

УДК 629.786

ОЦЕНКА УРОВНЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ МИКРОУСКОРЕНИЙ НА БОРТУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В РЕЖИМЕ ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ

© 2025 г. А. И. Игнатов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

e-mail: general_z@mail.ru

Поступила в редакцию 01.02.2024 г.

После доработки 24.02.2024 г.

Принята к публикации 07.03.2024 г.

Рассмотрены различные варианты реализации режима орбитальной ориентации космического аппарата, предназначенного для проведения экспериментов в условиях микрогравитации в течение длительных интервалов времени. В качестве исполнительных органов системы управления вращательным движением используются гироскопические органы управления (гиросистема). Предложенные в работе законы управления гиросистемой позволяют не только обеспечивать заданную ориентацию космического аппарата, но и ограничивать накопление собственного кинетического момента гиросистемы, что существенно увеличивает продолжительность интервалов времени невозмущенного движения космического аппарата. Эффективность работы рассмотренных законов управления при наличии внешних дестабилизирующих возмущающих моментов, действующих на космический аппарат, подтверждается результатами численного моделирования уравнений движения. Основным режимом ориентации космического аппарата, исследованным в работе, является его орбитальная ориентация с использованием гиродемпфирования. Для этого режима проведена оценка уровня квазистатических микроускорений, возникающих на борту космического аппарата, а также показаны результаты их спектрального анализа.

DOI: 10.31857/S0023420625010103, EDN: HDROCA

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена расчету уровня микроускорений, возникающих на борту космического аппарата (КА) в режиме его орбитальной ориентации, а также анализу их спектральных характеристик. Рассматриваемый КА предназначен для проведения исследований в области микрогравитации в течение длительных интервалов времени. В настоящее время во многих работах [1–3] показано, что в случае низкоорбитального КА наиболее подходящими для проведения экспериментов в области космического материаловедения являются круговая орбита и покой КА в орбитальной системе координат – орбитальная ориентация. В зависимости от условий проведения экспериментов орбитальная ориентация КА может быть реализована как в окрестности его гравитационно устойчивого положения равновесия, так и неустойчивого. В любом случае, для

поддержания такой ориентации необходимы затраты энергии или рабочего тела.

Одним из возможных вариантов реализации орбитальной ориентации КА может стать его пассивная орбитальная ориентация, близкая к гравитационно устойчивой, однако даже в этом случае за счет влияния аэродинамического момента она может оказаться неустойчивой и без надлежащей коррекции не сможет сохраняться длительное время [4–5]. Или же уровень микроускорений на борту КА при этом будет неприемлемый для проведения экспериментов. В связи с этим, для обеспечения длительной орбитальной ориентации КА при наличии дестабилизирующего действия аэродинамического момента можно использовать демпфирующие устройства [6]. В качестве таких устройств можно рассматривать гироскопические исполнительные органы системы управления (гиросистему) КА. Чтобы реализовать демпфирование с помощью гиросистемы

(т.н. гиросистемное) достаточно задать надлежащий закон управления собственным кинетическим моментом гиросистемы (гиросистемным моментом КА). Такую орбитальную ориентацию КА можно назвать полупассивной, т.е. ее можно считать активной, однако расходы энергии на ее поддержание невелики. Кроме того, гиросистемное управление можно реализовать без накопления кинетического момента КА, и не будет затрат энергии или рабочего тела для проведения разгрузок гиросистемы. Также необходимость разгрузки гиросистемы сокращает время невозмущенного полета КА и накладывает ограничения на время проведения экспериментов на его борту, поэтому реализация режима орбитальной ориентации без накопления гиросистемного момента КА является очень большим преимуществом. Принципиальная возможность реализации гиросистемного управления показана в исследовании [7]. В данной работе предложен один из возможных вариантов закона управления гиросистемой и приведены результаты численного решения уравнений движения КА, подтверждающие возможность реализации режима орбитальной ориентации с использованием гиросистемного управления. Также, для указанного режима, проведена оценка уровня квазистатических микроускорений, возникающих на борту КА, и показаны результаты их спектрального анализа.

Другим возможным вариантом ориентации КА для проведения космических экспериментов на борту выступает непосредственно его орбитальная ориентация в окрестности гравитационно устойчивого или неустойчивого положения равновесия с использованием гиросистемы. Как было сказано выше, при использовании гиросистемы одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления гиросистемного момента. Эта скорость определяет промежутки времени между разгрузками гиросистемы и должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки полета КА с малым уровнем микроускорений. Соответствующие законы управления, реализующие орбитальную ориентацию КА с одновременным ограничением роста его гиросистемного момента, были предложены в публикациях [7–10]. В данной работе предложен один из возможных способов выбора коэффициентов каждого из рассмотренных в статье [8] законов управления и приведены результаты численного решения уравнений движения КА, подтверждающие возможность реализации используемых законов управления с выбранными значениями коэффициентов.

Все предложенные в данной работе законы управления могут быть реализованы для большинства КА (в том числе и для перспективных разгонных блоков) имеющих в своем составе гиросистему, и для которых требуется поддерживать режим орбитальной ориентации на низкой околокруговой орбите в течение длительного интервала времени без проведения разгрузок гиросистемного момента, что делает задачу реализации рассмотренных в настоящей работе режимов весьма актуальной.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОУСКОРЕНИЙ

Квазистатические микроускорения на низкоорбитальном КА вызываются четырьмя причинами: 1) движением КА относительно центра масс как твердого тела; 2) градиентом гравитационного поля; 3) аэродинамическим торможением; 4) действием силы, создаваемой органами управления. Если КА совершает неуправляемое движение или для управления им используется гиросистема, то последняя из перечисленных причин исчезает. В таком случае квазистатическое микроускорение в заданной фиксированной точке борта описывается простой формулой, причем чтобы воспользоваться ею, достаточно знать только орбиту и вращательное движение КА.

Пусть КА представляет собой твердое тело, и точка P жестко связана с его корпусом. Микроускорением \mathbf{b} в точке P называется разность между напряженностью гравитационного поля в этой точке и абсолютным ускорением последней. Роль вектора \mathbf{b} в орбитальных экспериментах аналогична роли ускорения свободного падения в экспериментах на поверхности Земли. В частности, если в точке P закрепить пробное тело с исчезающе малой массой m_p , то сила реакции, действующая на это тело со стороны КА, будет равна $-m_p \mathbf{b}$. Приближенная формула для расчета микроускорений имеет вид [11]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{b}_r + \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_a, \\ \mathbf{b}_r &= \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{b}_g &= \frac{\mu_E}{r^3} \left(3 \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} \right), \\ \mathbf{b}_a &= c \boldsymbol{\rho}_a v \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки P относительно центра масс КА — точки O ; $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость КА; точка над буквой означает дифференцирование по времени t ; μ_E — гравитационный параметр Земли; \mathbf{r} — геоцентрический

радиус-вектор точки O , $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{v} — скорость этой точки относительно поверхности Земли, $v = |\mathbf{v}|$; ρ_a — плотность атмосферы в точке O ; c — баллистический коэффициент КА. Слагаемые в правой части формулы (1) отвечают первым трем указанным выше причинам возникновения микроускорений.

Формула (1) использовалась для расчета реальных квазистатических микроускорений, имевших место на летавших КА [1, 2, 11]. Ее можно использовать и для прогноза микроускорений [3, 12, 13]. В этом случае составляются уравнения движения КА, выбирается режим движения, вычисляется решение уравнений движения, моделирующее этот режим, и вдоль найденного решения микроускорение в заданной точке борта рассчитывается по формуле (1). Именно таким образом формула (1) применяется ниже.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Космический аппарат считаем гироскопом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. Для описания его движения будем использовать три правые декартовы системы координат.

Связанная с КА система координат $Ox_1x_2x_3$, образована его главными центральными осями инерции. Начало системы находится в центре масс КА — точке O . Несколько упрощая модель, полагаем, что оси системы $Ox_1x_2x_3$ связаны с характерными элементами конструкции КА (рис. 1). Допустим, что КА имеет форму прямого кругового цилиндра радиусом R_c и высотой L_c с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами — солнечными батареями, суммарной площадью S_b . С целью минимизации возмущений при проведении экспериментов на борту КА предполагается использование солнечных батарей без специального привода, ориентирующего рабочие поверхности батарей относительно Солнца. Ось Ox_1 совпадает с осью цилиндра. Солнечные батареи расположены в плоскости Ox_1x_3 симметрично относительно оси Ox_1 , стороны батарей параллельны осям Ox_1 и Ox_3 , ось Ox_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Координаты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим $(x_c, 0, 0)$ и $(x_b, 0, 0)$ соответственно. Здесь и ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Ox_1x_2x_3$. Базисные орты системы $Ox_1x_2x_3$ обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

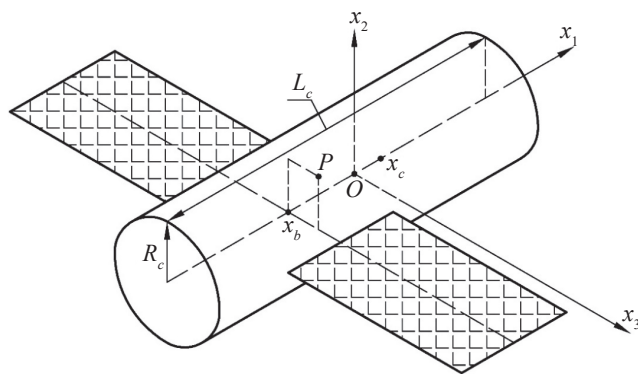


Рис. 1. Общая форма КА и положение связанной системы координат

В орбитальной системе $OX_1X_2X_3$ оси OX_3 и OX_2 направлены соответственно вдоль геоцентрического радиус-вектора точки O и вектора кинетического момента орбитального движения КА. Базисные орты этой системы обозначим $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$.

Начало гринвичской системы координат $O_EY_1Y_2Y_3$ — точка O_E , расположенная в центре Земли, плоскость $O_EY_1Y_2$ совпадает с плоскостью экватора, ось O_EY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось O_EY_3 направлена по оси вращения Земли к Северному полюсу. Полагаем, что эта система вращается с постоянной угловой скоростью ω_E вокруг оси O_EY_3 .

Матрицу перехода от орбитальной системы к гринвичской системе обозначим $W = (w_{ij})_{i,j=1}^3$, где w_{ij} — косинус угла между осями O_EY_i и OX_j . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты геоцентрического радиус-вектора точки O и вектора скорости этой точки относительно поверхности Земли в гринвичской системе координат. Матрицы перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к гринвичской и орбитальной системам обозначим соответственно $U = (u_{ij})_{i,j=1}^3$ и $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^3$. Здесь $q_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$, u_{ij} и q_{ij} — косинусы углов, которые ось Ox_j образует с осями O_EY_i и OX_j . Справедливо соотношение $U = WQ$.

Матрицу Q параметризуем углами γ, δ и β , которые введем следующим образом [3]. Система $Ox_1x_2x_3$ может быть получена из системы $OX_1X_2X_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OX_2 ; 2) на угол β вокруг новой оси OX_3 ; 3) на угол γ вокруг оси OX_1 полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Ox_1 . Элементы матрицы Q выражаются через эти углы с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & q_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma \\ q_{21} &= \sin \beta, & q_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ q_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, & q_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ q_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, \\ q_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ q_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем. Одна подсистема уравнений для векторов \mathbf{r} и \mathbf{v} описывает движение центра масс КА в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы [14]. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка $(16, 16)$ включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент КА считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Другая подсистема описывает движение КА относительно центра масс (вращательное движение) и имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} &= \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, & \mathbf{K} &= \hat{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{u}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_1 &= \boldsymbol{\omega}_E \mathbf{u}_2, & \frac{\tilde{d}\mathbf{u}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_2 &= -\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{u}_1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь символом \tilde{d}/dt обозначена локальная производная вектора в системе $Ox_1x_2x_3$; \mathbf{K} — кинетический момент КА в его движении относительно центра масс; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — абсолютная угловая скорость КА; $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции КА; $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)^T$ — гиростатический момент КА (собственный кинетический момент гиросистемы); \mathbf{M}_g — гравитационный момент, действующий на КА; \mathbf{M}_a — аэродинамический момент, действующий на КА; \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 — соответственно первая и вторая строки матрицы перехода U . Третья строка этой матрицы $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$. Строки \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 связаны условиями ортогональности матрицы U (\mathbf{u}_i — орты осей $O_E Y_i$), которые учитываются при задании начальных условий для этих переменных.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений (3) надо добавить уравнение, описывающее изменение гиростатического момента КА в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \quad (4)$$

где \mathbf{M}_c — момент, действующий со стороны гиросистемы, на корпус КА. Выражения для \mathbf{M}_c будут приведены ниже.

Гравитационный момент задается формулой [15]:

$$\mathbf{M}_g = 3 \frac{\mu_E}{r^5} (\mathbf{r} \times \hat{I} \mathbf{r}).$$

Формула аэродинамического момента имеет вид

$$\mathbf{M}_a = p(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1),$$

$$p = \rho_a \left(\pi R_c^2 y_c |v_1| + S_b y_b |v_2| + 2R_c L_c y_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right),$$

где v_i — компоненты вектора \mathbf{v} , $i = \overline{1,3}$. При выводе последней формулы считалось, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом КА испытывают абсолютно неупругий удар [16], и не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений КА относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Приведем использованные в расчетах числовые значения параметров описанной модели. Параметры КА: $m = 6440$ кг, $I_1 = 2600$ кг·м², $I_2 = 11100$ кг·м², $I_3 = 10900$ кг·м², $R_c = 1.3$ м, $L_c = 5.0$ м, $S_b = 33$ м², $x_b = -1$ м, $x_c = 0.3$ м. Начальные условия движения центра масс КА задавались в восходящем узле орбиты в момент 09:10:34 UTC 21. IX.2007. Начальные элементы орбиты: высота в апогее 450 км, высота в перигее 400 км, наклонение 63.0°, аргумент широты перигея 53.5°, долгота восходящего узла (отсчитывается от точки среднего весеннего равноденствия эпохи даты) 164.0°. Микроускорения рассчитывались в точке P с координатами $(-1$ м, 0.7 м, 0.5 м) (рис. 1). Эта точка находится на внутренней стенке рабочего отсека КА, примерно на ее середине. Вблизи этой точки возможна установка научной аппаратуры. Параметры модели атмосферы: $F_{10.7} = F_{81} = 150$, $A_p = 12$.

Начальные условия уравнений (3) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения. Этот момент служил началом отсчета времени — точкой $t = 0$.

4. РЕЖИМ ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИРОДЕМПФИРОВАНИЯ

В начале рассмотрим режим гравитационной ориентации КА. Уравнения (3) неудобны для пояснения такого режима и способа его реализации, но это можно сделать с помощью более простых уравнений, учитывающих только главные факторы. Предположим, что орбита центра масс КА круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на КА действует один лишь гравитационный момент. В этом случае уравнения (3) можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} \hat{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times (\hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) &= 3\omega_0^2 (\mathbf{E}_3 \times \hat{L}\mathbf{E}_3), \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} &= \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В этом случае система (5) имеет 24 стационарных решения, в которых $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{E}_2$, орты \mathbf{e}_i совпадают с ортами $\pm \mathbf{E}_j$, $i, j = \overline{1,3}$ где $\omega_0 = \sqrt{\mu_E / r^3}$ – среднее движение КА (орбитальная частота). Эти решения описывают положения равновесия (покой) КА в орбитальной системе координат [15]. Здесь $\mathbf{E}_3 = (q_{31}, q_{32}, q_{33})^T$, а величины q_{3i} выражаются через углы γ , δ и β по формулам (2).

Ограничимся рассмотрением двух стационарных решений системы (5), задаваемых соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{E}_3, \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_1, \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3, \mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_2. \quad (7)$$

При выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ решение (6) является устойчивым, а решение (7) – неустойчивым [15]. Устойчивое стационарное решение (6) можно использовать для реализации режима пассивной трехосной гравитационной ориентации КА. Далее по тексту устойчивое положение равновесия (6) будем называть гравитационной ориентацией КА.

Чтобы реализовать гиродемпфирование для режима орбитальной ориентации КА, близкой к его гравитационной ориентации, зададим закон изменения собственного кинетического момента гиросистемы в виде [7]

$$\hat{T} \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H} - h_0 \mathbf{e}_2 = \hat{J}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2), \quad (8)$$

где $\hat{T} = \operatorname{diag}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$; $\hat{J} = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$; $J_i, \tau_i, i = \overline{1,3}$ – положительные постоянные; h_0 – произвольная постоянная. Использование закона управления (8) вращательным движением КА подразумевает наличие на его борту датчиков угловых скоростей в соответствии с показаниями которых изменяется собственный кинетический момент гиросистемы.

Система уравнений (5), (8) допускает стационарное решение

$$\gamma = \delta = \beta = 0, \omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \omega_3 = 0, \\ h_1 = h_2 - h_0 = h_3 = 0. \quad (9)$$

Это решение также описывает положение равновесия КА в орбитальной системе координат, при этом расположение осей системы $Ox_1x_2x_3$ соответствует соотношениям (6). Для исследования устойчивости стационарного решения (9) можно воспользоваться теоремами Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [17]. Рассмотрим функцию Ляпунова [7]

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 - \omega_0 \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i q_{2i} + \frac{3}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 I_i q_{3i}^2 + \\ + \omega_0 \left(h_2 - \sum_{i=1}^3 h_i q_{2i} \right) + \frac{1}{2} \omega_0^2 (I_2 - 3I_1) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{h_1^2}{J_1} + \frac{(h_2 - h_0)^2}{J_2} + \frac{h_3^2}{J_3} \right).$$

Ее производная в силу системы (5), (8)

$$\dot{V} = - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\tau_i \dot{h}_i^2}{J_i} \right)$$

знакоотрицательна.

В окрестности решения (9) с точностью до членов третьего порядка малости относительно $\gamma, \delta, \beta, \omega_1, \omega_2 - \omega_0, \omega_3, h_1, h_2 - h_0, h_3$ имеем

$$V = \frac{I_1}{2} (\omega_1 - \omega_0 \beta)^2 + \frac{I_2}{2} (\omega_2 - \omega_0)^2 + \frac{I_3}{2} (\omega_3 + \omega_0 \gamma)^2 + \\ + \frac{1}{2} [(I_2 - I_3) \omega_0 + h_0] \omega_0 \gamma^2 + \\ + \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_3 - I_1) \delta^2 + \frac{1}{2} [4(I_2 - I_1) \omega_0 + h_0] \omega_0 \beta^2 + \\ + \omega_0 (h_3 \gamma - h_1 \beta) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{h_1^2}{J_1} + \frac{(h_2 - h_0)^2}{J_2} + \frac{h_3^2}{J_3} \right).$$

Нетривиальные условия положительной определенности выписанной квадратичной формы выражаются неравенствами

$$\begin{aligned} (I_2 - I_3 - J_3)\omega_0 + h_0 &> 0, \\ [4(I_2 - I_1) - J_1]\omega_0 + h_0 &> 0, I_3 > I_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Если последние неравенства выполнены и

$$I_2 \neq I_1, \quad (11)$$

то пересечение множества $\dot{V} = 0$ с достаточно малой окрестностью положения равновесия (9) не содержит целых траекторий системы (5), (8) отличных от выражений (9). Это утверждение установлено приемом, описанным в публикации [18], с помощью анализа соответствующих линеаризованных уравнений. При выполнении неравенств (10), (11) удовлетворены условия теоремы Барбашина – Крассовского ([17], теорема 3.2) и положение равновесия (9) асимптотически устойчиво. Если же хотя бы одно из неравенств (10) выполнено с противоположным знаком и по-прежнему справедливо неравенство (11), то выполнены условия теоремы Крассовского ([17], теорема 4.1) и положение равновесия (9) неустойчиво [7].

Из-за разного рода возмущающих факторов (эллиптичность орбиты, влияние аэродинамического момента и др.) система уравнений (3) для рассматриваемого КА не имеет решений, описывающих его покой (9) в орбитальной системе

координат, однако в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров эти уравнения допускают решения, которые после пересчета переменных $u_{1i}, u_{2i}, i = \overline{1,3}$ в углы γ, δ и β будут близки положению покоя (9).

5. УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Чтобы реализовать закон управления (8) выразим момент \mathbf{M}_c , действующий со стороны гиросистемы на корпус КА и стабилизирующий режим гравитационной ориентации КА в окрестности положения (9) в виде

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega} - \hat{T}^{-1} \hat{J}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2) + \hat{T}^{-1}(\mathbf{H} - h_0 \mathbf{e}_2). \quad (12)$$

Система (4), (5), (12), линеаризованная в окрестности стационарного решения (9) разбивается на две независимые подсистемы, которые имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (A_1 + B_1 K_1) \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 = (\omega_2 - \omega_0, \delta, h_2 - h_0)^T, \quad (13)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_3)/I_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = (1/I_2, 0, -1)^T, \quad K_1 = (-J_2/\tau_2, 0, 1/\tau_2),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = (A_2 + B_2 K_2) \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_2 = (\omega_1, \omega_3, \gamma, \beta, h_1, h_3)^T, \quad (14)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & (\omega_0(I_2 - I_3) + h_0)/I_1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0/I_1 \\ (\omega_0(I_1 - I_2) - h_0)/I_3 & -J_3/I_3\tau_3 & 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_2)/I_3 & \omega_0/I_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/I_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -J_1/\tau_1 & 0 & 0 & 0 & 1/\tau_1 & 0 \\ 0 & -J_3/\tau_3 & 0 & 0 & 0 & 1/\tau_3 \end{pmatrix}.$$

Структура матриц K_1, K_2 подразумевает, что для формирования управления вращательным движением КА не требуется информация о его ориентации. Значения коэффициентов J_i, τ_i ,

$i = \overline{1,3}$ выберем таким образом, чтобы все корни характеристического полинома линеаризованной системы лежали в левой полуплоскости комплексного переменного достаточно далеко от мнимой оси. Точнее, критерием качества закона управления (12) будем считать степень устойчивости линеаризованной системы (13), (14) — взятую с обратным знаком действительную часть самого правого корня ее характеристического полинома. В данном случае этот полином разлагается на полиномы третьего

$$\det[(A_1 + B_1 K_1) - \lambda^{(1)} E_3] = 0,$$

и шестого порядков

$$\det[(A_2 + B_2 K_2) - \lambda^{(2)} E_6] = 0,$$

являющихся характеристическими полиномами первой (13) и второй подсистем (14) соответственно. Здесь E_3 и E_6 – единичные матрицы третьего и шестого порядков соответственно.

Полином третьего порядка зависит от коэффициентов J_2 , τ_2 . Выберем их так, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень $\lambda_j^{(1)} = -\alpha$, $j = \overline{1,3}$ где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получаем

$$\tau_2 = \frac{3}{\alpha}, J_2 = 8I_2, \alpha = \omega_0 \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}.$$

Из приведенных соотношений видно, что максимальная степень устойчивости первой подсистемы (13) определяется только моментами инерции КА и высотой его орбиты. Для рассматриваемого КА

$$\omega_0 = 1.125 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}, \alpha = 9.73 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1},$$

$$\tau_2 = 3084 \text{ с}, J_2 = 88000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Полином шестого порядка содержит коэффициенты τ_1 , J_1 и τ_3 , J_3 . С учетом соотношений (10) для асимптотической устойчивости системы (14) необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} 0 < J_1 < \left(4(I_2 - I_1) + \frac{h_0}{\omega_0} \right), \\ 0 < J_3 < \left(I_2 - I_3 + \frac{h_0}{\omega_0} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Приняв значение $h_0 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, найдем значения J_1 , J_3 в виде

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(4(I_2 - I_1) + \frac{h_0}{\omega_0} \right) = 19222 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \left(I_2 - I_3 + \frac{h_0}{\omega_0} \right) = 2322 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Примем значения

$$\tau_1 = J_1 / \chi_1 = 4805 \text{ с}, \tau_3 = J_3 / \chi_3 = 2322 \text{ с},$$

где $\chi_1 = 4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $\chi_3 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Корни полинома шестого порядка при этом равны

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = -1.37 \cdot 10^{-4} \pm 2.0 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1},$$

$$\lambda_{3,4}^{(2)} = -1.37 \cdot 10^{-4} \pm 3.7 \cdot 10^{-5} i \text{ с}^{-1},$$

$$\lambda_{5,6}^{(2)} = -8.61 \cdot 10^{-4} \pm 1.4 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}.$$

Степень устойчивости полинома шестого порядка $\alpha = 1.37 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, закон управления (12) с указанными значениями

параметров J_i , τ_i , $i = \overline{1,3}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3), (4) в окрестности стационарного решения (9).

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМА ОРБИТАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИРОДЕМПФИРОВАНИЯ

Покажем, что выбранный закон изменения управляющего момента гиросистемы (12) действительно обеспечивает устойчивую ориентацию КА, близкую к гравитационной. С этой целью вычислим решения системы (3), (4), (12) с начальными условиями $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $h_1(0) = h_3(0) = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $h_2(0) = 0$ и

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01^\circ/\text{с} \quad (16)$$

на интервале времени 140 сут. Значения соответствующих коэффициентов закона управления (12) приняты как в разделе “Управление вращательным движением космического аппарата”. На рис. 2–4 изображены графики зависимости от времени углов γ , δ и β , компонент h_i , $i = \overline{1,3}$ и модуля гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$, а также компонент b_i , $i = \overline{1,3}$ и модуля $|\mathbf{b}|$ вектора микроускорений. На графиках не показан начальный участок длительностью 1 сут, содержащий переходной процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости (16) и начальных значений гиросtatического момента. Результаты расчетов показывают, что закон управления (12) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию КА, и гиросtatический момент при этом остается ограниченным. В установленном режиме амплитуды колебаний компонент угловой скорости ограничены следующими значениями:

$$\begin{aligned} |\omega_1| < 6 \cdot 10^{-5}^\circ/\text{с}, |\omega_2 - \omega_0| < 2 \cdot 10^{-3}^\circ/\text{с}, \\ |\omega_3| < 3 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{с}. \end{aligned}$$

Из-за выбранного масштаба времени на рис. 2–4 не видны колебания соответствующих величин с частотами кратными ω_0 , которые вызваны сопротивлением атмосферы и эллиптичностью орбиты. Такие колебания показаны в работе [3], где на интервале времени 6 сут приведены результаты численного решения уравнений движения КА с подобным законом управления.

На рис. 2 увеличение амплитуды колебаний, а также постоянное смещение угла $\delta \approx 0.8^\circ$ вызваны сопротивлением атмосферы, зависящим от положения Солнца относительно плоскости

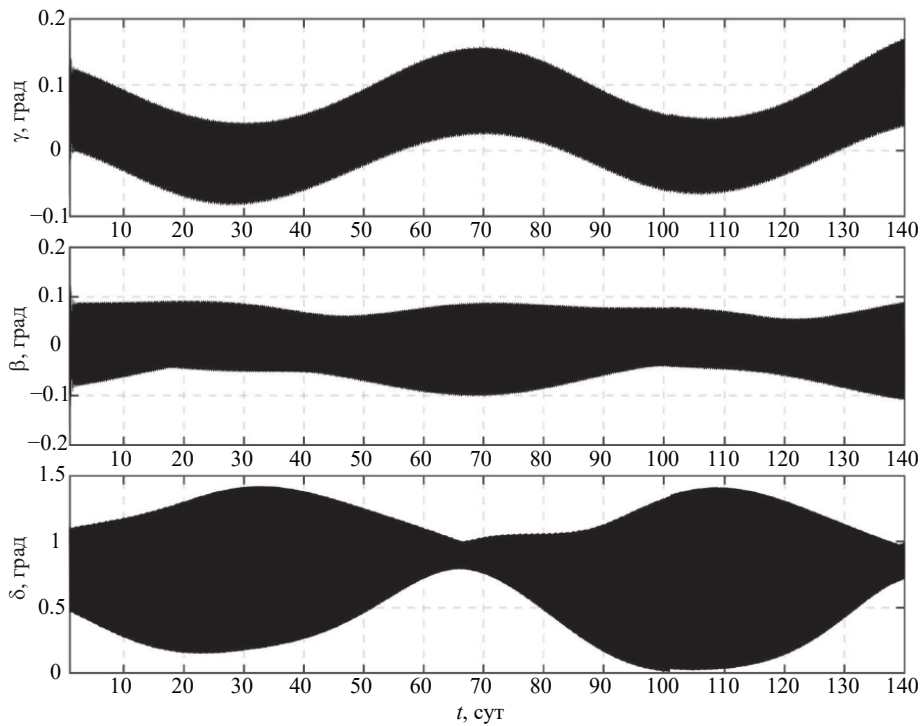


Рис. 2. Углы ориентации КА при использовании закона управления (12)

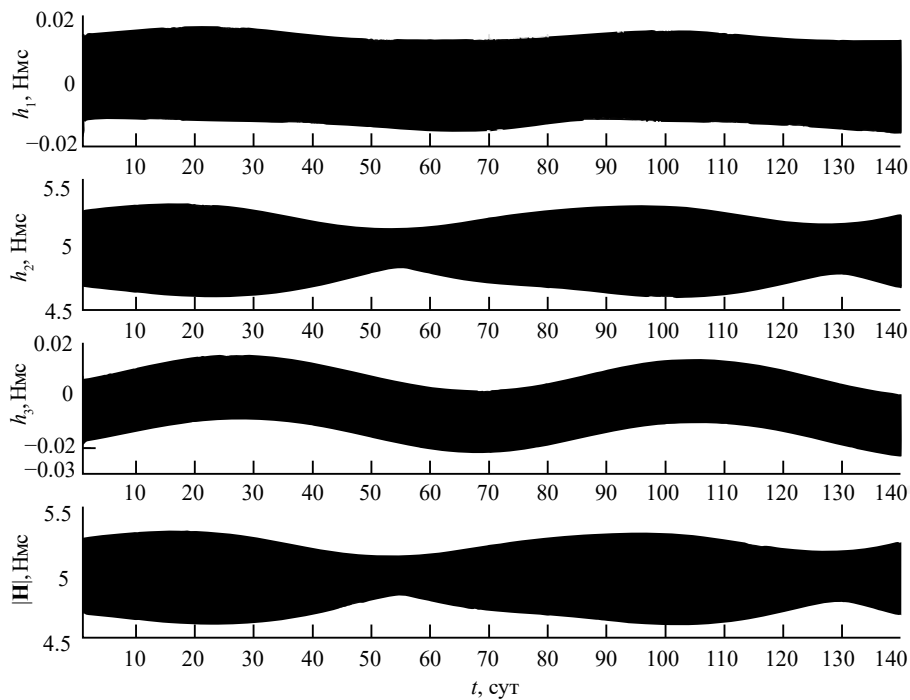


Рис. 3. Компоненты и модуль вектора гиросtatического момента КА при использовании закона управления (12)

орбиты КА. Это положение меняется из-за прецессии плоскости орбиты с угловой скоростью $\sim 5^\circ/\text{сут}$. За период времени равный примерно

70 сут, величина постоянного смещения угла δ практически не меняется, амплитуда колебаний меняется в диапазоне от 0.1° до 1.5° . Поскольку

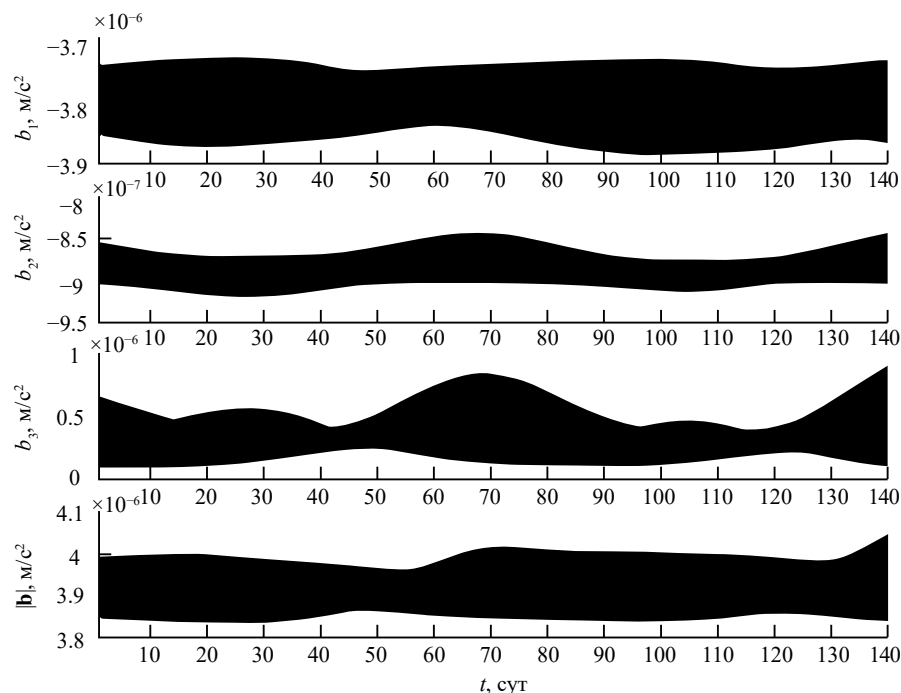


Рис. 4. Компоненты и модуль вектора микроускорений КА

закон управления (12) не накладывает ограничений на угловое положение КА, значения углов γ , δ и β , приведенные на рис. 2, в каждый момент времени соответствуют некоторому относительному равновесному положению КА под действием гравитационного и аэродинамического моментов [19]. Один из возможных методов нахождения такого положения представлен в публикации [8]. В данном случае для оценки смещения δ_0 значения угла δ можно использовать приближенную аналитическую зависимость

$$\delta_0 = \frac{2R_c L_c x_c (R_0 + R_E)^2 \rho_a}{3(I_3 - I_1) + \pi R_c^2 x_c (R_0 + R_E)^2 \rho_a},$$

которая была получена путем линейризации системы (3) в окрестности стационарного решения (9). При указанной линейризации были приняты условия, что центр масс КА движется по круговой орбите радиуса $r = R_0 + R_E$, неизменной в абсолютном пространстве, и скорость набегающего потока направлена по касательной к орбите КА [20]. Здесь $R_E = 6378.14$ км – радиус Земли принимаемой сферой, R_0 – высота круговой орбиты КА. В табл. 1 приведены некоторые значения δ_0 в зависимости от значений R_0 . Соответствующие R_0 значения плотности атмосферы ρ_a были взяты из ГОСТ Р 25645.166-2004 для $F_{10.7} = 150$.

На рис. 3 смещение компоненты h_2 и модуля $|\mathbf{H}|$ вектора гиросtatического момента определяется значением постоянной величины $h_0 = 5$ Н·м·с закона управления (12). Как видно из неравенств (15) величина h_0 влияет на размер области устойчивости коэффициентов J_1, J_3 , чем больше значение h_0 , тем больше размер указанной области. Однако при выборе значения h_0 следует учитывать конкретные характеристики и схему расположения установленных на борту КА исполнительных органов гиросистемы, чтобы при реализации закона управления собственный кинетический момент каждого исполнительного органа не приближался к своему предельному значению [20].

На рис. 4 видно, что значение модуля вектора микроускорений $|\mathbf{b}|$ не превышает $4.1 \cdot 10^{-6}$ м/с², и область вариации вектора \mathbf{b} достаточно мала. Следует отметить, что значение $|\mathbf{b}| < 10^{-5}$ м/с² является приемлемым при проведении космических экспериментов, в частности в области материаловедения [21]. Небольшой размер области вариации вектора \mathbf{b} ($|\mathbf{b}| \approx |b_1|$) является

Таблица 1. Значения угла δ_0

R_0 , км	400	420	440
ρ_a , кг/м ³	$3.02 \cdot 10^{-12}$	$2.11 \cdot 10^{-12}$	$1.48 \cdot 10^{-12}$
δ_0 , град	1.101	0.801	0.580

дополнительным преимуществом режима гравитационной ориентации КА при проведении указанных экспериментов.

7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МИКРОУСКОРЕНИЙ

С целью анализа уровня микроускорений, возникающих на борту КА в процессе реализации закона управления (12), в работе определены характерные частоты колебаний модулей векторов \mathbf{b}_a , \mathbf{b}_g и \mathbf{b} (1). Частоты были найдены с помощью спектрального анализа, выполнявшегося по следующей схеме [22]. Пусть x_n , $n = 1, N$ — значения какой-либо переменной $x(t)$ исследуемого решения в узлах равномерной временной сетки $\{t_n\}$: $x_n = x(t_n)$. Во всех рассмотренных ниже примерах шаг сетки $h = t_{n+1} - t_n = 10$ с. Предположим, что исследуемая функция имеет вид

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^M (\alpha_m \cos 2\pi f_m^\circ t + \beta_m \sin 2\pi f_m^\circ t),$$

где $f_m^\circ \in (0, h^{-1}/2)$ и α_0 , α_m , β_m , $m = \overline{1, M}$ — постоянные параметры, причем среди частот f_m° нет одинаковых. Оценить частоты и амплитуды отдельных гармоник, входящих в $x(t)$, можно, исследуя максимумы периодограммы Шустера —

$$I(f) = \left[\sum_{n=1}^N (x_n - x_*) \cos 2\pi f t_n \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N (x_n - x_*) \sin 2\pi f t_n \right]^2, \\ x_* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n,$$

на интервале $0 < f < h^{-1}/2$. Функция $I(f)$ имеет много максимумов, из которых выбирают несколько наиболее выделяющихся. Если функция $I(f)$ имеет такой максимум в точке f_* , предполагается, что f_* близка одной из частот f_m° , а величина $2\sqrt{I(f_*)}/N$ является оценкой амплитуды $\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}$ соответствующей гармоники. Периодограмму Шустера удобно преобразовать к виду, называемому амплитудным спектром $A(f) = 2N^{-1}\sqrt{I(f)}$. Выделяющиеся максимумы функции $A(f)$ напрямую оценивают амплитуды отдельных гармоник, но ее максимумы выражены менее наглядно, чем максимумы периодограммы.

На рис. 5 показаны амплитудные спектры $A_{ba}(f)$, $A_{bg}(f)$, $A_b(f)$ величин $|\mathbf{b}_a|$, $|\mathbf{b}_g|$ и $|\mathbf{b}|$

соответственно. Спектры приведены в диапазоне частот от 0 до 0.001 Гц, при значениях $h = 10$ с и $N = 6.048 \cdot 10^6$. Показано, что наибольший вклад в общий уровень микроускорений \mathbf{b} на борту КА при использовании закона (12) вносит составляющая \mathbf{b}_a с доминирующей частотой $f_0 = \omega_0/2\pi \approx 1.79 \cdot 10^{-4}$ Гц. Такие колебания вызваны влиянием атмосферы. Также происходит увеличение амплитуд колебаний величин $|\mathbf{b}_a|$ и $|\mathbf{b}|$ на частоте $2f_0 \approx 3.58 \cdot 10^{-4}$ Гц, однако такое увеличение амплитуд практически не сказывается на общем уровне возникающих на борту микроускорений \mathbf{b} .

Учитывая общий уровень микроускорений, показанный на рис. 4, малую область вариации вектора \mathbf{b} и, что колебания микроускорения происходят весьма медленно — с орбитальной частотой, можно утверждать, что условия на борту КА приемлемы для проведения космических экспериментов [3, 11].

8. ОРБИТАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННО-УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Закон управления (8) можно реализовать без использования постоянной величины гиросtatического момента h_0 . Обозначим положение равновесия (9) при $h_0 = 0$ как (9'). Тогда момент \mathbf{M}_c , действующий со стороны гиросистемы на корпус КА и стабилизирующий режим гравитационной ориентации КА в окрестности положения равновесия (9'), представим в виде [8]

$$\mathbf{M}_c = -K_\omega(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2) + K_h \mathbf{H}, \quad (17)$$

где $K_\omega = (k_{ij}^{(\omega)})_{i,j=1}^3$, $K_h = (k_{ij}^{(h)})_{i,j=1}^3$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1, 3}$ — постоянные величины. Систему (4), (5), (17), линеаризованную в окрестности решения (9'), представим в виде двух независимых подсистем третьего и шестого порядка [23]:

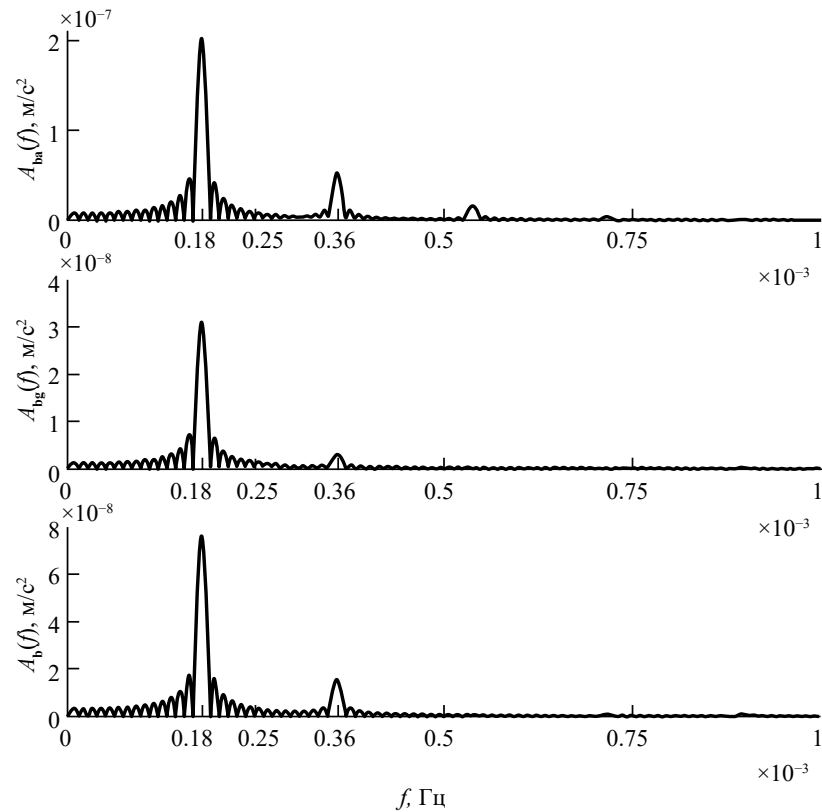
$$\dot{\mathbf{x}}_3 = (A_3 + B_3 K_3 C_3) \mathbf{x}_3, \quad \mathbf{x}_3 = (\omega_2 - \omega_0, \delta, h_2)^T, \quad (18)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_3)/I_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = (1/I_2, 0, -1)^T, \quad C_3 = \text{diag}(1, 0, 1), \\ K_3 = (-k_{22}^{(\omega)}, 0, k_{22}^{(h)}),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = (A_4 + B_4 K_4 C_4) \mathbf{x}_4,$$

$$\mathbf{x}_4 = (\omega_1, \omega_3, \gamma, \beta, h_1, h_3)^T, \quad (19)$$

Рис. 5. Амплитудные спектры модулей векторов \mathbf{b}_a , \mathbf{b}_g и \mathbf{b}

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0(I_2 - I_3)/I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(I_1 - I_2)/I_3 & 0 & 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_2)/I_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/I_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

$$C_4 = \text{diag}(1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} -k_{11}^{(\omega)} & -k_{13}^{(\omega)} & 0 & 0 & k_{11}^{(h)} & k_{13}^{(h)} \\ -k_{31}^{(\omega)} & -k_{33}^{(\omega)} & 0 & 0 & k_{31}^{(h)} & k_{33}^{(h)} \end{pmatrix}.$$

В данном случае также как и в разделе 5 структура матриц K_3 , C_3 , K_4 , C_4 подразумевает, что для формирования управления вращательным движением КА не требуется информация о его ориентации. В данном случае

$$k_{12}^{(\omega)} = k_{21}^{(\omega)} = k_{23}^{(\omega)} = k_{32}^{(\omega)} = 0 \quad \text{и} \quad k_{12}^{(h)} = k_{21}^{(h)} = k_{23}^{(h)} = k_{32}^{(h)} = 0.$$

Характеристический полином системы третьего порядка зависит от коэффициентов $k_{22}^{(\omega)}$ и $k_{22}^{(h)}$. Выберем их так же как в разделе 5, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень $\lambda_j^{(3)} = -\alpha$, $j = \overline{1, 3}$ где $\alpha > 0$ — степень устойчивости. Получим аналитические зависимости

$$k_{22}^{(h)} = \frac{\alpha}{3}, \quad k_{22}^{(\omega)} = \frac{8I_2\alpha}{3}, \quad \alpha = \omega_0 \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}.$$

Для рассматриваемого КА: $k_{22}^{(h)} = 3.24 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_{22}^{(\omega)} = 28.8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Значения коэффициентов полинома шестого порядка будем искать как решение задачи линейно-квадратичного регулирования [24] в виде $K_4 = -S^{-1}B_4^T P$, где $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матрица, полученная в результате численного решения алгебраического матричного уравнения Рикатти

$$PA_4 + A_4^T P - PB_4 S^{-1} B_4^T P + C_4^T R C_4 = 0. \quad (20)$$

Здесь $R \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ и $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – положительно определенные матрицы весовых коэффициентов, выбранным значениям которых $R = \text{diag}(1, 5 \cdot 10^7, 0, 0, 100, 1)$, $S = \text{diag}(1, 1)$ соответствуют значения коэффициентов

$$\begin{aligned} k_{11}^{(\omega)} &= 1042.76 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{13}^{(\omega)} = -1271.81 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\ k_{11}^{(h)} &= 9.60 \text{ с}^{-1}, \quad k_{13}^{(h)} = 0.12 \text{ с}^{-1}, \\ k_{31}^{(\omega)} &= 6620.91 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad k_{33}^{(\omega)} = -3709.13 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\ k_{31}^{(h)} &= -2.55 \text{ с}^{-1}, \quad k_{33}^{(h)} = 1.54 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Соответствующие значения корней характеристического полинома шестой степени

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(4)} &= -1.03 \cdot 10^{-4} \pm 2.10 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}, \\ \lambda_{3,4}^{(4)} &= -1.14 \cdot 10^{-3} \pm 4.72 \cdot 10^{-4} i \text{ с}^{-1}, \\ \lambda_5^{(4)} &= -1.20 \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_6^{(4)} = -10.00 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Степень устойчивости полинома шестого порядка $\alpha = 1.03 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, закон управления (17), с указанными значениями параметров $k_{ij}^{(\omega)}, k_{ij}^{(h)}, i, j = \overline{1, 3}$, обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3), (4) в окрестности стационарного решения (9'). Представленные значения элементов матриц R и S , как и использованный метод нахождения коэффициентов закона управления в целом, не являются единственно возможными. Применяя специальные методы математической теории автоматического управления [24], вероятно, возможно получить значения коэффициентов полинома шестого порядка, обеспечивающие больший запас устойчивости и лучшее качество управления. Однако это представляет собой тему для отдельного исследования.

Следует отметить, закон управления (17) по сути представляет собой закон управления (12), в котором не учитывается слагаемое $\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$, значение $h_0 = 0$ и, используются другие обозначения для коэффициентов: $K_\omega = \hat{T}^{-1} J$, $K_h = \hat{T}^{-1}$. Поэтому $A_3 = A_1$, $B_3 = B_1$, $B_4 = B_2$ и матрицы A_4 , A_2 имеют похожую структуру. Введение новых обозначений было сделано с целью представления линейаризованной системы уравнений в виде (18), (19) для удобства численного решения уравнения (20). Таким образом, коэффициенты закона управления (12) обеспечивающие асимптотическую устойчивость системы (3), (4) в окрестности стационарного

решения (9) также можно подобрать в результате решения задачи линейно-квадратичного регулирования с использованием соответствующих матриц линейаризованной системы (14).

Покажем, что для найденных значений коэффициентов $k_{ij}^{(\omega)}, k_{ij}^{(h)}, i, j = \overline{1, 3}$ закон изменения управляющего момента гиросистемы (17) действительно обеспечивает устойчивую ориентацию КА, близкую к гравитационной. Для этого вычислим решения системы (3), (4), (17) с начальными условиями $\gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0$, $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ и (16) на интервале времени 8 сут. На рис. 6, 7 изображены графики зависимости от времени углов γ , δ и β , компонент $h_i, i = \overline{1, 3}$ и модуля гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок длительностью 1 сут, содержащий переходной процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости (16). Результаты расчетов показывают, что закон управления (17) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию КА, и гиросtatический момент при этом остается ограниченным. В установившемся режиме амплитуды колебаний компонент угловой скорости ограничены следующими значениями:

$$\begin{aligned} |\omega_1| &< 8 \cdot 10^{-50} / \text{с}, \quad |\omega_2| < 2 \cdot 10^{-30} / \text{с}, \\ |\omega_3| &< 2 \cdot 10^{-40} / \text{с}. \end{aligned}$$

На рис. 6 заметно увеличение амплитуды колебаний угла δ , а также его постоянное смещение, что полностью соответствует результатам, представленным в разделе 6 на рис. 2. Отсутствие в законе управления (17) слагаемого содержащего постоянное значение гиросtatического момента h_0 не оказывает существенного влияния на угловую ориентацию КА, его абсолютную угловую скорость и на уровень микроускорений на его борту, разница видна только на графиках гиросtatического момента. На рис. 7 видно, что в случае использования закона управления (17) отсутствует величина постоянного смещения компоненты h_2 и модуля $|\mathbf{H}|$. Установившиеся колебания величин $\gamma, \delta, \beta, \omega_i, h_i, i = \overline{1, 3}$, и $|\mathbf{H}|$ происходят с доминирующей частотой, которая равна орбитальной частоте ω_0 , что соответствует влиянию аэродинамического торможения $c_{r_a} \gamma \gamma$.

9. ОРБИТАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННО НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим стационарное решение (7) системы (5), которое при выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$

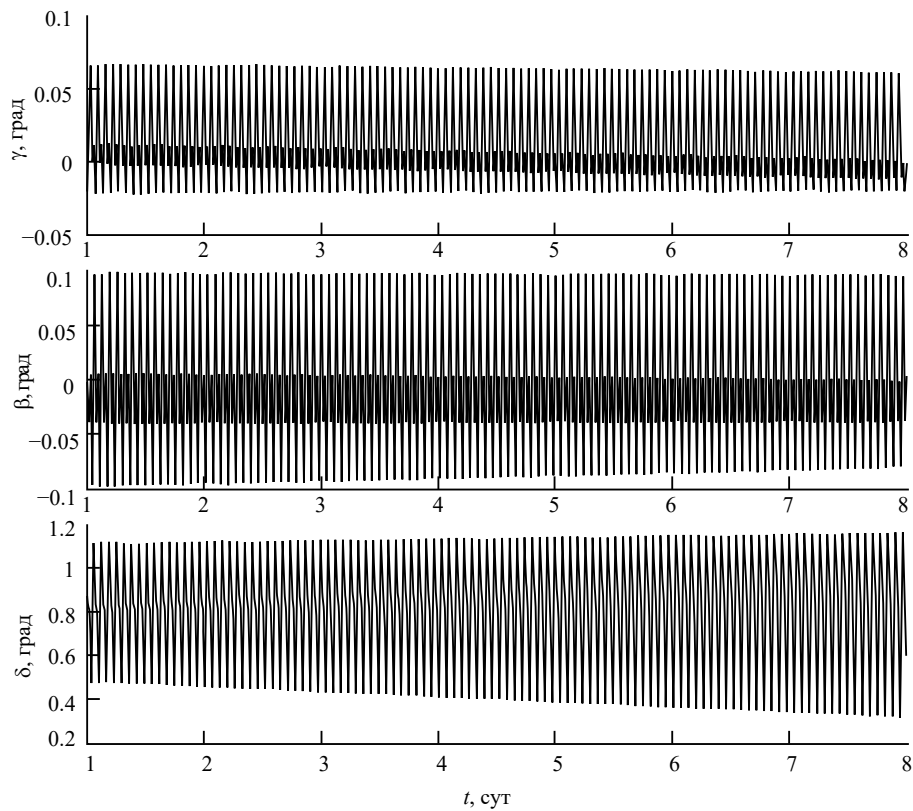


Рис. 6. Углы ориентации КА при использовании закона управления (17)

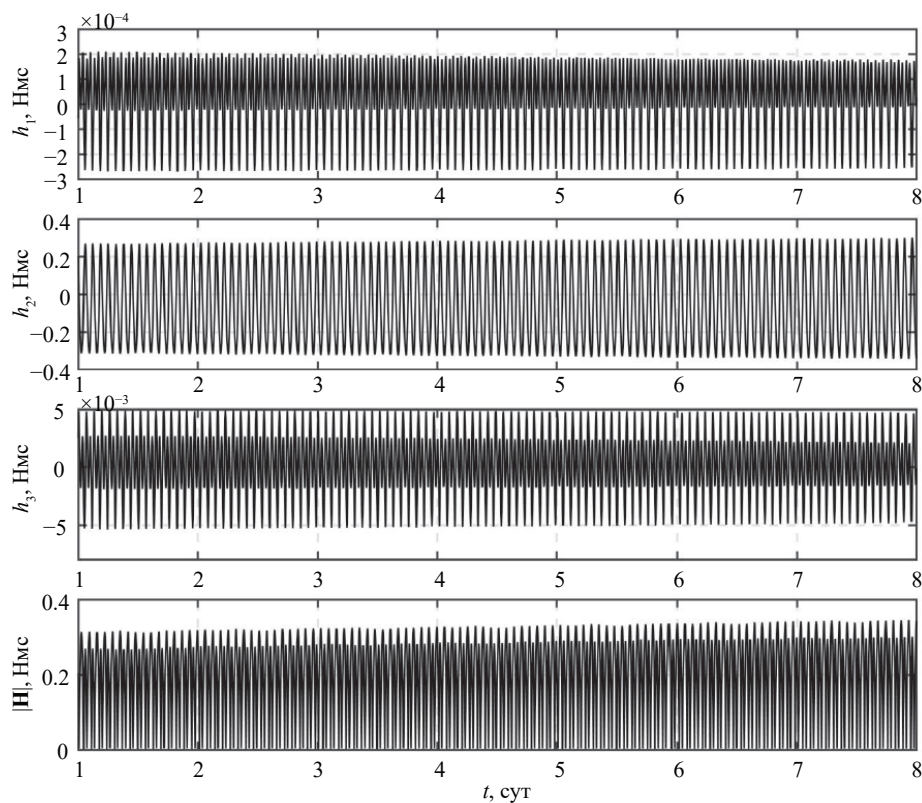


Рис. 7. Компоненты и модуль вектора гиросtatического момента КА при использовании закона управления (17)

будет неустойчивым. Чтобы реализовать режим орбитальной ориентации КА, в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия зададим закон управления гиросистемой в виде [8]

$$\mathbf{M}_c = -K_\theta [(\mathbf{E}_3 \times \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_2)] - K_\omega (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) + K_h \mathbf{H}, \quad (21)$$

где $K_\theta = (k_{ij}^{(\theta)})_{i,j=1}^3$, $K_\omega = (k_{ij}^{(\omega)})_{i,j=1}^3$, $K_h = (k_{ij}^{(h)})_{i,j=1}^3$, $k_{ij}^{(\theta)}$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1,3}$ – постоянные величины.

Система уравнений (5), (21) допускает стационарное решение

$$\gamma = -\delta = \pi/2, \beta = 0, \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 + \omega_0 = 0, \\ h_1 = h_2 = h_3 = 0. \quad (22)$$

Это решение описывает положение равновесия КА в орбитальной системе координат, при этом

расположение осей системы $Ox_1x_2x_3$ соответствует (7).

Систему (4), (5), (21), линеаризованную в окрестности решения (22), представим в виде двух независимых подсистем третьего и шестого порядка [25]:

$$\dot{\mathbf{x}}_5 = (A_5 + B_5 K_5) \mathbf{x}_5, \\ \mathbf{x}_5 = (\omega_3 + \omega_0, \delta + \pi/2, h_3)^T, \quad (23)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3\omega_0^2(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_5 = (1/I_3, 0, -1)^T,$$

$$K_5 = (-k_{33}^{(\omega)}, k_{33}^{(\theta)}, k_{33}^{(h)}),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_6 = (A_6 + B_6 K_6) \mathbf{x}_6,$$

$$\mathbf{x}_6 = (\omega_1, \omega_2, \gamma - \pi/2, \beta, h_1, h_2)^T, \quad (24)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0(I_3 - I_2)/I_1 & -3\omega_0^2(I_3 - I_2)/I_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(I_1 - I_3)/I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} 1/I_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1/I_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

$$K_6 = \begin{pmatrix} -k_{11}^{(\omega)} & -k_{12}^{(\omega)} & -2k_{11}^{(\theta)} - \omega_0 k_{12}^{(\omega)} & -k_{12}^{(\theta)} + \omega_0 k_{11}^{(\omega)} & k_{11}^{(h)} & k_{12}^{(h)} \\ -k_{21}^{(\omega)} & -k_{22}^{(\omega)} & -2k_{21}^{(\theta)} - \omega_0 k_{22}^{(\omega)} & -k_{22}^{(\theta)} + \omega_0 k_{21}^{(\omega)} & k_{21}^{(h)} & k_{22}^{(h)} \end{pmatrix}.$$

В данном случае такой вид линеаризованной системы (23), (24), а также структура матриц K_5 , K_6 , обусловлены тем, что режим орбитальной ориентации КА в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия нельзя реализовать без использования информации об ориентации КА. Здесь $k_{13}^{(\theta)} = k_{23}^{(\theta)} = k_{31}^{(\theta)} = k_{32}^{(\theta)} = 0$, $k_{13}^{(\omega)} = k_{23}^{(\omega)} = k_{31}^{(\omega)} = k_{32}^{(\omega)} = 0$ и $k_{13}^{(h)} = k_{23}^{(h)} = k_{31}^{(h)} = k_{32}^{(h)} = 0$.

Характеристический полином системы третьего порядка зависит от коэффициентов $k_{33}^{(\theta)}$, $k_{33}^{(\omega)}$ и $k_{33}^{(h)}$. Выберем их, как и выше, чтобы этот полином имел трехкратный действительный корень

$\lambda_j^{(5)} = -\alpha$, $j = \overline{1,3}$ где $\alpha > 0$ – степень устойчивости. Получим аналитические зависимости

$$k_{33}^{(h)} = \frac{\alpha^3 I_3}{3\omega_0^2(I_1 - I_2)}, k_{33}^{(\omega)} = I_3(3\alpha - k_{33}^{(h)}),$$

$$k_{33}^{(\theta)} = 3(I_3\alpha - \omega_0^2(I_1 - I_2)).$$

Для рассматриваемого КА зададим значение $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, тогда $k_{33}^{(h)} = -4.267 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $k_{33}^{(\omega)} = 628.648 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_{33}^{(\theta)} = 0.849 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Как и в разделе 8, значения коэффициентов полинома шестого порядка будем искать в виде $K_6 = -S^{-1}B_6^T P$, где $P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матрица, полученная в результате численного решения

алгебраического матричного уравнения Рикатти $PA_6 + A_6^T P - PB_6 S^{-1} B_6^T P + R = 0$. Здесь $R \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ и $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — положительно определенные матрицы весовых коэффициентов, выбранным значениям которых $R = \text{diag}(1, 1, 0.01, 1, 0.01, 1)$, $S = \text{diag}(1, 1)$ соответствуют значения коэффициентов

$$\begin{aligned} k_{11}^{(\omega)} &= 701.26 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, k_{12}^{(\omega)} = -554.17 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\ k_{11}^{(\theta)} &= 0.19 \text{ Н} \cdot \text{м}, k_{12}^{(\theta)} = -0.30 \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ k_{11}^{(h)} &= -0.17 \text{ с}^{-1}, k_{12}^{(h)} = 0.05 \text{ с}^{-1}, \\ k_{21}^{(\omega)} &= 117.55 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, k_{22}^{(\omega)} = 128.15 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \\ k_{21}^{(\theta)} &= 0.02 \text{ Н} \cdot \text{м}, k_{22}^{(\theta)} = 0.09 \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ k_{21}^{(h)} &= -0.04 \text{ с}^{-1}, k_{22}^{(h)} = 0.99 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Соответствующие значения корней характеристического полинома шестой степени будут $\lambda_{1,2}^{(6)} = -8.40 \cdot 10^{-5} \pm 1.11 \cdot 10^{-3} i \text{ с}^{-1}$, $\lambda_{3,4}^{(6)} = -6.52 \cdot 10^{-4} \pm 1.47 \cdot 10^{-4} i \text{ с}^{-1}$, $\lambda_5^{(6)} = -9.83 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\lambda_6^{(6)} = -1.00 \text{ с}^{-1}$.

Степень устойчивости полинома шестого порядка $\alpha = 8.40 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, закон управления (21) с указанными значениями параметров $k_{ij}^{(\theta)}$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1, 3}$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3), (4) в окрестности стационарного решения (22).

Покажем, что для найденных значений коэффициентов $k_{ij}^{(\theta)}$, $k_{ij}^{(\omega)}$, $k_{ij}^{(h)}$, $i, j = \overline{1, 3}$

закон изменения управляющего момента гиросистемы (21) действительно обеспечивает ориентацию КА, близкую к гравитационно неустойчивому положению равновесия. С этой целью вычислим решения системы (3), (4), (21) с начальными условиями $\beta(0) = 0$, $\gamma(0) = -\delta(0) = \pi/2$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) + \omega_0 = 0.01^\circ/\text{с}$, $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ на интервале времени 8 сут. На рис. 8, 9 изображены графики зависимости от времени углов γ , δ и β , компонент h_i , $i = \overline{1, 3}$ и модуля гиросtatического момента $|\mathbf{H}|$. На графиках не показан начальный участок длительностью 1 сут, содержащий переходный процесс, который обусловлен ошибками в задании начальной угловой скорости. Результаты расчетов показывают, что закон управления (21) обеспечивает устойчивую орбитальную ориентацию КА, и гиросtatический момент при этом остается ограниченным. В установившемся режиме амплитуды колебаний компонент угловой скорости ограничены следующими значениями:

$$\begin{aligned} |\omega_1| &< 1.5 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{с}, |\omega_2| < 1 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{с}, \\ |\omega_3| &< 2 \cdot 10^{-3}^\circ/\text{с}. \end{aligned}$$

На рис. 8 постепенное уменьшение амплитуды колебаний углов γ , β вызвано остаточным влиянием переходного процесса протекающего в течение первых суток полета КА. Здесь

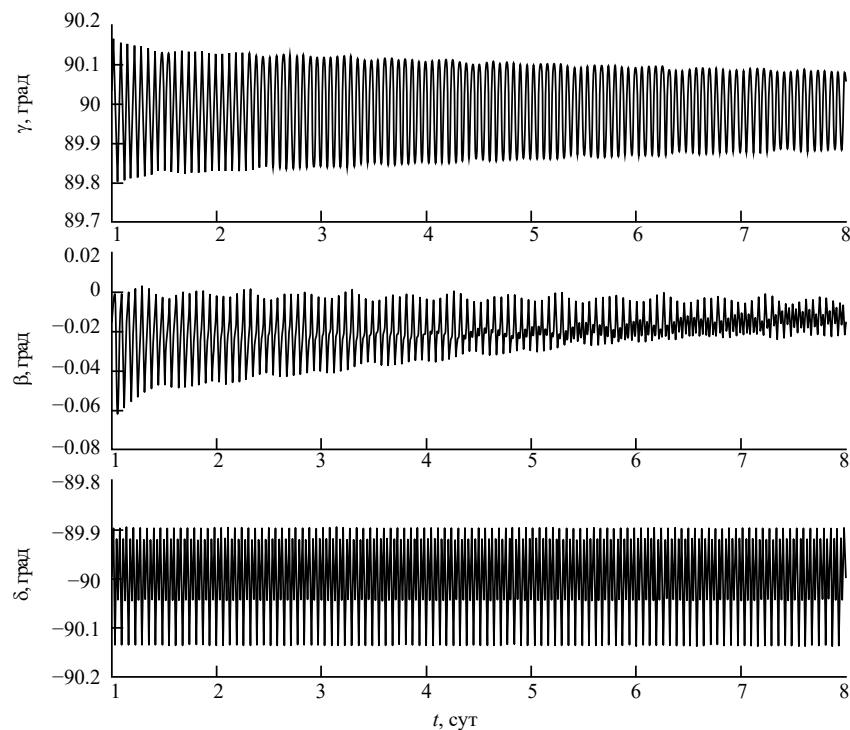


Рис. 8. Углы ориентации КА при использовании закона управления (21)

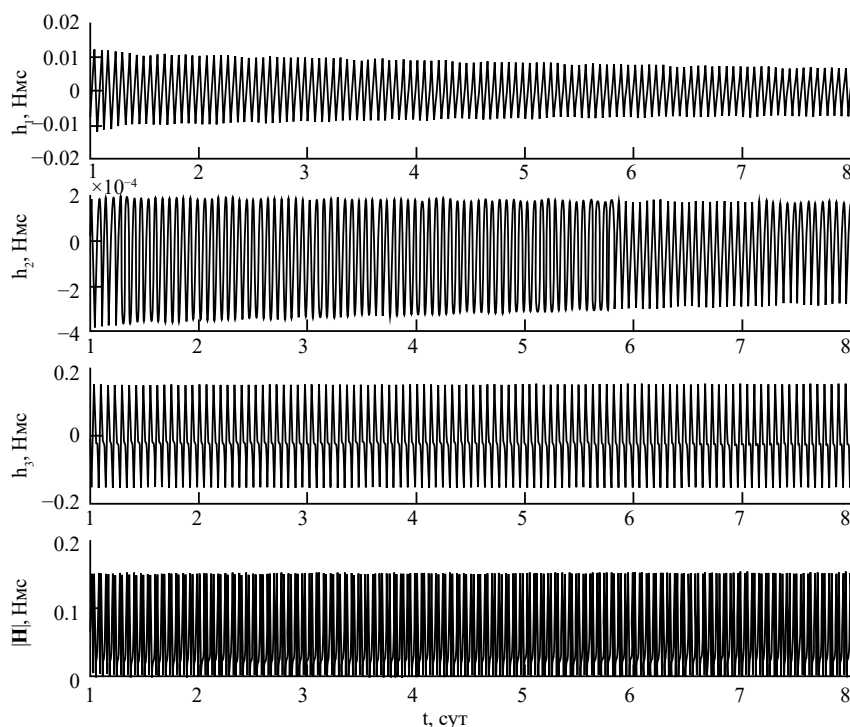


Рис. 9. Компоненты и модуль вектора гиросtatического момента КА при использовании закона управления (21)

установившиеся колебания величин γ , δ и β , ω_i , h_i , $i = 1, 3$, и $|\mathbf{H}|$ также происходят с доминирующей частотой, которая равна орбитальной частоте ω_0 .

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что с помощью гироскопических исполнительных органов системы управления вращательным движением КА можно реализовать режим длительной орбитальной ориентации КА как в окрестности гравитационно устойчивого, так и неустойчивого положения равновесия.

Приведены соответствующие законы управления собственным кинетическим моментом гиросистемы. В качестве основного режима при реализации орбитальной ориентации КА в окрестности устойчивого положения равновесия рассмотрен режим гиродемпфирования, для которого приведены результаты численного моделирования микроускорений, возникающих на борту КА, а также их амплитудные спектры. Показано, что данный режим может использоваться при проведении космических экспериментов в течение длительных интервалов времени.

Дополнительно рассмотрены еще два варианта закона управления гиросистемой, обеспечивающие орбитальную ориентацию КА в окрестности

устойчивого и неустойчивого положения равновесия. Для всех рассмотренных вариантов предложена методика выбора коэффициентов закона управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость вращательного движения КА.

Все предложенные в работе законы управления гиросистемой позволяют не только обеспечивать заданную ориентацию КА, но и ограничивать накопление гиросtatического момента.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при предварительном проектировании систем управления ориентацией КА построенных на базе гироскопических органов управления различного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И. и др. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ *Фотон-11* // Космические исследования. 2001. Т. 39. № 4. С. 419–435.
2. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В. и др. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон М-2* // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 5. С. 463–483.
3. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими испол-

- нительными органами // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 5. С. 380–393.
4. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации орбитального комплекса *Салют-6 – Союз* // Космические исследования. 1985. Т. 23. № 1. С. 63–67.
 5. Сазонов В.В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Космические исследования. 1989. Т. 27. № 6. С. 836–841.
 6. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. 223 с.
 7. Сазонов В.В. Гравитационная ориентация искусственных спутников с гиросистемами // Космические исследования. 1988. Т. 26. № 2. С. 315–318.
 8. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 129–142.
 9. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш. и др. Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата с одновременной разгрузкой кинетического момента инерционных исполнительных органов // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 4. С. 124–131.
 10. Mashtakov Y., Tkachev S., Ovchinnikov M. Use of External Torques for Desaturation of Reaction Wheels // Guidance, Control and Dynamics. 2018. V. 41. Iss. 8. P. 1663–1674.
 11. Сазонов В.В., Комаров М.М., Полежаев В.И. и др. Микроускорения на орбитальной станции Мир и оперативный анализ гравитационной чувствительности конвективных процессов тепломассопереноса // Космические исследования. 1999. Т. 37. № 1. С. 86–101.
 12. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 5. С. 380–388.
 13. Игнатов А.И. Оценка низкочастотных микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 5. С. 43–56.
 14. Игнатов А.И., Иванов Г.А., Коломиец Е.С. и др. Реализация режима солнечной ориентации космического аппарата с помощью системы двигателей-маховиков // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 2. С. 143–156.
 15. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 415 с.
 16. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 187 с.
 17. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
 18. Сарычев В.А. Условия устойчивости системы гравитационной стабилизации спутников с гиродемпфированием // Astronautica Acta. 1969. V. 14. Iss. 4. P. 299–301.
 19. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников // Сер. Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. 4. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
 20. Игнатов А.И. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 124–144.
 21. Земсков В.С., Раухман М.Р., Шалимов В.П. Гравитационная чувствительность раствор-расплавов при кристаллизации двухфазных сплавов InSb-InBi в космических условиях // Космические исследования. 2001. Т. 39. № 4. С. 384–389.
 22. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992. 392 с.
 23. Игнатов А.И., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В. Реализация режима гравитационной ориентации космического аппарата без накопления кинетического момента гиросистемы // Сб. тез. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Санкт-Петербург, Россия. 2023. Т. 1. С. 593–595.
 24. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
 25. Игнатов А.И., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В. Поддержание режима орбитальной ориентации космического аппарата в окрестности гравитационно неустойчивого положения равновесия // Сб. тез. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Санкт-Петербург, Россия. 2023. Т. 1. С. 591–592.

ESTIMATION OF THE LEVEL OF QUASI-STATIC MICROACCELERATIONS ON BOARD OF THE SPACECRAFT IN ORBITAL ORIENTATION MODE

© 2025 A. I. Ignatov

Bauman Moscow Technical State University, Moscow, Russia

**e-mail: general_z@mail.ru*

The paper considers various options for implementing the orbital orientation mode of a spacecraft intended for conducting experiments in microgravity conditions over long time intervals. The system of gyroscopic controls (gyrosystem) is used as the actuators of the angular motion control system. The gyrosystem control laws proposed in the paper allow not only to provide a given orientation of the spacecraft, but also to limit the accumulation of the gyrosystem's own angular momentum, which significantly increases the duration of time intervals of unperturbed motion of the spacecraft. The efficiency of the considered control laws in the presence of external destabilizing disturbing moments acting on the spacecraft is confirmed by the results of numerical modeling of the equations of motion. The main orientation mode of the spacecraft investigated in the paper is its orbital orientation using gyrodamping. For this mode, an assessment of the level of quasi-static microaccelerations occurring on board the spacecraft is carried out, and the results of their spectral analysis are shown.