

ISSN 0005-2310

А **ВТОМАТИКА** **И МЕЛЕМЕХАНИКА**



2

2023

2

2023



Российская Академия Наук

АТ АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

2

ФЕВРАЛЬ

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишнеvский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»

© 2023 г. А.В. БЕРЕНДАКОВА (abv1998@yandex.ru),
Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com),
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

О МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ВНЕШНИХ ОЦЕНОК ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ¹

Рассматривается задача построения внешней оценки предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с выпуклыми ограничениями на управление. Предложен метод декомпозиции, позволяющий свести задачу для исходной системы к подсистемам меньшей размерности посредством перехода в нормальный жорданов базис матрицы системы. Сформулировано и доказано утверждение о структуре опорной гиперплоскости к предельному множеству управляемости. На основе принципа сжимающих отображений предложен метод построения внешней оценки предельного множества управляемости с произвольным порядком точности в смысле расстояния Хаусдорфа. Приведены примеры.

Ключевые слова: дискретная система управления, предельное множество управляемости, опорное полупространство, принцип сжимающих отображений, выпуклое множество, полиэдральная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0005231023020010, EDN: OMDNFB

1. Введение

Вопросы построения множеств достижимости и управляемости [1–6] тесно связаны с задачами управления динамическими системами. В большинстве механических систем управляющее воздействие является ограниченным по своим возможностям: реактивные двигатели летательного аппарата имеют ограниченную тягу и конечный запас топлива, сервоприводы различных роботизированных систем также способны развивать некоторое фиксированное усилие. Данные ограничения приводят к тому, что управляемый объект может быть выведен на желаемый режим работы, вообще говоря, не из всех начальных состояний. В связи с этим оказывается актуальной задача анализа каждого отдельно взятого начального состояния по вопросу управляемости и достижимости [7].

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

Для дискретных систем управления известен подход, направленный на построение предельных множеств управляемости и достижимости. Однако зачастую даже в линейном случае удается только сформулировать достаточные условия того, что данные множества будут ограниченными. При этом даются только самые общие оценки их структуры. В [1] продемонстрировано, что предельные множества управляемости и достижимости линейных систем представляют собой цилиндр с некоторым вышуклым сечением. В [2] для случая определенной структуры матрицы линейной системы на основе принципа максимума предложен метод оценивания предельного множества достижимости.

Отдельный интерес методы построения и оценивания предельного множества 0-управляемости представляют в случае решения задачи быстродействия [8–12]. Данная задача имеет определенную специфику именно для дискретного времени, в то время как в непрерывном случае ее решение давно известно и сводится к использованию релейного управления [8, 9]. Для систем, описываемых конечно-разностными соотношениями, применение стандартных методов (принцип максимума [13, 14] и метод динамического программирования [15]) приводят либо к процедуре полного перебора, либо к вырожденной ситуации, поскольку экстремум почти для всех начальных состояний не является регулярным, а множители Лагранжа на оптимальном решении одновременно обращаются в нуль [3, 16–19]. В связи с этим применяется подход, основанный на использовании множеств 0-управляемости. Подробно методы решения данной задачи изложены в [20–23].

Тем не менее в этих работах постулируется разрешимость исходной задачи быстродействия, но при этом не приводятся необходимых и достаточных условий выполнимости данного факта. В свою очередь, имея возможность построить предельное множество 0-управляемости либо его оценку, можно для ряда начальных состояний определить, разрешима ли задача быстродействия в принципе.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приводится постановка задачи и вводятся основные понятия. В разделе 3 сформулированы и доказаны основные леммы, позволяющие на основе перехода в нормальный жорданов базис матрицы системы произвести декомпозицию исходной системы на подсистемы меньших размерностей. В разделе 4 приводятся необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости системы, а также предлагается их внешняя оценка на основе использования аппарата опорных гиперплоскостей. В разделе 5 на основе принципа сжимающих отображений представлен метод, позволяющий построить внешнюю оценку предельного множества 0-управляемости дискретной линейной системы с произвольной степенью точности в смысле расстояния Хаусдорфа. Различные численные примеры, демонстрирующие эффективность доказанных теорем и лемм, представлены в разделе 6.

Приведем нестандартные обозначения, используемые далее в статье.

Для произвольного $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\text{conv } \mathcal{U}$ выпуклую оболочку множества \mathcal{U} — наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее \mathcal{U} в качестве подмножества. Через $\partial \mathcal{U}$ обозначим множество граничных точек \mathcal{U} , через $\text{int } \mathcal{U}$ — множество внутренних точек \mathcal{U} . Замкнутый и открытый шары радиуса $R > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $B_R(x_0)$ и $O_R(x_0)$ соответственно.

Пространство \mathbb{R}^n будем рассматривать в качестве евклидова со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Под нормой вектора $x \in \mathbb{R}^n$, если не оговорено иное, будем понимать норму, ассоциированную со скалярным произведением: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

2. Постановка задачи

Рассматривается n -мерная линейная автономная дискретная система управления (A, \mathcal{U}) с ограниченным управлением

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где $x(k), u(k) \in \mathbb{R}^n$ — векторы состояния и управления соответственно, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество допустимых значений управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы (1). Предполагается, что $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где каждое $\mathcal{X}(N)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых посредством выбора допустимого управления систему (1) можно перевести в начало координат за N шагов:

$$(2) \quad \mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Требуется построить предельное множество 0-управляемости \mathcal{X}_{∞} , т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (A, \mathcal{U}) можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_{\infty} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

С учетом (2) также справедливо представление

$$(3) \quad \mathcal{X}_{\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N).$$

3. Декомпозиция линейной системы

Как будет продемонстрировано далее, структура предельного множества 0-управляемости системы (1) определяется свойствами матрицы системы A . В [1] доказано, что \mathcal{X}_∞ представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, которые по модулю не превосходят 1. По этой причине процесс построения \mathcal{X}_∞ связан с переходом в нормальный жорданов базис A . В связи с чем в разделе 3 рассмотрим свойства системы (1) и множеств вида (2) и (3), связанные с различными линейными преобразованиями системы координат.

Пусть (A_1, \mathcal{U}_1) и (A_2, \mathcal{U}_2) — n_1 -мерная и n_2 -мерная системы вида (1). Обозначим через $(A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$ систему (A, \mathcal{U}) размерности $n_1 + n_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

Лемма 1. Пусть через $\{\mathcal{X}_i(N)\}_{N=0}^\infty$ и $\mathcal{X}_{i,\infty}$ обозначены класс множеств 0-управляемости и предельное множество 0-управляемости соответственно системы (A_i, \mathcal{U}_i) , $i \in \{1, 2\}$, также $(A, \mathcal{U}) = (A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$.

Тогда

- 1) $\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_1(N) \times \mathcal{X}_2(N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

Доказательства леммы 1 и всех последующих утверждений приведены в Приложении.

Лемма 2. Пусть $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$, (A, \mathcal{U}) — n -мерная система вида (1), через $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^\infty$ и \mathcal{Y}_∞ обозначены класс множеств 0-управляемости и предельное множество 0-управляемости соответственно системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$.

Тогда

- 1) $\mathcal{X}(N) = S\mathcal{Y}(N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) $\mathcal{X}_\infty = S\mathcal{Y}_\infty$.

Лемма 3. Пусть $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)},$$

при этом все собственные значения матрицы A_1 не превосходят по модулю 1. Через $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ обозначена проекция выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на n_2 -мерное подпространство:

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

$n_2 \times (n_1+n_2)$

Тогда для $(n_1 + n_2)$ -мерной системы (A, \mathcal{U}) справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{2,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы (A_2, \mathcal{U}_2) .

Приведенные леммы определяют структуру предельного множества 0-управляемости произвольной системы вида (1). Согласно лемме 3 каждое множество \mathcal{X}_∞ представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных и присоединенных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, не превосходящим 1 по модулю. Для перехода в нормальный жорданов базис матрицы A можно воспользоваться леммой 2. При этом процедура построения \mathcal{X}_∞ в силу блочно-диагонального вида нормальной жордановой формы матрицы с учетом леммы 1 может быть сведена к построению аналогичных множеств для подсистем меньшей размерности с жордановыми клетками в качестве матриц.

4. Построение оценок предельных множеств 0-управляемости

Рассмотрим метод построения полиэдральных оценок множества \mathcal{X}_∞ , основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств. Для этого сформулируем и докажем теорему, гарантирующую, что для произвольной системы вида (1) множество \mathcal{X}_∞ является выпуклым.

Теорема 1. Для любой n -мерной системы (A, \mathcal{U}) вида (1) верно, что \mathcal{X}_∞ — открытое и выпуклое множество.

В силу лемм 1, 2 и 3 задачу построения предельного множества 0-управляемости можно рассматривать исключительно для систем, собственные значения матриц которых строго больше 1. Поскольку в силу теоремы 1 \mathcal{X}_∞ выпукло, то его замыкание можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полупространств [24, теорема 18.8]. Сформулируем в виде леммы 4 структуру опорного полупространства к \mathcal{X}_∞ .

Лемма 4. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, \mathcal{X}_∞ определяется соотношениями (3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \quad \mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{H}_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \right\};$$

$$2) \quad x^* = - \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \overline{\mathcal{X}_\infty} \cap \partial \mathcal{H}_p, \quad \text{где}$$

$$u_k^* = \arg \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).$$

Поскольку согласно лемме 2 допустимо предполагать, что матрица A приведена к нормальной жордановой форме, то для построения базовых внеш-

них оценок \mathcal{X}_∞ достаточно рассмотреть только случай, когда A имеет вид жордановой клетки.

Лемма 5. Пусть для n -мерной системы (A, \mathcal{U}) выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $|\lambda| > 1$, $u_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $u_{i,\min} = \min_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Причем

1) если $\lambda > 1$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min \{(-1)^{j+1} u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1} u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}},$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max \{(-1)^{j+1} u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1} u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}};$$

2) если $\lambda < -1$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} - u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right),$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right).$$

Следствие 1. Пусть в условиях леммы 5 $n = 1$.

Тогда

$$\mathcal{X}_\infty = \left(\frac{-u_{1,\max} - \max\{\lambda u_{1,\max}; \lambda u_{1,\min}\}}{|\lambda|^2 - 1}; \frac{-u_{1,\min} - \min\{\lambda u_{1,\max}; \lambda u_{1,\min}\}}{|\lambda|^2 - 1} \right).$$

Лемма 6. Пусть для $2n$ -мерной системы (A, \mathcal{U}) выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O \\ O & rA_\varphi & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & rA_\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r > 1$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $r_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \|(u_{2i-1} \ u_{2i})^\top\|_{\mathbb{R}^2}$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$R_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j,\max}}{(r-1)^{j+1}},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} : \|(x_{2i-1} \ x_{2i})^\top\|_{\mathbb{R}^2} < R_{i,\max} \right\}.$$

Леммы 5 и 6 позволяют построить внешние оценки предельного множества 0-управляемости системы (1) в направлении каждого из собственных и присоединенных векторов. Для построения соответствующих опорных гиперплоскостей, ограничивающих \mathcal{X}_∞ , достаточно вычислить собственные значения матрицы A . В случае, если полученных ограничений на \mathcal{X}_∞ недостаточно, можно воспользоваться леммой 4 для построения произвольной опорной гиперплоскости.

5. Внешняя оценка предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений

Рассмотрим случай, когда предельное множество 0-управляемости \mathcal{X}_∞ системы (A, \mathcal{U}) ограничено, что в силу леммы 4 эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1. Откуда следует, что матрица A обратима [25] и справедлива следующая лемма, определяющая структуру множеств 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) .

Лемма 7 [26, лемма 1]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ множество 0-управляемости (2) системы (A, \mathcal{U}) удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{X}(N) = - \sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 7 может быть также сведена к эквивалентным рекуррентным соотношениям следующего вида:

$$\mathcal{X}(N) = A^{-1} \mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1} \mathcal{U}).$$

Обозначим через \mathbb{K}_n множество всех компактов в \mathbb{R}^n , а через ρ_H — расстояние Хаусдорфа [27]:

$$\mathbb{K}_n = \{ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} \text{ — компакт} \},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\}.$$

Если учесть, что \mathcal{U} — выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , то каждое множество вида (2) также является выпуклым компактом, так как представимо в виде алгебраической суммы линейных преобразований компактов [24]. Тогда в метрическом пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) можно определить отображение $T: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$(4) \quad T(\mathcal{X}) = A^{-1}\mathcal{X} + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

С учетом леммы 7 и соотношения (4), если отображение T либо $\underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств 0-управляемости (2) в пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) может быть определен посредством принципа сжимающих отображений [28]. Также принцип сжимающих отображений позволяет оценить погрешность приближения предельной точки при помощи метода простой итерации. С другой стороны, предельная точка с точностью до замыкания в силу (3) должна совпадать с \mathcal{X}_∞ . Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (2), множество \mathcal{X}_∞ определяется соотношением (3), отображение T имеет вид (4).

Тогда

- 1) существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T_M = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;
- 2) $\overline{\mathcal{X}_\infty}$ — единственная неподвижная точка отображения T в пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) ;
- 3) справедлива оценка

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Значение коэффициента сжатия α из теоремы 2, вообще говоря, зависит от выбора нормы в пространстве \mathbb{R}^n и, как следствие, от ассоциированной с ней операторной нормы матрицы A^{-1} . Например, известны следующие оценки величины α при выборе различных норм в \mathbb{R}^n [28]:

$$(5) \quad \alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}; \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Методы, позволяющие в общем случае определить, при каком значении $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ отображение T_M окажется сжимающим, на данный момент неизвестны. Однако с учетом оценок (5) величина M может быть определена численно посредством последовательного вычисления α для различных значений $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Также выбор нормы в пространстве \mathbb{R}^n влияет на значение расстояния Хаусдорфа в \mathbb{K}_n , что в конечном счете определяет структуру внешних оценок множества \mathcal{X}_∞ . Данный факт сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (2), множество \mathcal{X}_∞ определяется соотношением (3), величина $M \in \mathbb{N}$ выбрана так, чтобы T_M являлось сжимающим отображением с коэффициентами сжатия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty \in [0; 1)$, которые ассоциированы с нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ в пространстве \mathbb{R}^n соответственно. Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \text{conv} \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)^T}_i : \right. \\ \left. r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2 \right\},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, n} |x_i| \leq R_\infty \right\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p} \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3 позволяет построить внешние оценки множества \mathcal{X}_∞ с любой наперед заданной точностью. В отличие от результатов раздела 4 данные оценки не являются касательными к предельному множеству 0-управляемости и имеют весьма сложную структуру, поскольку представляют собой сумму по Минковскому различных выпуклых множеств. Для получения более точных оценок можно использовать оба подхода одновременно:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \hat{\mathcal{X}}_\infty^1 \cap \hat{\mathcal{X}}_\infty^2,$$

где $\hat{\mathcal{X}}_\infty^1$ — внешняя оценка \mathcal{X}_∞ , построенная на основе лемм 4–6, $\hat{\mathcal{X}}_\infty^2$ — внешняя оценка \mathcal{X}_∞ , построенная согласно теореме 3.

6. Примеры

Продемонстрируем полученные в разделах 4 и 5 теоретические результаты на примере построения предельного множества 0-управляемости для различных линейных дискретных систем вида (1).

Пример 1. Пусть матрица системы $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

В качестве множества допустимых значений управления рассмотрим куб $\mathcal{U} = [-1; 1]^5$. Построим внешнюю оценку предельного множества 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) . Матрица A представима в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \left(\frac{1}{2}\right), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

По лемме 3 для предельного множества 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R} \times \mathcal{X}_{23, \infty},$$

где $\mathcal{X}_{23, \infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(A_{23}, \mathcal{U}_{23})$,

$$A_{23} = \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{23} = [-1; 1]^4.$$

Предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{23, \infty}$ по лемме 1 представимо в виде

$$\mathcal{X}_{23, \infty} = \mathcal{X}_{2, \infty} \times \mathcal{X}_{3, \infty},$$

где $\mathcal{X}_{2, \infty}$ — предельное множество 0-управляемости подсистемы (A_2, \mathcal{U}_2) , $\mathcal{U}_2 = [-1; 1]^2$, $\mathcal{X}_{3, \infty}$ — предельное множество 0-управляемости подсистемы (A_3, \mathcal{U}_3) , $\mathcal{U}_3 = [-1; 1]^2$.

Рассмотрим подсистему (A_2, \mathcal{U}_2) . У матрицы A_2 существует единственное собственное значение $\lambda_2 = 2$ кратности 2. Тогда (A_2, \mathcal{U}_2) удовлетворяет условиям леммы 5. Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{2, \infty} &\subset \bigcap_{i=1}^2 \{x \in \mathbb{R}^2 : x_i \in (x_{i, \min}; x_{i, \max})\}. \\ x_{1, \min} &= \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{1+j, \min}; (-1)^{j+1}u_{1+j, \max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\ &= \min\{(-1)u_{1, \min}; (-1)u_{1, \max}\} + \min\{(-1)^2u_{2, \min}; (-1)^2u_{2, \max}\} = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{1+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{1+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\
&= \max\{(-1)u_{1,\min}; (-1)u_{1,\max}\} + \max\{(-1)^2u_{2,\min}; (-1)^2u_{2,\max}\} = 2, \\
x_{2,\min} &= \sum_{j=0}^{2-2} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{2+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{2+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\
&= \min\{(-1)u_{2,\min}; (-1)u_{2,\max}\} = -1, \\
x_{2,\max} &= \sum_{j=0}^{2-2} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{2+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{2+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\
&= \max\{(-1)u_{2,\min}; (-1)u_{2,\max}\} = 1.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{X}_{2,\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 \in (-2; 2)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2: x_2 \in (-1; 1)\} = (-2; 2) \times (-1; 1).$$

Рассмотрим подсистему (A_3, \mathcal{U}_3) . У матрицы A_3 существует два комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda_3 = (3 - 3i)\sqrt{2}$, $\lambda_4 = (3 + 3i)\sqrt{2}$. Матрица A_3 представима в виде

$$A_3 = rA_\varphi = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

где $r = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда по лемме 6

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{3,\infty} &\subset \{x \in \mathbb{R}^2: \|(x_1 \ x_2)^T\|_2 \leq R_{1,\max}\}, \\
r_{1,\max} &= \max_{u \in \mathcal{U}_3} \|(u_1 \ u_2)^T\|_2 = \max_{u \in \mathcal{U}_3} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2}, \\
R_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{1-1} \frac{r_{1+j,\max}}{(r-1)^{j+1}} = \frac{r_{1,\max}}{(6-1)} = \frac{\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что $\mathcal{X}_{3,\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^2: \|(x_1 \ x_2)^T\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{5}\}$.

Тогда согласно леммам 1 и 3 предельное множество 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) можно оценить следующим образом:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathbb{R} \times (-2; 2) \times (-1; 1) \times \left\{ x \in \mathbb{R}^2: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \right\}.$$

Пример 2. Построим для подсистемы (A_2, \mathcal{U}_2) из примера 1 оценку предельного множества 0-управляемости $\mathcal{X}_{2,\infty}$ согласно теореме 3. В качестве значения параметра, определяющего норму в \mathbb{R}^2 , выберем $p = 1$, т.е.

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

Тогда

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \|A_2^{-1}\| = \alpha_1 = \frac{3}{4},$$

т.е. $M = 1$. Согласно лемме 7

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) = -A_2^{-1}\mathcal{U}_2 = \text{conv} & \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}, \\ & \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_1 = \frac{5}{4}, \\ R_1(N) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^N}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \frac{5}{4} & = 5 \left(\frac{3}{4}\right)^N. \end{aligned}$$

Построим внешние оценки для различных N .

$$\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \sum_{k=1}^N A_2^{-k}\mathcal{U}_2 + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} R_1(N) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R_1(N) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(N) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -R_1(N) \end{pmatrix} \right\}.$$

Оценки $\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ для случаев $N = 2$ и $N = 10$ представлены на рис. 1 и 2.

Пример 3. Рассмотрим трехмерную систему (A, \mathcal{U}) , где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0,5 & -3,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & -2,5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = [-1; 1]^3.$$

Матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = -3$ кратности 3, которому соответствуют единственный линейно независимый собственный вектор h_1 и присоединенные векторы h_2, h_3 :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормальная жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

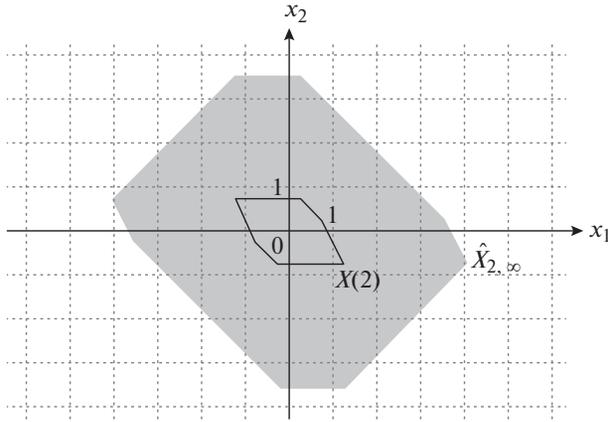


Рис. 1. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_{2, \infty}$ для случая $N = 2$ (серым цветом).

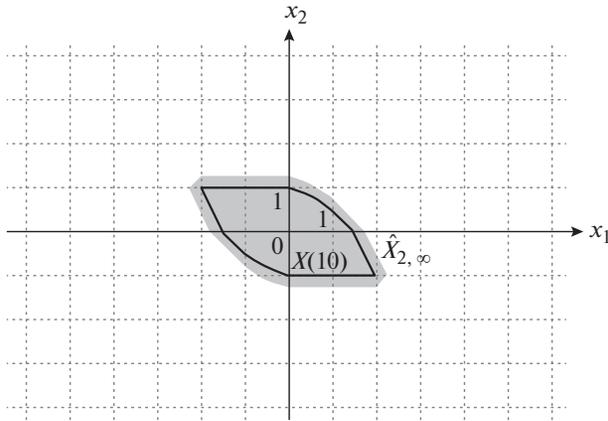


Рис. 2. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_{2, \infty}$ для случая $N = 10$ (серым цветом).

Согласно лемме 2

$$(6) \quad \mathcal{X}_{\infty} = S\mathcal{Y}_{\infty},$$

где \mathcal{X}_{∞} — предельное множество 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) , \mathcal{Y}_{∞} — предельное множество 0-управляемости системы $(J, S^{-1}\mathcal{U})$.

$$S^{-1}\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Система $(J, S^{-1}\mathcal{U})$ удовлетворяет условиям леммы 5. Откуда следует, что

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^3 \{y \in \mathbb{R}^3 : y_i \in (y_{i,\min}; y_{i,\max})\},$$

$$y_{i,\min} = \sum_{j=0}^{3-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} - u_{i+j,\max}}{2 \cdot 2^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2 \cdot 4^{j+1}} \right),$$

$$y_{i,\max} = \sum_{j=0}^{3-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2 \cdot 2^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2 \cdot 4^{j+1}} \right),$$

где $u_{i,\max} = \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} u_i = 1,5$, $u_{i,\min} = \min_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} u_i = -1,5$, $i = \overline{1,3}$.

$$y_{1,\min} = -\frac{21}{16}, \quad y_{1,\max} = \frac{21}{16}, \quad y_{2,\min} = -\frac{9}{8}, \quad y_{2,\max} = \frac{9}{8}, \quad y_{3,\min} = -\frac{3}{4}, \quad y_{3,\max} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \left(-\frac{21}{16}; \frac{21}{16} \right) \times \left(-\frac{9}{8}; \frac{9}{8} \right) \times \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right).$$

В силу (6) верно включение

$$\mathcal{X}_\infty \subset \text{intconv} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} -\frac{39}{16} \\ -\frac{33}{16} \\ -\frac{15}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -\frac{39}{16} \\ -\frac{9}{16} \\ -\frac{3}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -\frac{3}{16} \\ -\frac{33}{16} \\ \frac{3}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -\frac{3}{16} \\ -\frac{9}{16} \\ \frac{15}{8} \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} \frac{3}{16} \\ \frac{9}{16} \\ -\frac{15}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{3}{16} \\ \frac{33}{16} \\ -\frac{3}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{39}{16} \\ \frac{9}{16} \\ \frac{3}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{39}{16} \\ \frac{33}{16} \\ \frac{15}{8} \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

7. Заключение

В статье рассмотрена задача построения внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением. Множество допустимых значений управлений предполагается выпуклым компактом, содержащим начало координат. Доказано, что структура предельного множества 0-управляемости зависит от нормальной жордановой формы и собственных значений матрицы системы.

Сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие свести задачу построения предельного множества 0-управляемости системы с матрицей блочно-диагонального вида к задаче построения аналогичных множеств для подсистем меньшей размерности. Для подсистем, у матрицы которых все собственные значения не превосходят по модулю единицу, доказано, что предельное множество 0-управляемости совпадает со всем фазовым пространством. Для подсистем, у матрицы которых все собственные значения по модулю строго больше единицы, доказано, что предельное множество 0-управляемости представляет собой выпуклое, ограниченное и открытое множество. В этом случае разработан метод построения полиэдральных оценок предельного множества 0-управляемости, основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств. Опорные полупространства, ориентированные по направлению собственных и присоединенных векторов матрицы системы, построены явно. Также для случая ограниченного предельного множества 0-управляемости разработан метод построения его внешней оценки на основе принципа сжимающих отображений с любой наперед заданной точностью.

На примерах опробованы полученные теоретические результаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Обозначим через $x_{0,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $x_{0,2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ начальные состояния системы (A_1, \mathcal{U}_1) и (A_2, \mathcal{U}_2) соответственно. Тогда $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ — начальное состояние системы (A, \mathcal{U}) .

В силу (1) верно, что для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x(N) &= A^N x_0 + A^{N-1} u(0) + A^{N-2} u(1) + \dots + u(N-1) = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^N & O \\ O & A_2^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^{N-1} & O \\ O & A_2^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} u_1(N-1) \\ u_2(N-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^N x_{0,1} + A_1^{N-1} u_1(0) + \dots + u_1(N-1) \\ A_2^N x_{0,2} + A_2^{N-1} u_2(0) + \dots + u_2(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда $x(N) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют $u_1(0), \dots, u_1(N-1) \in \mathcal{U}_1$ и $u_2(0), \dots, u_2(N-1) \in \mathcal{U}_2$ такие, что $x_1(N) = 0$, $x_2(N) = 0$. Данные равенства в силу (2) эквивалентны включению $x_{0,1} \in \mathcal{X}_1(N)$, $x_{0,2} \in \mathcal{X}_2(N)$. Следовательно,

$$\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_1(N) \times \mathcal{X}_2(N).$$

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$. Тогда согласно (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N}) = \mathcal{X}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_1(N) \times \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_2(N) = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}.$$

Тогда $\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Следовательно, существуют $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_0 \in \mathcal{X}_1(\tilde{N}_1) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N}_2) \subset \mathcal{X}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N})$, где $\tilde{N} = \max\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2\}$. Тогда в силу пункта 1 леммы 1

$$x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_{\infty}.$$

Откуда $\mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty} \subset \mathcal{X}_{\infty}$.

Окончательно получаем, что $\mathcal{X}_{\infty} = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $\{y(k)\}_{k=0}^N$ — траектория системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$, т.е. $y(N)$ согласно (1) для начального состояния $y_0 \in \mathbb{R}^n$ допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} y(N) &= S^{-1}ASy(N-1) + v(N-1) = \dots = \\ &= S^{-1}A^N S y_0 + S^{-1}A^{N-1} S v(0) + \dots + v(N-1), \end{aligned}$$

где $v(0), \dots, v(N-1) \in S^{-1}\mathcal{U}$.

В силу (2) $y_0 \in \mathcal{Y}(N)$ тогда и только тогда, когда $y(N) = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} S^{-1}A^N S y_0 + S^{-1}A^{N-1} S v(0) + \dots + v(N-1) &= 0, \\ A^N S y_0 + A^{N-1} S v(0) + \dots + S v(N-1) &= 0, \end{aligned}$$

что в силу (2) эквивалентно включению $S y_0 \in \mathcal{X}(N)$, так как по построению $Sv(0), \dots, Sv(N-1) \in \mathcal{U}$. Откуда следует равенство $\mathcal{X}(N) = S\mathcal{Y}(N)$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_{\infty}$. В силу (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x_0 \in S\mathcal{Y}(\tilde{N})$ согласно пункту 1 леммы 2. Следовательно, $S^{-1}x_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Тогда $S^{-1}x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N) = \mathcal{Y}_{\infty}$, т.е. $x_0 \in S\mathcal{Y}_{\infty}$. Тогда $\mathcal{X}_{\infty} \subset S\mathcal{Y}_{\infty}$.

Пусть $x_0 \in S\mathcal{Y}_{\infty}$, тогда $S^{-1}x_0 \in \mathcal{Y}_{\infty}$. В силу (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $S^{-1}x_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Тогда $x_0 \in S\mathcal{Y}(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N})$ в силу пункта 1 леммы 2. Согласно соотношениям (3) также верно включение $x_0 \in \mathcal{X}_{\infty}$. Тогда $S\mathcal{Y}_{\infty} \subset \mathcal{X}_{\infty}$.

Окончательно получаем, что $S\mathcal{Y}_{\infty} = \mathcal{X}_{\infty}$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Тогда $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$, где $x_{0,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_{0,2} \in \mathcal{X}_{2,\infty}$, откуда согласно (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_{0,2} \in \mathcal{X}_2(\tilde{N})$, что согласно (2) эквивалентно существованию $u_2^*(0), \dots, u_2^*(\tilde{N}-1) \in \mathcal{U}_2$ таких, что $x_2(\tilde{N}) = 0$. Тогда для системы (A, \mathcal{U}) найдутся $u(0), \dots, u(\tilde{N}-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2^*(k) \end{pmatrix}$, $k = \overline{0, \tilde{N}-1}$. В силу (1) для $x(\tilde{N})$ верно представление

$$x(\tilde{N}) = \begin{pmatrix} A_1^{\tilde{N}} x_{0,1} + A_1^{\tilde{N}-1} u_1(0) + \dots + u_1(\tilde{N}-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом леммы 1 достаточно показать, что найдется такое $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, что $\mathcal{U}_1 \times \{0\} \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $\mathcal{X}_{1,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы (A_1, \mathcal{U}_1) .

Обозначим через $S \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ матрицу перехода в нормальный жорданов базис матрицы A_1 . Поскольку $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то существует $u_{\max} > 0$ такое, что $S[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1} \times \{0\} \subset \mathcal{U}$. При этом в силу невырожденности матрицы S и леммы 2 верно равенство $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$ для случая $\mathcal{U}_1 = S[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1}$ тогда и только тогда, когда $S^{-1}\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $S^{-1}\mathcal{X}_{1,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(S^{-1}A_1S, [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$. При этом согласно теореме о нормальной жордановой форме [25] верно равенство

$$S^{-1}A_1S = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\tilde{n}_1} \end{pmatrix},$$

где жордановы клетки J_i , соответствующие действительным собственным значениям $\lambda_i \in \mathbb{R}$ матрицы A_1 , имеют вид

$$(II.1) \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i},$$

а жордановы клетки J_i , соответствующие комплексным собственным значениям $\lambda_i \in \mathbb{C}$ матрицы A_1 , имеют вид

$$(II.2) \quad J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i},$$

$$A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix},$$

где $r_i = |\lambda_i|$, $\varphi_i = \arg(\lambda_i)$.

Таким образом, в силу леммы 1 достаточно показать, что для $|\lambda_i| \leq 1$ предельные множества 0-управляемости системы $(J_i, [-u_{\max}; u_{\max}]^{m_i})$ для случая (II.1) и системы $(J_i, [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m_i})$ для случая (II.2) совпадают с \mathbb{R}^{m_i} и \mathbb{R}^{2m_i} соответственно для всех $i = \overline{1, \tilde{n}_1}$.

Пусть $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ удовлетворяет (П.1). Тогда для всех $N \geq m$ верно, что

$$(П.3) \quad J^N = \begin{pmatrix} \lambda^N & N\lambda^{N-1} & C_N^2 \lambda^{N-2} & \dots & C_N^{m-1} \lambda^{N-m+1} \\ 0 & \lambda^N & N\lambda^{N-1} & \dots & C_N^{m-2} \lambda^{N-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^N \end{pmatrix},$$

где здесь и везде далее через C_N^m обозначено число сочетаний из N по m :

$$C_N^m = \frac{N!}{(N-m)!m!}.$$

Обозначим через $\{y(k), v(k-1), y_0\}_{k=1}^N$ процесс управления системы $(J, [-u_{\max}; u_{\max}]^m)$. Тогда

$$y(N) = J^N y_0 + \sum_{k=0}^{N-1} J^k v(N-k-1).$$

Если обозначить $z_0 = J^N y_0$, то в силу (П.3) для каждой i -й координаты z_0 верно, что

$$z_{0,i} = \sum_{j=0}^{m-i} \lambda^{N-j} C_N^j y_{0,j+i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Предположим, что $|\lambda| < 1$. Тогда для $N \geq 2m$ верно, что

$$\begin{aligned} |z_{0,i}| &\leq \sum_{j=0}^{m-i} |\lambda^{N-j} y_{0,j+i} C_N^j| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |\lambda^{N-j}| \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| |C_N^j| \leq \\ &\leq m |\lambda^{N-m+1}| \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| C_N^{m-1} \leq \\ &\leq m \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| |\lambda|^{N-m+1} \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-m+2)}{(m-1)!} \leq \\ &\leq m \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| |\lambda|^{N-m+1} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i = \overline{1, m}$

$$-u_{\max} < z_{0,i} < u_{\max}.$$

Выберем $v(0) = \dots = v(\tilde{N}-2) = 0$ и $v(\tilde{N}-1) = -z_0 \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$. Получим, что $y(\tilde{N}) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^m$.

Предположим, что $|\lambda| = 1$. Тогда в силу (П.3) для некоторого $N_m \in \mathbb{N}$ и m -й координаты $y(N_m)$ верно соотношение

$$y_m(N_m) = \lambda^{N_m} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \lambda^k v_m(N_m - k - 1).$$

Определим $N_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $|y_m(0)| \leq N_m u_{\max}$. Тогда можно выбрать $v(0), \dots, v(N_m - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$, исходя из следующего условия:

$$v_m(N_m - k - 1) = -\frac{\lambda^{N_m} y_m(0)}{\lambda^k N_m} \in [-u_{\max}; u_{\max}], \quad k = \overline{0, N_m - 1}.$$

Получим, что

$$y_m(N_m) = \lambda^{N_m} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \lambda^k \frac{-\lambda^{N_m} y_m(0)}{\lambda^k N_m} = 0.$$

Предположим, что для некоторых $N \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, m-1}$ верны соотношения $y_m(N) = \dots = y_{m-i+1}(N) = 0$. Тогда если $v_m(N + N_{m-i} - k - 1) = \dots = v_{m-i+1}(N + N_{m-i} - k - 1) = 0$, $k = \overline{0, N_{m-i} - 1}$, то согласно (П.3)

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = \lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \lambda^k v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1),$$

где $N_{m-i} \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $|y_{m-i}(N)| \leq N_{m-i} u_{\max}$. Тогда можно определить $v(N), \dots, v(N + N_{m-i} - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$ так, чтобы

$$v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1) = \frac{-\lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N)}{N_{m-i} \lambda^k}, \quad k = \overline{0, N_{m-i} - 1}.$$

Получим, что

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = \lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \lambda^k \frac{-\lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N)}{N_{m-i} \lambda^k} = 0,$$

$$y_m(N + N_{m-i}) = \dots = y_{m-i+1}(N + N_{m-i}) = 0.$$

Согласно методу математической индукции найдется $N \in \mathbb{N}$ такой, что $y(N) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(N)$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^m$.

Пусть $J \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ удовлетворяет случаю (П.2). Тогда для всех $N \geq m$

$$(П.4) \quad J^N = \begin{pmatrix} r^N A_{N\varphi} & N r^{N-1} A_{(N-1)\varphi} & \dots & C_N^{m-1} r^{N-m+1} A_{(N-m+1)\varphi} \\ 0 & r^N A_{N\varphi} & \dots & C_N^{m-2} r^{N-m+2} A_{(N-m+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^N A_{N\varphi} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\{y(k), v(k-1), y_0\}_{k=1}^N$ процесс управления системы $(J, [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m})$. Тогда

$$y(N) = J^N y_0 + \sum_{k=0}^{N-1} J^k v(N-k-1).$$

Если обозначить $z_0 = J^N y_0$, то в силу (П.4) для каждого i -го двухмерного подвектора z_0 верно, что

$$z_{0,i} = \sum_{j=0}^{m-i} C_N^j r^{N-j} A_{(N-j)\varphi} y_{0,j+i} \in \mathbb{R}^2, \quad i = \overline{1, m},$$

где $z_0 = (z_{0,1}^T, \dots, z_{0,m}^T)^T$, $y_0 = (y_{0,1}^T, \dots, y_{0,m}^T)^T$.

Предположим, что $r < 1$. Тогда для $N \geq 2m$ верно, что

$$\begin{aligned} \|z_{0,i}\| &\leq \sum_{j=0}^{m-i} \|r^{N-j} A_{(N-j)\varphi} y_{0,j+i} C_N^j\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} r^{N-j} \|A_{(N-j)\varphi} y_{0,i}\| C_N^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} r^{N-j} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| C_N^j \leq \\ &\leq m r^{N-m+1} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-m+2)}{(m-1)!} \leq \\ &\leq m r^{N-m+1} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i = \overline{1, m}$

$$\|z_{0,i}\| < u_{\max}.$$

Выберем $v(0) = \dots = v(\tilde{N}-2) = 0$ и $v(\tilde{N}-1) = -z_0 \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$. Получим, что $y(\tilde{N}) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^{2m}$.

Предположим, что $r = 1$. Тогда в силу (П.4) для некоторого $N_m \in \mathbb{N}$ и m -го двухмерного подвектора $y(N_m)$ верно соотношение

$$y_m(N_m) = A_{N_m\varphi} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} A_{k\varphi} v_m(N_m-k-1).$$

Определим $N_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|y_m(0)\| \leq N_m u_{\max}$. Тогда можно выбрать $v(0), \dots, v(N_m-1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$, исходя из равенства

$$v_m(N_m-k-1) = -\frac{A_{(N_m-k)\varphi} y_m(0)}{N_m} \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}, \quad k = \overline{0, N_m-1}.$$

Получим, что

$$y_m(N_m) = A_{N_m\varphi}y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \frac{-A_{N_m\varphi}y_m(0)}{N_m} = 0.$$

Предположим, что для некоторых $N \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, m-1}$ верны соотношения $y_m(N) = \dots = y_{m-i+1}(N) = 0$. Тогда если $v_m(N + N_{m-i} - k - 1) = \dots = v_{m-i+1}(N + N_{m-i} - k - 1) = 0$, $k = \overline{0, N_{m-i} - 1}$, то согласно (П.4)

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = A_{N_{m-i}\varphi}y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} A_{k\varphi}v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1),$$

где $N_{m-i} \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $\|y_{m-i}(N)\| \leq N_{m-i}u_{\max}$. Теперь можно доопределить $v(N), \dots, v(N + N_{m-i} - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$ так, чтобы

$$v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1) = \frac{-A_{(N_{m-i}-k)\varphi}y_{m-i}(N)}{N_{m-i}}, \quad k = \overline{0, N_{m-i} - 1}.$$

Получим, что

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = A_{N_{m-i}\varphi}y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \frac{-A_{N_{m-i}\varphi}y_{m-i}(N)}{N_{m-i}} = 0,$$

$$y_m(N + N_{m-i}) = \dots = y_{m-i+1}(N + N_{m-i}) = 0.$$

Тогда согласно методу математической индукции найдется $N \in \mathbb{N}$ такой, что $y(N) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(N)$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^{2m}$.

Лемма 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$, что в силу (3) эквивалентно существованию $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такого, что $x_0 \in \mathcal{X}(N)$. В силу (2) найдутся $u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $x(N) = 0$. Тогда с учетом (1) для любых $h \in \partial B_1(0)$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(N) &= A^N(x_0 + \varepsilon h) + A^{N-1}u(0) + \dots + u(N-1) = \\ &= A^N x_0 + A^{N-1}u(0) + \dots + u(N-1) + A^N h\varepsilon = x(N) + A^N h\varepsilon = A^N h\varepsilon, \\ \tilde{x}(N+1) &= A\tilde{x}(N) + u(N) = A^{N+1}h\varepsilon + u(N), \end{aligned}$$

где $u(N) \in \mathcal{U}$. Поскольку $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, существуют $\delta > 0$ такая, что $O_\delta(0) \subset \mathcal{U}$, и $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon A^{N+1}B_1(0) \subset O_\delta(0)$. Выберем

$$u(N) = -A^{N+1}h\varepsilon \in \varepsilon A^{N+1}B_1(0) \subset O_\delta(0) \subset \mathcal{U}.$$

Тогда $\tilde{x}(N+1) = 0$, т.е. для любых $h \in B_1(0)$ верно включение $x_0 + \varepsilon h \in \mathcal{X}(N+1)$. Таким образом $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}(N+1) \subset \mathcal{X}_\infty$, т.е. $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}_\infty$. Следовательно, \mathcal{X}_∞ открытое.

Пусть $x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathcal{X}_\infty, \alpha \in [0; 1]$. Тогда существует $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathcal{X}(N)$, т.е. существуют $u^1(0), u^1(1), \dots, u^1(N-1), u^2(0), u^2(1), \dots, u^2(N-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $x^1(N) = 0, x^2(N) = 0$. Согласно (1) верны соотношения

$$0 = x^1(N) = A^N x_{0,1} + A^{N-1} u^1(0) + A^{N-2} u^1(1) + \dots + u^1(N-1),$$

$$0 = x^2(N) = A^N x_{0,2} + A^{N-1} u^2(0) + A^{N-2} u^2(1) + \dots + u^2(N-1),$$

$$0 = \alpha x^1(N) = \alpha A^N x_{0,1} + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha A^k u^1(N-k-1),$$

$$0 = (1-\alpha)x^2(N) = (1-\alpha)A^N x_{0,2} + \sum_{k=0}^{N-1} (1-\alpha)A^k u^2(N-k-1),$$

$$0 = A^N(\alpha x_{0,1} + (1-\alpha)x_{0,2}) + \sum_{k=0}^{N-1} A^k(\alpha u^1(N-k-1) + (1-\alpha)u^2(N-k-1)).$$

В силу выпуклости \mathcal{U} верно включение $v(N-k-1) = \alpha u^1(N-k-1) + (1-\alpha)u^2(N-k-1) \in \mathcal{U}, k = \overline{0, N-1}$. Тогда $\alpha x_{0,1} + (1-\alpha)x_{0,2} \in \mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}_\infty$. Откуда следует, что \mathcal{X}_∞ выпуклое.

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$. Тогда в силу (3) существует $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_0 \in \mathcal{X}(N)$. В силу (2) существуют $u(0), u(1), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $x(N) = 0$. С учетом (1) верны соотношения

$$0 = x(N) = A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1),$$

$$0 = x_0 + A^{-N} \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1).$$

Выразим из полученного равенства x_0 и внесем матрицу A^{-N} под знак суммы:

$$x_0 = - \sum_{k=0}^{N-1} A^{-N+k} u(N-k-1).$$

Изменив порядок суммирования на обратный, окончательно получим следующее представление x_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &= (A^{-N} u(N-1) + A^{-N+1} u(N-2) + \dots + A^{-1} u(0)) = \\ &= - \sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1). \end{aligned}$$

Пусть p принадлежит $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\begin{aligned} (p, x_0) &= \left(p, -\sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1) \right) = \sum_{k=1}^N \left(p, -A^{-k} u(k-1) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N \left((-A^{-k})^T p, u(k-1) \right) \leq \sum_{k=1}^N \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right). \end{aligned}$$

Поскольку $0 \in \mathcal{U}$, то для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \geq 0.$$

Тогда

$$(p, x_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right),$$

т.е. $x_0 \in \mathcal{H}_p$. Откуда $\mathcal{X}_{\infty} \subset \mathcal{H}_p$.

Рассмотрим следующую величину для некоторого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$(p, x^*) = \sum_{k=1}^{\infty} (p, -A^{-k} u_k^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-(A^{-k})^T p, u_k^* \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).$$

Тогда $x^* \in \partial \mathcal{H}_p$.

Поскольку все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^*$ сходится. Тогда $x_N = -\sum_{k=1}^N A^{-k} u_k^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x^*$. Покажем, что $x_N \in \mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}_{\infty}$. Выберем $u(k) = u_{k+1}^* \in \mathcal{U}$. Тогда

$$x(N) = A^N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1) = \sum_{k=1}^N A^{N-k} u_k^* + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u_{N-k-1}^* = 0.$$

Тогда $x_N \in \mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}_{\infty}$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Откуда следует, что $x^* = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N \in \overline{\mathcal{X}_{\infty}}$.

Лемма 4 доказана.

Следствие 2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, \mathcal{X}_{∞} определяется соотношениями (3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \quad \mathcal{X}_{\infty} \subset \mathcal{H}_{-p} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \min_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \right\};$$

$$2) \quad x^* = - \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \overline{\mathcal{X}}_{\infty} \cap \partial \mathcal{H}_{-p}, \quad \text{где}$$

$$u_k^* = \arg \min_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).$$

Доказательство следствия 2. Для доказательства достаточно записать положения леммы 4 для вектора $-p$.

Доказательство леммы 5. Пусть $p = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^n$, где 1 соответствует i -й координате вектора p . Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda^{-k} & (-1)k\lambda^{-k-1} & (-1)^2 k(k+1)\lambda^{-k-2} \frac{1}{2} & \dots & (-1)^{n-1} \frac{(k+n-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \lambda^{-k-n+1} \\ 0 & \lambda^{-k} & (-1)k\lambda^{-k-1} & \dots & (-1)^{n-2} \frac{(k+n-3)!}{(n-2)!(k-1)!} \lambda^{-k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{-k} \end{pmatrix},$$

$$-(A^{-k})^T p = - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda^{-k} \\ (-1)k\lambda^{-k-1} \\ \vdots \\ (-1)^{n-i} \frac{(k+n-i-1)!}{(k-1)!(n-i)!} \lambda^{-k-n+i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &= -(\lambda^{-k} u_i - k\lambda^{-k-1} u_{i+1} + \dots + (-1)^{n-i} \lambda^{-k-n+i} C_{k+n-i-1}^{n-i} u_n) = \\ &= - \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} (-1)^j u_{j+i} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} (-1)^{j+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\lambda > 1$. Так как $u_i \in [u_{i,\min}; u_{i,\max}]$, для всех $k \in \mathbb{N}$ будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &\leq \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j \max\{(-1)^{j+1} u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1} u_{j+i,\max}\}, \\ -(-(A^{-k})^T p, u) &\leq - \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j \min\{(-1)^{j+1} u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1} u_{j+i,\max}\}. \end{aligned}$$

Также верны равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(\lambda-1)^{j+1}}.$$

Откуда с учетом леммы 4 и следствия 2 следует, что для всех $x \in \mathcal{X}_{\infty}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}}{(\lambda-1)^{j+1}} &\leq (p, x) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}}{(\lambda-1)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку \mathcal{X}_{∞} открыто в силу теоремы 1, данные неравенства выполняются строго, т.е.

$$\mathcal{X}_{\infty} \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Рассмотрим случай $\lambda < -1$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-k-j} (-1)^{-k-j+j+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-k-j} (-1)^{-k+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\max_{u \in \mathcal{U}} (-(A^{-(2k-1)})^T p, u) = \\ &= \max_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} (-1)^{-(2k-1)+1} u_{j+i} C_{(2k-1)+j-1}^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j,\max} C_{(2k-1)+j-1}^j, \\ \max_{u \in \mathcal{U}} (-(A^{-2k})^T p, u) &= \max_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-1)^{-2k+1} u_{j+i} C_{2k+j-1}^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-u_{i+j,\min}) C_{2k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
(p, x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \max} C_{(2k-1)+j-1}^j - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} u_{i+j, \min} C_{2k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} \right) - \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} \right) = x_{i, \max}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&\min_{u \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-(2k-1)})^T p, u \right) = \\
&= \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} (-1)^{-(2k-1)+1} u_{j+i} C_{(2k-1)+j-1}^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{j+i, \min} C_{(2k-1)+j-1}^j, \\
&\min_{u \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-2k})^T p, u \right) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-1)^{-2k+1} u_{j+i} C_{2k+j-1}^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-u_{j+i, \max}) C_{2k+j-1}^j.
\end{aligned}$$

Тогда согласно следствию 2 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
(p, x) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \min} C_{(2k-1)+j-1}^j - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} u_{i+j, \max} C_{2k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} \right) - \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} \right) = x_{i, \min}.
\end{aligned}$$

Поскольку \mathcal{X}_∞ открыто в силу теоремы 1, то

$$x_{i,\min} < (p, x) < x_{i,\max},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство леммы 6. Пусть $p = (0 \ 0 \ \dots \ \tilde{p}^T \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{p} = (p_1 \ p_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $p_1^2 + p_2^2 = 1$, где \tilde{p} соответствует $(2i-1)$ -й и $2i$ -й координатам вектора p . Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} r^{-k} A_{-k\varphi} & -kr^{-k-1} A_{(-k-1)\varphi} & \dots & (-1)^{n-1} C_{n+k-2}^{n-1} r^{-k-n+1} A_{(-k-n+1)\varphi} \\ 0 & r^{-k} A_{-k\varphi} & \dots & (-1)^{n-2} C_{n+k-3}^{n-2} r^{-k-n+2} A_{(-k-n+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^{-k} A_{-k\varphi} \end{pmatrix},$$

$$-(A^{-k})^T p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{-k} A_{-k\varphi} \tilde{p} \\ -kr^{-k-1} A_{(-k-1)\varphi} \tilde{p} \\ \vdots \\ (-1)^{n-i} C_{k+n-i-1}^{n-i} r^{-k-n+i} A_{(-k-n+i)\varphi} \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Пусть $u^i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, n}$, $u = (u^{1T}, \dots, u^{nT})^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(-(A^{-k})^T p, u \right) &= - \left(r^{-k} (A_{-k\varphi} \tilde{p}, u^i) + (-1) k r^{-k-1} (A_{(-k-1)\varphi} \tilde{p}, u^{i+1}) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-i} C_{k+n-i-1}^{n-i} r^{-k-n+i} (A_{(-k-n+i)\varphi} \tilde{p}, u^n) \right) = \\ &= - \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} (A_{(-k-j)\varphi} \tilde{p}, u^{i+j}) C_{k+j-1}^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} \| (A_{(-k-j)\varphi} \tilde{p}) \| \| u^{i+j} \| C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} \| u^{i+j} \| C_{k+j-1}^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
(p, x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j, \max}}{(r-1)^{j+1}}.
\end{aligned}$$

Поскольку \mathcal{X}_∞ в силу теоремы 1 открыто, то

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|(x_{2i-1} x_{2i})^\top\|_{\mathbb{R}^2} < R_{i, \max}\}.$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим для некоторых $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{K}_n$ отображение вида

$$\tilde{T}(\mathcal{X}) = B\mathcal{X} + \mathcal{C}.$$

Покажем, что если $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — сжатие с коэффициентом сжатия $\beta \in [0; 1)$, то $\tilde{T}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является сжатием.

$$\begin{aligned}
\rho_H(\tilde{T}(\mathcal{X}), \tilde{T}(\mathcal{Y})) &= \max \left\{ \sup_{x \in \tilde{T}(\mathcal{X})} \inf_{y \in \tilde{T}(\mathcal{Y})} \rho(x, y); \sup_{y \in \tilde{T}(\mathcal{Y})} \inf_{x \in \tilde{T}(\mathcal{X})} \rho(x, y) \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in \mathcal{C}}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in \mathcal{C}}} \|Bx + c_1 - By - c_2\|; \sup_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in \mathcal{C}}} \inf_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in \mathcal{C}}} \|Bx + c_1 - By - c_2\| \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in \mathcal{C}}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in \mathcal{C}}} (\|B(x-y)\| + \|c_1 - c_2\|); \sup_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in \mathcal{C}}} \inf_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in \mathcal{C}}} (\|B(x-y)\| + \|c_1 - c_2\|) \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|B(x-y)\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|B(x-y)\| \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \beta \|x-y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \beta \|x-y\| \right\} = \beta \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).
\end{aligned}$$

Тогда \tilde{T} — сжатие с коэффициентом β .

С учетом (4) верно равенство

$$T^M(\mathcal{X}) = A^{-M}\mathcal{X} + \sum_{k=1}^M(-A^{-k}\mathcal{U}) = \tilde{T}(\mathcal{X}),$$

где

$$B = A^{-M}, \quad C = \sum_{k=1}^M(-A^{-k}\mathcal{U}).$$

Поскольку все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1, то все собственные значения матрицы A^{-1} по модулю строго меньше 1. Тогда согласно [24, теорема 5.6.12] $\|A^{-k}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. По определению предела для $\alpha \in [0; 1)$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такой, что $\|A^{-M}\| < \alpha$. Поскольку справедливо неравенство

$$\|A^{-M}(x - y)\| \leq \|A^{-M}\| \|x - y\| < \alpha \|x - y\|,$$

то A^{-M} является сжатием с коэффициентом $\alpha \in [0; 1)$. Тогда $T^M: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является сжатием с коэффициентом α .

В силу леммы 7 для любого $N \in \mathbb{N}$ верно, что $\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(N + 1)$, также $\mathcal{X}(N)$ — компакт. Тогда согласно [27, следствие A.3.4]

$$(II.5) \quad \rho_H(\mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

С другой стороны, согласно [27, теорема A.3.9] метрическое пространство (\mathbb{K}_n, ρ_H) полное. Поэтому сжимающее отображение \tilde{T} имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{X}^* \in \mathbb{K}_n$, которая может быть найдена методом простой итерации:

$$(II.6) \quad \mathcal{X}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{(\tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T})}_N(\mathcal{X}),$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ произвольный. Выберем $\mathcal{X} = \{0\}$. Тогда с учетом леммы 7

$$\underbrace{(\tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T})}_N(\{0\}) = - \sum_{k=1}^{MN} A^{-k}\mathcal{U} = \mathcal{X}(NM).$$

В силу единственности предельной точки и формул (II.5) и (II.6)

$$\overline{\mathcal{X}_\infty} = \overline{\bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N)} = \mathcal{X}^*.$$

Погрешность в методе простой итерации может быть оценена следующим соотношением [28]:

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу пункта 3 теоремы 2

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}}_\infty, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p^N} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) = R_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}.$$

Тогда в силу определения расстояния Хаусдорфа

$$\mathcal{X}_\infty \subset \overline{\mathcal{X}}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + B_{R_p}(0),$$

где

$$B_{R_1}(0) = \text{conv} \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)}_i^T : r \in \{-R_1, R_1\}, \quad i = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$B_{R_2}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2 \right\},$$

$$B_{R_\infty}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq R_\infty \right\}.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *Авт.* 2003. № 12. С. 17–32.
Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // *Autom. Remote Control.* 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.
2. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // *J. Optim. Theory Appl.* 1988. V. 56. No. 1. P. 67–88.
3. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // *J. Franklin Inst.* 1961. V. 272. No. 3. P. 208–228.
4. *Hamza M.H., Rasmey M.E.* A Simple Method for Determining the Reachable Set for Linear Discrete Systems // *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1971. V. 16. P. 281–282.
5. *Corradini M.L., Cristofaro A., Giannoni F., Orlando G.* Estimation of the Null Controllable Region: Discrete-Time Plants / Control Systems with Saturating Inputs. *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer. 2012. V. 424. P. 33–52.

6. *Hu T., Miller D.E., Qiu L.* Null Controllable Region of LTI Discrete-Time Systems with Input Saturation // *Automatica*. 2002. V. 38. No. 11. P. 2009–2013.
7. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. 1961. Т. 2. С. 521–547.
8. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
10. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
11. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Наука, 2005.
12. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
13. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // *J. SIAM Control*. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
14. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
15. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
16. *Kurzban'skiy A.F., Varaiya P.* Theory and Computational Techniques for Analysis of Discrete-Time Control Systems with Disturbances // *Optim. Method Software*. 2011. V. 26. No. 4–5. P. 719–746.
17. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
18. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // *Int. J. Control*. 1986. V. 43. No. 5. P. 1343–1351.
19. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // *АиТ*. 1965. № 2. С. 193–207.
Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order // *Autom. Remote Control*. 1965. V. 25. No. 9. P. 193–206.
20. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ*. 2015. № 9. С. 3–30.
Ibragimov D.N., Siroitin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.
21. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // *Электрон. журн. Тр. МАИ*. 2015. № 83. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
22. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // *Электрон. журн. Тр. МАИ*. 2016. № 87. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
23. *Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю.* Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // *Моделирование и анализ данных*. 2019. № 2. С. 83–98.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
25. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

26. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 10. С. 3–32.
Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
27. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
28. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 28.03.2022

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ПО ЛАГРАНЖУ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ¹

Показано, что нормы линейного оператора в детерминированном и стохастическом случаях являются оптимальными значениями двойственных по Лагранжу задач. Для линейных нестационарных систем на конечном горизонте принцип двойственности приводит к стохастическим интерпретациям обобщенных H_2 - и H_∞ -норм системы. Рассмотрены стохастические минимаксные задачи фильтрации и управления при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов. Получены уравнения обобщенных H_∞ -субоптимальных регуляторов, фильтров и идентификаторов, обеспечивающих компромисс между дисперсией ошибки на конце интервала наблюдений и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

Ключевые слова: стохастическое минимаксное управление, фильтр Калмана, двойственность по Лагранжу, обобщенное H_∞ -оптимальное управление и фильтрация, обобщенное H_2 -оптимальное управление, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023020022, EDN: OMHKZN

1. Введение

Как известно, существуют две основные концепции в теории управления при наличии неопределенности: стохастическая, когда неопределенные факторы типа начальных условий, возмущений и помех предполагаются случайными и при этом они наделяются некоторыми вероятностными характеристиками такими, например, как математическое ожидание и ковариация, и детерминистская, когда неопределенные факторы предполагаются детерминированными и принимающими значения в некоторых множествах. В первом случае цель состоит в оптимизации функционала качества системы в вероятностном смысле при условии, что вероятностные характеристики или их границы заданы, а во втором — в минимизации максимального значения

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2021-1394).

функционала на множестве значений неопределенных факторов, удовлетворяющих заданным ограничениям. В рамках обеих концепций разработаны эффективные методы решения разнообразных задач линейно-квадратичного оценивания, фильтрации и управления, в том числе задачи с критерием вида H_∞ -нормы для детерминированных и стохастических систем (см., например, [1–5]). Вместе с тем обе концепции имеют свои недостатки: в стохастической парадигме сложно определить вероятностные характеристики неопределенных факторов, а в детерминистской — трудно найти адекватные ограничения для значений неопределенных факторов. Для преодоления этих недостатков, а также для расширения круга решаемых задач и интерпретации результатов, получаемых в одной парадигме, в терминах другой крайне важно выявить взаимосвязь между этими парадигмами.

Надо отметить, что к этой теме обращались неоднократно: связь между рекуррентным методом наименьших квадратов и фильтром Калмана является классическим тому примером [6]. Кроме того, в [7] показано, что стационарный фильтр Калмана является оптимальным не только при случайных помехах типа белого шума, но он также обеспечивает минимум максимального по времени значения евклидовой нормы ошибки при детерминированных помехах с ограниченной энергией. В широко известной статье [8] J.C. Willems привел чисто детерминистскую интерпретацию результатов, полученных в линейно-квадратичной оптимальной стохастической фильтрации и управлении (см. также [9]). А именно, он доказал, что если среди всех детерминированных возмущений, при которых может реализоваться наблюдаемый сигнал, выбрать то, которое имеет наименьшую норму, и подставить это возмущение в уравнения системы, то в результате получатся уравнения, совпадающие с уравнениями оптимального фильтра или регулятора при случайных, нормально распределенных возмущениях.

В данной статье показано, что задача максимизации квадрата евклидовой нормы выхода линейного оператора (преобразования), который отображает детерминированные векторы, удовлетворяющие эллипсоидальному ограничению, и задача максимизации дисперсии выхода этого оператора, отображающего случайные векторы, удовлетворяющие усредненному эллипсоидальному ограничению, являются двойственными по Лагранжу. Для операторов, порождаемых линейными динамическими системами, это приводит к двойственности стохастических и детерминированных минимаксных задач оценивания и управления с критериями вида обобщенных H_2 - и H_∞ -норм. Применение принципа двойственности позволяет сформулировать и решить новые задачи оптимального и робастного управления и фильтрации в стохастической постановке при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов. В работе получены уравнения обобщенных H_∞ -субоптимальных регуляторов, фильтров и идентификаторов, обеспечивающих компромисс между дисперсией ошибки на конце интервала наблюдений и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

2. О двойственности по Лагранжу стохастической и детерминистской парадигм

Пусть два вектора $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ и $\eta \in \mathbb{R}^{n_\eta}$, которые будем называть входом и выходом, связаны линейной зависимостью

$$(2.1) \quad \eta = \Psi \xi,$$

в которой Ψ — детерминированная $(n_\eta \times n_\xi)$ -матрица. Введем обозначения

$$|a|_R^2 = a^T R^{-1} a, \quad \|b\|_{G[t_0, t]}^2 = \sum_{i=t_0}^{t-1} |b(i)|_{G(i)}^2,$$

где $R = R^T > 0$ и $G(t) = G^T > 0$ — весовые матрицы. Определим обобщенную норму оператора Ψ с весовой матрицей $K = K^T > 0$ как

$$(2.2) \quad \|\Psi\|_K^2 = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\eta|^2}{|\xi|_K^2} = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T \Psi^T \Psi \xi}{\xi^T K^{-1} \xi} = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^T).$$

Эта индуцированная обобщенная норма оператора Ψ , которую будем также называть уровнем гашения детерминированных возмущений, равна максимальному значению евклидовой нормы выхода η при всех входах ξ , принадлежащих эллипсоиду $\mathcal{E}_\xi(K) = \{\xi : \xi^T K^{-1} \xi \leq 1\}$, и может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи.

Задача D.

$$(2.3) \quad \gamma_d^2(\Psi) = \max_{\xi} |\eta|^2 : \eta = \Psi \xi, \quad \xi^T K^{-1} \xi \leq 1.$$

Если $\xi = \xi_s$ — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $E \xi_s \xi_s^T = K_\xi$, то ковариационная матрица выхода равна $K_\eta = \Psi K_\xi \Psi^T$, а математическое ожидание квадрата евклидовой нормы выхода равно следу этой матрицы, т.е. $E|\eta|^2 = \text{tr}(\Psi K_\xi \Psi^T)$. При неизвестной ковариационной матрице вектора ξ определим уровень гашения случайных возмущений оператора Ψ как квадратный корень из максимального значения отношения дисперсии выхода к математическому ожиданию квадратичной формы с матрицей K^{-1} входа при всех ненулевых ковариационных матрицах входа K_ξ [10], т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E|\eta|^2}{E|\xi|_K^2} = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{\text{tr} \Psi K_\xi \Psi^T}{\text{tr} K^{-1} K_\xi}.$$

Эта величина, представляющая собой индуцированную норму оператора Ψ , когда ξ и η — случайные векторы с нормами $|\xi|_s = (E \xi^T K^{-1} \xi)^{1/2}$ и $|\eta|_s = (E|\eta|^2)^{1/2}$, может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи.

Задача S.

$$(2.4) \quad \gamma_s^2(\Psi) = \max_{K_\xi \geq 0} \text{tr} \Psi K_\xi \Psi^T : \eta = \Psi \xi, \quad \text{tr} K^{-1} K_\xi \leq 1.$$

Теорема 2.1. Задачи S и D являются двойственными, и уровни гашения случайных и детерминированных возмущений с весовой матрицей K оператора Ψ совпадают со спектральным радиусом ковариационной матрицы выхода при ковариационной матрице входа, равной весовой матрице, т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi) = \gamma_d^2(\Psi) = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^T).$$

Доказательство теоремы 2.1. Запишем функцию Лагранжа для задачи S и выразим оптимальное значение двойственной ей функции как

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_{K_\xi \geq 0} \left[\text{tr} \Psi K_\xi \Psi^T + \lambda(1 - \text{tr} K^{-1} K_\xi) \right] = \min_{\lambda \geq 0} \max_{K_\xi \geq 0} \left[\lambda + \text{tr} K_\xi (\Psi^T \Psi - \lambda K^{-1}) \right].$$

Для того, чтобы эта величина была конечной, должно выполняться неравенство $\Psi^T \Psi - \lambda K^{-1} \leq 0$ и тогда максимум достигается при $K_\xi = 0$. При этом оптимальное значение двойственной задачи совпадает с (2.2). Так как функция является выпуклой и имеет внутреннюю точку, удовлетворяющую ограничению, то оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают [11]. Теорема доказана.

К этому стоит добавить, что образ оператора Ψ или, другими словами, множество достижимости вектора η в (2.1) при всех детерминированных векторах ξ, принадлежащих эллипсоиду $\mathcal{E}_\xi(K)$, может характеризоваться в терминах ковариационной матрицы случайного вектора ξ, как сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2.2. Множество достижимости вектора η в (2.1), когда детерминированный вход ξ принимает значения в эллипсоиде $\mathcal{E}_\xi(K)$ и матрица $K_\eta = \Psi K \Psi^T$ невырожденная, является эллипсоид $\mathcal{E}_\eta(K_\eta)$ с матрицей K_η , совпадающей с ковариационной матрицей случайного вектора η, когда ковариационная матрица случайного вектора ξ равна K.

Доказательство теоремы 2.2. Найдем опорную функцию множества достижимости η в (2.1)

$$\varrho(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{E}_\xi(K)} x^T \eta,$$

которая в случае вектора x единичной длины является верхней гранью проекций x на это множество. Для полученной задачи на условный экстремум запишем функцию Лагранжа

$$L(\xi, \lambda) = x^T \Psi \xi + \lambda(1 - \xi^T K^{-1} \xi).$$

Приравнивая нулю градиент этой функции по ξ, найдем $\xi = (2\lambda)^{-1} K \Psi^T x$ и, подставляя это соотношение в ограничение, получим $2\lambda = (x^T \Psi K \Psi^T x)^{1/2}$. Окончательно имеем $\varrho(x) = (x^T \Psi K \Psi^T x)^{1/2}$, что согласно [12] отвечает опорной функции эллипсоида $\mathcal{E}_\eta(\Psi K \Psi^T)$. Теорема доказана.

Приведенные выше результаты остаются в силе, если случайный вектор ξ имеет ненулевое математическое ожидание $E\xi = \xi_*$. В этом случае уровень гашения случайных возмущений определяется как

$$\gamma_s^2(\Psi) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E|\eta - \Psi\xi_*|^2}{E|\xi - \xi_*|_K^2} = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{\text{tr } \Psi K_\xi \Psi^T}{\text{tr } K^{-1} K_\xi},$$

где $K_\xi = E(\xi - \xi_*)(\xi - \xi_*)^T$, а уровень гашения детерминированных возмущений определяется как

$$\gamma_d^2(\Psi) = \sup_{\xi \neq \xi_*} \frac{|\eta - \Psi\xi_*|^2}{|\xi - \xi_*|_K^2} = \sup_{\xi \neq \xi_*} \frac{(\xi - \xi_*)^T \Psi^T \Psi (\xi - \xi_*)}{(\xi - \xi_*)^T K^{-1} (\xi - \xi_*)} = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^T).$$

Множеством достижимости вектора η в этом случае будет эллипсоид с центром в точке $\eta_* = \Psi\xi_*$ и матрицей $K_\eta = \Psi K \Psi^T$.

Далее применим эти результаты к линейным операторам, которые порождаются линейными динамическими системами.

3. Максимальное уклонение и обобщенная H_2 -норма

Определим линейный оператор $\Psi_2(t)$, который отображает вход $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ в выход $\eta = z(t)$ линейной динамической системы, описываемой уравнениями

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), & x(t_0) &= x_0, \\ z(t) &= C(t)x(t), & t &\in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Так как решение этой системы представимо в виде

$$(3.2) \quad z(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} F(t, i+1)B(i)v(i),$$

где $F(t, i) = C(t)\Phi(t, i+1)B(i)$, $i = t_0, \dots, t-1$ — матричная импульсная переходная функция системы, $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица системы, удовлетворяющая уравнению

$$(3.3) \quad \Phi(t+1, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I,$$

то

$$(3.4) \quad \Psi_2(t) = (C(t)\Phi(t, t_0) \quad F(t, t_0) \quad \dots \quad C(t)B(t-1)).$$

При выборе весовой матрицы блочно-диагонального вида

$$K(t) = \text{diag}(R, G(t_0), \dots, G(t-1)),$$

где $R = R^T > 0$ и $G(i) = G^T(i) > 0$, $i = 0, \dots, t-1$, обобщенная норма этого оператора

$$\|\Psi_2(t)\|_{K(t)}^2 = \sup_{\xi(t) \neq 0} \frac{|\Psi_2(t)\xi(t)|^2}{|\xi(t)|_{K(t)}^2} = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2}$$

представляет собой так называемое максимальное уклонение выхода системы в момент времени t при произвольных детерминированных начальном состоянии и возмущении, удовлетворяющих ограничению

$$(3.5) \quad |\xi(t)|_{K(t)}^2 = |x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 \leq 1,$$

которое будем называть эллипсоидальным. Кроме того, напомним, что обобщенная H_2 -норма системы (3.1) на конечном горизонте $[t_0, t_f]$ с весовыми матрицами R и $G(t)$ определяется как

$$\|H\|_{g^2}^2 = \sup_{x_0, v(t), t \in [t_0, t_f-1]} \frac{\max_{\tau \in [t_0, t]} |z(\tau)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2},$$

т.е. как максимальное по времени из максимальных уклонений выхода [13, 14].

Определим уровень гашения случайных возмущений в системе (3.1) в момент времени t как уровень гашения случайных возмущений оператора $\Psi_2(t)$, т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi_2(t)) = \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E \left(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 \right)},$$

где случайные начальное состояние и возмущения не являются независимыми, а в общем случае представляют собой цветной шум.

Согласно теореме 2.1 уровни гашения случайных и детерминированных возмущений равны $\lambda_{\max}[K_z(t)]$, где $K_z(t)$ — ковариационная матрица выхода системы, когда ее вход $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ имеет ковариационную матрицу $K(t) = \text{diag}(R, G(t_0), \dots, G(t-1))$, т.е. когда ее начальное состояние и возмущения независимы и имеют ковариационные матрицы R и $G(t)$ соответственно. Из уравнений системы получим $K_z(t) = C(t)P(t)C^T(t)$, где $P(t)$ — решение уравнения

$$(3.6) \quad P(t+1) = A(t)P(t)A^T(t) + B(t)G(t)B^T(t)$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. В системе (3.1) уровень гашения случайных возмущений совпадает с максимальным уклонением выхода, т.е.

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|_G^2\right)} = \\ & = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_G^2} = \lambda_{\max}[C(t)P(t)C^T(t)], \end{aligned}$$

где $P(t)$ — решение уравнения (3.6).

Следствие 3.1. Обобщенная H_2 -норма системы (3.1) характеризуется как

$$\|H\|_{g_2}^2 = \max_{t \in [t_0, t_f]} \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|_G^2\right)} = \max_{t \in [t_0, t_f]} \lambda_{\max}[C(t)P(t)C^T(t)].$$

Замечание 1. Из (3.6), (3.7) следует, что уровень гашения случайных возмущений в момент времени t может быть найден как решение следующей задачи полуопределенного программирования:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \min \lambda : Y(i+1) - A(i)Y(i)A^T(i) - B(i)G(i)B^T(i) &\geq 0, \quad i = t_0, \dots, t-1, \\ Y(t_0) = R, \quad C(t)Y(t)C^T(t) &\leq \lambda I. \end{aligned}$$

а обобщенная H_2 -норма — как минимальное $\lambda > 0$, при котором разрешимы неравенства (3.8) при $t = t_f$ и неравенства $C(i)Y(i)C^T(i) \leq \lambda I$ для $i = t_0, \dots, t_f$.

4. Обобщенная H_∞ -норма

Определим линейный оператор Ψ_∞ , для которого в силу системы

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ z(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

выполняется $\eta = \Psi_\infty \xi$, где

$$\eta = \text{col}(z(t_0), \dots, z(t_f-1), S^{1/2}x(t_f)), \quad \xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f-1)),$$

$S = S^T \geq 0$ — заданная матрица. Учитывая (3.2) и (3.3), найдем

$$\Psi_\infty = \begin{pmatrix} C(t_0) & D(t_0) & \cdot & 0 \\ C(t_0+1)\Phi(t_0+1, t_0) & F(t_0+1, t_0) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C(t_f-1)\Phi(t_f-1, t_0) & F(t_f-1, t_0) & \cdot & D(t_f-1) \\ S^{1/2}\Phi(t_f, t_0) & S^{1/2}\Phi(t_f, t_0+1)B(t_0) & \cdot & S^{1/2}B(t_f-1) \end{pmatrix}.$$

При выборе весовой матрицы $K = \text{diag}(R, G(t_0), \dots, G(t_f - 1))$ обобщенная норма этого оператора совпадает с ее обобщенной H_∞ -нормой, т.е.

$$\|\Psi_\infty\|_K^2 = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\Psi_\infty \xi|^2}{|\xi|_K^2} = \sup_{x(t_0), v(\tau), \tau \in [t_0, t_f - 1]} \frac{\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x(t_f)^T S x(t_f)}{|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2} = \|H\|_{g_\infty}^2,$$

где $S = S^T \geq 0$ — заданная весовая матрица. Таким образом, уровень гашения детерминированных возмущений системы (4.1) находится как решение следующей задачи.

Задача D $_\infty$. В предположении, что начальное и внешнее возмущения в системе (4.1) образуют последовательность детерминированных векторов $\xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$ найти

$$(4.2) \quad \gamma_d^2(\Psi_\infty) = \max_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t_f - 1]} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |z(t)|^2 + x^T(t_f) S x(t_f) : |x_0|_R^2 + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |v(t)|_{G(t)}^2 \leq 1.$$

В свою очередь определим уровень гашения случайных возмущений

$$(4.3) \quad \gamma_s^2(\Psi_\infty) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E \left[\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f) \right]}{E \left[|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2 \right]},$$

где K_ξ — ковариационная матрица вектора $\xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$. Согласно теореме 2.1 уровни гашения случайных и детерминированных возмущений равны между собой, т.е. $\gamma_s^2(\Psi_\infty) = \|H\|_{g_\infty}^2$.

Покажем, что уровень гашения случайных возмущений может быть найден как решение задачи полуопределенного программирования, в которой переменными являются определенные ковариационные матрицы. Обозначая

$$(4.4) \quad E \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T = W(t), \quad M = (I \ 0), \quad H = (0 \ I)$$

и опуская аргумент t там, где это не вызывает сомнений, из (4.1) получим, что матрицы $W(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$(4.5) \quad MW(t+1)M^T = (A \ B)W(t)(A \ B)^T, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1.$$

Выразим математические ожидания в (4.3) в терминах матриц $W(t)$ и сформулируем следующую задачу.

Задача S_∞ .

$$(4.6) \quad \gamma_s^2(\Psi_\infty) = \max_{W(t) \geq 0, t \in [t_0, t_f]} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr}(C \ D)W(t)(C \ D)^T + \text{tr} SMW(t_f)M^T : \\ \text{tr} R^{-1}MW(t_0)M^T + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} G^{-1}HW(t)H^T \leq 1,$$

где матрицы $W(t)$ удовлетворяют уравнениям (4.5).

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Теорема 4.1. Задачи S_∞ и D_∞ являются двойственными по Лагранжу и их оптимальные значения совпадают с обобщенной H_∞ -нормой системы (4.1), т.е.

$$\|H\|_{g_\infty}^2 = \sup_{W(t) \geq 0, t \in [t_0, t_f]} \frac{\sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr}(C \ D)W(t)(C \ D)^T + \text{tr} SMW(t_f)M^T}{\text{tr} R^{-1}MW(t_0)M^T + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} G^{-1}HW(t)H^T},$$

которая вычисляется как

$$(4.7) \quad \|H\|_{g_\infty}^2 = \min_{\lambda \geq 0, X(t)} \lambda : \\ \begin{pmatrix} A^T X(t+1)A - X(t) & * & * \\ B^T X(t+1)A & B^T X(t+1)B - G^{-1} & * \\ C & D & -\lambda I \end{pmatrix} \leq 0, \\ X(t_0) = R^{-1}, \quad \begin{pmatrix} X(t_f) & * \\ S^{1/2} & \lambda I \end{pmatrix} \geq 0, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1.$$

Теперь перейдем к задачам фильтрации и управления.

5. Фильтрация

5.1. Обобщенная H_2 -оптимальная фильтрация

Рассмотрим задачу фильтрации для линейного дискретного объекта, заданного разностными уравнениями:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \\ z(t) &= C_z(t)x(t), & t &= t_0, \dots, t_f, \end{aligned}$$

в которых $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние объекта, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — измеряемый выход, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ — целевой выход, x_0 и $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ — начальное состояние и внешнее

возмущение, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — заданные матричные функции соответствующих размерностей. Для оценивания неизмеряемого состояния объекта по измерениям выхода определим фильтр, описываемый уравнением

$$(5.2) \quad \begin{aligned} x_f(t+1) &= A(t)x_f(t) + \Theta(t)[y(t) - C(t)x_f(t)], & x_f(0) &= 0, \\ z_f(t) &= C_z(t)x_f(t), \end{aligned}$$

в котором $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние фильтра, $z_f(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ — оценка целевого выхода, $\Theta(t)$ — матрица параметров фильтра. Обозначая ошибки оценки состояния $e(t) = x(t) - x_f(t)$ и оценки выхода $e_z(t) = z(t) - z_f(t)$, из (5.1) и (5.2) получим уравнения ошибок фильтрации

$$(5.3) \quad \begin{aligned} e(t+1) &= A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t), & e(0) &= x_0, \\ e_z(t) &= C_z(t)e(t), \end{aligned}$$

где $A_c(t) = A(t) - \Theta(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - \Theta(t)D(t)$. Допустим, что ковариационная матрица $K_{\xi(t)}$ случайного вектора начального состояния и возмущений $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ неизвестна. Найдем параметры $\Theta_*(t)$ фильтра (5.2), при которых уровень гашения случайных возмущений с весовыми матрицами $R > 0$ и $G(i) > 0$, $i = 1, \dots, t-1$, т.е.

$$(5.4) \quad J_s(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|e_z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2)},$$

где Θ_i^j обозначает набор $\Theta(i), \dots, \Theta(j)$, будет минимальным.

Согласно теореме 3.1 такой фильтр обеспечивает минимум максимальному уклонению ошибки при детерминированных факторах, т.е.

$$J_d(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|e_z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2},$$

и совпадает с фильтром, который минимизирует спектральный радиус ковариационной матрицы выхода $e_z(t)$ уравнения (5.3) при условии, что начальное состояние и возмущения образуют последовательность случайных независимых векторов с ковариационными матрицами R и $G(t)$. Это значит, что его параметры находятся из условия $\min_{\Theta} \lambda_{\max}(K_z(\Theta))$, где $K_z(\Theta) = C_z(t)P(t)C_z^T(t)$ и $P(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} P(t+1) &= [A(t) - \Theta(t)C(t)]P(t)[A(t) - \Theta(t)C(t)]^T + \\ &+ [B(t) - \Theta(t)D(t)]G(t)[B(t) - \Theta(t)D(t)]^T \end{aligned}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Ради упрощения формул предположим, что возмущения в объекте и в измерении выхода между собой независимы и что матрицы $D(t)$ полного ранга, т.е.

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} B(t) \\ D(t) \end{pmatrix} G(t) \begin{pmatrix} B(t) \\ D(t) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} G_B(t) & 0 \\ 0 & G_D(t) \end{pmatrix}, \quad G_D(t) > 0.$$

Выделяя в правой части последнего уравнения полный квадрат по $\Theta(t)$, найдем

$$(5.6) \quad \Theta_*(t) = A(t)P_2(t)C^T(t) [C(t)P_2(t)C^T(t) + G_D(t)]^{-1},$$

где матрица $P_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$P_2(t+1) = A(t)P_2(t)A^T(t) - \\ - A(t)P_2(t)C^T(t) [C(t)P_2(t)C^T(t) + G_D(t)]^{-1} C(t)P_2(t)A^T(t) + G_B(t)$$

или, применяя известную формулу обращения матриц, (см., например, [15, с. 254]), уравнению

$$(5.7) \quad P_2(t+1) = A(t) [P_2^{-1}(t) + C^T(t)G_D^{-1}(t)C(t)]^{-1} A^T(t) + G_B(t)$$

с начальным условием $P_2(t_0) = R$.

Заметим, что найденный фильтр совпадает с фильтром Калмана [2] для оценки состояния системы (5.1) при случайных независимых начальном состоянии и возмущении с ковариационными матрицами, равными весовым матрицам R и $G(t)$. Другими словами, фильтр Калмана, построенный для системы со случайными независимыми начальным состоянием и возмущениями с заданными ковариационными матрицами R и $G(t)$, в дополнении к тому, что обеспечивает минимум максимальному отклонению ошибки при детерминированных факторах, удовлетворяющих ограничению

$$(5.8) \quad |x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2 \leq 1,$$

также доставляет минимум уровню гашения случайных возмущений (5.4) при соответствующих весовых матрицах R и $G(t)$. Кроме того, согласно теореме 2.2 множество достижимости ошибки $e_z(t)$ при условии (5.8) составляет эллипсоид $\mathcal{E}_z[C_z(t)P_2(t)C_z^T(t)]$ и, следовательно, неизвестный вектор $z(t)$ находится в таком же эллипсоиде с центром в $z_f(t)$.

Параметры $\Theta_{g2}(t)$ обобщенного H_2 -оптимального фильтра, при котором минимизируется максимальная из дисперсий ошибок оценок на всем интервале, т.е.

$$J_{g2}(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \max_{t \in [t_0, t_f]} \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|e_z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2)},$$

находятся стандартным образом с помощью линейных матричных неравенств (3.8) (см., например, [15]), в которых нужно A заменить на $A - \Theta(t)C$, B на $B - \Theta(t)D$ и обозначить $X(t+1)\Theta(t) = Z(t)$. Тогда параметры фильтра вычисляются как $\Theta_{g2}(t) = X_*^{-1}(t+1)Z_*(t)$, где звездочками обозначены решения этих неравенств.

5.2. Обобщенная H_∞ -оптимальная фильтрация

Рассмотрим теперь обобщенную H_∞ -оптимальную фильтрацию в стохастической постановке, когда ковариационная матрица K_ξ вектора начального состояния и возмущений $\xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$ в (5.1) неизвестна и требуется найти параметры фильтра (5.2), при которых на траекториях системы (5.3) минимизируется функционал

$$J_{g\infty}(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E \left[\|e_z\|_{[t_0, t_f]}^2 + e_x^T(t_f) S e_x(t_f) \right]}{E \left[|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2 \right]}.$$

Теорема 5.1. Обобщенная H_∞ -норма системы (5.3), описывающей динамику ошибки оценки состояния (5.1), меньше λ , т.е. $J_{g\infty} < \lambda$, если фильтр (5.2) имеет параметры

$$(5.9) \quad \Theta_\infty(t) = A(t) \left[P_\infty^{-1}(t) + C^T(t) G_D^{-1}(t) C(t) - \right. \\ \left. - \lambda^{-1} C_z^T(t) C_z(t) \right]^{-1} C^T(t) G_D^{-1}(t),$$

где

$$(5.10) \quad P_\infty(t+1) = A(t) \left[P_\infty^{-1}(t) + C^T(t) G_D^{-1}(t) C(t) - \right. \\ \left. - \lambda^{-1} C_z^T(t) C_z(t) \right]^{-1} A^T(t) + G_B(t),$$

$P_\infty(t_0) = R$, и для всех t выполнено $C_z(t) P_\infty(t) C_z^T(t) < \lambda I$ и $S^{1/2} P_\infty(t_f) S^{1/2} < \lambda I$.

Уравнения (5.9) и (5.10) определяют так называемые центральные обобщенные H_∞ -субоптимальные решения. Эти уравнения приведены в компактной форме и могут быть записаны в виде, не содержащем обратных матриц $P_\infty^{-1}(t)$, если применить формулу обращения матриц. Параметры обобщенного H_∞ -субоптимального фильтра, при котором $J_{g\infty} < \lambda$, в том числе и с минимальным λ , могут быть также получены стандартным образом, решая линейные матричные неравенства (4.7).

Заметим еще, сравнивая (5.10) и (5.7), что при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $P_\infty(t) \rightarrow P_2(t)$. Переходя в (5.9) и (5.10) к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ и применяя формулу обращения матриц, нетрудно убедиться в том, что в пределе $\Theta_\infty(t)$ совпадает с $\Theta_*(t)$, заданной в (5.6), а обобщенный H_∞ -субоптимальный фильтр переходит в фильтр Калмана, построенный для системы (5.1), в которой независимые начальное состояние и возмущения имеют ковариационные матрицы R и $G(t)$ соответственно. Задавая $0 < \lambda < \infty$, можно добиться компромисса между дисперсией ошибки оценки состояния в определенный момент времени и суммой дисперсий ошибок оценок целевого выхода на всем предшествующем интервале времени.

5.3. Оптимальное оценивание параметров линейной регрессии

В качестве приложения рассмотрим задачу оптимального оценивания неизвестных параметров линейной регрессии

$$(5.11) \quad \chi(t) = \Phi(t)\zeta_0 + v(t), \quad t = t_0, \dots, t_f,$$

где $\chi(t)$ — вектор измерений, $\Phi(t)$ — матрица регрессоров, ζ_0 — вектор неизвестных параметров, $v(t)$ — вектор помех измерений. Представим ее как задачу построения оптимального наблюдателя состояния системы

$$(5.12) \quad \zeta(t+1) = \zeta(t), \quad \zeta(t_0) = \zeta_0$$

вида

$$\widehat{\zeta}(t+1) = \widehat{\zeta}(t) + \Theta(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], \quad \widehat{\zeta}(t_0) = \zeta_*.$$

При этом ошибка $\widetilde{\zeta}(i) = \zeta_0 - \widehat{\zeta}(i)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\zeta}(i+1) = [I - \Theta(i)\Phi(i)]\widetilde{\zeta}(i) - \Theta(i)v(i), \quad \widetilde{\zeta}(t_0) = \zeta_0 - \zeta_*, \quad i = t_0, \dots, t-1.$$

Нетрудно проверить, что при неизвестной ковариационной матрице вектора, составленного из начальной ошибки $\zeta_0 - \zeta_*$ и помех в измерениях на всем интервале, матрица параметров оптимального фильтра (5.2), (5.6), обеспечивающего для уравнения ошибки минимум уровня гашения случайных возмущений в момент времени t , равна $\Theta_*(t) = P_2(t)\Phi(t)[\Phi(t)P_2(t)\Phi^T(t) + G(t)]^{-1}$. Оптимальные оценки тогда определяются рекуррентными уравнениями

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \widehat{\zeta}(t+1) &= \widehat{\zeta}(t) + P_2(t+1)\Phi^T(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], \quad \widehat{\zeta}(t_0) = \zeta_*, \\ P_2^{-1}(t+1) &= P_2^{-1}(t) + \Phi^T(t)G^{-1}(t)\Phi(t), \quad P_2(t_0) = R. \end{aligned}$$

Как хорошо известно, эти уравнения описывают рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов, а также фильтр Калмана для оценки состояния системы (5.12) при ковариациях $E\zeta_0\zeta_0^T = R$ и $E v(t)v^T(t) = G(t)$, и оценка $\widehat{\zeta}(t)$ минимизирует критерий

$$J_t(\zeta) = (\zeta - \zeta_*)^T R^{-1}(\zeta - \zeta_*) + \sum_{i=0}^{t-1} (\chi(i) - \Phi(i)\zeta)^T G^{-1}(i)(\chi(i) - \Phi(i)\zeta).$$

Таким образом, метод наименьших взвешенных квадратов определяет оценку, которая минимизирует уровень гашения случайных возмущений при соответствующих весовых матрицах и которая согласно принципу двойственности минимизирует максимальное отклонение ошибки при неизвестных детерминированных параметрах и помехах, удовлетворяющих ограничению

$$(5.14) \quad |\zeta_0 - \zeta_*|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2 \leq 1, \quad t \in [t_0, t_f].$$

И, наконец, построим обобщенный H_∞ -субоптимальный фильтр для оценки неизвестных параметров в линейной регрессии (5.11), при котором сумма квадратов ошибок на всем рассматриваемом интервале времени не превышает с множителем λ взвешенную сумму квадратов начального отклонения оценки и помех измерений. В соответствии с (5.9), (5.10) параметры этого фильтра будут определяться как

$$\Theta_\infty(t) = [P_\infty(t) + \Phi^T(t)G^{-1}(t)\Phi(t) - \lambda^{-1}I]^{-1} \Phi^T(t)G^{-1}(t),$$

а сам фильтр при условии $P_\infty(t) < \lambda I$ и $S^{1/2}P_\infty(t_f)S^{1/2} < \lambda I$ определяется рекуррентными уравнениями

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \widehat{\zeta}(t+1) &= \widehat{\zeta}(t) + P_\infty(t+1)\Phi^T(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], & \widehat{\zeta}(t_0) &= \zeta_*, \\ P_\infty^{-1}(t+1) &= P_\infty^{-1}(t) + \Phi^T(t)G^{-1}(t)\Phi(t) - \lambda^{-1}I, & P_\infty(t_0) &= R. \end{aligned}$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ уравнения обобщенного H_∞ -оптимального фильтра переходят в рекуррентные уравнения метода наименьших взвешенных квадратов. За счет выбора подходящего значения λ здесь также можно обеспечить компромисс между дисперсией ошибки в конце интервала и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

6. Управление

Рассмотрим задачу управления для линейного дискретного объекта, заданного разностными уравнениями

$$(6.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B(t)v(t), & x(0) &= x_0, \\ z(t) &= C_z(t)x(t) + D_z(t)u(t), & t &= t_0, \dots, t_f. \end{aligned}$$

Допустим, что начальное состояние и внешние возмущения представляют собой случайный вектор $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей $K_{\xi(t)}$ и цель управления вида $u(t) = \Theta(t)x(t)$ состоит в минимизации функционала

$$J_s(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2)}.$$

Согласно теореме 3.1 такое управление обеспечивает минимум максимальному уклонению выхода при детерминированных факторах, т.е.

$$J_d(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2},$$

и совпадает с управлением, которое минимизирует спектральный радиус ковариационной матрицы выхода системы (6.1) в момент времени t при условии, что начальное состояние и возмущения образуют последовательность

случайных независимых векторов с ковариационными матрицами R и $G(i)$, $i = t_0, \dots, t-1$. Параметры такого закона управления могут быть найдены, решая задачу полуопределенного программирования при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами, получаемыми стандартным образом из (3.8). Заметим, что задачи, в которых цель управления формулировалась в терминах ковариационной матрицы выхода в стационарном режиме на бесконечном горизонте, рассматривались в [16].

Пусть теперь начальное состояние и возмущения на всем интервале $[t_0, t_f]$ образуют случайный вектор $\xi = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей K_ξ . Цель управления вида $u(t) = \Theta(t)x(t)$ состоит в минимизации суммарной “энергии” выхода на всем интервале с учетом конечного состояния при условии ограниченности суммарной “энергии” начального состояния и внешнего возмущения на всем интервале. При этом “энергия” измеряется математическим ожиданием квадратичной формы соответствующего вектора с некоторой заданной весовой матрицей. В соответствии с этим оптимизируемый функционал имеет вид

$$(6.2) \quad J_s(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E \left[\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f) \right]}{E \left[|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2 \right]},$$

где $S = S^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ и $G(t) = G^T(t) > 0$ — заданные весовые матрицы. Заметим, что в классической задаче линейно-квадратического управления в стохастической постановке предполагается, что последовательность векторов начального состояния и возмущений образует последовательность независимых случайных векторов с заданными ковариационными матрицами.

Согласно теореме 4.1 поставленная задача двойственна задаче управления объектом (6.1), в котором начальное состояние и внешние возмущения образуют произвольную детерминированную последовательность векторов, а функционал имеет вид обобщенной H_∞ -нормы с соответствующими весовыми матрицами

$$(6.3) \quad J_d(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t_f-1]} \frac{\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f)}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2}.$$

Параметры искомого закона управления находятся на основе решения задачи полуопределенного программирования, получаемой стандартным образом из (4.7).

7. Заключение

Установлен принцип двойственности для линейных операторов в детерминированном и стохастическом случаях. Этот результат оказывается полезным, так как связывает между собой стохастическую и детерминистскую

парадигмы в задачах управления и фильтрации. В частности, если детерминированные начальное состояние и возмущение в линейной нестационарной системе на конечном горизонте удовлетворяют эллипсоидальному ограничению с заданными весовыми матрицами, то максимальное по времени из максимальных уклонений выхода, т.е. обобщенная H_2 -норма системы, и максимальное значение интегрального квадратичного функционала, т.е. обобщенная H_∞ -норма системы, совпадают соответственно с максимальным по времени из максимальных значений дисперсий выхода и с максимальным значением усредненного интегрального квадратичного функционала при случайных начальном состоянии и возмущении с неизвестными ковариационными матрицами, удовлетворяющими усредненному эллипсоидальному ограничению. Обе эти нормы также характеризуются как спектральные нормы ковариационных матриц выходов линейных операторов при случайных независимых начальном состоянии и возмущениях в системе, ковариационные матрицы которых совпадают с соответствующими весовыми матрицами эллипсоидального ограничения.

В статье для линейных динамических систем сформулированы новые минимаксные задачи в стохастической постановке при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов и показано, что их решения совпадают с решениями двойственных детерминированных минимаксных задач. Так, минимаксное стохастическое управление при неизвестной совместной ковариационной матрице начального состояния и возмущений, имеющей ограниченный след, совпадает с детерминированным обобщенным H_∞ -оптимальным управлением. Оптимальный фильтр, минимизирующий уровень гашения случайных начального состояния и возмущений с неизвестной совместной ковариационной матрицей, совпадает с оптимальным фильтром, минимизирующим максимальное уклонение ошибки фильтрации при детерминированных начальном состоянии и возмущениях, удовлетворяющих эллипсоидальному ограничению с заданными весовыми матрицами. Этот фильтр оказывается фильтром Калмана, построенным для данной системы при случайных независимых начальном состоянии и возмущениях, ковариационные матрицы которых равны соответствующим весовым матрицам эллипсоидального ограничения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 4.1. Запишем функцию Лагранжа для задачи S_∞ и найдем двойственную ей функцию:

$$\min_{\lambda \geq 0, X(t)} \max_{W(t) \geq 0} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr}(C(t) D(t))W(t)(C(t) D(t))^T + \text{tr} SMW(t_f)M^T - \\ - \lambda \left[\text{tr} R^{-1} MW(t_0)M^T + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} G^{-1}(t)HW(t)H^T - 1 \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr} \left[(A(t) \ B(t))W(t)(A(t) \ B(t))^T - MW(t+1)M^T \right] X(t+1) = \\
& = \min_{\lambda \geq 0, X(t)} \max_{W(t) \geq 0} \left\{ \lambda + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr} W(t) \left[(C(t) \ D(t))^T (C(t) \ D(t)) + \right. \right. \\
& + (A(t) \ B(t))^T X(t+1)(A(t) \ B(t)) - M^T X(t)M - \lambda H^T G^{-1}(t)H \left. \right] + \\
& \left. + \operatorname{tr} W(t_f)M^T [S - X(t_f)]M \right\},
\end{aligned}$$

где $X(t_0) = \lambda R^{-1}$. Для того, чтобы двойственная функция была конечной, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
(\text{П.1}) \quad & (C(t) \ D(t))^T (C(t) \ D(t)) + (A(t) \ B(t))^T X(t+1)(A(t) \ B(t)) - \\
& - M^T X(t)M - \lambda H^T G^{-1}(t)H \leq 0, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1, \quad S - X(t_f) \leq 0,
\end{aligned}$$

поскольку в противном случае $W(t)$ может быть выбрана так, что соответствующее слагаемое становится неограниченным. Таким образом, неравенства (П.1) должны быть выполнены, но тогда минимум в минимаксной задаче достигается при $W(t) = 0$, $t = t_0, \dots, t_f$ и мы приходим к двойственной задаче: найти $\min \lambda$ при ограничениях (П.1), которые с учетом введенных обозначений и замены $X(t)$ на $\lambda X(t)$ записываются в виде неравенств (4.7). Так как функция является выпуклой и имеется внутренняя точка, удовлетворяющая ограничениям, то значения прямой и двойственной задач совпадают.

Определим функцию $V(t) = x^T(t)X(t)x(t)$, где $X(t)$ удовлетворяет неравенствам (4.7). Приращение этой функции по траектории системы (4.1) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
(\text{П.2}) \quad & \Delta V(t) + \lambda^{-1}|z(t)|^2 - v^T(t)G^{-1}v(t) \leq 0, \\
& V(t_0) = x^T(t_0)R^{-1}x(t_0), \quad V(t_f) \geq \lambda^{-1}x^T(t_f)Sx(t_f).
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_f-1} |z(t)|^2 + x^T(t_f)Sx(t_f) \leq \lambda + \lambda \left[x(t_0)R^{-1}x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} v^T(t)G^{-1}(t)v(t) - 1 \right],$$

т.е. минимальное значение λ , при котором разрешимы неравенства (4.7), является оптимальным значением в задаче D_∞ и совпадает с обобщенной H_∞ -нормой системы (4.1).

Доказательство теоремы 5.1. Из теоремы 4.1 применительно к системе (5.3) следует, что если выполнены неравенства (4.7), в которых матрица A заменена $A - \Theta C$ и B заменена $B - \Theta C$, то обобщенная H_∞ -норма

системы меньше λ . Применяя лемму Шура, преобразуем эти неравенства к виду

$$Y(t+1) - (A - \Theta C)Y(t)(A - \Theta C)^T - (B - \Theta D)G(B - \Theta D)^T - \\ - (A - \Theta C)Y(t)C_z^T(\lambda I - C_z Y(t)C_z^T)^{-1}C_z Y(t)(A - \Theta C)^T \geq 0$$

при условии, что $C_z Y(t)C_z^T < \lambda I$. Выделяя в левой части этого неравенства полный квадрат по Θ и учитывая обозначения (5.5), в результате некоторых манипуляций получим

$$Y(t+1) - A [Y^{-1}(t) + C^T G_D^{-1} C - \lambda^{-1} C_z^T C_z]^{-1} A^T - G_B - \\ - (\Theta - \Theta_\infty) [Y^{-1}(t) + C^T G_D^{-1} C - \lambda^{-1} C_z^T C_z] (\Theta - \Theta_\infty)^T \geq 0,$$

где Θ_∞ задана в (5.9) при $P(t) = Y(t)$. Отсюда следует, что если параметры фильтра определяются формулой (5.9), в которой матрица $P(t)$ удовлетворяет уравнению (5.10), то $\gamma_s^2 < \lambda$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear Estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
4. Hinrichsen D., Pritchard A.J. Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
5. Petersen I.R., Ugrinovskii V.A., Savkin A.V. Robust Control Design Using H_∞ -Methods. London: Springer-Verlag, 2000.
6. Schweppe F.C. Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
7. Wilson D. Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. No. 5. P. 583–585.
8. Willems J.C. Deterministic least squares filtering. Journal of Econometrics. 2004. V. 118. P. 341–373.
9. Buchstaller D., Liu J., French M. The Deterministic Interpretation of the Kalman Filter // Int. J. Control. 2021. V. 94. No. 11. P. 3226–3236.
10. Коган М.М. Оптимальное оценивание и фильтрация при неизвестных ковариациях случайных факторов // АиТ. 2014. № 11. С. 88–109.
11. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2004.
12. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
13. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. V. 34. No. 1. P. 94–97.

14. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // *АиТ.* 2019. № 12. С. 3–24.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
16. *Hsieh C., Skelton R.* All Covariance Controllers for Linear Discrete-Time Systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1990. V. 35. No. 8. P. 908–915.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 24.08.2022

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. С.Т. АЛИЕВА, канд. физ.-мат. наук (saadata@mail.ru)
(Бакинский государственный университет;
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ НЕЛИНЕЙНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача оптимального управления объектом, описываемая системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка. Такие задачи представляют собой дискретный аналог задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями дробного порядка. При предположении открытости области управления с помощью модифицированного варианта метода приращения вычислены первая и вторая вариации функционала качества. Установлены соответственно необходимое условие оптимальности первого порядка (аналог уравнения Эйлера) и общее необходимое условие оптимальности второго порядка. С использованием представлений решения линеаризованных разностных уравнений дробного порядка из общего условия оптимальности второго порядка получены необходимые условия оптимальности, выраженные через параметры исходной задачи. С помощью выбора допустимой вариации управления специальным образом сформулировано поточечное необходимое условие оптимальности классических экстремалей.

Ключевые слова: допустимое управление, оптимальное управление, открытое множество, разностное уравнение дробного порядка, дробный оператор, дробная сумма, аналог уравнения Эйлера.

DOI: 10.31857/S0005231023020034, EDN: OMMDXO

1. Введение

Дробное исчисление играет важную роль во многих областях науки и техники. Известно, что (см., например, [1]) дробное интегро-дифференциальное исчисление берет свое начало с обсуждения в переписке между Г. Лопиталем и Г. Лейбницем о смысле производной порядка $\frac{1}{2}$. Но идея использования дробной разности появилась относительно недавно (см., например, [2–5]).

Дробное исчисление также находит применение в задачах оптимального управления, описываемых разностными уравнениями дробного порядка [6–8].

Исходя из теоретических и практических приложений разработка качественной теории задач оптимального управления, описываемых различными

разностными уравнениями дробного порядка, также является актуальной. Отметим, что теория необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, описываемых разными разностными уравнениями дробного порядка, очень мало разработана.

С учетом вышесказанного в предлагаемой работе изучается одна задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений дробного порядка [2, 3]. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [9, 10] и выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

2. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Приведем некоторые понятия и определения, которые в дальнейшем будут использованы.

Следующие определения, являясь стандартными [3–6], служат основой для определения разностей дробного порядка.

Пусть N множество натуральных чисел вместе с нулем. Для $a \in Z$ введем следующие обозначения: $N_a^+ = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$, $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$.

Определение 1. Дробная сумма порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{-\alpha}u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j + \alpha - 1}{j} u(n - j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n - j + \alpha - 1}{n - j} u(j),$$

Δ^α дробный оператор порядка α определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha u(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j + \alpha - 1}{j} \Delta u(n - j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n - j - \alpha - 1}{n - j} u(j) - \binom{n - \alpha - 1}{n - 1} u(0). \end{aligned}$$

Здесь биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a - n + 1)\Gamma(n + 1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Пусть для любого $x, y \in R$, $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ — гамма-функция, для которой выполняется тождество

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

Заметим, что дробную сумму и дробный оператор порядка α можно определить еще и следующим образом.

Пусть a произвольное действительное число и $b = k + a$, здесь $k \in N$, $k \geq 2$; $T = \{a, a + 1, \dots, b\}$, $T^k = \{a, a + 1, \dots, b - 1\}$, а \mathbb{T} — множество функций, определенных на T .

Определение 2. Пусть для $f \in \mathbb{T}$ — левая и правая дробные суммы порядка $\alpha > 0$ определяются соответственно следующим образом:

$${}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{\alpha-1} f(s),$$

$${}_t\Delta_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=t+\alpha}^b (s - \sigma(t))^{\alpha-1} f(s).$$

Определение 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\mu = 1 - \alpha$, тогда для функции $f \in \mathbb{T}$ левые и правые дробные операторы порядка α определяются следующим образом:

$${}_a\Delta_t^\alpha f(t) = \Delta \left({}_a\Delta_t^{-\mu} f(t) \right),$$

$${}_t\Delta_b^\alpha f(t) = -\Delta \left({}_t\Delta_b^{-\mu} f(t) \right).$$

Приведем некоторые известные свойства дробной суммы и дробной разности:

1. $\Delta^\alpha \Delta^\beta f(t) = \Delta^{\alpha+\beta} f(t)$;
2. $\Delta^{-\alpha} \Delta^\alpha f(t) = f(t) - f(0)$;
3. $\Delta^\alpha \Delta^{-\alpha} f(t) = f(t)$;
4. $\Delta^\alpha f(0) = 0$ и $\Delta^\alpha f(1) - f(0) = \Delta f(1)$.

Имеет место (см., например, [6])

Теорема 1 (о дробном суммировании по частям). Пусть f и g — неотрицательные функции с действительными значениями, определенными на T^k и T соответственно. Если $0 < \alpha \leq 1$ и $\mu = 1 - \alpha$, то

$$\sum_{t=a}^{b-1} f(t) {}_a\Delta_t^\alpha g(t) = f(b-1)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{t=a}^{b-2} {}_t\Delta_b^\alpha f(t) g^\sigma(t) +$$

$$+ \frac{\mu}{\Gamma(\mu+1)} g(a) \left(\sum_{t=a}^{b-1} (t + \mu - \alpha)^{(\mu-1)} f(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{b-1} (t + \mu - \sigma(\alpha))^{(\mu-1)} f(t) \right).$$

Рассмотрим систему линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка

$$(1) \quad \Delta^\alpha y(t+1) = A(t)y(t) + g(t)$$

с начальными условиями

$$(2) \quad y(t) = y_0.$$

Здесь $y = (y_1, \dots, y_n)'$ — n -мерный вектор-столбец, $g = (g_1, \dots, g_n)'$ — заданный n -мерный вектор, $y_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})'$ — заданный постоянный вектор столбец, t_0, t_1 — заданные числа, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ — заданная $n \times n$ -дискретная матричная функция.

Задача (1)–(2) является дискретным аналогом задачи Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Имеет место

Теорема 2 [2]. Решение $y(t)$ системы линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка (1)–(2) допускает представление

$$y(t) = y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, j) A(j)] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j) f(j) \times \\ \times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) A(k)].$$

Здесь

$$R_\alpha(t, j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

3. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$(3) \quad S(u) = \varphi(x(t_1))$$

при следующих ограничениях

$$(4) \quad u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\},$$

$$(5) \quad \Delta^\alpha x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T,$$

$$(6) \quad x(t_0) = x_0.$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор фазовых переменных, $u(t)$ — r -мерный дискретный вектор управляющих воздействий, U — заданное непустое ограниченное и открытое множество, числа t_0, t_1 и постоянный вектор x_0 заданы,

$f(t, x, u)$ — заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, $\varphi(x)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $\Delta^\alpha x(t)$, $0 < \alpha \leq 1$ — дробный оператор порядка α [11, 12].

Управляющую функцию назовем допустимым управлением, если она удовлетворяет ограничению (4).

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении дискретный аналог задачи Коши, т.е. задача (5)–(6), имеет единственное решение.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (3) при ограничениях (4)–(6), называется оптимальным управлением, а пара $(u(t), x(t))$ — оптимальным процессом.

4. Формула приращения критерия качества

Пусть $(u(t), x(t))$ — фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ — произвольные допустимые процессы.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} H(t, x, u, \psi) &= \psi'(t)f(t, x, u), \\ H_x[t] &\equiv H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ H_{xx}[t] &\equiv H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ H_u[t] &\equiv H_u(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ f_x[t] &\equiv f_x(t, x(t), u(t)), \\ f_u[t] &\equiv f_u(t, x(t), u(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\psi(t)$ — пока неизвестный n -мерный вектор-столбец, а $H(t, x, u, \psi)$ — функция Гамильтона–Понтрягина для рассматриваемой задачи оптимального управления (3)–(6).

Тогда по схеме, аналогичной схеме из [11, 12], получаем

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \\ &+ \psi'(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} t \Delta^\alpha_{\rho(t_1)} \psi(t-1) \Delta x(t) - \\ (7) \quad &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))]. \end{aligned}$$

С помощью полученного разложения (7) будет доказано необходимое условие оптимальности первого порядка.

При сделанных предположениях, используя формулу Тейлора, формулу приращения (7) функционала $S(u)$, соответствующую допустимым управле-

ниями $\bar{u}(t)$ и $u(t)$, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S(u) = & \varphi_x(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \\
& + \psi'(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-2} t \Delta^\alpha \rho(t_1) \psi'(t-1) \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H'_x[t] \Delta x(t) + H'_u[t] \Delta u(t)] - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) + \Delta x'(t) H_{xu}[t] \Delta u(t) + \\
& + 2\Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t) + \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t)] + \\
(8) \quad & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2.
\end{aligned}$$

Здесь $\|\alpha\|$ — норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ — величина более высокого порядка α , т.е. $o(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Теперь предположим, что $\psi(t)$ является решением следующей системы линейных разностных уравнений дробного порядка:

$$(9) \quad \begin{cases} {}_t \Delta^\alpha \rho(t_1) \psi'(t-1) = H_x[t], & t = t_1 - 1, t_1 - 2, \dots, t_0, \\ \psi(t_1 - 1) = -\varphi_x(x(t_1)). \end{cases}$$

Систему (9) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче (3)–(6). При выполнении соотношений (9) формула приращения (8) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u) = & \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t] \Delta u(t) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) + \Delta x'(t) H_{xu}[t] \Delta u(t) + \\
& + 2\Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t) + \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t)] + \\
(10) \quad & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2.
\end{aligned}$$

Поскольку по предложению множество U открытое, то специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$(11) \quad \Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta u(t).$$

Здесь ε — достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)$ — произвольная r -мерная вектор-функция со значениями из R^r .

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение допустимой траектории $x(t)$, отвечающее специальному приращению управления $u(t)$, определяемое формулой (11).

В [12] доказана следующая оценка:

$$\|\Delta x(t)\| \leq L_1 \prod_{j=t_0}^{t-1} (1 + A_\alpha(t, j) \|\Delta u(j)\|), \quad t \in T \cup t_1, \quad L_1 = \text{const} > 0.$$

Из этой оценки следует, что

$$(12) \quad \|\Delta x_\varepsilon(t)\| \leq L_2 \varepsilon, \quad t \in T \cup t_1, \quad L_2 = \text{const} > 0.$$

С учетом формул (11) и (12) доказывается, что по схеме, например, из [9, 13] для специального приращения $\Delta x_\varepsilon(t)$ траектории $x(t)$ имеет место разложение

$$(13) \quad \Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t),$$

где $\delta x(t)$ — n -мерная вектор-функция, являющаяся решением уравнения (уравнение в вариациях)

$$(14) \quad \Delta^\alpha \delta x(t+1) = f_x[t] \delta x(t) + f_u[t] \delta u(t)$$

с начальным условием

$$(15) \quad \delta x(t_0) = 0.$$

Принимая во внимания соотношения (11)–(15) из формулы приращения (10), получим

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u) &= S(u + \varepsilon \delta u) - S(u) = \\ &= - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t] \varepsilon \delta u(t) + \frac{1}{2} (\varepsilon \delta x(t_1) + o(\varepsilon; t_1))' \varphi_{xx}(x(t_1)) (\varepsilon \delta x(t_1) + o(\varepsilon; t_1)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[(\varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t))' H_{xx}[t] (\varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t)) + \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon \delta u(t)' H_{ux}[t] (\varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t)) + \varepsilon^2 \delta u(t)'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) \right] + o(\varepsilon^2) = \\ &= -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t] \delta u(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \delta x(t_1) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\delta x'(t) H_{xx}[t] \delta x(t) + 2\varepsilon \delta u'(t) H_{ux}[t] \delta x(t) + \right. \\ (16) \quad &\quad \left. + \delta u'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) \right] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

5. Необходимые условия оптимальности

Доказанное специальное разложение второго порядка (16) критерия качества позволяет получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Из классического вариационного исчисления известно (см., например, [9, 10]), что если имеет место разложение

$$(17) \quad S(u + \varepsilon \delta u) - S(u) = \varepsilon A_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} A_2 + o(\varepsilon^2),$$

где A_1 и A_2 — независимые от ε числа, то A_1 и A_2 называются соответственно первой и второй вариациями функционала $S(u)$ в точке u и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \delta^1 S(u, \delta u), \\ A_2 &= \delta^2 S(u, \delta u). \end{aligned}$$

По этому определению из разложения (17) вытекает, что первая и вторая вариации функционала $S(u)$ имеют соответственно следующий вид:

$$(18) \quad \delta^1 S(u, \delta u) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u [t] \delta u(t),$$

$$\delta^2 S(u, \delta u) = \delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \delta x(t_1) -$$

$$(19) \quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\delta x'(t) H_{xx} [t] \delta x(t) + 2\varepsilon \delta u'(t) H_{ux} [t] \delta x(t) + \delta u'(t) H_{uu} [t] \delta u(t) \right].$$

Из классического вариационного исчисления также известно, что если функционал $S(u)$ в точке $u = u(t)$ получает свое минимальное значение, то для любого $\delta u(t)$ его первая вариация равна нулю:

$$(20) \quad \delta^1 S(u, \delta u) = 0,$$

а вторая вариация неотрицательна:

$$(21) \quad \delta^2 S(u, \delta u) \geq 0.$$

Отсюда следует, что (в силу (20), (21)) вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для любого $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$

$$(22) \quad \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u [t] \delta u(t) = 0,$$

$$(23) \quad \delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\delta x'(t) H_{xx}[t] \delta x(t) + 2\delta u(t)' H_{ux}[t] \delta x'(t) + \delta u'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) \right] \geq 0.$$

Как видно, тождество (22) и неравенство (23) есть неявные необходимые условия оптимальности первого и второго порядков соответственно.

Но они позволяют получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности первого и второго порядков. С этой целью, используя произвольность $\delta u(t)$, определим его следующим образом:

$$(24) \quad \delta u(t) = \begin{cases} v, & t = \theta \in T, \\ 0, & t \neq \theta \in T, \end{cases}$$

где $\theta \in T$, а $v \in R^r$ — произвольный вектор.

С учетом (24) из (22) получим

$$H'_u[\theta] v = 0$$

для всех $v \in R^r$, $t = \theta \in T$.

Из последнего соотношения в силу произвольности вектора v следует тождество

$$(25) \quad H_u[\theta] = 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (3)–(6) необходимо, чтобы соотношение (25) выполнялось для любого $\theta \in T$.

Соотношение (25) является аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи оптимального управления. Как видно, уравнение Эйлера является конструктивно проверяемым необходимым условием оптимальности. А неравенство (23) есть неявное необходимое условие оптимальности второго порядка.

Допустимое управление $u(t)$, являющееся решением уравнения Эйлера, назовем классической экстремалью.

Как известно, $\delta x(t)$ (вариация траектории) является решением задачи (14)–(15). Следовательно, по теореме 2 $\delta x(t)$ можно представить в следующем виде:

$$(26) \quad \delta x(t) = \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j) f_u[j] \delta u(j) \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]].$$

Используя формулу (26), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (23).

Ясно, что

$$\begin{aligned}
 \delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \delta x(t_1) &= \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] \delta u(\tau) \times \\
 &\times \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] \varphi_{xx}(x(t_1)) \times \\
 (27) \quad &\times R_\alpha(t-1, s) f_u[s] \delta u(s) \prod_{k=s+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]], \\
 &\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xx}[t] \delta x(t) = \\
 &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] \delta u(\tau) \prod_{k=\max(\tau+1, s+1)}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, \tau) f_x[\tau]] \times \right. \\
 (28) \quad &\left. \times H_{xx}[t] [1 + R_\alpha(t-1, s) f_x[s]] R_\alpha(t-1, s) f_u[s] \delta u(s) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u(t)' H_{ux}[t] \delta x'(t) = \\
 (29) \quad &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{ux}[t] \left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\tau+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] f_u[\tau] \delta u(\tau) \right].
 \end{aligned}$$

Учитывая тождества (27)–(29) в неравенстве (23), получим

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] \delta u(\tau) \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] \varphi_{xx}(x(t_1)) \times \\
 &\times R_\alpha(t-1, s) f_u[s] \delta u(s) \prod_{k=s+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] - \\
 &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] \delta u(\tau) \times \right. \\
 &\times \prod_{k=\max(\tau+1, s+1)}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, \tau) f_x[\tau]] H_{xx}[t] \times \\
 &\left. \times [1 + R_\alpha(t-1, s) f_x[s]] R_\alpha(t-1, s) f_u[s] \delta u(s) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{ux}[t] \left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\tau+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] f_u[\tau] \delta u(\tau) \right] + \\
(30) \quad & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{uu}[t] \delta u(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Пусть $M(\tau, s)$ — $(n \times n)$ матричная функция, определяемая формулой

$$\begin{aligned}
(31) \quad M(\tau, s) = & -R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] \varphi_{xx}(x(t_1)) \times \\
& \times R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=s+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] - \\
& - R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\max(\tau+1, s+1)}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, \tau) f_x[\tau]] H_{xx}[t] [1 + R_\alpha(t-1, s) f_x[s]].
\end{aligned}$$

С учетом формулы (31), неравенство (30) записывается в виде

$$\begin{aligned}
(32) \quad & 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{ux}[t] \sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\tau+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] f_u[\tau] \delta u(\tau) + \\
& + \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u(\tau) f'_u[\tau] M(\tau, s) f_u[s] \delta u(s) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u(t)' H_{uu}[t] \delta u(t) \leq 0.
\end{aligned}$$

Теорема 4 (необходимое условие оптимальности второго порядка). *Для оптимальности классической экстремали в задаче (3)–(6) необходимо, чтобы неравенство (32) выполнялось для всех $\delta u(t) \in U$, $t \in T$, где $M(\tau, s)$ определяется по формуле (31).*

Доказанное необходимое условие оптимальности является довольно общим. Из него, используя произвольность вариаций $\delta u(t)$ управляющих функций $u(t)$, можно получить ряд более легко проверяемых условий оптимальности.

Непосредственным следствием теоремы 4 является

Следствие. *Для оптимальности классической экстремали в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство*

$$v' [f'_u[\theta] M(\theta, \theta) f_u[\theta] + H_{uu}[\theta]] v \leq 0$$

выполнялось для всех $v \in R^n$, $\theta \in T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. Минск: “Наука и техника”, 1987.
2. *Jagan Mohan J., Deekshitulu G.V.S.R.* Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publish. Corporat. Int. J. Different. Equat. 2012. Article ID 780619, 11 p. <https://doi.org/10.1155/2012/780619>
3. *Christopher G., Piterson A.C.* Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln Lincoln, NE, USA. 2015.
4. *Feckan M., Wang J., Pospisil M.* Fractional-order equations and inclusions. Germany. Berlin. Deutsche Nationalbibliothek. V. 3. 2010. 384 p.
5. *Chen F., Luo X., Zhou Y.* Existence results for nonlinear fractional order difference equation // Advanc. Differen. Equat. 2011. Article ID 713201. 12 p.
6. *Nuno R.O. Bastos, Rui A.C. Ferreira, Delfim F.M. Torres.* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations// Discret. Contin. Dynam. Syst. 2011. V. 29. No. 2. P. 417–437.
7. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advanc. Differen. Equat. 2017. No. 1. P. 1–19.
8. *Bahaa G.M.* Fractional optimal control problem for differential system with control constraints // Filomat. 2016. V. 30. No. 8. P. 2177–2189.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.
10. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
11. *Алиева С.Т.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вест. Том. ун-та. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
12. *Алиева С.Т., Мансимов К.Б.* Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вест. Перм. ун-та, Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 9–15.
13. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Баку: Изд-во БГУ, 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 14.02.2022

После доработки 11.10.2022

Принята к публикации 26.10.2022

© 2023 г. В.Р. БАРСЕГЯН, д-р физ.-мат. наук (barseghyan@sci.am)
(Ереванский государственный университет;
Институт механики НАН Армении, Ереван)

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕКОТОРОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

В предлагаемой статье изучена задача граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно-постоянными характеристиками. Принято, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением на двух концах. Предложен конструктивный подход построения управляющего воздействия, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в конечное состояние. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее используется метод разделения переменных и методы теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: управление колебаниями, граничное управление, неоднородный колебательный процесс, волновое уравнение, кусочно-постоянные характеристики, разделение переменных.

DOI: 10.31857/S0005231023020046, EDN: OMXOQO

1. Введение

Задачам граничного управления и оптимального управления распределенными колебательными системами посвящены многие исследования, в частности, [1–15]. Для распределенной однородной колебательной системы, описываемой однородным волновым уравнением, с многоточечными промежуточными условиями задачи граничного управления рассмотрены в исследованиях [2–6]. В них решения задач построены на основе методов Фурье и теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями.

К исследованию решений задач управления разнородных распределенных составных систем посвящены, в частности, [7–15]. Одной из первых работ в этой области является [8], где решена поставленная А.Г. Бутковским задача управления распределенной колебательной системой, состоящей из двух

кусочно-однородных сред. Построение решения задачи основано на методе распространяющихся волн. В [9, 10] и других исследованиях этого же автора и его учеников изучены подобные задачи граничного управления неоднородными колебательными процессами. При исследовании этих задач граничного управления использован метод Даламбера и выведены формулы типа Даламбера. К краевым задачам для уравнения, описывающего процесс продольных колебаний стержня с кусочно-постоянными характеристиками (состоящих из не менее двух участков) со свободным либо закрепленным правым концом, посвящены, в частности, [13–19]. В них исследования проведены в классе обобщенного решения. В [20] рассмотрена механическая система, состоящая из двух кусков струны равной длины, соединенных между собой пружиной. С помощью формулы Даламбера исследована задача граничного управления колебаниями сложносочлененной системы с особенностями.

Необходимость моделирования и управления распределенных колебательных процессов составных систем с кусочно-постоянными (неоднородными) характеристиками возникает во многих теоретических и прикладных областях науки и техники. Однако научное направление по управлению неоднородными упругими колебаниями пока еще недостаточно исследовано и находится на стадии становления.

В настоящей статье рассмотрена задача граничного управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. Распределенная неоднородная колебательная система, описываемая однородным волновым уравнением, в частности, описывает не только поперечные колебания неоднородной струны, но и продольные колебания неоднородного стержня. Колебательный процесс характеризуется разными упругими свойствами и плотностями участков. Их длины таковы, что время прохождения волны по каждой из частей одинаково.

Условия, определяющие контактные взаимодействия материалов разнородных тел, имеют важные значения. При математическом моделировании учет этих условий сопряжения, соединения (склейки) двух участков с разными физическими характеристиками материалов, должен соответствовать условиям непрерывного истечения возбуждаемых волновых процессов.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами, переводящими колебания за заданный промежуток времени из начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в конечное состояние.

2. Постановка задачи

Рассматриваются колебания распределенной кусочно-однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящей из двух участков: участок $-l_1 \leq x \leq 0$ и участка $0 \leq x \leq l$. Скорость прохождения по участкам

волны обозначим $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$, где $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. Следуя [9], предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е.

$$(2.1) \quad \frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}.$$

Отметим, что описанным колебательным неоднородным процессом могут быть продольные колебания кусочно-однородного стержня (ρ — плотность, k — модуль упругости) или поперечные колебания кусочно-однородной струны (ρ — плотность, k — натяжение струны).

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны), представлено функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. Отклонение от состояния равновесия описывается уравнением

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

с граничными условиями

$$(2.3) \quad Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$(2.4) \quad \begin{aligned} Q(0-0, t) &= Q(0+0, t) \\ a_1^2 \rho_1 \left| \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0-0} &= a_2^2 \rho_2 \left| \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0+0}. \end{aligned}$$

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$(2.5) \quad Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l,$$

$$(2.6) \quad Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Пусть также в некоторые промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$)

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы значения функции состояния в виде

$$(2.7) \quad Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m.$$

В формуле (2.3) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – управляющие воздействия (граничные управления).

Предполагается, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t): x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, а функции $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$, $i = 0, 1, \dots, m, m+1$, $\psi_0(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются следующие условия согласования.

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mu(0) &= \varphi_0(-l_1), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(-l_1), & \nu(0) &= \varphi_0(l), & \dot{\nu}(0) &= \psi_0(l), \\ \mu(t_i) &= \varphi_i(-l_1), & \nu(t_i) &= \varphi_i(l), & i &= 1, \dots, m, \\ \mu(T) &= \varphi_T(-l_1), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(-l_1), & \nu(T) &= \varphi_T(l), & \dot{\nu}(T) &= \psi_T(l). \end{aligned}$$

Задача граничного управления. Требуется найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ ($0 \leq t \leq T$), переводящие колебания системы (2.2) из заданного начального состояния (2.5) через промежуточные состояния (2.7) в конечное состояние (при $t = T$) (2.6).

Отметим, что условия сопряжения в точке стыка $x = 0$ (2.4) выполняются и для функции $\varphi_0(x), \varphi_T(x), \varphi_i(x), i = 1, \dots, m$.

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [21]

$$(3.1) \quad \xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (2.1) будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, & 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

или

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T$$

с соответствующими граничными условиями

$$(3.3) \quad Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

с начальными условиями

$$(3.4) \quad Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq x \leq l,$$

промежуточными условиями

$$(3.5) \quad Q(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = 1, \dots, m,$$

с конечными условиями

$$(3.6) \quad Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l,$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$(3.7) \quad Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}.$$

Отметим, что для удобства после замены переменной (3.1) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (3.3) неоднородны, решение уравнения (3.2) построим в виде суммы

$$(3.8) \quad Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t),$$

где $V(\xi, t)$ — функция с граничными условиями

$$(3.9) \quad V(-l, t) = V(l, t) = 0,$$

требующая определения, а функция $W(\xi, t)$ — решение уравнения (3.2) с условиями

$$(3.10) \quad W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t).$$

и имеет вид

$$(3.11) \quad W(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(t) + (l + \xi)\nu(t)].$$

Подстановка (3.8) в (3.2) с учетом (3.11), приводит к следующему уравнению для определения функции $V(\xi, t)$

$$(3.12) \quad \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$(3.13) \quad F(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)].$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему (3.7) условию сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что согласно (3.1) будем иметь

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \varphi_0(-l_1) &= \varphi_0(-l), \quad \varphi_i(-l_1) = \varphi_i(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \\ \psi_0(-l_1) &= \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l). \end{aligned}$$

В силу начальных, промежуточных и конечных условий, соответственно (3.4)–(3.6), функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$(3.15) \quad \begin{aligned} V(\xi, 0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(0) + (l + \xi)\nu(0)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\dot{\mu}(0) + (l + \xi)\dot{\nu}(0)], \end{aligned}$$

промежуточным условиям

$$(3.16) \quad V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(t_i) + (l + \xi)\nu(t_i)], \quad i = 1, \dots, m,$$

и конечным условиям

$$(3.17) \quad \begin{aligned} V(\xi, T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(T) + (l + \xi)\nu(T)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\dot{\mu}(T) + (l + \xi)\dot{\nu}(T)]. \end{aligned}$$

С учетом условий (2.8) и (3.14), условия (3.15)–(3.17) запишутся следующим образом, соответственно:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} V(\xi, 0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_0(-l) + (l + \xi)\varphi_0(l)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_0(-l) + (l + \xi)\psi_0(l)], \end{aligned}$$

$$(3.19) \quad V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_i(-l) + (l + \xi)\varphi_i(l)], \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(3.20) \quad \begin{aligned} V(\xi, T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_T(-l) + (l + \xi)\varphi_T(l)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_T(-l) + (l + \xi)\psi_T(l)]. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи сведено к задаче управления колебанием, описываемым уравнением (3.12) с однородными граничными условиями (3.9), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которых колебание, описываемое уравнением (3.12) с граничными условиями (3.9), переходит из заданного начального состояния (3.18) через промежуточные состояния (3.19) в конечное состояние (3.20).

4. Решение задачи

Решение уравнения (3.12), с учетом граничных условий (3.9) и условия согласованности, ищем в виде

$$(4.1) \quad V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l V(\xi, t) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi.$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$), $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ представим в виде рядов Фурье, в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l} \right\}$ ($k = 1, 2, \dots$), и, подставив их значения вместе с $V(\xi, t)$ в уравнения (3.12), (3.13) и в условия (3.18)–(3.20), получим

$$(4.2) \quad \ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(4.3) \quad F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\ddot{v}(t) \left(2(-1)^k - 1 \right) - \ddot{u}(t) \right],$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right],$$

$$(4.4) \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_0(-l) - \psi_0(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right],$$

$$(4.5) \quad V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right],$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right],$$

$$(4.6) \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_T(-l) - \psi_T(l) \left(2(-1)^k - 1 \right) \right].$$

Здесь коэффициенты Фурье функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ ($i = 0, 1, \dots, m, m+1$), $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, m, m+1$), $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ соответственно.

Общее решение уравнения (4.2) с условиями (4.4) и его производная имеют вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau,$$

$$(4.7) \quad \dot{V}_k(t) = -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k (t - \tau) d\tau.$$

Следуя [2–6, 22], с учетом условий (4.5) и (4.6) из (4.7), получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k удовлетворяют следующим интеграль-

НЫМ СООТНОШЕНИЯМ:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \\ & \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \\ & \int_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_i), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

где

$$(4.9) \quad \begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_k Y_{1k} \right], \\ \tilde{C}_{1k} &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_k Y_{2k} \right], \\ \tilde{C}_{2k} &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \\ C_{1k}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} + E_k Y_{1k}^{(i)} \right], \\ \tilde{C}_{1k}(t_i) &= \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_i - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_i, \\ X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k T, \quad E_k = 1 - 2(-1)^k, \\ X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k T, \\ Y_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k T, \\ Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k t_i, \\ Y_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k t_i, \\ h_k^{(i)}(\tau) &= \begin{cases} \sin \lambda_k (t_i - \tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq t_i \\ 0 & \text{при } t_i < \tau \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k (T - \tau) & E_k \sin \lambda_k (T - \tau) \\ \cos \lambda_k (T - \tau) & E_k \cos \lambda_k (T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) & E_k h_k^{(1)}(\tau) \\ \dots & \dots \\ h_k^{(m)}(\tau) & E_k h_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix},$$

$$C_k(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_{m-1}) \end{pmatrix},$$

$$(4.10) \quad U(\tau) = \begin{pmatrix} \mu(\tau) \\ \nu(\tau) \end{pmatrix}.$$

Равенство (4.8) примет вид

$$(4.11) \quad \int_0^T \bar{H}_k(\tau) U(\tau) d\tau = C_k(t_1, \dots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (4.11).

На практике задача синтеза управления распределенной системой решается, используя методы теории управления конечномерными системами [1, 22, 23]. Следовательно, для первых n гармоник, из (4.11) будем иметь

$$(4.12) \quad \int_0^T H_n(\tau) U_n(\tau) d\tau = \eta_n,$$

где введены следующие обозначения блочных матриц

$$(4.13) \quad H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(t_1, \dots, t_m, T) \\ C_2(t_1, \dots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n(t_1, \dots, t_m, T) \end{pmatrix}$$

с размерностями $H_n(\tau) - (n(m+2) \times 2)$, $\eta_n - (n(m+2) \times 1)$. Здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы “ n ” будет означать — “для первых n гармоник”.

Таким образом, из (4.12) следует, что первые n гармоники системы (4.2) с условиями (4.3)–(4.6) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (4.13) можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (4.12).

Управляющее воздействие $U_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (4.12), представим в виде [22, 23]

$$(4.14) \quad U_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t),$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — вектор-функция и такая, что

$$(4.15) \quad \int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) dt.$$

Здесь S_n — известная матрица размерностью $(n(m+2) \times n(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Из формулы (4.14) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачу граничного управления.

Учитывая обозначения функции $h_k^{(i)}(\tau)$ для промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, m+1$ функции управления $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ (при $f_n(t) = 0$) представляются в виде:

$$(4.16) \quad \mu_n(t) = \begin{cases} \mu_n^{(1)}(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \mu_n^{(2)}(t), & t_1 < t \leq t_2 \\ \dots \\ \mu_n^{(m)}(t), & t_{m-1} < t \leq t_m \\ \mu_n^{(m+1)}(t), & t_m < t \leq T, \end{cases} \quad \nu_n(t) = \begin{cases} \nu_n^{(1)}(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \nu_n^{(2)}(t), & t_1 < t \leq t_2 \\ \dots \\ \nu_n^{(m)}(t), & t_{m-1} < t \leq t_m \\ \nu_n^{(m+1)}(t), & t_m < t \leq T. \end{cases}$$

Подставляя построенные выражения для функции $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ в (4.3), а найденное для $F_k(t)$ выражение — в (4.7), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (4.1) будем иметь

$$(4.17) \quad V_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi,$$

а с помощью (3.7) и (3.10) функция колебания $Q_n(\xi, t)$, $-l \leq \xi \leq l$ для первых n гармоник запишется в виде

$$(4.18) \quad Q_n(\xi, t) = V_n(\xi, t) + W_n(\xi, t),$$

где

$$(4.19) \quad W_n(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu_n(t) + (l + \xi)\nu_n(t)].$$

Учитывая обозначения (3.1), функция $Q_n(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

$$(4.20) \quad Q_n(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n(t) + \left(1 + \frac{x}{l_1}\right) \nu_n(t) \right], & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n(t) + \left(1 + \frac{x}{l}\right) \nu_n(t) \right], & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Здесь функции управления $\mu_n(t)$ и $\nu_n(t)$ имеют вид (4.17).

5. Пример

Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что в граничных условиях (2.3) правый конец закреплен: $Q(l, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$ (т.е. $\nu(t) = 0$). Рассмотрим случай $m = 1$, т.е. когда в одном промежуточном моменте времени t_1 ($0 < t_1 < T$) задано состояние колебания:

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

В этом случае из формулы (4.3) следует $F_k(t) = -\frac{a_2}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t)$, а согласно формулам (4.8) будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{2k}(T),$$

$$\int_0^T \mu(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k} + X_{1k} \right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k} + X_{2k} \right],$$

$$C_{1k}(t_1) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_1) + X_{1k}^{(1)} \right].$$

Постоянные \tilde{C}_{1k} , \tilde{C}_{2k} , $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, X_{1k} , X_{2k} и $X_{1k}^{(1)}$ определяются из формулы (4.9). Следовательно,

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k (T - \tau) \\ \cos \lambda_k (T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для простоты изложения, согласно формуле (4.12) (или (4.14)), (4.13), построим функцию граничного управления $\mu_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). Тогда, согласно (4.10), будем иметь $H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau)$, $\eta_1 = C_1$, а из (4.15), элементы матрицы

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы S_1 , согласно обозначениям (4.15), имеют следующий вид:

$$s_{11} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \quad s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, \quad s_{22} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T,$$

$$s_{13} = s_{31} = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T,$$

$$s_{23} = s_{32} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1), \quad s_{33} = \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1,$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$.

$$\text{Обозначим } S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{s}_{11} & \widehat{s}_{12} & \widehat{s}_{13} \\ \widehat{s}_{21} & \widehat{s}_{22} & \widehat{s}_{23} \\ \widehat{s}_{31} & \widehat{s}_{32} & \widehat{s}_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\widehat{s}_{11} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) - \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right)^2 \right],$$

$$\widehat{s}_{12} = \widehat{s}_{21} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) \times \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) - \left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} \cos^2 \lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) \right],$$

$$\widehat{s}_{13} = \widehat{s}_{31} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} \cos^2 \lambda_1 T \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) - \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \right],$$

$$\widehat{s}_{22} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) - \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right)^2 \right],$$

$$\widehat{s}_{23} = \widehat{s}_{32} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} \cos^2 \lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) - \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) \right],$$

$$\widehat{s}_{33} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T^2}{4} - \frac{1}{4\lambda_1^2} \sin^2 \lambda_1 T \cos^2 \lambda_1 T \right) - \left(\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} \cos^2 \lambda_1 T \right)^2 \right].$$

Из формулы (4.14) следует, что $\mu_1(\tau) = H_1^T(\tau)S_1^{-1}\eta_1 + f_1(\tau)$. Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, согласно (4.16), получим при $\tau \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)}(\tau) &= \sin \lambda_1 (T - \tau) \left[\widehat{s}_{11}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}C_{11}(t_1) \right] + \\ &+ \cos \lambda_1 (T - \tau) \left[\widehat{s}_{21}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}C_{11}(t_1) \right] + \\ &+ \sin \lambda_1 (t_1 - \tau) \left[\widehat{s}_{31}C_{11}(T) + \widehat{s}_{32}C_{21}(T) + \widehat{s}_{33}C_{11}(t_1) \right], \end{aligned}$$

при $\tau \in (t_1, T]$

$$\begin{aligned} \mu_1^{(2)}(\tau) &= \sin \lambda_1 (T - \tau) \left[\widehat{s}_{11}C_{11}(T) + \widehat{s}_{12}C_{21}(T) + \widehat{s}_{13}C_{11}(t_1) \right] + \\ &+ \cos \lambda_1 (T - \tau) \left[\widehat{s}_{21}C_{11}(T) + \widehat{s}_{22}C_{21}(T) + \widehat{s}_{23}C_{11}(t_1) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что согласно формулам (4.17)–(4.19) будем иметь $Q_1(\xi, t)$ при $-l \leq \xi \leq l$ в виде

$$Q_1(\xi, t) = \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l}(l - \xi)\mu_1^{(1)}(t), & 0 \leq \tau \leq t_1 \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l}(l - \xi)\mu_1^{(2)}(t), & t_1 < \tau \leq T. \end{cases}$$

Учитывая обозначения (3.1) функция состояния $Q_n(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

при $\tau \in [0, t_1]$

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) \mu_1^{(1)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \mu_1^{(1)}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

при $\tau \in (t_1, T]$

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) \mu_1^{(2)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \mu_1^{(2)}(t), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

6. Заключение

В работе рассмотрена задача граничного управления одномерным волновым уравнением, описывающим поперечные колебания кусочно-однородной струны или продольные колебания кусочно-однородного стержня. Предложен конструктивный подход построения функции граничного управления

одномерными неоднородными колебательными процессами. При этом явное выражение функции граничного управления представлено через заданные начальные, промежуточные и конечные функции состояния распределенной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Barseghyan V.R.* Control Problem of String Vibrations with Inseparable Multipoint Conditions at Intermediate Points in Time // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54, Issue 8, pp. 1216–1226. <https://doi.org/10.3103/S0025654419080120>
3. *Barseghyan V.R.* The problem of optimal control of string vibrations // *International Applied Mechanics*, 56(4), (2020), 471–48. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01030-w>
4. *Барсегян В.Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // *АиТ*. 2020. № 2. С. 36–47. <https://doi.org/10.31857/S0005231020020038>
Barseghyan V.R. Optimal control of string vibrations with nonseparate state function conditions at given intermediate instants // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 2. P. 226–235.
5. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021* // *Lecture Notes in Computer Science*. 2021. V. 12755. P. 299–313. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77876-7_20
6. *Barseghyan V., Solodusha S.* On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time // *Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. P. 343–349. <https://doi.org/10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514>
7. *Barseghyan V.R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // *Proceedings of 2016 International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference), STAB 2016*. <https://doi.org/10.1109/STAB.2016.7541163>
8. *Львова Н.Н.* Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // *АиТ*. 1973. № 10. С. 22–32.
9. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // *Доклады РАН*. 2011. Т. 440. № 2. С. 159–163.
10. *Ильин В.А.* О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // *Доклады РАН*. 2010. Т. 435. № 6. С. 732–735.
11. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // *Тр. ИММ УрОРАН*. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.

12. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 62–71.
13. *Amara J. Ben, Bouzidi H.* Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients // Journal of Mathematical Physics. 2018. V. 59. No. P. 1–22.
14. *Amara J. Ben, Beldi E.* Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. No. 5. P. 3360–3387. <https://doi.org/10.1137/16M1100496>
15. *Mercier D., Régnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // Collectanea Mathematica. 2009. V. 60. No. 3. P. 307–334. <https://doi.org/10.1007/BF03191374>
16. *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН. 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.
17. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады РАН. 2011. Т. 441. № 4. С. 449–451.
18. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН. 2012. Т. 444. С. 488–491.
19. *Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.* Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–72.
20. *Зверева М.Б., Найдюк Ф.О., Залукаева Ж.О.* Моделирование колебаний сингулярной струны // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. 2014. № 2. С. 111–119.
21. *Холодовский С.Е., Чухрий П.А.* Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13. № 4. С. 42–50. <https://doi.org/10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50>
22. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
23. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 08.03.2022

После доработки 15.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022

© 2023 г. А.Р. ГАЙДУК, д-р техн. наук (gaiduk_2003@mail.ru)
(Институт радиотехнических систем и управления
Южного федерального университета, Таганрог)

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕЛЕКТИВНО-ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ¹

Разработан оригинальный аналитический метод синтеза селективно-инвариантных систем управления нелинейными объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Задача синтеза решается с применением метода синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейной модели нелинейных объектов и принципа внутренних моделей внешних воздействий с учетом требований к относительному порядку устройства управления и быстродействию синтезируемой системы. Параметры нелинейного устройства управления определяются решением системы линейных алгебраических уравнений. Предложенный метод может применяться для синтеза систем управления нелинейными объектами различного назначения, работающими в условиях регулярных внешних воздействий известной формы.

Ключевые слова: нелинейный объект, дифференцируемая нелинейность, квазилинейная модель, селективно-инвариантная система, воздействие, спектр, спектральная модель, устойчивость, грубость.

DOI: 10.31857/S0005231023020058, EDN: ONBOCY

1. Введение

На практике часто встречаются объекты управления, подверженные влиянию регулярных внешних воздействий известной формы. К таким объектам относятся электромеханические системы, электро- и пневмоприводы, мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты, зерноуборочные комбайны и многие другие объекты [1–6]. Системы управления этими объектами обычно должны обеспечить полное парирование влияния этих воздействий в установившемся режиме. Как известно, наиболее эффективным способом решения этой задачи является обеспечение инвариантности систем автоматического управления (САУ) к внешним воздействиям. Однако условия обеспечения абсолютной инвариантности чаще всего недостижимы, поэтому применяется

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00533).

селективная инвариантность, для обеспечения которой в систему вводятся модели внешних воздействий, что обуславливает существенное увеличение порядка и сложности устройства управления.

Традиционно синтез селективно-инвариантных САУ осуществляется на основе линейных моделей объектов управления (ОУ) [1, 2, 7–12] и принципа внутренних моделей внешних воздействий. В некоторых работах внешние воздействия рассматриваемого типа называются «конечномерными» воздействиями [12, 13], однако задача синтеза систем управления решается также на основе принципа внутренних моделей.

Повышенные требования к качеству САУ приводят к необходимости использования нелинейных моделей ОУ [13–19]. При использовании известных методов синтеза нелинейных САУ, таких как преобразование модели ОУ к канонической форме Бруновского, линеаризация обратными связями по состоянию, метод бэкстеппинга, пассивфикации и др., обычно предполагается, что нелинейности объекта являются дифференцируемыми, а их переменные состояния измеряемыми. Однако применение указанных методов синтеза нелинейных САУ осложнено необходимостью приведения нелинейных моделей ОУ к специальным формам, что требует поиска подходящих нелинейных преобразований.

В работах В.О. Никифорова, А.А. Бобцова и др. (см. [13]) рассматриваются нелинейные системы, подверженные влиянию конечномерных внешних возмущений. Задача парирования их влияния на систему также решается на основе принципа внутренних моделей с применением метода функций Ляпунова, но при условии, что для невозмущенного объекта известны: а) стабилизирующее управление и б) функция Ляпунова, которая позволяет доказать устойчивость положения равновесия замкнутой невозмущенной системы.

В предлагаемом подходе к синтезу нелинейных селективно-инвариантных систем управления нелинейными объектами учитываются и задающее, и возмущающее внешние воздействия. Для решения задачи здесь используется метод синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейных моделей (КЛМ) нелинейных объектов, предложенный в [20, 21]. Преимущество этого метода по сравнению с указанными выше методами синтеза нелинейных систем [14–19] заключается в том, что для построения КЛМ требуется лишь дифференцируемость нелинейностей объекта по всем их аргументам, а параметры нелинейного устройства управления определяются решением разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Условия разрешимости рассматриваемой задачи синтеза нелинейных селективно-инвариантных САУ определяются свойством полноты (управляемости и наблюдаемости) канала «управление-выход» КЛМ нелинейного объекта и соотношением спектров внешних воздействий и нулей передачи последней.

Очень часто функциональные матрицы управляемости или наблюдаемости КЛМ объекта управления оказываются неособыми лишь в ограниченной

окрестности его положения равновесия. В этом случае положение равновесия синтезированной нелинейной системы является асимптотически устойчивым в большом [22, 23]. Если же условия полноты выполняются во всем пространстве состояний ОУ и обратные связи выбраны так, что функциональная матрица разрешающей СЛАУ является неособой также во всем пространстве состояний ОУ, то положение равновесия замкнутой системы может быть асимптотически устойчивым в целом. Последнее может быть установлено на основе теоремы, доказанной в [20]. Матрицы и векторы квазилинейных моделей являются функциями переменных состояния [20–23], но, как оказалось, это не является препятствием для аналитического решения задачи синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления.

2. Постановка задачи

Система управления называется селективно-инвариантной, если в ее составе имеется модель внешнего воздействия (ВВ), а отклонение системы, вызванное этим воздействием, равно нулю в установившемся режиме [9–11]. Такая модель называется экзогенной [8, с. 168] или внутренней [10, 22]. Математические модели ВВ — это однородные дифференциальные уравнения (ДУ). Они могут быть представлены или операторами этих уравнений, или соответствующими ДУ в форме Коши (в переменных состояния) [7–13]. Некоторые особенности и примеры моделей воздействий приведены в Приложении. Если в устойчивой системе есть модель воздействия, то, как только воздействие начинает влиять на систему, модель генерирует сигнал, полностью парирующий его влияние в установившемся режиме. При этом соответствующие начальные условия этой модели устанавливаются автоматически в течение переходного процесса, возникающего в момент приложения этого ВВ к системе.

Рассматривая задачу синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления, для определенности будем предполагать, что ОУ в своем составе не имеет внутренних моделей ВВ или их отдельных составляющих. Предположим также, что нелинейности ОУ являются дифференцируемыми, а переменные состояния измеряемыми, что позволяет применить метод синтеза нелинейных систем управления на основе КЛМ [20–22].

Пусть КЛМ нелинейного ОУ в отклонениях от некоторого установившегося режима имеет вид

$$(1) \quad \dot{x} = A(x)x + b(x)u + b_f(x)f, \quad y = c^T(x)x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния ОУ; u , y и f — скалярные управление, управляемая переменная и внешнее неизмеряемое возмущение; $A(x)$ и $b(x)$, $b_f(x)$, $c(x)$ — известные функциональные $n \times n$ -матрица и n -векторы. В [22, 24] приведен метод построения квазилинейных моделей типа (1) нелинейных объектов, заданных уравнениями $\dot{x} = \varphi(x, u)$, $y = \psi(x)$, если $\varphi(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$, $\psi(\mathbf{0}) = 0$ и $\partial\varphi(x, u)/\partial u = \varphi'_u(x)$, т.е. при условиях, что $\varphi(x, u)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые

по всем аргументам функции; $x = \mathbf{0}$ — положение равновесия объекта (1); частная производная по u от вектор-функции $\varphi(x, u)$ не зависит от u . Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой n -вектор.

Далее рассматриваются полные объекты, т.е. объекты, КЛМ (1) которых удовлетворяет условиям управляемости и наблюдаемости:

$$(2) \quad \left| \det [b(x) \quad A(x)b(x) \quad \dots \quad A^{n-1}(x)b(x)] \right| \geq \varepsilon_y > 0,$$

$$\left| \det [c(x) \quad A^T(x)c(x) \quad \dots \quad (A^T(x))^{n-1}c(x)] \right| \geq \varepsilon_n > 0, \quad \forall x \in \Omega_{yH} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varepsilon_y, \varepsilon_n$ — некоторые постоянные; Ω_{yH} — некоторая окрестность точки $x = \mathbf{0}$ [22].

В синтезируемой селективно-инвариантной системе применяется нелинейное устройство управления (НУУ), предложенное в [20, 21]. В данном случае его уравнения имеют вид:

$$(3) \quad \dot{z} = R(x)z + q(x)g - l(x)y - \sum_{i=1}^q l_i(x)\tilde{x}_i, \quad u = k^T(x)z,$$

где $z \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния НУУ, g — скалярное задающее воздействие; $R(x)$ и $q(x)$, $l(x)$, $l_i(x)$, $i = 1, \dots, q$ — функциональные $r \times r$ -матрица и r -векторы; q — число переменных состояния $\tilde{x}_i \in x$, используемых в НУУ (3) и перенумерованных в порядке возрастания $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_q$, $q \leq n$. Значение r , переменные \tilde{x}_i и число q определяются при формировании матрицы G_y (22) разрешающей СЛАУ (см. ниже). Уравнения (3) отличаются от приведенных в [20] только тем, что здесь учитываются связи по задающему воздействию и управляемой переменной, а обратные связи могут вводиться не по всем переменным состояниям.

Имея в виду синтез нелинейных селективно-инвариантных систем управления (1)–(3), будем предполагать, что известны спектральные модели в виде K_p -изображений задающего воздействия $g = g(t)$ и возмущения $f = f(t)$, т.е. известны операторы-полиномы $G(p)$ и $F(p)$ степеней $\nu_g = \deg G(p)$ и $\nu_f = \deg F(p)$, где p — оператор d/dt , такие, что $G(p)g(t) \equiv 0$ и $F(p)f(t) \equiv 0$. Пусть полином $\Phi(p) = \text{НОК}\{G(p)F(p)\}$, где НОК — наименьшее общее кратное [10, 11]. Операторное уравнение «вход-выход» замкнутой системы (1), (3) относительно отклонения $\varepsilon = g - y$ можно записать следующим образом:

$$(4) \quad H(p, x)\varepsilon = H_{\varepsilon g}(p, x)g - H_f(p, x)f,$$

$$H_{\varepsilon g}(p, x) = H(p, x) - H_g(p, x),$$

где $H(p, x)$, $H_g(p, x)$, $H_f(p, x)$ — некоторые полиномы от p , коэффициенты которых являются функциями переменных состояния x_i , $i = \overline{1, n}$ [20, 22]. Вывод этих полиномов на основе уравнений (1) и (3) дан в Приложении. На основе уравнения (4) условия селективной инвариантности системы (1), (3)

по отношению к воздействиям $g = g(t)$ и $f = f(t)$ имеют вид:

$$(5) \quad \begin{aligned} H_{\varepsilon g}(p, x) &= \tilde{H}_{\varepsilon g}(p, x)G(p), \\ H_f(p, x) &= \tilde{H}_f(p, x)F(p), \quad \forall x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где $\tilde{H}_{\varepsilon g}(p, x)$, $\tilde{H}_f(p, x)$ — полиномы того же типа, что и в (4), но более низких степеней. При этом задача синтеза имеет решение при выполнении условий (2) и

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{НОД}\{B(p, x), \Phi(p)\} &= \text{const}, \\ \text{НОД}\{H(p, x), \Phi(p)\} &= \text{const}, \quad \forall x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Условия (2) и первое условие (6) являются необходимыми условиями разрешимости рассматриваемой задачи синтеза, так как они включают характеристики заданных ОУ и ВВ. Физический смысл первого условия (6) заключается в непересекаемости спектров воздействий $g(t)$ и $f(t)$ с нулями передачи объекта по каналу $u \rightarrow y$, что позволяет воспроизвести на выходе системы задающее воздействие и парировать влияние возмущения [10]. Второе условие (6) — это условие непересекаемости спектров воздействий $g(t)$ и $f(t)$ с корнями характеристического полинома замкнутой системы. Это условие является конструктивным и всегда может быть выполнено, если выполнены указанные выше необходимые условия разрешимости.

Таким образом, для решения задачи синтеза необходимо выбрать параметры функциональных матриц и векторов в (3) так, чтобы выполнялись условия селективной инвариантности (5), условия устойчивости, заданной длительности переходных процессов и условия физической реализуемости с учетом $\mu_{\text{нуу}}$ — относительного порядка НУУ [22, 25].

3. Решение задачи

Исключив из уравнений (1), (3) управление u и записав полученные уравнения в векторно-матричной форме, получим КЛМ замкнутой системы в переменных состояния:

$$(7) \quad \dot{w} = H(x)w + h(x)g + h_f(x)f, \quad y = [c^T(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^T]w,$$

где $w = [x^T \quad z^T]^T \in \mathbb{R}^\ell$, $\ell = n + r$, $\bar{\mathbf{0}}$ — нулевой r -вектор,

$$(8) \quad \begin{aligned} H(x) &= \begin{bmatrix} A(x) & b(x)k^T(x) \\ -\Pi(x) & R(x) \end{bmatrix}, \\ h(x) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ q(x) \end{bmatrix}, \quad h_f(x) = \begin{bmatrix} b_f(x) \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\Pi(x) = l(x)c^T(x) + \sum_{i=1}^q l_i(x)e_i$; e_i — i -я строка единичной матрицы E , соответствующей размерности.

В Приложении показано, что из уравнений (7) с учетом (8) следует уравнение «вход-выход» замкнутой системы

$$(9) \quad H(p, x)y = H_g(p, x)g + H_f(p, x)f,$$

где

$$(10) \quad H(p, x) = A(p, x)R(p, x) + B(p, x)L(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x)V_i(p, x),$$

$$(11) \quad H_g(p, x) = B(p, x)Q(p, x),$$

$$(12) \quad H_f(p, x) = B_f(p, x)R(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x)\tilde{N}_i(p, x),$$

$$(13) \quad \tilde{N}_i(p, x) = \left(B_f(p, x)V_i(p, x) - B(p, x)W_i(p, x) \right) A^{-1}(p, x).$$

В выражениях (9)–(13):

$$(14) \quad \begin{aligned} A(p, x) &= \det [pE - A(x)], \\ B(p, x) &= c^T(x) \operatorname{adj} [pE - A(x)] b(x), \\ B_f(p, x) &= c^T(x) \operatorname{adj} [pE - A(x)] b_f(x); \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} R(p, x) &= \det [pE - R(x)], \\ L(p, x) &= k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] l(x), \\ Q(p, x) &= k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] q(x); \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} V_i(p, x) &= e_i \operatorname{adj} [pE - A(x)] b(x), \\ L_i(p, x) &= k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] l_i(x), \\ W_i(p, x) &= e_i \operatorname{adj} [pE - A(x)] b_f(x), \quad i = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

Отметим, что в (13) деление на полином $A(p, x)$ происходит нацело. Перейдем к решению указанных выше задач по выбору параметров уравнения (3).

Обеспечение селективной инвариантности. В соответствии с определением система имеет это свойство, если она содержит внутренние модели ВВ. По условиям задачи ОУ их не содержит, поэтому их необходимо ввести в УУ. С этой целью его характеристический полином берется в виде $R(p, x) = \tilde{R}(p, x)\Phi(p)$. Согласно (4) воздействие $f(t)$ умножается на полином (12), равный сумме двух слагаемых; причем в $R(p, x)$ спектральная

модель $F(p)$ имеется, поэтому полагаем $L_i(p, x) = \tilde{L}_i(p, x)\Phi(p)$. При этом в уравнении (4) возмущение $f(t)$ будет умножено на $F(p)$; тем самым будет выполнено второе условие (5) и парировано влияние $f(t)$ на ошибку системы, так как $F(p)f(t) \equiv 0$. Аналогично, задающее воздействие $g(t)$ согласно (4) умножается на полином $H_{\varepsilon g}(p, x) = H(p, x) - H_g(p, x)$, поэтому при $R(p, x) = \tilde{R}(p, x)\Phi(p)$ и $L_i(p, x) = \tilde{L}_i(p, x)\Phi(p)$ для выполнения первого условия (5) необходимо, чтобы $L(p, x) - Q(p, x) = \tilde{Q}(p, x)G(p)$. Здесь $\tilde{R}(p, x)$, $\tilde{Q}(p, x)$ и $\tilde{L}_i(p, x)$ — некоторые полиномы более низких степеней по сравнению со степенями полиномов $R(p, x)$, $Q(p, x)$ и $L_i(p, x)$, $i = \overline{1, q}$ соответственно.

Обеспечение устойчивости. С этой целью в соответствии с методом синтеза на основе КЛМ функциональный характеристический полином $H(p, x)$ степени $\ell = n + r$ заменяется в (10) гурвицевым полиномом $H^*(p)$ той же степени, корни которого являются постоянными, вещественными и различными числами [20, 22, 23]. В результате с учетом выбранных выше полиномов $R(p, x)$ и $\tilde{L}_i(p, x)$ равенство (10) принимает вид:

$$(17) \quad H^*(p) = \bar{A}(p, x)\tilde{R}(p, x) + B(p, x)L(p, x) + \sum_{i=1}^q \bar{V}_i(p, x)\tilde{L}_i(p, x),$$

где $\bar{A}(p, x) = A(p, x)\Phi(p)$; $\bar{V}_i(p, x) = V_i(p, x)\Phi(p)$ — полиномы с известными коэффициентами.

Корни p_i^* полинома $H^*(p)$ можно выбирать, используя, в частности, условия:

$$(18) \quad \begin{aligned} |\operatorname{Re}(p_j^*)| &\geq (5 \div 7)/t_p^*, & p_j^* &= -\sigma_j^*, & \sigma_j^* &> \varepsilon_\sigma > 0, \\ |\sigma_j^* - \sigma_\zeta^*| &\geq \Delta_\sigma > 0, & j &\neq \zeta, & j, \zeta &= \overline{1, \ell}, \end{aligned}$$

здесь t_p^* — требуемая длительность переходных процессов [25]; ε_σ , Δ_σ — некоторые числа.

Обеспечение разрешимости задачи синтеза. Выражение (17) фактически является полиномиальным уравнением относительно неизвестных полиномов

$$\begin{aligned} \tilde{R}(p, x) &= \rho_0(x) + \rho_1(x)p + \dots + \rho_{\bar{r}}(x)p^{\bar{r}}, \\ L(p, x) &= \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \dots + \lambda_l(x)p^l \quad \text{и} \\ \tilde{L}_i(p, x) &= \tilde{\lambda}_{i,0}(x) + \tilde{\lambda}_{i,1}(x)p + \dots + \tilde{\lambda}_{i,\tilde{l}_i}(x)p^{\tilde{l}_i}. \end{aligned}$$

По [20, 22, 26] уравнение (17) решается путем перехода к эквивалентной ему СЛАУ:

$$(19) \quad G_\gamma d = h_\gamma,$$

где векторы d , h_γ определяются выражениями

$$(20) \quad d = [\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_l \quad \tilde{\lambda}_{1,0} \tilde{\lambda}_{1,1} \dots \tilde{\lambda}_{1,\tilde{l}_1} \quad \dots \quad \tilde{\lambda}_{q,0} \tilde{\lambda}_{q,1} \dots \tilde{\lambda}_{q,\tilde{l}_q} \quad \rho_0 \rho_1 \dots \rho_{\bar{r}}]^\top,$$

$$(21) \quad h_\gamma = [\delta_0^* \quad \delta_1^* \quad \dots \quad \delta_\ell^*]^\top,$$

Полиномы $R(p, x)$ и $L_i(p, x)$ находятся по формулам $R(p, x) = \tilde{R}(p, x)\Phi(p)$, $L_i(p, x) = \tilde{L}_i(p, x)\Phi(p)$, а полином $L(p, x)$ определяется решением системы (22). Полином $Q(p, x)$ степени $\kappa = \nu_g - 1$, где $\nu_g = \deg G(p)$, находится из принятого выше выражения $L(p, x) - Q(p, x) = \tilde{Q}(p, x)G(p)$ следующим образом. Если полином $G(p) \neq p^{\nu_g}$, то записывается полиномиальное уравнение

$$(24) \quad \tilde{Q}(p, x)G(p) + Q(p, x) = L(p, x),$$

где полиномы $\tilde{Q}(p, x)$ и $Q(p, x)$ — его минимальное решение, которое находится путем перехода к эквивалентной СЛАНУ [11, 22]. Если же $G(p) \equiv p^{\nu_g}$, то берется полином

$$(25) \quad Q(p, x) = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \dots + \lambda_{\nu_g-1}(x)p^{\nu_g-1}.$$

Таким образом, все полиномы уравнения «вход-выход» НУУ определены. Чтобы убедиться в физической реализуемости НУУ при принятом $\mu_{\text{нуу}}$, достаточно перейти от уравнения (25) к эквивалентным ему уравнениям в переменных состояния, например, воспользовавшись соотношениями, приведенными в [22, стр. 346]. При этом для обеспечения параметрической грубости свойства селективной инвариантности необходимо обеспечить формирование спектральных моделей в явной форме. Подробнее этот момент показан ниже на примере.

Матрица $H(x)$ (8) системы (7) в общем случае является функциональной, корни ее характеристического полинома являются вещественными, отрицательными и различными в области $x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$. Если область $\Omega_{\text{УН}} = \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$, то для устойчивости положения равновесия системы (7) в целом достаточно, чтобы существовал ℓ -вектор $b_1(w)$ с дифференцируемыми компонентами или константами, при котором выполняются условия:

$$(26) \quad |\det U_c(w)| \geq \varepsilon_c > 0,$$

$$U_c(w) = [b_1(w) \quad H(x)b_1(w) \quad \dots \quad H^{\ell-1}(x)b_1(w)],$$

$$(27) \quad \text{Sup}_w \frac{\text{Sp}P_1(w)}{(\det P_1(w))^{1/\ell}} \leq K < \infty, \quad \forall w \subset \mathbb{R}^l, \|w\| < \infty,$$

где $\text{Sp}(\cdot)$ — след матрицы (\cdot) ; $P_1(w) = (U_A(w)M_s)(U_A(w)M_s)^T$; ε_c , K — положительные числа;

$$(28) \quad M_s = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_{\ell-1} & 1 \\ \delta_2 & \cdot & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \delta_{\ell-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

δ_i — коэффициенты полинома $H(p, x) = \det(pE - H(x)) = p^\ell + \delta_{\ell-1}p^{\ell-1} + \dots + \delta_1p + \delta_0$ [20].

Условия на корни характеристического полинома $H(p, x)$ функциональной матрицы $H(x)$ являются конструктивными и выполняются выбором полинома $H^*(p)$. Если условия (2) и первое условие (6) выполняются в области $\Omega_{УН} = \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$, то положение равновесия системы будет асимптотически устойчиво в целом при выполнении условий (26) и (27) [20]. Если же при этом матрица $H(x)$ (8) оказывается постоянной, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ системы (7) будет асимптотически устойчивым в целом [22] независимо от условий (26), (27). Если же область $\Omega_{УН} \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| < \infty$ является ограниченной, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ системы (7) будет асимптотически устойчивым в большом [22], также независимо от условий (26), (27).

Покажем эффективность разработанного метода синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления на численном примере.

4. Пример

Предположим, нелинейный объект управления описывается уравнениями:

$$(29) \quad \dot{x}_1 = 2x_1 + 3 \sin x_2 + 1,5u + f, \quad \dot{x}_2 = 4 \sin x_2 + 2u + 3f, \quad y = 3x_1 - 2,25x_2,$$

где x_1 , x_2 и y — измеряемые переменные состояния и выходная переменная; возмущение $f(t) = f_0 + f_m \sin(0,5t + \varphi_0)$, $t \geq 0$ не измеряется; задающее воздействие $g(t) = g_0 \mathbf{1}(t)$ измеряется; f_0 , f_m , φ_0 , g_0 — неизвестные ограниченные постоянные. Синтезировать нелинейную селективно-инвариантную к $g(t)$ и $f(t)$ систему так, чтобы время регулирования $t_p \leq t_p^* = 1,5$ с; относительный порядок искомого НУУ $\mu_{НУУ} = 0$ [22, 25].

Решение. Прежде всего, построим КЛМ объекта. С этой целью, следуя [22], найдем производную $d \sin x_2 / dx_2 = \cos x_2$ и проинтегрируем ее по вспомогательной переменной:

$$a_c(x_2) = \int_0^1 \cos(x_2 \theta) d\theta = x_2^{-1} \sin(x_2 \theta) \Big|_0^1 = x_2^{-1} \sin x_2 = \omega(x_2).$$

Заменив в (29) функцию $\sin x_2$ ее КЛМ моделью $a_c(x_2)x_2$, получим КЛМ объекта:

$$(30) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3\omega(x_2) \\ 0 & 4\omega(x_2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} f, \quad y = [3 \quad -2,25]x,$$

где $x = [x_1 \quad x_2]^T$. Сравнив системы (30) и (1), заключаем, что в данном случае

$$(31) \quad A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 3\omega(x_2) \\ 0 & 4\omega(x_2) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2,25 \end{bmatrix}.$$

По (31) находятся определители матриц из условия (2) при $n = 2$:

$$\det \begin{bmatrix} 1,5 & 3 + 6\omega(x_2) \\ 2 & 8\omega(x_2) \end{bmatrix} = -6, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & -2,25 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 13,5;$$

т.е. условия (2) выполняются и КЛМ (30) является полной в области $\Omega_{\text{УН}} = \mathbb{R}^2$, $\|x\| < \infty$.

В рассматриваемом случае K_p -изображения внешних воздействий имеют вид: $G(p) = p$, $F(p) = p(p^2 + 0,25)$, т.е. $\Phi(p) = p(p^2 + 0,25)$. По формулам (14)–(16) находятся полиномы:

$$\begin{aligned} B(p, x) &= 9, & A(p, x) &= (p - 2)(p - 4\omega(x_2)), \\ B_f(p, x) &= -3,75p + 15\omega(x_2) + 13,5, \\ V_1(p, x) &= 1,5p, & V_2(p, x) &= 2(p - 2), \\ W_1(p, x) &= p + 5\omega(x_2), & W_2(p, x) &= 3(p - 2). \end{aligned}$$

Первое условие (6) выполняется.

В данном случае, следуя [26], устанавливаем, что для получения квадратной матрицы G_y при минимальном ℓ достаточно обратной связи лишь по одной переменной состояния, т.е. $q = 1$, а $\tilde{x}_1 = x_1$. При этом полиномиальное уравнение (17) принимает вид:

$$(32) \quad H^*(p) = \bar{A}(p, x)\tilde{R}(p, x) + B(p, x)L(p, x) + \bar{V}_1(p, x)\tilde{L}_1(p, x),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(p, x) &= [p^2 - (4\omega(x_2) + 2)p + 8\omega(x_2)](p^3 + 0,25p), \\ \bar{V}_1(p, x) &= 1,5p(p^3 + 0,25p). \end{aligned}$$

Из принятого выше вида полиномов $\tilde{R}(p, x)$, $L(p, x)$, $Q(p, x)$, $L_i(p, x)$ с учетом $q = 1$ и $\mu_{\text{НУ}} = \min\{r - l, r - \kappa, r - \tilde{l}_1, 0\} = 0$ следуют равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{r} = \deg \tilde{R}(p, x) &= r - 3, & l = \deg L(p, x) &= r, \\ \tilde{l}_1 = \deg \tilde{L}_1(p, x) &= r - 3, & \ell = \deg H^*(p) &= 2 + r. \end{aligned}$$

При этом в алгебраической системе (19), эквивалентной полиномиальному уравнению (32), число уравнений есть $N_y = \ell + 1 = 2 + r + 1$, а число неизвестных коэффициентов $N_k = \tilde{r} + 1 + l + 1 + \tilde{l}_1 + 1 = 3r - 3$. Тогда из условия $N_k = N_y$ следует $r = 3$, и поэтому $\ell = 5$, $\tilde{r} = 0$, $\tilde{l}_1 = 0$, $l = 3$. При этом

$$\begin{aligned} \tilde{R}(p, x) &= \rho_0(x), & \tilde{L}_1(p, x) &= \tilde{\lambda}_{10}(x), \\ L(p, x) &= \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \lambda_2(x)p^2 + \lambda_3(x)p^3 & \text{и} & \det G_y(x) \neq 0. \end{aligned}$$

В данном случае $t_p^* = 1,5$ с, $\ell = 5$, поэтому первое неравенство (18) принимает вид $\left| \text{Re}(p_j^*) \right| \geq 3,33 \div 4,67$, $j = \overline{1, 5}$. С учетом этого неравенства и остальных условий (18) полагаем: $p_1^* = -4$, $p_2^* = -6$, $p_3^* = -9$, $p_4^* = -12$, $p_5^* = -15$, что приводит к полиному

$$H^*(p) = p^5 + 46p^4 + 807p^3 + 6714p^2 + 26\,352p + 38\,880.$$

В результате подстановки полученных значений в выражения (19)–(22) с учетом приведенных выше полиномов $B(p, x) = 9$, $\bar{A}(p, x)$ и $\bar{V}_1(p, x)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(33) \quad \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0,375 & -\omega - 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 8\omega + 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & -4\omega - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \tilde{\lambda}_{10} \\ \rho_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38\,880 \\ 26\,352 \\ 6714 \\ 807 \\ 46 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение системы (33) дает значения коэффициентов полиномов $L(p, x)$, $\tilde{L}_1(p, x)$ и $\tilde{R}(p, x)$, что позволяет записать:

$$L(p, x) = [(806,75 - 8\omega(x_2))p^3 + 6702,5p^2 + (26\,352 - 2\omega(x_2))p + 38\,880]/9, \\ R(p, x) = p(p^2 + 0,25), \quad L_1(p, x) = [48 + 4\omega(x_2)](p^3 + 0,25p)/1,5.$$

В данном случае $G(p) \equiv p$, т.е. $\nu_g = 1$, поэтому из выражения (25) получаем $\kappa = 0$ и $Q(p, x) = 4320$. Полученные данные приводят к уравнению «вход-выход» (23) искомого НУУ:

$$(34) \quad p(p^2 + 0,25)u = 4320g - (\lambda_0 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \lambda_3 p^3)y - \\ - 2[48 + 4\omega(x_2)]p(p^2 + 0,25)x_1/3.$$

С целью формирования в НУУ внутренних спектральных моделей ВВ в явном виде, что необходимо для обеспечения параметрической грубости свойства селективной инвариантности [22], уравнение (34) приводится к виду:

$$u = \left(\frac{17\,280}{p} - \frac{17\,280p}{p^2 + 0,25} \right) g - \\ - \left(\frac{806,75 - 8\omega(x_2)}{9} + \frac{17\,280}{p} - \frac{148\,817,5p - 26\,150,3125}{9(p^2 + 0,25)} \right) y - \\ - \frac{2}{3} [48 + 4\omega(x_2)]x_1.$$

Применив к этому выражению соотношения (П.2.6) и (П.2.7) из [22, с. 347], придем к квазилинейной модели искомого НУУ:

$$(35) \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 17\,280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17\,280 \end{bmatrix} g - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 \\ 26\,150,3125 \\ -148\,817,5 \end{bmatrix} y,$$

$$(36) \quad u = z_1 + z_3 - \{[806,75 - 8\omega(x_2)]y + 6[48 + 4\omega(x_2)]x_1\}/9.$$

Как видно, полученное НУУ содержит внутренние спектральные модели как постоянных составляющих ВВ, так и гармонической составляющей с частотой $\omega = 0,5$ рад/с.

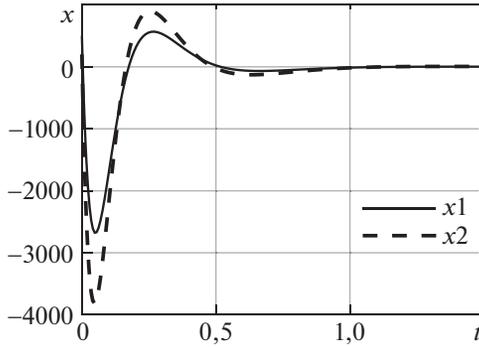


Рис. 1.

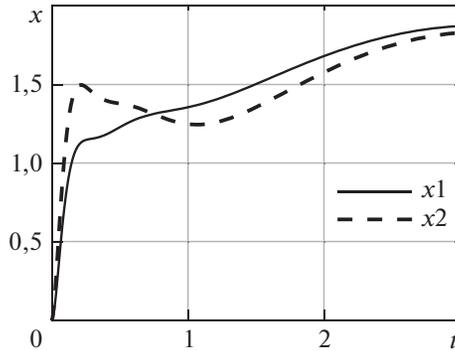


Рис. 2.

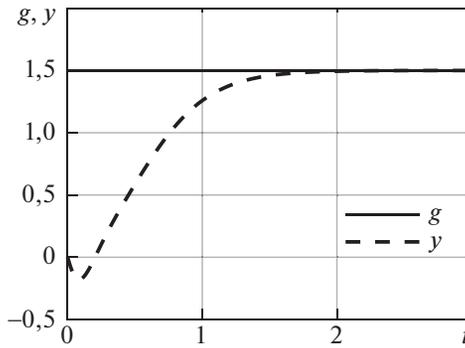


Рис. 3.

Объединив уравнения (30), (35) и (36) в одну систему, найдем, что параметры этой системы — постоянные числа, а корни ее характеристического полинома строго меньше нуля, следовательно, полученная нелинейная система является асимптотически устойчивой в целом.

Результаты моделирования системы (29), (35), (36) в MATLAB приведены на рис. 1–6. На рис. 1 показаны графики изменения переменных состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ объекта управления (29) при отсутствии внешних воздействий и

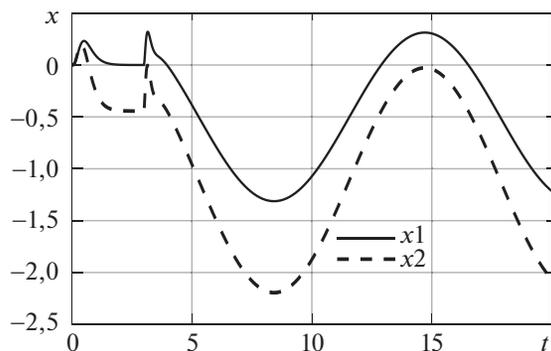


Рис. 4.

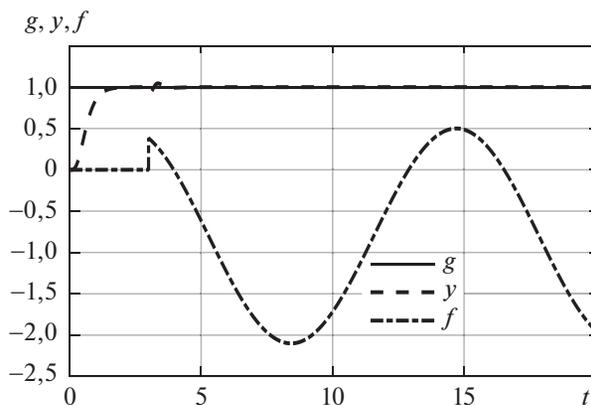


Рис. 5.

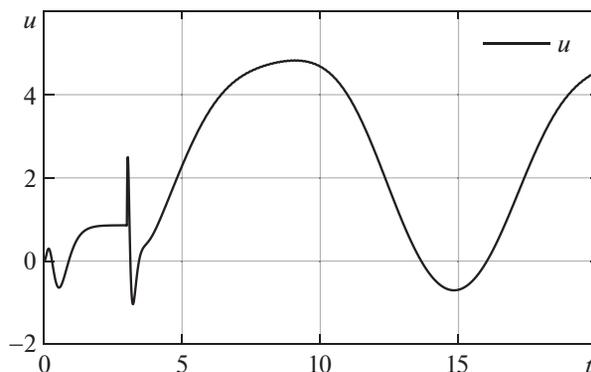


Рис. 6.

при «больших» начальных условиях, т.е. при $x_0 = [500 \ 200]^T$, $z_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ и $g(t) = f(t) = 0$. Эти графики свидетельствуют об асимптотической устойчивости синтезированной нелинейной системы.

На рис. 2 и 3 показаны переходные процессы системы при одновременном возникновении задающего воздействия $g(t) = 1,5 \cdot 1(t)$ и смещенного гар-

монического возмущения $f(t) = 1(t) + 2 \sin(0,5t)$ при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях. Несмотря на наличие возмущения, отклонение системы $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ в установившемся режиме равно нулю (рис. 3).

С целью более полного представления характера процессов в синтезированной селективно-инвариантной системе, на рис. 4–6 приведены графики изменения переменных состояния, задающего воздействия, выходной величины объекта и возмущения, а также управления в интервале времени от нуля до 20 с.

В этом случае возмущение $f(t) = -0,8 + 1,3 \sin(0,5(t - 3) + 2)$, $3 \leq t$ (рис. 5) возникает на 3 с позже задающего воздействия $g(t) = 1(t)$, поэтому после окончания переходного процесса ($0 \leq t < 3$), вызванного задающим воздействием, и переменные состояния объекта (рис. 4), и выходная переменная $y(t)$ (рис. 5), и управление $u(t)$ (рис. 6) принимают постоянные значения, что соответствует постоянному задающему воздействию.

При возникновении возмущения $f(t)$ ($t = 3$ с) в системе начинается переходный процесс, особенно заметный на графиках рис. 4 и 6. После его окончания выходной сигнал устройства управления по форме становится аналогичным внешнему возмущению, причем его постоянная и гармоническая составляющие оказываются в противофазе с аналогичными составляющими внешнего возмущения.

5. Заключение

Предложенный в работе метод синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления является аналитическим и позволяет синтезировать системы управления с нулевыми ошибками как по задающим, так и по возмущающим внешним воздействиям известной формы. Решение задачи синтеза получено на основе принципа внутренних моделей с применением оригинального метода синтеза нелинейных систем управления. В этом методе используются квазилинейные модели, которые являются точным представлением нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши с дифференцируемыми правыми частями. Разработанный метод применим для синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Свойство селективной инвариантности замкнутой системы является грубым ко всем ее параметрам, кроме спектро-задающих параметров внутренних моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математические модели ВВ — это однородные дифференциальные уравнения (ДУ) некоторого порядка, возможно в совокупности с алгебраическими [7–13, 27]. Например, моделью воздействия $f(t) = f_0 1(t)$ являются уравнения $\dot{x}_f(t) = 0$, $x_f(0) = f_0$, $f(t) = x_f(t)$, где $x_f(0)$ — начальное условие. Моделью гармонического воздействия $f(t) = f_m \sin(\omega_f t + \phi_f)$ с частотой ω_f , произвольными амплитудой f_m и фазой ϕ_f являются уравнения $\dot{x}_{f1} = -\omega_f^2 x_{f2}$,

$\dot{x}_{f2} = x_{f1}$, $f = r_1 x_{f1} + r_2 x_{f2}$ с начальными условиями x_{f10} и x_{f20} . Здесь r_1, r_2 — некоторые константы.

Для парирования влияния внешнего воздействия на ошибку системы достаточно наличия в ней лишь спектральной модели воздействия, которая однозначно описывает его форму, путем учета только его спектра. В общем случае спектральная модель ВВ $g(t)$ может быть представлена либо уравнением в переменных состояния $\dot{x}_g = Gx_g$, где G и x_g — числовая матрица и вектор, либо K_p -изображением, т.е. полиномом $G(p) = \det(pE - G)$, где $p = d/dt$. Подчеркнем, что полином $G(p)$ при $p = D$ является $K(D)$ -изображением по Кулебакину этого ВВ [7], т.е. представления спектральной модели K_p -изображением или уравнениями в форме Коши являются эквивалентными [27].

Важным свойством K_p -изображения ВВ является равенство нулю при всех $t \geq 0$ произведения K_p -изображения на это воздействие как функцию времени [7]. Например, если ВВ $\varphi_1(t) = \varphi_0 \exp(\lambda_\varphi t)$, то его K_p -изображение $\Phi_1(p) = p - \lambda_\varphi$; тогда $\Phi_1(p)\varphi(t) = (p - \lambda_\varphi)\varphi_0 \exp(\lambda_\varphi t) = \varphi_0[(d \exp(\lambda_\varphi t)/dt) - \lambda_\varphi \exp(\lambda_\varphi t)] \equiv 0$ при ограниченном φ_0 , так как $d \exp(\lambda_\varphi t)/dt = \lambda_\varphi \exp(\lambda_\varphi t)$.

Уравнение $\dot{x}_{\tilde{f}} = \tilde{F}x_{\tilde{f}}$, где матрица $\tilde{F} = \text{diag}\{0, \lambda_{\tilde{f}}\}$ — это спектральная модель ВВ, равно $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 1(t) + \tilde{f}_e \exp(\lambda_{\tilde{f}} t)$, $0 \leq t < \infty$, где \tilde{f}_0 и \tilde{f}_e — ограниченные постоянные. K_p -изображением этого ВВ является полином $\tilde{F}(p) = p^2 - \lambda_{\tilde{f}} p$. Нетрудно убедиться, что $(p^2 - \lambda_{\tilde{f}} p)\tilde{f}(t) \equiv 0$. Из приведенных примеров следует, что K_p -изображение суммы ВВ равно произведению K_p -изображений каждого из них. Отметим также, что K_p -изображение ВВ $f(t)$ легко находится по таблице изображений по Лапласу [25, с. 29]: оно равно знаменателю его изображения $f(s)$ при $s = p$. Корни K_p -изображений или, что то же самое, собственные числа матриц уравнений ВВ в форме Коши являются спектро-задающими параметрами их моделей.

Вывод уравнения «вход-выход» замкнутой системы. ДУ (7) в операторной форме можно записать в виде $[pE - H(x)]w = h(x)g + h_f(x)f$. Отсюда $w = [pE - H(x)]^{-1}\{h(x)g + h_f(x)f\}$. Подставляя это выражение с учетом равенства $[pE - H(x)]^{-1} = \text{adj}[pE - H(x)]/\det[pE - H(x)]$ во второе уравнение (7), получим уравнение (9), где

$$(II.1) \quad H(p, x) = \det[pE - H(x)],$$

$$(II.2) \quad H_g(p, x) = [c^T(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^T] \text{adj}[pE - H(x)]h(x),$$

$$(II.3) \quad H_f(p, x) = [c^T(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^T] \text{adj}[pE - H(x)]h_f(x).$$

Здесь матрица $pE - H(x)$ определяется выражением

$$(II.4) \quad pE - H(x) = \begin{bmatrix} pE - A(x) & -b(x)k^T(x) \\ \Pi(x) & pE - R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}.$$

Покажем, что операторы уравнения (9) непосредственно связаны выражениями (10)–(13) с операторами (14)–(16) уравнений «вход-выход» квазилинейных моделей (1) и (3). Выражения (14)–(16) выводятся из указанных уравнений (1) и (3) совершенно аналогично приведенному выше выводу уравнения (9). В общем случае уравнение выхода НУУ (3) может иметь вид $u = k^T(x)z + \lambda_r(x)y + \sum_{i=1}^q \tilde{\lambda}_{ir}(x)\tilde{x}_i$. При этом приведенные ниже выкладки существенно усложнятся, но их смысл не изменится [22, с. 349–353]. Поэтому для большей наглядности, далее предполагается, что $\lambda_r(x) \equiv 0$ и $\tilde{\lambda}_{ir}(x) \equiv 0$, $i = \overline{1, q}$.

Вывод оператора $H(p, x)$ (10). В соответствии с формулой (П.8), приведенной в [28, с. 223], из (П.4) следует выражение: $H(p, x) = \det[pE - H(x)] = \det \tilde{A} \det(\tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B})$. Отсюда с учетом обозначений (П.4) выводим равенство:

$$H(p, x) = \det[pE - A(x)] \det \left\{ pE - R(x) + \Pi(x) [pE - A(x)]^{-1} b(x) k^T(x) \right\}.$$

Так как $[pE - A(x)]^{-1} = \text{adj}[pE - A(x)] / \det[pE - A(x)]$, то с учетом (14), (16) и обозначения $\Pi(x)$ имеем

$$(П.5) \quad H(p, x) =$$

$$= A(p, x) \det \left[pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x) \right].$$

Здесь обозначено

$$(П.6) \quad \psi_l(p, x) = B(p, x)/A(p, x), \quad \psi_i(p, x) = V_i(p, x)/A(p, x).$$

Применяя тождество (П.25) из [28, с. 233] ко второму множителю в (П.5) с учетом (15), получим:

$$H(p, x) = A(p, x) \left[\begin{array}{l} R(p, x) + \psi_l(p, x) k^T(x) \text{adj}[pE - R(x)] l(x) + \\ + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) k^T(x) \text{adj}[pE - R(x)] l_i(x) \end{array} \right].$$

Отсюда с учетом обозначений (П.6), (15) следует оператор (10).

Вывод оператора $H_g(p, x)$ (11). С этой целью воспользуемся формулой (П.12) из [28, с. 223], которая для блочной матрицы (П.4) позволяет записать равенство:

$$(П.7) \quad \text{adj}[pE - H(x)] = \left[\begin{array}{cc} \det M \text{adj} \tilde{A} + \alpha^{-1} (\text{adj} A) \tilde{B} (\text{adj} M) \tilde{C} (\text{adj} \tilde{A}) & -(\text{adj} \tilde{A}) \tilde{B} (\text{adj} M) \\ -(\text{adj} M) \tilde{C} (\text{adj} \tilde{A}) & \alpha \cdot \text{adj} M \end{array} \right],$$

где $\alpha = \det \tilde{A} \neq 0$, $M = \tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$. Подставив в (П.2) выражения (П.7) и $h(x)$ из (8), получим с учетом обозначений (14) следующее равенство:

$$(П.8) \quad \begin{aligned} H_g(p, x) &= c^T(x) \operatorname{adj} [pE - A(x)] b(x) \cdot k^T(x) \operatorname{adj} Mq(x) = \\ &= B(p, x) k^T(x) \operatorname{adj} Mq(x). \end{aligned}$$

Так как матрица $M = \tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$, то с учетом обозначений (П.4) выводим

$$\begin{aligned} M &= pE - R(x) + \\ &+ A^{-1}(p, x) \left\{ l(x) c^T(x) + \sum_{i=1}^q l_i(x) e_i \operatorname{adj} [pE - R(x)] \right\} b(x) k^T(x). \end{aligned}$$

Раскрывая здесь фигурные скобки, с учетом обозначений (П.6) получаем

$$(П.9) \quad M = pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x).$$

Следовательно, произведение $k^T(x) \operatorname{adj} Mq(x)$ в равенстве (П.8) имеет вид

$$\begin{aligned} k^T(x) \operatorname{adj} Mq(x) &= k^T(x) \operatorname{adj} \left[pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x) \right] q(x). \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (П.27) из [28, с. 233] с учетом третьего обозначения (15) имеем

$$(П.10) \quad k^T(x) \operatorname{adj} Mq(x) = k^T(x) \operatorname{adj} [pE - R(x)] q(x) = Q(p, x).$$

Подставив это равенство в выражение (П.8), получим оператор (11).

Вывод оператора $H_f(p, x)$ (12). Из выражения (П.3) с учетом (П.7) выводим

$$(П.11) \quad H_f(p, x) = c^T(x) \left\{ (\det M) \operatorname{adj} \tilde{A} + \alpha^{-1} (\operatorname{adj} \tilde{A}) \tilde{B} (\operatorname{adj} M) \tilde{C} \operatorname{adj} \tilde{A} \right\} b_f(x).$$

Раскрывая здесь скобки и подставляя значение \tilde{B} из (П.4), получим

$$(П.12) \quad H_f(p, x) = c^T(x) \operatorname{adj} \tilde{A} b_f(x) \det M - \alpha^{-1} c^T(x) \operatorname{adj} \tilde{A} b(x) \Lambda,$$

где обозначено

$$(П.13) \quad \Lambda = k^T(x) (\operatorname{adj} M) \tilde{C} (\operatorname{adj} \tilde{A}) b_f(x).$$

С учетом равенств $\tilde{A} = pE - A(x)$ и (14) находим

$$(II.14) \quad c^T(x) \text{adj } \tilde{A} b_f(x) = B_f(p, x), \quad c^T(x) \text{adj } \tilde{A} b(x) = B(p, x).$$

Применяя формулу (II.25) из [28, с. 233)] к (II.9) с учетом (15), (16) и (II.6), имеем

$$(II.15) \quad \det M = \\ = \det \left\{ pE - R(x) + \psi_l(p, x) l(x) k^T(x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) l_i(x) k^T(x) \right\} = \\ = \det [pE - R(x)] + \psi_l(p, x) k^T(x) \text{adj } [pE - R(x)] l(x) + \\ + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) [k^T(x) \text{adj } [pE - R(x)] l_i(x)] = \\ = R(p, x) + \psi_l(p, x) L(p, x) + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) L_i(p, x).$$

Подставляя \tilde{C} , \tilde{A} из (II.4) в (II.13) и раскрывая скобки с учетом (II.9), получим:

$$(II.16) \quad \Lambda = [k^T(x) \text{adj } M l(x)] B_f(p, x) + \\ + \sum_{i=1}^q [k^T(x) \text{adj } M l_i(x)] e_i \text{adj } [pE - A(x)] b_f(x).$$

В соответствии с третьим выражением (16) $e_i \text{adj } [pE - A(x)] b_f(x) = W_i(p, x)$; по аналогии с (II.10) и с учетом (15) находим $k^T(x) \text{adj } M l(x) = L(p, x)$, $k^T(x) \text{adj } M l_i(x) = L_i(p, x)$. Тогда из (II.16) следует равенство

$$(II.17) \quad \Lambda = L(p, x) B_f(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x) W_i(p, x).$$

Подставляя выражения (II.14), (II.15) и (II.17) в (II.12), будем иметь

$$H_f(p, x) = B_f(p, x) R(p, x) + \psi_l(p, x) L(p, x) B_f(p, x) + \\ + \sum_{i=1}^q \psi_i(p, x) L_i(p, x) B_f(p, x) - \\ - \psi_l(p, x) L(p, x) B_f(p, x) - \psi_l(p, x) \sum_{i=1}^q L_i(p, x) W_i(p, x).$$

Учитывая здесь (П.6), группируя суммы и вынося множитель $A^{-1}(p, x)$ за скобку, получим

$$H_f(p, x) = B_f(p, x)R(p, x) + \sum_{i=1}^q L_i(p, x) \{V_i(p, x)B_f(p, x) - B(p, x)W_i(p, x)\} A^{-1}(p, x).$$

Наконец, учитывая здесь обозначение (13), получим оператор (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аполонский В.В., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.* Разработка и исследование селективно-инвариантных электромеханических систем с адаптацией регуляторов к изменениям уровня скорости // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 28–43.
2. *Тихомирова И.А., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.* Адаптивное селективно-инвариантное управление следящими электроприводами с упругими кинематическими передачами / Вестник ИГЭУ. 2021. Вып. 4. С. 57–64.
3. *Обухова Е.Н.* Применение метода интегральной адаптации для синтеза адаптивных законов управления пневмоприводом в условиях гармонического возмущения // Известия ЮФУ. Технические науки. 2020. № 4(214). С. 200–211.
4. *Синицын А.С.* Нелинейный синтез астатической системы управления гидравлической подвеской автомобиля. Сборник научных трудов IX Всероссийской научной конференции «Системный анализ и прикладная синергетика» / Южный федеральный университет. 2019. № 9. С. 155–165.
5. *Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю., Гуренко Б.В.* Алгоритмы терминального управления подвижными объектами мультикоптерного типа // Мехатроника, автоматизация и управление. 2019. Т. 20. № 1. С. 44–51.
<https://doi.org/10.17587/mau.20.44-51>
6. **Neydorf R.A.**, *Gaiduk A.R., Kudinov N.V., Dolgov V.V.* Application of Quasilinear and CGA Models for Design Significantly Nonlinear Control Systems // Journal of Physics: Conference Series (JPC), E3S Web of Conferences, 2020, 224, 01015, <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004121894>
7. *Кулебакин В.С.* Операторное К(D)-изображение функций и его практическое применение // Труды ВВИА им. Жуковского. 1958. Вып. 695.
8. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
9. *Надеждин П.В.* Получение фильтров Колмогорова–Винера на основе принципа селективной инвариантности / Теория инвариантности, теория чувствительности и их применения. VI Всесоюзное совещание. (Тезисы докладов). М.: ИПУ, 1982. С. 37–38.
10. *Гайдук А.Р.* Условия достижимости инвариантности систем управления энергетическими объектами // АиТ. 2006. № 5. С. 93–101.
Gaiduk A.R. Invariance Attainability Conditions for Power Plant Control Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 5. P. 759–766.

11. *Гайдук А.Р.* Синтез селективно инвариантных систем управления // Вестник ИГЭУ. Иваново: Изд-во ИГЭУ. 2017. № 1. С. 46–55.
12. *Ушаков А.В.* Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // АиТ. 1992. № 11. С. 72–82.
Ushakov A.V. Modal Estimation of Process Quality in Multidimensional Systems with External Finite-Dimensional Excitation // Autom. Remote Control. 1993. V. 53. No. 11. P. 1712–1721.
13. *Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыржин А.А., Слута О.В., Ушаков А.В.* Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении: учебное пособие для высших учебных заведений. СПб: НИУ ИТМО, 2013. 277 с. ISBN 978-5-7577-0428-9
14. *Isidori A.* Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems. Advanced Textbook in Control and Signal Processing. London, Springer, 2016. 414 p.
15. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995. 564 p. ISBN 0-471-12732-9
16. *Yang Y., Zhang H.H., Voyles R.M.* Rotary Inverted Pendulum System Tracking and Stability Control Based on Input-output Feedback Linearization and PSO-optimization Fractional Order PID Controller // Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering, London, Taylor & Francis Group. 2019, pp. 79–84. ISBN 978-1-138-60427-813
17. *Gerasimov D.N., Liu L., Nikiforov V.O.* Adaptive Backstepping Control with Fast Parametric Convergence for a Class of Nonlinear Systems // 18th European Control Conference (ECC), 2019, pp. 3432–3437.
<https://doi.org/10.23919/ECC.2019.8795898>
18. *Furtat I.B., Tupichin E.A.* Modified Backstepping Algorithm for Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1567–1578.
19. *Madeira D. de S., Adamy J.* Feedback Control of Nonlinear Systems Using Passivity Indices // Proc. IEEE Conference on Control Applications, Sydney, Australia. 2015, pp. 263–268.
20. *Gaiduk A.R.* Analytic Synthesis of Controls for Nonlinear Objects in One Class // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 2. P. 227–237.
21. *Gaiduk A.R.* A Polynomial Design for Nonlinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 10. P. 1638–1642.
22. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.
23. *Gaiduk A.R., Stojković N.M.* Analytical Design of Quasilinear Control Systems // FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics. 2014. V. 13. No. 2. P. 73–84.
24. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
25. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007. 312 с. 26.
26. *Гайдук А.Р.* Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // АиТ. 1990. № 5. С. 29–37.
Gaiduk A.R. Feedback Selection in Control System of Minimum Complexity // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 5. P. 593–600.

27. *Гайдук А.Р.* Оценивание воздействий и инвариантность // *АиТ.* 1984. № 3. С. 20–29.
28. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2004. 252 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 19.01.2022

После доработки 12.09.2022

Принята к публикации 29.09.2022

© 2023 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ О СВЕРТЫВАНИИ¹

С использованием теоремы Пятницкого о свертывании круговой критерий абсолютной устойчивости для систем Лурье с несколькими нелинейностями получен без S -процедуры. Для связанных систем с переключениями между тремя линейными подсистемами получен новый критерий существования квадратичной функции Ляпунова. На основе теоремы о свертывании доказано две теоремы, позволяющие существенно уменьшать размерность связанных систем линейных матричных неравенств. Рассмотрены вопросы улучшения кругового критерия для систем Лурье с двумя нелинейностями.

Ключевые слова: системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства, круговой критерий.

DOI: 10.31857/S000523102302006X, EDN: ONHTGO

1. Введение

Теория устойчивости систем с переключениями [1] и теория абсолютной устойчивости [2] являются основными инструментами для изучения устойчивости систем с неопределенностью [3]. Важным результатом в этой области является круговой критерий — достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в случае системы Лурье с несколькими нелинейностями [2, 4, 5]². К достаточности приводит использование специального приема — S -процедуры [6], который в этом случае приводит только к достаточным условиям. Первоначально полученная Пятницким теорема появилась (с указанием авторства) в [7], а затем и в [8] как средство, позволяющее устранить этот недостаток S -процедуры. Существование КФЛ в случае нескольких нелинейностей определяется разрешимостью системы линейных

¹ Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

² В [4] термин “круговой критерий” не используется, в [5] круговой критерий приводится как для задачи устойчивости, так и для задачи неустойчивости.

матричных неравенств [8]. В теореме Пятницкого показывается, как получить одно матричное неравенство (МН), эквивалентное системе из двух МН. Основанная на этой теореме операция перехода от системы из двух МН к одному ей эквивалентному в [8] названа свертыванием. С помощью операции свертывания необходимые и достаточные условия существования КФЛ получены в случае двух [7] и нескольких [8] нелинейностей. Теорему Пятницкого не следует рассматривать как альтернативу S -процедуры, но области применения этих приемов тесно коррелируют. Здесь в разделе 2 показано, как круговой критерий в случае нескольких нелинейностей можно получить с помощью операции свертывания и без использования S -процедуры.

В разделе 3 для линейных систем с переключениями между тремя подсистемами получен новый частотный критерий существования КФЛ, более простой по сравнению с аналогичным критерием из [9].

В разделе 4 показывается, как с помощью теоремы Пятницкого можно существенно уменьшать количество МН в связанных [8, 9] системах линейных МН (ЛМН), которые определяют существование КФЛ для линейных систем с переключениями с произвольным количеством подсистем.

Вопросы улучшения кругового критерия для систем Лурье с двумя нелинейностями рассматриваются в разделе 5. Там же приводится численный пример такого улучшения для системы шестого порядка.

Целью работы является как демонстрация возможностей теоремы Пятницкого при получении нового доказательства классического результата, так и получение на ее основе новых более эффективных условий существования КФЛ для широкого класса систем Лурье и систем с переключениями.

2. Теорема о свертывании и круговой критерий для систем с несколькими нелинейностями

Здесь теорему Пятницкого, на которой основана операция свертывания, будем называть теоремой о свертывании и использовать в следующей формулировке [8, 9].

Теорема 1. Для выполнения системы двух матричных неравенств

$$(2.1) \quad I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\tilde{\varepsilon} > 0$, при котором выполнено одно неравенство

$$(2.2) \quad I_1 + Q^+(\tilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\tilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon^2} q.$$

Очевидно, из выполнения неравенства (2.2) при некотором произвольном $\varepsilon > 0$ следует выполнение системы (2.1).

Операция свертывания, основанная на теореме 1, в [8] названа свертыванием ранга два, или r_2 -свертыванием. В оригинале [7] теорема Пятницкого приводится в более общей формулировке для произвольной матрицы Q .

Система Лурье с несколькими нелинейностями имеет вид

$$(2.3) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_j, c_j \in \mathbb{R}^n,$$

где нелинейности $\varphi_j(t, \sigma_j)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения $x(t)$, $j = \overline{1, m}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^n). Абсолютная устойчивость системы (2.3) в классе N_φ нелинейностей $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$(2.4) \quad 0 \leq \varphi_j \sigma_j \leq \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, m},$$

означает, что эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

Коротко, в удобной для настоящего изложения форме напомним рассуждения, основанные на S -процедуре и приводящие к круговому критерию в случае системы (2.3) с произвольным конечным m [4, 5]. S -процедура — это специальный прием, позволяющий перейти от неравенства на квадратичную форму, которое должно выполняться не во всем пространстве, а только в некоторой области, выделяемой квадратичными ограничениями, к неравенству на квадратичную форму, которое должно выполняться во всем пространстве, т.е. к МН. S -процедура имеет различные формулировки. В формулировке, которая здесь используется, S -процедура устанавливает соотношение между следующими условиями:

$$(2.5) \quad x^\top G_0 x < 0 \text{ при } x^\top G_1 x \geq 0, \dots, x^\top G_m x \geq 0, \quad x \neq 0,$$

$$(2.6) \quad \text{существуют } \tau_j > 0 \ (j = \overline{1, m}): x^\top G_0 x + \sum_{j=1}^m \tau_j x^\top G_j x < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0,$$

где $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_j^\top = G_j$, $j = \overline{0, m}$. Очевидно, из выполнения (2.6) следует выполнение (2.5). В случае $m = 1$ доказывается [10, с. 135] неуязвимость S -процедуры, что означает, что в этом случае условие (2.6) является не только достаточным, но и необходимым для выполнения условия (2.5).

Различные формулировки S -процедуры, историю появления этого приема и самого термина, разъяснение терминов “уязвима” и “неуязвима” и другие подробности можно найти в [2, 3, 6, 10].

Секторные ограничения (2.4) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$(2.7) \quad F_j(x, \varphi_j) = \varphi_j(\langle c_j, x \rangle - \varphi_j) \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

На производную $\dot{v}(x)$ функции Ляпунова $v(x) = x^\top Lx$ ($L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L^\top = L$) в силу системы (2.3) имеем неравенство

$$(2.8) \quad x^\top (A^\top L + LA)x + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_j \langle Lb_j, x \rangle < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0,$$

которое должно выполняться при всех (x, φ) , удовлетворяющих (2.7). В соответствии с приемом S -процедуры составим квадратичную форму

$$(2.9) \quad x^\top (A^\top L + LA)x + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_j \langle Lb_j, x \rangle + \sum_{j=1}^m \tau_j \varphi_j (\langle c_j, x \rangle - \varphi_j) < 0,$$

где $\tau_j > 0$ — неопределенные параметры, $j = \overline{1, m}$.

Неравенство (2.8) в матричной форме имеет вид

$$(Ax + B\varphi)^\top Lx + x^\top L(Ax + B\varphi) < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0,$$

где $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$, а функция ограничений $F(x, \varphi, \tau)$ представима в виде

$$F(x, \varphi, \tau) = \sum_{j=1}^m \tau_j \varphi_j (\langle c_j, x \rangle - \varphi_j) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & C\tau/2 \\ \tau C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где

$$C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m), \quad \Gamma = \tau = \text{diag} \{ \tau_1, \dots, \tau_m \}.$$

Во вновь принятых обозначениях отрицательная определенность формы (2.9) эквивалентна матричному неравенству

$$(2.10) \quad \begin{pmatrix} A^\top L + AL & LB + C\tau/2 \\ B^\top L + \tau C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0.$$

Условия разрешимости МН (2.10) следуют из частотной теоремы (КУР лемма) [6, 10]. Наиболее удобная для настоящего изложения версия частотной теоремы приведена в следствии 1 на с. 54 в [10]. Там утверждается, что при гурвицевой A и $\Gamma > 0$ разрешимость неравенства (2.10) эквивалентна выполнению частотного неравенства

$$(2.11) \quad \Gamma + \text{Re } W(i\omega) > 0, \quad W(i\omega) = \tau C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B, \quad \omega \in [-\infty, \infty],$$

где $\text{Re } W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ — эрмитово сопряженная к W , E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица. Таким образом, круговой критерий для системы (2.3) с несколькими нелинейностями состоит в проверке частотного условия (2.11), которое является достаточным условием существования КФЛ для таких систем.

В [9] показывается, как с помощью теоремы 1 получить достаточные условия существования КФЛ для системы (2.3), так чтобы эти условия совпадали с круговым критерием абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейностями. Здесь получим аналогичный результат для систем управления с произвольным конечным числом нелинейностей.

Хорошо известно и специально отмечено в [11], что абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в классе нелинейностей N_φ эквивалентна устойчивости системы с переключениями между линейными системами $\dot{x} = A_s x$ с матрицами A_s следующего вида [8]:

$$(2.12) \quad A_s = A + \sum_{j=1}^m h_{sj} b_j c_j^\top, \quad h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m, \quad s = \overline{1, N}, \quad (N = 2^m),$$

где h_{sj} независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Будем считать, что $h_1 = (0, \dots, 0)$, т.е. $A_1 = A$. Наличие КФЛ $v(x) = x^\top L x$ для системы Лурье (2.3) определяется [8] разрешимостью системы ЛМН:

$$(2.13) \quad I_s = A_s^\top L + L A_s < 0, \quad s = \overline{1, N}.$$

Из представления (2.12) следует

$$I_s = A^\top L + L A + \sum_{j=1}^m h_{sj} (L b_j c_j^\top + c_j b_j^\top L) = A^\top L + L A + \sum_{j=1}^m h_{sj} Q_j,$$

где

$$(2.14) \quad Q_j = p_j q_j^\top + q_j p_j^\top, \quad p_j \triangleq L b_j, \quad q_j \triangleq c_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для матриц Q_j используем представление в виде разности $Q_j = Q_j^+ - Q_j^-$, как это делается в теореме 1. Тогда МН

$$(2.15) \quad Q_j \leq Q_j^+(\varepsilon_j) = \frac{\varepsilon_j^2}{2} u_j^+(\varepsilon_j) u_j^+(\varepsilon_j)^\top, \quad u_j^+(\varepsilon_j) \triangleq p_j + \frac{1}{\varepsilon_j^2} q_j, \quad j = \overline{1, m},$$

выполняются при любых $\varepsilon_j > 0$. Рассмотрим следующее МН:

$$(2.16) \quad I_{\text{cir}} \triangleq A^\top L + L A + \sum_{j=1}^m Q_j^+(\varepsilon_j) < 0.$$

Так как $h_{sj} = 0$ или $h_{sj} = 1$, то

$$(2.17) \quad I_s \leq I_{\text{cir}}, \quad s = \overline{1, N}.$$

Из (2.17) следует, что выполнение МН (2.16) гарантирует выполнение системы (2.13). Подставляя в $Q_j^+(\varepsilon_j)$ выражения для p_j и q_j из (2.14) и переобозначая в (2.15) дополнительные переменные

$$(2.18) \quad \tau_j \triangleq 2/\varepsilon_j^2,$$

из леммы Шура получим, что МН (2.16) эквивалентно МН (2.10). Таким образом, круговой критерий получен без использования S -процедуры.

Собственно, необходимость из теоремы 1 нужна только при $m = 1$, чтобы показать, что в этом случае система (2.13) и МН $I_{\text{cir}} < 0$ эквивалентны.

МН (2.10) так же, как эквивалентное ему МН (2.16), далее будем называть МН кругового критерия (МНКК).

3. Устойчивость систем с переключениями между тремя линейными стационарными подсистемами

Выше было отмечено, что задача абсолютной устойчивости системы Лурье (2.3) является частным случаем задачи об устойчивости при произвольных переключениях линейной системы с переключениями

$$(3.1) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\},$$

где $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $A(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{A}$ — кусочно-постоянное отображение. В случае $m = 1$ системе (2.3) соответствует система (3.1) с переключениями между двумя подсистемами. Вопрос о существовании КФЛ для таких систем определяется разрешимостью системы из двух МН вида (2.13), эквивалентное такой системе результирующее МН (РМН) является ЛМН и частотное условие его разрешимости (круговой критерий) является в этом случае необходимым и достаточным условием существования КФЛ. Следующий естественный шаг — получить аналогичный результат для системы (3.1) при $N = 3$. В этом случае вопрос о существовании КФЛ определяется разрешимостью системы из трех МН вида (2.13). Таким образом, задача настоящего раздела состоит в получении РМН для системы из трех МН вида (2.13) в форме ЛМН и частотного критерия разрешимости этого РМН.

Отметим сразу, что возможность реализации подобной программы для системы (2.3) при $m = 2$ или системы (3.1) при $N = 4$ пока не просматривается.

В случае $N = 3$ матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$, задающие связную [9] систему (3.1), можно представить в виде

$$(3.2) \quad A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top.$$

Соответствующая система неравенств (2.13) при $N = 3$ после переобозначений (2.14) при $m = 2$ примет вид

$$(3.3) \quad I_1 + p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top < 0, \quad I_1 < 0, \quad I_1 + p_2 q_2^\top + q_2 p_2^\top < 0.$$

Применяя теорему 1 сначала к двум первым, а затем к двум последним неравенствам из (3.3), получим, что система (3.3) разрешима тогда и только тогда, когда существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что разрешима система из двух МН

$$(3.4) \quad \tilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(\varepsilon_1) u_1^+(\varepsilon_1)^\top < 0, \quad \tilde{I}_2 = I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(\varepsilon_2) u_2^+(\varepsilon_2)^\top < 0.$$

В [9] получено РМН, эквивалентное системе (3.4), и приведено частотное условие разрешимости этого МН. Однако РМН из [9] не является ЛМН относительно входящих в него дополнительных параметров и, как следствие, частотное условие его разрешимости весьма громоздко. Здесь предлагается новый прием, который позволяет получить РМН для системы (3.4) в виде ЛМН и существенно упростить частотное условие существования КФЛ для

системы (3.1) при $N = 3$. Ключевая идея этого приема состоит в том, чтобы перейти от неравенств на $(n \times n)$ -матрицы в (3.4) к эквивалентным им неравенствам на $((n + 1) \times (n + 1))$ -матрицы, используя лемму Шура. В результате получается следующая система МН, эквивалентная (3.4):

$$(3.5) \quad \tilde{I}_1 < 0 \cong \hat{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ \\ (u_1^+)^{\top} & -2/\varepsilon_1^2 \end{pmatrix} < 0, \quad \tilde{I}_2 < 0 \cong \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} I_1 & u_2^+ \\ (u_2^+)^{\top} & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Матрица разности имеет вид

$$\hat{I}_2 - \hat{I}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & u_2^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^{\top} & 2/\varepsilon_1^2 - 2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix},$$

где во избежание путаницы используется обозначение $0_{n \times m}$ — это матрица размера $n \times m$, все элементы которой равны 0. Здесь и далее символы “ \bullet ” обозначают элементы под главной диагональю симметрической матрицы, которые совпадают с соответствующими элементами над главной диагональю. Введем обозначения $\hat{p} \triangleq u_2^+ - u_1^+$ и $\gamma \triangleq 1/\varepsilon_1^2 - 1/\varepsilon_2^2$, тогда легко видеть, что

$$\hat{I}_2 - \hat{I}_1 = \tilde{p}\tilde{q}^{\top} + \tilde{q}\tilde{p}^{\top}, \quad \tilde{p} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе (3.5) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость системы (3.5) эквивалентна существованию такого $\varepsilon_3 > 0$, что разрешимо одно МН

$$(3.6) \quad \tilde{I} = \hat{I}_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} \left(\tilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_3^2} \tilde{q} \right) \left(\tilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_3^2} \tilde{q} \right)^{\top} < 0.$$

По лемме Шура МН (3.6) эквивалентно следующему МН в расширенном пространстве:

$$(3.7) \quad \tilde{I} < 0 \cong \tilde{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} \hat{I}_1 & \tilde{p} + (1/\varepsilon_3^2)\tilde{q} \\ (\bullet)^{\top} & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & \hat{p} \\ (\bullet)^{\top} & -2/\varepsilon_1^2 & \gamma + 1/\varepsilon_3^2 \\ (\bullet)^{\top} & \gamma + 1/\varepsilon_3^2 & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Используя для τ_j ($s = \overline{1,3}$) обозначения (2.18), для элементов матрицы $\tilde{\tilde{I}}$ получим соотношения:

$$u_1^+(\tau_1) = p_1 + \frac{\tau_1}{2}q_1, \quad u_2^+(\tau_2) = p_2 + \frac{\tau_2}{2}q_2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\tau_1 - \tau_2 \right).$$

Полученный результат об эквивалентности связной системы (3.3) из трех МН и МН (3.7) сформулируем в нейтральных терминах.

Теорема 2. Пусть в системе (3.3) неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν , т.е. $I_s = I_s(\nu)$, $s = \overline{1, 3}$, и $Q_j(\nu) = p_j(\nu)q_j^\top + q_j p_j^\top(\nu)$, где $p_j = p_j(\nu)$ зависит от ν линейно, а q_j от ν не зависит, $j = 1, 2$. Тогда система (3.3) эквивалентна одному МН

$$\tilde{I} \approx \begin{pmatrix} I_1(\nu) & p_1(\nu) + \frac{\tau_1}{2}q_1 & p_2(\nu) - p_1(\nu) + \frac{\tau_2}{2}q_2 - \frac{\tau_1}{2}q_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно $(\nu, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Выразим \tilde{I} в исходных терминах, используя (2.14) для p_j и q_j :

$$(3.8) \quad \tilde{I} \approx \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & L(b_2 - b_1) - (\tau_1/2)c_1 + (\tau_2/2)c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0.$$

Таким образом, МН (3.8) является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j , $j = \overline{1, 3}$, и численно решается стандартными программными средствами.

Более того, МН (3.8) может быть представлено в виде (2.10) при

$$(3.9) \quad B = (b_1 \quad b_2 - b_1), \quad C = (c_1 \quad c_2), \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1 - \tau_3) \\ \bullet & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае разрешимость МН (2.10) определяется из частотной теоремы [10, с. 54] (КУР лемма), что приводит к следующему критерию существования КФЛ для системы с переключениями (3.1) при $N = 3$.

Теорема 3. Пусть при $N = 3$ в системе (3.1) матрицы A_s определяются соотношениями (3.2) и матрица A гурвицева. Если существует какой-либо набор чисел $\tau_j > 0$, $j = \overline{1, 3}$, такой что $\Gamma > 0$ и при любых $\omega \in [-\infty, \infty]$ выполняется частотное неравенство (2.11), в котором матрица Γ и элементы матрицы $W(i\omega)$ определены в (3.9), тогда у системы (3.1) существует КФЛ (система (2.13) разрешима, система (3.1) устойчива). Если у системы (3.1) существует КФЛ (система (2.13) разрешима), то такой набор чисел $\tau_j > 0$, $j = \overline{1, 3}$, существует.

Понятно, что критерий теоремы 3 существенно проще и лучше, чем критерий теоремы 2 из [9].

4. Альтернативный взгляд на круговой критерий. Уменьшение размерности систем ЛМН

Круговой критерий получается как условие разрешимости МНКК (2.10), которое является ЛМН относительно входящих в него неизвестных L и τ_j ,

$j = 1, m$, и численно решается стандартными программными средствами. Таким образом, вместо системы (2.13), имеющей общую размерность $2^m n$, можно рассматривать одно МНКК (2.10) размерности $n + m$ с m дополнительными параметрами. При этом необходимо учитывать возможные потери в области существования КФЛ, связанные с ущербностью S -процедуры.

Критерий теоремы 2 позволяет без потерь в области существования КФЛ перейти от системы (2.13), которая в случае $N = 3$ имеет общую размерность $3n$, к одному МН (3.8) размерности $n + 2$, зависящему от трех дополнительных параметров.

Абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в случае $m = 2$ эквивалентна [9] устойчивости при произвольных переключениях системы (3.1), в которой матрицы A_s определяются соотношениями

$$(4.1) \quad A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top, \quad A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top, \quad b_s, c_s \in \mathbb{R}^n.$$

Теорему 2 можно применить к соответствующей системе ЛМН (2.13) при $N = 4$. Для этого нужно теорему 2 применить сначала к трем неравенствам из системы и затем полученное неравенство объединить в систему с оставшимся МН. В результате получим систему из двух МН, которая эквивалентна исходной, имеет общую размерность $2n + 2$ и зависит от трех дополнительных параметров. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 4$ имеет размерность $4n$.

В следующей теореме, которая объединяет теорему 1 и лемму Шура, предлагается еще один прием уменьшения размерности связанных систем ЛМН.

Теорема 4. Пусть в системе (2.1) неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν , т.е. $I_1 = I_1(\nu)$ и $I_2 = I_2(\nu)$, и Q допускает представление $Q(\nu) = I_2(\nu) - I_1(\nu) = p(\nu)q^\top + qp^\top(\nu)$, где $p = p(\nu)$ зависит от ν линейно, а q от ν не зависит. Тогда система (2.1) эквивалентна одному МН

$$\begin{pmatrix} I_1(\nu) & p(\nu) + (\tau/2)q \\ (\bullet)^\top & -\tau \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно (ν, τ) .

В результате использования теоремы 4 для системы ЛМН (2.13) при $N = 4$ получим систему из двух МН, которая эквивалентна исходной, имеет общую размерность $2n + 2$ и зависит от двух дополнительных параметров. По сравнению с использованием теоремы 2 выгода минимальна — на один дополнительный параметр меньше.

Сравним с прикладной точки зрения эффективность использования теоремы 2 и теоремы 4 для уменьшения размерности систем ЛМН еще в двух случаях системы (2.13): при $N = 6$ и при $N = 8$. В случае $N = 8$ пусть это будет система (2.13) для определения условий существования КФЛ для системы

Лурье (2.3) при $m = 3$, т.е. $N = 2^m$. Теорему 4 можно применить к четырем парам МН — в результате получим систему из четырех неравенств общей размерности $4n + 4$ с четырьмя дополнительными параметрами. С другой стороны, можно применить теорему 2 к двум тройкам МН и теорему 4 к оставшейся паре МН — в результате получим систему из трех неравенств общей размерности $3n + 5$ с семью дополнительными параметрами. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 8$ имеет размерность $8n$.

В случае $N = 6$ рассмотрим систему с переключениями с некоторым запасом связности, который позволит применить теорему 2 к двум тройкам из этой системы, а теорему 4 к трем двойкам. Например, это может быть система с переключениями типа призма, в которой матрицы A_s определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A_1 &= A, & A_2 &= A + b_3 c_3^\top, \\ A_3 &= A + b_1 c_1^\top, & A_4 &= A + b_1 c_1^\top + b_3 c_3^\top, \\ A_5 &= A + b_2 c_2^\top, & A_6 &= A + b_2 c_2^\top + b_3 c_3^\top, \quad b_s, c_s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Тогда двукратное применение теоремы 2 приведет к системе из двух неравенств общей размерности $2n + 4$ с шестью дополнительными параметрами, а трехкратное применение теоремы 4 — к системе из трех неравенств общей размерности $3n + 3$ с тремя дополнительными параметрами. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 6$ имеет размерность $6n$.

В конце раздела покажем, как теорему 4 применить для уменьшения размерности системы (2.13) при решении вопроса о существовании КФЛ для системы Лурье (2.3) с произвольным конечным m . Каждое применение теоремы 4, с одной стороны, уменьшает количество МН в системе на единицу, с другой стороны, увеличивает на единицу количество неизвестных. От системы (2.13) относительно $n(n + 1)/2$ неизвестных, имеющей в этом случае общую размерность $2^m n$, можно перейти к эквивалентной системе размерности $2^{m-1}(n + 1)$ относительно $n(n + 1)/2 + 2^{m-1}$ неизвестных.

Теорема 5. При $N = 2^m$ система МН (2.13) эквивалентна системе МН

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} A_s^\top L + L A_s & L b_m + (\tau_s/2) c_m \\ (\bullet)^\top & -\tau_s \end{pmatrix} < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}},$$

с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\tau_s > 0$.

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

5. Улучшение кругового критерия в случае двух нелинейностей

В разделе 4 было отмечено, что абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в случае $m = 2$ эквивалентна [9] устойчивости системы с переключениями (3.1), в которой матрицы A_s определяются соотношениями (4.1).

В этом случае система МН (2.13) примет вид

$$(5.1) \quad I_s = A_s^\top L + LA_s < 0, \quad s = \overline{1, 4},$$

где матрицы A_s определены в (4.1).

В [12] при $m = 2$ рассматривается задача существования КФЛ для систем Лурье с дискретным временем. Там для улучшения критерия Цыпкина предлагаются критерий A и критерий B . В [12] показано, что на одних примерах критерий A дает более точный результат, чем критерий Цыпкина, на других — наоборот. Критерий B либо повторяет, либо улучшает оценку области устойчивости по сравнению с критерием Цыпкина. В непрерывном случае аналогом критерия Цыпкина является круговой критерий, поэтому интересно, к каким результатам в непрерывном случае приведут подходы, использованные при получении критерия A и критерия B .

Чтобы перейти к предметному обсуждению, кратко повторим схему из [12] получения РМН [8], эквивалентного исходной системе (5.1):

$$\begin{array}{ccccccc} I_2 & \longleftrightarrow & I_1 & \longleftrightarrow & I_3 & \longleftrightarrow & I_4 \\ & & \downarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_3 & & \downarrow \varepsilon_2 \\ & & \tilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_3 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_2 \\ & & & & \downarrow \varepsilon_4 & & \downarrow \varepsilon_5 \\ & & & & \tilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_2 \\ & & & & & & \downarrow \varepsilon_6 \\ & & & & & & \tilde{I}. \end{array}$$

В этой схеме горизонтальные стрелки указывают на пары неравенств, к которым применима теорема 1. Вертикальные стрелки указывают на МН, полученные в результате применения этой теоремы, а ε_s — появляющиеся при этом новые параметры. Чтобы на схеме выражения для МН через u_s^\pm были одинаковы для непрерывного и дискретного случая, сохраним выражения из (2.14) для p_j и q_j через Lb_j и c_j , но изменим выражения из (2.15) для u_s^\pm через p_j и q_j , т.е. теперь векторам u_s^\pm будут соответствовать другие величины, отличные от определенных в (2.15) и используемых в разделах 2 и 3. Приведем выражения для МН из схемы через p_s и q_s из (2.14) при $m = 2$. Далее используем обозначение $\varepsilon_s^\pm = 1 \pm 1/\varepsilon_s^2$.

Неравенства первого уровня:

$$(5.2) \quad \tilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = I_2 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^-(u_1^-)^\top < 0, \quad u_1^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_1} q_1,$$

$$(5.3) \quad \tilde{I}_2 = I_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top = I_4 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^-(u_2^-)^\top < 0, \quad u_2^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_2} q_1,$$

$$(5.4) \quad \tilde{I}_3 = I_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top = I_3 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^-(u_3^-)^\top < 0, \quad u_3^\pm = p_2 \pm \frac{1}{\varepsilon_3} q_2,$$

где $\tilde{I}_1 < 0 \cong I_1 < 0$, $I_2 < 0$, $\tilde{I}_2 < 0 \cong I_3 < 0$, $I_4 < 0$, $\tilde{I}_3 < 0 \cong I_1 < 0$, $I_3 < 0$.

Неравенства второго уровня:

$$(5.5) \quad \tilde{I}_1 = \tilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^+(u_4^+)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^-(u_4^-)^\top < 0, \quad u_4^\pm = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4^\mp}{2} u_1^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4^\pm}{2} u_3^+,$$

$$(5.6) \quad \tilde{I}_2 = \tilde{I}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^+(u_5^+)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^-(u_5^-)^\top < 0, \quad u_5^\pm = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_5^\mp}{2} u_2^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_5^\pm}{2} u_3^-,$$

где $\tilde{I}_1 < 0 \cong \tilde{I}_1 < 0$, $\tilde{I}_3 < 0$, $\tilde{I}_2 < 0 \cong \tilde{I}_2 < 0$, $\tilde{I}_3 < 0$.

Результирующее матричное неравенство:

$$(5.7) \quad \tilde{I} = \tilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^+(u_6^+)^\top = \tilde{I}_2 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^-(u_6^-)^\top < 0, \quad u_6^\pm = \frac{\varepsilon_4 \varepsilon_6^\mp}{2} u_4^- + \frac{\varepsilon_5 \varepsilon_6^\pm}{2} u_5^-,$$

где $\tilde{I} < 0 \cong \tilde{I}_1 < 0$, $\tilde{I}_2 < 0$.

При получении критерия A в [12] используется подход (подход A), который, если перенести его на непрерывный случай, состоит в следующем: в РМН (5.7) два из шести дополнительных параметров полагаются равными 1, а именно $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$. Из-за этого предположения неравенство $\tilde{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1, 1, \varepsilon_6) \triangleq \tilde{I}_{(1)} < 0$ является лишь достаточным условием для выполнения всей системы (5.1). Далее сравниваются условия выполнимости этого МН $\tilde{I}_{(1)} < 0$ и условия кругового критерия. Покажем, как работает подход A в непрерывном случае. Выражения для МН второго уровня через u_s^\pm одинаковы для непрерывного и дискретного случая, поэтому кратко повторим выкладки из [12]. Если в (5.5) и (5.6) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ (в этом случае $\varepsilon_4^+ = \varepsilon_5^+ = 2$, $\varepsilon_4^- = \varepsilon_5^- = 0$), то

$$u_4^+ = \varepsilon_3 u_3^+, \quad u_4^- = \varepsilon_1 u_1^+, \quad u_5^+ = \varepsilon_3 u_3^-, \quad u_5^- = \varepsilon_2 u_2^+,$$

и для соответствующих МН второго уровня справедливы выражения

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \tilde{I}_{1(1)} &= \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top < 0, \\ \tilde{I}_{2(1)} &= \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top = I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top < 0. \end{aligned}$$

Учитывая выражения из (5.2)–(5.4) для u_s^\pm через p_j и q_j , получим, что МНКК (2.16) при $m = 2$ имеет вид (для экономии места считаем, что $u_s^+(u_s^+)^\top(\varepsilon)$ и $u_s^+(\varepsilon)u_s^+(\varepsilon)^\top$ одно и то же)

$$(5.9) \quad I_{\text{cir}} = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top(\varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top(\varepsilon_3) < 0.$$

Очевидно, из разрешимости любого из двух МН (5.8) следует разрешимость МНКК (5.9).

С другой стороны, пусть (здесь и далее) МНКК (5.9) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Тогда первое из МН (5.8) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$, а второе — при $\varepsilon_2 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Следовательно, разрешимо МН $\tilde{I}(\varepsilon_{1cir}, \varepsilon_{1cir}, \varepsilon_{2cir}, 1, 1, \varepsilon_6) < 0$ с некоторым ε_6 , которое определяется при использовании теоремы 1 для системы (5.8) из двух МН. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6. *Разрешимость МНКК (2.16) при $m = 2$ эквивалентна разрешимости РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$.*

Таким образом, в непрерывном случае использование подхода A приводит к тем же условиям существования КФЛ, что и условия кругового критерия.

При получении критерия B в [12] используется подход (подход B), который, если перенести его на непрерывный случай, состоит в следующем: в РМН (5.7) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$, т.е. оставить пять дополнительных параметров вместо шести. Далее сравнить аналитически условия выполнимости МН $\tilde{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon_6) \triangleq \tilde{I}(\varepsilon) < 0$ и МНКК (5.9).

Такое сравнение было проведено (детали опустим). В результате в рамках сделанных огрубляющих предположений, которые делают возможным такое сравнение, не удалось аналитически показать улучшения кругового критерия при подходе B . Тем не менее возможность такого улучшения остается. Чтобы это проверить, нужно сравнить области квадратичной устойчивости (ОКУ), получаемые из разрешимости РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ и МНКК (5.9) на численных примерах.

Заметим, что МН (5.5) и (5.6), и тем более РМН (5.7), не являются ЛМН относительно входящих в них переменных. Поэтому перейдем от неравенств второго уровня (5.5) и (5.6) к эквивалентным им неравенствам, которые являются ЛМН. По теореме 2, система из трех МН $I_s < 0$, $s = \overline{1, 3}$, из системы (5.1) эквивалентна одному МН

$$(5.10) \quad \tilde{I}_1 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & L(b_2 - b_1) - \frac{\tau_1}{2}c_1 + \frac{\tau_3}{2}c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j , $j = 1, 3, 4$, и эквивалентно МН (5.5). Аналогично, система из трех МН $I_s < 0$, $s = \overline{2, 4}$, из (5.1) эквивалентна одному МН

$$(5.11) \quad \tilde{I}_2 = \begin{pmatrix} A_3^\top L + LA_3 & Lb_1 + \frac{\tau_2}{2}c_1 & L(b_2 - b_1) - \frac{\tau_2}{2}c_1 - \frac{\tau_3}{2}c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_2 & (\tau_2 - \tau_3 + \tau_5)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_5 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j , $j = 2, 3, 5$, и эквивалентно МН (5.6). Если объединить эти два МН в систему

$$(5.12) \quad \overline{I}_1 < 0, \quad \overline{I}_2 < 0,$$

то разрешимость системы (5.12) эквивалентна разрешимости РМН (5.7).

Возникает естественный вопрос о соотношении параметров ε_j , от которых зависит РМН (5.7), и τ_j , от которых зависит система (5.12). Параметры ε_j появляются в РМН (5.7) в соответствии со схемой и формулами (5.2)–(5.7). Параметры τ_j появляются в системе (5.12) в соответствии с теоремой 2. При выводе теоремы 2 параметр ε_3 из (3.6) появляется в результате применения теоремы о свертывании к МН размерности $n + 1$ (аналога $\overline{\varepsilon}_3$ в схеме и в РМН (5.7) нет). Поэтому хотя между параметрами ε_j , $j = \overline{1, 3}$, из схемы и РМН (5.7) и параметрами τ_j , $j = \overline{1, 3}$, из (5.12) выполняется соответствие (2.18), но между параметрами τ_4 и τ_5 из (5.12) и параметрами ε_4 и ε_5 из РМН (5.7) такого соответствия нет. Таким образом, из $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ не следует $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ и наоборот. Поэтому разрешимость РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ не эквивалентна разрешимости системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$, хотя разрешимость РМН (5.7) эквивалентна разрешимости системы (5.12).

Возникает новая версия подхода B . В непрерывном случае будем считать аналогом критерия B из [12] условие разрешимости системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ — назовем его критерием C . Сравним теперь условия критерия C и условия кругового критерия. Для этого выясним, при каких τ_4 и τ_5 выполнены МН системы (5.12) при условии выполнения МНКК.

Теорема 7. Пусть МНКК (5.9) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Тогда система (5.12) выполняется при

$$\tau_1 = \tau_2 = 2/\varepsilon_{1cir}^2, \quad \tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2, \quad \tau_4 = \tau_5 = 2/\varepsilon_{1cir}^2 + 2/\varepsilon_{2cir}^2.$$

Доказательство теоремы 7 приведено в Приложении.

Из теоремы 7 следует, что ОКУ по критерию C не хуже, чем по круговому критерию. При этом использование критерия C не гарантирует улучшения кругового критерия. Тем не менее такое улучшение удастся показать на численных примерах. Для полноты картины приведем один такой пример, в котором ОКУ по критерию C шире, чем по круговому критерию.

Пример 1. Рассматривается система Лурье вида (2.3) при $n = 6$, в которой матрица A имеет форму Фробениуса и поэтому здесь задается только последней строкой

$$\begin{aligned} A &\sim [-10,0 \quad -34,0 \quad -49,0 \quad -40,0 \quad -20,0 \quad -6,0], \\ \text{spectr}(A) &= [-1,0 \quad -1,0 \quad -1,0 - i \quad -1,0 + i \quad -1,0 - 2i \quad -1,0 + 2i], \\ b_1^\top &= (0 \ 0 \ 0 \ k_1 \ 0 \ 0), \quad b_2^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_2 \ 0), \\ c_1^\top &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1), \quad c_2^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1). \end{aligned}$$

Таблица

Прогр. \ Лучи	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(3, 1)
NS	0,45684	0,32608	0,25301	0,28482	0,20674
CC	0,44831	0,31943	0,24813	0,28088	0,20453
C	0,45684	0,32608	0,25301	0,28482	0,20674

Для рассматриваемого примера находятся оценки ОКУ, вычисляемые с помощью трех тестируемых алгоритмов. Алгоритм *NS* (обозначения алгоритмов далее будут использоваться в таблице) состоит в нахождении ОКУ в соответствии с необходимыми и достаточными условиями существования КФЛ путем проверки системы (5.1). Алгоритм *CC* состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью кругового критерия, т.е. путем проверки МНКК (2.10). Алгоритм *C* состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью критерия *C*, т.е. путем проверки системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$.

Для нахождения ОКУ рассматривается луч, выходящий из точки 0. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ (естественно, $\alpha_s \geq 0$), направленный вдоль этого луча, и решается задача определения наибольшего числа k , такого что при $(k_1, k_2) = k\bar{\alpha}$ выполняется условие соответствующего критерия. Сравнение алгоритмов из указанного набора проводилось по пяти различным направлениям $\bar{\alpha}_i, i = \overline{1, 5}$.

В приведенной таблице в верхней строке указываются лучи $\bar{\alpha}_i, i = \overline{1, 5}$, вдоль которых оценивается ОКУ, а в левом столбце приведены обозначения используемых для этого алгоритмов.

В соответствии с проведенными вычислениями приходим к выводу, что для рассматриваемого примера ОКУ по критерию *C* не только превосходит ОКУ по круговому критерию, но и совпадает (с точностью до погрешности вычислений) с точной ОКУ для всех рассмотренных направлений $\bar{\alpha}_i$.

Система (5.12) имеет общий порядок $2n + 4$ и в случае $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ зависит от пяти дополнительных параметров. В то же время система $\cong I_1 < 0, I_4 < 0$, или система $I_1 < 0, I_2 < 0$, имеют (каждая) общий порядок $2n + 2$ и зависят от трех дополнительных параметров. При этом каждая из этих систем эквивалентна исходной (5.1) без потерь в области разрешимости. Кроме этого, применяя к системе (5.1) теорему 5, получим систему из двух ЛМН, эквивалентную исходной, имеющую общий порядок $2n + 2$ и зависящую от двух дополнительных параметров. Таким образом, проверка условия критерия *C* вызывает исключительно теоретический интерес. С прикладной точки зрения, чтобы численно проверить разрешимость системы (5.1), лучше всего решать систему из двух ЛМН, полученную из теоремы 5.

Замечание 1. Во всех приведенных в статье условиях существования КФЛ, которые состоят в проверке ЛМН, зависящих от дополнительных параметров, в силу линейности можно без потерь в области разрешимости положить один дополнительный параметр равным 1, уменьшая тем самым на

единицу количество дополнительных параметров. К этим условиям относятся МНКК (2.10), ЛМН (3.8), системы ЛМН (4.2) и (5.12).

6. Заключение

Во-первых, круговой критерий для системы Лурье с несколькими нелинейностями получен без S -процедуры. Во-вторых, для связной системы с переключениями между тремя линейными подсистемами получен критерий существования КФЛ как в форме условий разрешимости одного ЛМН, так и в форме частотного условия. В-третьих, доказаны две теоремы, позволяющие существенно уменьшить размерность связной системы ЛМН. Использование этих теорем демонстрируется для случая системы Лурье при $m = 2$, $m = 3$ и произвольном конечном m , а также для систем с переключениями при $N = 6$. В-четвертых, проведено сравнение различных подходов для улучшения кругового критерия для системы Лурье при $m = 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 5. Пусть при $N = 2^m$ в системе (2.13) МН занумерованы таким образом, что первые 2^{m-1} МН $I_s < 0$, $s = \overline{1, 2^{m-1}}$, совпадают с неравенствами системы (2.13) при $N = 2^{m-1}$, а следующие 2^{m-1} МН $I_s < 0$, $s = \overline{2^{m-1} + 1, 2^m}$, занумерованы следующим образом:

$$I_{s+2^{m-1}} = I_s + \left(Lb_m c_m^\top + c_m b_m^\top \right) < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}}.$$

Тогда к парам МН

$$(П.1) \quad I_s < 0, \quad I_{s+2^{m-1}} < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}},$$

применима теорема 1. В результате получим, что система МН (2.13) эквивалентна системе МН

$$(П.2) \quad I_s + \frac{\varepsilon_s^2}{2} \left(Lb_m + \frac{1}{\varepsilon_s^2} c_m \right) \left(Lb_m + \frac{1}{\varepsilon_s^2} c_m \right)^\top < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}},$$

с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\varepsilon_s > 0$. Если в (П.2) взять $\varepsilon_s = \varepsilon_m > 0$, $s = \overline{1, 2^{m-1}}$, то получим еще одно доказательство, теперь по индукции, перехода от системы (2.13) к МНКК (2.16). Если к каждой паре (П.1) применить теорему 4, то получим, что система МН (2.13) эквивалентна системе МН (4.2) с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\tau_s \triangleq 2/\varepsilon_s^2$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 7. Покажем, что из выполнения МНКК (5.9) следует существование τ_4 , при котором выполнено МН (5.10). Как и в [12], чтобы определить условия, при которых из отрицательной определенности одной матрицы $I_a(\nu) < 0$, зависящей от условного параметра ν , следует отрицательная определенность другой матрицы $I_b(\nu) < 0$,

будем исходить из очевидного достаточного требования: если $I_a(\nu) < 0$ и $I_b(\nu) \leq I_a(\nu)$, то $I_b(\nu) < 0$.

Для удобства вернемся к обозначениям, используемым при получении теоремы 2, и преобразуем МН (5.10) (лемма А4 [13, с. 253])

$$\begin{aligned}
\cong \widehat{I}_1 &= \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \delta_1 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0 \cong \widehat{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \delta_1 \end{pmatrix}^\top = \\
&= \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} u_1^+(u_1^+)^\top & \delta_1 u_1^+ \\ (\bullet)^\top & \delta_1^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} I_1 + \frac{1}{\tau_1} u_1^+(u_1^+)^\top & \frac{\delta_1 - \tau_1}{\tau_1} u_1^+ + u_3^+ \\ (\bullet)^\top & \frac{\delta_1^2}{\tau_1} - \tau_4 \end{pmatrix} < 0,
\end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение $\delta_1 \triangleq (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2$ и опущены аргументы у векторов $u_j^\pm = u_j^\pm(\tau_j)$. Введем еще упрощающие обозначения $\alpha_1 \triangleq \frac{\delta_1 - \tau_1}{\tau_1}$ и $\beta_1 \triangleq \frac{\tau_1}{\tau_1 \tau_4 - \delta_1^2}$, тогда по лемме Шура получим

$$(П.3) \quad \widehat{I}_1 < 0 \cong \widehat{I}_1 = I_1 + \frac{1}{\tau_1} u_1^+(u_1^+)^\top + \beta_1 (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+) (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+)^\top < 0.$$

При $\tau_1 = 2/\varepsilon_{1cir}^2$ и $\tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2$ разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам I_{cir} из (5.9) и \widehat{I}_1 из (П.3), представляет собой разность квадратов

$$\widehat{I}_1 - I_{cir} \triangleq \Delta_1 = \beta_1 (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+) (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+)^\top - \frac{1}{\tau_3} u_3^+(u_3^+)^\top.$$

Неравенство $\Delta_1 \leq 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_1 u_1^+ + u_3^+ = \lambda_1 u_3^+,$$

что возможно только если $\alpha_1 = 0$ или $\tau_4 = \tau_1 + \tau_3$. В этом случае $\Delta_1 = 0$.

Далее выясним, при каких τ_5 из выполнения МНКК (5.9) следует выполнение МН (5.11). Для этого повторим с МН (5.11) манипуляции, проделанные выше с МН (5.10). В результате получим

$$(П.4) \quad \cong \widehat{I}_2 < 0 \cong \widehat{I}_2 = I_3 + \frac{1}{\tau_2} u_2^+(u_2^+)^\top + \beta_2 (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-) (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-)^\top < 0,$$

где $\delta_2 \triangleq (\tau_2 - \tau_3 + \tau_5)/2$, $\alpha_2 \triangleq \frac{\delta_2 - \tau_2}{\tau_2}$ и $\beta_2 \triangleq \frac{\tau_2}{\tau_2 \tau_5 - \delta_2^2}$. Примем во внимание $u_2^+(\tau) = u_1^+(\tau)$ и воспользуемся соотношением $I_1 + \frac{1}{\tau_3} u_3^+(u_3^+)^\top(\tau_3) = I_3 + \frac{1}{\tau_3} u_3^-(u_3^-)^\top(\tau_3)$. Тогда при $\tau_2 = 2/\varepsilon_{1cir}^2$ и $\tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2$ разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам I_{cir} из (5.9) и \widehat{I}_2 из (П.4), представляет собой разность квадратов

$$\widehat{I}_2 - I_{cir} \triangleq \Delta_2 = \beta_2 (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-) (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-)^\top - \frac{1}{\tau_3} u_3^-(u_3^-)^\top.$$

Неравенство $\Delta_2 \leq 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_2 u_2^+ + u_3^- = \lambda_2 u_3^-,$$

что возможно только если $\alpha_2 = 0$ или $\tau_5 = \tau_2 + \tau_3$. В этом случае $\Delta_2 = 0$.

Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhäuser, 2003.
2. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. <https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143937>
3. *Поляк В.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ.* 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak V.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
4. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // *АиТ.* 1967. № 6. С. 5–30.
Yakubovich V.A. Frequency conditions for the absolute stability of control systems with several nonlinear or linear nonstationary blocks // *Autom. Remote Control.* 1967. V. 28. No. 6. P. 1. P. 857–880.
5. *Якубович В.А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II. Системы с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // *АиТ.* 1971. № 6. С. 25–34.
Yakubovich V.A. Absolute Instability of Nonlinear Control Systems. II // *Autom. Remote Control.* 1971. V. 32. No. 6. P. 1. P. 876–884.
6. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // *АиТ.* 2006. № 10. С. 77–121.
Gusev S.V., Likharnikov A.L. Kalman–Popov–Yakubovich Lemma and the S-Procedure: A Historical Essay // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.

7. *Скородинский В.И.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. I // *АиТ.* 1981. № 9. С. 21–29.
Skorodinskii V.I. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Two Nonlinear Nonstationary Elements. I // *Autom. Remote Control.* 1981. V. 42. No. 9. P. 1. P. 1149–1157.
8. *Каменецкий В.А.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // *АиТ.* 1983. № 12. С. 20–30.
Kamenetskiy V.A. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Several Nonlinear Nonstationary Elements // *Autom. Remote Control.* 1983. V. 44. No. 12. P. 1543–1552.
9. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // *АиТ.* 2017. № 12. С. 3–25.
Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Hybrid Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 12. P. 2101–2119.
10. *Геллиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
11. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // *АиТ.* 2019. № 8. С. 9–28.
Kamenetskiy V.A. Switched Systems, Lur’e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.
12. *Каменецкий В.А.* Дискретные попарно связанные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // *АиТ.* 2022. № 9. С. 55–80.
Kamenetskiy V.A. Discrete-Time Pairwise Connected Switched Systems and Lur’e Systems. Tsyupkin’s Criterion for Systems with Two Nonlinearities // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 1371–1392.
13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 14.07.2020

После доработки 07.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

Стохастические системы

© 2023 г. С.А. БУЛГАКОВ (s.a.bulgakov@gmail.com),
В.М. ХАМЕТОВ, д-р физ.-мат. наук (khametovvm@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА НЕЙ С ГАУССОВСКИМИ ОШИБКАМИ

Статья посвящена решению задачи оптимального в среднеквадратичном смысле стохастического восстановления квадратично интегрируемой относительно меры Лебега функции, заданной на конечномерном компакте. В ней обосновывается процедура оптимального восстановления вышеуказанной функции, которая наблюдается в каждой точке этого компакта с гауссовскими ошибками. Здесь приводятся условия существования оптимальной процедуры стохастического восстановления, а также ее свойства несмещенности и состоятельности. Кроме того, предложена и обоснована процедура почти оптимального стохастического восстановления, которая позволяет: i) оценить зависимость среднеквадратического отклонения от количества ортогональных функций и числа наблюдений, ii) найти такое количество ортогональных функций, которое минимизирует это среднеквадратическое отклонение.

Ключевые слова: ортогональные функции, коэффициенты Фурье, ошибка наблюдения, проекционная оценка, несмещенность, состоятельность.

DOI: 10.31857/S0005231023020071, **EDN:** ONSJBQ

1. Введение

Статья посвящена теории оптимального восстановления квадратично интегрируемых функций относительно меры Лебега, определенных на конечномерном компакте, которые наблюдаются с гауссовскими ошибками. В ней устанавливаются условия существования оптимальной процедуры восстановления по критерию минимума среднеквадратического отклонения (СКО), использующей минимальное количество ортонормированных функций.

Под задачей стохастического восстановления (СВ) неизвестной функции из некоторого класса обычно понимают следующее: имеется возможность наблюдать значение этой функции с ошибками в любой точке области ее определения и требуется оценить (восстановить) ее по результатам наблюдений в соответствии с заданным критерием оптимальности. Следует отметить, что эта проблема относится к теории непараметрического (бесконечномерного)

оценивания. Задачам непараметрического оценивания (НО) посвящено большое количество исследований, например, [1–22].

Обзор результатов, в хронологическом порядке, по теории СВ функций.

В [3, 4] рассматривается задача оценивания одномерной неизвестной квадратичноинтегрируемой плотности распределения по независимым наблюдениям за ней. В них доказываемся, что для ее решения следует использовать ядерные оценки [3], которые являются асимптотически несмещенными и состоятельными. Впоследствии такой класс оценок получил название оценок Парзена—Розенблатта.

[5] — это работа, в которой содержится обобщение оценок Парзена—Розенблатта на многомерный случай.

Статья [6] посвящена решению задачи восстановления скалярной неизвестной функции по наблюдениям за ней с некоррелированными гауссовскими ошибками в конечном числе точек из области ее определения. В работе описаны оптимальные рекуррентные алгоритмы ее восстановления, а также установлена скорость их сходимости к неизвестной функции.

В [7] рассматривается задача восстановления неизвестной плотности распределения определенной на числовой прямой. В ней предложена проекционная оценка этой плотности, СКО которой эквивалентно СКО проекционной оценки, предложенной Н.Н. Ченцовым в [9].

В [8] решается задача НО неизвестной плотности распределения абсолютно непрерывной случайной величины в предположении, что имеется возможность наблюдать m независимых случайных величин, плотность распределения которых неизвестна. В статье установлены условия, которые обеспечивают существование ядерной оценки этой неизвестной плотности. Кроме того, доказано, что эти оценки асимптотически несмещенные и состоятельные. Результат исследования обобщает известные результаты Парзена—Розенблатта, Мёрфи [3–5, 7].

В монографии [9] изложен новый метод решения задач НО. В ней Н.Н. Ченцовым впервые было введено понятие проекционной оценки. Его подход к восстановлению неизвестной плотности распределения состоял в оценке «отрезков» коэффициентов ряда Фурье этой плотности по подходящей системе ортонормированных функций. Оказалось, что эти оценки являются линейными функционалами от наблюдений. С их помощью строятся оптимальные оценки в смысле критерия минимума СКО. Такой подход позволил автору доказать существование такого конечного числа членов ряда Фурье оценки, который обеспечил сходимость к неизвестной плотности, причем скорость сходимости по порядку величины являлась оптимальной.

В монографии [10] предложен метод решения задачи восстановления неизвестной функции, который основывается на теории поперечников Колмогорова и теореме Гливленко—Кантелли.

[11] — это монография, которая посвящена изложению асимптотических методов в теории точечного и НО. В ней также излагается теория оценивания

неизвестного гладкого квадратичноинтегрируемого сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного «белого» гауссовского шума. Показано что это задача НО. В качестве критерия использован критерий минимума СКО. Показано, что существует такая оценка сигнала, СКО которой (по порядку величины) эквивалентно СКО оптимальной оценки. Также доказано, что вышеуказанная оценка неулучшаема.

Монография [12] посвящена НО неизвестной плотности распределения. В ней для ядерных оценок плотности распределения Парзена—Розенблатта устанавливаются асимптотическая несмещенность и состоятельность. Кроме того, в ней исследованы предельные свойства уклонений этих оценок плотности от истинной плотности распределения. В книге также излагается метод построения непараметрической оценки регрессионной кривой.

В [13] находятся скорости сходимости оценок максимального правдоподобия в задачах НО неизвестной функции из L_2 по наблюдениям за ней в конечном числе точек. В статье получены условия, при выполнении которых, скорость сходимости неулучшаема. В частности, доказано, что для монотонной неизвестной функции из L_2 нелинейная оценка максимального правдоподобия по порядку величины имеет скорость сходимости, лучшую по сравнению с любой линейной непараметрической оценкой.

В [14, 15] содержится подробный обзор результатов по теории СВ. В них для решения этой задачи использован минимаксный подход.

В [16] для двухкомпонентного случайного вектора (первая компонента которого — это случайный элемент со значениями в некотором измеримом пространстве с вероятностной мерой, а вторая — случайная величина) рассматривается задача оценивания функции регрессии для первой компоненты по n независимым наблюдениям за второй. Предполагается, что функция регрессии принадлежит некоторому классу гладких квадратичноинтегрируемых функций, у которого известны такие метрические характеристики, как ϵ -энтропия по Колмогорову либо поперечники Колмогорова, исследуются асимптотические свойства ее СКО.

Монография [17] посвящена теории НО и состоит из трех глав. В книге излагаются следующие направления теории НО: i) методы построения НО; ii) статистические свойства НО: сходимость и скорость сходимости; iii) адаптивные процедуры НО. Направления i) и ii) подробно обсуждаются в главе 1. Направление iii) составляет основное содержание монографии и подробно изложено в главах 2 и 3.

В статье [18] решается задача восстановления неизвестной скалярной квадратичноинтегрируемой функции по наблюдениям за ней в каждой точке конечномерной компактной области определения с независимыми гауссовскими ошибками. В ней, в спектральном представлении, устанавливаются условия существования процедуры оптимального восстановления в смысле критерия минимума СКО. Кроме того, доказывается, что эта процедура восстановления обладает свойствами несмещенности и состоятельности.

[19] — это статья, которая посвящена применению оптимальных методов интерполяции, основанных на свойствах эллиптических функций Абе-ля—Якоби, для оценивания непараметрической регрессии. В ней приводится описание методов оптимальной интерполяции статистических данных при использовании некоторых критериев оптимальности. В частности, описано, как использовать эти методы для решения задачи СВ.

Статья [20] посвящена разработке метода СВ сигналов для общих линейных моделей. В ней показано, что задача СВ может быть сведена к решению монотонных вариационных неравенств. Численное решение которых может быть найдено с помощью известных эффективных вычислительных процедур. В ней доказано, что сильно монотонные вариационные неравенства имеют верхнюю границу.

В статье [21] рассматривается задача оценивания линейного функционала по наблюдениям за ним, которые являются аддитивной смесью этого функционала и «белого» гауссовского шума. В качестве оценок этого функционала используются проекционные. В статье описывается методика выбора такой наилучшей оценки. В ней довольно подробно излагается идея построения такого рода оценок.

Работа [22] посвящена СВ скалярных, гладких, детерминированных, квадратичноинтегрируемых функций относительно меры Лебега на действительной прямой по наблюдениям за ними с независимыми гауссовскими ошибками в каждой точке области определения. В ней устанавливаются условия существования оптимального оценивания в смысле критерия минимума СКО. Особенностью рассматриваемой в статье задачи является то, что как наблюдаемая последовательность, так и критерий качества описываются не в координатном представлении, а в терминах коэффициентов Фурье наблюдений, восстанавливаемой функции и ошибок наблюдений. Такое представление позволяет при использовании тригонометрического базиса формулировать результаты в простой удобной форме. Для данного случая получены легко проверяемые условия существования оптимальной процедуры восстановления, а также такие ее свойства, как несмещенность и состоятельность. Кроме того, для гладких функций из пространства Соболева построена процедура восстановления, которая эквивалентна оптимальной. Следует отметить, что в этом случае построенная процедура имеет СКО, которое обладает следующими свойствами:

- (i) из-за наличия смещения отклонение меньше оптимального;
- (ii) не зависит от восстанавливаемой функции;
- (iii) оно неулучшаемо.

Актуальность. Как следует из вышеприведенного обзора, проблеме СВ посвящено множество исследований. В [3–17, 19, 20] данная проблема сформулирована в координатном представлении, математическое описание которого составляют формулы (1)–(4) и (15) раздела 2. Из [26] следует, что решение экстремальной задачи (15) существует, поскольку выполнены условия леммы

Янкова—фон Неймана, причем оно является аналитической функцией. Значит, решение задачи (15) не является борелевской функцией и поэтому не существует непараметрической статистической оценки неизвестной квадратично интегрируемой функции, наблюдаемой на фоне аддитивного «белого» шума.

Отметим также статью [21], в которой показано, что не существует, в координатном представлении, оценки максимального правдоподобия неизвестной квадратично интегрируемой функции, наблюдаемой на фоне помех, представляющих собой гауссовскую случайную функцию, лежащую в некотором гильбертовом пространстве.

В работе [18] предложен другой подход, который предполагает, что наблюдаются коэффициенты Фурье аддитивной смеси неизвестной функции и гауссовской функции ошибок, которая имеет вид (7). Такое представление было названо в тексте спектральным. В частности, из (7) следуют условия существования и явный вид оценок каждого коэффициента Фурье и его дисперсии. Этот факт позволил авторам впервые установить явный вид оптимальной непараметрической оценки и СКО неизвестной функции (теорема 1, следствие 1). Опираясь на эти результаты, установлены свойства несмещенности и состоятельности этих оценок (теоремы 2, 3). Отметим, что из работ [3–17, 19–21] не ясно, насколько предложенные в них непараметрические оценки близки к оптимальным.

Опираясь на эти результаты, установлено:

(i) явная зависимость СКО неизвестной функции, когда в качестве ее оценки использована случайная функция, использующая только первые $N \in \mathbb{Z}^+$ слагаемых в (23) и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ наблюдений (теорема 4);

(ii) для каждого m существование $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$, которое доставляет минимальное значение этому СКО (теорема 5).

Кроме того, предложен конструктивный способ нахождения значения $N^0(m)$ (теорема 6). Этот результат позволил установить условия эквивалентности СКО и m^{-1} , а также эквивалентности $N^0(m)$ и m (следствие 3). Данные утверждения позволяют дать определение проекционной оценки Ченцова (смотри формулу (40)) и установить ее СКО. Последнее позволило оценить скорость сходимости этой процедуры к неизвестной функции (теорема 8), а также ее независимость от вида неизвестной функции (теорема 10).

В конце статьи приведен пример, в котором удается в явном виде найти значение $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$.

Расположение материала работы следующее.

В разделе 2 излагается постановка задачи СВ в спектральном представлении.

В разделе 3 устанавливается условие существования решения задачи СВ (теорема 1), которое в свою очередь является задачей НО. Кроме того, здесь

устанавливаются такие статистические свойства оптимального восстановления, как несмещенность (теорема 2) и состоятельность (теорема 3).

Раздел 4 посвящен нахождению зависимости СКО $V_m(N)$ от числа использованных ортонормированных функций и числа наблюдений (теорема 4). Здесь: i) доказывается что для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ существует $N^0(m)$, которое доставляет $V_m(N)$ наименьшее значение (теорема 5); ii) установлен конструктивный способ нахождения $N^0(m)$. Кроме того, получены условия эквивалентности $V_m(N^0)$ и $\frac{N^0(m)}{m}$, а также эквивалентности $N^0(m)$ и m .

Раздел 5 посвящен описанию свойств оптимальных проекционных оценок, имеющих СКО $V_m(N^0(m))$ (смотри формулу (40)) неизвестной функции, названных в работе оценками Ченцова (ПОЧ). Здесь также доказано, что:

- 1) ПОЧ сходится к неизвестной функции со скоростью порядка $m^{-\frac{1}{2}}$;
- 2) ПОЧ является асимптотически несмещенной и установлены условия ее состоятельности.

Доказательство всех утверждений составляет содержание двух приложений.

2. Определения и обозначения, необходимые для формулировки задачи стохастического восстановления. Обоснование возможности использования спектрального представления

2.1. Пусть K — конечномерный компакт, $\mathcal{B}(K)$ — борелевская σ -алгебра в K , а $L_2(K, \Lambda)$ — множество функций $f: K \rightarrow \mathbb{R}^1$ — квадратично интегрируемых относительно меры Лебега Λ на K , т.е. $\int_K f^2(x)dx < \infty$. Поскольку $L_2(K, \Lambda)$ — сепарабельное гильбертово пространство, то в нем существует (вообще говоря неединственная) полная, ортонормированная система функций, которую мы обозначаем через $\{\varphi_j(x)\}_{j \geq 0}$, т.е. для любых $j, j' \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ ($\overline{\mathbb{Z}}^+ \triangleq \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$) функции $\varphi_j(x), \varphi_{j'}(x) \in L_2(K, \Lambda)$ такие, что $\int_K \varphi_j(x)\varphi_{j'}(x)dx = \delta_{j,j'}$, здесь $\delta_{j,j'}$ — символ Кронекера, причем $\sum_{j=0}^{\infty} \int \varphi_j^2(x)dx < \infty$ [24]. Отсюда следует, что для почти всех $x \in K$

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x),$$

где $\{c_j\}_{j \in \overline{\mathbb{Z}}^+}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т.е. $c_j \triangleq \int_K f(x)\varphi_j(x)dx$.

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — полное вероятностное пространство, на котором задана измеримая функция $n: \mathbb{Z}^+ \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^1$, обозначаемая $n_m(x)$, такая, что для любых $x \in K$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ выполнены условия (n_1) .

Условия (n_1) :

$$(2) \quad E n_m(x) = 0, \quad \sigma^2 \triangleq E \int_K n_m^2(x)dx < \infty,$$

и для любых $y, x \in \mathbb{K}$ причем $y \neq x$ и $m \neq q$

$$(3) \quad \mathbb{E}n_m(x)n_q(x) = 0, \quad \mathbb{E}n_m(y)n_m(x) = 0.$$

Здесь через $\mathbb{E}(\cdot)$ обозначен интеграл Лебега относительно вероятностной меры \mathbb{P} .

Очевидно, что на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{F}$ определена мера $\Lambda \times \mathbb{P}$, обозначаемая $\tilde{\mathbb{P}}$.

Предположим, что в любой точке $x \in \mathbb{K}$ мы наблюдаем функцию $y_m(x)$, которая представляет собой сумму функций $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$ и $n_m(x)$, т.е. наблюдаем функцию $f(x)$ с аддитивными ошибками $n_m(x)$:

$$(4) \quad y_m(x) = f(x) + n_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x) + n_m(x) \quad - \tilde{\mathbb{P}}\text{-п.в.},$$

где $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ — номер наблюдения.

2.2. Нам также потребуются обозначения для коэффициентов Фурье случайных функций $y_m(x)$ и $n_m(x)$:

$$(5) \quad y_m^j \triangleq \int_{\mathbb{K}} y_m(x) \varphi_j(x) dx,$$

$$(6) \quad n_m^j \triangleq \int_{\mathbb{K}} n_m(x) \varphi_j(x) dx.$$

Из (5)–(6) следует, что коэффициенты Фурье, для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ — это случайные величины. А из (1), (4), (5), (6) следует равенство \mathbb{P} -п.н.

$$(7) \quad y_m^j = c_j + n_m^j \quad - \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Так как $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$ и выполнены условия (n_1) , то из (7) следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$

$$(8) \quad \sum_{j=0}^{\infty} [c_j^2 + \mathbb{E}(n_m^j)^2] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(y_m^j)^2 = \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} (y_m^j)^2 < \infty.$$

Условия (n_2) :

(i) $\sigma_j^2 \triangleq \mathbb{E}(n_m^j)^2$, $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$, т.е. дисперсия коэффициентов Фурье ошибок не зависит от номера наблюдения;

$$(ii) \quad \sigma^2 \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty.$$

Из [23] следует, что если известны коэффициенты Фурье набора $\{y_k^j\}_{\substack{j \in \mathbb{Z}^+ \\ k=1, m}}$, $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, то любая наблюдаемая функция из набора $\{y_m(x)\}_{\substack{x \in K \\ m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0}}$ допускает представление \tilde{P} -почти всюду

$$(9) \quad y_m(x) \triangleq \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} y_m^j \varphi_j(x).$$

Пусть $\mathcal{F}_m^{y^j}$ и \mathcal{F}_m^y σ -алгебры, порожденные семействами случайных величин $\{y_k^j\}_{k=1, m}$ и $\{y_k^j\}_{\substack{j \in \mathbb{Z}^+ \\ k=1, m}}$, соответственно, т.е.

$$(10) \quad \mathcal{F}_m^{y^j} \triangleq \sigma \{y_1^j, \dots, y_m^j\},$$

$$(11) \quad \mathcal{F}_m^y \triangleq \sigma \{y_1^j, \dots, y_m^j, j \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Очевидно, что $y_m(x)$ является $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$ -измеримой случайной функцией.

Определение 1. Любую $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$ -измеримую функцию $\bar{f}_m(x)$ со значениями в \mathbb{R}^1 назовем оценкой функции $f(x) \in L_2(K, \Lambda)$, по результатам $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ наблюдений.

Определение 2. Оценку $\bar{f}_m(x)$ назовем допустимой, если

$$(12) \quad \mathbb{E} \int_K |\bar{f}_m(x)|^2 dx < \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{M}_{2,m}(\tilde{P})$ — множество допустимых оценок $\bar{f}_m(x)$. Очевидно, что $\mathcal{M}_{2,m}(\tilde{P}) \neq \emptyset$ и является гильбертовым пространством.

Определение 3. Допустимую оценку $\hat{f}_m(x) \in \mathcal{M}_{2,m}(\tilde{P})$ будем называть проекционной, если она допускает представление \tilde{P} -п.в.

$$(13) \quad \hat{f}_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,m} \varphi_j(x),$$

где для каждого $j \in \mathbb{Z}^+$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, а $c_{j,m}$ — $\mathcal{F}_m^{y^j}$ -измеримая случайная величина, которая является коэффициентом Фурье оценки $\hat{f}_m(x)$, причем $\mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,m}^2 < \infty$.

Множество проекционных оценок обозначим через $\mathbb{M}_{2,m}(\tilde{P})$. Очевидно $\mathbb{M}_{2,m}(\tilde{P}) \subseteq \mathcal{M}_{2,m}(\tilde{P})$.

В статье рассматривается задача построения проекционных оценок $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})$ неизвестной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$ по наблюдениям описываемым (7) таких, что

$$(14) \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx \rightarrow \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})}.$$

(14) — это критерий минимума СКО относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$.

Определим, что мы будем понимать под оптимальной проекционной оценкой.

Определение 4. Проекционную оценку $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})$ назовем оптимальной, если

$$(15) \quad \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx = \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx.$$

Представление данных задачи стохастического восстановления в форме (5)—(15) будем называть спектральным представлением.

2.3. Целью данной статьи является:

1) доказательство существования процедуры восстановления функции $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$, использующей конечное число ортонормированных функций, а также нахождение ее СКО;

2) исследование статистических свойств этой процедуры восстановления.

3. Условия существования оптимальных оценок неизвестной функции

Обозначим $\tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})$ — множество бесконечномерных случайных векторов $\hat{c}_m \triangleq (\hat{c}_{0,m}, \hat{c}_{1,m}, \dots)$, таких, что: i) для любого $j \in \mathbb{Z}^+$ и каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ случайная величина $\hat{c}_{j,m} - \mathcal{F}_m^{y^j}$ -измерима, ii) $\mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} |\hat{c}_{j,m}|^2 < \infty$.

3.1. Если $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})$, то $\tilde{\mathbb{P}}$ -почти всюду имеем

$$(16) \quad \hat{f}_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{c}_{j,m} \varphi_j(x),$$

где $\hat{c}_{j,m} \in \tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})$ — $\mathcal{F}_m^{y^j}$ -измеримая случайная величина, $j \in \mathbb{Z}^+$, а $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, которая является коэффициентом Фурье оценки $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})$, т.е. P-п.н.

$$(17) \quad \hat{c}_{j,m} \triangleq \int_{\mathbb{K}} \hat{f}_m(x) \varphi_j(x) dx.$$

Из (16) следует соотношение

$$(18) \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} |\widehat{f}_m(x)|^2 dx = \mathbb{E} \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^2,$$

которое является обобщением известного равенства Парсеваля [24, 25].

Из (18) следует, что $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})$ — гильбертово пространство.

Кроме того, из равенства (18) следует утверждение.

Предложение 1. $\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ и $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})$ — изоморфны.

Предложение 2. Для любого $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ существует тогда и только тогда, когда существуют $\{\widehat{c}_m^0\} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})$ такие, что

$$(19) \quad \inf_{\{\widehat{c}_{j,m}\}_{j \geq 0} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})} \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2 = \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} [c_j - \widehat{c}_{j,m}^0]^2.$$

Доказательство предложения 2 приведено в приложении 1 (см. пункт П.1.1).

Замечание 1. Из утверждения предложения 2 следует, что для существования оптимальной проекционной оценки функции из класса $\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ необходимо и достаточно, чтобы существовали оптимальные оценки ее коэффициентов Фурье.

3.2. В данном пункте мы сформулируем условия существования решения задачи оптимального СВ функции из $L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$.

Условия (n_3).

Пусть для любых $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ семейство $\{n_m^j\}_{\substack{j \in \overline{\mathbb{Z}}^+ \\ m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0}}$ образует

гауссовскую систему некоррелированных случайных величин с $\text{Law}(n_m^j) = \mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$.

Обозначим СКО оптимальной оценки через $V_m(\infty)$.

Теперь можно сформулировать теорему существования оптимального СВ.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$ и выполнены условия (n_i), $i = \overline{1, 3}$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{K}$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ существует оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$, которая $\widetilde{\mathbb{P}}$ -почти всюду допускает представление

$$(20) \quad \widehat{f}_m^0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^0 \varphi_j(x),$$

где

$$(21) \quad \widehat{c}_{j,m}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j,$$

а СКО которой $V_m(\infty)$ имеет вид:

$$(22) \quad V_m(\infty) = \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.2).

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 в отличие от [3–17, 19–21], устанавливает достаточные условия существования оптимальной проекционной оценки функции из $L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$ по наблюдениям за ней с независимыми гауссовскими ошибками.

3.3. Из теоремы 1 следует простой вид оценки $\widehat{f}_m^0(x)$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ почти всюду относительно меры $\widetilde{\mathbb{P}}$ оптимальная оценка $\widehat{f}_m^0(x)$ допускает представление:

$$(23) \quad \widehat{f}_m^0(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k(x).$$

Доказательство следствия 1 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.3).

3.4. Свойства оптимальных оценок.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оценка (20) — несмещенная.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.4).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и для почти всех $x \in \mathbb{K}$ относительно меры Лебега ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x)$ — сходится. Тогда оценка $\widehat{f}_m^0(x)$ — состоятельная.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.5).

4. Зависимость СКО оценки неизвестной функции $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$ от количества используемых ортогональных функций, числа наблюдений и некоторые ее свойства

4.1. Пусть функции $f_N(x) \triangleq \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x)$, где $c_j \triangleq \int_{\mathbb{K}} f(x) \varphi_j(x) dx$, а $N \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ — число «использованных» ортогональных функций. Очевидно, что $f_N(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$.

Пусть $\widehat{f}_{m,N}^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ — оптимальная проекционная оценка неизвестной функции $f_N(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$. Очевидно, что в силу теоремы 1 она имеет

вид:

$$(24) \quad \widehat{f}_{m,N}^0(x) \triangleq \sum_{j=0}^N \widehat{c}_{j,m}^0(x) \varphi_j(x).$$

Из (24), в силу теоремы Фубини, следует равенство

$$(25) \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} |\widehat{f}_{m,N}^0(x)|^2 dx = \mathbb{E} \sum_{j=0}^N |\widehat{c}_{j,m}^0|^2,$$

причем $\widehat{c}_{j,m}^0$ имеет вид (21).

Пусть $V_m(N)$ — СКО оценки $\widehat{f}_{m,N}^0(x)$ от функции $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$, для построения которой использован «отрезок» из N -ортогональных функций и с числом наблюдений, равным m . Очевидно $V_m(N)$ допускает представление

$$(26) \quad V_m(N) \triangleq \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_{m,N}^0(x)]^2 dx.$$

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, $N \in \mathbb{Z}^+$ справедливы следующие утверждения.

1) $V_m(N)$ допускает представление

$$(27) \quad V_m(N) = \sum_{j=0}^N \left[\frac{1}{m} \sigma_j^2 - c_j^2 \right] + \|f\|_{L_2(\mathbb{K}, \Lambda)}^2.$$

2) Пусть $\|f\|_{L_2(\mathbb{K}, \Lambda)} \geq \sigma_0^2$ и существует константа $C_{10} > 0$ такая, что $\sigma_0^2 \geq C_{10}$. Тогда справедливы неравенства

$$(28) \quad 0 < C_{10} \leq V_m(N) \leq \max \left(\|f\|_{L_2(\mathbb{K}, \Lambda)}^2, \frac{\sigma_0^2}{m} \right).$$

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.1).

4.2. Из утверждения теоремы 4 вытекает простое следствие.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ последовательность $\{V_m(N)\}_{N \in \mathbb{Z}^+}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(29) \quad \begin{cases} V_m(N+1) = V_m(N) - c_{N+1}^2 + \frac{1}{m} \sigma_{N+1}^2 \\ V_m(N) \Big|_{N=0} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2, \end{cases}$$

решение которого имеет вид (22).

2) При каждом $N \in \mathbb{Z}^+$ частичная последовательность $\{V_m(N)\}_{m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(30) \quad \begin{cases} V_{m+1}(N) = V_m(N) - \frac{1}{(m+1)m} \sum_{j=0}^N \sigma_j^2 \\ V_m(N) \Big|_{m=1} = - \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^N \sigma_j^2, \end{cases}$$

решение которого имеет вид (22).

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.2).

Замечание 3. Из утверждения 2 следствия 2 и (27), следует, что для любого $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_{m+1}(N) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m(N) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2.$$

Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} V_m(N) = 0.$$

4.3. В этом пункте установим, что при каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ последовательность $\{V_m(N)\}_{N \in \mathbb{Z}^+}$ имеет единственный минимум.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда при каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ существует единственное $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ такое, что

$$(31) \quad \inf_{N \in \mathbb{Z}^+} V_m(N) = V_m(N^0(m)).$$

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.3).

Замечание 4. Из утверждения теоремы 5 следует:

а) для любого $N \in \mathbb{Z}^+$ имеет место неравенство

$$(32) \quad V_m(N) \geq V_m(N^0(m));$$

б) для всех $s \in \mathbb{Z}^+$ таких, что $N^0(m) - s \geq 0$ и $N^0(m) + s \in \mathbb{Z}^+$ имеет место неравенство

$$(33) \quad V_m(N^0(m) - s) - 2V_m(N^0(m)) + V_m(N^0(m) + s) \geq 0.$$

4.4. В этом пункте будет описан конструктивный способ нахождения значения $N^0(m)$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ допускает представление

$$(34) \quad N^0(m) = \inf \left\{ N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \right\}.$$

Доказательство теоремы 6 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.4).

4.5. В этом пункте, основываясь на теореме 6 установлены соотношения эквивалентности между СКО ПОЧ и $\sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ имеют место неравенства

$$(35) \quad \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \leq V_m(N^0(m)) \leq 2 \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m},$$

т.е.

$$(36) \quad V_m(N^0(m)) \asymp \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Доказательство теоремы 7 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.5).

4.6. Из утверждения теоремы 7 вытекают важные утверждения.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 7. Пусть выполняются условия:

$$(i) \quad \sup_{j \in \overline{\mathbb{Z}^+}} \sigma_j^2 \leq C_{11},$$

(ii) существует $j_0 \in \{0, \dots, N^0(m)\}$ такое, что $\sigma_{j_0}^2 \geq C_{12} > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1)

$$(37) \quad C_{12} \frac{N^0(m)}{m} \leq V_m(N^0(m)) \leq C_{11} \frac{N^0(m)}{m},$$

$$\text{т.е. } V_m(N^0(m)) \asymp \frac{N^0(m)}{m};$$

2)

$$(38) \quad N^0(m) \asymp m.$$

Доказательство следствия 3 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.6).

5. Проекционные оценки Ченцова и их свойства

В разделе 4 было доказано, что для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ СКО $V_m(N)$ проекционной оценки $\widehat{f}_{m,N}^0(x)$ имеет единственный минимум (теорема 5), который достигается в точке $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$. В нем также найден конструктивный способ нахождения $N^0(m)$ (теорема 6). Кроме того, в разделе 4 установлены соотношения эквивалентности (см. теорема 7, следствие 3)

$$V_m(N^0(m)) \asymp \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \asymp \frac{N^0(m)}{m} \asymp \text{const.}$$

5.1. В этом пункте определим, что следует понимать под проекционной оценкой Ченцова (ПОЧ) неизвестной функции $f(x) \in L_2(K, \Lambda)$.

Для этого обозначим

$$(39) \quad \widetilde{f}_m^0(x) \triangleq \widehat{f}_{m,N}^0(x) \Big|_{N=N^0(m)}.$$

Очевидно, что $\widetilde{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{P})$ и допускает, в силу (20), представление \widetilde{P} -почти всюду

$$(40) \quad \widetilde{f}_m^0(x) = \sum_{j=0}^{N^0(m)} \widehat{c}_{j,m}^0 \varphi_j(x),$$

где $\widehat{c}_{j,m}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j$ — j -я компонента бесконечномерного вектора $\widehat{c}_m^0 \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$, который является коэффициентом Фурье оптимальной оценки $\widehat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{P})$.

Определение 5. $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$ -измеримую функцию $\widetilde{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{P})$ будем называть проекционной оценкой Ченцова (ПОЧ) функции $f(x) \in L_2(K, \Lambda)$, если она допускает представление (40).

Из этого определения ПОЧ и (25) следует, что СКО ПОЧ от функции $f(x) \in L_2(K, \Lambda)$, обозначаемое $V_m(N^0(m))$, имеет вид

$$(41) \quad V_m(N^0(m)) = \mathbb{E} \int_K [f(x) - \widetilde{f}_m^0(x)]^2 dx = \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

5.2. Из утверждения теоремы 7 следует оценка скорости сходимости ПОЧ к неизвестной функции $f(x) \in L_2(K, \Lambda)$ когда $m \rightarrow \infty$. Действительно, из утверждения следствия 3, поскольку $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$, имеем

$$(42) \quad V_m(N^0(m)) \asymp m^{-1}.$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7 и следствия 3. Тогда

$$(43) \quad \|f - \tilde{f}_m^0\|_{\mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})} = O(m^{-\frac{1}{2}}).$$

5.3. В этом пункте будут установлены статистические свойства ПОЧ (40).

Теорема 9. ПОЧ (40) обладает следующими свойствами:

- 1) для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ оценка (40) — смещенная;
- 2) если выполнены условия теоремы 5, то СКО ПОЧ удовлетворяет неравенству

$$(44) \quad V_m(N^0(m)) \leq V_m(\infty);$$

- 3) оценка (40) асимптотически несмещенная, т.е. для почти всех $x \in \mathbb{K}$

$$(45) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \tilde{f}_m^0(x) = f(x);$$

- 4) если для любого $x \in \mathbb{K}$ $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x) < \infty$ и $|\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x)| < \infty$, то

$$\tilde{f}_m^0(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} f(x).$$

Доказательство теоремы 9 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.7).

5.4. В этом пункте мы установим условия независимости СКО ПОЧ от оцениваемой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теорем 5, 6. Тогда имеем неравенство

$$(46) \quad \sup_{f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)} \inf_{N \in \mathbb{Z}^+} \sup_{f_{m,N}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - f_{m,N}(x)]^2 dx \leq \\ \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство теоремы 10 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.8).

5.5. В этом пункте мы приводим пример задачи СВ, который позволит описать ее решение явно. Из утверждений теорем 8, 9 и явного вида ПОЧ следует, что решение задачи оптимального СВ сводится к нахождению явного вида $N^0(m)$. Поэтому содержание приводимого примера посвящено нахождению значения $N^0(m)$.

Пример. Предположим, что элементы последовательностей $\{c_j^2\}_{j \geq 0}$ и $\{\sigma_j^2\}_{j \geq 0}$ допускают представления

- 1) $\sigma_j^2 = \sigma_0^2 q_1^j$,
- 2) $c_j^2 = c_0^2 q_2^j$,

где $\sigma_0^2 > 0$ и $c_0^2 > 0$, а $q_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$. В силу теорем 5, 6 существует $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\inf_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} V_m(N) = V_m(N^0)$, причем для любого $N \geq N^0(m)$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2,$$

которое с учетом предположений 1) и 2) допускает представление

$$\frac{\sigma_0^2}{m} \sum_{j=0}^N q_1^j \geq c_0^2 \sum_{j=N+1}^{\infty} q_2^j.$$

Стало быть, в силу теоремы 5, при $N = N^0(m)$ имеет место равенство

$$(47) \quad \frac{\sigma_0^2}{m} \frac{1}{1 - q_1} = \frac{c_0^2 q_2^{N^0(m)+1}}{1 - q_2} + \frac{\sigma_0^2 q_1^{N^0(m)+1}}{m(1 - q_1)}.$$

Ниже рассмотрим два частных случая, когда $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ может быть найдено явно.

Для формулировки результатов обозначим, если $a \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, то $[a]$ — это целая часть числа a .

Случай 1. Пусть $q_1 = q_2$. Тогда из (47) следует, что если $\frac{\sigma_0^2}{c_0^2 m + \sigma_0^2} > q_1$, то

$$N^0(m) = \left\lfloor \frac{\ln \frac{\sigma_0^2}{c_0^2 m + \sigma_0^2}}{\ln q_1} \right\rfloor.$$

Случай 2. Пусть $q_2 = (q_1)^2$. Тогда из (47) следует, что

$$(48) \quad \frac{\sigma_0^2}{m} = \frac{c_0^2 q_1^{2(N^0(m)+1)}}{1 + q_1} + \frac{\sigma_0^2}{m} q_1^{N^0(m)+1}.$$

(48) это квадратное уравнение относительно $q_1^{N^0(m)+1}$. Если выполнено условие

$$\frac{\sigma_0^2(1 + q_1)}{2mc_0^2 q_1} \left[\sqrt{1 + \frac{4mc_0^2}{\sigma_0^2(1 + q_1)}} - 1 \right] > 1,$$

то $N^0(m)$ имеет вид

$$N^0(m) = \left\lfloor \frac{\ln \frac{\sigma_0^2(1+q_1)}{2mc_0^2} \left[\left(1 + \frac{4mc_0^2}{\sigma_0^2(1+q_1)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]}{\ln q_1} \right\rfloor.$$

П.1.1. Сначала установим утверждение предложения 2. Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$, а $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ — некоторая проекционная оценка. Поскольку система $\{\varphi_j(x)\}_{j \geq 0}$ — полная ортонормированная, то из (1), (13) и теоремы Фубини для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ следуют равенства

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx = \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2.$$

Отсюда, в силу предложения 1, имеем

$$(П.1.1) \quad \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx = \inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2.$$

Поскольку $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})$ — множество $\mathcal{F}_m^{y_j}$ -измеримых квадратично интегрируемых случайных величин. Из (П.1.1) следует неравенство

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx \geq \sum_{j=0}^{\infty} \inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})} \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2.$$

Отсюда следует, что оценка $\widehat{c}_{j,m}^0$ является оптимальной тогда и только тогда, когда

$$\inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})} \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2 = \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}^0]^2.$$

Таким образом, если существует $\widehat{c}_{j,m}^0$, то имеем неравенство

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx \geq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}^0]^2.$$

В силу (П.1.1) и последнего неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} [c_j - \widehat{c}_{j,m}^0]^2 = \\ &= \inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathbb{P})} \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} [c_j - \widehat{c}_{j,m}]^2 = \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m^0(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

где $\widehat{f}_m^0(x) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^0 \varphi_j(x)$. Доказательство закончено.

П.1.2. *Доказательство утверждения теоремы 1.* Из утверждения предложения 2 следует, что существует оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ тогда и только тогда, когда выполнено (19). Поэтому имеем

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m(x)]^2 dx = \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m^0(x)]^2 dx.$$

Основным содержанием утверждения теоремы 1 является доказательство равенств (20)–(22).

Поэтому рассмотрим $\mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m^0(x)]^2 dx$. Из утверждения предложения 2 (см. формулы (П.1.1) и (25)), имеем

$$(П.1.2) \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m^0(x)]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} |c_j - \widehat{c}_{j,m}^0|^2.$$

Отсюда следует, что для каждого $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ требуется по результатам наблюдений (y_1^j, \dots, y_m^j) построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку коэффициента Фурье c_j . Заметим, что в силу (7) распределение случайной величины y_m^j является гауссовским, т.е. $\text{Law}(y_m^j) = \mathcal{N}(c_j, \sigma_j^2)$. Известно [1, 2], что в данном случае оптимальная оценка коэффициента Фурье c_j , по результатам наблюдений с ошибками (y_1^j, \dots, y_m^j) , обозначаемая $\widehat{c}_{j,m}^0$, совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Следовательно, $\widehat{c}_{j,m}^0$ имеет вид (19). Умножим левую и правую часть (19) на $\varphi_j(x)$, а затем выполним суммирование по всем j , в результате получим (18).

Теперь найдем значение $\mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m^0(x)]^2 dx$, в силу (П.1.2), (7), (19) и предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - \widehat{f}_m^0(x)]^2 dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} |\widehat{c}_{j,m}^0 - c_j|^2 = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j - c_j \right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j \right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{m}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

П.1.3. *Доказательство утверждения следствия 1.* Из (20)–(22), и теоремы Фубини вытекает (23), поскольку

$$\begin{aligned} \widehat{f}_m^0(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^0 \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j \varphi_j(x) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} y_k^j \varphi_j(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k(x). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

П.1.4. Доказательство утверждения теоремы 2. Из (7), (20) и (21) для любых $x \in \mathbb{K}$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, в силу теоремы Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widehat{f}_m^0(x) &= \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^0 \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \mathbb{E} \widehat{c}_{j,m}^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \frac{1}{m} \mathbb{E} \sum_{k=1}^m y_k^j = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (c_j + \mathbb{E} n_k^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) c_j = f(x). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

П.1.5. Доказательство утверждения теоремы 3. Нам надо установить, что для почти всех $x \in \mathbb{K}$

$$\widehat{f}_m^0(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x).$$

Достаточно доказать, что дисперсия оценки $\widehat{f}_m^0(x)$ стремится к нулю, когда $m \rightarrow \infty$.

Для каждого $x \in \mathbb{K}$ вычислим дисперсию оценки $\widehat{f}_m^0(x)$, обозначаемую $D \widehat{f}_m^0(x)$. Из (20), (7) и (21), в силу теоремы Фубини, имеем

$$\begin{aligned} D \widehat{f}_m^0(x) &= \mathbb{E} [\widehat{f}_m^0(x) - f(x)]^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{c}_{j,m}^0 - c_j) \varphi_j(x) \right]^2 = \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j - c_j \right) \varphi_j(x) \right]^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j \varphi_j(x) \right]^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x) \sigma_j^2. \end{aligned}$$

Так как ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x) \sigma_j^2$ для почти всех $x \in \mathbb{K}$ сходится, то из последнего равенства следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

П.2.1. Доказательство первого утверждения теоремы 4. Из определения $V_m(N)$ следуют равенства

$$\begin{aligned} V_m(N) &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - f_N(x) + f_N(x) - \widehat{f}_{m,N}^0(x)]^2 dx = \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x) - \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x) + \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x) - \sum_{j=0}^N \widehat{c}_{j,m}^0 \varphi_j(x) \right]^2 dx = \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} \left[\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) + \sum_{j=0}^N (c_j - \widehat{c}_{j,m}^0) \varphi_j(x) \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, $N \in \mathbb{Z}^+$ СКО $V_m(N)$ имеет вид

$$(П.2.1) \quad V_m(N) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \mathbb{E} \sum_{j=0}^N (c_j - \widehat{c}_{j,m}^0)^2.$$

Так как $\widehat{c}_{j,m}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j$, то в силу (7) имеем

$$(П.2.2) \quad \widehat{c}_{j,m}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (c_j + n_k^j) = c_j + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j.$$

Поэтому (П.2.1) с учетом (П.2.2) и условий (n_i) , $i = \overline{1, 3}$, в силу теоремы Фубини, имеет вид (23). Действительно

$$(П.2.3) \quad \begin{aligned} V_m(N) &= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \mathbb{E} \sum_{j=0}^N \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j \right)^2 = \\ &= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^N \frac{1}{m^2} \mathbb{E} \sum_{k=1}^m n_k^j \sum_{k'=1}^m n_{k'}^j = \\ &= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^N \sigma_j^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Установим второе утверждение теоремы 4. Из первого утверждения теоремы следует, что для любого $N \in \mathbb{Z}^+$ СКО оценки $\widehat{f}_{m,N}^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathbb{P}})$ $V_m(N)$ имеет вид (П.2.3).

Для $V_m(N)$ требуется установить для каждого m оценку снизу. Ясно, что $V_m(N)$ состоит из двух слагаемых, причем первое является монотонно убывающей последовательностью, а второе слагаемое — это монотонно возрастающая последовательность. Поэтому, в силу условий, имеет место выкладка

$$\begin{aligned} \inf_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} V_m(N) &= \inf_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \right) = \\ &= \max \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2, \lim_{N \rightarrow 0} \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \right) = \max \left(0, \frac{\sigma_0^2}{m} \right) \geq C_{10} > 0. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

П.2.2. Доказательство утверждения следствия 2. Из утверждения теоремы 4 (см. формулу (27)) очевидным образом следует утверждение следствия.

П.2.3. Доказательство утверждения теоремы 5. В силу теоремы 4 $V_m(N)$ допускает представление (23), из которого следует, что оно состоит из двух слагаемых:

— первое из них — это ряд $\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2$, который сходится, поскольку сходится ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 = \|f\|_{L_2(K,\Lambda)}^2 < \infty$. Очевидно, что последовательность $\left\{ \sum_{j=N}^{\infty} c_j^2 \right\}_{N \geq 0}$ (при возрастании N) является невозрастающей, т.е. $\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \leq \sum_{j=N}^{\infty} c_j^2$, поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=N}^{\infty} c_j^2 = 0;$$

— второе слагаемое — это сходящаяся неубывающая последовательность $\left\{ \sum_{j=0}^N \sigma_j^2 \right\}_{N \geq 0}$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 = \sigma^2 < \infty \right)$. Поэтому при каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ определены множества

$$A_m^1 \triangleq \left\{ j \in \overline{\mathbb{Z}}^+ : \frac{\sigma_j^2}{m} - c_j^2 \geq 0 \right\} \neq \emptyset,$$

$$A_m^2 \triangleq \left\{ j \in \overline{\mathbb{Z}}^+ : \frac{\sigma_j^2}{m} - c_j^2 \leq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Следовательно, если $N \in A_m^1$ ($N \in A_m^2$), то в силу следствия 2 имеем неравенство

$$V_m(N+1) \geq V_m(N),$$

$$(V_m(N-1) \geq V_m(N)).$$

Очевидно, что $A_m^1 \cap A_m^2 \neq \emptyset$. Поэтому существует такое $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$, что $A_m^1 \cap A_m^2 = \{N^0(m)\}$. Отсюда следует (31). Доказательство закончено.

П.2.4. Доказательство утверждения теоремы 6. Из доказательства теоремы 3 следует, что для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и $N \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ СКО оценки $\hat{f}_{m,N}^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})$ имеет вид (П.2.3). Из утверждения теоремы 5 следует, что существует функция $N^0: (\mathbb{Z}^+ \setminus 0) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ обозначаемая $N^0(m)$ такая, что для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и любого $N \in \mathbb{Z}^+$ имеет место неравенство

$$V_m(N) \geq V_m(N^0(m)).$$

Обозначим

$$(П.2.4) \quad \mathbf{1}_{\{N \geq N^0(m)\}} \triangleq \begin{cases} 1, & N \geq N^0(m) \\ 0, & N < N^0(m). \end{cases}$$

Из доказательства теоремы 5 также следует, что $N \geq N^0(m)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2$. Поэтому имеем

$$\mathbf{1}_{\{N \geq N^0(m)\}} = \mathbf{1}_{\left\{N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\right\}}.$$

Обозначим

$$(П.2.5) \quad \ell_m(N) \triangleq \left(\sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} - \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \right) \mathbf{1}_{\left\{N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} \geq \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\right\}}.$$

Очевидно, что для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и любого $N \in \mathbb{Z}^+$

$$(П.2.6) \quad \ell_m(N) \geq 0.$$

Из (П.2.5) и (П.2.6) следует, что $\ell_m(N)$ допускает представление

$$(П.2.7) \quad \ell_m(N) = \max \left(\sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j^2}{m} - \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2, 0 \right).$$

Из графиков функций $V_m(N)$ и $\ell_m(N)$ для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и любого $N \in \mathbb{Z}^+$ следуют:

(i) неравенство

$$(П.2.8) \quad V_m(N) \geq \ell_m(N),$$

(ii)

$$(П.2.9) \quad N^0(m) = \operatorname{argmin}_{N \in \mathbb{Z}^+} V_m(N) = \operatorname{argmin}_{N \in \mathbb{Z}^+} \ell_m(N).$$

Из (П.2.7) и (П.2.9) следует утверждение теоремы 6. Доказательство закончено.

П.2.5. *Доказательство утверждения теоремы 7.* Сначала заметим, что из теоремы 4, следствия 2 и (41) следует, что $V_m(N^0(m))$ допускает представление

$$(П.2.10) \quad V_m(N^0(m)) = V_m(N) \Big|_{N=N^0(m)} = \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Из (П.2.10) следует неравенство

$$(П.2.11) \quad V_m(N^0(m)) \geq \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m},$$

которое дает оценку снизу величины $V_m(N^0(m))$.

Из утверждения теоремы 6 следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ имеет место неравенство

$$(П.2.12) \quad \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \geq \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2.$$

Поэтому из (П.2.10) и (П.2.12) следует неравенство

$$(П.2.13) \quad V_m(N^0(m)) \leq 2 \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Из (П.2.11) и (П.2.13) следует утверждение теоремы 7,

$$V_m(N^0(m)) \asymp \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Доказательство закончено.

П.2.6. Утверждение следствия 3 очевидным образом следует из условий i) и ii) следствия и доказательства теоремы 7.

П.2.7. Доказательство утверждений теоремы 9.

1) Из (40) следует, что

$$\tilde{f}_m^0(x) = \sum_{j=0}^{N^0(m)} \left[c_j \varphi_j(x) + \sum_{k=1}^m n_k^j \varphi_j(x) \right]^2 = f_{N^0(m)}(x) + \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j \varphi_j(x).$$

Возьмем математическое ожидание относительно левой и правой частей последнего равенства, имеем

$$(П.2.14) \quad \mathbb{E} \tilde{f}_m^0(x) = f_{N^0(m)}(x) + \mathbb{E} \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j \varphi_j(x) = f_{N^0(m)}(x) \neq f(x).$$

Отсюда следует смещенность оценки (40).

2) Для доказательства второго утверждения теоремы надо установить неравенство (44). В силу теоремы 4, для любого $N \geq N^0(m)$ имеем неравенство

$$V_m(N^0(m)) \leq V_m(N).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве имеем

$$V_m(N^0(m)) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} V_m(N) = V_m(\infty).$$

3) Теперь установим третье утверждение теоремы 9. Для этого рассмотрим (40). Переходя к пределу в нем, когда $m \rightarrow \infty$, имеем для почти всех $x \in K$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \tilde{f}_m^0(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{N^0(m)}(x).$$

В силу пункта ii) следствия 3 $N^0(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$. Поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{N^0(m)}(x) = f(x).$$

Стало быть, оценка (40) — асимптотически несмещенная.

4) Докажем теперь свойство состоятельности оценки (40). В силу неравенства Чебышёва имеем для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и $\varepsilon > 0$

$$(П.2.15) \quad \mathbb{P}\left(|\tilde{f}_m^0(x) - f(x)|^2 \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}|\tilde{f}_m^0(x) - f(x)|^2.$$

Рассмотрим правую часть неравенства (43). Из (40) следует, что

$$\tilde{f}_m^0(x) - f(x) = - \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{N^0(m)} \sum_{k=1}^m n_k^j \varphi_j(x).$$

Поэтому $\mathbb{E}|\tilde{f}_m^0(x) - f(x)|^2$ допускает представление

$$(П.2.16) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}|\tilde{f}_m^0(x) - f(x)|^2 = \\ & = \mathbb{E} \left| - \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{N^0(m)} \sum_{k=1}^m n_k^j \varphi_j(x) \right|^2 = \\ & = \left| \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \right|^2 + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{N^0(m)} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x). \end{aligned}$$

Из следствия 3 и условий теоремы следует, что ряды $\left| \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \right|$,

$\sum_{j=0}^{N^0(m)} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x)$ для почти всех $x \in K$ сходятся, поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \right|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \\ & \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{N^0(m)} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\tilde{f}_m^0(x) - f(x)|^2 \geq \varepsilon) = 0.$$

Теорема доказана полностью.

П.2.8. Доказательство утверждения теоремы 10. Из доказательства теоремы 7 следует, что СКО ПОЧ удовлетворяет неравенствам

$$2 \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \geq V_m(N^0(m)) \geq \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Заметим, что из теоремы 4, следствия 2, теорем 5, 6 имеем неравенство

$$\begin{aligned} (\text{П.2.17}) \quad V_m(N^0(m)) &= \inf_{N \in \mathbb{Z}^+} \inf_{f_{m,N}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\tilde{\mathbb{P}})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{K}} [f(x) - f_{N,m}(x)]^2 dx = \\ &= \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} + \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2 \leq 2 \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{m} = \frac{2\sigma^2}{m}. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть неравенства (П.2.17) не зависит от $f(x) \in L_2(\mathbb{K}, \Lambda)$, то из него следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997.
2. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
3. Parzen E. On Estimation of a Probability Density Function and Mode // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. No. 3. P. 1065–1076. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704472>
4. Rosenblatt M. Curve Estimates // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. No. 6. P. 1815–1842. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177693050>
5. Murthy V.K. Nonparametric estimation of multivariate densities with applications // Multivariate Analysis. 1966. P. 43–56.
6. Стратонович Р.Л. Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 1. С. 32–46.
7. Watson G.S. Density Estimation by Orthogonal Series // Ann. Math. Statist. 1969. V. 40. No. 4. P. 1496–1498. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177697523>
8. Конаков В.Д. Непараметрическая оценка плотности распределения вероятностей // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17, № 2. С. 377–379.
Konakov V.D. Non-Parametric Estimation of Density Functions // Theory of Probability & Its Applications. 1973. V. 17 (2). P. 361–362.
<https://doi.org/10.1137/1117042>

9. *Ченцов Н.Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.
10. *Ванник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.
11. *Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
12. *Надарая Э.А.* Непараметрическое оценивание плотностей вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1983.
13. *Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Обработка сигналов непараметрическим методом максимума правдоподобия // Пробл. передачи информ. 1984. Т. 20. № 3. С. 29–46.
Nemirovskij A.S., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Signal processing by the nonparametric maximum-likelihood method // Problems of Information Transmission. 1984. V. 20 (3). P. 177–192.
14. *Дарховский Б.С.* О стохастической задаче восстановления // Теория вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43. № 2. С. 357–364.
Darkhovskii B.S. On a Stochastic Renewal Problem // Theory of Probability & Its Applications. 1999. V. 43 (2). P. 282–288.
<https://doi.org/10.1137/S0040585X9797688X>
15. *Дарховский Б.С.* Стохастическая задача восстановления функционалов // Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44. № 4. С. 20–32.
Darkhovskiy B.S. Stochastic recovery problem // Problems of Information Transmission. 2008. V. 44 (4). P. 303–314. <https://doi.org/10.1134/S0032946008040030>
16. *Ибрагимов И.А.* Об оценке многомерной регрессии // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 2. С. 301–320.
Ibragimov I.A. Estimation of multivariate regression // Theory of Probability & Its Applications. 2004. V. 48 (2). P. 256–272.
<https://doi.org/10.1137/S0040585X9780385>
17. *Tsybakov A.B.* Introduction to Nonparametric Estimation. N.Y.: Springer, 2009.
18. *Булгаков С.А., Хаметов В.М.* Восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками // УБС. 2015. Т. 54. С. 45–65.
19. *Levit V.* On Optimal Cardinal Interpolation // Mathematical Methods of Statistics. 2018. V. 27. No. 4. P. 245–267. <https://doi.org/10.3103/S1066530718040014>
20. *Юдицкий А.Б., Немировский А.С.* Восстановление сигналов с помощью стохастической оптимизации // АиТ. 2019. № 10. С. 153–172.
Juditsky A.B., Nemirovski A.S. Signal recovery by stochastic optimization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80 (10). P. 1878–1893.
<https://doi.org/10.1134/S0005231019100088>
21. *Голубев Г.К.* Об адаптивном оценивании линейных функционалов по наблюдениям в белом шуме // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. № 2. С. 95–111.
Golubev G.K. On adaptive estimation of linear functionals from observations against white noise // Problems of Information Transmission. 2020. V. 56 (2). P. 185–200.
<https://doi.org/10.31857/S0555292320020047>

22. Булгаков С.А., Горшкова В.М., Хаметов В.М. Стохастическое восстановление квадратично интегрируемых функций // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2020. № 6. С. 4–22. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-4-22>
23. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4е, перераб. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.
25. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
26. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничинным.

Поступила в редакцию 09.11.2020

После доработки 09.08.2022

Принята к публикации 29.09.2022

Управление в социально-экономических системах

© 2023 г. Г.А. УГОЛЬНИЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (ougoln@mail.ru),
А.Б. УСОВ, д-р техн. наук (abusov@sfedu.ru)
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ СПОСОБОВ ОРГАНИЗАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ В МОДЕЛЯХ ДУОПОЛИИ КУРНО С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

Проводится сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов (информационных структур) на примере статической и динамической моделей дуополии Курно. Сравниваются независимое поведение равноправных игроков, их кооперация и отношения иерархии, формализуемые как игры Гермейера. Для количественной оценки эффективности с точки зрения отдельных игроков и общества в целом используются индивидуальные и коллективные индексы относительной эффективности. Исследуются условия экологической безопасности системы. Предложена организационно-экономическая интерпретация результатов.

Ключевые слова: дуополия Курно, игры Гермейера, индексы относительной эффективности, кооперативное решение, экологическая безопасность.

DOI: 10.31857/S0005231023020083, EDN: OOEOSX

1. Введение

К числу основных способов организации взаимодействия экономических агентов можно отнести независимое поведение, кооперацию и отношения иерархии. Коллективный исход рационального поведения независимых игроков может оказаться хуже исхода, полученного при централизованном управлении или добровольной кооперации. Для ответа на вопрос “насколько хуже” вводится специальная функция выигрыша, которая позволяет количественно измерить (не)эффективность равновесий. Обычно подобные меры определяются как отношение между значениями функции выигрыша в некотором равновесии и при коллективно оптимальном исходе. (Не)эффективность равновесий активно изучается в таких областях, как построение игр на сетях, игры составления расписаний и распределения ресурсов и т.д. [1–5].

Важно отметить, что указанные индексы отражают интересы общества (экономики) в целом. С этой точки зрения кооперация всегда выгодна, и индексы оценивают только потери от эгоистичного поведения (хотя иерархическое управление может оказаться не менее выгодным, чем кооперация).

Однако выигрыш отдельного игрока в роли ведущего или при независимом поведении может оказаться больше, чем его доля в распределении суммарного выигрыша при кооперации. Поэтому представляется чрезвычайно важным исследование условий выгодности кооперации с позиций не только общественного благосостояния, но и интересов отдельных экономических агентов.

Концепция жизнеспособности (*viability*) предложена Ж.П. Обеном [6] и развита в [7, 8]. Идея здесь состоит в том, что вектор состояния управляемой динамической системы должен принадлежать заданной области пространства состояний, что отражает, например, требования экологического равновесия. Для статических моделей условия жизнеспособности учитываются как дополнительные ограничения.

Удобной моделью для иллюстрации понятия (не)эффективности равновесий и анализа условий жизнеспособности представляется дуополия Курно. В этом случае под жизнеспособностью понимается экологическая безопасность. В статической модели предполагается полная информация игроков, благодаря которой они за один шаг приходят к равновесию Нэша [9]. Детальный анализ динамической олигополии Курно проведен в [10]. В [11] рассматривается ограниченная рациональность игроков и выводятся условия локальной устойчивости равновесий Нэша как результата процедуры нащупывания по Курно в дискретной динамической модели.

Модели олигополии Курно изучаются в сериях работ [12–19]. В первой серии М.И. Гераськин использует аппарат предположительных вариаций, а также рефлексивных игр. Изучаются равновесия Нэша и Штакельберга, приведены приложения к российскому рынку телекоммуникаций. Во второй серии Г.И. Алгазин и соавт. также синтезируют подходы классической теории игр, теории коллективного поведения и концепции рефлексивных игр применительно к моделям олигополии Курно. В названных работах используются индексы относительной эффективности.

В настоящей статье рассматриваются модели дуополии Курно в непрерывном времени, непосредственно обобщающие базовую статическую модель. Взаимодействие игроков учитывается через их переменные состояния (объемы выпусков), управляющие переменные (переменные издержки) задаются как кусочно-непрерывные программные стратегии. Для исследования этих моделей используются стандартные методы [20, 21] и авторские численные алгоритмы [22–24].

Конечно, дуополия Курно — только частный пример. В целом речь идет о системах взаимодействия активных (экономических и иных) агентов, описываемых моделью игры в нормальной форме [9]. В статической постановке эта модель имеет вид

$$g_i(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \max, \quad u_i \in U_i, \quad i \in N.$$

Здесь $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество активных агентов (игроков); U_i — множество допустимых действий игрока $i \in N$; u_i — конкретное

действие игрока $i \in N$; $u = (u_1, \dots, u_n) \in U = U_1 \times \dots \times U_n$ — исход игры; $u_{-i} = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$; $g_i : U \rightarrow R$ — функция выигрыша игрока $i \in N$. При независимом эгоистичном поведении равноправных игроков решением игры считается множество равновесий Нэша

$$NE = \left\{ u^{NE} \in U : \forall i \in N \forall u_i \in U_i g_i(u^{NE}) \geq g_i(u_i, u_{-i}^{NE}) \right\}.$$

Под кооперацией в приведенной модели понимается совместная максимизация всеми игроками суммарного выигрыша (утилитаристской функции общественного благосостояния) $g(u) = \sum_{i \in N} g_i(u)$. Другая интерпретация этого способа поведения — введение централизованного управляющего (social planner), который максимизирует $g(u)$ по всем u_i . Таким образом, при переходе к кооперации теоретико-игровая модель становится задачей оптимизации.

При наличии иерархии имеющих преимущество первого хода ведущий игрок может сообщить ведомому (или нескольким ведомым) свое действие или постоянную стратегию (игра Гермейера Γ_1), либо стратегию с обратной связью по управлению ведомого (игра Гермейера Γ_2) [25]. В англоязычной литературе при исследовании олигополии Курно используются соответствующие термины “игра Штакельберга” и “обратная игра Штакельберга”, а решение игры Γ_1 называется равновесием Штакельберга. В динамической постановке с точки зрения сравнительного анализа эффективности ничего принципиально не меняется.

Ограничения предлагаемого подхода состоят в следующем.

1. Пока рассматриваются только детерминированные модели. При наличии внешней неопределенности ситуация усложняется, это предмет последующего анализа.

2. Анализ оптимального соотношения централизации и децентрализации (Ф.И. Ерешко) в связи с проблемой неопределенности также пока не проводится.

3. Конечно, приведенные теоретико-игровые модели и информационные структуры не исчерпывают возможного разнообразия способов организации активных агентов и методов управления ими. Например, иерархическое управление может описываться не только играми Γ_1 и Γ_2 , но и игрой Γ_3 . Можно рассматривать игры с агрегированной информацией (В.С. Алиев и А.Ф. Кононенко), занимающие промежуточное положение между играми Γ_1 и Γ_2 . Иерархическое принятие решений допускает описание играми в развернутой форме и т.д. Однако все же принципиально различные способы взаимодействия — это равноправие, кооперация и иерархия, остальное — скорее детали.

Вклад настоящей статьи:

— построены и исследованы оригинальные динамические модели дуополии Курно для различных информационных структур;

— предложена целостная система коллективных и индивидуальных индексов относительной эффективности способов организации экономических агентов;

— на основе предложенной системы индексов проведен сравнительный анализ эффективности способов организации агентов на примере моделей дуополии Курно с учетом условий экологической безопасности.

2. Статическая модель дуополии Курно

Рассмотрим модель дуополии Курно в следующем виде:

$$(1) \quad g_1(u_1, u_2) = (1/2 - u_1 - u_2)u_1 \rightarrow \max, \quad 0 \leq u_1 \leq 1/2;$$

$$(2) \quad g_2(u_1, u_2) = (1/2 - u_1 - u_2)u_2 \rightarrow \max, \quad 0 \leq u_2 \leq 1/2.$$

Здесь u_i — объем выпуска товара фирмой i ; g_i — ее прибыль; для простоты разность между ценой закрытия рынка и переменными затратами взята равной $1/2$, постоянные затраты равны нулю, а наклон линии спроса равен единице; значения выпусков обеих фирм принадлежат отрезку $[0, 1/2]$.

Таблица 1 устроена следующим образом. Столбцы соответствуют различным принципам оптимальности в модели (1)–(2): равновесию Нэша в игре в нормальной форме равноправных независимых агентов (NE); равному делению при кооперативном поведении игроков (C); играм Гермейера Γ_1 (ST) и Γ_2 (IST) при ведущем первом игроке. В первой строке приведены оптимальные согласно некоторому принципу исходы игры, во второй — соответствующие выигрыши игроков, в третьей — значения суммарного выигрыша обоих игроков. Доказательства приведены в Приложении.

Таблица 1. Выигрыши игроков в дуополии Курно

	NE	C	ST	IST
(u_1, u_2)	$(1/6, 1/6)$	$(1/8, 1/8)$	$(1/4, 1/8)$	$(1/4, 0)$
(g_1, g_2)	$(1/36, 1/36)$	$(1/32, 1/32)$	$(1/32, 1/64)$	$(1/16, 0)$
$g = g_1 + g_2$	$1/18$	$1/16$	$3/64$	$1/16$

Для сравнительного анализа эффективности способов организации введем систему индивидуальных и коллективных индексов относительной эффективности в игре n лиц. Коллективные индексы относительной эффективности соотносят значения общественного благосостояния при различных способах организации с его максимальным значением, достигаемым при кооперации игроков:

$$(3) \quad \begin{aligned} SCI^{NE} &= \frac{g_{\min}^{NE}}{g_{\max}}; & SCI^{ST} &= \frac{g^{ST}}{g_{\max}}; \\ g_{\max} &= g^C = \max_{x \in X} \sum_{i \in N} g_i(x); & g_{\min}^{NE} &= \min_{x \in NE} \sum_{i \in N} g_i(x). \end{aligned}$$

Для определения величин g^{ST} , g^{IST} используем следующие соображения. Пусть ST_i — множество решений игры Γ_1 (равновесий Штакельберга) при ведущем i -м игроке [9]. Поскольку ведущим может быть любой игрок, то в целом выигрыш общества при иерархическом управлении без обратной связи можно вычислить как

$$g^{ST} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} g^{ST_i} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} g_j^{ST_i}.$$

Аналогично, пусть IST_i — множество решений игры Γ_2 при ведущем i -м игроке [25]. Тогда $g^{IST} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} g_j^{IST_i}$ — выигрыш общества при иерархическом управлении с обратной связью.

Индивидуальные индексы относительной эффективности соотносят выигрыши игроков при различных способах организации с их симметричным выигрышем при кооперации:

$$(4) \quad K_i^{NE} = \frac{g_{i,\min}^{NE}}{\bar{g}_i^C}; \quad K_i^{ST} = \frac{\gamma_i}{\bar{g}_i^C}; \quad K_i^{IST} = \frac{\tilde{\gamma}_i}{\bar{g}_i^C};$$

$$g_{i,\min}^{NE} = \min_{x \in NE} g_i(x); \quad \bar{g}_i^C = \frac{1}{n} g^C, \quad i \in N.$$

Здесь γ_i — выигрыш i -го игрока как ведущего в игре Γ_1 ; $\tilde{\gamma}_i$ — выигрыш i -го игрока как ведущего в игре Γ_2 . Выигрыши всюду предполагаются неотрицательными. Значения индексов относительной эффективности в дуополии Курно (1)–(2) приведены в табл. 2. В двух последних ячейках сверху показан выигрыш игрока как ведущего (L), снизу — как ведомого (F). При кооперации значения индексов равны 1.

Таблица 2. Значения коллективных и индивидуальных индексов эффективности в дуополии Курно

	NE	ST	IST
SCI	8/9	3/4	1
K_i^L / K_i^F	8/9	1 / 1/2	2 / 0

Анализ данных табл. 2 приводит к двум разным системам предпочтений:

общество $C \sim IST \succ NE \succ ST$;

индивид $IST^L \succ ST^L \sim C \succ NE \succ ST^F \succ IST^F$.

В любой игре в нормальной форме имеет место соотношение $g^C = g_{\max} = \sum_{i \in N} g_{i,\min}^{NE} + \Delta$, где $\Delta \geq 0$ — эмерджентный (кооперативный, синергический) эффект, показывающий выгодность кооперации для общества в целом. Таким образом, в системе предпочтений для общества кооперация всегда приводит к наилучшему исходу (в дуополии Курно такой же максимальный выигрыш достигается и в игре Γ_2). Поэтому коллективные индексы относитель-

ной эффективности можно назвать индексами системной согласованности. Чем ближе значение индекса к единице, тем выше степень согласованности системы.

А вот для индивидуальных предпочтений возможно как $K_i \geq 1$, так и $K_i \leq 1$. Если Δ велико, то обычно $\bar{g}_i^C > \tilde{\gamma}_i$, и тогда кооперация выгоднее иерархии для всех игроков. Однако в большинстве приложений (например, в рассматриваемой дуополии Курно) Δ не слишком велико, и тогда $\bar{g}_i^C < \tilde{\gamma}_i$, поэтому возникает борьба за лидерство. Заметим, что ведомый игрок при иерархии находится в намного менее выгодном положении.

Проведем теперь анализ условий экологической безопасности. Пусть величина загрязнения при производстве продукта пропорциональна суммарному выпуску: $P = \alpha(u_1 + u_2)$, тогда экологическое условие можно задать с помощью ограничения $u_1 + u_2 \leq \kappa$, где $\kappa = P^*/\alpha$, P^* — предельно допустимая величина загрязнения. Если игра иерархическая, то за выполнение этого требования отвечает ведущий игрок, иначе это внешнее ограничение, которое проверяется дополнительно. Результаты анализа собраны в табл. 3.

Таблица 3. Анализ условия экологической безопасности

Значение параметра κ	NE	C	ST	IST
$[0, 1/4)$	–	–	–	–
$[1/4, 1/3)$	–	$\{(1/8, 1/8)\}$	–	$\{(1/4, 0)\}$
$[1/3, 3/8)$	$\{(1/6, 1/6)\}$	$\{(1/8, 1/8)\}$	–	$\{(1/4, 0)\}$
$[3/8, \infty)$	$\{(1/6, 1/6)\}$	$\{(1/8, 1/8)\}$	$\{(1/4, 1/8)\}$	$\{(1/4, 0)\}$

Прочерк означает, что соответствующее решение игры не существует при данном диапазоне значений параметра κ (т.е. несовместимо с экологическими условиями). В частности, при $\kappa \geq 3/8$ все рассмотренные принципы оптимальности дают экологически безопасные решения, а при $\kappa < 1/4$ — наоборот. Самым чувствительным к экологическому ограничению оказывается равновесие Штакельберга, а самым устойчивым — кооперативное решение.

3. Дифференциальная модель дуополии Курно с линейным уравнением динамики

Рассмотрим динамическое обобщение модели (1)–(2) с линейной динамикой:

$$(5) \quad J_i = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ \beta [D - x_1(t) - x_2(t)] x_i(t) - v_i(t) \right\} dt + e^{-\rho T} x_i(T) \rightarrow \max;$$

$$0 \leq v_i(t) \leq v_{\max};$$

$$(6) \quad \dot{x}_i = a_i v_i(t) - m_i x_i(t), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь J_i — прибыль i -го игрока (фирмы) за время T ; $v_i(t)$ — управляющие переменные игроков (переменные издержки) в допустимом диапазоне; v_{\max} — максимально допустимые переменные издержки; $x_i(t)$ — их переменные состояния (объемы выпуска); выражение в квадратных скобках определяет цену на производимый товар в зависимости от спроса, обратно пропорционального суммарному объему выпуска товара; a_i — коэффициенты производительности; m_i — коэффициенты уменьшения выпуска; β — некоторый размерный коэффициент, обеспечивающий совпадение размерностей; ρ — коэффициент дисконтирования; T — длина игры; D — параметр спроса. Предполагается, выполнение естественного условия $x_i(t) = 0$, если $v_i(t) = 0$. Итак, взаимодействие игроков (конкурирующих фирм) описывается через их переменные состояния.

Исследуем модель (5)–(6) с помощью принципа максимума Понтрягина [20, 21], считая, что игроки используют программные стратегии и их управления кусочно-непрерывны. Отметим, что согласно [28] равновесие Нэша существует.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H_i(x_i, v_i, \lambda_i) = (D - x_1 - x_2)x_i - v_i + \lambda_i(a_i v_i - m_i x_i); \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_i(t)$ — сопряженная переменная. Тогда получим

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -1 + a_i \lambda_i \begin{cases} \geq 0, & \lambda_i(t) \geq \frac{1}{a_i}, \\ < 0, & \lambda_i(t) < \frac{1}{a_i}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = -D + 2x_i + x_j + (\rho + m_i)\lambda_i; \quad \lambda_i(T) = 1; \quad i = 1, 2; \quad j \neq i$$

откуда с учетом структуры модели равновесные по Нэшу стратегии имеют вид

$$v_i^{NE}(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \lambda_i(t) \geq \frac{1}{a_i}, \\ 0, & \lambda_i(t) < \frac{1}{a_i}, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Здесь сопряженные переменные имеют вид

$$\lambda_i(t) = \left[1 - \frac{D}{\rho + m_i} \left(e^{-T(\rho + m_i)} - e^{-t(\rho + m_i)} \right) - 2 \int_t^T A_i(\tau) e^{-2\tau(\rho + m_i)} d\tau - \right. \\ \left. - \int_t^T A_j(\tau) e^{-\tau(2\rho + m_i + m_j)} d\tau \right] e^{t(\rho + m_i)}; \quad j \neq i; \quad i, j = 1, 2;$$

$$A_i(t) = x_{0i} + a_i \int_0^t e^{m_i \tau} v_i^{NE}(\tau) d\tau;$$

$$x_i^{NE}(t) = A_i(t) e^{-m_i t} = x_{0i} e^{-m_i t} + a_i \int_0^t e^{m_i(\tau-t)} v_i^{NE}(\tau) d\tau,$$

выигрыши игроков в равновесии равны

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} \left\{ [D - x_1(t) - x_2(t)] x_i(t) - v_i(t) \right\} dt + e^{-\rho T} x_i(T).$$

Таким образом, равновесие Нэша существует и единственно. Отметим, что функции $\lambda_i(t)$ и управления $v_i^{NE}(t)$ взаимосвязаны. Поэтому исследование модели (5)–(6) было проведено численно с целью определения числа точек переключения управления с одного значения на другое и вычисления выигрышей агентов. Расчет проводился методом стрельбы. Было проведено порядка 150 численных экспериментов в случае двух агентов. При этом варьировались величины: D от 0,5 до 40; m_1, m_2 от 0,1 до 40; a_1, a_2 от 1 до 100; x_{10}, x_{20} от 1 до 50; v_{\max} от 50 до 1000. Ниже показаны результаты экспериментов в случае $T = 365$ сут; $\rho = 0,001$. Таблица входных данных приведена в Приложении. В табл. 4 показаны результаты расчетов по ним. Значения t_1 и t_2 показывают, в какие моменты времени происходит изменение управлений агентов.

Проведенные численные эксперименты для широкого класса входных функций показали, что управления за моделируемый промежуток времени меняются не более одного раза, причем примерно для половины входных данных управления оставались неизменными. В то же время при малых значениях коэффициента параметра спроса D (меньших 13 в проведенных экспериментах) всегда происходило одно изменение управлений за моделируемый промежуток времени. В разных примерах переключение управлений происходило с минимального значения на максимальное или наоборот. При этом момент времени, в который происходит изменение управлений, меняется и зависит от входных параметров модели.

Заметим, что для определенного класса входных данных управления агента в равновесии Нэша не меняется с течением времени и остается равным максимально возможному значению. В этом случае, если $x_{i0} = a_i v_{\max} / m_i$, то дифференциальное уравнение имеет особую точку, которая является аттрактором.

Для подтверждения сделанных на основе численного счета выводов было проведено аналитическое исследование модели в предположении, что управления меняются не более одного раза и переключаются или с нулевого значения на максимально возможное, или наоборот. Рассматривался случай двух

агентов, если их управления

$$(7) \quad v_i^{NE}(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \text{если } t \leq t_i, \\ 0, & \text{если } t_i \leq t, \end{cases} \quad i = 1, 2$$

или

$$v_i^{NE}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq t_i, \\ v_{\max}, & \text{если } t_i \leq t, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Было рассмотрено четыре возможных варианта сочетаний управлений двух агентов. Ниже приведены выкладки в случае, когда оба агента меняют свои управления один раз в разные моменты времени с максимально возможного значения на нулевое, т.е.

$$(8) \quad v_i^{NE}(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \text{если } t \leq t_i, \\ 0, & \text{если } t_i \leq t, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$x_i^{NE}(t) = \begin{cases} (x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i) e^{-m_i t} + a_i v_{\max}/m_i, & \text{если } 0 \leq t \leq t_i, \\ (a_i v_{\max}/m_i + (x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i) e^{-m_i t_i}) e^{-m_i(t-t_i)}, & \text{если } t_i \leq t \leq T, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_i &= x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i; \\ B_i &= a_i v_{\max}/m_i; \\ C_i &= a_i v_{\max}/m_i + (x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i) e^{-m_i t_i} \end{aligned}$$

Функции $\lambda_i^{NE}(t)$ находятся аналитически и в предположении $t_1 \leq t_2$ имеют вид

$$\lambda_i(t) = E_i(t) e^{-(\rho+m_i)(T-t)},$$

где

$$E_i(t) = \begin{cases} E_{i0}, & \text{если } 0 \leq t < t_1, \\ E_{i1}, & \text{если } t_1 \leq t < t_2, \\ E_{i2}, & \text{если } t_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Здесь ($i = 1, 2$; $j = 1$, если $i = 2$; $j = 2$, если $i = 1$)

$$\begin{aligned} E_{i0} &= 1 + \frac{-D + 2B_i + B_j}{\rho + m_i} \left(1 - e^{(\rho+m_i)(T-t)} \right) + \\ &+ \frac{2A_i}{\rho + 2m_i} e^{(\rho+m_i)T} \left(e^{-(\rho+2m_i)T} - e^{-(\rho+2m_i)t} \right) + \\ &+ \frac{A_j}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_i)T} \left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{11} &= 1 + \frac{-D + B_2}{\rho + m_1} \left(1 - e^{(\rho+m_1)(T-t)} \right) + \\
&+ \frac{2C_1}{\rho + 2m_1} e^{(\rho+m_1)T+m_1t_1} \left(e^{-(\rho+2m_1)T} - e^{-(\rho+2m_1)t} \right) + \\
&+ \frac{A_2}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_1)T} \left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t} \right); \\
E_{21} &= 1 + \frac{-D + B_2}{\rho + m_2} \left(1 - e^{(\rho+m_2)(T-t)} \right) + \\
&+ \frac{2C_1}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_2)T+m_1t_1} \left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t} \right) + \\
&+ \frac{A_2}{\rho + 2m_2} e^{(\rho+m_2)T} \left(e^{-(\rho+2m_2)T} - e^{-(\rho+2m_2)t} \right); \\
E_{i2} &= 1 + \frac{-D}{\rho + m_i} \left(1 - e^{(\rho+m_i)(T-t)} \right) + \\
&+ \frac{2C_i}{\rho + 2m_i} e^{(\rho+m_i)T+m_it_i} \left(e^{-(\rho+2m_i)T} - e^{-(\rho+2m_i)t} \right) + \\
&+ \frac{C_j}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_i)T+m_jt_j} \left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t} \right).
\end{aligned}$$

Затем проверяется предположение (8), т.е. выполнение неравенств ($i = 1, 2$)

$$(9) \quad \lambda_i \geq 1/a_i, \text{ если } 0 \leq t < t_i; \quad \lambda_i < 1/a_i, \text{ если } t_i \leq t \leq T.$$

Если неравенства (9) выполняются, то управления агентов имеют вид (8).

Аналогично проверяется, имеют ли управления агентов вид, соответствующий какому-либо другому сочетанию управлений (7). Проведенные таким образом расчеты подтвердили результаты, приведенные в табл. 4.

При кооперации игроков игра становится задачей оптимального управления, решение которой аналогично решению модели (5)–(6) с очевидными изменениями.

Теоретико-игровые постановки Γ_{1t} и Γ_{2t} исследовались численно. Алгоритмы нахождения решений описаны в [22, 23]. Равновесия при постановках Γ_{1t} и Γ_{2t} находились в соответствии с алгоритмами [22, 23] методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [24]. При этом в качестве начальных множеств качественно репрезентативных сценариев игроков берутся множества, состоящие из трех элементов: минимально и максимально допустимых управлений в соответствии с (5) и их среднего арифметического. Все элементы начального множества качественно репрезентативных сценариев проверяются на полноту и избыточность, при необходимости оно сужается или пополняется новыми элементами. Результаты численного счета для случаев кооперации и иерархии помещены в табл. 5. В динамической

Таблица 4. Результаты численного исследования

№ примера	$v_1(0)$	t_1 (сут)	$v_1(T)$	$v_2(0)$	t_2 (сут)	$v_2(T)$	J_1	J_2	$x_1(T)$	$x_2(T)$
1	0	–	0	100	75	0	13,4	16,1	2,5	3,2
2	100	30	0	100	30	0	4,7	4,5	1,1	0,1
3	100	30	0	100	30	0	21,3	7,9	1,1	0,1
4	0	–	0	0	–	0	24,2	7,5	1,1	0,1
5	0	–	0	0	–	0	30,2	6,8	3,7	0,5
6	0	–	0	0	–	0	30,7	6,8	3,7	0,5
7	0	–	0	0	–	0	30,7	6,8	3,7	0,5
8	0	–	0	0	–	0	6,7	1,7	0,001	2E-8
9	0	–	0	0	–	0	188,6	85,9	3,7	0,5
10	0	–	0	100	10	0	4,3	5,3	0,02	0,1
11	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
12	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
13	0	–	0	0	–	0	17	71	0,0004	0,5
14	0	–	0	0	–	0	146	5	3,7	0
15	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
16	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
17	0	–	0	0	–	0	117	5,3	11	0,5
18	0	–	0	0	–	0	76	63	3,7	1,5
19	100	–	100	0	5	100	5,3	76	0	0,5
20	0	10	100	0	–	0	78	48	10	0,5
21	0	10	100	0	30	100	146	5	3,7	0
22	100	10	0	100	30	0	33,8	104,4	0,0006	0,5
23	100	20	0	100	50	0	237	8	4,3	9E-11
24	0	–	0	0	–	0	291	61	7,4	0,5
25	0	–	0	0	–	0	62	23	3,7	0,5
26	0	20	100	0	100	100	7,3	39,5	0,0004	0,5
27	0	10	100	0	40	100	83,6	1,8	3,7	0
28	0	40	300	0	100	300	62	23	3,7	0,5
29	0	30	100	0	70	100	12,5	2,5	0,0004	0
30	0	10	100	0	40	100	83,6	1,8	3,7	0
31	0	20	100	0	70	100	12,5	2,5	0,0004	0
32	0	30	300	0	60	300	7,3	39,5	0,0004	0,5
33	0	50	100	100	–	100	2,4	0,5	0,0001	0
34	100	–	100	0	25	100	14,7	4,3	1,1	0,1
35	0	–	0	0	–	0	71	17	1,1	1E-12
36	0	–	0	0	–	0	70	20	0,001	0,1
37	0	10	100	100	–	100	2,3	0,5	0,0001	0
38	0	–	0	0	–	0	73	1	0,001	1E-12
39	0	15	100	100	–	100	16	0,4	1,1	0
40	0	–	0	0	–	0	28,8	141,7	0,001	1

Таблица 5. Выигрыши игроков при разных информационных регламентах

№ примера	NE		C	ST		IST	
	J_1	J_2	J	J_1	J_2	J_1	J_2
1	13,4	16,1	30,8	16,7	13,3	18,2	11,6
2	4,7	4,5	9,4	5,1	4,2	5,1	4,2
3	21,3	7,9	30,4	22,5	7,5	25	4,6
4	24,2	7,5	32,4	26	6	26	6
5	30,2	6,8	38	33,2	4,3	36,3	1
6	30,7	6,8	38,4	35,3	2,7	37,2	0,7
7	30,7	6,8	38,4	35,3	2,7	37,2	0,7
8	6,7	1,7	9,3	7,2	1,5	8,1	1
9	188,6	85,9	286,6	199,3	76,8	199,3	76,8
10	4,3	5,3	10,7	5,7	4	5,7	4
11	125	54	197,5	139	48	145	39
12	125	54	197,5	139	48	145	39
13	17	71	90,8	46	43	49	40
14	146	5	157,8	152	3,4	152	3,4
15	125	54	187,5	137	46	142	38
16	125	54	187,5	137	46	142	38
17	117	5,3	125,3	120,2	4,7	124,3	0,5
18	76	63	145,3	88	53	97	43
19	5,3	76	86	45	38	46	37
20	78	48	138	92	40	95	34
21	146	5	152,8	148	3,3	149,6	1,5
22	33,8	104,4	143,8	44	97	48,3	92,4
23	237	8	256,7	245	5	247,3	2,2
24	291	61	364,6	302,1	57,3	311,2	47,5
25	62	23	88,5	71	16	74,5	11,6
26	7,3	39,5	51,4	26	23	27,4	20
27	83,6	1,8	91,2	88	2,7	89,1	1,4
28	62	23	88,5	69	17	71,2	14,2
29	12,5	2,5	17	14	2	14	2
30	83,6	1,8	89,4	88	0,2	88	0,2
31	12,5	2,5	17	15	1,3	15,4	0,7
32	7,3	39,5	48,4	29	18,6	30,5	16,9
33	2,4	0,5	3,9	2,9	0,2	2,9	0,2
34	14,7	4,3	19,2	17,5	1,6	18,3	0,8
35	71	17	92,6	78	12,7	81,8	9,4
36	70	20	94,6	74,5	18,4	76,2	17,7
37	2,3	0,5	3,9	3,0	0,2	3,1	0,2
38	73	1	76,7	75,1	0,6	75,1	0,6
39	16	0,4	21,2	19,4	0,3	20,3	0,2
40	28,8	141,7	172,3	33,5	136,5	37,3	134,5

Таблица 6. Индексы эффективности игроков при разных информационных регламентах

№ примера	NE		ST		IST	
	SCI	K_1/K_2	SCI	K_1^L/K_2^F	SCI	K_1^L/K_2^F
1	0,96	0,87 /1,05	0,97	1,08/0,86	0,96	1,18/0,75
2	0,98	1 /0,95	0,99	1,09/0,89	0,98	1,09/0,89
3	0,96	1,4 /0,51	0,99	1,48/0,33	0,97	1,64/0,3
4	0,98	1,48 /0,46	0,99	1,6/0,37	0,98	1,6/0,37
5	0,97	1,58/0,36	0,98	1,75/0,23	0,98	1,91/0,05
6	0,98	1,59/0,35	0,99	1,83/0,14	0,98	1,94/0,04
7	0,98	1,59/0,35	0,99	1,83/0,14	0,98	1,94/0,04
8	0,9	1,46/0,37	0,94	1,54/0,32	0,93	1,74/0,22
9	0,96	1,32/0,6	0,96	1,39/0,54	0,96	1,39/0,54
10	0,9	0,8/1	0,91	1,08/0,75	0,91	1,08/0,75
11	0,91	1,26/0,55	0,95	1,41/0,49	0,93	1,46/0,33
12	0,91	1,26/0,55	0,95	1,41/0,49	0,94	1,46/0,33
13	0,97	0,38/1,58	0,98	1,01/0,95	0,97	1,08/0,88
14	0,96	1,87/0,06	0,98	1,93/0,04	0,97	1,93/0,04
15	0,95	1,33/0,57	0,97	1,46/0,49	0,96	1,51/0,4
16	0,95	1,33/0,57	0,97	1,46/0,49	0,96	1,51/0,4
17	0,98	1,86/0,08	0,99	1,92/0,08	0,98	1,99/0,01
18	0,96	1,04/0,86	0,97	1,21/0,73	0,96	1,34/0,59
19	0,95	0,12/1,77	0,98	1,05/0,88	0,97	1,07/0,86
20	0,91	1,13/0,7	0,95	1,33/0,58	0,94	1,38/0,49
21	0,99	1,92/0,07	0,99	1,95/0,04	0,99	1,97/0,02
22	0,96	0,47/1,45	0,98	0,61/1,35	0,98	0,67/1,28
23	0,95	1,85/0,06	0,97	1,91/0,04	0,97	1,93/0,02
24	0,96	1,6/0,33	0,99	1,65/0,31	0,98	1,7/0,26
25	0,96	1,40/0,52	0,98	1,61/0,36	0,98	1,69/0,26
26	0,91	0,28/1,54	0,93	1,01/0,89	0,92	1,07/0,78
27	0,94	1,83/0,04	0,97	1,93/0,06	0,96	1,95/0,03
28	0,96	1,4/0,52	0,98	1,56/0,38	0,97	1,61/0,32
29	0,88	1,47/0,29	0,94	1,65/0,24	0,94	1,65/0,24
30	0,96	1,86/0,04	0,98	1,97/0,01	0,98	1,97/0,01
31	0,88	1,47/0,29	0,92	1,76/0,15	0,9	1,81/0,08
32	0,97	0,3/1,63	0,99	1,2/0,77	0,98	1,26/0,7
33	0,74	1,23/0,26	0,79	1,49/0,1	0,77	1,49/0,1
34	0,99	1,53/0,45	0,99	1,82/0,17	0,99	1,91/0,08
35	0,95	1,53/0,37	0,98	1,68/0,27	0,98	1,77/0,2
36	0,95	1,48/0,42	0,98	1,58/0,39	0,99	1,61/0,37
37	0,72	1,18/0,26	0,82	1,54/0,1	0,85	1,59/0,1
38	0,96	1,9/0,03	0,99	1,96/0,02	0,99	1,96/0,02
39	0,77	1,51/0,04	0,93	1,83/0,03	0,97	1,92/0,02
40	0,99	0,33/1,65	0,99	0,39/1,59	0,99	0,43/1,77
Среднее значение	0,935	1,28/0,59	0,962	1,5/0,42	0,957	1,56/0,37

версии игры индивидуальные и коллективные индексы относительной эффективности определяются выражениями, аналогичными (3)–(4). Значения индексов для модели (5)–(6) при различных способах организации собраны в табл. 6. В последней строке табл. 6 приведены средние значения индексов.

Отсюда получаем системы предпочтений:

общество $C \succ ST \succ IST \succ NE$;

индивид $IST^L \succ ST^L \succ NE^1 \succ C \succ NE^2 \succ ST^F \succ IST^F$.

Таким образом, кооперативный способ организации более предпочтителен для общества и ведомого игрока. Для ведущего же игрока предпочтительнее иерархическая организация системы управления и информационный регламент игры Γ_{2t} [26].

Теперь проанализируем влияние экологических требований на найденные решения. Условие экологической безопасности возьмем в виде $x_1(T) + x_2(T) \leq \kappa_T$. При иерархическом управлении за его выполнение отвечает ведущий игрок, в остальных случаях это внешнее ограничение, которое анализируется дополнительно. Результаты анализа чувствительности решений к указанному условию приведены в табл. 7.

В столбцах 2–5 табл. 7 для разных информационных регламентов указано в процентах количество проведенных имитационных экспериментов, в которых условие экологической безопасности выполнено. В первом столбце табл. 7 приведены значения параметра κ_T . Таким образом, при больших значениях κ_T все рассмотренные принципы оптимальности дают экологически безопасные решения. С уменьшением значения κ_T число равновесий, отвечающих экологическому условию, при всех принципах оптимальности умень-

Таблица 7. Анализ выполнения условия экологической безопасности

κ_T	NE (%)	C (%)	ST (%)	IST (%)
12	100	100	100	100
11	97,5	100	97,5	97,5
10	95	100	97,5	95
9	95	100	95	95
8	95	100	95	92,5
7	92,5	100	92,5	92,5
6	92,5	100	92,5	90
5	87,5	100	90	87,5
4	60	100	60	60
3	50	100	60	57,5
2	50	97,5	50	50
1	30	95	30	27,5
0,5	30	95	25	22,5
0,1	15	62,5	15	12,5

шается. С точки зрения экологической безопасности принципы оптимальности упорядочены следующим образом: $C \succ NE \sim T \sim IST$.

4. Заключение

Проблема (не)эффективности равновесий общепризнанна и служит предметом внимания большого числа работ. Для количественной оценки (не)эффективности предложен ряд индексов, отражающих пессимистический подход (цена анархии), оптимистический подход (цена стабильности), динамические аспекты (цена информации), альтруистическое поведение индивида (цена кооперации).

Однако указанные индексы анализируют эффективность равновесий с точки зрения всего общества. В этом случае кооперация является очевидным наилучшим исходом и индексы оценивают только степень отклонения системы от глобального оптимума. Между тем реальная возможность кооперации зависит от интересов не только общества в целом, но и отдельных экономических агентов (предпринимателей, фирм и т.п.). Например, выигрыш игрока в роли ведущего при иерархической организации может оказаться большим, чем его доля при кооперативном распределении, и тогда вместо кооперации возникает борьба за лидерство. Поэтому для систематического анализа (не)эффективности равновесий и условий выгоды кооперации требуются не только коллективные, но и индивидуальные индексы относительной эффективности.

Кроме того, необходимо дополнительно учитывать условия жизнеспособности, определяющие требования к состоянию управляемой динамической системы. В частности, эти условия могут задавать экологические ограничения экономической деятельности, необходимые для устойчивого развития эколого-экономических систем.

В данной статье система индивидуальных и коллективных индексов относительной эффективности применена к исследованию статических и динамических моделей дуополии Курно. В динамике для определения индексов применялось усреднение по множеству вычислительных экспериментов. Как и предполагалось, системы предпочтений для индивида (фирмы) и общества в целом противоречивы. Кооперация игроков выгодна для общества в целом, подчиненного (ведомого) игрока и с точки зрения выполнения условия экологической безопасности. Для лидера (ведущего игрока) предпочтительнее иерархия с информационным регламентом игры Гермейера Γ_2 . Более того, у двух несимметричных игроков различно отношение к кооперации: для одного из них она выгоднее независимого поведения, для другого — наоборот.

В дальнейшем планируется исследование моделей дуополии и олигополии Курно с учетом условия экологической безопасности для иных классов функций, в частности степенных, а также рассмотрение теоретико-игровых моделей олигополии Курно в форме характеристической функции. Будут рассмотрены и другие статические и динамические теоретико-игровые модели в

нормальной форме и форме характеристической функции с целью сравнительного анализа эффективности способов взаимодействия активных агентов [27].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним данные из табл. 1. Для нахождения равновесия Нэша в модели (1)–(2) решим систему $\frac{\partial g_i}{\partial u_i} = 0$, $i = 1, 2$, откуда $\begin{cases} 1/2 - 2u_1 - u_2 = 0 \\ 1/2 - u_1 - 2u_2 = 0, \end{cases}$ $u_1 = u_2 = 1/6$.

Матрица Гессе для этой системы $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ отрицательно определена, поэтому $u_1^{NE} = u_2^{NE} = 1/6$, $g_1^{NE} = g_2^{NE} = 1/36$. При кооперации игроки совместно максимизируют функцию $g(\bar{u}) = (1/2 - \bar{u})\bar{u}$, $\bar{u} = u_1 + u_2$. Имеем $\frac{\partial g}{\partial \bar{u}} = 1/2 - 2\bar{u} = 0$, $\bar{u} = 1/4$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{u}^2} = -2 < 0$. Поэтому множество Парето-оптимальных кооперативных решений есть $\bar{u}^C = 1/4$, откуда выбираем равный дележ $u_1^C = u_2^C = 1/8$ и получаем выигрыши $g_1^C = g_2^C = 1/32$. Если первый игрок — лидер по Штакельбергу, то из условия $\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0$ оптимальная функция реакции второго игрока есть $u_2(u_1) = 1/4 - u_1/2$. Подставляя ее в g_1 , получаем $g_1(u_1, u_2(u_1)) = (1/4 - u_1/2)u_1$. Условие $\frac{\partial g_1}{\partial u_1} = 0$ дает $u_1 = 1/4$. Поскольку $\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_1^2} = -1 < 0$, то $u_1^{ST1} = 1/4$, $u_2^{ST1} = u_2(u_1^{ST1}) = 1/8$, $g_1^{ST1} = 1/32$, $g_2^{ST1} = 1/64$.

Наконец, найдем решение игры (1)–(2) как Γ_2 [25]. Имеем

$$u_1^D(u_2) = \mathop{\text{Arg max}}_{0 \leq u_1 \leq 1/2} g_1(u_1, u_2) = 1/4 - u_2/2,$$

$$u_1^P(u_2) = \mathop{\text{Arg min}}_{0 \leq u_1 \leq 1/2} g_2(u_1, u_2) \equiv 1/2,$$

$$L_2 = \max_{0 \leq u_2 \leq 1/2} (u_1^P(u_2), u_2) = \max_{0 \leq u_2 \leq 1/2} (-u_2^2) = 0,$$

$$E_2 = \{u_2 \in U_2 : g_2(u_1^P(u_2), u_2) = L_2\} = \{0\},$$

$$D_2 = \{(u_1, u_2) : g_2(u_1, u_2) > 0\},$$

$$K_2 = \min_{u_2 \in E_2} \max_{0 \leq u_1 \leq 1/2} g_1(u_1, u_2) = \max_{0 \leq u_1 \leq 1/2} (1 - u_1)u_1 = 1/16.$$

Для нахождения величины $K_1 = \sup_{D_2} g_1(u_1, u_2)$ надо решить задачу оптимизации $(1/2 - u_1 - u_2)u_1 \rightarrow \max$, $(1/2 - u_1 - u_2)u_2 > 0$, $0 \leq u_i \leq 1/2$. Очевидно $u_2^\varepsilon = \varepsilon$, $u_1^\varepsilon = 1/4$. Тогда $K_1 = 1/16 - \varepsilon/4 < K_2$, поэтому ε -оптимальная стратегия ведущего имеет вид $\tilde{u}_1^\varepsilon(u_2) = \begin{cases} 1/4, & u_2 = 0 \\ 1/2 & \text{иначе} \end{cases}$ при этом $g_1^{IST1} = 1/16$, $g_2^{IST1} = 0$.

Заметим, что $\bar{u}^{NE} = 1/3$, $\bar{u}^C = 1/4$, $\bar{u}^{ST} = 3/8$, $\bar{u}^{IST} = 1/4$, откуда следуют данные табл. 3.

Таблица. Входные данные для численного решения динамической дуополии Курно

№ примера	D	m_1	m_2	a_1	a_2	x_{10}	x_{20}	v_{\max}
1	10	0,2	0,001	1	5	3	2	100
2	10	1	3	1	5	3	2	100
3	15	1	3	1	5	3	2	100
4	15	1	3	3	7	3	2	100
5	15	1	3	3	7	10	10	100
6	15	1	3	3	7	10	10	500
7	15	1	3	10	15	10	10	100
8	15	10	20	3	7	10	10	100
9	40	1	3	3	7	10	10	100
10	10	5	3	3	5	3	2	100
11	30	1	3	3	7	10	10	100
12	30	1	3	3	7	10	10	300
13	30	10	3	3	7	10	10	100
14	30	1	30	3	7	10	10	100
15	30	1	3	30	7	10	10	100
16	30	1	3	3	70	10	10	100
17	30	1	3	3	7	30	10	100
18	30	1	3	3	7	10	30	100
19	30	30	3	30	7	10	10	100
20	30	30	3	3	70	10	10	100
21	30	1	30	30	7	10	10	100
22	40	10	3	3	7	10	10	100
23	40	1	30	3	7	10	10	100
24	40	1	3	30	7	20	10	100
25	20	1	3	3	7	10	10	100
26	20	10	3	3	7	10	10	100
27	20	1	30	3	7	10	10	100
28	20	1	3	3	7	10	10	300
29	20	10	30	3	7	10	10	100
30	20	1	30	3	70	10	10	100
31	20	10	30	30	7	10	10	100
32	20	10	3	30	7	10	10	300
33	10	10	30	1	5	3	2	100
34	10	1	3	10	50	3	2	100
35	40	1	30	1	5	3	20	100
36	40	10	3	1	5	30	2	100
37	10	10	30	10	5	3	2	100
38	40	10	30	1	50	30	2	100
39	10	1	30	10	50	3	2	100
40	40	10	3	10	5	30	20	100

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Algorithmic Game Theory / Ed. by *Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V.* Cambridge University Press, 2007.
2. *Johari R., Tsitsiklis J.N.* Efficiency loss in a network resource allocation game // *Math. Oper. Res.* 2004. No. 29(3). P. 407–435.
3. *Papadimitriou C.H.* Algorithms, games, and the Internet // *Proc. 33rd Symp. Theory of Computing.* 2001. P. 749–753.
4. *Roughgarden T.* Selfish Routing and the Price of Anarchy. MIT Press, 2005.
5. *Basar T., Zhu Q.* Prices of Anarchy, Information, and Cooperation in Differential Games // *J. Dynam. Games and Appl.* 2011. No. 1. P. 50–73.
6. *Aubin J.-P.* Viability Theory. Springer-Verlag, 1991.
7. *Cairns R.D., Martinet V.* An environmental-economic measure of sustainable development // *Eur. Econom. Rev.* 2014. No. 69. P. 4–17.
8. *Doyen L., Martinet V.* Maximin, viability and sustainability // *J. Econ. Dynam. Control.* 2012 V. 36(9). P. 1414–1430.
9. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
10. *Maskin E., Tirole J.* A Theory of Dynamic Oligopoly, III. Cournot Competition // *Eur. Econom. Rev.* 1987. No. 31. P. 947–968.
11. *Bischi G.I., Naimzada A.* Global Analysis of a Dynamic Duopoly Game with Bounded Rationality // *Advances in Dynamic Games and Applications.* Ed. by J. Filar et al. – Birkhauser. 2000. P. 361–385.
12. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // *АиТ.* 2018. № 5. С. 83–106.
Geras'kin M.I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stackelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.
13. *Гераськин М.И.* Рефлексивные игры в линейных моделях дуополии Штакельберга при несовпадении рангов рефлексии // *АиТ.* 2020. № 2. С. 134–156.
Geras'kin M.I. Reflexive Games in the Linear Stackelberg Duopoly Models under Incoincident Reflexion Ranks // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 302–319.
14. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // *АиТ.* 2020. № 6. С. 105–130.
Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.
15. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // *АиТ.* 2020. № 9. С. 120–143.
Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 9. P. 1659–1678.
16. *Гераськин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов // *АиТ.* 2022. № 3. С. 110–131.
Geras'kin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.

17. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ.* 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexion Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 287–301.
18. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *АиТ.* 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
19. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // *АиТ.* 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
20. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
21. *Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, 2000.
22. *Ugol'nitskii G.A., Usov A.B.* Equilibria in models of hierarchically organized dynamic systems with regard to sustainable development conditions // *Autom. Remote Control.* 2014. No. 6. P. 1055–1068.
23. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Solution algorithms for differential models of hierarchical control systems // *Autom. Remote Control.* 2016. No. 5. P. 872–880.
24. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games / Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. P. 63–106.
25. *Гермейер Ю.Б.* Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
26. Современное состояние теории исследования операций. Под ред Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979.
27. *Угольницкий Г.А.* Теория управления устойчивым развитием активных систем. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016.
28. *Bressan A.* Noncooperative Differential Games // *Milan J. Math.* 2011. No. 2. P. 357–427.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 21.04.2022

После доработки 16.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.** О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением 3
- Коган М.М.** О двойственности по Лагранжу стохастических и детерминированных минимаксных задач управления и фильтрации 35

Нелинейные системы

- Алиева С.Т.** Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче управления, описываемой нелинейными разностными уравнениями дробного порядка 54
- Барсегян В.Р.** Граничное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени 66
- Гайдук А.Р.** Синтез нелинейных селективно-инвариантных систем управления на основе квазилинейных моделей 81
- Каменецкий В.А.** Матричные неравенства в теории устойчивости: новые результаты на основе теоремы о свертывании 103

Стохастические системы

- Булгаков С.А., Хаметов В.М.** Оптимальное восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками .. 122

Управление в социально-экономических системах

- Угольницкий Г.А., Усов А.Б.** Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий 150

C O N T E N T S

Linear Systems

- Berendakova A.V., Ibragimov D.N.** On the Method for Constructing External Estimates of the Limit Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control.....3
- Kogan M.M.** On Lagrange Duality of Stochastic and Deterministic Minimax Control and Filtering Problems 35

Nonlinear Systems

- Aliyeva S.T.** Necessary Optimality Conditions of the First and Second Orders in One Control Problem Described by Nonlinear Difference Equations of Fractional Order..... 54
- Barseghyan V.R.** Boundary Control of Some Distributed Non-homogeneous Oscillatory System with Given States at Intermediate Moments of Time 66
- Gaiduk A.R.** Design of Nonlinear Selectively-Invariant Control Systems on Basis of Quasilinear Models 81
- Kamenetskiy V.A.** Matrix Inequalities in Stability Theory: New Results based on the Convolution Theorem.....103

Stochastic Systems

- Bulgakov S.A., Khametov V.M.** Optimal Recovery of Square-Integrable Function from Observations with Gaussian Errors.....122

Control in Social Economic Systems

- Ougolnitsky G.A., Usov A.B.** Comparative Analysis of Efficiency of the Methods of Interaction of Economic Agents in the Models of Cournot Duopoly with Consideration of Ecological Conditions.....150