

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА

УДК 537.611.45

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ФРУСТРИРОВАННОЙ ЧЕТЫРЕХВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2023 г. М. К. Рамазанов^а, *, А. К. Муртазаев^а, М. А. Магомедов^а, М. К. Мазагаева^а

^аИнститут физики ДФИЦ РАН, ул. М. Ярагского, 94, Махачкала, 367003 Россия

*e-mail: sheikh77@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2022 г.

После доработки 14.02.2023 г.

Принята к публикации 03.03.2023 г.

Методом Монте-Карло проведено исследование влияния магнитного поля на фазовые переходы двумерной фрустрированной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке. Исследования проведены для широкого интервала изменения магнитного поля. Получены магнитные структуры основного состояния в рассмотренном интервале поля. Построена зависимость намагниченности от величины магнитного поля. Обнаружено, что внешнее магнитное поле приводит к появлению фазового перехода первого рода. Показано, что сильное магнитное поле снимает вырождение основного состояния и подавляет фазовый переход в системе.

Ключевые слова: модель Поттса, метод Монте-Карло, фазовый переход, магнитное поле

DOI: 10.31857/S0015323022601945, **EDN:** OKIAZB

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в физике конденсированного состояния наблюдается повышенный интерес к исследованию магнитных фазовых переходов (ФП), магнитных структур основного состояния, критических и термодинамических свойств фрустрированных спиновых систем. В магнитных спиновых системах фрустрации не позволяют системе одновременно минимизировать все ее локальные взаимодействия, что приводит к бесконечно вырожденному основному состоянию [1–3]. Спиновые системы с фрустрациями обладают богатой природой ФП и имеют особенности магнитного, термодинамического и критического поведения. Особый интерес имеет изучение влияния возмущений различной природы, таких как внешнее магнитное поле, немагнитные примеси, тепловые и квантовые флуктуации и др. на физические свойства магнитных спиновых систем с фрустрациями. Включение этих возмущающих факторов может привести к совершенно новому физическому поведению таких систем [4–8]. Причина такого поведения заключается в высокой чувствительности фрустрированных систем к внешним возмущающим факторам [9].

В данном исследовании мы изучаем влияние внешнего магнитного поля на характер ФП, магнитные и термодинамические свойства двумерной четырехвершинной модели Поттса на гексагональ-

ной решетке. При определенных значениях обменного антиферромагнитного взаимодействия вторых соседей эта модель становится фрустрированной [10]. Для модели Поттса с фрустрациями существует совсем немного надежно установленных фактов. Большинство имеющихся результатов получены для двумерной модели Поттса с числом состояний спина $q = 2$ и $q = 3$ [11–17]. Модель Поттса демонстрирует ФП первого или второго порядка, в зависимости от числа состояний спина q , пространственной размерности и геометрии решетки. Двумерная модель Поттса с числом состояний спина $q = 4$ довольно уникальна. Значение $q = 4$ является граничным для интервала $2 \leq q \leq 4$, где наблюдается ФП второго рода, и области значений $q > 4$, в котором ФП происходит как переход первого рода [18].

Интерес к этой модели обусловлен тем, что модель Поттса служит основой теоретического описания широкого круга физических свойств и магнитных явлений в физике конденсированных сред. К их числу относятся сложные анизотропные ферромагнетики кубической структуры, спиновые стекла, многокомпонентные сплавы и жидкие смеси [17]. На основе модели Поттса с различным числом состояний спина могут быть описаны структурные ФП во многих материалах. Работ, посвященных изучению влияния внешнего магнитного поля, как возмущающего фактора, на ФП, термодинамические и магнитные свой-

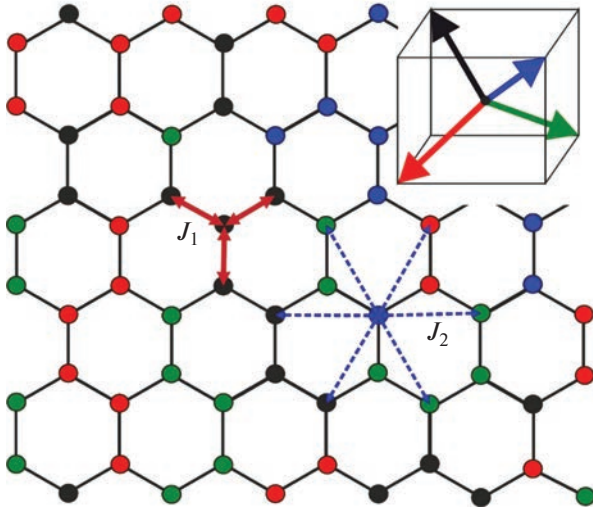


Рис. 1. Модель Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке. На вставке для каждого из четырех возможных направлений спина приведено соответствующее цветовое представление.

ства фрустрированной модели Поттса практически нет, и этот вопрос все еще остается открытым и малоизученным.

В связи с этим в данной работе нами предпринята попытка на основе метода Монте-Карло (МК) изучить влияние внешнего магнитного поля на ФП, магнитные и термодинамические свойства двумерной фрустрированной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке. Исследования проводятся на основе современных методов и идей, что позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных с характером и природой ФП фрустрированных спиновых систем.

МОДЕЛЬ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Гамильтониан модели Поттса с учетом взаимодействия первых и вторых соседей, а также внешнего магнитного поля имеет следующий вид:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} (S_i S_j) - J_2 \sum_{\langle i,k \rangle, i \neq k} (S_i S_k) - h \sum_{\langle i \rangle} S_i = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} \cos \theta_{i,j} - J_2 \sum_{\langle i,k \rangle, i \neq k} \cos \theta_{i,k} - h \sum_{\langle i \rangle} S_i, \quad (1)$$

где J_1 и J_2 — параметры обменного ферро- ($J_1 > 0$) и антиферромагнитного ($J_2 < 0$) взаимодействия, соответственно, для ближайших и следующих за ближайшими соседей, $\theta_{i,j}$, $\theta_{i,k}$ — углы между взаимодействующими спинами $S_i - S_j$ и $S_i - S_k$, h — величина магнитного поля (h приводится в единицах $|J_1|$). В рассматриваемой модели в интервалах величины взаимодействия вторых соседей $0.0 \leq |J_2| \leq 0.2$ и $0.7 \leq |J_2| \leq 1.0$ наблюдается ФП первого рода, а в интервале $0.3 \leq |J_2| \leq 0.6$ наблюдается сильное вырождение основного состояния, и система становится фрустрированной [10]. В дан-

ной модели при $|J_2| = 1$ внешнее магнитное поле ($h = 1.5$) приводит к смене ФП первого рода на переход второго рода [19]. В данной работе мы исследуем случай, когда $|J_1| = 1$, $|J_2| = 0.5$, при котором рассматриваемая модель становится фрустрированной. Величину внешнего магнитного поля меняли в интервале $0.0 \leq h \leq 7.0$ с шагом 0.5. Магнитное поле направлено вдоль одного из направлений спина.

Схематическое описание исследуемой модели представлено на рис. 1. Как видно на рисунке, у каждого спина есть три ближайших (сплошные жирные линии красного цвета) и шесть следующих за ближайшими (пунктирные линии синего цвета) соседа. Спины, обозначенные кружками одного и того же цвета, имеют одинаковое направление. На вставке к рисунку для каждого из четырех возможных направлений спина приведено соответствующее цветовое представление.

Направления спинов заданы таким образом, что выполняется равенство:

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } S_i = S_j \\ 109.47^\circ, & \text{если } S_i \neq S_j \end{cases}, \quad (2)$$

$$\cos \theta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j \\ -1/3, & \text{если } S_i \neq S_j \end{cases}.$$

Согласно условию (2) для двух спинов S_i и S_j энергия парного обменного взаимодействия $E_{i,j} = -J_1$, если $S_i = S_j$. В случае когда $S_i \neq S_j$, энергия $E_{i,j} = J_1/3$. Таким образом, энергия парного взаимодействия спинов равна одному значению при их одинаковом направлении, и принимает другое значение при несовпадении направлений спинов. Для модели Поттса с $q = 4$ в трехмерном пространстве такое возможно только при ориентации спинов, как показано на вставке рис. 1.

Спиновые системы с фрустрациями на основе микроскопических гамильтонианов успешно изучаются на основе метода МК [20–29]. В последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК.

Репличный обменный алгоритм был использован нами в следующем виде:

1. Одновременно моделируются N реплик $X_1, X_2, \dots, X_N$ с температурами $T_1, T_2, \dots, T_N$.

2. После выполнения одного МК-шага/спин для всех реплик производится обмен данными между парой соседних реплик X_i и X_{i+1} в соответствии со схемой Метрополиса с вероятностью

$$w(X_i \rightarrow X_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \Delta \leq 0 \\ \exp(-\Delta), & \text{при } \Delta > 0 \end{cases},$$

где $\Delta = -(U_i - U_{i+1})(1/T_i - 1/T_{i+1})$, U_i и U_{i+1} — внутренние энергии реплик. Более подробно этот алгоритм описан в работе [19].

Алгоритм Ванга—Ландау позволяет получить магнитные структуры основного состояния системы. Данный алгоритм является реализацией метода энтропийного моделирования и позволяет вычислить функцию плотности состояний системы. Определив плотность состояний системы, можно рассчитать значения термодинамических параметров при любой температуре. В частности, внутреннюю энергию U , свободную энергию F , удельную теплоемкость C и энтропию S можно вычислить, используя следующие выражения:

$$U(T) = \frac{\sum_E E g(E) e^{-E/k_B T}}{\sum_E g(E) e^{-E/k_B T}} \equiv \langle E \rangle_T; \quad (3)$$

$$F(T) = -k_B T \ln \left(\sum_E g(E) e^{-E/k_B T} \right); \quad (4)$$

$$C = \left(\frac{(|J_1|/k_B T)^2}{N} \right) (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2); \quad (5)$$

$$S(T) = \frac{U(T) - F(T)}{T}, \quad (6)$$

где N — число частиц, T — температура (здесь и далее температура дана в единицах $|J_1|/k_B$). Более подробно этот алгоритм описан в работе [33].

Для анализа природы и характера ФП использовали гистограммный метод анализа данных [31, 32]. Расчеты проводили для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $L \times L = N$, $L = 12-96$, где L — линейный размер решетки.

Проводить расчеты для систем с большими линейными размерами в данной модели нет необходимости. Это всего лишь увеличивает время счета и не влияет на получаемые результаты. Выбранные значения L в данной модели достаточны для получения физически верных результатов и оптимальны.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Примеры магнитных структур основного состояния для случая $|J_2| = 0.5$ при разных значениях магнитного поля представлены на рис. 2. Эти структуры получены путем анализа спиновых конфигураций для реплики с наименьшей температурой ($k_B T/|J_1| = 0.01$) и выбора среди них конфигурации с наименьшей энергией, достигнутой в ходе моделирования. Таких структур получено большое количество. Анализ этих структур показывает, что все они имеют однотипное упорядочение для данного значения поля. Здесь приведены только некоторые из возможных магнитных структур основного состояния, соответствующие определенному значению магнитного поля. На

этом рисунке спины, имеющие одинаковое направление, обозначены кружками одного и того же цвета. Магнитное поле направлено вдоль спина, обозначенного черным цветом. Как видно на рисунке, при отсутствии внешнего магнитного поля в данной модели в основном состоянии реализуется димерная структура, т.е. наблюдается магнитное состояние, при котором спины упорядочиваются попарно. При значении поля $h = 0.5$ в данной модели сохраняется димерное упорядочение, наблюдается увеличение числа кружков черного цвета и появляются области с частичным упорядочением спинов. Это связано с увеличением числа спинов, ориентированных вдоль внешнего поля. При значении поля $h = 1.0$ в системе наблюдается магнитное состояние, при котором спины выстраиваются в полосовую структуру (страйповое упорядочение). Дальнейший рост поля ($h \geq 1.5$) приводит к упорядочению всех спинов в системе вдоль направления внешнего магнитного поля. Анализ полученных магнитных структур показывает, что внесение внешнего магнитного поля приводит к изменению типа магнитного упорядочения.

Температурные зависимости энтропии S для различных значений магнитного поля при $L = 24$ приведены на рис. 3 (здесь и далее статистическая погрешность не превышает размеров символов, использованных для построения зависимостей). На рисунке видно, что с увеличением температуры энтропия для всех систем стремится к теоретически предсказанному значению $\ln 4$. Для значений поля $h = 0.0$, $h = 0.5$ и $h = 1.0$ при низких температурах, близких к абсолютному нулю, энтропия стремится к ненулевому значению (рис. 3а). Ненулевая остаточная энтропия является следствием вырождения основного состояния.

Величина остаточной энтропии показывает степень вырождения и зависит от магнитной структуры основного состояния. Наличие ненулевой остаточной энтропии при температурах близких к нулю характерно для систем с фрустрациями. При увеличении поля ($h \geq 1.5$) в низкотемпературной области энтропия начинает стремиться к нулю, но немного больше нуля. Это связано с погрешностью численного эксперимента. Такое поведение энтропии объясняется тем, что сильное магнитное поле приводит к установлению в системе полного порядка, снимает вырождение основного состояния и фрустрации.

Характерные температурные зависимости теплоемкости для системы с линейными размерами $L = 24$ в интервале магнитного поля $0.0 \leq h \leq 3.0$ представлены на рис. 4. Отметим, что для значений поля $h = 0.0$ и $h = 1.0$ на температурной зависимости теплоемкости наблюдаются куполообразные максимумы. Для значения поля $h = 0.5$ в критической области ($T_C = 0.181(1)$, где T_C — кри-

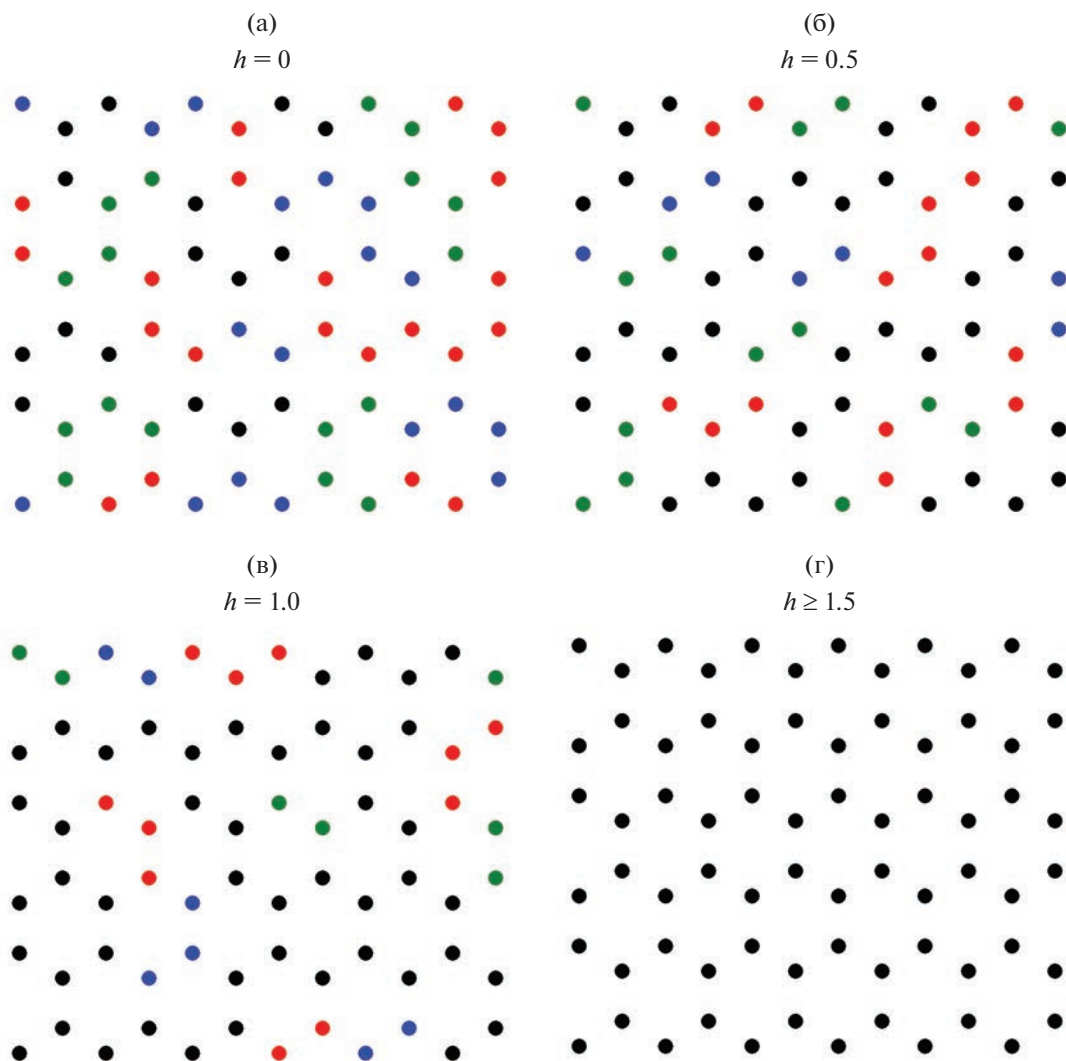


Рис. 2. Примеры магнитных структур основного состояния.

тическая температура (здесь и далее температура дана в единицах $|J_1|/k_B$) на фоне куполообразного максимума появляется острый пик, т.е. наблюдается расщепление теплоемкости. Такая картина температурной зависимости теплоемкости обычно наблюдается для фрустрированных спиновых систем [34, 35]. Аналогичное поведение теплоемкости было обнаружено в модели Изинга с фрустрациями на декорированных решетках [36, 37]. Можно предположить, что такое поведение теплоемкости связано с изменением структуры магнитного упорядочения и появлением частично упорядоченного магнитного состояния. В сильных магнитных полях отсутствуют ярко выраженные максимумы теплоемкости. Такое поведение теплоемкости свидетельствует о том, что сильное магнитное поле снимает вырождение в системе и приводит к подавлению ФП.

Намагниченность системы m вычисляли по формуле:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i, \quad (7)$$

где S_i — трехкомпонентный единичный вектор $S_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$. Он может принимать одно из четырех направлений, представленных на вставке рис. 1.

Графики зависимости намагниченности m от температуры для разных значений магнитного поля представлены на рис. 5. При отсутствии внешнего магнитного поля в системе отсутствует порядок, и значение намагниченности близко к нулю. При включении поля в системе наблюдается частичное упорядочение, и намагниченность в низкотемпературной области имеет отличные от нуля значения. Это объясняется тем, что магнитное поле выстраивает спины вдоль своего направ-

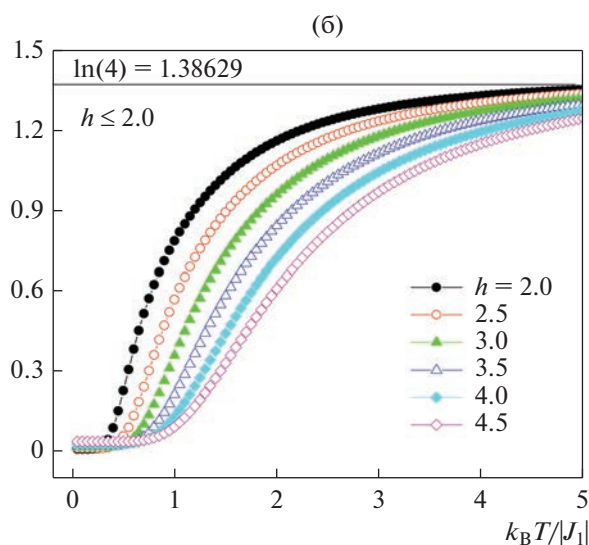
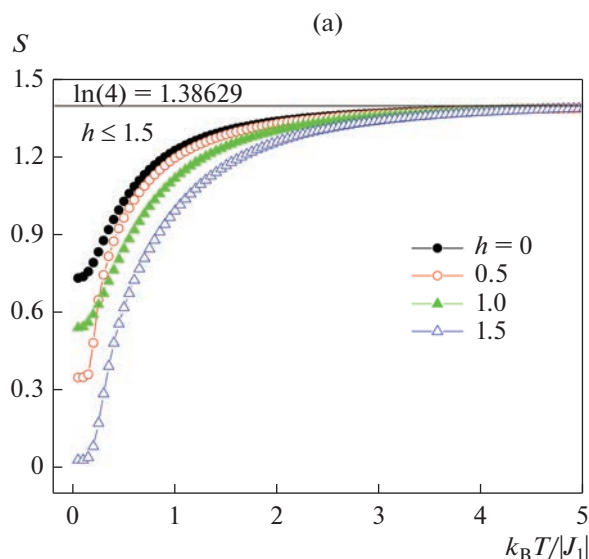


Рис. 3. Температурные зависимости энтропии S . Здесь и далее магнитное поле h приводится в единицах $|J_1|$.

ления, и в системе возникает только частичный порядок. С этим связан тот факт, что на температурной зависимости намагниченности для поля $h = 0.5$ отсутствует резкий спад в критической области, характерный для ФП первого рода. С ростом величины магнитного поля увеличивается число спинов, которые выстраиваются вдоль направления внешнего поля. Этим обусловлено то, что намагниченность в низкотемпературной области растет с увеличением поля. При значениях поля $h \geq 1.5$ в низкотемпературной области намагниченность $m = 1.0$. Это свидетельствует о том, что при высоких значениях поля все спины в системе выстраиваются вдоль направления внешнего поля, и система становится полностью упорядоченной. Плавный спад намагниченности и

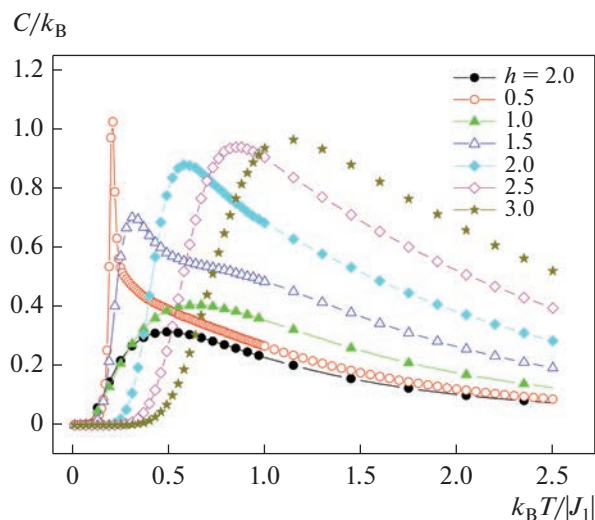


Рис. 4. Температурные зависимости теплоемкости C/k_B .

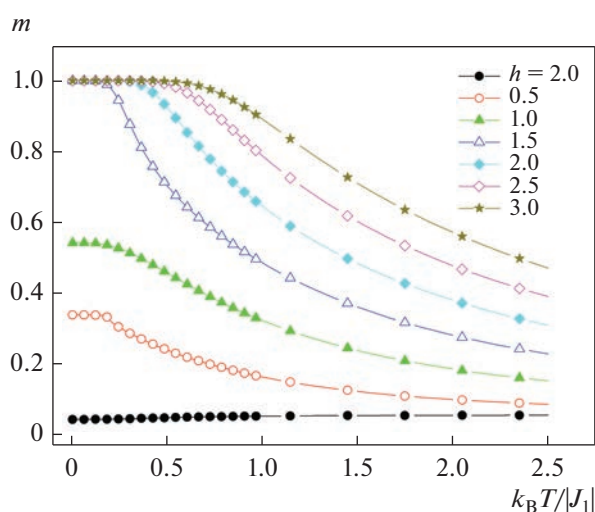


Рис. 5. Температурные зависимости намагниченности m .

куполообразный максимум теплоемкости при высоких значениях поля свидетельствуют об отсутствии ФП в системе.

График зависимости намагниченности от магнитного поля в низкотемпературной области приведен на рис. 6. На рисунке мы наблюдаем ступенчатую зависимость намагниченности. При низких температурах с ростом поля мы наблюдаем плато намагниченности. В слабых магнитных полях направление спина, обозначенное черным цветом (вставка рис. 1), совпадает с направлением поля, а остальные спины направлены так, как изображены на вставке рис. 1. При увеличении магнитного поля растет число спинов, ориенти-

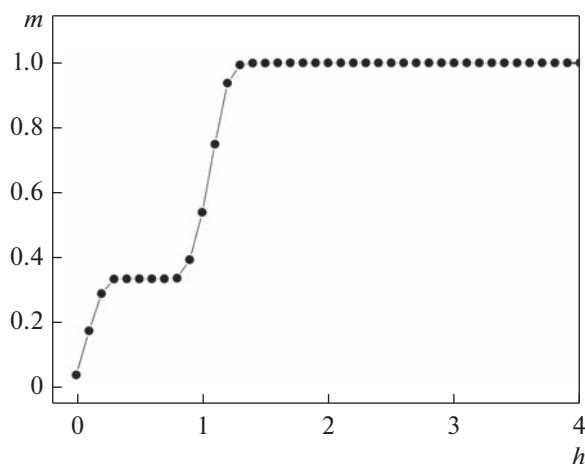


Рис. 6. Зависимость намагниченности m от магнитного поля h при температуре $k_B T/|J_1| = 0.01$.

рованных вдоль направления внешнего поля. При значении поля $h = 0.5$ в системе возникает частичное упорядочение (рис. 2). Это приводит к возникновению плато на графике полевой зависимости намагниченности. При значении поля $h = 1.5$, вдоль направления внешнего поля выстраиваются все спины, и система выходит на плато насыщения.

Для изучения рода ФП нами использован гистограммный метод анализа данных метода МК [31, 32]. Этот метод позволяет надежно определить род ФП, а методика определения рода ФП подробно описана в работе [27]. Результаты, полученные на основе гистограммного анализа данных, показывают, что в данной модели для значения поля $h = 0.5$ наблюдается ФП первого рода. Это продемонстрировано на рис. 7. Гистограммы распределения энергии для системы с линейными размерами $L = 24$ для значения $h = 0.5$ представлены на рис. 7а. Графики построены при температурах ниже и выше критической области, а также вблизи критической области ($T = 0.181$). На рисунке видно, что в зависимости вероятности $P(E)$ от энергии E для температур выше и ниже критической области наблюдается один максимум, а в критической области наблюдаются два хорошо выраженных максимума, которые свидетельствуют о ФП первого рода. Наличие двойного пика на гистограммах распределения энергии является достаточным условием для ФП первого рода. На рис. 7б представлены гистограммы распределения энергии для систем с линейными размерами $L = 24, 48$ и 60 . Как видно на рисунке, мы наблюдаем бимодальное распределение энергии для всех систем. С ростом линейных размеров системы расстояние между пиками уменьшается, но сами пики становятся более отчетливыми. Та-

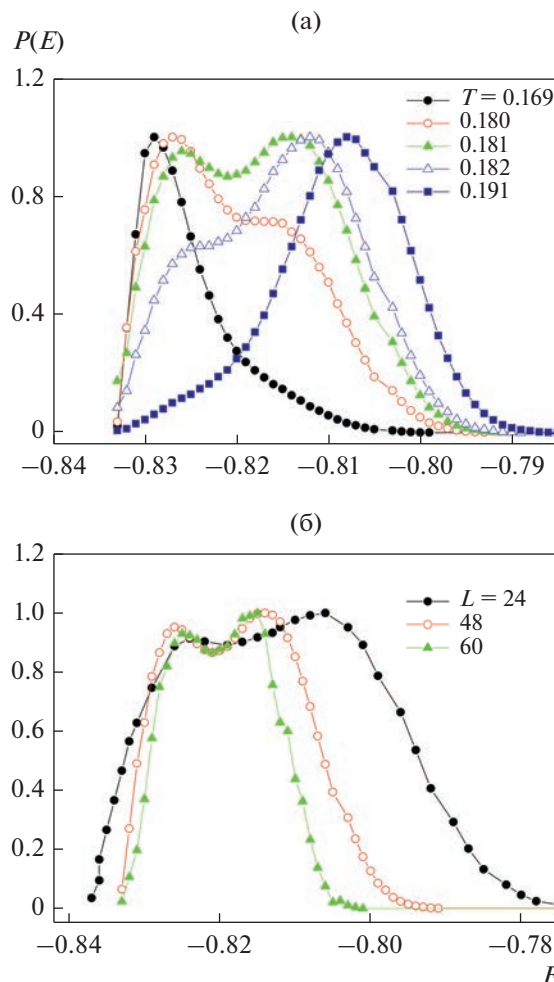


Рис. 7. Гистограммы распределения энергии при $h = 0.5$: а — для $L = 24$ при различных температурах; б — для $L = 24, 48$ и 60 при $T = 0.181$. Энергия E приведена в единицах $|J_1|$.

кое поведение свидетельствует в пользу ФП первого рода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование влияния магнитного поля на фазовые переходы, магнитные и термодинамические свойства двумерной фрустрированной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке выполнено с использованием алгоритма Ванга—Ландау и репличного обменного алгоритма метода Монте-Карло.

На основе гистограммного метода проведен анализ характера фазовых переходов. Получены магнитные структуры основного состояния в широком интервале значений магнитного поля. Построена зависимость намагниченности от величины магнитного поля. Обнаружено, что для значения поля $h = 0.5$ наблюдается фазовый переход,

индуцированный внешним магнитным полем. Можно предположить, что это связано с изменением магнитной структуры модели под влиянием магнитного поля. Установлено, что переход в системе происходит как фазовый переход первого рода при критической температуре $T_c = 0.181(1)$. Показано, что в интервале $h \geq 1.5$ магнитное поле снимает вырождение основного состояния и фазовый переход в системе подавляется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dotsenko V.S.* Critical phenomena and quenched disorder // *Phys. Usp.* 1995. V. 38. P. 457–496.
2. *Korshunov S.E.* Phase transitions in two-dimensional systems with continuous degeneracy // *Phys. Usp.* 2006. V. 49. P. 225–262.
3. *Diep H.T.* Frustrated Spin Systems. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore. 2004. P. 624.
4. *Ramazanov M.K., Murtazaev A.K.* Phase transitions and critical characteristics in the layered antiferromagnetic Ising model with next-nearest-neighbor intralayer interactions // *JETP Lett.* 2015. V. 101. P. 714–718.
5. *Malakis A., Kalozoumis P., Tyraskis N.* Monte Carlo studies of the square Ising model with next-nearest-neighbor interactions // *Eur. Phys. J. B.* 2006. V. 50. P. 63–67.
6. *Сосин С.С., Прозорова Л.А., Смирнов А.И.* Новые магнитные состояния в кристаллах // *УФН.* 2005. Т. 175. С. 92–99.
7. *Kassan-Ogly F.A., Proshkin A.I.* Frustrations and Ordering in Magnetic Systems of Various Dimensions // *Phys. Solid State.* 2018. V. 60. P. 1090–1097.
8. *Kazuaki M., Yukiyasu O.* Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field // *Phys. Rev. B.* 2020. V. 101. P. 184427–1–184427–7.
9. *Гехт Р.С.* Магнитные состояния и фазовые переходы во фрустрированных антиферромагнетиках с треугольной решеткой // *УФН.* 1989. Т. 159. С. 261–296.
10. *Муртазаев А.К., Мазагаева М.К., Рамазанов М.К., Магомедов М.А., Муртазаева А.А.* Фазовая диаграмма модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке // *ФТТ.* 2021. Т. 63. Вып. 5. С. 622–627.
11. *Schreiber N., Cohen R., Haber S.* Ferromagnetic Potts models with multisite interaction // *Phys. Rev. E.* 2018. V. 97. P. 032106.
12. *Foster D.P., Gérard C.* Critical behavior of the fully frustrated q -state Potts piled-up-domino model // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 70. P. 014411.
13. *Puha I., Diep H.T.* Phase transition of Potts model on a frustrated 3D lattice // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 87. P. 5905.
14. *Nauenberg M., Scalapino D.J.* Singularities and Scaling Functions at the Potts-Model Multicritical Point // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 44. P. 837–840.
15. *Cardy J.L., Nauenberg M., Scalapino D.J.* Scaling theory of the Potts-model multicritical point // *Phys. Rev. B.* 1980. V. 22. P. 2560–2568.
16. *Ramazanov M.K., Murtazaev A.K., Magomedov M.A.* Phase diagrams and ground-state structures of the Potts model on a triangular lattice // *Physica A.* 2019. V. 521. P. 543–550.
17. *Wu F.Y.* The Potts model // *Rev. Mod. Phys.* 1982. V. 54. P. 235–268.
18. *Feldmann H., Guttmann A.J., Jensen I., Shrock R., Tsai S.-H.* Study of the Potts model on the honeycomb and triangular lattices: Low-temperature series and partition function zeros // *J. Phys. A.* 1998. V. 31. P. 2287–2310.
19. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К., Магомедов М.А., Мазагаева М.К.* Фазовые переходы и магнитные свойства модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке в слабых магнитных полях // *Письма в ЖЭТФ.* 2021. Т. 114. Вып. 11–12. С. 762–767.
20. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К.* Фазовые переходы и критические свойства в антиферромагнитной модели Гейзенберга на слоистой кубической решетке // *Письма в ЖЭТФ.* 2017. Т. 106. Вып. 2. С. 72–77.
21. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К., Магомедов М.А., Мазагаева М.К.* Исследование фазовых переходов и термодинамических свойств модели Поттса с $q = 4$ на гексагональной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // *ФТТ.* 2020. Т. 62. Вып. 3. С. 442–446.
22. *Муртазаев А.К., Магомедов М.А., Рамазанов М.К.* Фазовая диаграмма и структура основного состояния антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке // *Письма в ЖЭТФ.* 2018. Т. 107. Вып. 4. С. 265–269.
23. *Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Мазагаева М.К., Магомедов М.А.* Фазовая диаграмма антиферромагнитной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ на гексагональной решетке // *ФММ.* 2021. Т. 122. № 5. С. 460–465.
24. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К., Магомедов М.А., Мазагаева М.К., Муртазаева А.А.* Исследование влияния сильных магнитных полей на фазовые переходы фрустрированной модели Поттса с числом состояний спина $q = 4$ // *ФММ.* 2022. Т. 123. № 3. С. 313–319.
25. *Gangat A.A., Kao Y.-J.* Phase boundary location with information-theoretic entropy in tensor renormalization group flows // *Phys. Rev. B.* 2019. V. 100. P. 094430.
26. *Муртазаев А.К., Кассан-Оглы Ф.А., Рамазанов М.К., Муртазаев К.Ш.* Исследование фазовых переходов в антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке методом Монте-Карло // *ФММ.* 2020. Т. 121. № 4. С. 346–351.
27. *Рамазанов М.К., Муртазаев А.К.* Фазовая диаграмма антиферромагнитной модели Гейзенберга на кубической решетке // *Письма в ЖЭТФ.* 2019. Т. 109. Вып. 9. С. 610–614.
28. *Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Мазагаева М.К., Магомедов М.А.* Фазовые переходы и термодинамические свойства модели Поттса с числом состо-

- яний спина $q = 4$ на гексагональной решетке // ЖЭТФ. 2019. Т. 156. Вып. 3. С. 502–506.
29. Муртазаев А.К., Кассан-Оглы Ф.А., Рамазанов М.К., Муртазаев К.Ш. Исследование фазовых переходов в антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке методом Монте-Карло // ФММ. 2020. Т. 121. № 4. С. 346–351.
 30. Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y. Generalized-ensemble algorithms for molecular simulations of biopolymers // Biopolymers (Peptide Science). 2001. V. 60. P. 96–123.
 31. Wang F., Landau D.P. Determining the density of states for classical statistical models: a random walk algorithm to produce a flat histogram // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056101-1–056101-16.
 32. Wang F., Landau D.P. Efficient, Multiple-Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2050–2053.
 33. Курбанова Д.Р., Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Магомедов М.А. Фазовая диаграмма четырехвершинной модели Поттса с конкурирующими обменными взаимодействиями // Письма в ЖЭТФ. 2022. Т. 115. Вып. 8. С. 505–511.
 34. Kassan-Ogly F.A., Filippov B.N., Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Badiev M.K. Influence of field on frustrations in low-dimensional magnets // J. Mag. Mag. Mater. 2012. V. 24. P. 3418–3421.
 35. Kassan-Ogly F.A., Murtazaev A.K., Zhuravlev A.K., Ramazanov M.K., Proshkin A.I. Ising model on a square lattice with second-neighbor and third-neighbor interactions // J. Mag. Mag. Mater. 2015. V. 384. P. 247–254.
 36. Proshkin A.I., Kassan-Ogly F.A. Frustration and Phase Transitions in Ising Model on Decorated Square Lattice // Phys. Met. Metal. 2019. V. 120. P. 1366–1372.
 37. Kassan-Ogly F.A., Proshkin A.I. Ising Model on Planar Decorated Lattices. Frustrations and Their Influence on Phase Transitions // Phys. Met. Metal. 2019. V. 120. P. 1359–1365.