 2012–2014 гг. Для разных фаз (для ветви подъема, в период максимума, для ветви спада и минимума солнечной активности) данного солнечного цикла и для разных областей активности Солнца построены, и исследованы зависимости изменения с высотой значений I_{5303} . Представлены уравнения регрессии этих аппроксимирующих кривых. Изменение I_{5303} с высотой для полярных областей с наибольшей вероятностью определяется логарифмической функцией, а аппроксимирующие кривые тренда для остальных широтных зон определяются степенной функцией третьего порядка.

DOI: 10.31857/S0023420622600180, EDN: LTHWMK

ВВЕДЕНИЕ

Природа дала нам возможность наблюдать впечатляющее астрономическое событие – солнечную корону, вспыхивающую во время полного затмения Солнца. Научное изучение спектра короны Солнца началось с солнечного затмения 7.VIII.1869, когда на фоне непрерывного спектра Солнца впервые наблюдали ярко-зеленую линию. Первые научные исследования солнечной короны проводились во время редких полных затмений Солнца. Впервые наблюдали солнечную корону вне затмения в 1931 г. на обсерватории Пик-дю-Миди (Сер, Франция, фр. Observatoire du Pic du Midi), благодаря изобретению французским астрономом Б. Лио (фр. Bernard Lyot) коронографа [1]. Шведский астроном Б. Эдлен (англ. V. Edlen) в 1941 г. доказал принадлежность зеленой запрещенной спектральной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$, которая была открыта еще в 1869 г., к высокоиони-

зованному атому железа – Fe XIV [2], где потенциал ионизации 355 эВ. После этих открытий возникла всемирная сеть корональных станций, начались непрерывные внезатменные наблюдения короны Солнца: в Швейцарии – Arosa [3], во Франции – Pic du Midi (Пик-дю-Миди), в Японии – Norikura (Норикура), в США (штат Нью-Мексико) – Sacramento Peak (Сакраменто Пик), в СССР – ГАС ГАО РАН [4], в Чехословакии – Lomnický štít (Ломницки Штит) и др. Линия $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ одна из самых ярких и отражает активность на всех фазах солнечного цикла, и поэтому ее наблюдения были включены во все наблюдательные программы международных корональных станций. Во время полных солнечных затмений доступна исследованию корона на расстояниях до $1R_{\odot}$, а при внезатменных наблюдениях эмиссионные линии наблюдаются только до $0.5R_{\odot}$ от лимба Солнца [5].

Изучение спектральной короны актуально и сегодня. Наблюдение и изучение солнечной короны – важнейшая задача в солнечной физике. Понимание процессов, происходящих в короне Солнца, позволит более глубоко уяснить закономерности солнечной активности (СА) и ее влияние на космическую погоду как глобально в солнечной системе, так и в частности в околоземном пространстве. Исследование интенсивности запыленных корональных линий представляет собой большой интерес для изучения физических процессов, происходящих в атмосфере Солнца. Данные эмиссионных корональных линий позволяют судить о распределении температуры и турбулентной скорости в короне Солнца, отображают эволюцию магнитных полей в активных областях (АО) Солнца.

Особенности распределения I_{5303} вдоль лимба на определенной высоте (h) от фотосферы Солнца (например, обсерватория Ломницки Штит (*англ.* Lomnický Stit) проводила измерения I_{5303} на $h = 60''$, Сакраменто Пик – $h = 141.8''$, Пик-дю-Миди, Норикура и ГАС ГАО РАН – $h = 40''$) за большие периоды времени рассматривались во многих работах [6–11]. Вычисления I_{5303} на других высотах вдоль линии не входили в мировую сеть солнечных обсерваторий и космических аппаратов “Служба Солнца”, поэтому таких исследований гораздо меньше, и они проводились за небольшие периоды времени [12–15].

Ранее мы исследовали радиальное распределение корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ на ветви спада 23-го цикла СА [16]. За 2005 г. были получены кривые изменения интенсивности I_{5303} зеленой линии на разной высоте от лимба Солнца для полярных и низкоширотных областей. Мы продолжили нашу работу для целого солнечного цикла.

Цель данной работы – это исследование изменения параметров корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ с высотой от $1R_{\odot}$ до $1.38R_{\odot}$ на большом наблюдательном материале.

НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

Для данной работы использовались спектральные данные зеленой корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ (Fe XIV) полученные за период 24-го цикла СА на внеатомном коронографе системы Лио ГАС ГАО РАН [17]. В рассматриваемом периоде (2009–2019) в среднем за год корональных наблюдений было 180 дней. Для фотографирования спектра короны использовались цифровые камеры Canon EOS 450D и 600D. В результате обработки, в соответствии с международной программой по “Службе Солнца”, вычисляют интенсивности корональных линий (I_{5303} и I_{6374}) в абсолютных единицах (абс. ед.), выраженные в миллионных долях энергии, заключающейся в

интервале шириной 1 \AA непрерывного спектра центра Солнца. I_{5303} и I_{6374} измеряются на расстоянии $40''$ ($0.04R_{\odot}$) от фотосферы Солнца [18]. На рис. 1 представлен временной ряд 24-го цикла спектральной короны I_{5303} (абс. ед.) по этим данным. Спектральные наблюдения Горной астрономической станции ГАО РАН позволяют делать измерения I_{5303} вдоль линии до высоты $6'$ ($1.38 R_{\odot}$).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОРОНАЛЬНЫХ СПЕКТРОВ

За 11 лет было 1939 дней наблюдений зеленой спектральной короны, а общее количество полученных корональных кадров составило 139608. Анализ цифровых фотографий этой корональной линии показал, что она имеет неоднородную структуру вдоль линии (рис. 2а). Над группами пятен наблюдается неравномерное падение яркости зеленой линии с высотой, вдоль линии присутствуют яркие сгустки, уплотнения, которые, по-видимому, связаны с корональными петлями [19]. Когда группа пятен находится на лимбе, то по геометрическим характеристикам корональных линий можно рассчитать расстояние между петлями и их высоту в картинной плоскости. Качество расчета конфигурации петель магнитных полей зависит от плоскости наблюдения и размера активной области, так как спектральные кадры делаются через 5° по позиционному углу, согласно международной программе “Служба Солнца” [17, 18]. Когда активная область уходит от лимба Солнца, интенсивность линии уменьшается с высотой без явных скачков.

Неоднородности вдоль линии могут наблюдаться и в другом случае. При исследовании корональных спектров выявлено более сотни дней наблюдений, на спектрах которых одновременно видно корональную линию $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ и линии излучения триплета Mg ($\lambda = 5167 \text{ \AA}$, $\lambda = 5173 \text{ \AA}$, $\lambda = 5184 \text{ \AA}$), Fe ($\lambda = 5169 \text{ \AA}$, $\lambda = 5270 \text{ \AA}$), а также другие, близлежащие хромосферные линии. М.Н. Гневышев такое явление назвал импульсами корональной активности. Эти импульсы корональной активности сопровождаются эруптивными протуберанцами такими, как “серджи” (*англ.* surges), в которых наблюдаются быстрые изменения и интенсивное движение, большинство из них связаны со вспышками. Для примера мы показали такой спектр излучения в нескольких линиях за 30.X.2014 (рис. 2б). За более ранний период такое импульсное свечение в линиях было представлено в работе [20], где за 22-й цикл СА зафиксировано четыре таких наблюдения. Такие транзитные события на Солнце редкие и трудноуловимые, они характеризуются широким диапазоном пространственных и временных масштабов – от эруптивных протуберанцев до масштабов коро-

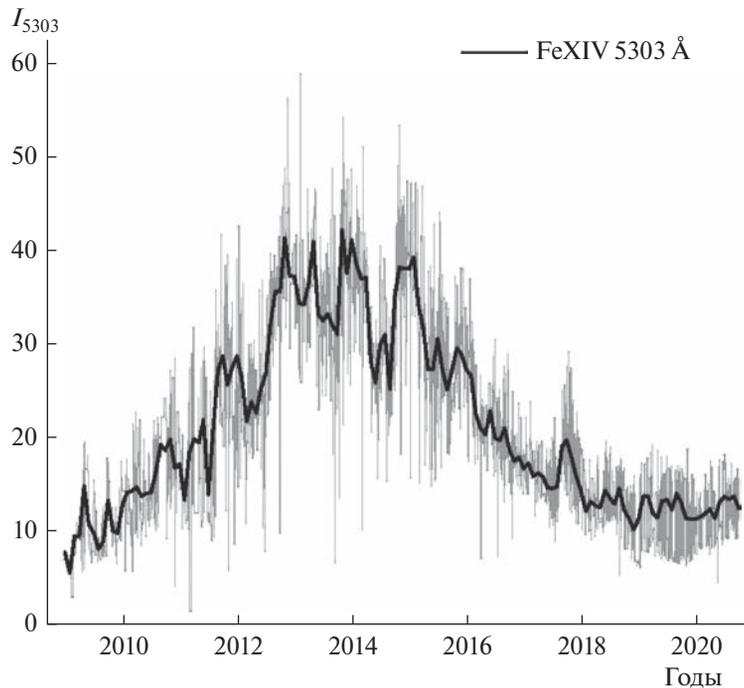


Рис. 1. Изменение интенсивности корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ (Fe XIV) за 24-й цикл СА. Тонкой линией показаны ежедневные значения I_{5303} (абс. ед.) усредненные по всему лимбу, а толстой линией — их среднемесячные значения.

нальных выбросов масс (*англ.* Coronal Mass Ejection – CME).

МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ЗЕЛЕННОЙ КОРОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Каталоги ежедневных корональных карт

С помощью пакета IDL6.1 (*англ.* Interactive Data Language) была создана компьютерная программа для обработки спектральных корональных данных зеленой линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$. Вычисления I_{5303} проводились от лимба, начиная с высоты $h = 2''$ и с шагом $2.5''$ вдоль линии до конца кадра. Высота спектра на кадрах в зависимости от позиционного угла меняется от $320''$ до $400''$. Кадры с наименьшей высотой спектра охватывают лишь полярные широты Солнца. В результате обработки внезатменных корональных наблюдений создана база данных трех видов ежедневных корональных карт с I_{5303} на высоте от $1R_{\odot}$ до $1.32R_{\odot}$:

- карты с нанесенными изолиниями значений I_{5303} на разной высоте от лимба Солнца (рис. 3а);
- карты изменения с высотой значений I_{5303} в виде градации серого (рис. 3б);
- 3D-карты интенсивности спектральной короны на определенной высоте.

На этих картах нанесены значения I_{5303} за все дни, которые наблюдались в данном полуобороте Солнца. Для сравнения представлены 3D-карты

интенсивности спектральной короны на высоте $h = 40''$ (рис. 3в).

На рис. 3 показаны примеры ежедневных корональных карт на ветви подъема, в максимуме и на ветви спада 24-го цикла СА, где подобраны дни с разной конфигурацией спектральной короны. Для наглядности разные виды карт показаны для одного и того же дня. На данных картах видно, что в большинстве случаев до $h = 30''$ изолинии I_{5303} могут менять свою конфигурацию, а далее постепенно спадать с высотой. Неоднородности вдоль линии хорошо видны на картах рис. 3б. Также наблюдается смещение максимума изолиний I_{5303} (рис. 3а), например, на карте за 5.I.2010 в NE (*англ.* Northeast) квадранте, до $h (80-90)''$ максимум ближе к экватору, а на высоте $h > 90''$ — он на 10° отклоняется к полюсу. В зависимости от фазы цикла СА, как и для корональных лучей в белом свете [21], полученных на широкоугольном коронографе LASCO C2 (*англ.* Large Angle and Spectrometric Coronagraph) космической обсерватории SOHO (*англ.* Solar and Heliospheric Observatory), так и максимумы интенсивности спектральной линии 5303 \AA на разных высотах находящиеся над АО (“зеленые лучи”) имеют систематическое отклонение в направлении более высоких или более низких широт. Таким образом, построенные карты наглядно показывают отклонение зеленого луча с высотой от радиального направления, но больших углов наклона до $25^{\circ}-35^{\circ}$, как для корональных лучей [21] из-за небольшой

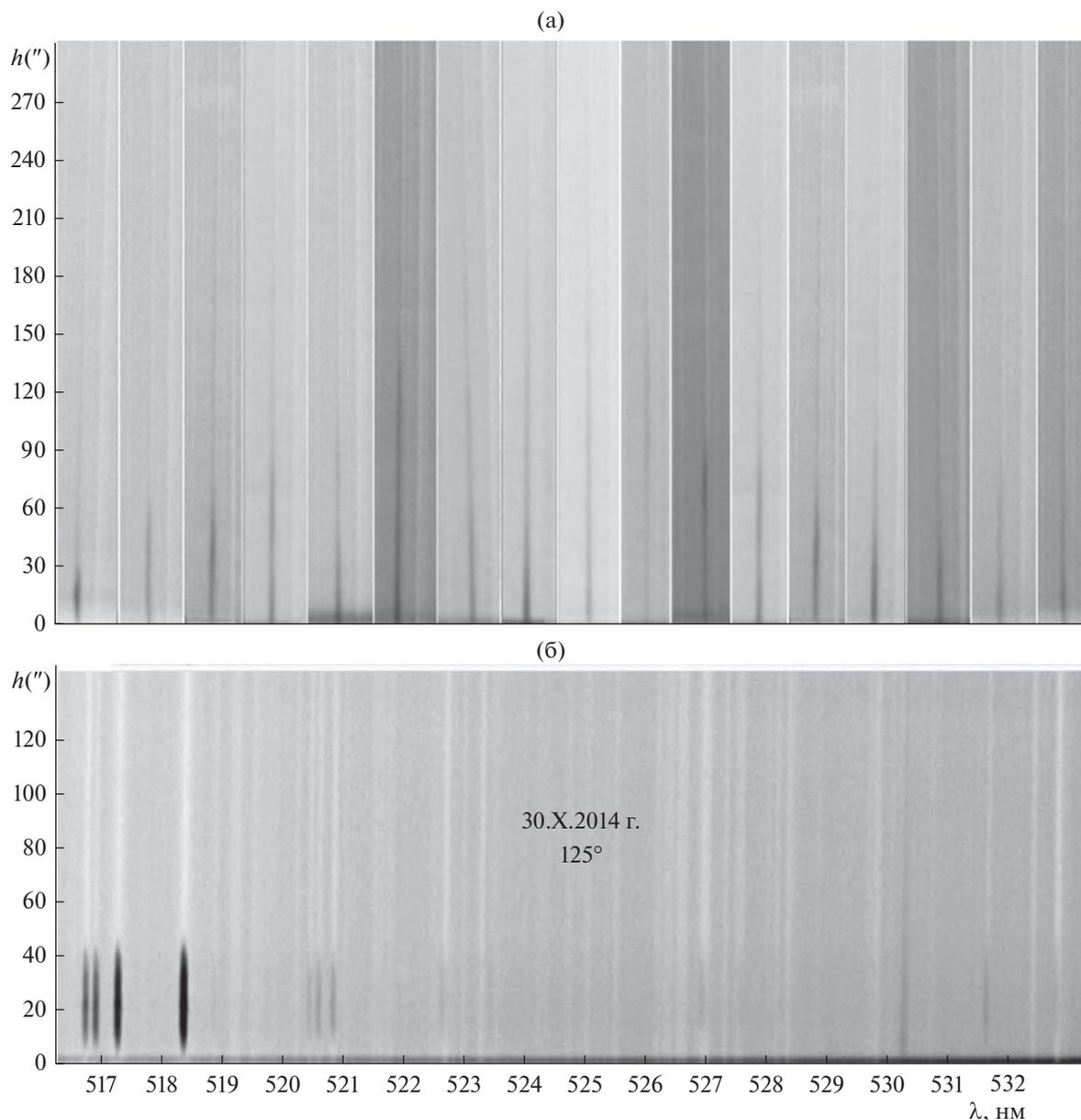


Рис. 2. Примеры неоднородной корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ по высоте над активными областями около лимба (а). Пример спектра с излучением в корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$, триплета Mg, и в других линиях, где 125° – позиционный угол (б).

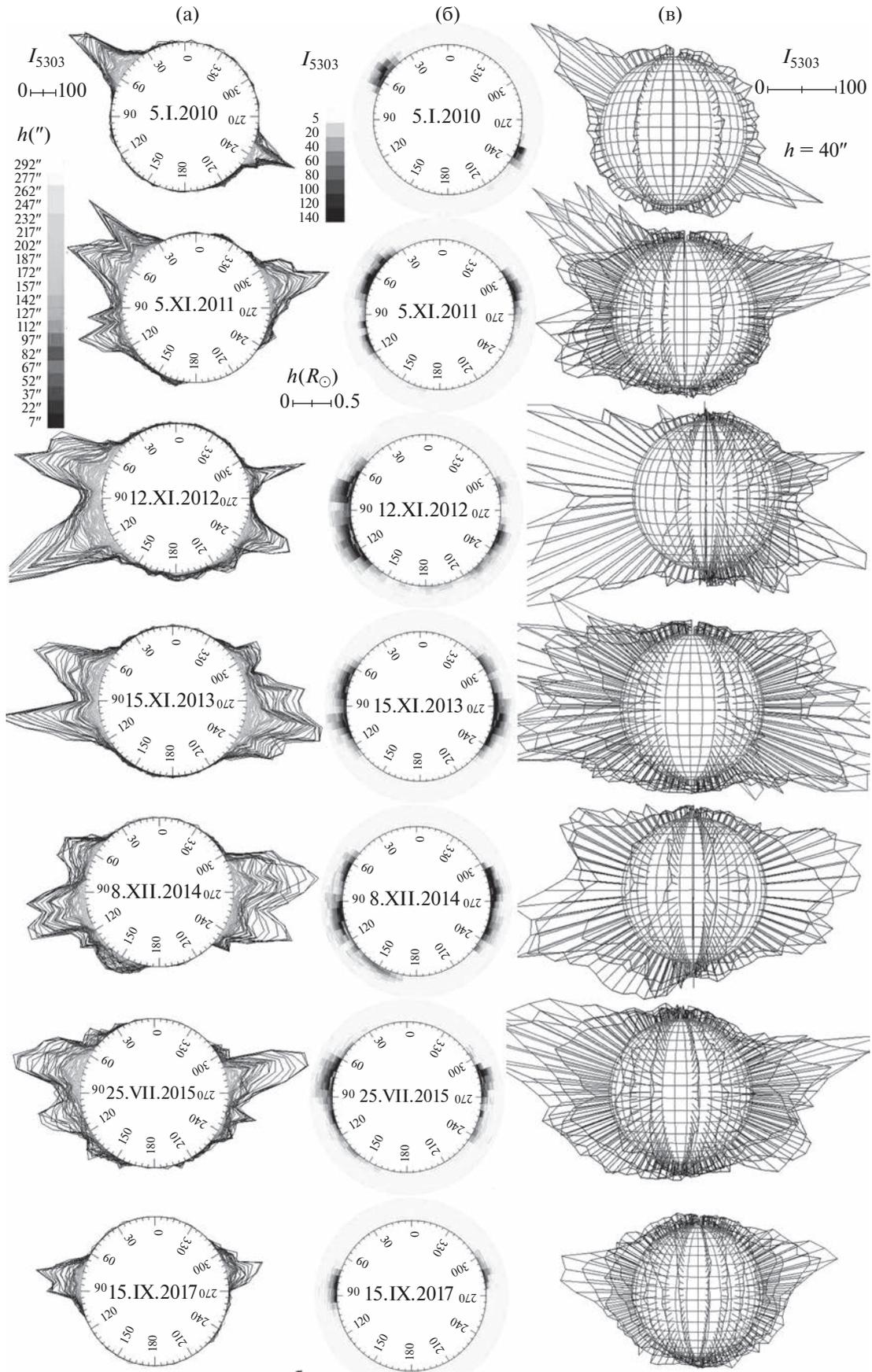
высоты не наблюдаются. Внеатмосферный коронограф LASCO C2 дает изображение лучей, простирающихся до $6R_\odot$, но не позволяет наблюдать корону ниже $2.1R_\odot$, поскольку построен по схеме коронографа с внешним затмевающим диском, экранирующим области внутренней короны.

Анализ каталогов ежедневных корональных карт показал, что в начале 24-го цикла СА значения I_{5303} преобладают в северном полушарии Солнца, имеет место асимметрия появления АО в пользу северного полушария. Такая же асимметрия наблюдается в площадях солнечных пятен (<http://solarstation.ru>).

Протяженность корональной линии

За 24-й цикл СА рассматривались изменения протяженности корональной линии от позиционного угла Солнца. Протяженность линии вычислялась с учетом ореола за данный день. Максимальные значения средней протяженности корональной линии по всему лимбу, приходится на период 2012–2014 гг. (рис. 4а).

Для учета уровня активности различных широтных областей солнечный лимб был разбит на следующие зоны: 1-я – экваториальная: $\pm 30^\circ$ от экватора; 2-я – средние широты: от $\pm 30^\circ$ до $\pm 60^\circ$; 3-я – полярная: 30° от полюсов Солнца. Над ак-



← **Рис. 3.** Примеры ежедневных корональных карт спектральной короны с I_{5303} на высоте $h(1-1.32)R_{\odot}$: (а) карты с нанесенными изолиниями значений I_{5303} на разной высоте от лимба Солнца; (б) карты изменения значений I_{5303} с высотой в виде градиации серого (в инверсии); (в) 3D-карты интенсивности I_{5303} спектральной короны на определенной высоте, где $h = 40$ угл. с.

тивными областями (1-я зона) корональная линия достигает своей максимальной высоты в 2013–2014 гг. Над средними широтами (2-я зона) высота линии имеет максимум в 2012–2013 гг. (рис. 4б). Причем в полярных областях (3-я зона) излучение корональной линии достигает своей максимальной высоты с конца 2012 г. до начала 2013 г., а второй максимум – в конце 2014 г. (рис. 4б). Такое распределение протяженности линии вероятно связано с переполусовкой магнитного поля Солнца. По синоптическим H α -картам, которые были построены М.П. Фатьяновым на ГАС ГАО РАН (<http://solarstation.ru>), переполусовка в северном полушарии Солнца началась в ноябре 2012 г., а закончилась в июне 2013 г., и до сентября 2014 г. на обоих полюсах Солнца была положительная полярность. С сентября до декабря 2014 г. процесс переполусовки происходил на южном полюсе Солнца. Для более детального рассмотрения этих моментов была построена широтно-временная диаграмма протяженности корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ (рис. 4в). В полярной зоне корональная активность длится порядка одного года. Также мы хорошо видим на рис. 4б, что в начале цикла корональная активность средних широт достаточно высокая, а в конце цикла сильно преобладает корональная активность экваториальных широт. Это согласуется с законом Шпёра для пятен.

Изменение интенсивности линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ с высотой

Для учета вариации I_{5303} от уровня активности данной области отдельно для экваториальных, средних и полярных широт Солнца были построены графики изменения интенсивности линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ с высотой. Усредненные за весь 24-й цикл эти кривые показаны на рис. 5а. Для более детального исследования проводилось вычисление I_{5303} с высотой отдельно для фазы подъема, максимума, фазы спада, и для минимума СА (рис. 5б).

Аппроксимирующие кривые для экваториальной зоны имеют следующий вид:

$$I_{24\text{цикл}} = 57.9 - 0.7h + h^2 - 4 \cdot 10^{-6}h^3; \quad \sigma = 31, \quad (1)$$

$$I_{\uparrow} = 59.3 - 0.7h + h^2 - 4.3 \cdot 10^{-6}h^3; \quad \sigma = 17.9, \quad (2)$$

$$I_{\text{max}} = 73.4 - 0.9h + h^2 - 5.8 \cdot 10^{-6}h^3; \quad \sigma = 13.4, \quad (3)$$

$$I_{\downarrow} = 51 - 0.6h + h^2 - 3.7 \cdot 10^{-6}h^3; \quad \sigma = 21.3, \quad (4)$$

$$I_{\text{min}} = 20.2 - 0.2h + h^2 - 9.7 \cdot 10^{-7}h^3; \quad \sigma = 8.5, \quad (5)$$

где $I_{24\text{цикл}}$ – интенсивность линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$, усредненная за весь 24-й цикл СА; I_{\uparrow} – значения интенсивности I_{5303} на ветви подъема СА; I_{max} – интенсивность линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ в максимуме СА; I_{\downarrow} – значения интенсивности I_{5303} на ветви спада СА; I_{min} – I_{5303} в минимуме СА; σ – среднеквадратическое отклонение.

Самые высокие значения I_{5303} по всем высотам h и более крутой спад имеет кривая I_{max} , где при рассмотрении по годам наибольшие значения I_{5303} были в 2012 г. по сравнению с 2013 и 2014 гг. Ветвь подъема цикла активности (I_{\uparrow}) имеет больший градиент по высоте, чем ветвь спада (I_{\downarrow}), кривая I_{\uparrow} выше, чем I_{\downarrow} . А кривая I_{min} имеет интересную особенность на больших высотах. На $h = 120''$ она пересекает кривую I_{\downarrow} и далее идет выше этой кривой, а с высоты $h = 180''$ кривая I_{min} даже совпадает с кривой I_{\uparrow} .

Аппроксимирующая кривая для средних широт:

$$I_{24\text{цикл}} = 15.4 - 0.1h + h^2 - 5.2 \cdot 10^{-7}h^3, \quad \sigma = 3.9, \quad (6)$$

$$I_{\uparrow} = 16.6 - 0.1h + h^2 - 3.2 \cdot 10^{-7}h^3, \quad \sigma = 5.5, \quad (7)$$

$$I_{\text{max}} = 19 - 0.2h + h^2 - 9.6 \cdot 10^{-7}h^3, \quad \sigma = 5.7, \quad (8)$$

$$I_{\downarrow} = 11.5 - 0.1h + h^2 - 3.9 \cdot 10^{-7}h^3, \quad \sigma = 6.5, \quad (9)$$

$$I_{\text{min}} = 4.9 - 0.1h + h^2 - 1.2 \cdot 10^{-7}h^3, \quad \sigma = 5.3. \quad (10)$$

Для кривых 2-й зоны наблюдается максимальное значение I_{5303} на малых высотах на фазе максимума (I_{max}) и с небольшой разницей на фазе подъема (I_{\uparrow}). Кривая для фазы подъема СА (I_{\uparrow}) до $h = 150''$ имеет большие значения I_{5303} и крутой спад, по сравнению с кривой на фазе спада СА (I_{\downarrow}).

Для полярных зон:

$$I_{24\text{цикл}} = 6.7 + 1.5\lg(h) - 1.3\lg^2(h), \quad \sigma = 2.3, \quad (11)$$

$$I_{\uparrow} = 6.5 + 1.5\lg(h) - 1.2\lg^2(h), \quad \sigma = 5.5, \quad (12)$$

$$I_{\text{max}} = 7.3 + 2\lg(h) - 1.6\lg^2(h), \quad \sigma = 2.6, \quad (13)$$

$$I_{\downarrow} = 4.5 + 1.1\lg(h) - 0.7\lg^2(h), \quad \sigma = 6.5, \quad (14)$$

$$I_{\text{min}} = 3.9 - 0.5\lg(h) + 0.1\lg^2(h), \quad \sigma = 3.4. \quad (15)$$

Для полярных зон наибольшие значения интенсивности на высотах до $h = 150''$ наблюдаются на кривой I_{max} , где при рассмотрении по годам имеет место два *одинаковых* максимума: в 2012 и в

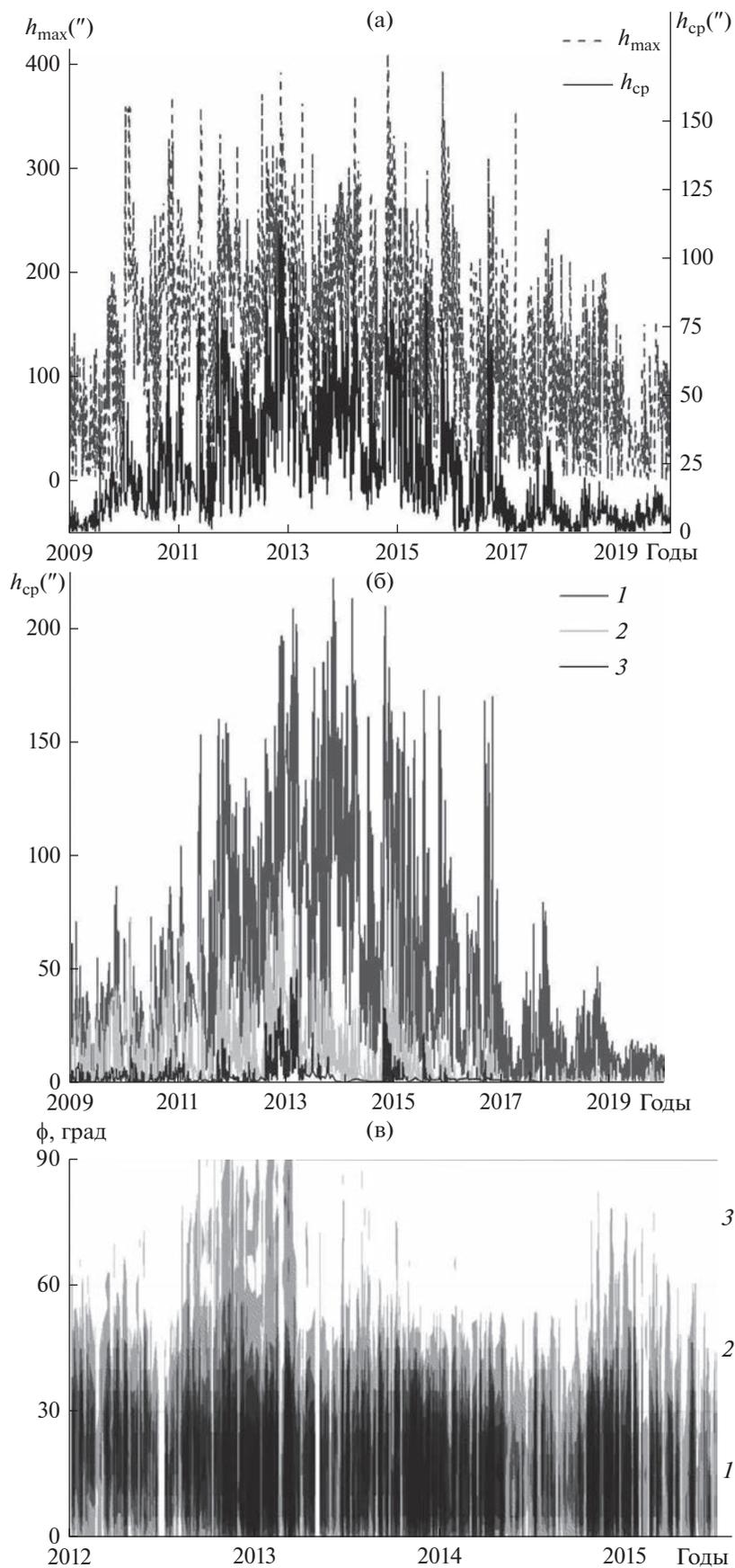


Рис. 4. Временное распределение значения протяженности корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ (Fe XIV) за 24-й цикл СА: (а) изменение максимальной h_{max} и средней h_{cp} протяженности зеленой линии по всему лимбу; (б) изменение средней протяженности h_{cp} линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ над определенными широтными зонами СА: 1 – экваториальные широты; 2 – средние; 3 – полярные; (в) широтно-временное распределение максимальной h_{max} протяженности зеленой линии для фазы максимума СА.

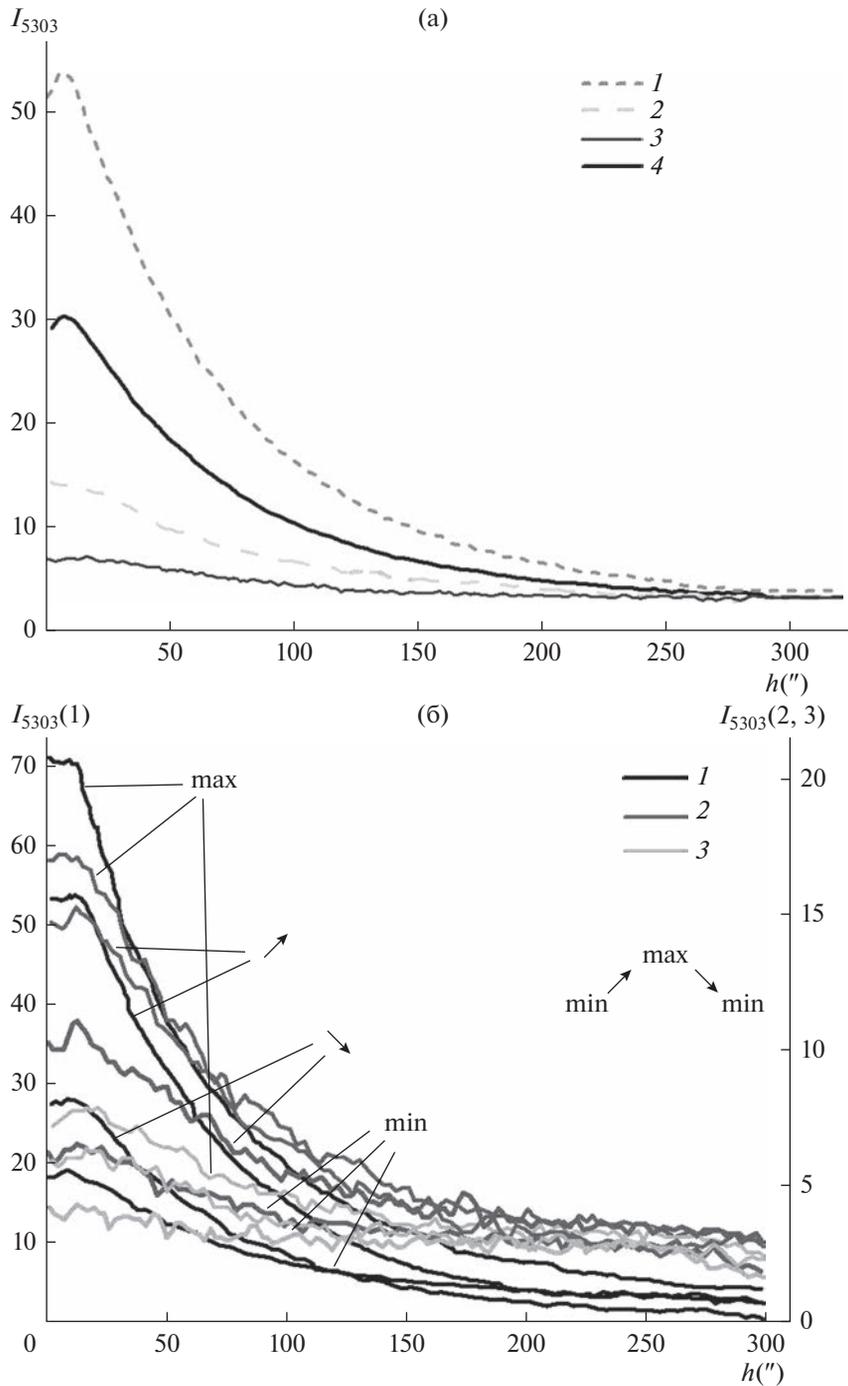


Рис. 5. Изменение с высотой интенсивности линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ за 24-й цикл СА: (а) распределение I_{5303} с высотой для разных широт солнечного лимба: 1 – экваториальных; 2 – средних; 3 – полярных; 4 – все широты; (б) изменения I_{5303} с высотой h отдельно для ветви подъема (\uparrow) и спада (\downarrow) СА, максимальной (max) и минимальной (min) фазы СА.

2014 г. Кривые на фазе подъема (I_{\uparrow}) и спада СА (I_{\downarrow}) мало чем отличаются, и они почти совпадают с кривой I_{\min} , построенной для средних широт в минимуме СА.

Уравнение средней аппроксимирующей кривой за весь 24-й цикл СА по всему лимбу следующее:

$$I_{\text{всe}} = 32 - 0.3h + h^2 - 2 \cdot 10^{-6} h^3, \quad \sigma = 15. \quad (16)$$

Усредненные значения I_{5303} по всем широтам в 24-м цикле, если рассматривать по годам, имеют максимум в 2014 г.

На ветви спада 23-го цикла СА [16], исследование интенсивности линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ от фотосферы Солнца показало, что для спокойных (при отсутствии в этом районе лимба АО ближе, чем на 30°) и полярных областей, средняя кривая зависимости I_{5303} от высоты имеет крутой спад до $h \approx 30''$. И для активных областей лимба спад интенсивности длится до $h \approx 120'' - 170''$. В 24-м цикле СА имеет место крутой спад кривой I_{5303} до высоты $h \approx 110''$ для активных областей (1-я зона) на ветви спада и в минимуме СА, а для фазы максимума и на ветви подъема изменение интенсивности I_{5303} с наибольшей скоростью длится до $h \approx 130'' - 180''$. Для средних широт (2-я зона) продолжительность резкого спада кривой меньше. Этот спад кривой для всех фаз цикла, кроме минимума СА, длится до $h \approx 110'' - 120''$. Минимальная фаза 2-й зоны и полярные области (3-я зона) на всех фазах имеют спад кривых I_{5303} до $h \approx 70'' - 80''$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Зеленая корональная линия — наиболее яркая из всех 35 линий корональной эмиссии в видимой части электромагнитного спектра. Переход корональных наблюдений ГАС ГАО с фотопленочной регистрации на цифровую дал возможность применять цифровые методы обработки изображений, что позволило более подробно изучать структуру корональных спектральных линий [17]. В результате исследования эмиссионной корональной линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ (Fe XIV) за период 24-го цикла СА показано, что эта линия по высоте имеет неоднородную структуру, которая сильно зависит от присутствия близлежащих АО. Построенные каталоги трех видов ежедневных корональных карт хорошо дополняют друг друга для изучения распределения I_{5303} с высотой, они наглядно показывают смещение максимумов I_{5303} по позиционному углу от высоты (угол наклона зеленого луча). Мы планируем, более детально исследовать наклон зеленого луча в следующей работе. Проведенный анализ протяженности корональной линии на разных фазах СА показал, что в 1-й зоне максимальная протяженность линии (h_{\max}) во всех фазах цикла превышает протяженность ли-

нии во 2-й и 3-й зонах. Временное распределение средней протяженности линии (h_{cp}) в полярных областях имеет хорошо выраженные два максимума, совпадающих с моментами переполусовки на Солнце.

Представлено полученное распределение интенсивности линии $\lambda = 5303 \text{ \AA}$ с высотой для разных фаз СА. Аппроксимирующими кривыми для экваториальных и средних широт определены полиномиальные уравнения 3-го порядка, а для полярных областей определено логарифмическое уравнение. Кривые изменения I_{5303} с высотой для экваториальной зоны на всех фазах 24-го цикла СА, имеют наибольший градиент по высоте по сравнению с кривыми для других зон. Кривые изменения I_{5303} с высотой для полярных широт имеют в 2012 и в 2014 г. наибольшие значения I_{5303} на высотах до $h = 150''$. Это показывает, что процесс переполусовки магнитного поля Солнца отразился и на кривых изменения I_{5303} с высотой также как и на распределении протяженности линии h_{cp} .

В экваториальных широтах наблюдается эффект превышения значений интенсивности на фазе минимума СА (I_{\min}) над значениями интенсивности на фазе спада (I_{\downarrow}) на больших высотах ($h > 120''$), а на высотах $h > 180''$ эта кривая интенсивности (I_{\min}) имеет одинаковые значения I_{5303} с кривой на фазе подъема СА (I_{\uparrow}). Это говорит о том, что экваториальная корона в минимуме активности на высоте больше 100 000 км излучает ярче, чем на ветви спада СА и ее излучение совпадает с яркостью короны на ветви подъема СА.

Ранее авторами были получены логарифмические функции высотных трендов I_{5303} для разных широтных зон на фазе спада 23-го цикла СА [11, 16]. За тот небольшой временной период почти не встречались корональные линии с явными неоднородностями. Мы считаем полезным, продолжить данную работу для исследования красной корональной линии $\lambda = 6374 \text{ \AA}$ (Fe X) за цикл СА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyot B.* La couronne solaire étudiée en dehors des éclipses // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1930. V. 191. P. 834–837.
2. *Edlén B.* Die Deutung der Emissionslinien in Spektrum der Sonnenkorona // Z. Astrophysik. 1943. V. 22. P. 30–64.
3. *Waldmeier M.* Die Sonnenkorona. Basel: Birkhäuser, 1957. V. 2. 353 p.
4. *Гневышев М.Н., Гневышева Р.С.* Начало регулярных наблюдений солнечной короны вне затмений // Бюл. Комиссии по исследованию Солнца. 1954. № 10. С. 60–62.
5. *Шкловский И.С.* Физика солнечной короны. 2-е изд. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 516 с.

6. *Fisher R.R.* λ 5303 Fe XIV density models of the inner solar corona // *Solar Physics*. 1978. V. 57. № 1. P. 119–128.
7. *Okamoto T.* Latitude distribution of the green corona for the period 1951–1985 // *Tokyo Astronomical Observatory Reprints*. 1986. V. 20. № 4. P. 547–551.
8. *Sakurai T., Irie M., Imai H., Miyazaki H., Sykora J.* Emission line intensities of the solar corona and sky brightness observed at Norikura: 1950–1997 // *Publ. National Astronomical Observatory, Japan*. 1999. V. 5. P. 121–137.
9. *Rybanský M., Minarovič M., Rušin V.* Evolution of the green corona in 1996–2002 // *Solar Physics*. 2003. V. 217. P. 109–118.
10. *Rušin V., Rybanský M., Minarovič M.* The 530.3 nm corona irradiance from 1939 to 2001 // *Advances in Space Research*. 2004. V. 34. P. 251–257.
11. *Гусева С.А.* Долговременные циклические изменения структуры солнечной короны: дис. канд. физ.-мат. наук. СПб., 2013. 156 с.
12. *Rušin V.* The Height Gradient of the Coronal Emission Line 5303 Å // *Bull. Astronomical Inst. Czech Academy of Sciences*. 1973. V. 24. № 3. P. 121–129.
13. *Тягун Н.Ф.* Исследования взаимосвязи полуширина – интенсивность для линий излучения короны Fe XIV 5303, Fe XVI 6374 и Ca XV 8500 в зависимости от высоты // *Солнечно-земная физика*. 2004. № 6. С. 104–105.
14. *Singh J., Ichimoto K., Imai H., Sakurai T., Takeda A.* Spectroscopic Studies of the solar corona I. Spatial variations in line parameters of green and red coronal lines // *Publ. Astronomical Soc. Japan*. 1999. V. 51. P. 269–273.
15. *Singh J., Sakurai T., Ichimoto K., Suematsa Y., Takeda A.* Spectroscopic Studies of the Solar Corona II. Properties of Green and Red Emission Lines in Open and Closed Coronal Structure // *Publ. Astronomical Soc., Japan*. 2002. V. 54. P. 793–806.
16. *Гусева С.А., Шрамко А.Д.* Исследование корональной линии 5303 Å на разной высоте от лимба Солнца в период спада солнечной активности // *Тр. конф. “Физическая природа солнечной активности и прогнозирование ее геофизических проявлений”*. ГАО РАН. СПб., 2007. С. 131–134.
17. *Guseva S.A.* Continuous 60-Year Observations of the Spectral Solar Corona at the Mountain Astronomical Station of Pulkovo Observatory // *Geomagnetism and Aeronomy*. 2019. V. 59. № 7. P. 864–869.
18. *Гневышев М.Н.* Техника и методика корональных наблюдений // *Бюл. Международный геофизический год*. 1959. С. 36–38.
19. *Costa A., Stenborg G.* Characterization of Intensity Variations Along Fe XIV Coronal Loops — A Case Study // *Solar Physics*. 2004. V. 222. № 2. P. 229–245.
20. *Ким Гун-дер.* Импульсы корональной активности // *Тр. конф. “Солнечная активность как фактор космической погоды”*. ГАО РАН. СПб., 2005. С. 403–404.
21. *Гусева С.А., Фатьянов М.П., Шрамко А.Д.* Конфигурация гелиосферного слоя по синоптическим картам корональных лучей за 23-й, 24-й циклы солнечной активности // *Геомagnetизм и аэрoнoмия*. 2015. Т. 55. № 3. С. 302–309.

УДК 629.782

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В НАПРАВЛЕНИИ СОЛНЦА МАГНИТНЫМИ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОРГАНАМИ НА СОЛНЕЧНО-СИНХРОННОЙ ОРБИТЕ

© 2023 г. Д. С. Ролдугин*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**rolduginds@gmail.com*

Поступила в редакцию 31.10.2022 г.

После доработки 02.11.2022 г.

Принята к публикации 02.11.2022 г.

Рассматривается угловое движение космического аппарата с магнитными катушками на солнечно-синхронной орбите. Аппарат поддерживает ориентацию одной из осей в направлении Солнца для заряда аккумуляторных батарей, вращаясь вокруг этого направления. Приводится интуитивный алгоритм стабилизации, задающий требуемое направление и скорость вращения. С помощью эволюционных уравнений исследуется устойчивость как требуемого режима движения, так и других нежелательных положений равновесия. Получены условия на моменты инерции аппарата и параметры управления, при которых достигается требуемая ориентация. Приведены примеры численного моделирования движения, демонстрирующие стабилизацию в различных положениях с учетом действия возмущающих факторов.

DOI: 10.31857/S002342062260026X, EDN: LUEJWA

ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение стабилизации на Солнце – важный служебный режим, предусмотренный на многих искусственных спутниках Земли. Требования по точности ориентации при этом невелики. Достаточно поддерживать ориентацию нормали к поверхности солнечных панелей относительно Солнца с точностью в несколько градусов. Для этого можно использовать магнитные исполнительные элементы, обычно обеспечивающие заметно худшую точность ориентации по сравнению с маховиками. Это позволяет снизить энергопотребление системы, сохранить ресурс маховиков, избежать их насыщения. Серьезным недостатком магнитной системы ориентации считается невозможность создания механического момента вдоль вектора геомагнитной индукции. Хотя в целом система управляема [1, 2], практическое преодоление этого ограничения представляет определенную проблему. Однако в случае одноосной ориентации на Солнце можно использовать стабилизацию вращением [3], примененную совместно с магнитной системой с запуска аппарата Tiros-II в 1960 г. В этом случае собственные динамические свойства аппарата дополняют возможности системы управления.

Так, три основных режима управления – поддержание скорости вращения, гашение нутационных колебаний и переориентация оси симмет-

рии [4, 5] – требуют создания моментов, доступных магнитной системе ориентации. При этом управление зачастую задают независимо по разным каналам [6–8]. Не требующий разделения режимов управления подход основан на вычислении разницы текущего и требуемого кинетических моментов аппарата [9], что может быть использовано при отказе части магнитных катушек [10]. Отдельно стоит отметить специальные алгоритмы, учитывающие специфику получаемой с датчиков ориентации информации. Так, в работе [11] показаны солнечного датчика и магнитометра используются для стабилизации аппарата на солнечно-синхронной орбите. В публикации [12] используется разница токосъема солнечных панелей, а в статье [13] – направление на Солнце. Его производная, вычисляемая по двум последовательным измерениям, используется в алгоритме Sdot [14–16]. В работе [17] применяется модификация алгоритма Vdot.

В настоящей работе исследуется алгоритм стабилизации, примененный на аппарате Prisma и основанный на текущих данных о требуемом направлении и скорости аппарата [18]. Для исследования динамики аппарата используются эволюционные переменные [19, 20]. Для усредненных уравнений движения исследуется устойчивость возникающих положений равновесия на солнечно-синхронной орбите. При этом оказалось, что

стабилизация оси минимального момента инерции возможна только при правильном выборе параметров управления и заданном соотношении между максимальным и минимальным моментами инерции. Показано, что существуют также устойчивые косые положения, когда аппарат вращается вокруг направления на Солнце вместо того, чтобы совпадать с ним. Для выявленных режимов движения приведены примеры численного моделирования динамики аппарата с учетом различных возмущающих факторов.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение осесимметричного аппарата в режиме поддержания скорости вращения и стабилизации оси вращения в требуемом направлении, пренебрегая действием на него каких-либо моментов помимо управляющего.

Эволюционные уравнения

Введем систему координат $OZ_1Z_2Z_3$, связанную с центром Земли, третья ось которой направлена на Солнце. Эту систему будем считать инерциальной на интервалах времени в несколько часов. Относительно этой системы описывается

ориентация КА при проведении исследования его движения. Поскольку интерес представляет лишь одноосная ориентация аппарата, направление первой и второй осей этой системы может быть выбрано произвольным образом.

Для описания динамики спутника используем эволюционные переменные. Эти переменные разделяются на две группы. Первая группа включает модуль вектора кинетического момента L и углы его ориентации относительно системы $OZ\rho$ и σ . С вектором кинетического момента связана система координат $OL_1L_2L_3$, третья ось которой совпадает с направлением вектора момента. Чтобы определить две другие оси, произведем поворот вокруг оси OZ_3 на угол σ , а затем поворот вокруг оси OL_2 на угол ρ (рис. 1).

Вторая группа переменных описывает ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$, заданной главными центральными осями аппарата, относительно OL . Для этого используются углы Эйлера ψ, θ, φ (последовательность поворотов 3-1-3).

Матрицы перехода между системами координат $OL \rightarrow OZ$ и $Ox \rightarrow OL$ имеют, соответственно, вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma - \sin \sigma \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma \cos \sigma \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Будем считать спутник осесимметричным с тензором инерции $J = \text{diag}(A, A, C)$. Эволюционные уравнения движения имеют вид [21]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{3L}, & \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{L} M_{1L}, & \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L} (M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \\ &+ \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \text{ctg } \theta - \\ &- \frac{1}{L} M_{2L} (\text{ctg } \rho + \sin \psi \text{ctg } \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где компоненты момента M_{kL} записаны в системе OL . Отметим, что в этих уравнениях особый интерес представляют три переменные. Это величина вектора кинетического момента, показывающая скорость закрутки аппарата, угол между век-

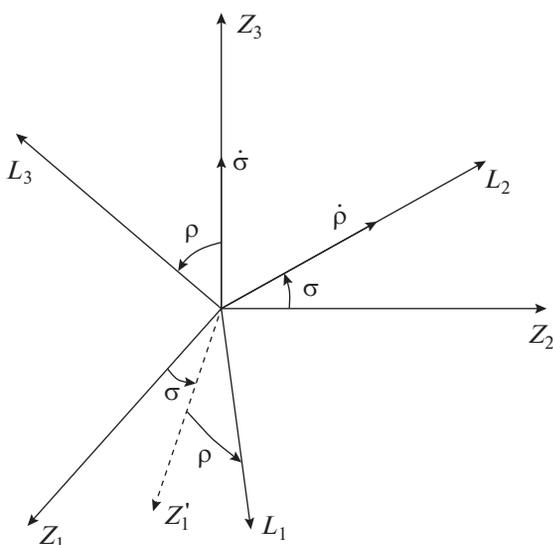


Рис. 1. Ориентация кинетического момента в инерциальном пространстве.

тором кинетического момента (ось OL_3) и направлением на Солнце (ось OZ_3) ρ , и угол между вектором кинетического момента и третьей осью спутника θ (будем считать, что именно вокруг этой оси необходимо поддерживать вращение). Чтобы уяснить поведение этих трех переменных, применим метод усреднения, исключив из уравнений несущественные для описания основной динамики аппарата переменные [22].

Построение алгоритма одноосной стабилизации

Механический момент со стороны системы управления, действующий на аппарат, имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

что требует задания конкретных выражений для управляющего дипольного момента \mathbf{m} и вектора геомагнитной индукции \mathbf{B} .

Рассмотрим управление, предложенное в публикации [18] для миссии Prisma. Управление основано на рассогласовании угловой скорости аппарата с требуемым значением. Заданная величина скорости складывается из двух компонент,

$$\boldsymbol{\omega}_{ref} = \omega_0 (\mu \mathbf{S}_x + \mathbf{e}_3).$$

Первое слагаемое означает, что вектор угловой скорости должен совпадать с направлением на Солнце \mathbf{S}_x , заданным в связанной системе координат. Второе слагаемое указывает, что вращение при этом также должно происходить вокруг оси \mathbf{e}_3 , которую считаем перпендикулярной плоскости солнечных панелей.

Коэффициент μ – параметр управления, показывающий относительный вклад обеих компонент. Параметр ω_0 задает целевую скорость закрутки. Отметим, что можно ожидать выход скорости на значение $\omega_0 (1 + \mu)$. Магнитное управление, которое обеспечивает заданный режим движения, имеет вид

$$\mathbf{m} = k (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{ref}) \times \mathbf{b}, \quad (4)$$

где \mathbf{b} – единичный (или близкий к единичному) вектор геомагнитной индукции, k – коэффициент усиления.

Моделирование геомагнитного поля

Введем систему $OX_1X_2X_3$, первая ось которой направлена в восходящий узел орбиты, третья ось совпадает с осью вращения Земли. Считая орбиту круговой и пренебрегая прецессией оси вращения Земли, эту систему будем считать инерциальной. В этой системе будет проводиться численное моделирование движения аппарата с учетом различных возмущающих факторов.

Далее вводим систему $OY_1Y_2Y_3$, полученную поворотом на угол Θ вокруг оси OX_2 . Этот угол задается выражением

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i})},$$

где i – наклонение орбиты. Эта система координат используется для записи вектора геомагнитной индукции в осредненной модели. А именно, предполагая, что вектор индукции вращается равномерно по круговому конусу с углом полураствора Θ , в системе $OY_1Y_2Y_3$ имеем компактное выражение [23, 24]

$$\mathbf{B}_Y = B_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $u = \omega_{orb} t + u(0)$ – аргумент широты, ω_{orb} – постоянная орбитальная скорость, B_0 – величина вектора индукции. Эта простая модель поля будет применена при анализе динамики аппарата, тогда как в численном моделировании будет использоваться модель IGRF [25].

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ

Для применения метода усреднения необходимо разделить переменные на быстрые и медленные. В отсутствие управляющего момента кинетический момент в инерциальном пространстве сохраняется, что выражается в постоянстве его величины и углов ориентации в уравнениях (3). Также остается постоянным угол нутации θ . Аппарат совершает регулярную прецессию, в которой быстро изменяются углы φ и ψ . При воздействии на систему управления постоянные в невозмущенном движении переменные начинают изменяться. Если величина управления достаточно мала, эти переменные можно считать медленными и уравнения (3) можно усреднить по быстрым переменным и времени.

Для формализации понятия медленного изменения уравнения движения должны быть записаны в безразмерном виде. Для этого в качестве меры времени в уравнениях (3) используем период обращения по орбите и, соответственно, вместо времени – аргумент широты, кинетический момент относим к его невозмущенному значению $L = L_0 I$, и вводим малый параметр, характеризующий величину изменения кинетического момента за один виток по орбите $\varepsilon = k B_0 / \omega_0 C$. Безразмерные уравнения запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon l \bar{M}_{3L}, & \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \bar{M}_{1L}, & \frac{d\sigma}{du} &= \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \bar{M}_{2L}, \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\bar{M}_{1L} \cos \psi + \bar{M}_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_2 l - \varepsilon \bar{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \\ &\quad - \varepsilon \bar{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon (\bar{M}_{2L} \cos \psi - \bar{M}_{1L} \sin \psi), \end{aligned} \right\} (6)$$

где $\eta_1 = \frac{L_0}{\omega_{\text{орб}}} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$, $\eta_2 = \frac{L_0}{A\omega_{\text{орб}}}$, компоненты безразмерного момента обозначены \bar{M}_{kL} . Параметры η_k являются большими по сравнению с ε .

Для усреднения необходимо записать непосредственное выражение для управляющего момента, которое задается в связанной с аппаратом системе координат

$$\mathbf{M}_x = k B_0 \{ (\boldsymbol{\omega}_x - \mu \omega_0 \mathbf{S}_x - \omega_0 \mathbf{e}_3) \times \mathbf{b}_x \} \times \mathbf{b}_x.$$

Безразмерный вектор индукции вводится как $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{b}$, и в случае использования осредненной модели поля вектор \mathbf{b} является единичным. В уравнениях (6) необходимо задать момент в системе координат, связанной с вектором кинетического момента. Используя матрицы направляющих косинусов (1) и (2), момент запишем как

$$\mathbf{M}_L = \frac{k B_0 L}{C} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{C}{L} \boldsymbol{\omega}_L - \mu \frac{L_{\text{ref}}}{L} \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \right. \\ &\left. - \frac{L_{\text{ref}}}{L} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_Z \} \times \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_Z, \end{aligned} \right\} (7)$$

где $L_{\text{ref}} = C \omega_0$. Для того чтобы определить выражение угловой скорости в системе OL , будем опираться на ее связь с кинетическим моментом $\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{L}_x$. Кинетический момент при этом задан в системе OL , $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)$. Записывая его в системе Ox с помощью матрицы \mathbf{A} , и далее переходя в систему OL , имеем

$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{L}{C} \begin{pmatrix} \frac{C}{A} a_{11} a_{31} + \frac{C}{A} a_{12} a_{32} + a_{13} a_{33} \\ \frac{C}{A} a_{21} a_{31} + \frac{C}{A} a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} \\ \frac{C}{A} a_{31} a_{31} + \frac{C}{A} a_{32} a_{32} + a_{33} a_{33} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Далее для определения эволюционных уравнений, показывающих изменение вектора кинети-

ческого момента и угла нутации, необходимо выражения (7), (8) усреднить по быстрым переменным φ , ψ , u . Вид выражения для вектора индукции \mathbf{b}_Z пока не определен. Этот вектор задан в системе OY , тогда как движение вектора кинетического момента описывается в системе OZ . Не проводя пока усреднение по времени и обозначая b_k компоненты единичного вектора геомагнитной индукции в системе OL , получаем после усреднения по ψ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon l} j &= -(b_1^2 + b_2^2) \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \\ &+ \mu \frac{L_{\text{ref}}}{l} \{ b_1 b_3 \sin \rho + (b_1^2 + b_2^2) \cos \rho \} + \\ &\quad + \frac{L_{\text{ref}}}{l} (b_1^2 + b_2^2) \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} &= b_1 b_3 \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) - \\ &- \mu \frac{L_{\text{ref}}}{l} \{ b_1 b_3 \cos \rho + (b_2^2 + b_3^2) \sin \rho \} - \\ &\quad - \frac{L_{\text{ref}}}{l} b_1 b_3 \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \sin \rho \dot{\sigma} &= b_2 b_3 \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \\ &+ \mu \frac{L_{\text{ref}}}{l} \{ b_1 b_2 \sin \rho - b_2 b_3 \cos \rho \} - \frac{L_{\text{ref}}}{l} b_2 b_3 \cos \theta. \end{aligned} \right\} (9)$$

Отметим, что для усредненных переменных сохраняются обозначения, $l_{\text{ref}} = L_{\text{ref}}/L_0$ задает целевую величину вектора кинетического момента.

Движение на орбите, близкой к солнечно-синхронной

Дальнейший анализ требует конкретных выражений для компонент вектора индукции. Для этого нужно определить матрицу перехода от системы OY к системе OZ . Напомним, что в системе OZ третья ось направлена на Солнце, тогда как две другие выбираются произвольным образом. Система OY , напротив, задана единственным образом. Чтобы получить переход между OY и OZ , зададим ориентацию вектора направления на Солнце в системе OY . Для этого можно применить тот же подход, как и при определении ориентации вектора кинетического момента в инерциальном пространстве и введении системы OL . А именно, задавая ориентацию направления на Солнце в системе OY углами ρ^S и σ^S так, как показано на рис. 1, матрицу перехода \mathbf{Q}^S между системами OY и OZ зададим так же, как в выражении (1).

При определении компонент вектора индукции в системе OZ возникают громоздкие выражения $b_{kZ} = \sum_{n=1}^3 q_{nk}^S b_{nY}$, содержащие постоянные элементы матрицы \mathbf{Q}^S , выраженные через постоянные углы ρ^S, σ^S . Чтобы получить компактные выражения, пригодные для анализа, сделаем следующее упрощение. Рассмотрим движение аппарата на солнечно-синхронной орбите, практически перпендикулярной направлению на Солнце. Чтобы дополнительно упростить выражения, будем считать, что в выражении (5) $\sin \Theta \approx 1, \cos \Theta \approx 0$, так как $\Theta \approx i \approx 90^\circ$. Основным упрощающим фактором становится практически полное совпадение систем OY и OZ . Действительно, третья ось системы OZ направлена на Солнце, что для рассматриваемой конфигурации орбиты означает, что эта ось практически перпендикулярна к плоскости орбиты. Вместе с тем, третья ось OY перпендикулярна плоскости орбиты, если $\Theta = i = 90^\circ$, и практически перпендикулярна для солнечно-синхронной орбиты.

Окончательно, считая, что системы OY и OZ совпадают (пренебрегая различием в направлении осей на уровне десятка градусов), и принимая $\sin \Theta \approx 1, \cos \Theta \approx 0$, для вектора индукции в системе OZ получаем простое выражение $\mathbf{b}_Z = (\sin 2u, \cos 2u, 0)$. Тогда, используя переход $\mathbf{b}_L = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_Z$ и усредняя уравнения (9) по аргументу широты, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon l} \dot{i} &= -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \rho) \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) + \\ &+ \mu \frac{l_{ref}}{l} \cos \rho + \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} (1 + \cos^2 \rho) \cos \theta, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \rho \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right) - \right. \\ &\left. - \mu \frac{l_{ref}}{l} - \frac{1}{2} \frac{l_{ref}}{l} \cos \rho \cos \theta \right\} \sin \rho, \\ \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A-C}{A} \cos \theta - \frac{l_{ref}}{l} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \rho \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} (10)$$

Исследование устойчивости

Иследуем устойчивость полученной системы, чтобы выяснить, как ориентируется аппарат. Из второго и третьего уравнений видно, что положениям равновесия соответствуют $\sin \rho = 0$ и $\sin \theta = 0$, а также некоторые “косые” конфигурации. В зависимости от того, чему равны углы ρ и θ , аппарат выходит на разную скорость закрутки согласно первому уравнению в уравнениях (10). Рассмотрим все положения равновесия отдельно.

1. $\theta = 0, \rho = 0$ (требуемый режим движения).

Это положение равновесия представляет основной интерес, так как именно оно соответствует выходу аппарата на требуемый режим вращения вокруг направления на Солнце. Из первого уравнения (10) в положении равновесия имеем

$$\frac{1}{\varepsilon l} \dot{i} = -1 + \mu \frac{l_{ref}}{l} + \frac{l_{ref}}{l},$$

откуда заключаем, что аппарат выходит на вращение с кинетическим моментом $l = (1 + \mu)l_{ref}$. Далее, используя эту величину и линеаризуя два оставшихся уравнения в выражении (10), получаем:

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu} \rho, \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{C-A}{A} + \frac{1}{\mu+1} \right) \theta.$$

Отметим, что при $C > A$ положение равновесия устойчиво. То есть, если требуется поддерживать вращение вокруг оси максимального момента инерции, заданный режим движения устойчив. Если же необходимо поддерживать вращение вокруг оси с меньшим моментом инерции, такое движение будет устойчиво, если

$$\frac{C-A}{A} + \frac{1}{\mu+1} > 0,$$

откуда:

$$C > A \frac{\mu}{1 + \mu}. \quad (11)$$

Так, при $\mu = 1$ имеем $C > 1/2 A$, при $\mu = 2$ имеем $C > 2/3 A$. При необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции его отличие от максимального не должно быть слишком велико. Причем чем меньше параметр μ , тем большее отличие является допустимым.

2. Рассмотрим положение равновесия $\theta = 0, \rho = \pi$ (ось \mathbf{e}_3 развернута от Солнца).

Из первого уравнения (10) получаем, что аппарат выходит на вращение со скоростью $l = (1 - \mu)l_{ref}$, откуда заключаем, что положение равновесия может быть устойчиво только при $\mu < 1$. Линеаризуя второе уравнение (10), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{1 - \mu} \rho,$$

что с учетом $\mu < 1$ указывает на неустойчивость равновесия.

3. Положение равновесия $\theta = \pi, \rho = 0$ (также ось \mathbf{e}_3 развернута от Солнца).

Аппарат выходит на вращение $l = (-1 + \mu)l_{ref}$, откуда $\mu > 1$. Линеаризация дает:

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{-1 + \mu} \rho, \quad \frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{C-A}{A} - \frac{1}{\mu-1} \right) \theta.$$

Из второго уравнения следует, что положение равновесия устойчиво, если

$$C > A \frac{\mu}{-1 + \mu}.$$

Так, при $\mu = 2$ имеем $C > 2A$, что, однако, невозможно в силу свойств тензора инерции осесимметричного спутника. При $\mu = 3$ имеем $C > 1.5A$. Фактически, аппарат должен иметь весьма специфическую форму.

Подводя итог рассмотрению трех положений равновесия, можно заключить, что желательно принять параметр μ в диапазоне 1–2, чтобы избежать устойчивости в случае 3, а также реализовывать вращение вокруг оси максимального момента инерции. Если же необходимо поддерживать вращение вокруг оси минимального момента инерции, его отличие от максимального не должно быть слишком существенным.

4. Рассмотрим теперь косые положения равновесия, получаемые из третьего уравнения (10)

$$\frac{A - C}{A} \cos \theta - \frac{l_{ref}}{l} = 0. \quad (12)$$

Аналогичные положения возможны и для ρ согласно второму уравнению в выражении (10). Как оказалось, для их существования необходимо $\mu = 0$. Фактически, учитывая анализ случаев 1–3, можно заключить, что кинетический момент аппарата всегда оказывается направленным на Солнце, то есть $\rho = 0$. Относительно оси симметрии этого сказать нельзя. Возможна как ориентация КА в обратном направлении, так и движение в косых положениях.

Подставим выражение (12) в первое уравнение выражения (10), в котором примем $\rho = 0$, и приравняем к нулю, что будет означать выход на некоторое вращение (равновесие по переменной l),

$$-\left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta\right) \frac{A}{A - C} \frac{1}{\cos \theta} + \mu + \cos \theta = 0,$$

откуда получаем

$$-\left(\frac{A}{A - C} \cos^2 \theta + \frac{C}{A - C} \sin^2 \theta\right) + \mu \cos \theta + \frac{A - C}{A - C} \cos^2 \theta = 0$$

и для положения равновесия имеем выражение

$$\cos \theta = \frac{1}{\mu} \frac{C}{A - C}. \quad (13)$$

Для кинетического момента получаем $l = \mu A l_{ref} / C$. В отличие от случаев 1 и 3, кинетический момент не направлен по оси e_3 . Проекция кинетического момента на эту ось, задающая скорость вращения,

$$l_3 = \mu A l_{ref} \cos \theta / C = \frac{A}{A - C} l_{ref}. \quad (14)$$

Далее, чтобы такое положение равновесия существовало, необходимо

$$-1 < \frac{1}{\mu} \frac{C}{A - C} < 1. \quad (15)$$

Полагая, что $C > A$, отсюда получаем

$$C > \frac{\mu}{\mu + 1} A \text{ и } C > \frac{\mu}{\mu - 1} A.$$

Эти неравенства не выполняются при $\mu \in [1, 2]$ в силу свойств тензора инерции. Таким образом, можно снова заключить, что параметр μ следует брать в этом диапазоне, дабы исключить опасность попадания в косое положение равновесия.

Если же $C < A$, то из (15) получаем

$$A > \frac{\mu - 1}{\mu} C \text{ и } A > \frac{\mu + 1}{\mu} C. \quad (16)$$

Так, при $\mu = 1$ имеем $A > 2C$, при $\mu = 2$ имеем $A > 1.5C$. Покажем устойчивость положения равновесия (13) при выполнении условий (16), чтобы убедиться, что аппарат выходит на косое положение. Линеаризуя третье уравнение выражений (10) около положения θ_0 , $\theta = \theta_0 + \alpha$, получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \left(\lambda \{ \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \alpha \} - \frac{1}{\mu} \frac{C}{A} \right) \times \{ \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \alpha \},$$

где $\lambda = \frac{A - C}{A} = \frac{1}{\cos \theta_0} \frac{1}{\mu} \frac{C}{A}$. Подставляя это выражение, получаем

$$\frac{1}{\varepsilon} \dot{\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{C}{A} \cos \theta_0 \operatorname{tg}^2 \theta_0 \alpha.$$

Положение равновесия устойчиво, если $\cos \theta_0 > 0$, т.е. $\frac{1}{\mu} \frac{C}{A - C} > 0$, что выполняется для

рассматриваемого случая $A > \frac{\mu + 1}{\mu} C$ согласно выражению (16).

Сравнивая условия (16) и (11), можно обнаружить, что они по сути задают границу, когда при необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции аппарат выходит на требуемое вращение, а когда – выходит на движение в косом положении.

В целом можно заключить, что если минимальный момент инерции существенно меньше максимального, стабилизировать его в нужном положении не удастся.

Подводя итог исследованию, приведем условия успешной работы управления:

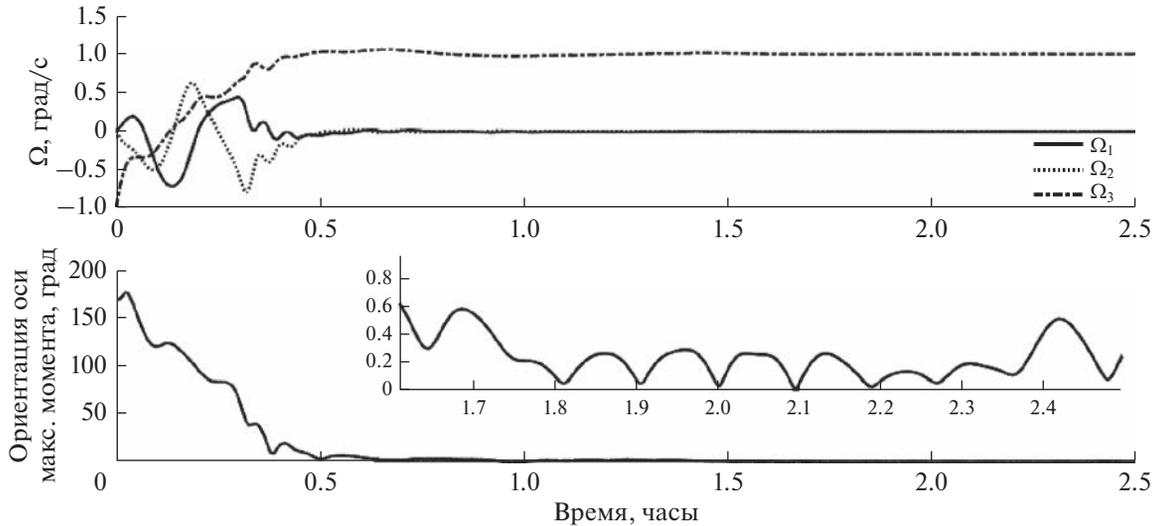


Рис. 2. Стабилизация в требуемом положении.

- параметр μ следует брать в диапазоне от 1 до 2;
- желательно осуществлять закрутку вокруг оси максимального момента инерции;
- при вращении вокруг оси минимального момента инерции необходимо выполнить условие $C > A \frac{\mu}{1 + \mu}$. В частности, оно выполняется при $C > 1/2 A$ и $\mu \in [1, 2]$.

Если же при $\mu = 1$ выполняется $C < 1/2 A$, аппарат выходит на косое положение.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Проведем численное моделирование движения аппарата под воздействием различных возмущающих факторов, не учтенных при исследовании устойчивости. Примем следующие параметры аппарата и его орбиты:

- Наклонение орбиты 97° , высота 550 км, эксцентриситет 0.01, долгота восходящего узла 90° ;
- Направление на Солнце в системе OY задано углами ρ^S и σ^S , равными 80° и 10° . Таким образом, направление на Солнце близко к оси OY_1 . К ней же близка нормаль к плоскости орбиты.
- Коэффициент усиления $k = 600 \text{ Н м с Тл}^{-1}$, целевая скорость закрутки $\omega_0 = 0.5 \text{ град/с}$.
- Вычисление аэродинамического момента (сумма моментов, действующих на стороны аппарата, обращенные к набегающему потоку):
 - спутник — параллелепипед со сторонами 30 см;

- центр масс смещен относительно центра давления на 2, 3 и 4 см вдоль осей связанной системы;

- плотность атмосферы $1.8 \cdot 10^{-13} \text{ кг/м}^3$ (средняя солнечная активность).

– Остаточный дипольный момент $2 \cdot 10^{-2} \text{ А м}^{-2}$, имеющий постоянную и нормально распределенную компоненты.

– Точность определения направления на солнце 1° , угловой скорости 10^{-4} с^{-1} (постоянное смещение и нормально распределенный шум).

– Помимо гравитационного и аэродинамического, действует момент неизвестной природы, примерно вдвое меньший, чем гравитационный.

На рис. 2 приведен пример моделирования для аппарата с тензором инерции 1.0, 0.8, 1.3 кг м^2 , параметр μ равен единице. Таким образом, вращение происходит вокруг оси максимального момента, что при $\mu = 1$ обеспечивает устойчивость требуемого режима движения.

На рис. 2 Ω_k — компоненты угловой скорости аппарата в системе Ox . Пример выхода аппарата на стабилизацию в обратном направлении приведен на рис. 3. Тензор инерции 1.0, 0.8, 1.6 кг м^2 , параметр μ равен 3. Таким образом, выполняются условия случая 2 ($C > 1.5A$ при $\mu = 3$).

Отметим, что начальные данные выбраны таким образом, что аппарат изначально близок к стабилизации в обратном направлении. Такие же начальные данные можно видеть и на рис. 2, где, однако, аппарат стабилизировался в требуемом направлении.

Наконец, на рис. 4 приведен пример стабилизации в косом положении с тензором инерции 1.0, 0.8, 0.3 кг м^2 , параметр μ равен 1.

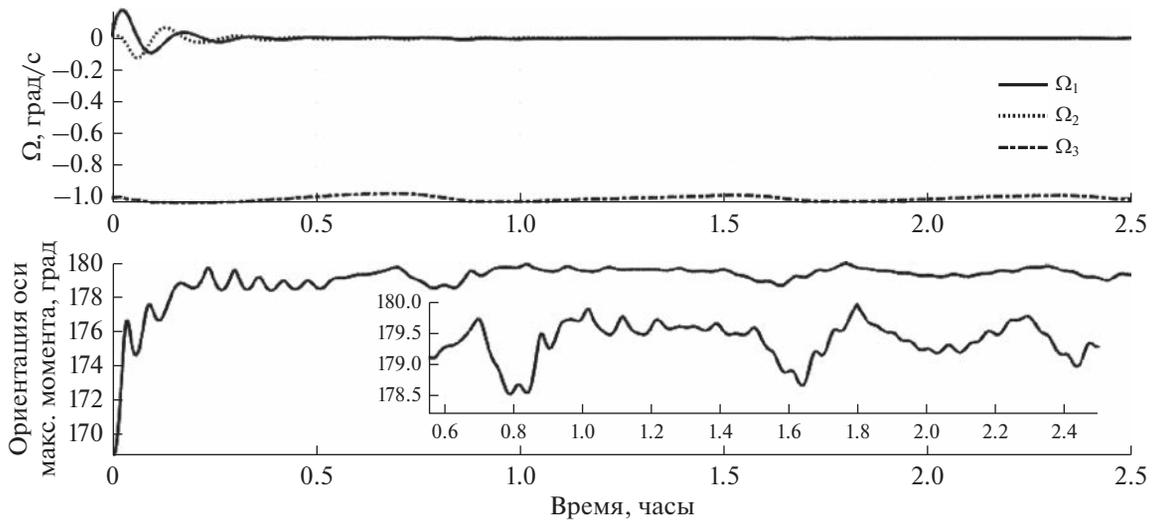


Рис. 3. Стабилизация в обратном положении.

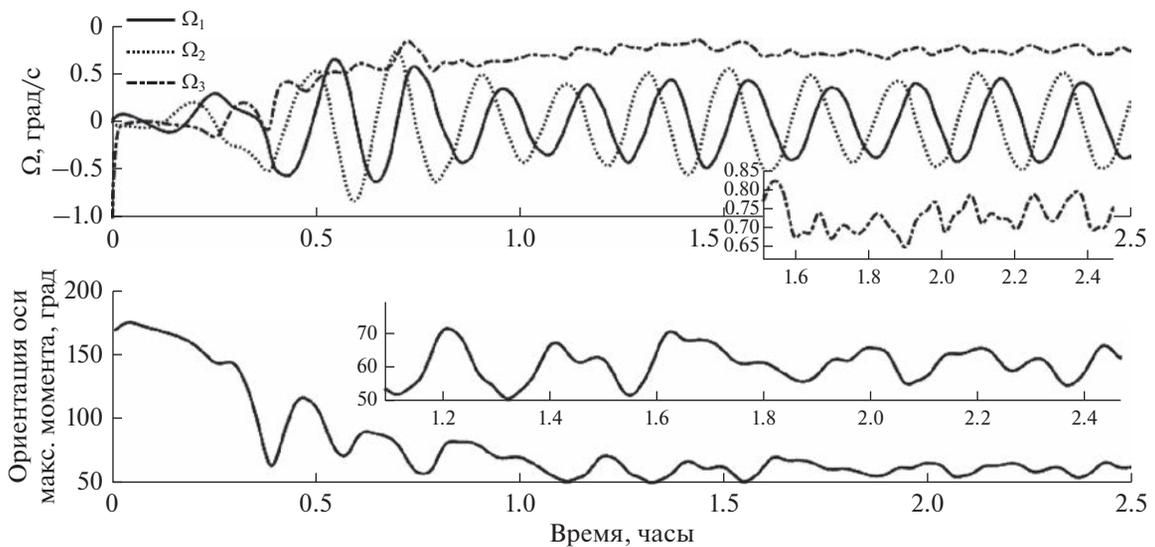


Рис. 4. Стабилизация в косом положении.

Аппарат должен выйти на вращение с углом $\theta \approx 60^\circ$ согласно (13) и скоростью вращения около 0.75 град/с согласно (14). При этом в силу отличия моментов инерции A и B в выражениях (13) и (14) принята средняя величина 0.9 кг м² для A .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено угловое движение аппарата в режиме одноосной стабилизации в направлении Солнца с помощью электромагнитной системы ориентации. Использован алгоритм управления, основанный на информации о текущей и требуемой ориентации одной из осей спутника и вектора его кинетического момента. Показано, что су-

ществует опасность стабилизации аппарата в противоположном направлении и косых положениях. Получены условия на параметры управления и моменты инерции аппарата, при которых достигается требуемая ориентация, в том числе при необходимости вращения вокруг оси минимального момента инерции.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10009 (<https://rscf.ru/project/22-71-10009/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управление

- мость и алгоритмы стабилизации // Косм. исслед. 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207. (Cosmic Research. 2020. T. 58. № 3. С. 158–166.)
2. *Bhat S.P.* Controllability of nonlinear time-varying systems: applications to spacecraft attitude control using magnetic actuation // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50(11). P. 1725–1735.
 3. *Артюхин Ю.П., Каргу Л.И., Симаев В.Л.* Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. М.: Наука, 1979.
 4. *Shigehara M.* Geomagnetic attitude control of an axisymmetric spinning satellite // J. Spacecr. Rockets. 1972. V. 9(6). P. 391–398.
 5. *Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И.* Исследование связи трех алгоритмов магнитного управления угловой скоростью и ориентацией спутника, стабилизируемого вращением // Косм. исслед. 2012. Т. 50. № 4. С. 326–334.
 6. *Thomson W.T.* Spin stabilization of attitude against gravity torque // J. Astronaut. Sci. 1962. V. 9(1). Paper AAS 9-1-31-3.
 7. *Alfriend K.T.* Magnetic attitude control system for dual-spin satellites // AIAA J. 1975. V. 13(6). P. 817–822.
 8. *Wheeler P.C.* Spinning Spacecraft Attitude Control via the Environmental Magnetic Field // J. Spacecr. Rockets. 1967. V. 4(12). P. 1631–1637.
 9. *Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F.* Spin-axis pointing of a magnetically actuated spacecraft // Acta Astronaut. 2014. V. 94. № 1. P. 493–501.
 10. *de Ruiter A.* A fault-tolerant magnetic spin stabilizing controller for the JC2Sat-FF mission // Acta Astronaut. 2011. V. 68(1–2). P. 160–171.
 11. *You H., Jan Y.* Sun Pointing Attitude Control with Magnetic Torquers Only // Intern. Astronautical Congress. 2006. Paper IAC-06-C1.2.01.
 12. *Kim J., Worrall K.* Sun tracking controller for UKube-1 using magnetic torquer only // IFAC Proc. 2013. V. 46(19). P. 541–546.
 13. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Косм. исслед. 2018. Т. 56. № 5. С. 375–383. (Cosmic Research. 2018. T. 56. № 5. С. 388–399.)
 14. *Karpenko S.O., Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S.* One-axis attitude of arbitrary satellite using magnetorquers only // Cosmic Research. 2013. V. 51. № 6. P. 478–484.
 15. *Roldugin D.S., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y.* Satellite Angular Motion under the Action of SDOT Magnetic One Axis Sun Acquisition Algorithm // Cosmic Research. 2021. V. 59. № 6. P. 529–536.
 16. *Roldugin D., Tkachev S., Ovchinnikov M.* Asymptotic Motion of a Satellite under the Action of Sdot Magnetic Attitude Control // Aerospace. 2022. V. 9(11). Paper 639.
 17. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic Attitude Control for Satellites in Polar or Sun-Synchronous Orbits // J. Guid. Control. Dyn. 2015. V. 38(10). P. 1947–1958.
 18. *Chasset C., Berge S., Bodin P., Jakobsson B.* 3-axis magnetic control with multiple attitude profile capabilities in the PRISMA mission // 57th Intern. Astronautical Congress. 2006. Paper IAC-06-C1.2.3.
 19. *Белецкий В.В.* Эволюция вращения динамически-симметричного спутника // Косм. исслед. 1963. Т. 1. № 3. С. 339–385.
 20. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладные математика и механика. 1963. Т. 27. № 3. С. 473–483.
 21. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975.
 22. *Арнольд В.И., Нейштадт А.И., Козлов В.В.* Динамические системы-3 / ред. Арнольд В.И. М.: ВИНТИ, 1985.
 23. *Белецкий В.В., Новогребельский А.Б.* Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // Астрон. журн. 1973. Т. 50. № 2. С. 327–335.
 24. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985.
 25. *Alken P., Thébaud E., Beggan C.D. et al.* International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation // Earth, Planets and Space. 2021. V. 73(1). Art. No. 49.

УДК 681.51

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

© 2023 г. А. И. Игнатов¹ *, Г. А. Иванов¹, Е. С. Коломиец¹, Е. В. Мартыненко¹

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*general_z@mail.ru

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.

После доработки 15.04.2022 г.

Принята к публикации 15.06.2022 г.

Исследован режим поддержания солнечной ориентации космического аппарата – гиростата на низкой околоземной орбите в течение длительного времени. Аппарат по форме близок к цилиндру с двумя неподвижными панелями солнечных батарей. Панели расположены вдоль продольной оси цилиндра, симметрично относительно нее. В режиме солнечной ориентации нормаль к плоскости солнечных батарей аппарата неизменно направлена на Солнце, продольная ось совершает колебания относительно плоскости орбиты. Для реализации указанного режима движения космического аппарата используется система четырех двигателей-маховиков, оси вращения которых направлены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Положение боковых ребер пирамиды относительно жестко связанной с аппаратом системы координат задается двумя углами, которые являются параметрами системы двигателей-маховиков. Рассматривается закон управления гиростатическим моментом, при котором обеспечивается затухание возмущенного движения космического аппарата в окрестности положения его солнечной ориентации и ограничивается накопление собственного кинетического момента двигателей-маховиков за счет управления углом поворота аппарата вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей. В работе показано, что с помощью определенного выбора параметров системы двигателей-маховиков возможно реализовать режим солнечной ориентации без проведения разгрузок гиростатического момента в течение всего времени полета. Приведены результаты численного моделирования полной системы уравнений движения космического аппарата в режиме его солнечной ориентации с учетом воздействия гравитационного и аэродинамического моментов, подтверждающие правильность выбранных значений параметров.

DOI: 10.31857/S0023420622700017, EDN: LUGGZP

ВВЕДЕНИЕ

Режим солнечной ориентации часто используется в процессе эксплуатации космических аппаратов (КА), поскольку обеспечивает максимальный приток электроэнергии на борт. В работе исследуется поддержание режима солнечной ориентации КА на низкой околоземной орбите с помощью гиросистемы в течение длительного времени. Специфика рассматриваемого КА состоит в том, что на нем расположены неподвижные панели солнечных батарей, поэтому для наиболее их эффективного использования необходимо поддерживать непрерывную ориентацию вектора нормали к светочувствительной стороне панелей батарей на Солнце. При использовании гиросистемы одним из основных требований к режиму ориентации КА является малая скорость накопления собственного кинетического момента гиросистемы (гиростатического момента), для увеличения ин-

тервалов времени между проведением разгрузок. Накопление гиростатического момента происходит за счет воздействия на КА гравитационного и аэродинамического моментов. В настоящей работе рассматривается закон управления гиростатическим моментом КА, при котором обеспечивается затухание возмущенного движения КА в окрестности положения его солнечной ориентации и ограничивается накопление гиростатического момента за счет управления углом поворота КА вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей [1–3].

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

КА считаем гиростатом, для описания его движения будем использовать три правых декартовых системы координат.

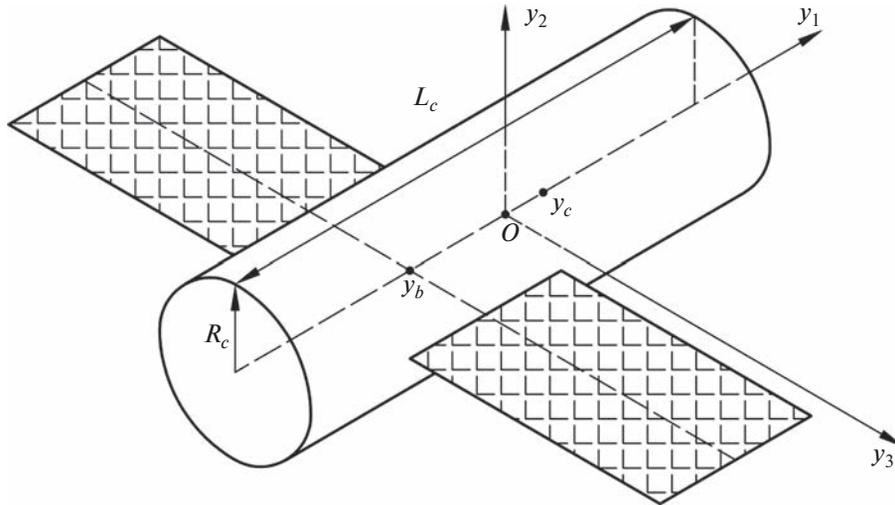


Рис. 1. Общая форма КА и положение осей связанной системы координат.

• $Oy_1y_2y_3$ — связанная система координат, образованная главными центральными осями инерции КА. Полагаем, что КА имеет форму прямого кругового цилиндра (рис. 1) радиуса R_c и высоты L_c с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами — солнечными батареями суммарной площади S_b . Ось цилиндра совпадает с осью Oy_1 . Солнечные батареи расположены в плоскости Oy_1y_3 симметрично относительно оси Oy_1 , стороны батарей параллельны осям Oy_3 и Oy_2 , ось Oy_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Светочувствительная сторона солнечных батарей обращена к полупространству $y_2 > 0$. Координаты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим $(y_c, 0, 0)$ и $(y_b, 0, 0)$ соответственно, базисные орты этой системы — $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Oy_1y_2y_3$.

• $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ — гринвичская система координат. Ее начало находится в центре Земли, плоскость $O_E Y_1 Y_2$ совпадает с плоскостью экватора, ось $O_E Y_1$ пересекает гринвичский меридиан, ось $O_E Y_3$ направлена к Северному полюсу.

• $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ — квазиинерциальная система координат. Ось $O_E Z_2$ параллельна вектору кинетического момента орбитального движения КА, ось $O_E Z_3$ лежит в плоскости экватора и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты КА. Базис этой системы образован ортами $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$.

Матрицу перехода от системы $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ к системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ обозначим $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где c_{ij} — косинус угла между осями $O_E Y_i$ и $O_E Z_j$. Элементы этой матрицы выражаются через координаты и

компоненты скорости центра масс КА в гринвичской системе координат. Матрицы перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к гринвичской системе координат и системе $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ обозначим соответственно $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ и $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Здесь b_{ij} и a_{ij} — косинусы углов, которые образует ось Oy_j с осями $O_E Y_i$ и $O_E Z_i$. Справедливы соотношения $a_{ij} = \mathbf{E}_i \times \mathbf{e}_j$, $B = CA$.

Положение системы $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ будем также задавать углами ψ, θ и φ , которые введем следующим образом. Если точку O_E перенести в точку O , то систему $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ можно перевести в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол ψ вокруг оси $O_E Z_2$, 2) на угол $\pi/2 - \theta$ вокруг новой оси $O_E Z_1$, 3) на угол $\varphi + \pi$ вокруг новой оси $O_E Z_2$, совпадающей с осью Oy_2 . Элементы матрицы A выражаются через эти углы с помощью следующих формул:

$$a_{11} = -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta,$$

$$a_{12} = \sin \psi \cos \theta,$$

$$a_{21} = -\sin \varphi \cos \theta, \quad a_{22} = \sin \theta,$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta,$$

$$a_{32} = \cos \psi \cos \theta,$$

$$a_{13} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \theta,$$

$$a_{23} = \cos \varphi \cos \theta,$$

$$a_{33} = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta.$$

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс КА в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Другая

подсистема описывает движение КА относительно центра масс (вращательное движение).

В векторном виде подсистему уравнений движения центра масс КА можно представить, как в работе [4]:

$$\frac{\tilde{d}^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}) = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{f}_d,$$

$$\mathbf{f}_d = \nabla U_B - c\rho_a \mathbf{v} \mathbf{v}.$$

Здесь символом \tilde{d}/dt обозначена локальная производная вектора в системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$, $\boldsymbol{\omega}_E$ – вектор угловой скорости вращения Земли; $\mathbf{v} = \tilde{d}\mathbf{r}/dt$ – относительная скорость движения центра масс КА, $v = |\mathbf{v}|$, r – радиус-вектор центра масс КА, $r = |\mathbf{r}|$; μ_E – гравитационный параметр Земли; \mathbf{f}_d – вектор суммарных возмущающих ускорений, действующих на КА; ∇U_B – градиент потенциала гравитационного поля Земли, за исключением потенциала центрального поля; c – баллистический коэффициент КА; ρ_a – плотность атмосферы в точке, задаваемой вектором \mathbf{r} . Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16, 16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Влияние атмосферы на движение центра масс КА учитывается в виде силы лобового сопротивления с нулевым углом атаки. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент КА считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения КА имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, \\ \mathbf{K} &= \hat{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{b}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1 &= \boldsymbol{\omega}_E \mathbf{b}_2, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{b}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_2 = -\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{b}_1. \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь \tilde{d}/dt – локальная производная вектора в системе $O_E y_1 y_2 y_3$, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)^T$ – кинетический момент КА в его движении относительно центра масс; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – абсолютная угловая скорость КА; $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции КА; $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ – гиросtatический момент КА (собственный кинетический момент гиросистемы); \mathbf{M}_g – гравитационный момент, действующий на КА; \mathbf{M}_a – аэродинамический момент, действующий на КА; \mathbf{M}_c – момент, действующий со стороны гиросистемы, на корпус КА; $\boldsymbol{\omega}_E = |\boldsymbol{\omega}_E|$ – угловая скорость вращения Земли; \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 – соот-

ветственно первая и вторая строки матрицы перехода B . Третья строка этой матрицы $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$. Строки \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 связаны условиями ортогональности матрицы B (\mathbf{b}_i – орты осей $O_E Y_i$), которые учитываются при задании начальных условий для этих переменных.

Гравитационный момент задается формулой [5]:

$$\mathbf{M}_g = 3 \frac{\mu_E}{r^5} (\mathbf{r} \times \hat{I} \mathbf{r}).$$

Формула аэродинамического момента имеет вид

$$\mathbf{M}_a = p(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1),$$

$$p = \rho_a \left(\pi R_c^2 y_c |v_1| + S_b y_b |v_2| + 2R_c L_c y_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right),$$

где v_i – компоненты вектора \mathbf{v} ($i = 1, 2, 3$). При выводе последней формулы считалось, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом КА испытывают абсолютно неупругий удар [5], и не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений КА относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, надо добавить к уравнениям (1) выражение для \mathbf{M}_c . Оно приведено ниже.

В расчетах использовались следующие параметры описанной модели. Параметры КА: $m = 6440$ кг, $I_1 = 2600$ кг м², $I_2 = 11100$ кг м², $I_3 = 10900$ кг м², $R_c = 1.3$ м, $L_c = 5.0$ м, $S_b = 33$ м², $c = 0.005$ м²/кг, $y_b = -1$ м, $y_c = 0.3$ м. Параметры модели атмосферы: $F_{10.7} = F_{81} = 150$, $A_p = 12$.

Начальные условия движения центра масс КА задавались в восходящем узле орбиты в момент времени 07.13.07 UTC 21.XII.2013. При этом элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение 64.87°, аргумент широты перигея -124.65°, долгота восходящего узла в гринвичской системе координат 209.70°. На отрезке времени моделирования движения КА максимальное значение угла ϑ между ортом направления “Земля–Солнце” и плоскостью орбиты КА достигало 88°.

Начальные условия уравнений (1) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения КА. Этот момент служил началом отсчета времени – точкой $t = 0$.

РЕЖИМ СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Сначала рассмотрим режим трехосной солнечной ориентации КА, в котором ось Oy_2 неизменно направлена на Солнце, ось Oy_1 лежит в плос-

кости орбиты, абсолютная угловая скорость КА мала. Пусть \mathbf{s} – орт направления “Земля–Солнце”. Орт $\mathbf{n} = (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2) / |\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2|$ лежит в плоскости орбиты КА и ортогонален орту \mathbf{s} . Изменение ортов \mathbf{s} и \mathbf{n} в системе $Oy_1y_2y_3$ описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = 0, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0.$$

Закон управления гиросистемой $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$, обеспечивающий затухание возмущенного движения КА в окрестности положения $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ с требуемой скоростью, имеет вид [2]:

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - 2\xi \hat{I} \hat{W} \boldsymbol{\omega},$$

где $\hat{W} = \text{diag}(1, 1, \sqrt{2})$; ξ – положительный параметр.

Рассмотрим возможность использования закона управления, позволяющего не только обеспечить затухание возмущенного движения КА в окрестности положения $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ с требуемой скоростью, но и дополнительно ограничить рост накапливаемого кинетического момента гиросистемы. Чтобы не нарушать режим солнечной ориентации КА накопление кинетического момента гиросистемы будем контролировать только за счет управления углом поворота КА вокруг орта $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Закон управления гиросистемой, обеспечивающий поддержание режима солнечной ориентации с заданными выше условиями, имеет вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - \\ &- 2\xi \hat{I} \hat{W} \boldsymbol{\omega} - \hat{I}(\chi \boldsymbol{\omega}_2 + f) \mathbf{e}_2, \\ f &= -\frac{3\mu_E}{r^5} \left[-(\kappa_3 - \kappa_1) r_1 r_2 K_1 + \right. \\ &\left. + \kappa_2 (r_1^2 - r_3^2) K_2 + (\kappa_3 - \kappa_1) r_2 r_3 K_3 \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где χ , κ_i – положительные постоянные; r_i – компоненты вектора \mathbf{r} ($i = 1, 2, 3$). Полагаем, что закон управления (2) формируется в соответствии с показаниями установленных на КА датчиков ориентации и угловой скорости, значения величин r_i в системе управления можно получить, используя показания датчика центра Земли.

Покажем, что выбранный закон изменения управляющего момента (2) действительно обеспечивает солнечную ориентацию КА и при этом ограничивает накопление кинетического момента гиросистемы. С этой целью вычислим решение системы (1), (2) приняв $\chi = 2\xi$, $\xi = 0.01 \text{ с}^{-1}$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1 \text{ (Нмс)}^{-1}$, $\kappa_3 = 3 \text{ (Нмс)}^{-1}$.

Компоненты орта \mathbf{s} в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [6]. Начальные условия системы (1), (2) в момент времени $t = 0$ задавались следующим образом. КА в гринвичской системе координат занимает положение $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Гиростатический

момент $\mathbf{H}(0) = 0$, начальные значения компонент угловой скорости ω_i , задавались с учетом ошибок в их реализации: $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01 \text{ град/с}$. Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели, приведены на рис. 2, 3. Эти результаты представлены графиками зависимости от времени углов ψ , θ и φ , угла $\sigma = \arccos(\mathbf{s} \times \mathbf{e}_2)$ ($\theta = \vartheta$ при $\sigma = 0$). На рисунках также представлены графики компонент гиростатического момента КА H_i ($i = 1, 2, 3$) и модуля вектора гиростатического момента $|\mathbf{H}|$.

Все графики на рис. 2, 3 построены на интервале времени 14 сут. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден. Результаты моделирования показывают, что использование закона управления (2) обеспечивает солнечную ориентацию КА и затухание его возмущенного движения в окрестности положения $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Ошибка солнечной ориентации иллюстрируется графиком угла $\sigma(t)$ (см. рис. 2). Как видно из приведенного графика, ошибка ориентации достаточно мала. Амплитуды установившихся колебаний компонент абсолютной угловой скорости ω_i ограничены значениями:

$$\begin{aligned} |\omega_1| &= 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}, \\ -0.02 &< \omega_2 < 0.03 \text{ град/с}, \\ |\omega_3| &< 4.0 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}. \end{aligned}$$

На рис. 3 видны установившиеся колебания величин H_i ($i = 1, 2, 3$) с доминирующей частотой $2\omega_0$ (ω_0 – среднее движение центра масс КА, для рассматриваемой в данной работе орбиты $\omega_0 \approx 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$), которые вызваны воздействием гравитационного момента [3]. На рис. 3 видно, что из-за использования закона управления (2) постоянного возрастания (накопления) величины кинетического момента гиросистемы не происходит, значение $|\mathbf{H}|$ остается ограниченным на всем интервале времени моделирования. Однако когда Солнце относительно плоскости орбиты поднимается достаточно высоко ($\vartheta > 70^\circ$), значения $|\mathbf{H}|$ начинают возрастать, достигая своего максимума $|\mathbf{H}| \approx 31 \text{ Нмс}$ при $\vartheta \approx 88^\circ$. Это связано с тем, что по мере увеличения угла θ изменение угла φ поворота КА вокруг оси Oy_2 уже не может остановить накопление $|\mathbf{H}|$ за счет воздействия гравитационного момента. В дальнейшем, при уменьшении θ уменьшается и кинетический момент гиросистемы до значений $|\mathbf{H}| < 12 \text{ Нмс}$. Таким образом, результаты моделирования показали, что, используя закон управления (2), можно реализовать режим солнечной ориентации КА

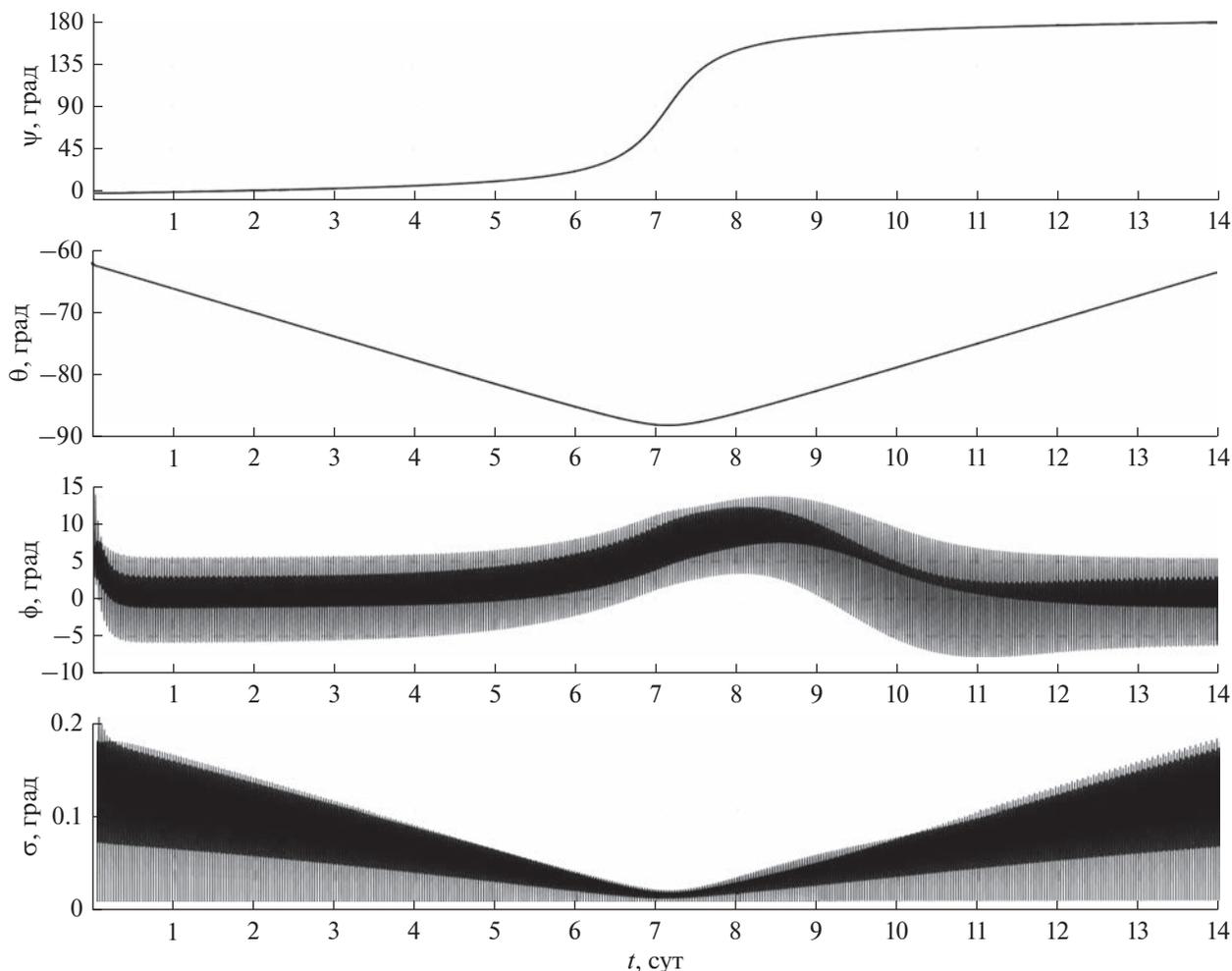


Рис. 2. Углы ориентации КА.

без постоянного накопления абсолютного значения кинетического момента гиросистемы $|\mathbf{H}|$. В работах [1–3] также показано, что в случаях, когда угол $\vartheta < 70^\circ$ величина $|\mathbf{H}|$ не превышает значения 12 Нмс за счет использования закона управления (2). Можно утверждать, что на рис. 3 представлен один из самых неблагоприятных случаев с точки зрения накопления гиросататического момента гиросистемы, когда величина $|\mathbf{H}|$ достигает наибольшего значения для всех возможных положений Солнца относительно рассматриваемой орбиты КА. В настоящей работе конкретные параметры гиросистемы КА подбираются для случая, при котором реализуется максимальное накопление значения $|\mathbf{H}|$.

СОБСТВЕННЫЙ КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

Динамические требования к системе управления КА, включающей в свой состав гиросистему,

во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента H_T . Множество H_T является областью изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области должно обеспечивать требуемое управление параметрами вращательного движения КА. Естественно, что множество H_T должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента H_C , реализуемых гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия:

$$H_T \subset H_C. \quad (3)$$

При этом можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой, будет достаточной для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА [7].

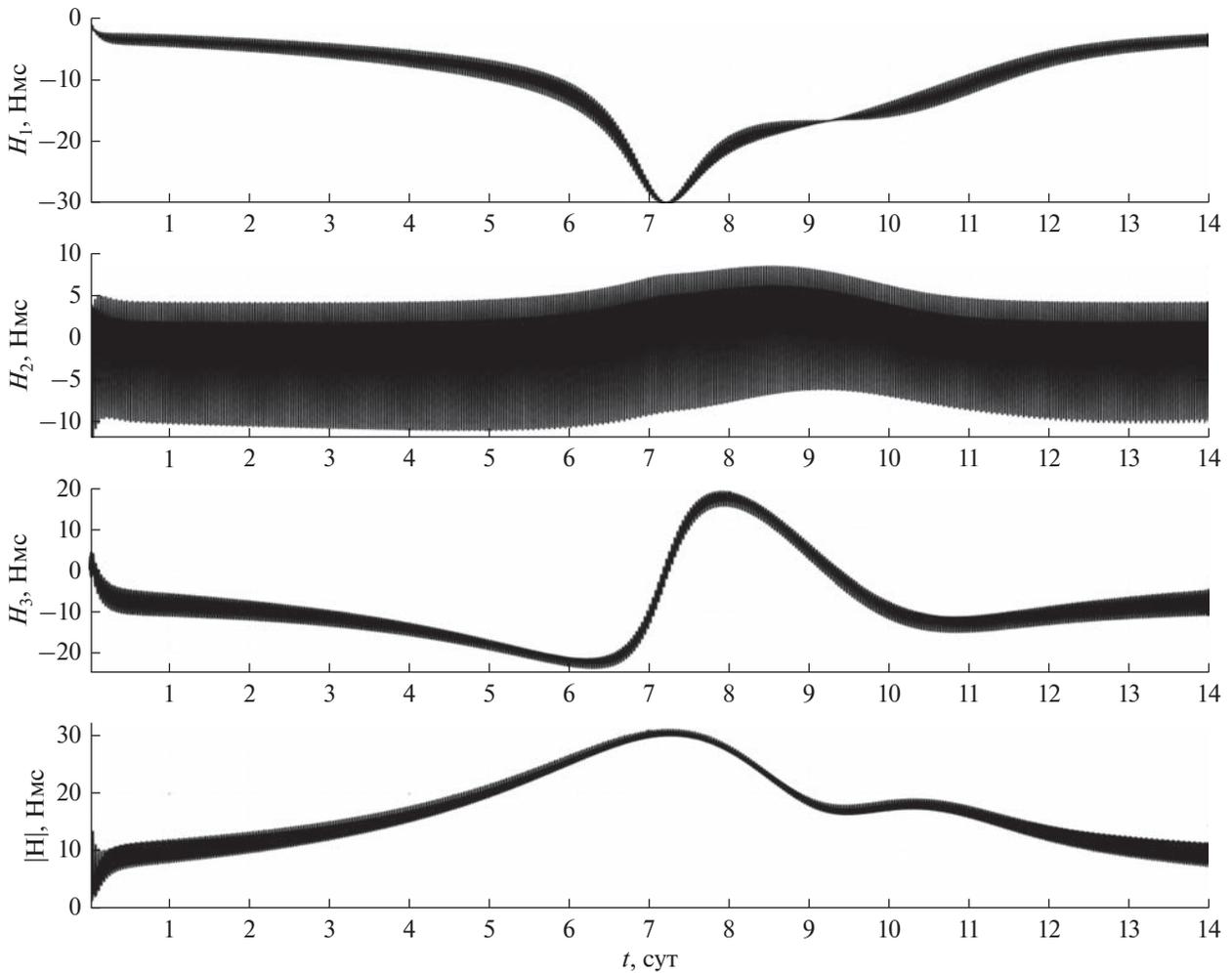


Рис. 3. Компоненты и модуль вектора гиросtatического момента КА.

В настоящей работе в качестве гиросистемы предназначенной для создания управляющих моментов рассматривается система четырех двигателей-маховиков (ДМ) [7]. Область вариации возможных значений суммарного кинетического момента H_C , создаваемого системой ДМ, зависит от схемы их расположения относительно связанной с КА системы координат и максимального значения кинетического момента, реализуемого каждым из ДМ. Суммарный кинетический момент системы ДМ выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^4 h_k \mathbf{g}_k, \quad (4)$$

где h_k – алгебраическое значение кинетического момента ДМ с номером k ($k = 1, \dots, 4$); \mathbf{g}_k – орт оси вращения ДМ с номером k .

Введем связанную с системой ДМ правую декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой

вектор \mathbf{H} представлен своими компонентами H_i ($i = 1, 2, 3$). Рассмотрим область P_4 пространства $R_3(H_1, H_2, H_3)$, заполняемую концами векторов (4) (начала векторов помещены в точку O). Здесь и далее считаем, что система состоит из одинаковых ДМ. В этом случае $-h_{\max} \leq h_k \leq h_{\max}$, где h_{\max} – абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного ДМ. В данном случае принято значение $h_{\max} = 18$ Нмс. Оси вращения ДМ расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_1 , линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_2x_3 параллельны или перпендикулярны осям Ox_2, Ox_3 (рис. 4).

Орты \mathbf{g}_k , $k = 1, \dots, 4$, в системе $Ox_1x_2x_3$ имеют компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (d_1, -d_2, d_3)^T, & \mathbf{g}_2 &= (-d_1, d_2, d_3)^T, \\ \mathbf{g}_3 &= (d_1, d_2, -d_3)^T, & \mathbf{g}_4 &= (-d_1, -d_2, -d_3)^T, \end{aligned}$$

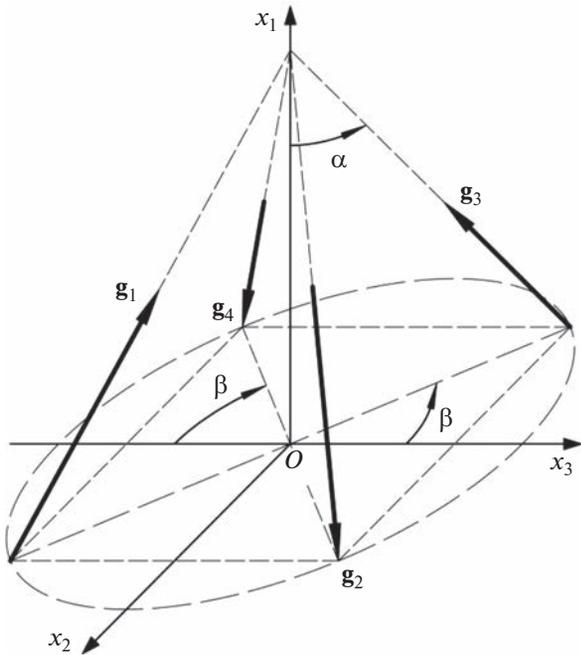


Рис. 4. Схема расположения ортов осей вращения ДМ.

здесь $d_1 = \cos\alpha$, $d_2 = \sin\alpha \sin\beta$, $d_3 = \sin\alpha \cos\beta$; α – угол между осью Ox_1 и каждым из ортов \mathbf{g}_k ; β – угол между осью Ox_3 и проекцией каждого из ортов \mathbf{g}_k на плоскость Ox_2x_3 ; углы α и β – параметры системы. Полагаем, что $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Основание

пирамиды, лежащее в плоскости Ox_2x_3 , представляет собой прямоугольник, а в случае $\beta = \pi/2$ – квадрат. Скалярная запись векторного выражения (4) в системе $Ox_1x_2x_3$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H_1 &= (h_1 - h_2 + h_3 - h_4)d_1, \\ H_2 &= (-h_1 + h_2 + h_3 - h_4)d_2, \\ H_3 &= (h_1 + h_2 - h_3 - h_4)d_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Область пространства, заполняемая концами векторов \mathbf{H} , представляет собой выпуклый многогранник P_4 (рис. 5).

Все необходимые при построении P_4 соотношения для координат вершин, а также параметризация граней приведены в исследовании [7]. На рис. 5 обозначены вершины многогранника P_4 в которых реализуются значения $H_{i \max}$ – максимальные абсолютные значения кинетического момента, создаваемые системой ДМ по каждой из осей Ox_i , $i = 1, 2, 3$. Для системы четырех ДМ, расположенных по схеме “четырёхугольная пирамида”, значения $H_{i \max}$ определяются соотношениями (5):

$$\begin{aligned} H_{1 \max} &= 4h_{\max} \cos\alpha, \\ H_{2 \max} &= 4h_{\max} \sin\alpha \sin\beta, \\ H_{3 \max} &= 4h_{\max} \sin\alpha \cos\beta. \end{aligned}$$

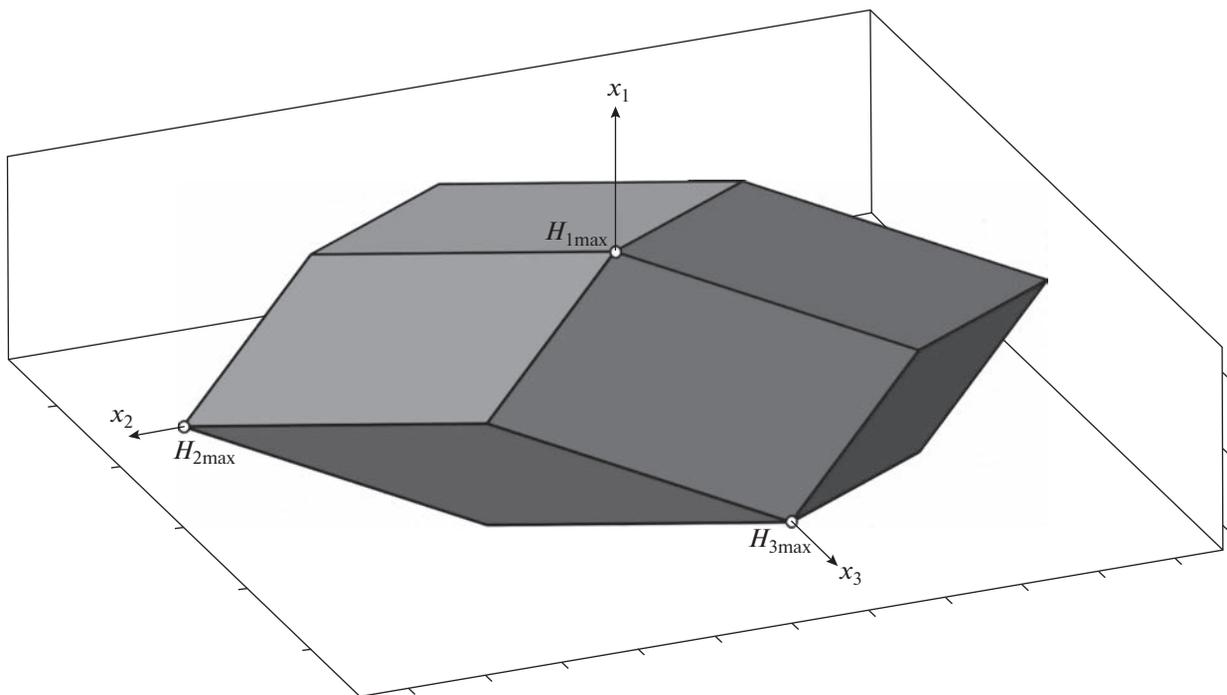


Рис. 5. Общий вид многогранника P_4 .

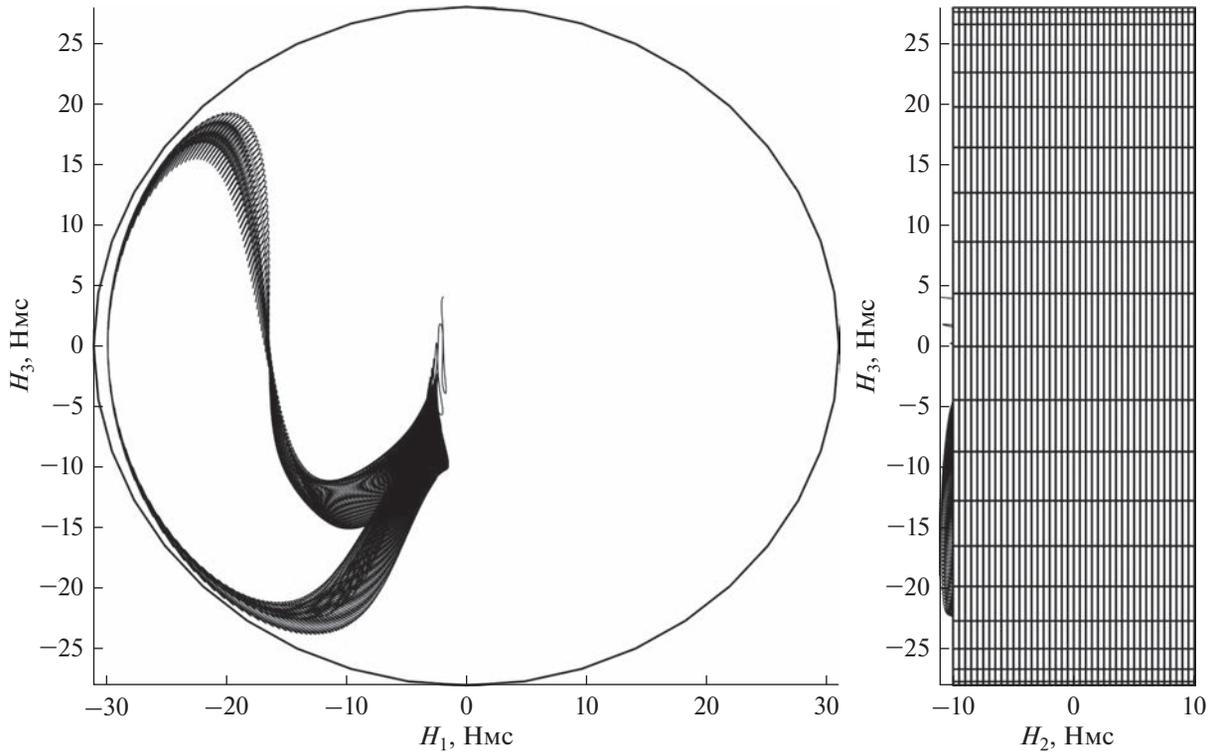


Рис. 6. Годограф \mathbf{H} и аппроксимирующий цилиндр.

РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ НА КОСМИЧЕСКОМ АППАРАТЕ

Множество H_T в данном случае задается множеством значений гиристатического момента \mathbf{H} системы ДМ реализуемого в процессе поддержания режима солнечной ориентации КА (рис. 3). На рис. 6 представлен годограф вектора \mathbf{H} (кривые линии черного цвета), а также показана аппроксимация области его вариации частью прямого эллиптического цилиндра.

Проверить выполнение условия (3) можно сравнением области вариации H_T и многогранника P_4 , для чего их необходимо построить в одной системе координат и в едином масштабе. Как видно из рис. 3, максимальное значение $|H_2|$ примерно в 2.5 раза меньше чем максимальное значение $|H_3|$ и примерно в три раза меньше, чем максимальное значение $|H_1|$. Исходя из этих соотношений между размерами области вариации вектора \mathbf{H} , наиболее рационально будет расположить систему ДМ таким образом, чтобы вершина “пирамиды” лежала на оси Oy_2 . Совместим начала систем координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ в центре масс КА (начало системы $Ox_1x_2x_3$ можно поместить в любое место, важно лишь угловое положение осей Ox_i относительно осей Oy_i) и расположим ось Ox_1 вдоль оси Oy_2 , а ось Ox_3 вдоль оси Oy_3 . Зная h_{\max} , для построения многогранника P_4 оста-

ется только выбрать значения α и β параметров системы ДМ. При выборе значений параметров α и β можно использовать разные критерии, из которых самый очевидный – это максимальный объем многогранника P_4 . Рассмотрим все возможные расстояния от каждой из граней P_4 до точки O . Эти расстояния по сути представляют собой абсолютные значения кинетического момента, реализуемого системой ДМ в направлении, перпендикулярном соответствующей грани. Для схемы ДМ “четырёхугольная пирамида” все грани многогранника P_4 можно условно разделить на три группы в зависимости от их удаленности от его геометрического центра. Соответствующие значения H_I , H_{II} , H_{III} кинетического момента, реализуемого системой ДМ в направлении от точки O по нормали к какой-либо грани, принадлежащей своей группе, можно вычислить по одной из следующих формул:

$$H_I = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

$$H_{II} = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}},$$

$$H_{III} = 2h_{\max} \sin \alpha \sin 2\beta.$$

Наименьшее из значений H_I , H_{II} , H_{III} соответствует максимальному радиусу сферы, полностью вписанной в многогранник P_4 . На рис. 7 представле-

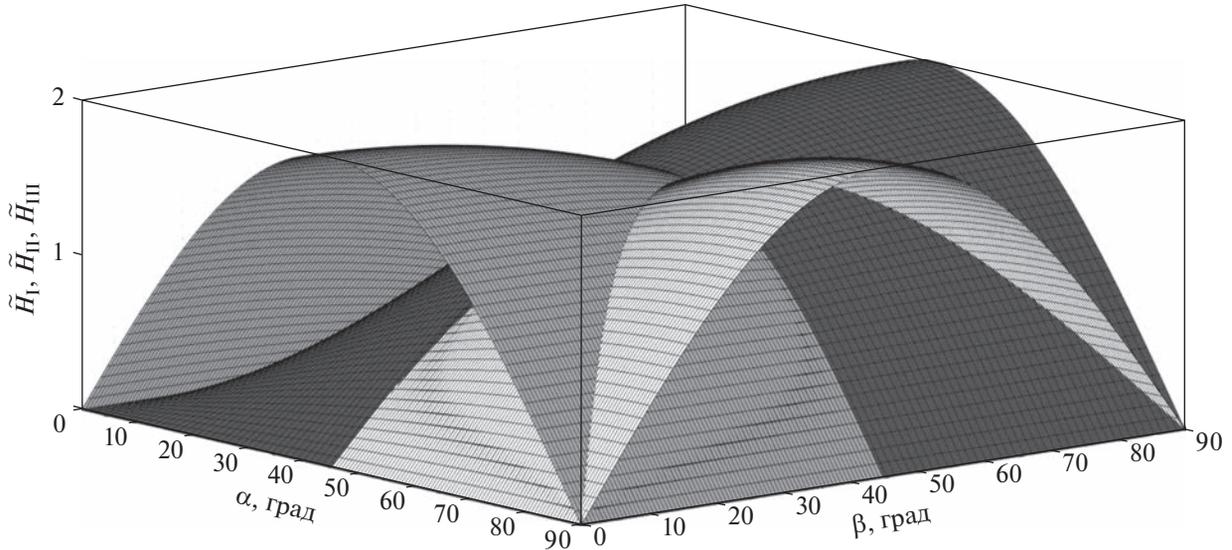


Рис. 7. Поверхности $\tilde{H}_I(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta)$.

ны три поверхности: $\tilde{H}_I(\alpha, \beta) = H_I/h_{\max}$ (показана темно-серым цветом), $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta) = H_{II}/h_{\max}$ (показана светло-серым цветом) и $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta) = H_{III}/h_{\max}$ (показана белым цветом). Поверхности имеют одну точку пересечения, соответствующую значениям углов $\alpha = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54.7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, при которых максимальный радиус сферы, полностью вписанной в многогранник P_4 , а также объем P_4 будут иметь наибольшее значение, равное $H_I = H_{II} = H_{III} = 4h_{\max}/\sqrt{6}$.

Еще один из способов выбрать значения углов α и β – это разместить аппроксимирующий цилиндр, изображенный на рис. 6, внутри многогранника P_4 таким образом, чтобы кратчайшие расстояния $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$ от поверхности цилиндра до каждой из трех групп граней, образующих P_4 , были равны между собой. На рис. 8 схематично показано взаимное расположение проекций цилиндра и граней многогранника на координатные плоскости систем $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$. Значения $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$ вычисляются по формулам:

$$\delta_I = \frac{d_2L_1 + d_1L_2 - 4h_{\max}d_1d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}},$$

$$\delta_{II} = \frac{d_3L_1 + d_1L_3 - 4h_{\max}d_1d_3}{\sqrt{d_1^2 + d_3^2}},$$

$$\delta_{III} = \frac{d_3\tilde{L}_2 + d_2\tilde{L}_3 - 4h_{\max}d_2d_3}{\sqrt{d_2^2 + d_3^2}},$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{d_3L_2^2}{\sqrt{d_3^2L_2^2 + d_2^2L_2^2}}, \quad \tilde{L}_3 = \frac{d_2L_3^2}{\sqrt{d_3^2L_2^2 + d_2^2L_3^2}}.$$

Здесь $L_1 = 10$ Нмс – половина высоты цилиндра, $L_2 = 31$ Нмс и $L_3 = 28$ Нмс – полуоси эллипса, образованного пересечением цилиндра с плоскостью Ox_2x_3 (Oy_1y_3), \tilde{L}_2 и \tilde{L}_3 – координаты точки соприкосновения эллипса с касательной, параллельной прямой, образованной пересечением грани многогранника и плоскостью Ox_2x_3 (Oy_1y_3).

При выполнении условий

$$\frac{L_1}{4d_1} + \frac{L_2}{4d_2} < h_{\max}, \quad \frac{L_1}{4d_1} + \frac{L_3}{4d_3} < h_{\max},$$

$$\frac{\tilde{L}_2}{4d_2} + \frac{\tilde{L}_3}{4d_3} < h_{\max}$$

аппроксимирующий цилиндр будет находиться внутри многогранника P_4 . Значения углов α и β можно найти из условия $\delta_I = \delta_{II} = \delta_{III}$, построив три поверхности $\delta_I(\alpha, \beta)$, $\delta_{II}(\alpha, \beta)$, $\delta_{III}(\alpha, \beta)$ и найдя точку их пересечения, но также можно воспользоваться уравнением

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{L_2}{L_3}$$

для вычисления угла β . Для приведенных выше значений L_1, L_2, L_3 угол $\beta = 48^\circ$. Зная угол β значение угла α можно найти как точку пересечения трех кривых: $\delta_I(\alpha)$, $\delta_{II}(\alpha)$, $\delta_{III}(\alpha)$, приведенных на рис. 9. Здесь график $\delta_I(\alpha)$ показан штрихпунктирной линией, $\delta_{II}(\alpha)$ – пунктирной, $\delta_{III}(\alpha)$ – сплошной линией. Из рис. 9 принято значение угла $\alpha = 60^\circ$.

На рис. 10 показано взаимное расположение проекций годографа \mathbf{H} , аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника P_4 . Штрихпунктирными линиями показаны проекции многогранника при значении углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$, пунктирными линиями – при значении

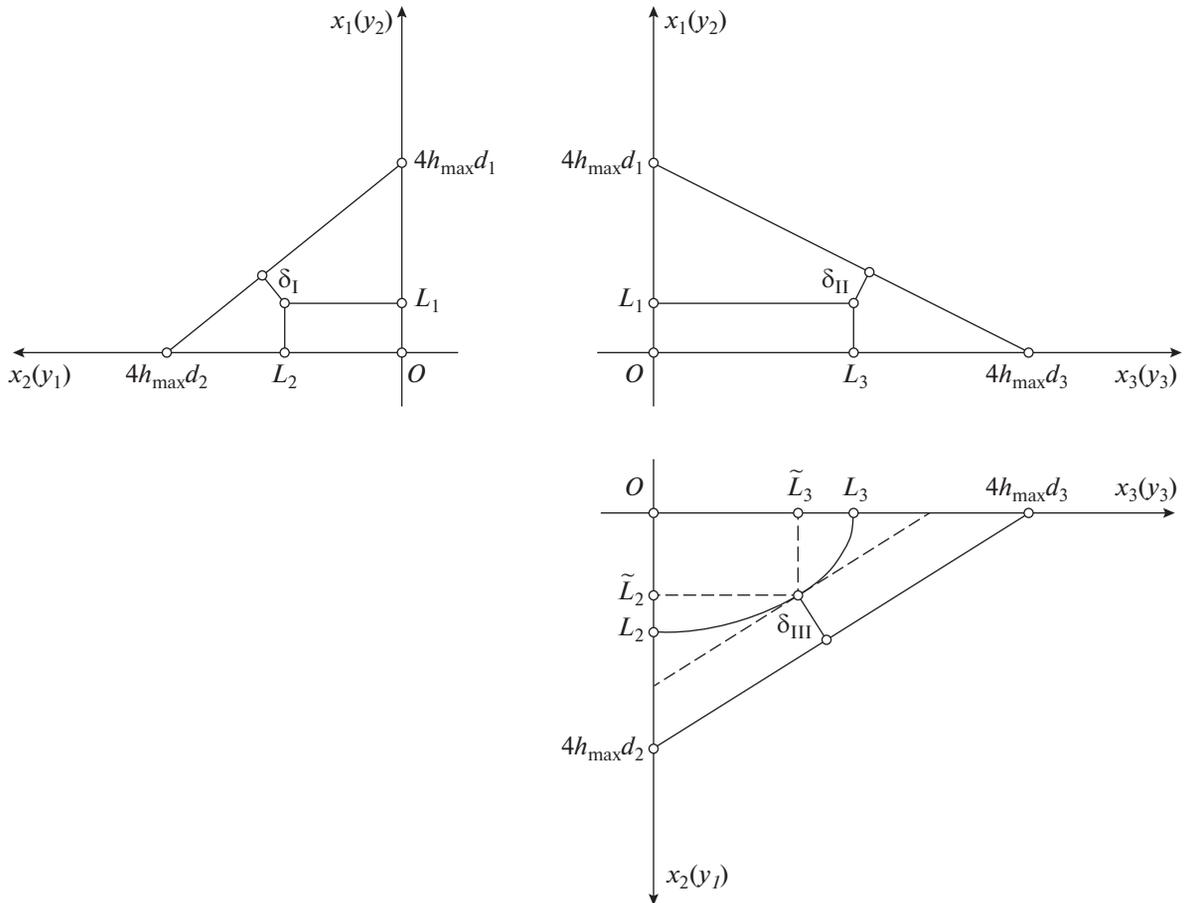


Рис. 8. Проекция цилиндра и граней многогранника P_4 на координатные плоскости систем $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$.

углов $\alpha = 54.7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. На рис. 10 видно, что в случае, когда значения углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$, грани многогранника P_4 располагаются на большем расстоянии от поверхности цилиндра чем в случае $\alpha = 54.7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМА СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Выбрав значения углов α и β , проверим возможность системы ДМ реализовать рассматриваемый режим солнечной ориентации КА, т.е. на всем рассматриваемом интервале времени движения КА должно выполняться условие $|h_k| < h_{\max}$, $k = 1, \dots, 4$. Для этого подсистему уравнений вращательного движения КА (1), (2) необходимо дополнить уравнениями, описывающими изменение собственного кинетического момента каждого из ДМ системы. Матрицу перехода от $Ox_1x_2x_3$ к $Oy_1y_2y_3$ обозначим U ,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем орты \mathbf{g}_k , $k = 1, \dots, 4$, осей вращения маховиков в виде матрицы $D = \|\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\|$, тогда выражение (4) можно представить как

$$\mathbf{H} = UDG, \tag{6}$$

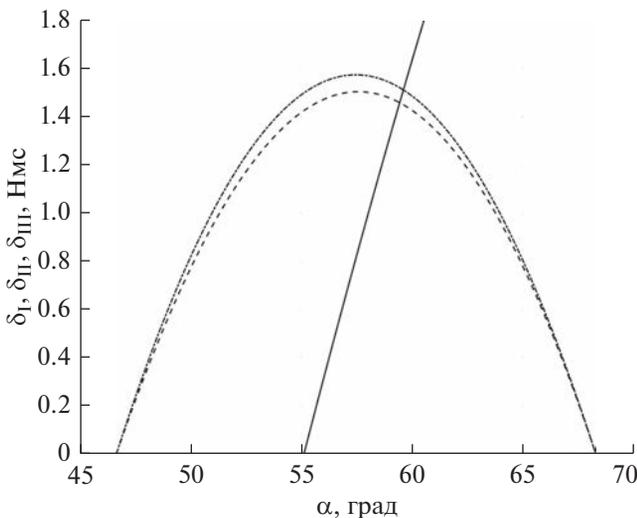


Рис. 9. Графики функций $\delta_I(\alpha)$, $\delta_{II}(\alpha)$, $\delta_{III}(\alpha)$ при $\beta = 48^\circ$.

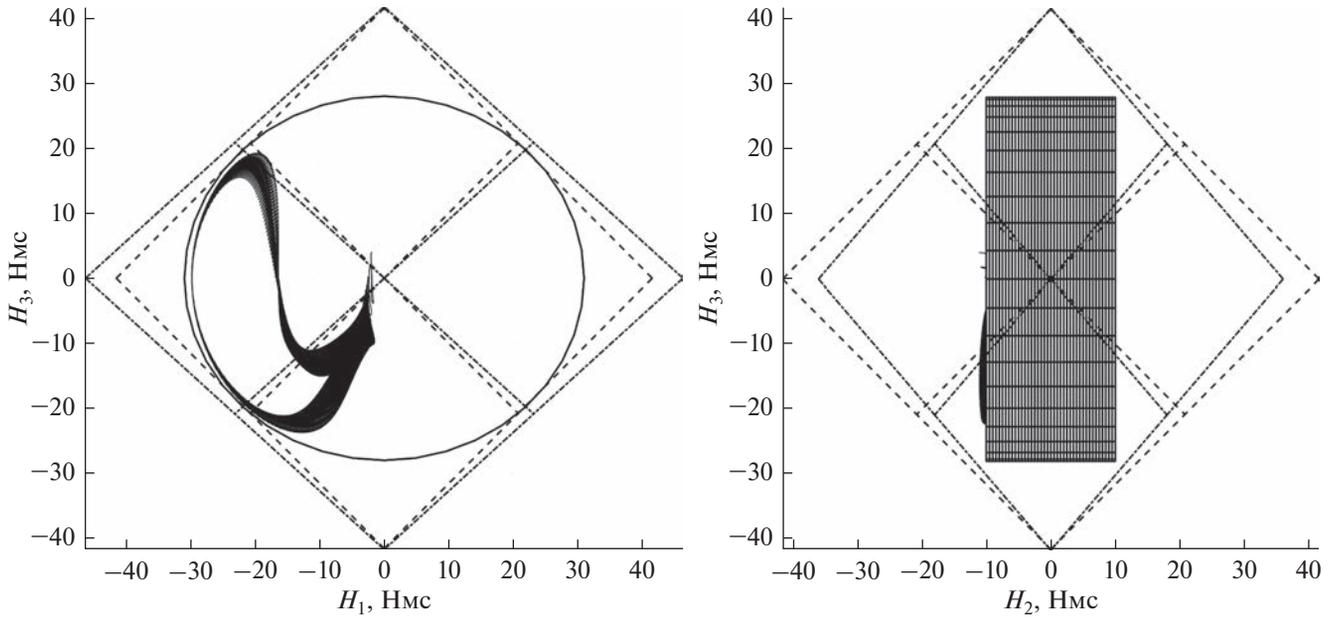


Рис. 10. Проекция годографа \mathbf{H} , аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника P_4 .

где D – прямоугольная матрица размерности 3×4 , $\mathbf{G} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$. Соотношение (6) нельзя единственным образом разрешить относительно величин $h_k, k = 1, \dots, 4$. Чтобы достичь единственности, потребуем, чтобы решение системы (6) относительно h_k имело минимальную евклидову норму

$$l_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^4 h_k^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{G} = D^+ U^T \mathbf{H}, \quad (7)$$

где $D^+ = D^T(DD^T)^{-1}$ – матрица, псевдообратная для матрицы D [8]. Матрица D^+ существует при условии, что в системе есть любые три ДМ, у которых орты $\mathbf{g}_k, k = 1, \dots, 4$, осей вращения линейно независимы. Для схемы ДМ “четырёхугольная пирамида” (см. рис. 4) матрицы D и D^+ можно представить в виде:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1 & d_1 & -d_1 \\ -d_2 & d_2 & d_2 & -d_2 \\ d_3 & d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

$$D^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d_1^{-1} & -d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & -d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & -d_2^{-1} & -d_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

На рис. 11 показаны графики зависимости от времени собственных кинетических моментов h_k ,

$k = 1, \dots, 4$, каждого из ДМ, полученные в результате численного моделирования движения КА в рамках модели, приведенной выше, с учетом соотношений (6), (7), при значениях углов $\alpha = 60^\circ, \beta = 48^\circ$. Как и на рис. 2, 3, графики на рис. 11 построены на интервалах времени 14 сут. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден. Из рис. 11 видно, что на интервале времени с 6-х по 8-е сутки полета КА величины $h_k, k = 1, \dots, 4$, превышают максимально допустимое значение $h_{\max} = 18$ Нмс, что вызвано наличием колебаний составляющих вектора гиросtatического момента КА (см. рис. 3). Ограничить колебания величин $h_k, k = 1, \dots, 4$, можно использовав другое условие достижения единственности решение системы (6) относительно h_k .

МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ l_∞

Еще одним из способов достижения единственности решения системы (6) относительно $h_k, k = 1, \dots, 4$, является требование минимума нормы

$$l_\infty = \max_{1 \leq k \leq 4} |h_k|.$$

Применение метода минимальной нормы l_∞ позволяет системе ДМ наиболее эффективно использовать весь возможный объем области H_C создаваемого кинетического момента. В общем случае указанный метод представлен в виде не-

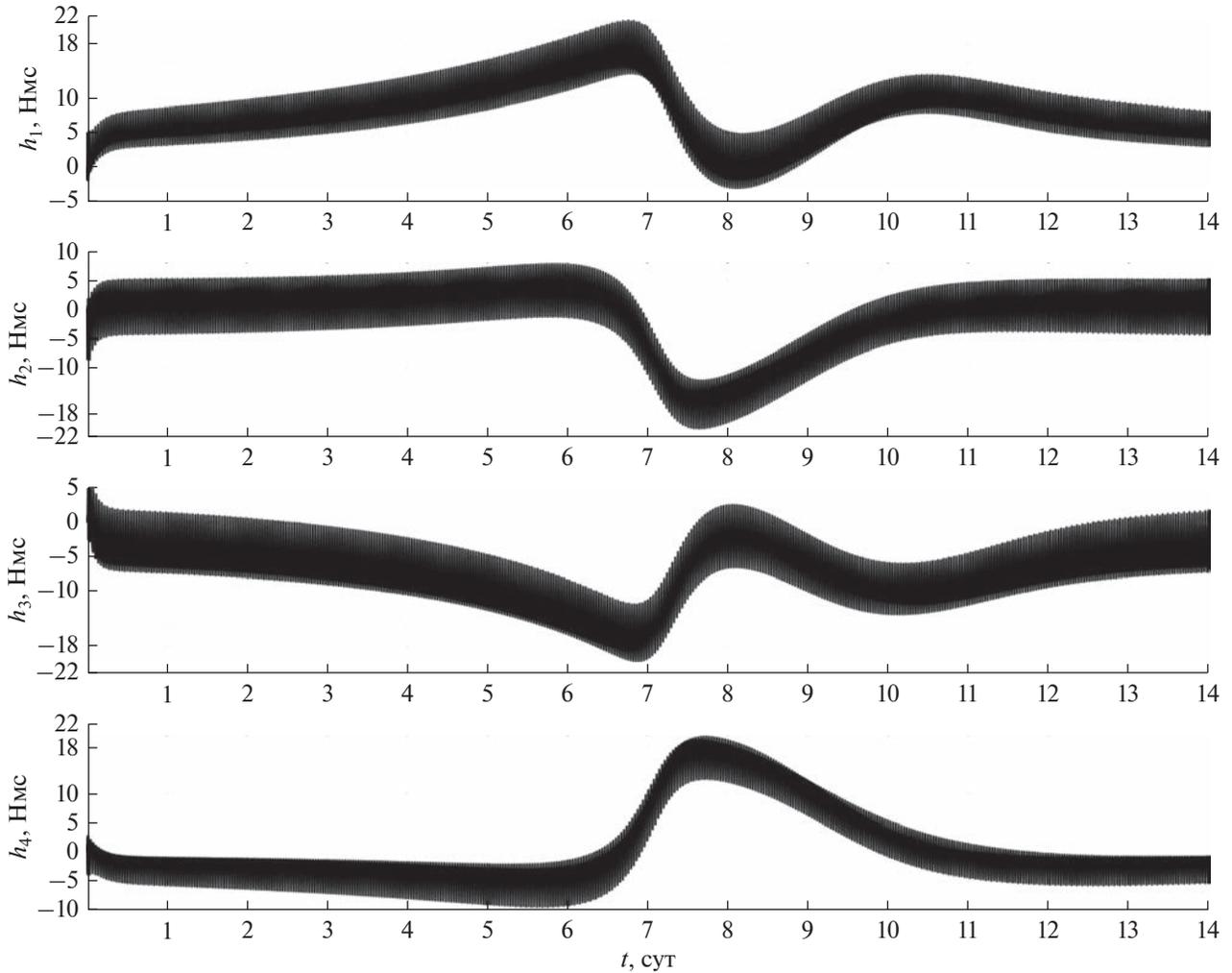


Рис. 11. Собственные кинетические моменты каждого ДМ системы (норма l_2).

которых алгоритмов поиска решения, примеры реализации которых приведены в работах [9–11]. Однако в случае, когда гиросистема состоит из четырех ДМ, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам симметричной пирамиды (см. рис. 4) решение системы (6) с помощью метода минимальной нормы l_∞ можно представить в виде [10]:

$$\mathbf{G} = D^+ U^T \mathbf{H} + h_0 \tilde{\mathbf{G}},$$

$$h_0 = -\frac{\min(D^+ U^T \mathbf{H}) + \max(D^+ U^T \mathbf{H})}{2}. \quad (8)$$

Здесь символами $\min(\cdot)$ и $\max(\cdot)$ обозначены компоненты вектора, имеющие минимальное и максимальное значения соответственно, $\tilde{\mathbf{G}}$ – вектор нуль-пространства [12] (ядра) матрицы UD , удовлетворяющий условию $UD\tilde{\mathbf{G}} = (0, 0, 0)^T$. Для рас-

сматриваемой схемы расположения ДМ нуль-пространство матрицы UD состоит из единственного базисного вектора $\tilde{\mathbf{G}} = (1, 1, 1, 1)^T$.

На рис. 12 показаны графики, аналогичные приведенным на рис. 11, полученные в результате численного моделирования движения КА с учетом соотношений (6), (8). Графики на рис. 15 также построены на интервалах времени 14 сут при значениях углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Приведенные результаты моделирования показали, что использование метода минимальной нормы l_∞ при решении системы (6) позволяет выполнить условие $|h_k| < h_{\max}$, $k = 1, \dots, 4$, в процессе реализации рассматриваемого режима солнечной ориентации КА на всем интервале времени моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что с помощью системы двигателей-маховиков, расположенных по схеме

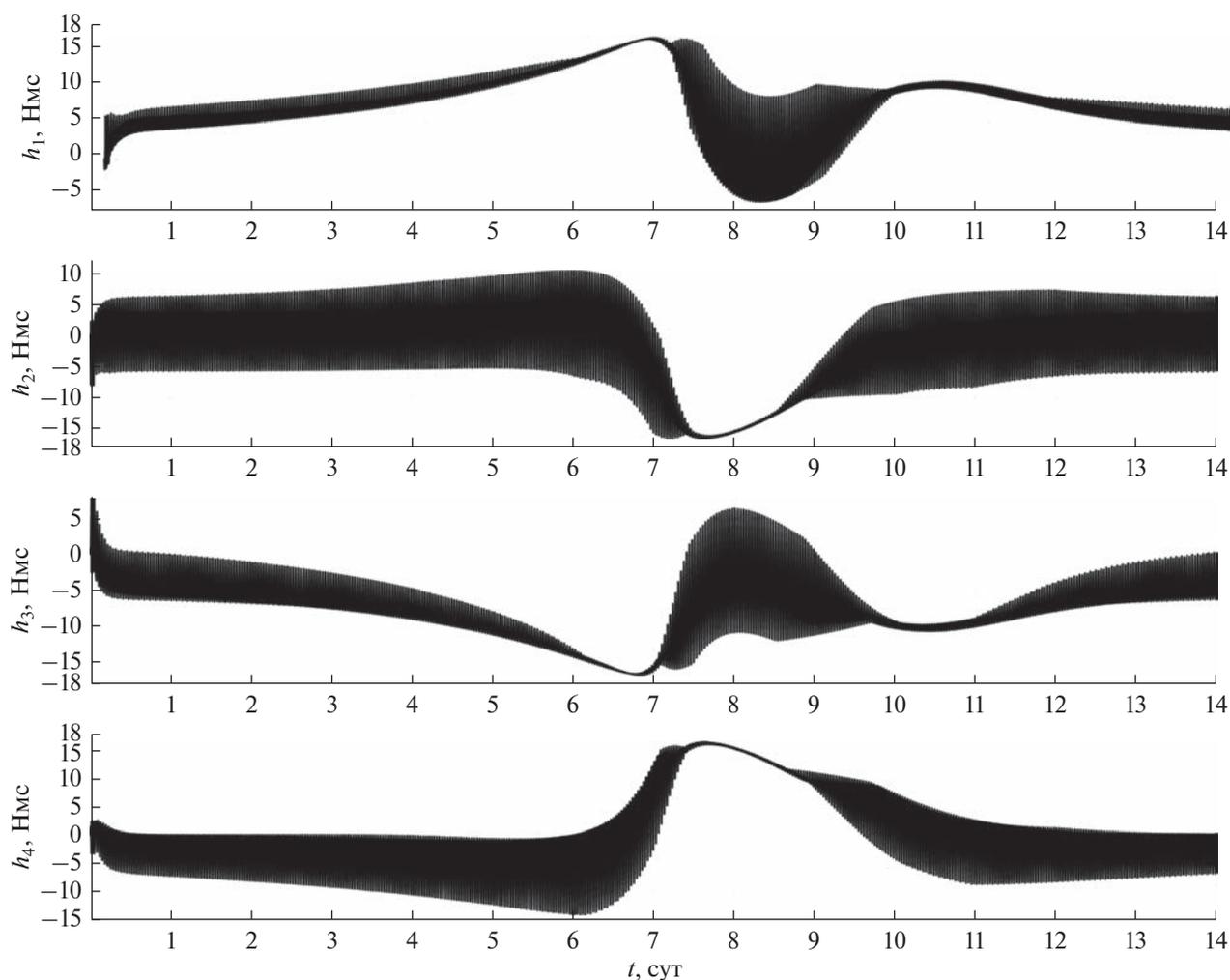


Рис. 12. Собственные кинетические моменты каждого ДМ системы (норма l_{∞}).

“четырёхугольная пирамида”, можно реализовать режим солнечной ориентации космического аппарата без проведения разгрузок кинетического момента. Предложенный в работе способ сравнения областей требуемого и реализуемого кинетического момента позволяет выбрать необходимые значения геометрических параметров схемы расположения двигателей-маховиков. Приведены результаты численного моделирования системы уравнений движения космического аппарата, подтверждающие правильность выбранных значений геометрических параметров, обеспечивающих реализацию режима солнечной ориентации космического аппарата.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при предварительном проектировании систем управления ориентацией космического аппарата, использующих в качестве исполнительных органов двигатели-маховики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Оценка низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // *Космич. исслед.* 2013. Т. 51. № 5. С. 380–388. <https://doi.org/10.7868/S0023420613050051> (*Cosmic Research*. 2013. Т. 51. № 5. С. 342–349.)
2. *Игнатов А.И.* Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2020. № 3. С. 164–176. <https://doi.org/10.31857/S0002338820030063>
3. *Игнатов А.И.* Оценка низкочастотных микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации // *Космич. исслед.* 2022. Т. 60. № 1. С. 43–56. <https://doi.org/10.31857/S0023420622010046> (*Cosmic Research*. 2022. Т. 60. № 1. С. 38–50.)

4. *Бажинев И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др.* Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса “Салют-6” – “Союз” – “Прогресс”. М.: Наука, 1985.
5. *Белецкий В.В.* Движение искусственного КА относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
6. *Меев Ж.* Астрономические формулы для калькуляторов. М.: Мир, 1988.
7. *Игнатов А.И.* Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 124–144.
<https://doi.org/10.31857/S0002338822010061>
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Москва, Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1988.
9. *Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X.* Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. № 5. P. 1606–1614.
<https://doi.org/10.2514/1.47235>
10. *Yoon H., Seo H.H., Choi H.-T.* Optimal uses of reaction wheels in the pyramid configuration using a new minimum infinity-norm solution // Aerospace Science and Technology. 2014. V. 39. P. 109–119.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.09.002>
11. *Yoon H., Seo H.H., Park Y.-W., Choi H.-T.* A New Minimum Infinity-Norm Solution: with Application to Capacity Analysis of Spacecraft Reaction Wheels // American Control Conf. (ACC). 2015. P. 1241–1245.
12. *Стрелг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.

УДК 629.786.2:614.876

РАДИАЦИОННЫЙ АСПЕКТ ДВУХ ВАРИАНТОВ НАКЛОНЕНИЯ ОРБИТЫ РОССИЙСКОЙ ОРБИТАЛЬНОЙ СЛУЖЕБНОЙ СТАНЦИИ

© 2023 г. В. Г. Митрикас*

Институт медико-биологических проблем РАН, Москва, Россия

*vg_mit@imbp.ru

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.

После доработки 15.04.2022 г.

Принята к публикации 15.06.2022 г.

Рассмотрен вклад в эффективную дозу от космических излучений радиационных поясов Земли, галактических космических лучей и протонов солнечных протонных событий для космонавтов, находящихся в рабочем отсеке большого диаметра служебного модуля *МКС*. Показано, что для квазистационарных источников космических излучений изменение наклона орбиты в 51.6° на 97.0° не приводит к существенным изменениям среднесуточной мощности эффективной дозы. При рассмотрении вклада в эффективную дозу от протонов солнечных вспышек дозовая нагрузка на космонавтов может увеличиваться в десять и более раз.

DOI: 10.31857/S0023420622700030, EDN: LUNCOZ

ВВЕДЕНИЕ

Среди профессионалов космической отрасли обсуждаются перспективы создания *Российской орбитальной служебной станции (РОСС)*. При этом рассматриваются два варианта наклона орбиты: 51.6° и 97.0° . По поводу второго варианта в интервью журналу «Русский космос» Д.О. Рогозин заявил: «Конечно, такая орбита подразумевает более высокий уровень радиации, и это повлияет на длительность полета экспедиций» (<https://www.roscosmos.ru/media/pdf/russianspace/rk2022-01-single.pdf>).

Проверим насколько справедливо это утверждение.

МЕТОДИКА

Самая большая среднесуточная мощность эффективной дозы для *МКС* зарегистрирована в августе–сентябре 2020 г. Средняя высота орбиты *МКС* в это время равнялась $H_{cp} = 424.0 \pm 1.6$ км, среднее значение A_p -индекса – 10.1 ± 6.7 . Для этого периода были выполнены расчеты дозовых нагрузок на космонавтов при их нахождении в рабочем отсеке большого диаметра (РОБД) служебного модуля (СМ) *МКС* при полете станции по орбите с наклоном 51.6° и 97.0° .

Согласно действующим нормативам обеспечения радиационной безопасности (РБ) [1] для контроля уровней радиационного воздействия на космонавтов необходимо использовать величину

эффективной дозы, которая согласно наземным нормам РБ [2] определяется как:

$$E = \sum_T W_T H_T, \quad (1)$$

где H_T – эквивалентная доза в органе или ткани T ,

$$H_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(r_i); \quad (2)$$

N – количество точек в органе, для которого проводится расчет; W_T – взвешивающий коэффициент для органа или ткани T (табл. 1).

Согласно [3] поглощенная доза в точке r_i органа T вычисляется по формуле:

$$D_T(r_i) = \int_0^\infty D(\xi) \omega_T(\xi, r_i) d\xi, \quad (3)$$

где $D(\xi)$ – удельная доза на глубине ξ ; $\omega_T(\xi, r_i)$ – функция экранированности точки r_i в органе T :

$$\omega_T(\xi, r_i) = \frac{1}{4\pi\Delta\xi} \int_{4\pi} \eta(r_i, \Omega) d\Omega, \quad (4)$$

где $\eta(r_i, \Omega)$ – единичная функция на отрезке от ξ до $\xi + \Delta\xi$.

Под функцией экранированности выбранной точки внутри рассматриваемого объекта понимается функция плотности вероятности встретить в любом направлении из рассматриваемой точки толщину защиты в интервале от X до $X + dX$. Расчет функций экранированности проводится в со-

Таблица 1. Количество точек в органах и тканях (N) и взвешивающие коэффициенты (W_T) для определения эффективной дозы

№	Орган	W_T	N
1	Гонады	0.20	11
2	Костный мозг (красный)	0.12	14
3	Толстый кишечник	0.12	10
4	Легкие	0.12	36
5	Желудок	0.12	15
6	Мочевой пузырь	0.05	7
7	Грудная железа	0.05	2
8	Печень	0.05	19
9	Пищевод	0.05	3
10	Щитовая железа	0.05	3
11	Кожа	0.01	2
12	Клетки костных поверхностей	0.01	34
13	Хрусталик глаза	0.007	2
14	Центральная нервная система	0.007	3
15	Сердце	0.007	7
16	Левая почка	0.007	7
17	Правая почка	0.007	7
18	Селезенка	0.007	6
19	Прямая кишка	0.007	7

ответствии с государственным стандартом [4]. В качестве модели тела человека (фантома) используются результаты работы [5, 6], а в качестве модели *МКС* результаты работы [7]. Входящая в равенство (1) эквивалентная доза H связана с поглощенной дозой D в выражении (2) простым соотношением:

$$H = D \cdot QF, \quad (5)$$

где QF – фактор качества.

В настоящей работе использована следующая зависимость коэффициента качества от линейной передачи энергии заряженных частиц в веществе $S(E)$ в МэВ см⁻¹:

$$QT = \left. \begin{array}{ll} 1.0, & S(E) \leq 35, \\ 0.02858S(E), & 35 \leq S(E) \leq 70, \\ 7.31 \cdot 10^{-2}S(E), & 70 \leq S(E) \leq 230, \\ QT = 4.9 \cdot 10^{-2}S(E)^{0.848}, & 230 \leq S(E) \leq 530, \\ -42.53 + 19.28 \ln S(E), & 530 \leq S(E) \leq 1750, \\ 20.0, & 1750 \leq S(E). \end{array} \right\} (6)$$

Подставим выражения (3) и (5) в равенство (1) и, используя линейность выражения (1), поменя-

ем порядок интегрирования и суммирования. В итоге выразим эффективную дозу как:

$$E = \int_0^{\infty} H_{\omega\phi}(\xi) \omega_{\omega\phi}(\xi, r_i) d\xi, \quad (7)$$

где $\omega_{\omega\phi}(\xi, r_i)$ – функция экранированности для расчета эффективной дозы.

$$\omega_{\omega\phi}(\xi, r_i) = \sum_T W_T \omega_T(\xi, r_i). \quad (8)$$

При таком подходе теряется определенность конкретной точки, но исключается необходимость расчета радиационного воздействия на каждый орган. Проведены расчеты функций экранированности различных органов для четырех пространственных ориентаций фантома: вперед–назад–влево–вправо. Для каждой пространственной ориентации использовано различное количество точек в соответствии с табл. 1. При этом в расчетах функций экранированности красного костного мозга учитывалось его процентное содержание в различных точках.

Определялись парциальные вклады в эффективную дозу от электронов и протонов радиационных поясов Земли (РПЗе и РПЗр) [4, 8] и от галактических космических лучей (ГКЛ) [9]. Солнечных протонных событий (СПС) в рассматриваемый период времени не зафиксировано. В качестве моделей потоков частиц РПЗ использованы результаты работы [10], в которой проведена модификация стандартов [11, 12]. В качестве модельного описания спектральных распределений заряженных частиц ГКЛ используется представление для отдельных групп ГКЛ из работы [13]. При этом потоки протонов с энергиями выше 100 МэВ нормировались на экспериментальные значения, полученные на спутниках *GOES* (англ. Geostationary Operational Environmental Satellite, геостационарный эксплуатационный спутник наблюдения за окружающей средой) [<http://www.swpc.noaa.gov/>]. Учет геомагнитных возмущений проводился по данным [http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/dst_realttime/].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты расчетов поглощенной и эффективной доз представлены в табл. 2.

Из анализа результатов табл. 2 следует, что мощность эффективной дозы в мезагерц в сутки мало меняется при переходе от наклона в 51.6° к наклонению орбиты в 97.0°, всего на 1–2%. При этом мощность поглощенной дозы в микрогрей в сутки меняется на 15–17%. Объяснение такому различию можно получить, рассматривая на рис. 1 трассы полета *МКС* для обоих вариантов наклона орбиты.

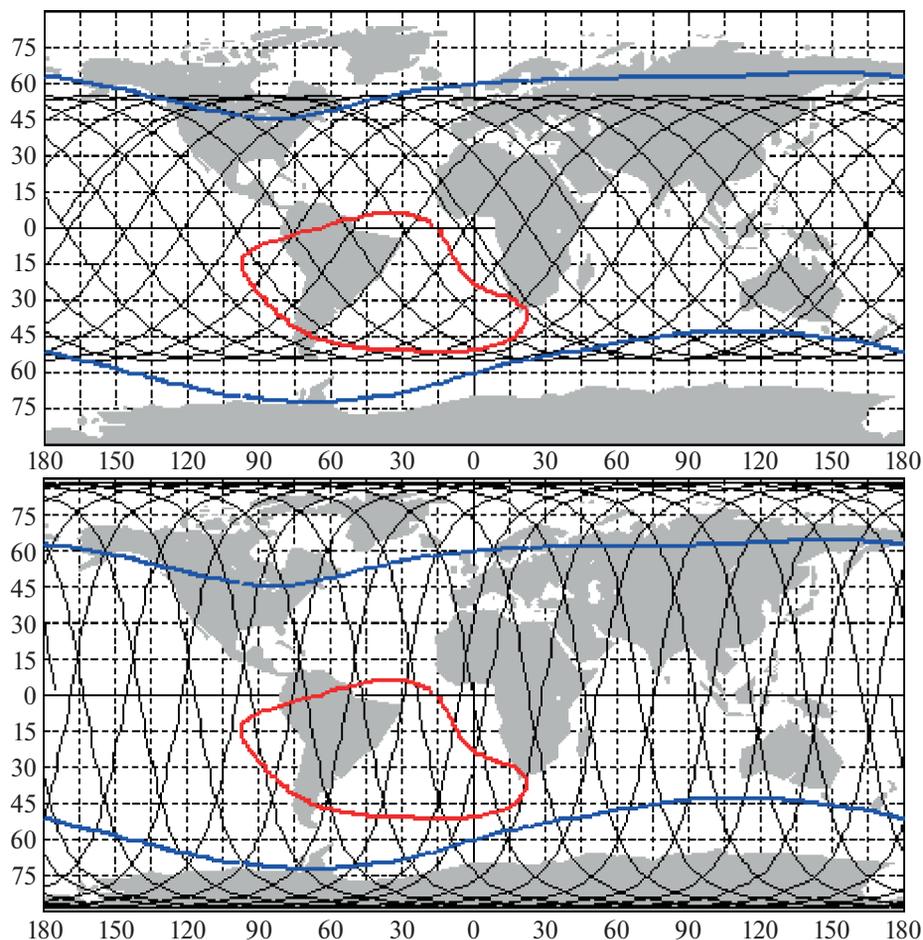


Рис. 1. Трассы полета СМ МКС для наклона орбиты 51.6° (сверху) и для наклона 97.0° (снизу). Кривая в центре рисунков обозначает изолинию постоянной магнитной напряженности $B = 0.24$ Гс, которая примерно соответствует границам ЮАА внутреннего РПЗ. Кривые в верхней и нижней части рисунков обозначают изолинии $L = 3.0$, которые примерно соответствуют границам внешнего электронного РПЗ.

Из рассмотрения рис. 1 следует, что при наклоне орбиты в 51.6° суммарное время нахождения СМ МКС в зоне Южно-Атлантической аномалии (ЮАА) составляет примерно 150 мин/сут, а при наклоне орбиты в 97.0° около 100 мин/сут.

В зоне ЮАА формируется вклад от протонов РПЗ, который практически пропорционален времени нахождения в ней. Вклад в эффективную дозу от ГКЛ формируется, в основном, в области полярных шапок. Этот вклад для мощности по-

Таблица 2. Парциальные вклады в дозу, полученную космонавтами при их нахождении в РОБД СМ МКС

	Наклонение орбиты 51.6°				Наклонение орбиты 97.0°			
	Поглощенная доза, мкГр сут ⁻¹							
2020 г.	РПЗе	РПЗр	ГКЛ	Σ	РПЗе	РПЗр	ГКЛ	Σ
Август	0.6	193.2	107.5	301.4	1.0	130.0	126.7	257.8
Сентябрь	0.7	187.0	107.6	295.3	1.1	128.8	127.3	257.2
Эффективная доза, мкЗв сут ⁻¹								
2020 г.	РПЗе	РПЗр	ГКЛ	Σ	РПЗе	РПЗр	ГКЛ	Σ
Август	0.6	237.5	503.8	742.0	1.0	159.9	563.9	724.8
Сентябрь	0.7	229.3	503.2	733.1	1.1	158.0	564.6	723.6

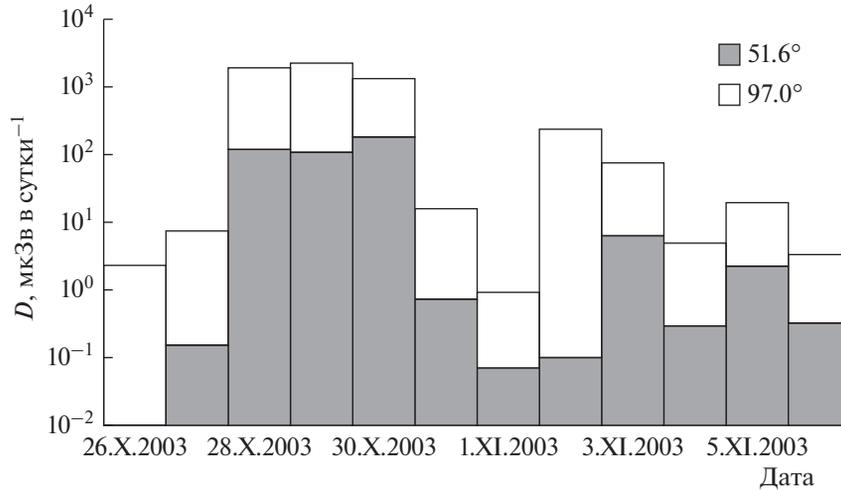


Рис. 2. Динамика эффективной дозы для космонавта в РОБД СМ МКС. Затемненная гистограмма для наклона орбиты 51.6° , прозрачная гистограмм для наклона орбиты 97.0° .

глощенной дозы в микрогрей в сутки возрастает на $\sim 12\%$, но этого возрастания недостаточно для компенсации снижения вклада в поглощенную дозу от протонов РПЗ. Это же увеличение почти полностью компенсирует снижение вклада протонов РПЗ в мощность эффективной дозы в мезазиверт в сутки. Противоположная картина наблюдается для электронов. Для орбиты с наклоном в 97.0° становится более существенным вклад от электронов внешнего электронного РПЗ, но по абсолютной величине он остается очень малым.

Таблица 3. Динамика вкладов в эффективную дозу (в мкЗв сут $^{-1}$) космонавтов при их нахождении в РОБД СМ МКС от серии СПС в период 26.X–6.XI.2003

	Наклонение орбиты 51.6°	Наклонение орбиты 97.0°
26.X	—	2.2
27.X	0.2	7.6
28.X	115.5	1904.5
29.X	103.7	2213.6
30.X	177.8	1273.9
31.X	0.7	15.9
1.XI	0.1	0.9
2.XI	0.1	243.9
3.XI	6.4	74.8
4.XI	0.3	4.9
5.XI	2.4	18.6
6.XI	0.3	3.3
Σ	407.5	5761.7

Как отмечено в работе [14] “*в настоящее время не существует единой аналитической модели для описания поведения электронов внешнего радиационного пояса Земли, поэтому для конкретного события на основе предлагаемых механизмов ускорения и транспортировки невозможно предсказать ожидаемую динамику потоков электронов*”. Возможно, что использование модели электронов согласно документу [12] не всегда корректно, особенно при возмущениях геомагнитной обстановки. Однако, как отмечено выше, в рассматриваемый период времени геомагнитная обстановка была достаточно спокойной, значение A_p -индекса равнялось 10.1 ± 6.7 .

Иная картина складывается для СПС. Самое большое СПС за весь период эксплуатации МКС произошло 28.X.2003 в серии вспышек за период 26.X–6.XI.2003. Поток протонов с энергиями больше 30 МэВ за все событие от 28.X.2003 составил $3.1 \cdot 10^9$ протон см $^{-2}$.

Эффективная доза для космонавта, находящегося в РОБД от всех протонных вспышек рассматриваемого периода при наклонении орбиты в 51.6° составила 407.5 мкЗв. Для наклонения орбиты в 97.0° эффективная доза выросла примерно в 14 раз и составила 5761.7 мкЗв. Необходимо отметить, что даже для СПС от 4.XI.2003 (поток протонов с энергиями больше 30 МэВ составил $3.1 \cdot 10^7$ протон см $^{-2}$) для орбиты 51.6° эффективная доза составила всего 3 мкЗв, но для орбиты 97.0° такая доза возрастает до 27 мкЗв. Динамика эффективной дозы для обоих вариантов наклона орбиты представлена на рис. 2.

Конкретные значения эффективной дозы представлены в табл. 2. Из рассмотрения результатов табл. 3 следует, что даже для крупных СПС

Таблица 4. Парциальные вклады в эквивалентную дозу в мкЗв на кожу космонавтов при осуществлении ВКД из *МКС* на орбите с наклоном 51.6° и с наклоном 97.0°

	Наклонение орбиты 51.6°	Наклонение орбиты 97.0°
РПЗ _е	103.2	131.1
РПЗ _р	190.9	158.5
ГКЛ	27.2	164.1
Σ	321.3	453.7

установленные нормативы обеспечения радиационной безопасности [1] не будут превышены.

При этом необходимо отметить, что в малых модулях *МКС* толщина защиты близка к 1 г см⁻². Это означает, что эффективная доза для космонавтов, находящихся в малых модулях, будет существенно больше, чем для космонавтов, находящихся в РОБД. В работе [15] отмечается, что за толщиной защиты 1 г см⁻² алюминия дополнительный радиационный риск составляет 55% от демографического риска. При увеличении толщины защиты до 20 г см⁻² радиационный риск снижается до 14%. Из этого следует, что на *РОСС* необходимо предусматривать радиационное убежище с толщиной защиты ~20 г см⁻².

Отдельного рассмотрения требует оценка радиационной нагрузки на космонавтов при осуществлении выходов в открытый космос и выполнении внекорабельной деятельности (ВКД). В качестве примера был рассмотрен один из выходов за 2014 г. Во время этого выхода средняя высота орбиты составляла 424.7 км, значение A_p -индекса равнялось 5. При осуществлении ВКД основное внимание от эффективной дозы переходит в оценке эквивалентной дозы на кожу (КЖ) [1]. Эффективная доза практически совпадает с дозой на кроветворную систему, средняя глубина залегания которой составляет 5 см. Для такой глубины практически несущественен вклад в дозу от электронов. В табл. 4 представлены результаты расчетов парциальных вкладов в эквивалентную дозу на кожу от источников космических излучений при проведении ВКД из *МКС* на орбите с наклоном 51.6° и с наклоном 97.0°.

Из рассмотрения результатов табл. 4 следует, что доза от излучений ГКЛ при наклонении орбиты 97.0° возрастает на 27% доза от протонов РПЗ уменьшается на 17%, доза от электронов РПЗ возрастает почти в шесть раз. Особое внимание при проведении ВКД необходимо обращать на состояние магнитосферы. После магнитных бурь могут происходить высыпания электронов внешнего РПЗ, что может приводить к существенному возрастанию дозовой нагрузки на космонавтов. Так,

в работе [16] Ц. Дачев (*англ.* Dachev Т.Р.) отмечает, что даже на орбите *МКС* при наклонении орбиты в 51.6° средняя мощность поглощенной дозы за защитой 0.3 г см⁻² от электронов при спокойной магнитосфере составляет 80–90 мкГр сут⁻¹. В периоды магнитных возмущений, как например 20–22 марта 2015 г. средняя мощность поглощенной дозы достигала значений 2700 мкГр сут⁻¹.

ВЫВОДЫ

В периоды минимума солнечной активности, когда на Солнце нет пятен и, соответственно, нет СПС, радиационная обстановка на *РОСС* будет практически такой же, как на *МКС*.

В периоды максимума солнечной активности необходимо предусматривать в составе *РОСС* хорошо защищенный отсек, который должен служить космонавтам радиационным убежищем.

При обеспечении радиационной безопасности космонавтов на *РОСС* существенно возрастает роль прогноза как вспышечной активности Солнца, так и магнитосферных возмущений.

Работа выполнена в рамках плана фундаментальных исследований ГНЦ РФ – ИМБП РАН по теме № 65.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ограничение облучения космонавтов при околоземных космических полетах (ООКОКП-2021). Методические рекомендации МР ФМБА 17.01-2021 / ГК “Роскосмос”. М.: Науч. кн., 2021. 44 с.
2. Нормы радиационной безопасности (НРБ-99/2009). Утв. гл. санитарным врачом РФ Г.Г. Онищенко 07.07.2009.
3. Методические указания. Безопасность радиационная экипажа космического аппарата в космическом полете. Методика расчета поглощенной и эквивалентной доз от протонов космических лучей за защитой. М.: Изд. стандартов, 1986. С. 8 РД-50 25645.208.
4. ГОСТ 25645.204. Безопасность радиационная экипажа космического аппарата в космическом полете. Методика расчета экранированности точек внутри фантома. М.: Изд. стандартов, 1984. 30 с.
5. ГОСТ 25645.203. Безопасность радиационная экипажа космического аппарата в космическом полете. Модель тела человека для расчета тканевой дозы. М.: 1984. 21 с.
6. Бондаренко В.А., Митрикас В.Г. Модель геометрического фантома человека для расчета тканевых доз в служебном модуле Международной космической станции // Авиакосм. и эколог. медицина. 2007. Т. 39. № 1. С. 34–39.
7. Митрикас В.Г. Модель защищенности обитаемых отсеков служебного модуля международной космической станции для оценки радиационной опасности // Авиакосм. и эколог. медицина. 2006. Т. 38. № 3. С. 41–47.

8. Безопасность радиационная экипажа космического аппарата в космическом полете. Метод расчета распределения поглощенной и эквивалентной доз космических излучений по толщине материалов на внешней поверхности космического аппарата на орбитах, проходящих через ЕРПЗ. М.: 1991. С. 9 РД 50-25645.216.
9. Методические указания. Безопасность радиационная экипажа космического аппарата в космическом полете. Методика расчета поглощенной и эквивалентной дозы от многозарядных ионов космических лучей. М.: 1986. С. 9 РД-50 25645.208.
10. Митрикас В.Г. Модель радиационных поясов Земли для оценки радиационной опасности на орбите ОПС "Мир" // Косм. исслед. 1999. Т. 37. № 5. С. 1–5.
11. ГОСТ 25645.138. Пояса Земли радиационные естественные. Пространственно-энергетические характеристики потоков протонов. М.: Изд. стандартов. 1986. С. 50
12. ГОСТ 25645.139. Пояса Земли радиационные естественные. Пространственно-энергетические характеристики потока электронов. М.: Изд. стандартов. 1986. С. 163
13. Ковалев Е.Е., Коломенский А.В., Муратова И.А., Петров В.М. Модельные описания дифференциальных спектров галактических космических лучей // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. № 5. С. 923–926.
14. Морозова Е.И., Безродных И.П., Семенов В.Т. Радиационные факторы риска для космических аппаратов // Вопросы электромеханики. 2009. Т. 112. С. 35–40.
15. Шафиркин А.В. Изменение парадигмы опасности космических излучений при осуществлении дальних замагнитосферных полетов к Луне и Марсу // Авиакосм. и эколог. медицина. 2020. Т. 54. № 1. С. 5–15.
16. Dachev T.P. Relativistic electron precipitation bands in the outside radiation environment of the international space station // J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2017. P. 177. P. 247–256. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2017.11.008>

УДК 629.78

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОМ ТЯГИ ВОЗДУШНОГО ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ НАИСКОРЕЙШЕГО ИЗМЕНЕНИЯ ВЫСОТЫ АПОГЕЯ ОРБИТЫ С УЛЬТРАНИЗКИМ ПЕРИГЕЕМ

© 2023 г. А. С. Филатьев^{1, 2}, О. В. Янова^{2, 3, *}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

³Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия

*yanova2007@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

После доработки 04.10.2022 г.

Принята к публикации 08.10.2022 г.

Рассмотрена задача оптимального по быстродействию изменения высоты апогея орбит с ультранизким перигеем (высотой 120–250 км). Для компенсации аэродинамического сопротивления космического аппарата используется воздушный электрореактивный двигатель (ВЭРД), топливом для которого служат газы заборной атмосферы. Учтено падение эффективности ВЭРД с увеличением угла атаки и возможность работы ВЭРД только при достаточной концентрации газа в камере ионизации. Задача решена на основе принципа максимума Понтрягина в предположении малости аэродинамического сопротивления и тяги по сравнению с гравитационными силами. Представлены результаты исследований оптимальных программ управления вектором тяги ВЭРД в зависимости от параметров орбиты, компоновки КА, двигателя и мощности источника энергии.

DOI: 10.31857/S0023420622600222, EDN: LGTYMJ

ВВЕДЕНИЕ

Значительное повышение эффективности выполнения космическими аппаратами (КА) целевых задач может быть обеспечено за счет использования ультранизких околоземных орбит высотой 120–250 км (УНОО) [1–3].

Для компенсации аэродинамического сопротивления на таких орбитах могут использоваться воздушные электрореактивные двигатели (ВЭРД), в которых топливом служат газы окружающей атмосферы [4–13]. В общем случае ВЭРД включают: воздухозаборник (ВЗ), обеспечивающий захват атмосферного газа; термализатор (накопитель), в котором частицы газа тормозятся до тепловых скоростей; ионизационную камеру (ИК), в которой газ ионизируется; зону разгона, в которой ионизированный газ ускоряется в электромагнитном поле; и нейтрализатор эжектируемой плазменной струи. Для функционирования последних трех систем необходим источник энергии (ИЭ), в качестве которого предполагается использовать солнечные батареи (СБ).

Отказ от запасенного топлива позволит повысить срок активного существования и эффектив-

ность выполнения задач наблюдения земной поверхности и связи. В то же время использование ВЭРД требует решения ряда проблем, связанных с особенностями орбитального полета на ультранизких высотах: значительно возросшим влиянием аэродинамических сил и аномалий гравитационного поля Земли.

Задачи оптимального управления низкоорбитальными КА с ВЭРД рассмотрены в ряде работ. В работах [6, 7] решалась задача оптимального управления тягой ВЭРД за счет изменения скорости истечения реактивной струи для поддержания КА на круговой УНОО, включая оптимизацию высоты орбиты в исследовании [7]. Оптимизация проводилась на основе принципа максимума Понтрягина [14] в предположении постоянных мощности бортового источника энергии и коэффициента аэродинамического сопротивления с учетом несферичности Земли. В работе [9] получены оценки требуемой тяги и предложен алгоритм адаптивного управления тягой электроракетного двигателя (ЭРД) для компенсации возмущений, обусловленных аэродинамическим сопротивлением КА и солнечной радиацией на круговых околоземных орбитах высотой 150–450 км. Работа [10] посвя-

шена анализу реализуемости полета на УНОО на основе статистического моделирования орбитального движения КА с адаптивным управлением тягой ВЭРД на околоземных слабоэллиптических орбитах (разность высот апогея и перигея не превышает 9 км) высотой 160 и 225 км. В публикации [11] представлен обзор предложений по управлению аэродинамическим качеством аппарата для поддержания заданной орбиты, стабилизации КА, маневрирования для предотвращения столкновений с различными объектами, фазирования и схода с орбиты.

Оптимизация управления вектором тяги КА с ВЭРД рассматривалась авторами в работах [15–18]. В исследованиях [15–17] задачи максимизации изменения высоты апогея и изменения наклона орбит сведены к поиску локально оптимального управления, обеспечивающего максимальную скорость изменения максимизируемых параметров в каждый момент времени с учетом малости влияния на функционал возмущающего ускорения по сравнению с гравитационным. Эффективность оптимальности программы управления с подобным критерием при решении задачи в детерминированной постановке может рассматриваться как мера потенциальной возможности компенсации случайных возмущений. Переход к локальной оптимизации управления позволил получить аналитические соотношения для синтеза управления КА с ВЭРД и его эффективности в предположении постоянных скорости истечения и аэродинамического сопротивления без учета зависимости тяги ВЭРД от угла между продольной осью КА и вектором скорости (угла атаки) и ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК.

Эффективность тяги ВЭРД существенно зависит от угла атаки вследствие уменьшения эффективной площади входа в ВЗ в плоскости, перпендикулярной вектору скорости, и относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками при наличии угла атаки [8, 13, 19, 20]. В работе [18] при “локальной” оптимизации управления учитывалось снижение тяги при ненулевых углах атаки из-за изменения эффективной площади входа в ВЗ.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления вектором тяги КА с ВЭРД для максимизации изменения высоты апогея орбиты с ультранизкой начальной высотой перигея с учетом ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК и зависимости тяги ВЭРД и аэродинамического сопротивления от угла атаки КА. Решение задачи получено на основе принципа максимума Понтрягина [14] в предположении малости изменения параметров орбиты в правых частях уравнений движения за один виток. Приведены результаты исследований

оптимальных программ управления углом атаки и тягой в зависимости от параметров задачи: начальной высоты перигея и апогея, скорости истечения, параметров компоновки КА.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение центра масс КА с ВЭРД в плоскости эллиптической орбиты с начальными высотами перигея h_{pi} и апогея h_{oi} . Задача состоит в определении оптимального управления вектором тяги ВЭРД для максимального изменения высоты апогея h_{α} без изменения высоты перигея h_{π} с учетом зависимости тяги и аэродинамического сопротивления от угла атаки и ограничения на допустимую концентрацию газа в ИК. Требование равенства конечной высоты перигея ее начальному значению обусловлено ограничениями на высоту полета КА с ВЭРД [16]. Ограничение сверху на высоту полета КА с ВЭРД следует из необходимости создания давления газа в камере ионизации не менее $5 \cdot 10^{-5}$ торр для стабильной работы ВЭРД [4]. Ограничение снизу определяется располагаемой мощностью ИЭ (СБ) для компенсации аэродинамического сопротивления КА: ниже некоторой высоты не удается обеспечить требуемую мощность электропитания для создания тяги, так как увеличение площади СБ в свою очередь еще более увеличивает сопротивление.

Движение центра масс КА описывается в геоцентрической инерциальной системе координат с началом координат в центре Земли. Ось Ox направлена в перигей орбиты (в случае круговой орбиты – по начальному радиус-вектору), ось Oy параллельна вектору скорости в перигее орбиты.

Приняты следующие допущения:

1. Нормальная аэродинамическая сила пренебрежимо мала.
2. Скорость c истечения реактивной струи ВЭРД постоянна: $c = \text{const}$.
3. Вектор тяги ВЭРД направлен вдоль продольной оси КА.
4. Масса КА постоянна: $m = \text{const}$.
5. Форма Земли сферическая.

Замечание. Допущение о сферической форме Земли основано на инвариантности аэродинамического сопротивления КА и тяги ВЭРД по отношению к плотности атмосферы (см. далее соотношения для расчета тяги и сопротивления (5), (6)). Это принципиально важное отличие ВЭРД от электроракетного двигателя, поскольку плотность атмосферы даже при движении по круговой орбите может меняться во много раз.

С учетом соотношений [21]

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\alpha} = \frac{p}{1-e} \quad (1)$$

и уравнений в оскулирующих переменных [22] запишем уравнения для изменения по времени радиуса перигея h_π , радиуса апогея h_α , электрической энергии E для создания тяги и истинной аномалии ϑ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_\pi}{dt} &= \frac{1}{V} \left[a_t \frac{2p}{(1+e)^2} (1 - \cos\vartheta) + a_s r \sin\vartheta \right], \\ \frac{dr_\alpha}{dt} &= \frac{1}{V} \left[a_t \frac{2p}{(1-e)^2} (1 + \cos\vartheta) - a_s r \sin\vartheta \right], \\ \frac{dE}{dt} &= W_p, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где r – расстояние от центра Земли до центра масс КА, $r = p/(1 + e \cos\vartheta) = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$; \mathbf{r} – радиус-вектор КА; $V = \sqrt{(1 + 2e \cos\vartheta + e^2)/p} = \sqrt{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}$, \mathbf{V} – вектор скорости КА, $\mathbf{V} = (V_r, V_n)$; V_r – составляющая вектора скорости, направленная по радиус-вектору \mathbf{r} , $V_r = (e \sin\vartheta)/\sqrt{p}$; V_n – составляющая вектора скорости, направленная по нормали к \mathbf{r} в сторону движения, $V_n = (1 + e \cos\vartheta)/\sqrt{p}$; p – фокальный параметр; e – эксцентриситет; $\mathbf{a} = (a_t, a_s)^T$, с компонентами: a_t – касательная (направлена по вектору скорости), a_s – нормальная (направлена к центру кривизны траектории в плоскости орбиты); W_p – мощность, потребляемая ВЭРД; t – время.

Переменные в выражении (2) и далее используются в безразмерном виде, причем старые обозначения переменных сохраняются:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left(\frac{r}{R_E} \right)_d, \quad V = \left(\frac{V}{V_R} \right)_d, \quad m = \left(\frac{m}{m_i} \right)_d, \\ t &= \left(\frac{t}{t_R} \right)_d, \quad g = \left(\frac{g}{g_o} \right)_d, \quad \mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}}{g_o} \right)_d, \\ P &= \left(\frac{P}{mg_o} \right)_d, \quad X = \left(\frac{X}{mg_o} \right)_d, \quad W_p = \left(\frac{W_p}{mg_o V_R} \right)_d, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где нижним индексом d обозначены размерные величины; R_E – средний радиус Земли; m_i – начальная масса КА (в силу допущения 4, $m = (m/m_i)_d = 1$); g_o – ускорение свободного падения на поверхности Земли, $V_R = \sqrt{g_o R_E}$, $t_R = \sqrt{R_E/g_o}$; P – тяга ВЭРД; X – аэродинамическое сопротивление КА.

Компоненты возмущающего ускорения создаются тягой ВЭРД P и аэродинамическим сопротивлением X :

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{P(\alpha) \cos\alpha - X(\alpha)}{m}, \\ a_s &= -\frac{P(\alpha) \sin\alpha}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где α – угол между вектором скорости и вектором тяги – угол атаки.

Вектор тяги

$$\mathbf{P} = P \mathbf{e}_p = \left(\zeta \frac{\mu_{out}(\alpha) c}{mg_o} \right)_d \mathbf{e}_p, \quad (5)$$

где $\mu_{out}(\alpha)$ – удельный расход массы топлива, $\mu_{out}(\alpha) = \eta_c \mu_{in}(\alpha)$; $\mu_{in}(\alpha)$ – скорость поступления массы газа в ВЗ, $(\mu_{in}(\alpha))_d = \rho(h) V A_{in} k_p(\alpha) V_R$; η_c – эффективность забора газа, $0 \leq \eta_c \leq 1$; h – высота полета КА; $\rho(h)$ – плотность атмосферы; $k_p(\alpha)$ – коэффициент эффективности ВЗ в зависимости от угла атаки [19, 20]; A_{in} – площадь входного сечения ВЗ, ζ – параметр включения двигателя, принимающий значение нуль при неработающем и единица при работающем; \mathbf{e}_p – единичный вектор тяги.

Потребляемая ВЭРД мощность W_p определяется по формуле $W_p = \mu_{out} c^2 / 2\eta_T$.

Вектор силы сопротивления

$$\mathbf{X} = -X \mathbf{e}_V = -\left(\frac{0.5 \rho(h) A_{SC} (V V_R)^2 c_{xa}(\alpha)}{mg_o} \right)_d \mathbf{e}_V, \quad (6)$$

где $c_{xa}(\alpha)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления КА; A_{SC} – площадь поперечного сечения КА; $\mathbf{e}_V = \mathbf{V}/V$.

Для создания тяги необходимо, чтобы концентрация газа в ИК $n_{IC}(\alpha)$ была не меньше минимально допустимой n_{min} , при которой возможна его ионизация:

$$n_{IC}(\alpha) = n(h) k_c k_p(\alpha) \geq n_{min}, \quad (7)$$

где $n(h)$ – концентрация газа в атмосфере; k_c – коэффициент компрессии газа в ИК, определяющий, во сколько раз увеличивается концентрация газа в ИК по сравнению с концентрацией во входном потоке.

Отсюда следует, что $\xi \equiv 0$ при $n_{IC} < n_{min}$.

На угол атаки КА наложено ограничение

$$|\alpha| \leq \alpha_{max}, \quad (8)$$

где α_{max} – максимально допустимый угол атаки.

Ограничение (8) угла атаки КА с ВЭРД в первую очередь обусловлено снижением эффективности поступления атмосферных газов в ВЗ, что показано далее.

В качестве компонент вектора управления \mathbf{u} приняты угол атаки α и параметр включения двигателя ζ :

$$\mathbf{u} \equiv \{\alpha, \zeta\}^T, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \{|\alpha| \leq \alpha_{\max}, n_{IC}(\alpha) \geq n_{\min}, \zeta = \{0, 1\}\}.$$

Реализация заданных углов атаки может обеспечиваться известными средствами стабилизации и управления движением КА вокруг центра масс, достоинства и недостатки использования которых для управления вектором тяги рассматривались в исследовании [23]. Отметим, что возрастание аэродинамических моментов на УНОО относительно возмущающих моментов других типов увеличивает влияние аэродинамической компоновки КА и возможности использования специальных аэродинамических поверхностей (например, [24]).

В начальный момент времени $t_i = 0$,

$$\vartheta(t_i) = \vartheta_i = 0, \quad h_{\pi}(t_i) = h_{\pi i}, \quad (10)$$

$$h_{\alpha}(t_i) = h_{\alpha i}, \quad E(t_i) = E_i = 0.$$

В силу сделанных допущений достаточно рассмотреть движение КА с ВЭРД на одном витке орбиты $\vartheta \in [0, 2\pi]$. В конечный момент времени t_f :

$$\vartheta(t_f) = \vartheta_f = 2\pi, \quad h_{\pi}(t_f) = h_{\pi f} = h_{\pi i}. \quad (11)$$

Функционал задачи – максимум изменения высоты апогея за виток орбиты при условии равенства начальной $h_{\pi i}$ и конечной $h_{\pi f}$ высоты перигея:

$$\Phi = \Delta h_{\alpha f} \Big|_{h_{\pi f} = h_{\pi i}} \Rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}, \quad (12)$$

где $\Delta h_{\alpha f} = h_{\alpha f} - h_{\alpha i}$, $h_{\alpha f} = h_{\alpha}(t_f)$.

Модель аэродинамического сопротивления

Аэродинамическое сопротивление – одно из основных слагаемых возмущающего воздействия на движение КА на высотах менее 300 км. Оценка аэродинамического сопротивления КА зависит от принятой модели взаимодействия молекул с поверхностью, температуры и молекулярного состава атмосферы, температуры и шероховатости материала поверхности и т.д. Обзор различных моделей взаимодействия молекул с поверхностью и сравнение полученных с их использованием коэффициентов аэродинамических сил приведены в публикациях [24–27]. Наиболее простой представляется максвелловская модель взаимодействия, в которой используется единственный коэффициент σ , определяющий долю молекул, испытывающих диффузное отражение от поверхности [28]. Результаты анализа движения аппаратов на высотах менее 300 км показывают, что наиболее точное описание аэродинамических сил может быть получено в предположении практически полностью

диффузного отражения молекул ($\sigma \approx 1$) [29–32]. Доминирование диффузного отражения означает возрастание роли поверхностей КА, параллельных потоку, в аэродинамическом сопротивлении.

При оптимизации управления углом атаки КА на основе принципа максимума Понтрягина использование аэродинамического сопротивления КА в форме представленных в работах [24–32] моделей приведет к существенному усложнению математической и численной процедуры решения краевой задачи, к которой сводится оптимизационная. В связи с этим для регуляризации исследований в настоящей работе предложена модель аэродинамического сопротивления КА, позволяющая без существенной потери точности использовать простые аналитические зависимости аэродинамического сопротивления от характеристик атмосферы и угла атаки КА.

Для наглядности формирования модели аэродинамического сопротивления определим проекции сечений КА плоскостями, параллельными и перпендикулярными продольной оси КА и плоскости орбиты π_{orb} (рис. 1): A_{SC} – площадь и обозначение поперечного сечения КА, A_{pn} – площадь и обозначение проекции сечений КА на плоскость π_{pn} , параллельную продольной оси КА и перпендикулярную π_{orb} , A_{pp} – площадь и обозначение проекции сечений КА на плоскость π_{pp} , параллельную продольной оси КА и π_{orb} . Тогда, предполагая, что движение КА происходит без скольжения (плоскость симметрии КА проходит через вектор скорости) и, принимая A_{SC} в качестве характерной площади, коэффициент аэродинамического сопротивления КА с учетом исследований [28, 33] представим в виде

$$c_{xa} = c_{xa_n} + c_{xa_par}, \quad (13)$$

где c_{xa_n} – коэффициент аэродинамического сопротивления, $c_{xa_n} = c_{x_0} \cos \alpha$, характеризующегося проекцией A_{SC} , c_{x_0} – коэффициент аэродинамического сопротивления КА при нулевом угле атаки; c_{xa_par} – коэффициент аэродинамического сопротивления, $c_{xa_par} = c_{xa_pn} + c_{x_pp}$, характеризующегося проекциями A_{pn} и A_{pp} соответственно: $c_{xa_pn} = k_{pn} c_{x_0} |\sin \alpha|$, $k_{pn} = A_{pn} / A_{SC}$, $c_{x_pp} = k_{pp} c_{x_{||}}$, $k_{pp} = A_{pp} / A_{SC}$, $c_{x_{||}} = 1 / (\sqrt{\pi} S_{\infty})$ – коэффициент аэродинамического сопротивления пластины при нулевом угле атаки; S_{∞} – скоростное соотношение, равное отношению скорости набегающего потока V к тепловой скорости молекул в ИК.

Из приведенных соотношений видно, что $c_{xa_pn} = 0$ при $\alpha = 0$, что не соответствует режиму диффузного отражения молекул. Для учета вклада проекций A_{pn} в сопротивление при $\alpha = 0$ предложена аппроксимация $|\sin \alpha|$:

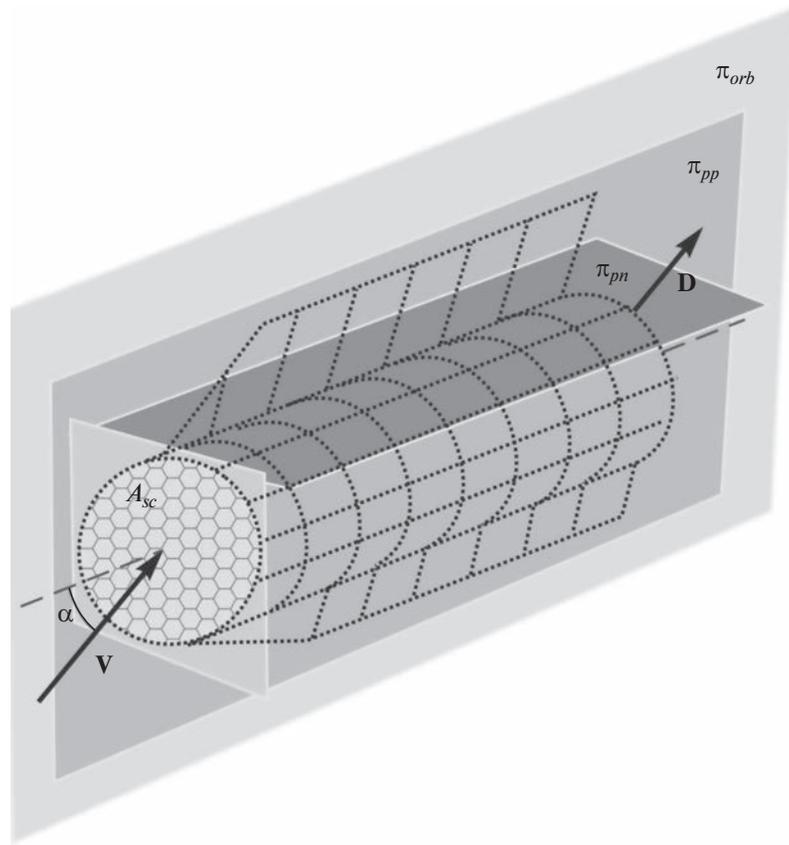


Рис. 1. Схема расположения плоскостей, на которые проецируются поверхности КА при создании модели аэродинамических сил, по отношению к продольной оси КА и плоскости орбиты π_{orb} .

$$\tilde{f}(\alpha) \approx c_{x_{//}} \sqrt{1 + (\sin\alpha/c_{x_{//}})^2}. \quad (14)$$

Как следует из выражения (14), $\tilde{f}(0) = c_{x_{//}}$, а при $\alpha > 0$ функция $\tilde{f}(\alpha)$ позволяет аппроксимировать $|\sin\alpha|$ с достаточной точностью (рис. 2). В результате получаем модель аэродинамического сопротивления КА (6) с коэффициентом $c_{xa}(\alpha)$ в виде

$$c_{xa}(\alpha) = c_{x_0} \left(\cos\alpha + k_{pn} c_{x_{//}} \sqrt{1 + (\sin\alpha/c_{x_{//}})^2} \right) + k_{pp} c_{x_{//}}. \quad (15)$$

Для верификации сформированной модели (15) проведено ее сравнение с аэродинамическим сопротивлением, рассчитываемым по широко используемой при исследованиях движения в верхних слоях атмосферы модели “Diffuse Reflection with Incomplete Accommodation” (DRIA) [27, 29, 31]. Результаты сравнения с моделью DRIA для полностью диффузного отражения на рис. 3, рассчитанные для двух значений удлинения КА $\lambda_{SC} = 2$ и 4 при $k_{pn} = k_{pp}$, подтверждают возможность применения модели (15) для описания аэродинамического сопротивления аппаратов в свободномолекулярном потоке.

Модель тяги ВЭРД

Влияние угла атаки на величину тяги ВЭРД определяется уменьшением [18–20]:

- 1) эффективной площади входа в ВЗ $A_{in} \cos\alpha$,

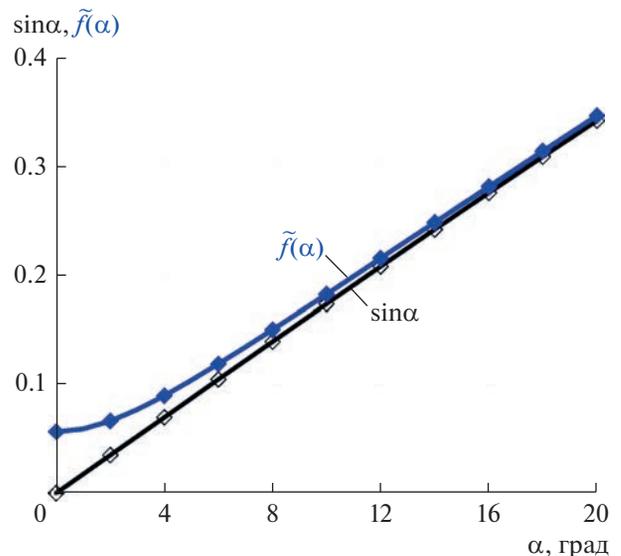


Рис. 2. Зависимости $\sin\alpha$ и его аппроксимации $\tilde{f}(\alpha)$ от угла атаки.

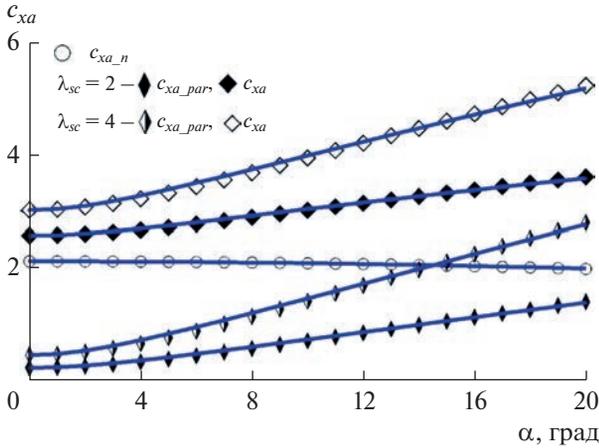


Рис. 3. Зависимости коэффициентов аэродинамического сопротивления от угла атаки модели (15) показаны сплошными линиями, маркерами отмечены расчеты по модели DRIA.

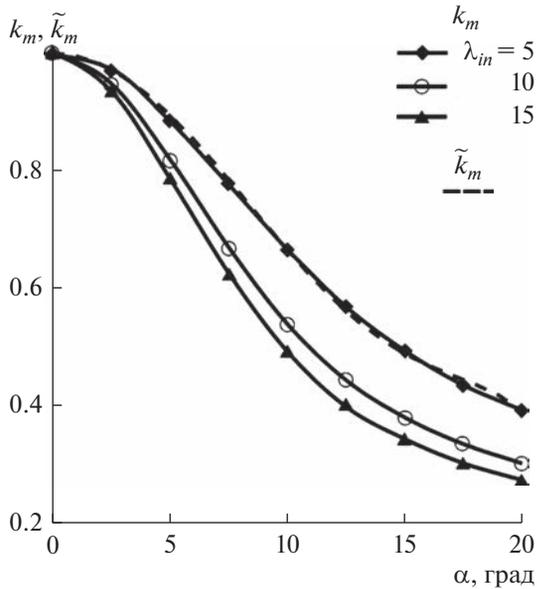


Рис. 4. Относительное снижение эффективности ВЭРД k_m из-за угла атаки α для цилиндрического канала ВЗ удлинением $\lambda_{in} = 5, 10, 15$ и аппроксимация $\tilde{k}_m(\alpha)$ для $\lambda_{in} = 5$.

2) относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками при наличии угла атаки $k_m(\alpha)$.

Тогда общий коэффициент, характеризующий уменьшение эффективности ВЗ, а, следовательно, и концентрации молекул в ИК и пропорциональной ей тяги (5), равен:

$$k_p(\alpha) = k_m(\alpha) \cos \alpha. \quad (16)$$

В работе [19] представлены рассчитанные методом Монте-Карло и полученные эксперимен-

тально значения $k_m(\alpha)$ для цилиндрического ВЗ из нержавеющей стали удлинением $\lambda_{in} = 9.4$, которые практически совпали.

В работе [20] приведены рассчитанные методом Монте-Карло зависимости $k_m(\alpha)$ для цилиндрических ВЗ удлинением $\lambda_{in} = 5, 10, 15$ (рис. 4). Для использования в условиях оптимальности там же представлена аппроксимация $\tilde{k}_m(\alpha)$ зависимости $k_m(\alpha)$ для цилиндрического ВЗ с $\lambda_{in} = 5$ степенным многочленом с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов:

$$\tilde{k}_m(\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^3 k_i \alpha^{2i}, \quad (17)$$

где $k_1 = -14.8094, k_2 = 142.150, k_3 = -504.470$, радиус апогея α в рад.

Модель атмосферы

Используется модель атмосферы ISO/FDIS 14222 (Space environment (natural and artificial) – Earth upper atmosphere. ISO/FDIS 14222, ISO 2013) для средней солнечной активности. Для использования в расчетах построены аппроксимации зависимости плотности и концентрации атмосферы от высоты полиномами 4-й степени.

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Условия оптимальности

Решение задачи (12) основано на применении принципа максимума Понтрягина [14].

В силу малости возмущающего ускорения по сравнению с гравитационным $|a| \ll |g|$, фокальный параметр p и эксцентриситет e орбиты в правых частях системы уравнений (2) будем считать постоянными на протяжении одного витка орбиты:

$$p = \text{const}, \quad e = \text{const}.$$

Гамильтониан H системы (2) с учетом ограничений (7), (8):

$$H = \psi_\pi \dot{\pi} + \psi_\alpha \dot{\alpha} + \psi_E \dot{E} + \psi_\vartheta \dot{\vartheta} + \lambda_n(n_{\min} - n_{IC}) + \lambda_\alpha(|\alpha| - \alpha_{\max}), \quad (18)$$

где $\lambda_n, \lambda_\alpha$ – множители Лагранжа; ψ – вектор сопряженных переменных, $\psi = (\psi_\pi, \psi_\alpha, \psi_E, \psi_\vartheta)^T$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\psi^T = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad z = (r_\pi, r_\alpha, E, \vartheta)^T. \quad (19)$$

Из уравнений (19) и условия трансверсальности $[-\delta r_\alpha - H \delta t + (\psi, \delta z)]|_{t_f} = 0$ следует:

$$\psi_\alpha = \text{const} = 1, \quad \psi_E = \text{const} = 0. \quad (20)$$

Таблица 1. Варианты вычислений $\Delta H(\alpha, \zeta)$

$\Delta H_{opt H} = \Delta H \left(\alpha_{opt} = \alpha_{opt H} : \left\{ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial \alpha^2} < 0 \right\}, \zeta = 1 \right)$
$\Delta H_{11} = \Delta H(\alpha_{opt} = \pm \alpha_{max}, \zeta = 1)$
$\Delta H_{10} = \Delta H(\alpha_{opt} = \pm \alpha_{max}, \zeta = 0)$
$\Delta H_{00} = \Delta H \left(\alpha_{opt} = 0 : \left\{ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial \alpha^2} < 0 \right\}, \zeta = 0 \right)$
$\Delta H_{n_1} = \Delta H(\alpha_{opt} = \alpha_{opt n} : n_{IC}(\alpha_{opt n}) = n_{min}, \zeta = 1)$

В соответствии с условиями оптимальности [14]

$$\mathbf{u}_{opt} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H, \quad (21)$$

что приводит к определению максимума не дифференцируемой функции двух переменных

$$\Delta H(\alpha, \zeta) = \psi_\pi \dot{r}_\pi + \psi_\alpha \dot{r}_\alpha + \lambda_n(n_{min} - n_{IC}) + \lambda_\alpha(|\alpha| - \alpha_{max}), \quad (22)$$

который в данном случае находится в результате сравнения его значений для вариантов $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ (9), указанных в табл. 1.

В табл. 1 $\alpha_{opt H}$ вычисляется с помощью рекуррентной формулы:

$$\alpha_{opt H}^{k+1} = \frac{\partial \Delta H_{opt H}}{\partial \alpha}(\alpha_{opt H}^k) + \alpha_{opt H}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

где с учетом (2), (5), (6), (15), (17), (18)

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_{opt H} &= \\ &= \tilde{k}_m(\alpha) \cos \alpha (A \cos \alpha + F \sin \alpha) + B \cos \alpha + C, \\ A &= 2\eta_C a_\vartheta c, \quad B = -a_\vartheta c_{x0} V, \\ C &= C_0 c_{x0} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{c_{x0}} \right)^2}, \quad C_0 = -k_{pn} a_\vartheta c_{x0} V, \\ F &= \eta_C b_\vartheta c, \quad a_\vartheta = \frac{1 + \cos \vartheta}{(1 - e)^2} + \psi_\pi \frac{1 - \cos \vartheta}{(1 + e)^2}, \\ b_\vartheta &= \frac{\sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} (1 - \psi_\pi). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Начальное приближение $\alpha_{opt H}^0 = (F + C_0)/(4A(1 - k_1) + B)$ в выражении (23) определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial \Delta H_{appr}}{\partial \alpha}(\alpha_{opt H}^0) = 0, \quad (25)$$

где ΔH_{appr} – аппроксимация (24) с учетом равенств (14), (17) путем разложения в ряд функций

угла атаки α в окрестности $\alpha = 0$ до α^2 включительно.

Для обеспечения требуемой точности численного интегрирования моменты, соответствующие угловым точкам в правых частях систем уравнений (2) и (19), определяются с достаточной точностью из решения в общем случае нелинейных уравнений методом хорд. Появление угловых точек связано с выходом на ограничения (7), (8) и сходом с них и сменой режимов полета в соответствии с условиями оптимальности (21) и табл. 1. Соответствующие невязки ε указаны в табл. 2.

При активном ограничении (7) угол атаки $\alpha_{opt n}$ определяется из решения нелинейного уравнения $n_{IC}(\alpha) = n_{min}$ методом хорд с невязкой

$$\varepsilon = \left| k_p(\alpha) - \frac{n_{min}}{n(h)k_c} \right|.$$

Решение краевой задачи

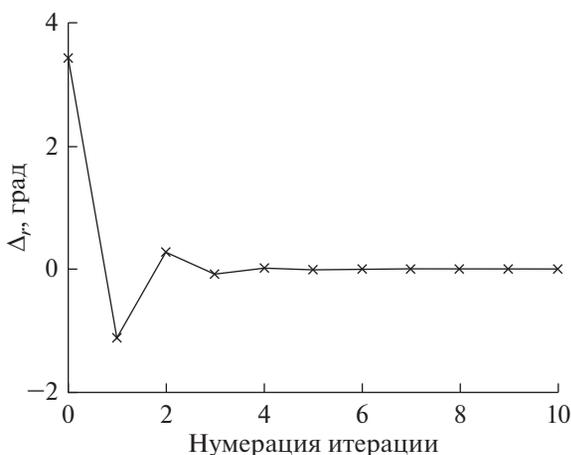
Использование принципа максимума Понтрягина позволяет свести исходную задачу поиска оптимального управления в функциональном пространстве к решению краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (19). Для решения двухточечной краевой задачи применяются модифицированный метод Ньютона и метод гомотопии. При сделанных допущениях и с учетом равенств (20) варьируемым параметром выступает сопряженная переменная $\psi_n = \text{const}$, а соответствующая невязка Δ_π следует из условия (11): $\Delta_\pi = h_{\pi f} - h_{\pi i}$. Для определения оптимального управления в каждой точке траектории вычисляется оптимальный угол атаки α_{opt} в соответствии с условиями оптимальности (21) и табл. 1. На рис. 5 показано изменение невязки $\Delta_r = \alpha_{opt H}^{k+1} - \alpha_{opt H}^k, k = 0, 1, \dots$, по итерациям при применении рекуррентной формулы (23) для вычисления $\alpha_{opt} = \alpha_{opt H} = -9.40487$ град, полученного при $\Delta_r \leq 10^{-4}$ град.

Таблица 2. Невязки для отслеживания угловых точек методом хорд

Причина возникновения угловой точки	Невязка
Выход на ограничение (7) при $\vartheta < \pi$ и сход с него при $\vartheta > \pi$	$\varepsilon = \left 1 - \frac{n_{JC}(\alpha_{opt H})}{n_{min}} \right $
Сход с ограничения (7) при $\vartheta < \pi$ и выход на него при $\vartheta > \pi$:	
• при $\Delta H(\alpha_{max}, 0) > \Delta H(\alpha_{opt n}, 1)$	$\varepsilon = \left \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha_{opt n}, 1) \right $
• при $\Delta H(\alpha_{max}, 0) \leq \Delta H(\alpha_{opt n}, 1)$	$\varepsilon = \left 1 - \frac{n_{JC}(\alpha = 0)}{n_{min}} \right $
Смена режимов полета между $(\alpha_{opt H}, \zeta = 1)$ и $(\alpha_{max}, \zeta = 0)$	$\varepsilon = \left \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha_{opt H}, 1) \right $
Смена режимов полета между $(\alpha = 0, \zeta = 0)$ и $(\alpha_{max}, \zeta = 0)$	$\varepsilon = \left \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha = 0, 0) \right $

Таблица 3. Параметры ВЭРД, КА и орбит

Параметр	Значения
Начальная высота перигея $h_{\pi i}$, км	[140, 180]
Начальная высота апогея h_{oi} , км	[160, 1000]
Площадь поперечного сечения КА A_{SC} , м ²	0.1
Удлинение КА λ_{SC}	[2, 8]
Тяговый к.п.д. ВЭРД η_T	0.8
Эффективность забора газа η_c	0.333
Коэффициент компрессии газа в ИК k_c	145
Скорость истечения реактивной струи c , км/с	[80, 140]
Коэффициент аэродинамического сопротивления КА при нулевом угле атаки c_{x0}	2.2
Минимально допустимая концентрация молекул газа в ИК n_{min} , м ⁻³	10^{18}
Скоростное соотношение частиц в набегающем потоке S_∞	10
Максимально допустимый угол атаки $ \alpha_{max} $, град	20

**Рис. 5.** Пример изменения невязки Δr по итерациям процедуры поиска оптимального угла атаки по рекуррентной формуле (23).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основании разработанной методики проведены численные исследования для параметров ВЭРД, КА и орбит, приведенных в табл. 3.

Сделаны следующие допущения:

1. КА движется по солнечно-синхронной орбите (ССО) в плоскости терминатора.
2. Площадь входного отверстия ВЗ при $\alpha = 0$ равна площади поперечного сечения КА $A_{in} = A_{SC}$.
3. $A_{pn} = A_{pp}$.
4. Ограничение на угловую скорость разворота КА относительно центра масс отсутствует.

Оптимальные программы изменения угла атаки КА и тяги ВЭРД на орбитах с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея h_{oi} и истинной аномалии ϑ приведены на рис. 6, 7. На рис. 6 участки опти-

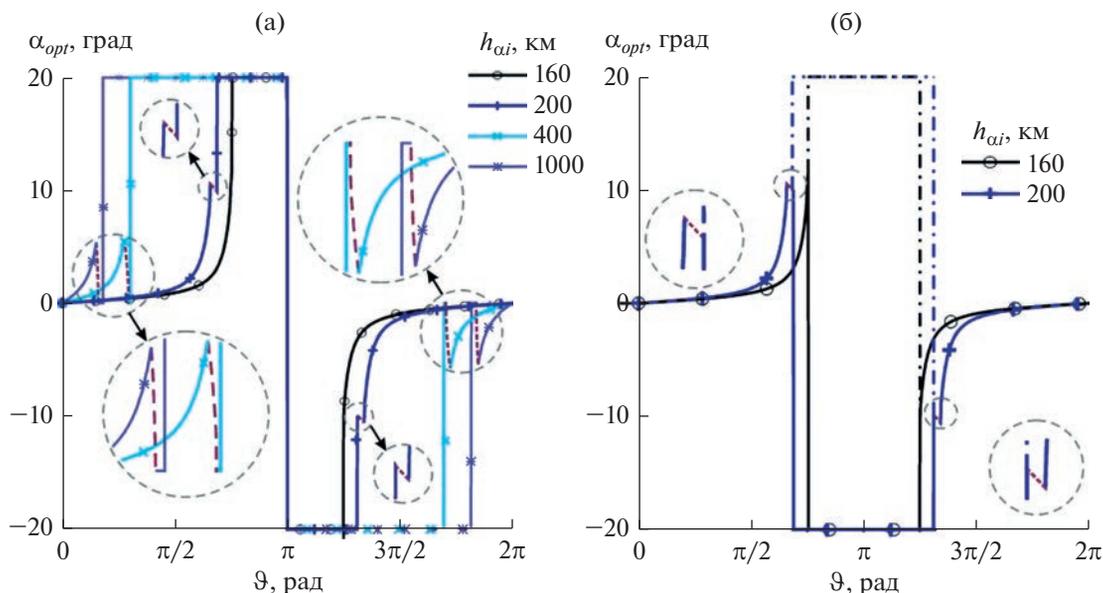


Рис. 6. Оптимальные программы изменения α_{opt} на орбитах с начальными $h_{\pi i} = 160$ км и $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км в зависимости от истинной аномалии ϑ ; штриховыми линиями показаны участки, соответствующие граничной концентрации $n_{IC} = n_{min}$ (а); варианты $\alpha_{opt}(\vartheta)$ при реализации $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ (сплошные линии) и $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ (штрихпунктирные линии) на участках движения по границе ограничения (8) (б).

мальной программы управления углом атаки при работе ВЭРД с минимально допустимой концентрацией газов в ИК (на границе ограничения (7)) показаны пунктирными линиями. На круговой орбите (начальная высота орбиты $h_{orb i} = 160$ км) концентрация газов в ИК не снижается до минимально допустимой, и участок, соответствующий движению по границе ограничения (7), отсутствует. Функция ΔH_{10} (табл. 1) — четная, т.е. $\Delta H(\alpha_{opt} = \alpha_{max}, \zeta = 0) = \Delta H(\alpha_{opt} = -\alpha_{max}, \zeta = 0)$ в соответствии с выражениями (2), (4)–(6), (15), (18), (20), (22). Поэтому выбор $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ при $\vartheta \leq \pi$ и $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ при $\vartheta > \pi$ на рис. 6а обусловлен минимизацией скачкообразного изменения угла атаки в более плотных слоях атмосферы. В этом случае максимальное изменение угла атаки (переключение с $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ на $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$) происходит в апогее орбиты. В то же время на круговых и слабо эллиптических орбитах это обстоятельство несущественно. С точки зрения минимизации количества резких изменений α_{opt} возможные варианты зависимостей $\alpha_{opt}(\vartheta)$ для исходных круговой орбиты с $h_{orb i} = 160$ км и орбиты с $h_{\pi i} = 160$ км и $h_{\alpha i} = 200$ км показаны на рис. 6б: с реализацией $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ (сплошные линии) и $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ (пунктирные линии) на участках движения по границе ограничения на угол атаки (8).

На рис. 7 пунктирными линиями показаны участки работы ВЭРД при минимально допустимой концентрации в ИК (на границе ограниче-

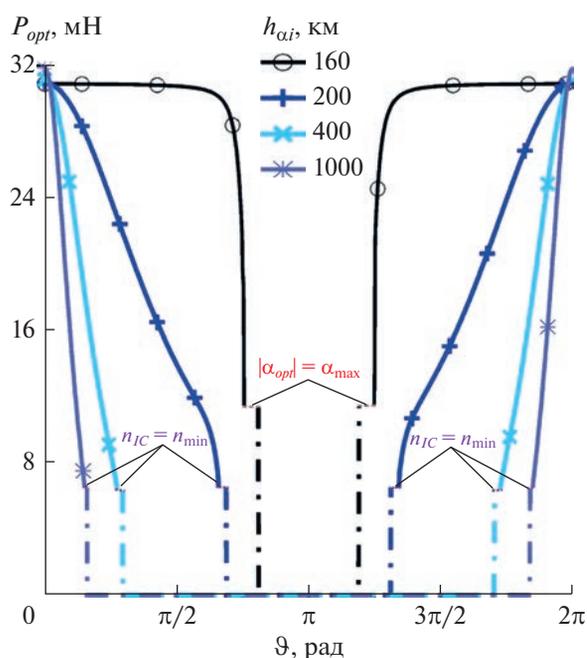


Рис. 7. Оптимальные программы тяги ВЭРД P_{opt} на орбитах с начальными $h_{\pi i} = 160$ км и $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км в зависимости от истинной аномалии ϑ ; пунктирными линиями выделены участки, соответствующие граничной концентрации $n_{IC} = n_{min}$, штриховыми линиями — участки, соответствующие $|\alpha_{opt}| = \alpha_{max}$, штрихпунктирными линиями — участки с нулевой тягой.

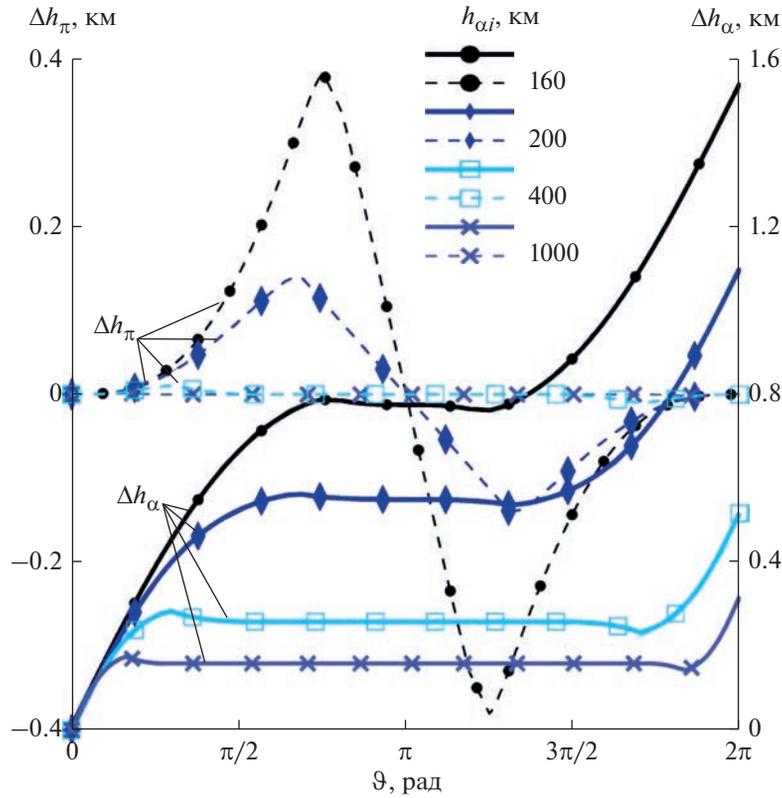


Рис. 8. Изменение высот апогея Δh_α (сплошные линии) и перигея Δh_π (штриховые линии) оскулирующих орбит при оптимальном управлении КА в зависимости от истинной аномалии ϑ с начальными $h_{\pi i} = 160$ км, $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км.

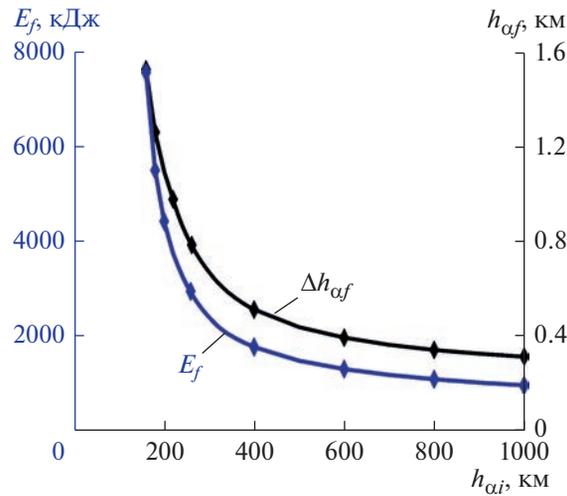


Рис. 9. Максимально возможное увеличение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ и потребляемая ВЭРД энергия E_f за один виток орбиты с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$.

ния (7)), штрихпунктирные линии соответствуют участкам пассивного полета КА (с нулевой тягой). Отключается ($\zeta = 0$) и включается ($\zeta = 1$) тяга в соответствии с условиями оптимальности (21). На круговой орбите, где концентрация газов в ИК не снижается до минимальной, штриховой линией

указана тяга, реализующаяся при максимальном угле атаки.

На рис. 8 в зависимости от истинной аномалии ϑ показано оптимальное изменение высоты перигея Δh_π (пунктирные линии) и апогея Δh_α

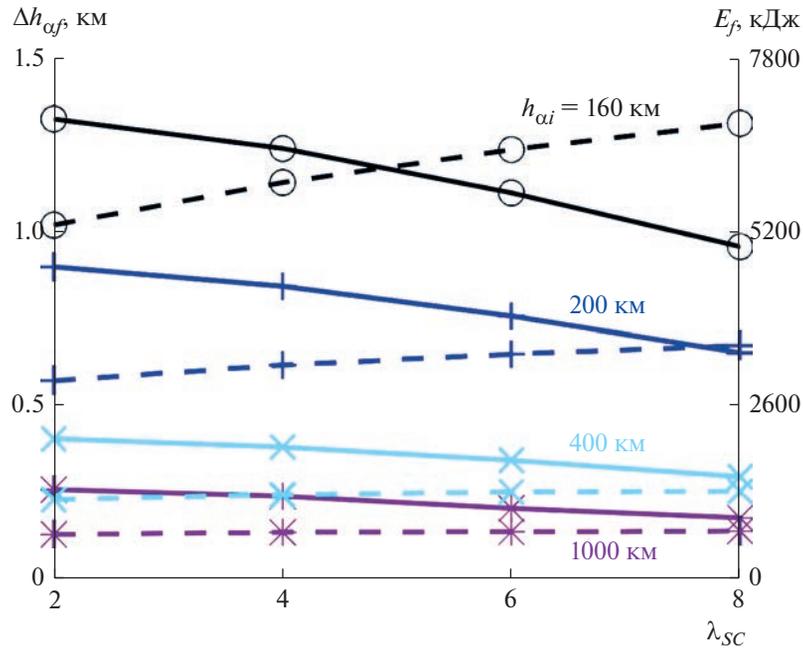


Рис. 10. Максимальное изменение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия E_f (штриховые линии) за один виток орбиты с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$ и удлинения КА λ_{SC} при $c = 100$ км/с.

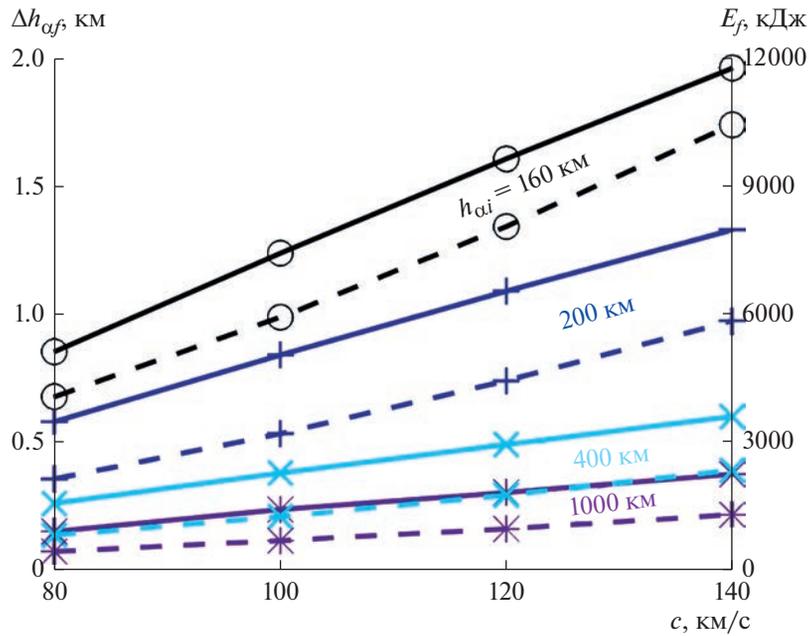


Рис. 11. Максимальное изменение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия E_f (штриховые линии) за один виток орбиты с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$ и скорости истечения c при $\lambda_{SC} = 4$.

(сплошные линии) оскулирующих орбит при полете КА с ВЭРД с оптимальным управлением углом атаки и тягой (рис. 6, 7). Как следует из рис. 8, максимум изменения высоты апогея при оптимальном управлении достигается на круго-

вой орбите $h_{orb i} = 160$ км. Но и затраты энергии для работы ВЭРД на круговой орбите также максимальны (рис. 9). Поэтому в условиях ограниченной энергетики благодаря возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамиче-

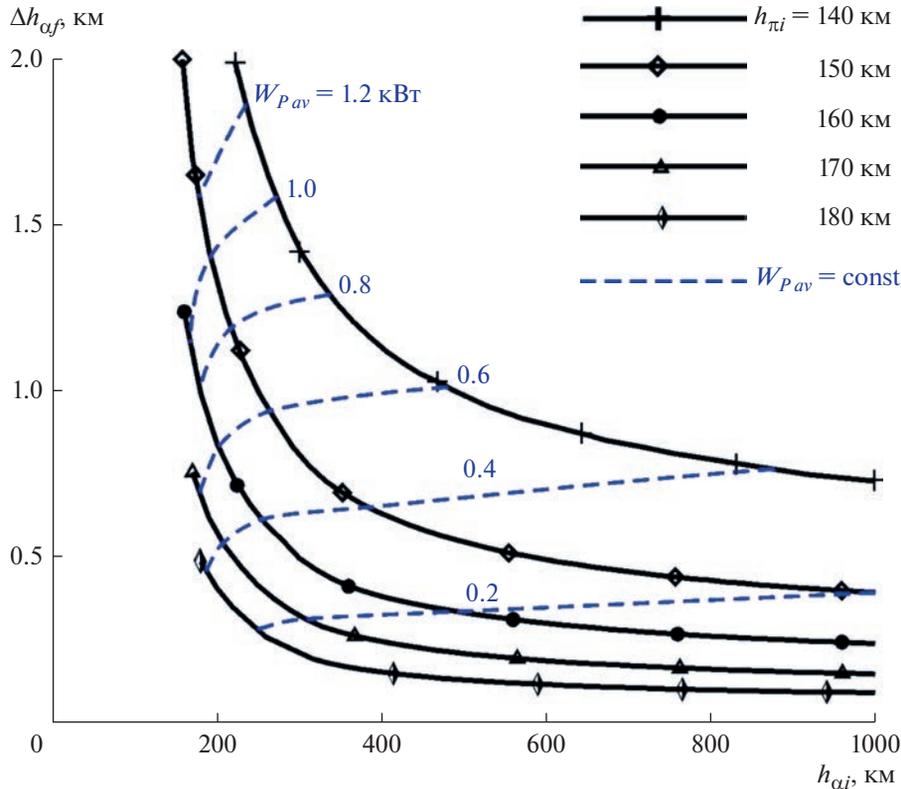


Рис. 12. Максимальное изменение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ за один виток орбиты в зависимости от начальных $h_{\pi i}$ и $h_{\alpha i}$; штриховыми показаны линии уровня средней за виток потребляемой ВЭРД мощности W_{Pav} при $c = 100$ км/с, $\lambda_{SC} = 4$.

ское сопротивление КА практически отсутствует, использование эллиптических орбит для обеспечения длительного существования КА с ВЭРД может оказаться предпочтительнее круговых.

Результаты численных исследований на рис. 6–9 получены для КА удлинением $\lambda_{SC} = 4$ с ВЭРД со скоростью истечения $c = 100$ км/с. Результаты исследования влияния этих параметров представлены на рис. 10, 11. Показаны относительные изменения высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия E_f (штриховые линии) за один виток орбитального полета с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$, $\lambda_{SC} \in [2, 8]$ (рис. 10) и скорости истечения $c \in [80, 140]$ км/с (рис. 11). Из рисунков следует, что влияние рассматриваемых параметров (λ_{SC} и c) снижается при увеличении эллиптичности орбит с начальными высотами перигея и апогея в рассматриваемом диапазоне.

На рис. 12 приведены оптимальные изменения высоты апогея за один виток орбиты $\Delta h_{\alpha f}$ в зависимости от начальной высоты перигея $h_{\pi i} \in [140, 180]$ км и апогея $h_{\alpha i} \in [140, 1000]$ км при постоянной скорости истечения $c = 100$ км/с и $\lambda_{SC} =$

$= 4$. На рис. 12 также показаны линии уровня усредненной мощности $W_{Pav} = E_f / T_{orb}$ за период обращения T_{orb} . Приведенные результаты исследований еще раз подтверждают, что для обеспечения длительного активного существования КА с ВЭРД использование эллиптических орбит с ультранизким перигеем может быть предпочтительнее за счет возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамическое сопротивление КА пренебрежимо мало.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе применения принципа максимума Понтрягина для системы уравнений в оскулирующих переменных решена задача оптимизации управления вектором тяги ВЭРД для наискорейшего изменения высоты апогея орбиты КА с учетом зависимости тяги от угла атаки и концентрации газа в ионизационной камере.

Получены оценки эффективности разработанных оптимальных программ управления углом атаки и тягой ВЭРД в зависимости от начальных высот перигея и апогея, скорости истечения, параметров компоновки КА.

Показано, что использование эллиптических орбит в условиях ограниченной энергетики может

быть предпочтительнее благодаря возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамическое сопротивление КА практически отсутствует.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 20-69-46034, Организация – МГУ имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.
2. Маров М.Я., Филатьев А.С. Комплексные исследования электрореактивных двигателей при полетах в ионосфере Земли: К 50-летию Государственной программы “Янтарь” // Косм. исслед. 2018. Т. 56. № 2. С. 137–144. <https://doi.org/10.7868/S0023420618020061> (Cosmic Research. 2018. T. 56. № 2. P. 123–129). <https://doi.org/10.7868/S0023420618020061>
3. Virgili J., Roberts P.C.E., Palmer K. et al. Very Low Earth Orbit mission concepts for Earth Observation: Benefits and challenges // Proc. 12th Reinventing Space Conf. London, UK. 2014. BIS-RS-2014-37.
4. Filatyev A.S., Golikov A.A., Nosachev L.V. et al. Spacecraft with air-breathing electric propulsion as the future ultra-speed aircraft // Proc. 71th Intern. Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 1–5 Oct. 2020. IAC-20-C4.6.8.
5. Dolgich A. Soviet Studies on Low-Thrust Orbital Propellant-Scooping Systems // Foreign Sciebee Bull. 1969. V. 5. № 7. P. 1–9.
6. Цой Э.П. Выбор оптимальной программы управления тягой накопителя рабочего вещества в нестационарном режиме // Тр. ЦАГИ. 1968. Вып. 1145.
7. Шумилкин В.Г. Управление тягой орбитального аппарата с двигателем ограниченной мощности при полете с накоплением атмосферного воздуха // Ученые записки ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 81–87.
8. Romano F. et al. System Analysis and Test-Bed for an Atmosphere-Breathing Electric Propulsion System Using an Inductive Plasma Thruster // Proc. 68th Intern. Astronautical Congress. Adelaide, Australia, 25–29 Sept. 2017. IAC-17-C4.6.5.
9. Rock B.St., Blandino J.J., Demetriou M.A. Propulsion Requirements for Drag-Free Operation of Spacecraft in Low Earth Orbit // J. Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43. № 3. P. 594–606. <https://doi.org/10.2514/1.15819>
10. Marchetti P., Blandino J.J., Demetriou M.A. Electric Propulsion and Controller Design for Drag-Free Spacecraft Operation // J. Spacecraft and Rockets. 2008. V. 45. № 6. P. 1303–1315. <https://doi.org/10.2514/1.36307>
11. Becedas J., González G., Domínguez R.M. et al. Aerodynamic Technologies for Earth Observation Missions in Very Low earth Orbit. A: Reinventing Space Conference // Proc. 16th Reinventing Space Conf. (RISpace). London, UK, 30 Oct. – 1 Nov. 2018. P. 1–10.
12. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Yanova O.V. et al. Physical Grounds and Control Optimization of Low-Orbit Spacecraft with Electric Ramjet // Proc. 68th Intern. Astronautical Congress. Adelaide, Australia, 25–29 Sept. 2017. IAC-17-C4.1P.51.
13. Barral S., Cifali G., Albertoni R. et al. Conceptual Design of an Air-Breathing Electric Propulsion System // Proc. 34th Intern. Electric Propulsion Conf. Kobe, Japan, 4–10 July 2015. IEPC-2015-271.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе П.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
15. Filatyev A.S., Yanova O.V. On the optimal use of electric ramjet for low-orbit spacecraft // Procedia Engineering. 2017. V. 185. P. 173–181. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.299>
16. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P. et al. Comparative evaluation of the applicability of electrical ramjets // Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Science. WeLIT4.3. Tel-Aviv, Haifa, Israel, 14–15 Mar. 2018. P. 503–519. <http://toc.proceedings.com/37020webtoc.pdf>.
17. Filatyev A.S., Yanova O.V. The control optimization of low-orbit spacecraft with electric ramjet // Acta Astronautica. 2019. V. 158. P. 23–31.
18. Yanova O.V., Filatyev A.S. Synthesis of the optimal control of spacecraft with air-breathing electric propulsion in orbits with ultra-low perigee in view of dependence of the engine efficiency on angle of attack // Proc. 71th Intern. Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 1–5 Oct. 2020. IAC-20-C1.5.1.
19. Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Экспериментальные исследования воздухозаборника в свободномолекулярном потоке газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 3. С. 56–69.
20. Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Моделирование процессов в воздухозаборнике для низкоорбитальных космических аппаратов в вакуумной аэродинамической трубе // Актуальные вопросы проектирования автомат. космич. аппаратов для фундам. и прикладных науч. исслед.: сб. тр. конф. Вып. 2. Химки: Изд-во “НПО им. С.А. Лавочкина”. 2017. С. 365–374.
21. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
22. Муреп С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007.
23. Fearn D.G. Ion thruster thrust vectoring requirements and techniques // 27th Intern. Electric Propulsion Conf. Pasadena, CA. 15–19 Oct. 2001. IEPC-01-115.
24. Munoz V., González D., Becedas J. et al. Attitude control for satellites flying in VLEO using aerodynamic surfaces // J. British Interplanetary Society. 2020. V. 73. № 3. P. 103–112.
25. Prieto D.M., Graziano B.P., Roberts P.C.E. Spacecraft drag modelling // Progress in Aerospace Sciences. 2014. V. 64. P. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.09.001>

26. *Livadiotti S., Crisp N.H., Robert P.C.E. et al.* A review of gas-surface interaction models for orbital aerodynamics applications // *Progress in Aerospace Sciences*. 2020. V. 119. Art. № 100675.
<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100675>
27. *Mehta P.M., Walker A., McLaughlin C.A., Koller J.* Comparing Physical Drag Coefficients Computed Using Different Gas-Surface Interaction Models // *J. Spacecraft and Rockets*. 2014. V. 51. № 3. P. 873–883.
<https://doi.org/10.2514/1.A32566>
28. *Koppenwallner G.* Satellite Aerodynamics and Determination of Thermospheric Density and Wind // *AIP Conf. Proc.* 2011. V. 1333. P. 1307–1312.
<https://doi.org/10.1063/1.3562824>
29. *Moe K., Moe M.M.* Gas-surface interactions and satellite drag coefficients // *Planetary and Space Science*. 2005. V. 53. P. 793–801.
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2005.03.005>
30. *Koppenwallner G.* Comment on special section: new perspectives on the satellite drag environments of Earth, Mars, and Venus // *J. Spacecraft and Rockets*. 2008. V. 45. № 6. P. 1324–1327.
<https://doi.org/10.2514/1.37539>
31. *Sutton E.K.* Normalized Force Coefficients for Satellites with Elongated Shapes // *J. Spacecraft and Rockets*. 2009. V. 46. № 1. P. 112–116.
<https://doi.org/10.2514/1.40940>
32. *Doornbos E.* Thermospheric Density and Wind Determination from Satellite Dynamics. Book Ser.: Springer Theses. 2012. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25129-0>
33. *Golikov A.A., Filatyev A.S.* Integrated optimization of trajectories and layout parameters of spacecraft with air-breathing electric propulsion // *Acta Astronautica*. 2022. V. 193. P. 644–652.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.06.052>