

УДК 531.352

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПО ЛЕЕРНОЙ СВЯЗИ ПОД СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

© 2024 г. В. С. Васькова*, А. В. Родников**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия***e-mail: vsvaskova@yandex.ru****e-mail: rodnikovav@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.07.2023

После доработки 06.09.2023

Принята к публикации 11.09.2023

Рассматривается возможность перемещения грузов вдоль троса, связывающего две тяжелые космические станции, посредством космического аппарата (КА) с управляемым солнечным парусом без затрат топлива. Динамика относительного движения КА изучается в рамках модельной задачи, предполагающей, что станции движутся по одной гелиоцентрической орбите, солнечный парус является идеальной отражающей плоской панелью, а трос реализует идеальную одностороннюю леерную связь, ограничивающую относительное движение КА некоторым эллипсоидом. Указывается, что если расстояние между станциями достаточно мало, а отношение площади паруса к массе КА имеет тот же порядок, что и в уже реализованных космических миссиях, то солнечная радиация является основным фактором, определяющим движение КА в орбитальной системе отсчета. Решается задача определения всех пар точек эллипсоида в плоскости орбиты станций, между которыми возможно перемещение с постоянно ориентированным парусом. Оценивается время перелета КА между вершинами эллипсоида, соответствующими его большой полуоси, при парусе, ориентированном ортогонально солнечным лучам с нулевой начальной скоростью. Также оценивается минимально возможное время такого перелета при соответствующем законе управления положением паруса, в том числе для нулевых начальной и конечной скоростей.

DOI: 10.31857/S0023420624030087, EDN: JJNLXZ

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании космического пространства может возникнуть необходимость в перемещении грузов между рукотворными космическими объектами, расположенными достаточно близко. Использование для такой транспортировки движителей, использующих солнечную радиацию, является способом, позволяющим удешевить космическую миссию за счет сокращения необходимых запасов топлива и уменьшения в целом служебных систем, в состав которых входит топливный отдел космического аппарата (КА) [1]. В настоящее время уже можно сказать, что солнечные паруса успешно вошли в космическую практику [2–4]. В опубликованных к настоящему времени теоретических исследованиях (не претендуя на полноту цитирования, упомянем работы [5–12]) обосновываются многочисленные возможности использования солнечного паруса. В частности, указывается, что радиационный движитель применим для межпланетных перелетов (например, публикации [6, 13]), когда, располагая плоскость паруса под углом к солнечным лучам, можно изменить перигелий орбиты, тем самым удаляясь от Солнца или приближаясь к нему. Однако солнечный парус сам по

себе не может создавать ускорение, направленное не под острым углом по отношению к солнечным лучам. Этот факт, казалось бы, становится непреодолимым препятствием для парусного сообщения между близко расположенными искусственными гелиоцентрическими объектами. Проблема движения “против ветра”, в данном случае солнечного, может быть решена, если движение будет осуществляться вдоль троса, соединяющего эти объекты. Трос в этом случае будет исполнять ту же роль, что и киль морского парусного судна [14, 15].

В настоящей работе рассматривается модельная задача движения легкого космического аппарата, оснащенного идеальным солнечным парусом, вдоль троса, концы которого закреплены на двух массивных гелиоцентрических космических станциях. При этом станции перемещаются по одной гелиоцентрической орбите на расстоянии порядка 1 а.е. от Солнца и расположены достаточно близко (от нескольких до нескольких сотен километров) друг от друга, а трос считается невесомым, идеально гибким и нерастяжимым. Длина троса предполагается превосходящей расстояние между точками закрепления. В этом случае движение КА с парусом ограничено некоторым эллипсоидом вращения

с фокусами на станциях, реализующим идеальную одностороннюю леерную [16, 17] связь. Кроме того, отклонение КА от орбиты станций не превышает величину порядка 10^{-6} от большой полуоси этой орбиты, а угловая скорость орбитальной системы отсчета может быть оценена как $2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Поэтому, при малой продолжительности перелета КА, неинерциальностью орбитальной системы отсчета можно пренебречь. Предполагается также, что движение КА не оказывает существенного влияния на движение станций. Оправданием этого предположения выступает тот факт, что, как будет показано ниже, максимальное натяжение троса определяется центростремительным ускорением КА в орбитальной системе отсчета и в большинстве случаев составляет менее 1 Н. Таким образом, необходимый трос в буквальном смысле является нитью, чья масса незначительна по сравнению с массой всей конструкции. Заметим, что в реальной ситуации трос будет оказывать разнонаправленное влияние на станции. Для компенсации такого влияния могли бы быть полезны солнечные паруса, развернутые непосредственно на станциях.

В работе изучаются перелеты КА между вершинами эллипсоида, соответствующими его большой полуоси, вдоль дуги, образуемой пересечением эллипсоида и плоскости орбиты станций. Рассматриваются перелеты с постоянно ориентированным парусом, с парусом, в каждой точке траектории ориентированным так, чтобы обеспечить минимальную продолжительность перелета. При этом последняя оценивается для нулевой начальной и, в большинстве случаев, нулевой конечной скорости. Определяется оптимальная с точки зрения продолжительности перелета длина троса. Устанавливается, что для станций, расположенных на расстоянии 2...200 км друг от друга, минимально возможное время перелета КА с характеристиками паруса, как в уже реализованных миссиях, может составлять несколько часов, что вполне приемлемо с учетом отсутствия топливных затрат. Также приводятся некоторые рекомендации для практической реализации рассматриваемых перелетов.

ПОСТАНОВКА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Будем изучать движение космического аппарата A массой m , оснащенного идеально отражающим плоским солнечным парусом площадью S , способного передвигаться вдоль троса длиной $2a$ с концами, закрепленными в точках F_1 и F_2 , находящихся на расстоянии $2c$ друг от друга и принадлежащих соответственно двум тяжелым гелиоцентрическим станциям, описывающим одну и ту же орбиту. Будем предполагать, что влияние аппарата на движение станций незначительно, т.е. точки F_1 и F_2 неподвижны в орбитальной системе отсчета. В этом

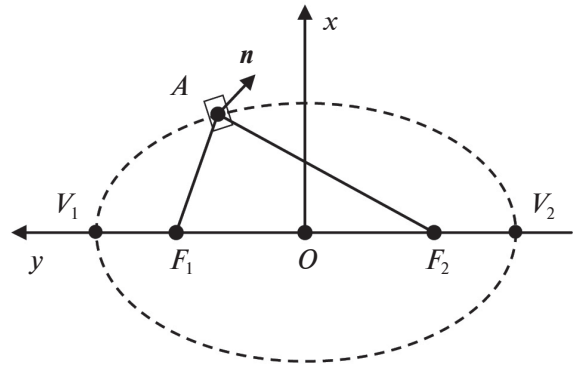


Рис. 1. Космическая система с солнечным парусом.

случае движение аппарата A будет ограничено эллипсоидом вращения с фокусами F_1 и F_2 , большой полуосью a и эксцентриситетом $e = c/a$ (рис. 1).

Будем считать, что прямая F_1F_2 всегда перпендикулярна солнечным лучам. Для описания движения аппарата A относительно станций будем использовать правую декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, где O — середина отрезка F_1F_2 , Ox направлена от Солнца, т.е. по направлению солнечных лучей, Oy направлена по прямой F_1F_2 так, что точка F_1 имеет положительную координату по этой оси. Без ограничения общности можно считать, что Oz направлена в сторону движения космических станций. Тогда координаты x, y, z аппарата A в течение всего времени движения должны подчиняться неравенству

$$\tilde{f}(x, y, z) = \frac{x^2}{b^2} + y^2 + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad (1)$$

задающему идеальную одностороннюю леерную [16, 17] связь. Следуя исследованиям [14, 15], будем предполагать, что станции находятся на расстоянии порядка 1 а.е. от Солнца, расстояние между ними не превышает нескольких километров и отношение S/m имеет тот же порядок, что и у аппаратов уже реализованных миссий. В этом случае отношение максимально возможной величины силы солнечной радиации, действующей на парус, к абсолютной величине разности силы тяготения Солнца и переносной силы инерции, действующих на аппарат A , соответствует величине порядка $10^5 - 10^6$, так как расстояние от КА до орбиты станций не превышает 10^{-6} ее полуоси. Поэтому в рамках модельной задачи в уравнениях движения могут быть учтены только сила солнечной радиации F_S и кориолисова сила F_c . Величина F_c при относительной скорости порядка нескольких метров в секунду будет превосходить разность отброшенной силы притяжения и центробежной силы на 3...4 порядка и может быть лишь немного меньше F_S . Например, при $m = 1000 \text{ кг}$, $S = 1000 \text{ м}^2$ и относительной скорости аппарата в 1 м/с, кориолисова сила оценивается в $4 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$, а $F_S \cong 9 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$

. Поэтому кориолисова сила должна быть учтена в уравнениях движения. Однако в рассматриваемой ситуации сила Кориолиса лежит в плоскости орбиты станций и перпендикулярна скорости аппарата с солнечным парусом. Эта сила не может вывести аппарат из данной плоскости и, в то же время, не может изменить скорость, так как траектория движения определена геометрическим ограничением, т.е. тросом. Тем не менее, при очень малых относительной скорости ускорение, создаваемое кориолисовой силой, может превышать центростремительное ускорение. Поэтому, чтобы компенсировать влияние F_c и обеспечить ненулевое натяжение троса, в начале и в конце движения в течение нескольких секунд необходимо располагать нормаль к солнечному парусу под углом $\sim 135^\circ$ к внутренней нормали к траектории.

Используя стандартную модель идеального солнечного паруса [6], примем $F_S = PSn_x^2n$, где P — характерная величина солнечного давления ($P \approx 9 \cdot 10^{-6}$ Н/м² на расстоянии 1 а.е. от Солнца); $n(n_x, n_y, n_z)$ — орт направления нормали к плоскости паруса; n_x, n_y, n_z — направляющие косинусы этой нормали в $Oxyz$, $n_x \geq 0$ по смыслу задачи. В то же время $F_c = -2m[\omega, \dot{r}]$, где ω — угловая скорость орбитальной системы отсчета $Oxyz$, $r = OA$ — радиус-вектор точки A . Тогда уравнения движения аппарата A в орбитальной системе отсчета могут быть записаны в форме уравнений с множителем Лагранжа $\tilde{\lambda}$ как

$$\ddot{r} = P \frac{S}{m} n_x^2 n - 2[\omega, \dot{r}] + \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\lambda} = 0$, если аппарат A находится внутри эллипсоида, и $\tilde{\lambda} \leq 0$, если на его поверхности. Считая большую полуось a эллипсоида (1) единицей безразмерной длины и обозначая штрихом ()' производную по безразмерному времени

$$\tau = \sqrt{\frac{PS}{(am)}} t, \text{ перепишем выражение (2) в виде} \\ r'' = n_x^2 n - 2\varepsilon[e_z, r'] + \lambda \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (3)$$

где $\varepsilon = |\omega| \sqrt{am/(PS)}$; e_z — орт оси Oz ; λ имеет тот же смысл, что и $\tilde{\lambda}$; $f = \frac{(x^2 + z^2)}{(1 - e^2)} + y^2 = 1$. Отметим,

что в описанной выше ситуации ε составляет величину порядка $10^{-4} \dots 10^{-3}$.

Заметим, что если во все время движения $n_z = 0$, т.е. нормаль к солнечному парусу параллельна плоскости орбиты станций, то уравнение (3) допускает интегральное многообразие $z = 0$, т.е. многообразие движений аппарата A в плоскости Oxy . В дальнейшем ограничимся только такими движениями. Более того, будем рассматривать только движения по эллипсу, являющемуся пересечением

эллипсоида (1) с плоскостью Oxy . В этом случае уравнение (3) упрощается:

$$\frac{1}{2}(r', r')' = n_x^2(n, r'), \quad (4)$$

причем обязательное в этом случае условие неположительности множителя Лагранжа λ может быть записано как

$$\frac{x'^2}{1 - e^2} + y'^2 + \frac{n_x^2}{2} \left(n, \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \varepsilon \left([e_z, r'], \frac{\partial f}{\partial r} \right) \geq 0. \quad (5)$$

Отметим, что последнее слагаемое в левой части выражения (5) при скорости аппарата A относительно станций, не превышающей нескольких метров в секунду с учетом уже сделанных предположений, можно считать незначительным. Таким образом, в описываемой ситуации неинерциальность орбитальной системы отсчета слабо влияет на движения по границе эллипсоида (1) в плоскости орбиты станций и в рамках модельной задачи может не учитываться. Заметим также, что в этом случае условие (5) заведомо выполняется, если угол между нормалью к парусу и внешней нормалью к эллипсоиду (1) является острым.

Нетрудно проверить, что если направление нормали n определяется только положением аппарата A , то уравнение (5) допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \int n_x^2(n_x dx + n_y dy) = h = \text{const}. \quad (6)$$

ДВИЖЕНИЕ С НЕИЗМЕННО НАПРАВЛЕННОЙ НОРМАЛЬЮ К ПАРУСУ

Если во все время движения направление нормали n не меняется по отношению к орбитальным осям, то интеграл (6) может быть записан как

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = n_x^2(n_x x + n_y y) + h. \quad (7)$$

Анализируя это равенство, можно показать, что если движение начинается с нулевой скоростью из некоторой точки A_1 на границе эллипсоида (1) в плоскости орбиты станций с неизменно ориентированной по отношению к орбитальным осям и параллельной этой плоскости нормалью к солнечному парусу, то возможны только две ситуации. Аппарат A или покинет границу эллипсоида, или возникнут колебания по дуге эллипса

$$\frac{x^2}{1 - e^2} + y^2 = 1 \quad (8)$$

между A_1 и точкой A_2 такой, что прямая $A_1 A_2$ ортогональна n (рис. 2).

Если в условии (5) пренебречь слагаемым, содержащим ε , то такие колебания (с учетом того, что как в A_1 , так и в A_2 относительная скорость аппарата A равна 0) будут возможны, только если в обеих точках угол между внешней нормалью

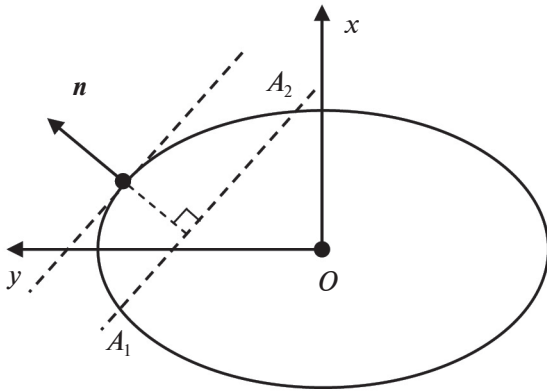


Рис. 2. Постоянно ориентированная нормаль к парусу при перемещении между двумя точками.

к эллипсоиду (1) и нормалью к парусу n будет не более чем прямым. В то же время, если как в A_1 , так и в A_2 этот угол будет острым и дуга A_1A_2 составляет менее половины эллипса (8), скалярное произведение $(n, \partial f / \partial r)$ будет положительным во всех ее точках. Из этого следует, что условием возможности колебаний по дуге A_1A_2 будут неравенства

$$\left(n, \frac{\partial f}{\partial r}(A_{1,2}) \right) > 0. \quad (9)$$

Найдем все пары точек на эллипсе (8), удовлетворяющие этим неравенствам, если n выбирается ортогональным прямой A_1A_2 так, чтобы n_x был положительным. Для этого поставим в соответствие каждой точке эллипса (8) ее эксцентрическую аномалию ψ по формулам $x = \sqrt{1-e^2}(\sin \psi)$, $y = \cos \psi$. Пусть при этом точке A_1 соответствует аномалия ψ_1 , а точке A_2 — аномалия ψ_2 . Тогда искомое множество пар точек можно изобразить на плоскости переменных ψ_1 и ψ_2 , причем, учитывая, что эти величины определяются с точностью до 2π , достаточно рассмотреть какой-нибудь квадрат со стороной 2π . Для определенности будем считать, что $-\pi/2 \leq \psi_i \leq 3\pi/2$. Заметим, что в паре (A_1, A_2) не имеет значения, какая из точек первая, а какая вторая. Поэтому множество пар, между которыми возможны колебания вдоль дуги эллипса, симметрично относительно прямой $\psi_1 = \psi_2$. По той же причине без ограничения общности можно считать, что $\cos \psi_2 > \cos \psi_1$. Отметим также, что точки A_1 и A_2 не могут иметь одинаковые координаты по

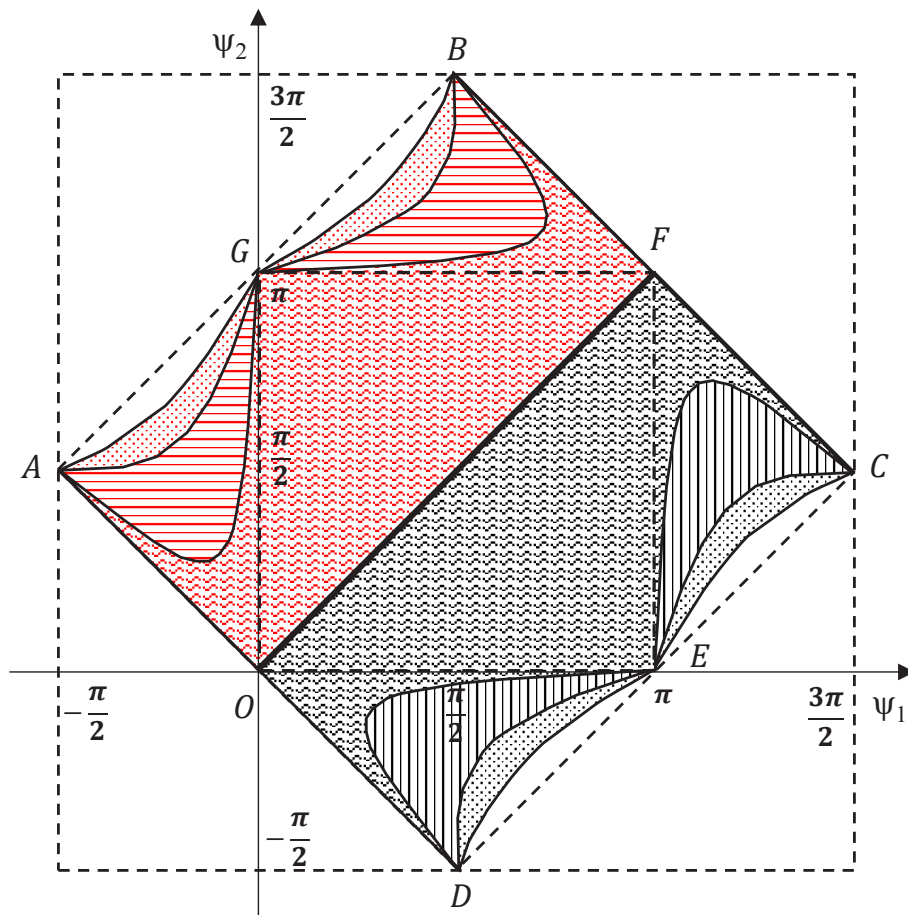


Рис. 3. Множества пар точек при различных эксцентриситетах эллипса e .

оси Oy , так как в этом случае n должна быть ортогональна оси Ox , т.е. должно выполняться равенство $n_x = 0$ и движение не сможет начаться.

С учетом сделанных предположений условие (9) можно переписать как

$$\begin{aligned} e^2 \cos \psi_1 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \sin(\psi_1 - \psi_2) &> 0, \\ e^2 \cos \psi_2 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) + \sin(\psi_1 - \psi_2) &> 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Анализируя эти условия и учитывая вышесказанное, можно установить, что искомая область при изменении e от 0 до 1 эволюционирует из квадрата $ABCD$ в квадрат $OGFE$, но так, что точки A, B, C, D, G, F, E, O все время остаются на границе области (рис. 3). На этом рисунке границы области показаны для $e = 0$, $0 < e < 1/\sqrt{2}$, $e = 1/\sqrt{2}$ (когда криволинейные участки границы имеют вертикальные и горизонтальные касательные в своих крайних точках) и для $1/\sqrt{2} < e < 1$. Отметим, что во всех случаях кривые AG и GB , а также кривые EC и DE симметричны относительно прямой $\psi_2 + \psi_1 = \pi$, в то время как кривые AG и DE , и также кривые GB и EC симметричны относительно прямой $\psi_1 = \psi_2$, т.е. кривые AG, GB, EC, DE конгруэнтны.

ДВИЖЕНИЕ С ПАРУСОМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ СОЛНЕЧНЫМ ЛУЧАМ

Рассмотрим более подробно пару $\psi_2 = 0$, $\psi_1 = \pi$ (точки V_1 и V_2 на рис. 1 соответственно). В этом случае движение происходит между наиболее удаленными вершинами эллипса (8), т.е. вершинами, соответствующими большой полуоси, причем во все время движения нормаль к парусу должна быть сонаправлена с осью Ox , плоскость паруса ортогональна солнечным лучам. Очевидно, колебания между этими вершинами будут происходить по дуге, соответствующей положительным значениям координаты x . В этой ситуации $n_x = 1$, $n_y = 0$, условия (5) выполняются во все время движения, и интеграл (7), с учетом того, что относительная скорость аппарата в каждой из вершин V_1 и V_2 равна нулю, может быть переписан в виде

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \psi) \psi'^2 = \sqrt{1 - e^2} \sin \psi, \quad (11)$$

т.е. закон движения точки A может быть найден очевидной квадратурой. В частности, продолжительность T перемещения между вершинами V_1 и V_2 , как следует из уравнения (11), определяется интегралом

$$T(e) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1 - e^2}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{\sin \psi}} d\psi. \quad (12)$$

Отметим, что при $e \rightarrow 0$ функция $T(e) \rightarrow 2K(\sqrt{2}/2) \approx 3.708$, где $K(k)$ — полный

эллиптический интеграл первого рода с модулем k . В то же время, если $e \rightarrow 1$, то, как и следовало ожидать, $T(e) \rightarrow \infty$. Дифференцируя выражение (12) по e , можно установить, что время перемещения между вершинами эллипса (8) будет минимальным при $e = e_{\min} = 0.7906$, причем $T_{\min} = T(e_{\min}) = 3.557$.

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ САМОГО БЫСТРОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ V_1 И V_2 ЭЛЛИПСА С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Вычислим теперь минимально возможное время перемещения из вершины $\psi = 0$ в вершину $\psi = \pi$, предполагая, что движение начинается с нулевой скоростью, а нормаль n к парусу, оставаясь параллельной плоскости Oxy , может быть в любой момент времени повернута под любым не тупым углом к направлению солнечных лучей. Будем определять направление этой нормали углом α между Ox и n , отсчитывая его против часовой стрелки. Очевидно, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. Для того чтобы время перелета было минимальным, необходимо в каждой точке траектории выбирать угол α так, чтобы проекция силы солнечного давления на касательную τ к эллипсу (8), направленную в сторону движения, принимала максимально возможное значение (рис. 4).

Учитывая, что $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$, эта проекция в безразмерных переменных может быть представлена как

$$\begin{aligned} F_\tau &= n_x^2(n, \tau) = \\ &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos \psi \cos^3 \alpha - \sin \psi \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}. \end{aligned} \quad (13)$$

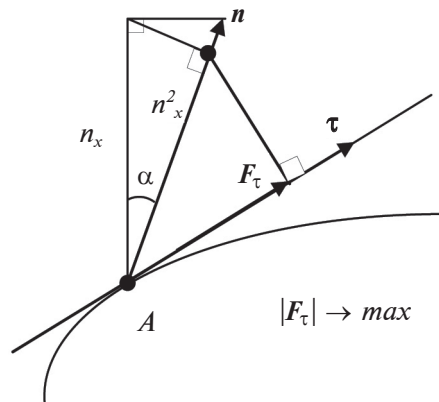


Рис. 4. Поиск максимально возможной проекции силы солнечного давления на касательную к траектории движения.

Анализируя правую часть уравнения (13) как функцию α , нетрудно убедиться, что F_τ достигает максимума при $\psi = 0$, если $\alpha = 0$, при $0 < \psi < \pi$, если

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= G(\psi) = \\ &= \frac{3\sqrt{1-e^2} \cos \psi - \sqrt{9(1-e^2)\cos^2 \psi + 8\sin^2 \psi}}{4\sin \psi}, \end{aligned} \quad (14)$$

и при $\psi = \pi$, если $\alpha = -\pi/2$.

Заметим, что максимальное значение F_τ будет положительным как при движении “от Солнца” ($0 \leq \psi \leq \pi/2$), так и при движении “к Солнцу” ($\pi/2 \leq \psi < \pi$), т.е. трос в данном случае выполняет ту же функцию, что и киль морского парусного судна (см. также [14, 15]). Кроме того, если угол α выбирается по формуле (14), в каждой точке траектории движения угол между нормалью к парусу и внешней нормалью к эллипсоиду (1) оказывается острым, т.е. условие (5) гарантировано выполняется (если, конечно, считать слагаемые с ε несущественными). Интеграл энергии (5) в рассматриваемой ситуации запишется как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-e^2 \cos^2 \psi) \psi'^2 &= F(\psi) = \\ &= \int_0^\psi \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \varphi - G(\varphi) \sin \varphi}{(1+G^2(\varphi))^{3/2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Откуда закон движения можно получить очевидной квадратурой. В частности, минимальное время перелета между вершинами эллипса (8) оказывается равным

$$T_1(e) = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1-e^2 \cos^2 \psi}{2F(\psi)}} d\psi. \quad (16)$$

Этот интеграл является несобственным. Для устранения особенности можно разбить отрезок интегрирования на промежутки $[0, \psi^*]$, $[\psi^*, \pi]$ и на первом из них сделать замену $b = \sqrt{\sin(\sin \psi)}$. В результате первую часть интеграла (16) можно записать как

$$\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\sin(\psi^*)}} \frac{\sqrt{1-e^2(1-b^4)}/\sqrt{1-b^4}}{\sqrt{\int_0^{\arcsin b^2} f(\psi) d\psi} / b^2} db, \quad (17)$$

где через $f(\psi)$ обозначено подынтегральное выражение в выражении (15). Нетрудно убедиться, что подынтегральная функция в уравнении (17) ограничена, т.е. интеграл (16) может быть найден численно.

Графики зависимостей T_1 от эксцентриситета e и от отношения полуосей $b/a = \sqrt{1-e^2}$ приведены на рис. 5. Минимальное значение T_1 достигается при $e = 0.9085$ ($b/a = 0.4189$), причем $T_{1\min} = 2.5691$.

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ САМОГО БЫСТРОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ V_1 И V_2 ЭЛЛИПСА С НУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНОЙ И КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЯМИ

Вычислим также минимально возможное время перемещения из вершины $\psi = 0$ в вершину $\psi = \pi$, потребовав, чтобы движение не только начиналось, но и заканчивалось с нулевой скоростью. В этом случае, как и раньше, в каждой точке траектории касательное ускорение должно быть максимально

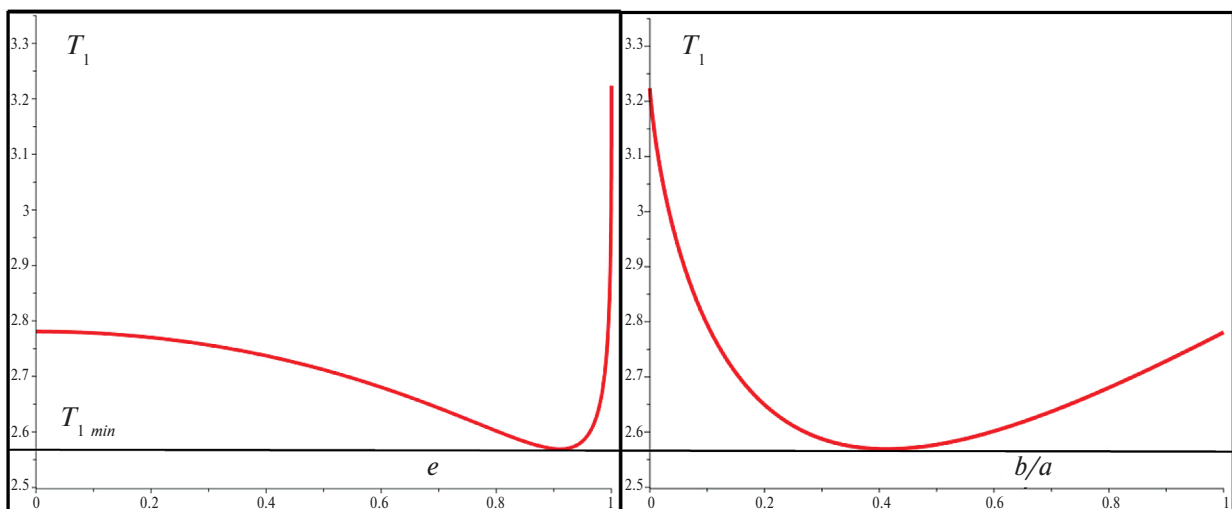


Рис. 5. Зависимость времени перелета от параметров эллипса при нулевой начальной скорости.

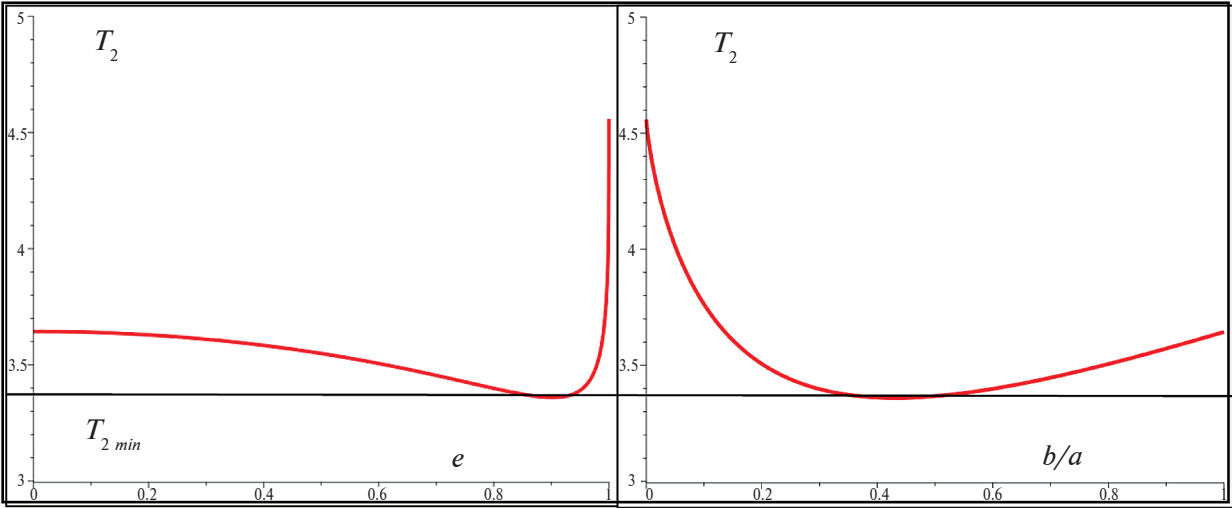


Рис. 6. Зависимость времени перелета от параметров эллипса при нулевой начальной и конечной скоростях.

возможным. Но в силу симметрии траектории относительно оси Ox при $\psi \in [0, \pi/2)$ оно должно быть направлено в сторону движения, а на промежутке $\psi \in (\pi/2, \pi)$ — против движения. Иными словами, на первой половине пути надо максимально ускоряться, а на второй — максимально замедляться. В силу той же симметрии, продолжительность перелета в этом случае определяется равенством

$$T_1(e) = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \psi}{2F(\psi)}} d\psi,$$

(18)

где, как и раньше, $F(\psi)$ определяется интегралом (15).

Графики зависимостей T_2 от эксцентриситета e и от отношения полуосей $b/a = \sqrt{1 - e^2}$ приведены на рис. 6. Минимальное значение T_2 достигается при $e = 0.9117$ ($b/a = 0.4324$), причем $T_{2min} = 3.3597$.

Таблица. Продолжительность перелета между вершинами эллипса (на расстоянии 1 а.е. от Солнца)

Аппараты	Площадь паруса S , m^2	Масса аппарата m , кг	Отношение площади к массе S/m , m^2/kg	Расстояние (= длине троса) $2a$, км	Минимальное время перелета с парусом, ортогональным солнечным лучам (сут+ч+мин)	Минимальное время перелета с нулевой начальной и конечной скоростями (сут+ч+мин)	Минимальное время перелета с нулевой начальной скоростью t^* (сут+ч+мин)	Максимальная средняя скорость (по "горизонтали") $v = 2a/t^*$, м/с
Безразмерные значения	1	1	1	2	3.557267412	3.3597	2.5691	0.7785
IKAROS (2010)	196	310	0.6323	2	0 + 13 + 6	0 + 12 + 22	0 + 9 + 28	0.06
				200	5 + 10 + 60	5 + 3 + 43	3 + 22 + 36	0.59
NanoSail (2010)	10	4	2.5	2	0 + 6 + 35	0 + 6 + 13	0 + 4 + 45	0.12
				200	2 + 17 + 53	2 + 14 + 13	1 + 23 + 35	1.17
LightSail-2 (2019)	32	5	6.4	2	0 + 4 + 7	0 + 3 + 53	0 + 2 + 58	0.19
				200	1 + 17 + 10	1 + 14 + 53	1 + 5 + 44	1.87
Sunjamer (canceled 2014)	>1200	32	37.5	2	0 + 1 + 42	0 + 1 + 36	0 + 1 + 14	0.45
				200	0 + 17 + 1	0 + 16 + 4	0 + 12 + 17	4.52
"Тягач"	1000	1000	1	2	0 + 10 + 25	0 + 9 + 50	0 + 7 + 31	0.07
				200	4 + 8 + 9	4 + 2 + 22	3 + 3 + 13	0.74
"Клипёр"	10000	200	50	2	0 + 1 + 28	0 + 1 + 23	0 + 1 + 4	0.52
				200	0 + 14 + 44	0 + 13 + 55	0 + 10 + 38	5.22

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТОВ В ТРАДИЦИОННЫХ ЕДИНИЦАХ ВРЕМЕНИ

Минимально возможные величины продолжительности перелетов между вершинами эллипса (8), соответствующими большой полуоси, определяемые равенствами (12), (16), (18), выражены в единицах безразмерного времени, зависящего от необходимой длины троса и “парусности” S/m . В таблице эти же значения приведены в традиционных единицах времени для аппаратов *IKAROS* [2], *NanoSail* [4], *LightSail* [3], нереализованной миссии *Sunjammer* [18], а также для гипотетических аппаратов “Буксир” с парусностью $1 \text{ м}^2/\text{кг}$ и “Клипер” с парусностью $50 \text{ м}^2/\text{кг}$.

Как видно из таблицы, если станции расположены достаточно близко (2 км), продолжительность перемещения составляет не более нескольких часов, что может быть признано приемлемым, с учетом отсутствия топливных затрат. Если же станции расположены на несколько большем расстоянии друг от друга (200 км), то перемещение занимает время от нескольких часов до нескольких суток. Насколько это приемлемо, зависит от характера выполняемой миссии. Отметим также, средняя скорость перемещения оказывается тем больше, чем больше расстояние между станциями.

Для полноты описания движения приведем пример оценки необходимой прочности троса. Для этого заметим, что почти во всех рассматриваемых ситуациях относительная скорость КА максимальна в вершине эллипса, соответствующей меньшей полуоси. Заметим также, что при скорости порядка нескольких метров в секунду сила натяжения троса в основном определяется центростремительным ускорением КА, так как величины F_S и F_c оказываются на три-четыре порядка меньше, чем величина mv^2/ρ , где v — максимальная относительная скорость КА, а ρ — радиус кривизны траектории. Тогда силу натяжения троса можно оценить как $T \cong mv^2/(2\rho \cos(\alpha/2))$, где α — угол между ветвями троса (т.е. между направлениями от КА на фокусы эллипса). Пусть, например, $m = 1000 \text{ кг}$, $a = 100 \text{ км}$, $v = 10 \text{ м/с}$ (последнее заведомо больше любой из ситуаций из таблицы). Тогда в упомянутой вершине эллипса $T \cong 1 \text{ Н}$. Таким образом, даже трос, выдерживающий усилие в 10 Н, заведомо имеет многократный запас прочности для реализации описанных выше перелетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе установлена принципиальная возможность перемещения грузов вдоль троса, соединяющего две гелиоцентрические станции посредством солнечного паруса за приемлемое время в случае, когда длина троса превышает расстояние между точками его закрепления. Следует, однако,

заметить, что реальная продолжительность такого перемещения окажется несколько больше, чем вычисленная выше, так как на движение влияют, в частности, такие факторы, как неидеальность материала паруса, упругие и прочностные свойства троса и другое. Но благодаря малости относительной скорости, прочность троса может быть сравнительно малой. Отметим также, что предлагаемая схема организации движения, т.е. движения между настолько отдаленными точками, насколько позволяет трос, может и не быть оптимальной хотя бы потому, что при достаточно большом расстоянии между станциями линейные размеры станций могут не позволить реализовать оптимальное отношение длины троса к расстоянию между его точками закрепления. Возможно, более быстрые перелеты сможет обеспечить другая организация движения, предусматривающая начало и конец движения непосредственно в точках закрепления троса и специальные алгоритмы развертывания троса, обеспечивающие большую, чем в рассмотренных ситуациях, среднюю скорость перемещения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цандер Ф. А. Об использовании силы давления света для полетов в межпланетном пространстве // Цандер Ф. А. Проблема полета при помощи реактивных аппаратов: Межпланетные полеты: сб. статей / под ред. Л. К. Корнеева. 2-е доп. изд. М.: Оборонгиз, 1961. С. 361–381.
2. JAXA. IKAROS Small Scale Solar Powered Sail Demonstration Satellite. 2010. Дата обращения: 02.07.2023.
<http://www.isas.jaxa.jp/en/missions/spacecraft/current/ikaros.html>
3. The Planetary Society. LightSail 2 completes mission with atmospheric reentry. 2022. Дата обращения: 02.07.2023.
<https://www.planetary.org/articles/lightsail-2-completes-mission-2022>
4. NASA. Small Satellite Missions. 2011. Дата обращения: 02.07.2023.
https://www.nasa.gov/mission_pages/smallsats/nanosaild.html

5. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. 3-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 2009. 432 с.
6. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом / под ред. Егорова В. А. М.: Наука, 1986. 304 с.
7. Macdonald M. *Advances in Solar Sailing*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2014. 980 p.
8. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимального вывода на орбиту космического аппарата с использованием реактивного ускорения и солнечного паруса в переменных Кустаанхеймо — Штифеля // Косм. исслед. 2021. Т. 59. № 4. С. 327–338. DOI: 10.31857/S0023420621040051. (= Sapunkov Y. G., Chelnokov Y. N. Solution of the Problem of Optimal Spacecraft Launching into Orbit Using Reactive Acceleration and Solar Sail in Kustaanheimo–Stiefel Variables // Cosmic Research. 2021. V. 59. No. 4. P. 280–290.)
9. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестностях коллинеарной точки либрации L1 // Вестн. СПбГУ. 2005. Сер. 10. Вып. 2. С. 192–198.
10. Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А. Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // Астрон. журн. 2020. Т. 4. № 3. С. 193–200. DOI: 10.31857/S0320010820030055.
11. Farrés A., Jorba À. Periodic and quasi-periodic motions of a solar sail close to SL1 in the Earth–Sun system // Celestial Mechanics. 2010. V. 107. P. 233–253.
12. Tian-Ze Chen, Xiang Liu, Guo-Ping Cai, Chao-Lan You. Attitude and vibration control of a solar sail // *Advances in Space Research*. 2023. V. 71. Iss. 11. P. 4557–4567. DOI: 10.1016/j.asr.2023.01.039.
13. Хабибуллин Р. М., Старина О. Л. Алгоритм применения законов управления движением космического аппарата с солнечным парусом для совершения некомпланарного перелета Земля – Марс // Инженер. журн.: наука и инновации. 2020. Т. 104. № 8. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-8-2006.
14. Rodnikov A. V. Coastal navigation by a solar sail // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 868. Art. ID. 012021. DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/012021.
15. Rodnikov A. V. On Relative motion via a solar sail // *AIP Conf. Proc. XLIV Academic Space Conference: Dedicated to the Memory of Academician S. P. Korolev and Other Outstanding Russian Scientists — Pioneers of Space Exploration* 2021. V. 2318(1). Art. ID. 110020. DOI: 10.1063/5.0035755.
16. Родников А. В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате // Косм. исслед. 2006. Т. 44. № 6. С. 553–560. (= Rodnikov A. V. Existence of Nonimpact Motions Along a Wire Rope Fixed to an Extended Spacecraft // *Cosmic Research*. 2006. V. 44. Iss. 6. P. 532–539.)
17. Родников А. В., Красильников П. С. О пространственных движениях орбитальной леерной связки // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 4. С. 505–518. DOI: 10.20537/nd1704004.
18. NASA. Solar Sail Demonstrator ('Sunjammer'). 2017. Дата обращения: 02.07.2023. https://www.nasa.gov/mission_pages/tdm/solarsail/index.html