КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2024, том 62, № 3, с. 295–301

УДК 531.26; 531.39

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ АСТЕРОИДА (433) ЭРОС

© 2024 г. А. А. Буров, В. И. Никонов****

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия

**e-mail: jtm@yandex.ru*

***e-mail: nikon_v@list.ru*

Поступила в редакцию 29.06.2023
Переработанный вариант 21.07.2023
Принята к публикации 01.08.2023

Для астероида (433) Эрос определяется мультипольное представление потенциала вплоть до мультиполей четвертого порядка. Полученное выражение для потенциала используется при построении областей возможного движения космического аппарата в окрестности этого небесного тела.

DOI: 10.31857/S0023420624030077, **EDN:** JJVEWH

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, для многих малых небесных тел, прежде всего для тел небольших размеров, характерны нерегулярная форма и сложное распределение масс. Поэтому при исследовании движения в окрестности таких тел приходится уделять особое внимание особенностям потенциала притяжения. Для описания такого потенциала, как правило, используют приближения, опирающиеся либо на ряды Лапласа (см., например, работу [1], а также пособие [2] и цитируемую там литературу), либо на метод, известный как метод Вернера — Ширса ([3–5], см. также публикацию [6]), либо на так называемые масконы (см., например, работу [7]). Сравнительный анализ применяемых методов предложен, в частности, в статье [8].

В настоящей работе основное внимание сосредоточено на восходящем к Максвеллу подходе [9–11], предусматривающем использование мультиполей для представления потенциалов, в частности, потенциала поля притяжения. Ставится задача отыскания направлений, вдоль которых при задании мультиполей осуществляется дифференцирование, а также мультипольных моментов. Соответствующие вычисления для различных, вплоть до четвертого порядка, мультиполей выполняются для астероида (433) Эрос.

ПОТЕНЦИАЛ МУЛЬТИПОЛЯ

Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — бесконечно дифференцируемая скалярная функция, зависящая от n скалярных переменных, $\mathbf{h} = (h_1,h_2,\ldots,h_n)^T$ — вектор в пространстве $\mathbf{R}^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. . Величину

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n$$

называют производной функции f по направлению $\mathbf{h}$.

Если задано несколько (не обязательно различных) направлений $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_k$, то последовательное дифференцирование функции f по этим направлениям называют k-производной функции f по направлениям $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_k$ и обозначают $\dfrac{\partial^k f}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2 \ldots \partial \mathbf{h}_k}$.

Пусть $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Функция f называется гармонической, если

$$\Delta f = 0.$$

Понятно, что производная по направлению любого порядка от гармонической функции — вновь гармоническая функция, см., например, исследование [10].

В случае, когда $n = 3$, функция

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}}$$

является гармонической функцией. Ее производные порядка k по направлениям $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_k$, обозначаемые $\dfrac{\partial^k}{\partial \mathrm{h}_1 \partial \mathrm{h}_2 \ldots \partial \mathrm{h}_k}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, характеризуют потенциал специального точечного объекта — мультиполя k-го порядка, располагающегося в начале системы координат.

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА КАК ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ МУЛЬТИПОЛЕЙ

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное твердое тело массы M. Обозначим $Ox_1x_2x_3$ связанную с ним прямоугольную систему координат. Потенциал создаваемого им поля силы ньютоновского притяжения $U(\mathbf{r})$ в точке $P : \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ определяется как

$$U(\mathbf{r}) = -G\iiint\limits_{\mathcal{B}} \frac{dM(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}-\mathbf{x}, \mathbf{r}-\mathbf{x})^{1/2}},$$

где G — гравитационная постоянная; $dM(\mathbf{x})$ — элемент массы в точке тела, задаваемой вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$. Интегрирование осуществляется по всему телу $\mathcal{B}$.

Как известно (см., например, публикации [1, 12]), во внешних по отношению к телу $\mathcal{B}$ точках пространства потенциал может быть представлен в виде разложения:

$$U(\mathbf{r}) = -G\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad r = \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)^{1/2},$$

где коэффициенты Y_n представимы либо в виде

$$Y_n(\mathbf{r}) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{(-1)^n}{k_1!k_2!k_3!} I_{k_1k_2k_3} r^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial r_1^{k_1}\partial r_2^{k_2}\partial r_3^{k_3}}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (1)$$

где k_1, k_2, k_3 — целые неотрицательные числа; $I_{k_1k_2k_3} = \iiint\limits_{\mathcal{B}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}dM(\mathbf{x})$ — моменты инерции (интегралы инерции) порядка n, либо, согласно Максвеллу [9] (см. также публикации [10–12]), в виде

$$Y_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{p_n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial\mathbf{h}_1\partial\mathbf{h}_2\ldots\partial\mathbf{h}_n}\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{h}_n}$ — дифференцирование вдоль единичного вектора $\mathbf{h}_k = \left(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\right)^T$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1$, $\left(k = 1, 2, \ldots, n\right)$, p_n — постоянные положительные величины, характеризующие распределение масс в теле. Функции (2) — гармонические: они удовлетворяют уравнению Лапласа. Эти функции определяют потенциал мультиполя n-го порядка. Постоянные p_n называют моментами функции $Y_n(\mathbf{r})$, векторы $\mathbf{h}_i$ — ее осями. Свойствам мультиполей и их физической интерпретации посвящены многочисленные исследования (см., например, [9–12]).

Для каждого конкретного тела, в нашем случае — для астероида (433) Эрос — ставится задача определения направлений $\mathbf{h}_k$ и моментов p_k.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСЕЙ МУЛЬТИПОЛЯ И ЕГО МОМЕНТА

Согласно Сильвестру [13, 14] (см. также статью [10]), вычисление осей мультиполя сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} Y_n(\mathbf{r}) = 0, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где величина $Y_n(\mathbf{r})$ определяется соотношением (1). Обращаясь к исследованию [11], для решения системы (3) выполним подстановку

$$r_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}v, \quad r_2 = \frac{2u}{1+u^2}v, \quad r_3 = iv, \quad (4)$$

где $u \in (-\infty; +\infty)$ и $v \in (-\infty; +\infty)$. Здесь и далее $i = \sqrt{-1}$. В результате рациональной параметризации (4) второе из уравнений системы (3) оказывается выполненным тождественно, и задача сводится к изучению первого из уравнений системы (3), с новыми переменными имеющего вид $\dfrac{v^n}{(u^2+1)^n} P_{2n}(u) = 0$. Отбрасывая тривиальное решение $v = 0$, приходим к задаче определения корней многочлена $P_{2n}(u)$ степени $2n$ относительно переменной u с комплексными коэффициентами.

Для всех различных пар корней u_1 и u_2 многочлена $P_{2n}(u)$, рассмотрим формы

$$Ar_1 + Br_2 + Cr_3 = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \xi(u_1) & \eta(u_1) & i \\ \xi(u_2) & \eta(u_2) & i \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \eta(u) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad (5)$$

линейные относительно r_1, r_2, r_3. Выберем из них лишь те, для которых коэффициенты A, B и C из соотношения (5) являются вещественными. Согласно работам [11–14], таких пар будет ровно n. Обозначим отвечающие им коэффициенты (A_k, B_k, C_k), $k = 1, \ldots, n$ соответственно. Тогда оси мультиполей определяются соотношениями

$$\mathbf{h}_k = \left(\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}, \frac{C_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}}\right)^T,$$
$$k = 1, \ldots, n. \quad (6)$$

Теперь, когда оси мультиполей определены, можно вычислить мультипольные моменты p_n. Для этого приравнивают правые части соотношений (1) и (2). Величины p_n определяются из соотношений, получающихся в результате подстановки координат произвольной точки пространства,

а также вычисленных осей. Принимая во внимание то обстоятельство, что момент p_n должен быть положительной величиной [10, 11], в случае необходимости изменяют направление одного из векторов $\mathbf{h}_k$ на противоположное.

ПРИМЕР. АСТЕРОИД (433) ЭРОС

С помощью описанного выше подхода, построим мультипольное представление потенциала гравитационного поля астероида (433) Эрос вплоть до порядка $n = 4$.

Для вычисления инерциальных характеристик астероида (433) Эрос в предположении о постоянстве его плотности $\rho = 2640\ \text{кг}/\text{м}^3$ используется предложенная в публикации [15] триангуляционная сетка, содержащая 856 вершин и 1708 граней, заданных в некоторой жестко связанной с астероидом системе координат $Ox_1x_2x_3$.

В рамках принятой модели эффективный радиус тела, т.е. радиус сферы, объем которой равен объему тела, равен $R_e = 8.41$ км. В работе [16] (см. также статью [17]), приведены моменты инерции астероида (433) Эрос вплоть до четвертого порядка. Используя эти значения, определим оси соответствующих мультиполей и их моменты. Отметим, что выполнен пересчет координат вершин сетки; и оси, в которых теперь она задана, являются главными центральными осями инерции. Алгебраические уравнения

$$P_{2n}(u) = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4 \tag{7}$$

имеют следующий явный вид:

$$P_2(u) = \sigma_{10}u^2 + \sigma_{11}u - \overline{\sigma_{10}} = 0, \ \sigma_{10} = I_{100} - iI_{001}, \ \sigma_{11} = -2I_{010};$$

$$P_4(u) = \sigma_{20}u^4 + \sigma_{21}u^3 + \sigma_{22}u^2 - \overline{\sigma_{21}}u + \overline{\sigma_{20}} = 0,$$

$$\sigma_{20} = \frac{3}{2}\left(I_{002} - I_{200}\right) + 3iI_{101}, \ \sigma_{21} = 6(I_{110} - iI_{011}),$$

$$\sigma_{22} = 3(I_{200} + I_{002} - 2I_{020}),$$

$$P_6(u) = \sigma_{30}u^6 + \sigma_{31}u^5 + \sigma_{32}u^4 + \sigma_{33}u^3 - \overline{\sigma_{32}}u^2 + \overline{\sigma_{31}}u - \overline{\sigma_{30}} = 0,$$

$$\sigma_{30} = \frac{5}{2}\left(I_{300} - 3I_{102} + i(I_{003} - 3I_{201})\right),$$

$$\sigma_{31} = 15(I_{012} - I_{210} + 2iI_{111}),$$

$$\sigma_{32} = \frac{15}{2}\left(4I_{120} - I_{102} - I_{300} - i(4I_{021} - I_{003} - I_{201})\right),$$

$$\sigma_{33} = 30\left(I_{012} + I_{210} - \frac{2}{3}I_{030}\right).$$

$$P_8(u) = \sigma_{40}u^8 + \sigma_{41}u^7 + \sigma_{42}u^6 + \sigma_{43}u^5 + \sigma_{44}u^4 - \overline{\sigma_{43}}u^3 + \overline{\sigma_{42}}u^2 - \overline{\sigma_{41}}u + \overline{\sigma_{40}} = 0,$$

$$\sigma_{40} = \frac{35}{8}\left(6I_{202} - I_{400} - I_{004} + 4i(I_{301} - I_{103})\right),$$

$$\sigma_{41} = 35\left(I_{310} - 3I_{112} + i(I_{013} - 3I_{211})\right),$$

$$\sigma_{42} = \frac{35}{2}\left(I_{400} - I_{004} + 6I_{022} - 6I_{220} + 2i(6I_{121} - I_{103} - I_{301})\right),$$

$$\sigma_{43} = 105\left(\frac{4}{3}I_{130} - I_{112} - I_{310} - i\left(\frac{4}{3}I_{031} - I_{211} - I_{013}\right)\right),$$

$$\sigma_{44} = 70(3I_{220} + 3I_{022} - I_{040}) - \frac{105}{4}(I_{400} + I_{004} + 2I_{202}).$$

Здесь и далее черта над коэффициентом означает операцию комплексного сопряжения.

Так как начало системы координат совпадает с центром масс астероида, то $Y_1(\mathbf{r}) \equiv 0$, поэтому и момент p_1 тоже тожественно равен нулю.

Каждое из уравнений (7) рассматривалось отдельно и решалось численно для значений параметров, присущих астероиду (433) Эрос.

Анализ линейных форм (5) позволяет получить следующие моменты и координаты осей мультиполей:

$p_2 = 0.8326403869,$	$\alpha_1 = 0.9897492417,$	$\beta_1 = 0,$	$\gamma_1 = 0.1428160988,$
	$\alpha_2 = 0.9897492417,$	$\beta_2 = 0,$	$\gamma_2 = -0.1428160988,$
$p_3 = 0.3687158871,$	$\alpha_1 = 0.9973167777,$	$\beta_1 = 0.0719499141,$	$\gamma_1 = -0.0135075931,$
	$\alpha_2 = -0.9993422577,$	$\beta_1 = 0.0231732690,$	$\gamma_1 = -0.0278935827,$
	$\alpha_3 = 0.2479396651,$	$\beta_3 = 0.9578998050,$	$\gamma_3 = -0.1447545721,$
$p_4 = 1.283187187,$	$\alpha_1 = -0.9948508619,$	$\beta_1 = 0.0216591256,$	$\gamma_1 = 0.0990083078,$
	$\alpha_2 = -0.9838707721,$	$\beta_1 = 0.0240519691,$	$\gamma_1 = -0.1772563301,$
	$\alpha_3 = 0.9199623237,$	$\beta_3 = 0.1292685232,$	$\gamma_3 = 0.3700796830,$
	$\alpha_4 = 0.8948489024,$	$\beta_4 = 0.0700769894,$	$\gamma_4 = -0.4408340473.$

Здесь мультипольные моменты p_n представлены в безразмерном виде — их размерные величины p'_n отнесены к массе астероида и к эффективному радиусу R_e, взятому в соответствующей степени: $p_n = p'_n \Big/ \left(mR_e^n\right)$.

Замечание. Представляет интерес механическая интерпретация найденных полюсов и сопоставление мест их расположения с топографической картой астероида (433) Эрос [18]. Этому вопросу предполагается посвятить отдельное исследование.

Чувствительность значений моментов инерции различных порядков астероида (433) Эрос при переходе от более грубых к более точным сеткам исследовалась в работе [16]. Чувствительность положений осей мультиполей и значений мультипольных моментов к калибру сетки в настоящей работе не обсуждается.

ИЗМЕНЕННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ И ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Измененный потенциал

Рассмотрим космический аппарат (КА), совершающий движение в окрестности астроида. Предположим, что астероид совершает равномерное вращение вокруг главной оси инерции, отвечающей наибольшему моменту инерции, с угловой скоростью ω. Положим массу КА, равной единице. В системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающейся вместе с астероидом около оси Ox_3 с периодом $T = 5.27$ ч, кинетическая энергия КА имеет вид:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\dot r_1^2 + \dot r_2^2 + \dot r_3^2\right) + \omega(r_1\dot r_2 - \dot r_1 r_2) - U_c,$$

где

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2\left(r_1^2 + r_2^2\right) —$$

потенциал центробежных сил. Ограничиваясь рассмотрением мультиполей вплоть до четвертого порядка, потенциал притяжения примем приближенно равным

$$U_N = G\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+1}\frac{p_n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial h_1\partial h_2\ldots\partial h_n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где, сообразно постановке задачи, величина k будет принимать значения от 2 до 4. Функция

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2}\left(\dot r_1^2 + \dot r_2^2 + \dot r_3^2\right) + U_a,\ U_a = -U_c + U_N = h —$$

интеграл Пенлеве–Якоби.

Точки либрации

Для вращающегося гравитирующего тела под точками либрации понимают положения равновесия относительно системы отсчета, вращающейся вместе с этим телом. Точкам либрации отвечают критические точки приведенного потенциала, состоящего из потенциала центробежных сил и потенциала ньютоновского притяжения.

Осуществим сравнение координат точек либрации, вычисленных при $k = 2$ и $k = 4$ (во втором и четвертом приближении потенциала[1]), с результатами из статьи [19], где точки либрации вычислялись для потенциала Вернера — Ширса. Имеем: для коллинеарной точки E_1 (табл. 1):

Таблица 1.

Координаты, км	r_1	r_2	r_3
$k = 2$	–18.36045	–2.14939	0.08234
$k = 4$	–19.07455	–1.58843	0.06202
[19]	–19.72858	–3.38644	0.13237

Для коллинеарной точки E_2 (табл. 2):

Таблица 2.

Координаты, км	r_1	r_2	r_3
$k = 2$	18.12444	–2.49167	0.09062
$k = 4$	18.92920	–0.99672	0.06751
[19]	19.15600	–2.65188	0.14298

Замечание. Коллинеарные точки либрации располагаются вне экваториальной плоскости.

Внутри описанной около небесного тела сферы, известной как сфера Бриллюэна, имеются проблемы со сходимостью рядов, приближающих потенциал притяжения. Поэтому нет оснований для того, чтобы считать получаемые в результате вычислений координаты треугольных точек либрации достоверными. Выполненные вычисления показывают, что получающиеся для применяемых при вычислениях приближений потенциала треугольные точки либрации оказываются внутри сферы Бриллюэна, радиус которой приблизительно составляет 16 км [15]. Согласно исследованию [19] треугольные точки либрации имеют координаты (табл. 3).

Таблица 3.

Координаты, км	r_1	r_2	r_3
E_3	–0.48407	14.72470	–0.06316
E_4	–0.46166	–13.96640	–0.07438

[1] Вычисления показывают, что применение третьего приближения потенциала дает результаты, мало отличающиеся от результатов, полученных во втором приближении. Результаты этих вычислений в дальнейшем не приводятся.

Для сравнения полученных результатов с результатами из публикации [19] воспользуемся соотношением

$$\delta = \frac{\sqrt{(r_1 - r_{1\star})^2 + (r_2 - r_{2*})^2 + (r_3 - r_{3*})^2}}{\min(\rho, \rho_*)},$$

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \quad \rho_* = \sqrt{r_{1*}^2 + r_{2*}^2 + r_{3*}^2},$$

где величины со звездочкой взяты из работы [19]. Результаты вычислений приведены в табл. 4.

Таблица 4.

δ	$k = 2$	$k = 4$
E_1	0.0998	0.1000
E_2	0.0571	0.0882

Замечание. На первый взгляд, результаты вычислений, приведенные в последней из таблиц, парадоксальны. Хотя, как можно видеть, отклонение положений точек либрации, вычисленных с помощью мультипольных приближений, от положений, вычисленных с помощью метода Вернера — Ширса, находится в пределах 10 %, результаты, полученные во втором приближении, более точны, чем результаты, полученные в четвертом приближении. Это обстоятельство заслуживает более тщательного, отдельного изучения. Среди причин наблюдаемых парадоксальных отклонений могут оказаться, в частности, достаточно медленная сходимость (или вообще, расходимость) рядов, составленных из мультиполей. Исследованию общих вопросов сходимости и расходимости мультипольных приближений посвящен ряд работ (см., например, [20, 21]). Эта, в общем случае, теоретическая тематика, далеко выходит за рамки настоящей работы.

Области возможного движения

Измененный потенциал и постоянная интеграла Пенлеве–Якоби определяют области возможного движения

$$\Sigma_h: U_a(r_1, r_2, r_3) \le h,$$

ограниченные поверхностями

$$\partial\Sigma_h: U_a(r_1, r_2, r_3) = h.$$

Для изображения областей возможного движения обычно используют те или иные их сечения. Ограничимся изображением сечения плоскостью, проходящей через коллинеарные точки либрации и ортогональной оси вращения астероида. Эти

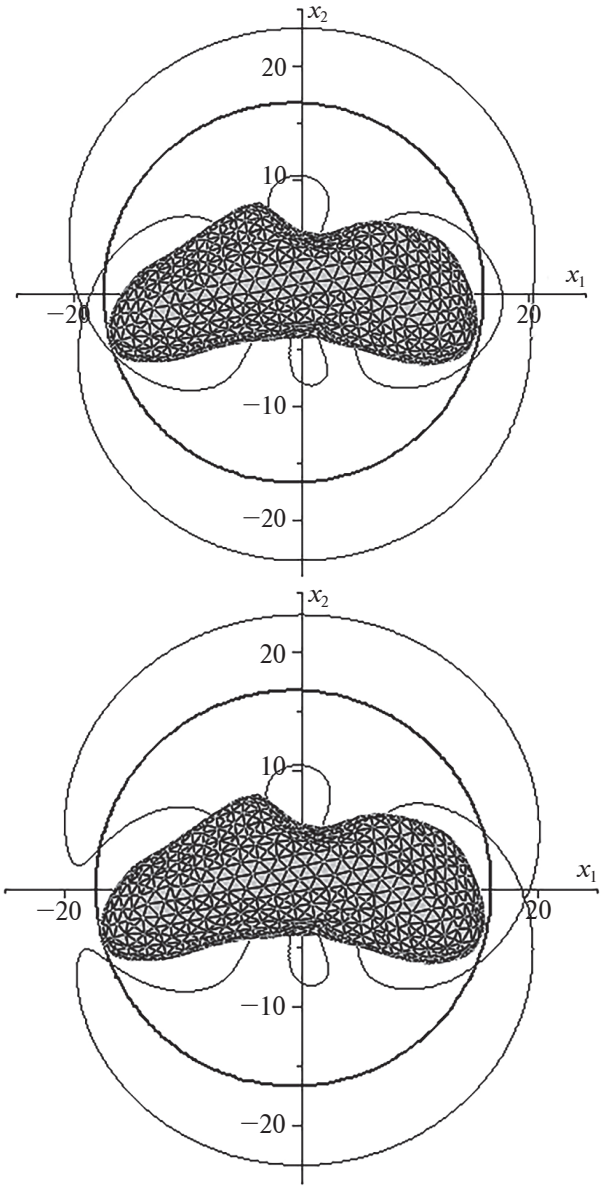

Рис. 1. Сечения поверхностей уровня плоскостями, проходящими через точки либрации E_1 (сверху) и E_2 (снизу) и параллельными плоскости Ox_1x_2 для четвертого приближения потенциала.

тройки изображены на рис. 1. Полужирные окружности на рисунках — сечения сферы, описанной около астероида. Нетрудно видеть, что вычисленные коллинеарные точки либрации находятся вблизи этой сферы, чем и может быть вызвано описанное выше парадоксальное снижение точности с увеличением порядка приближения.

Некоторые замечания

Вообще говоря, мультиполь n-го порядка является классическим объектом исследований не только в земной геодезии [22, 23] (см. также статью [24]) и в описании межмолекулярных взаимодействий (см., например, работу [25][2]), но и при

[2] См. также в работе [26] весьма экзотический пример применения мультиполей в динамике человеческого тела.

решении уравнений математической физики со сложными граничными условиями (см., например, публикации [27, 28]). Заметим, что при решении таких задач большие усилия тратятся не только на исследование сходимости возникающих рядов, но и на изучение полноты системы функций, по которым осуществляется разложение.

При решении задач моделирования динамики многих частиц с помощью мультипольных подходов (см., например, уже упоминавшиеся работы [20, 21]) особо актуален вопрос о требующихся для исследования вычислительных ресурсах. В рассматриваемом классе задач о мультипольных приближениях потенциала притяжения астероидов очевидны как минимум два фактора, сказывающихся как на объеме, так и на быстроте вычислений. Первый из них обусловлен калибром разбиения, а вместе с ним и числом узлов, ребер и граней триангуляционных сеток, задающих приближение поверхности астероидов. Эти величины, как правило, фиксированы и определены результатами обработки фотометрических наблюдений, на основе которых выполняется построение таких сеток. Другой фактор связан с порядком мультипольного приближения потенциала: объем вычислений возрастает с ростом порядка аппроксимации. Оценка изменения объема вычислений с ростом такого порядка в настоящей работе не проводилась.

Как известно, астероид (433) Эрос относят к небесным телам, совершающим одночастотное вращение. Представляет интерес решение задачи о верификации с помощью сведений о точках либрации полей притяжения небесных тел, совершающих прецессионные движения (см., например, работы [29–32]). Общая теория, касающаяся определения свойств точек либрации для такой задачи развивалась в исследованиях [33, 34].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе воспроизведен восходящий к Максвеллу и Сильвестру подход к определению приближенного выражения для потенциала гравитационного притяжения с помощью мультипольных разложений. С помощью такого подхода для поля притяжения астероида (433) Эрос определены мультиполи вплоть до четвертого порядка. Построены некоторые сечения областей возможного движения. Затронут вопрос о чувствительности результатов к порядку приближения.

Остается открытым вопрос о том, каким точкам на поверхности (“на карте”) астероида отвечают направления вычисленных мультиполей.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00297.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
2. *Холшевников К. В., Питьев Н. П., Титов В. Б* Притяжение небесных тел: учеб. пособие. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та. 2005. 108 с.
3. *Werner R. A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don’t cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. Iss. 3. P. 253–278. DOI: 10.1007/BF00692875.
4. *Werner R. A., Scheeres D. J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 65. Iss. 3. P. 313–344. DOI: 10.1007/BF00053511.
5. *Werner R. A.* The solid angle hidden in polyhedron gravitation formulations // J. Geodesy. 2017. V. 91. Iss. 3. P. 307–328. DOI: 10.1007/s00190-016-0964-z.
6. *Werner R. A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // Computers and Geosciences. 1997. V. 23. Iss. 10. P. 1071–1077. DOI: 10.1016/S0098-3004(97)00110-6.
7. *Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V.* Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. V. 450. Iss. 4. P. 3742–3749. DOI: 10.1093/mnras/stv845.
8. *Юдицкая А. С., Ткачев С. С.* Сравнительный анализ методов моделирования гравитационного потенциала тел сложной формы // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 5. Р. 78–90. DOI: 10.20948/mm-2021-05-06. (= *Yuditskaya A. S., Tkachev S. S.* Comparative Analysis of Methods for Modeling the Gravitational Potential of Complex Shaped Bodies // Mathematical Models and Computer Simulations. 2021. V. 13. P. 1138–1147.)
9. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism. Vol. I. Oxford: Clarendon Press, 1873. 500 p.
10. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций: пер. с англ. С. В. Фомина. М.: ИЛ, 1952. (= *Hobson E. W.* The Theory of Spherical and

Ellipsoidal Harmonics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931.)

11. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1: пер. с нем. М.; Л.: ГТТИ, 1933. 525 с. (= *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924.)
12. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1962.
13. *Sylvester J. J.* Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. V. 2. P. 291–307.
14. *Sylvester J. J.* The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester. V. 3. Cambridge: Cambridge University Press, 1909. P. 37–51.
15. *Thomas P. C., Joseph J., Carcich B. et al.* Eros: Shape, Topography and Slope Processes // Icarus. 2002. V. 155. Iss. 1. P. 18–37.
16. *Буров А. А., Никонов В. И.* Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера — Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776. (= *Burov A. A., Nikonov V. I.* Sensitivity of the Euler–Poinsot tensor values to the choice of the body surface triangulation mesh // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. V. 60. Iss. 10. P. 1708–1720.) DOI: 10.31857/S0044466920100063.
17. *Буров А. А., Никонов В. И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Докл. Российской акад. наук. Физика, техн. науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 58–62. (= *Burov A. A., Nikonov V. I.* Computation of attraction potential of asteroid (433) Eros with an accuracy up to the terms of the fourth order // Doklady Physics. 2020. V. 65. Iss. 5. P. 164–168.) DOI: 10.31857/S2686740020030086.
18. *Buczkowski D. L., Barnouin-Jha O.S., Prockter L.* M. 433 Eros lineaments: Global mapping and analysis // Icarus. 2008. V. 193. P. 39–52.
19. *Wang X., Jiang Y., Gong Sh.* Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // Astrophysics Space Science. 2014. V. 353. P. 105–121.
20. *Greengard L., Rokhlin V.* A fast algorithm for particle simulations // J. Computational Physics. 1997. V. 135. P. 280–292.
21. *Greengard L., Rokhlin V.* Rapid evaluation of potential fields in three dimensions // Vortex methods: Lecture Notes in Mathematics. V. 1360 / eds. C. Anderson, C. Greengard. Springer-Verlag, 1988. P. 121–141.
22. *Winch D. E.* The fourth order geomagnetic multipole: The sedecimupole // Pure and Applied Geophysics. 1967. V. 67. P. 112–122.
23. *Winch D. E.* The fifth order geomagnetic multipole: The duotrigintupole // Pure and Applied Geophysics. 1967. V. 68. P. 90–102.
24. *Мещеряков Г. А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991.
25. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей: пер. с англ. М.: ИЛ, 1961. (= *Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B.* Molecular theory of gases and liquids. N.Y.: Wiley, 1954.)
26. *De Guise J., Gulrajani R. M., Savard P., Guardo R., Roberge F. A.* Inverse Recovery of Two Moving Dipoles from Simulated Surface Potential Distributions on a Realistic Human Torso Model // IEEE Trans. Biomedical Engineering. 1985. V. BME-32. Iss. 2. P. 126–135.
27. *Власов В. И., Скороходов С. Л.* Метод мультиполей для задачи Дирихле в двусвязных областях сложной формы. I. Общее описание метода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. Вып. 11. С. 1633–1647. (= *Vlasov V. I., Skorokhodov S. L.* Multipole method for the Dirichlet problem on doubly connected domains of complex geometry: A general description of the method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. V. 40. Iss. 11. P. 1567–1581.)
28. *Безродных С. И., Власов В. И.* Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда — Шафранова с нелокальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 4. С. 619–685. (= *Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I.* Application of the multipole method to direct and inverse problems for the Grad–Shafranov equation with a nonlocal condition // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. V. 54. Iss. 4. P. 631–695.)
29. *Harris A. W.* Tumbling Asteroids // Icarus. 1994. V. 107. Iss. 1. P. 209–211.
30. *Рябова Г. О.* Астероид Географ. I. Вращение // Астрон. вестн. Исслед. Солнечной системы. 2002. Т. 36. № 2. С. 186–192. (= *Ryabova G. O.* Asteroid 1620 Geographos: I. Rotation // Solar System Research. 2002. V. 36. P. 168–174.)
31. *Pravec P., Harris A. W., Michalowski T.* Asteroid Rotations // Asteroids III / eds. *Bottke W. F., Cellino A., Paolicchi P., Binzel R. P.* Tucson: Univ. of Arizona Press, 2002. P. 113–122.
32. *Pravec P., Harris A. W., Scheirich P. et al.* Tumbling asteroids // Icarus. 2005. V. 173. P. 108–131.
33. *Муницына М. А.* Относительные равновесия точки в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твердого тела // Задачи исслед. устойчивости и стабилизации движения. М.: Вычисл. центр им. А. А. Дородницына РАН. 2009. С. 14–19.
34. *Лавровский Э. К.* О точках либрации в системе астероид-исследовательский зонд // Косм. исслед. 2023. Т. 61. № 4. С. 302–310. (= *Lavrovsky E. K.* On libration points in the asteroid — research probe system // Cosmic Research. 2023. V. 61. Iss. 4. P. 305–311.
DOI: 10.1134/S0010952523700211.)