

ISSN 0005-2310

А Т **АВТОМАТИКА** **И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МЕХАНИКА**



2023

2023



Российская Академия Наук

А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

Москва

Я Н В А Р Ъ

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневецкий В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталева М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»

© 2023 г. А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук
(a.u.aleksandrov@spbu.ru)

(Санкт-Петербургский государственный университет;
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)
А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук (a.tikhonov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМИ ПОЗИЦИОННЫМИ СИЛАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ¹

Рассматриваются механические системы с линейными скоростными силами и существенно нелинейными позиционными силами, содержащими слагаемые с распределенным запаздыванием. С помощью прямого метода Ляпунова и метода декомпозиции устанавливаются условия асимптотической устойчивости положений равновесия изучаемых систем. Разработанные подходы применяются для решения задачи одноосной стабилизации твердого тела. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие выводы, полученные аналитически.

Ключевые слова: механические системы, распределенное запаздывание, устойчивость, декомпозиция, функционал Ляпунова–Красовского, одноосная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231023010014, EDN: LTXJDN

1. Введение

Проблемы исследования устойчивости движений механических систем при заданных силах и их стабилизации при возможности использования управляющих сил актуальны в современной теории управления [1–5]. Если действующие на систему силы существенно нелинейны, т.е. их разложения в ряды по степеням обобщенных координат или скоростей не содержат линейных членов, то одним из основных методов анализа устойчивости становится прямой метод Ляпунова. В случае наличия запаздывания в системе применение этого метода базируется или на подходе Разумихина, или на использовании функционалов Ляпунова–Красовского [6–8]. Однако следует заметить, что

¹ Результаты разделов 3 и 4 получены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573) в Институте проблем машиноведения РАН.

для существенно нелинейных систем проблема построения функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского значительно усложняется.

Одним из эффективных способов решения указанной проблемы является метод декомпозиции. Метод направлен на исследование свойств решений дифференциальных систем большой размерности на основе анализа свойств выделяемых из нее подсистем меньших размерностей [1, 9–11]. Он широко и успешно применяется для исследования устойчивости и стабилизации механических систем. Например, в [12–16] метод декомпозиции использовался для построения управлений в электромеханических и робототехнических системах, в [17] метод декомпозиции применен в задаче об отслеживании траекторий механических систем, в [18] — для построения управления угловой ориентацией космического аппарата, в [2] — при решении задачи о переводе управляемой лагранжевой системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние за конечное время. В монографии [9], при рассмотрении механической системы, моделируемой линейными автономными дифференциальными уравнениями 2-го порядка, было показано, что исследование ее устойчивости можно свести к исследованию устойчивости двух изолированных подсистем относительно дифференциальных уравнений 1-го порядка. Этот результат получил дальнейшее развитие в публикациях [19–22].

Системы с запаздыванием представляют собой одну из важных и широко распространенных категорий динамических систем, встречающихся в механике в связи с нелинейными эффектами типа гистерезиса, эффектами памяти формы материала, а также в связи с конечностью распространения сигналов в системах управления [6–8, 23]. Кроме того, запаздывание, в частности — распределенное запаздывание, может намеренно вводиться в управляемые механические системы в качестве интегральной части ПИД-регулятора с целью улучшения характеристик переходных процессов в таких системах [4, 24, 25].

Системы управления с распределенным запаздыванием рассматривались в [4, 24–29], где были получены условия устойчивости на базе функционалов Ляпунова–Красовского как с отрицательно определенными, так и знакопостоянными производными. В [30] линейные управляемые механические системы с распределенным запаздыванием в позиционных силах изучались на предмет устойчивости с использованием метода декомпозиции. Анализ устойчивости опирался на предположение о наличии большого параметра в качестве множителя при векторе сил, зависящих от обобщенных скоростей.

Новизна данной статьи проявляется как в постановке задачи, так и в подходах к ее решению. Рассматривается механическая система, находящаяся под действием позиционных сил, существенно нелинейным образом зависящих от обобщенных координат и содержащих слагаемые с распределенным запаздыванием, а также от сил, линейным образом зависящих от обобщенных скоростей. С использованием специальных конструкций функционалов Ляпунова–Красовского полного типа [6] и метода декомпозиции доказаны

теоремы об условиях асимптотической устойчивости положений равновесия изучаемых систем. Установлено, что, по сравнению с линейным случаем [30], для системы с существенно нелинейными позиционными силами условия устойчивости могут быть сформулированы в более простой и конструктивной форме.

2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, движения которой описываются уравнениями

$$(1) \quad A\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + Q(q(t)) + \int_{t-\tau}^t D(q(\xi))d\xi = 0,$$

где $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ — n -мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей, соответственно, A и B — постоянные матрицы, векторные функции $Q(q)$ и $D(q)$ определены и непрерывны при $q \in \mathbb{R}^n$, τ — постоянное положительное запаздывание. Таким образом, исследуется система с линейными скоростными силами, в то время как позиционные силы, вообще говоря, нелинейны и содержат члены с распределенным запаздыванием.

Каждое решение $q(t, t_0, \chi)$ системы (1) при $t \geq t_0$ определяется начальным моментом времени t_0 и начальной функцией $\chi(\xi)$, где $t_0 \geq 0$, $\chi(\xi)$ принадлежит пространству $C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых функций с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [-\tau, 0]} (\|\chi(\xi)\| + \|\dot{\chi}(\xi)\|)$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Через $q_t(t_0, \chi)$ обозначим отрезок решения: $q_t(t_0, \chi) : \xi \rightarrow q(t + \xi, t_0, \chi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$.

Будем предполагать, что $Q(0) = D(0) = 0$. Значит, рассматриваемая система имеет положение равновесия

$$(2) \quad q = \dot{q} = 0.$$

Цель настоящей работы — получить условия асимптотической устойчивости этого положения равновесия.

Следует отметить, что в статье [30] такая задача решалась для случая линейных позиционных сил. Анализ устойчивости проводился на основе разработанного в [9, 19–21] подхода к декомпозиции механических систем. Однако установленные в [30] условия формулируются в терминах разрешимости некоторой системы линейных матричных неравенств и гарантируют асимптотическую устойчивость положения равновесия только при наличии большого параметра в качестве множителя при скоростных силах.

В данной работе исследуется случай, когда позиционные силы являются существенно нелинейными. Наряду с методом декомпозиции используется подход, основанный на построении для рассматриваемой системы функционала Ляпунова–Красовского полного типа [6] специального вида. Показывается, что, в отличие от линейного случая, для асимптотической устойчивости

системы с существенно нелинейными позиционными силами не требуется наличия большого параметра при скоростных силах, а сами условия устойчивости формулируются в более простой и конструктивной форме. Полученные результаты применяются для решения задачи одноосной стабилизации твердого тела.

3. Построение функционала Ляпунова–Красовского полного типа

Предположим, что система (1) представима в виде

$$(3) \quad A\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + \frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} + P(q(t))q(t) + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi = 0.$$

Здесь A и B — симметрические и положительно определенные матрицы, $\Pi(q)$ и $\tilde{\Pi}(q)$ — непрерывно дифференцируемые при $q \in \mathbb{R}^n$ однородные функции порядка $\mu + 1 > 2$, $P(q)$ — непрерывная при $q \in \mathbb{R}^n$ кососимметрическая матрица, для которой при всех $q \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$(4) \quad \|P(q)\| \leq p_0 \|q\|^{\sigma-1},$$

где постоянные p_0 и σ удовлетворяют условиям $p_0 > 0$, $\sigma > 1$.

Таким образом, рассматриваем случай, когда A — симметрическая и положительно определенная матрица инерционных характеристик системы, а линейные скоростные силы являются диссипативными. Кроме того, в соответствии с теоремой о канонической структуре силовых полей [31] считаем, что нелинейные позиционные силы представлены в виде сумм потенциальных и неконсервативных составляющих, причем для подинтегральной вектор-функции неконсервативная составляющая равна нулю.

Известно [21], что если

$$(5) \quad \tilde{\Pi}(q) \equiv 0,$$

то для асимптотической устойчивости положения равновесия (2) достаточно, чтобы функция $\Pi(q)$ была положительно определена, а параметр σ удовлетворял неравенству

$$(6) \quad 2\sigma > \mu + 1.$$

Исследуем устойчивость положения равновесия в случае, когда тождество (5) не выполнено.

Теорема 1. Если $\mu > 1$, функция $\Pi(q) + \tau\tilde{\Pi}(q)$ положительно определена и справедливо неравенство (6), то положение равновесия (2) системы (3) асимптотически устойчиво.

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2, 3 приведены в Приложении.

Замечание 1. Теорема 1 дает конструктивный способ стабилизации механической системы за счет выбора позиционных сил с распределенным запаздыванием. При этом важно, что потенциальная энергия системы $\Pi(q)$ может не быть положительно определенной, а порядок неконсервативных сил может быть меньше порядка однородности векторных функций $\partial\Pi(q)/\partial q$ и $\partial\tilde{\Pi}(q)/\partial q$. Отметим, что для линейных систем такой способ стабилизации приводит к более жестким и менее конструктивным условиям на выбор подынтегрального члена (см. [8, 25, 30]).

С помощью построенного при доказательстве теоремы 1 функционала Ляпунова–Красовского (П.1) можно не только показать, что положение равновесия системы (3) асимптотически устойчиво, но и оценить скорость сходимости решений к положению равновесия.

Действительно, используя соотношения (П.2), (П.3), получаем, что при $\|q_t\| < \delta$ этот функционал удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq -\tilde{c} V^{\frac{\mu+1}{2}}, \quad \tilde{c} = \text{const} > 0,$$

интегрируя которое, приходим к следующему результату.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существуют положительные числа $d_1, d_2, d_3, \tilde{\delta}$ такие, что если начальные данные решения $q(t, t_0, \chi)$ системы (3) удовлетворяют условиям $t_0 \geq 0$, $\|\chi\|_\tau < \tilde{\delta}$, то

$$\begin{aligned} \|q(t, t_0, \chi)\| &\leq d_1 \|\chi\|_\tau (1 + d_3 \|\chi\|_\tau^{\mu-1} (t - t_0))^{-\frac{1}{\mu-1}}, \\ \|\dot{q}(t, t_0, \chi)\| &\leq d_2 \|\chi\|_\tau (1 + d_3 \|\chi\|_\tau^{\mu-1} (t - t_0))^{-\frac{1}{\mu-1}} \end{aligned}$$

при всех $t \geq t_0$.

4. Исследование устойчивости на основе декомпозиции

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы A и B в системе (1) являются постоянными и неособыми (в отличие от предыдущего раздела, не предполагается, что они симметрические и положительно определенные), а векторные функции $Q(q)$ и $D(q)$ непрерывны при $q \in \mathbb{R}^n$ и являются однородными порядка $\mu > 1$. Для анализа устойчивости такой системы применим метод декомпозиции в форме, предложенной в работах [9, 19–22].

Строим изолированные подсистемы без запаздывания

$$(7) \quad A\dot{x}(t) = -Bx(t),$$

$$(8) \quad B\dot{y}(t) = -Q(y(t)) - \tau D(y(t)).$$

Теорема 2. Если $\mu > 1$ и нулевые решения подсистем (7), (8) асимптотически устойчивы, то положение равновесия (2) системы (1) также асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Как и теорема 1, теорема 2 дает конструктивный способ стабилизации механической системы за счет выбора подинтегральной функции в слагаемом с распределенным запаздыванием, а с помощью построенного при ее доказательстве функционала Ляпунова–Красовского можно оценить скорость сходимости решений к положению равновесия.

5. Одноосная стабилизация твердого тела

Рассмотренные выше дифференциальные системы (1) и (3) имеют структуру, типичную для математических моделей, описывающих большое разнообразие механических систем. Тем не менее во многих актуальных приложениях могут встречаться математические модели, в которых дифференциальные уравнения движения разрешены относительно первых производных. Это обстоятельство не препятствует применению разработанных подходов к таким моделям. К числу этих моделей относятся задачи динамики объектов, аппроксимируемых твердым телом, поворачивающимся относительно своего центра масс. Рассмотрим в данном разделе одну из таких задач, в которой разработанные подходы успешно применяются для одноосной стабилизации твердого тела в пространстве.

Рассмотрим твердое тело, совершающее вращательное движение относительно своего центра масс (точка O) с угловой скоростью ω . Пусть $Oxyz$ — система жестко связанных с телом главных центральных осей инерции, а $\Theta = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — тензор инерции тела в этих осях. Динамические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение тела под действием управляющего момента M_u , имеют вид

$$(9) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = M_u.$$

Переходя к задаче об одноосной стабилизации тела, введем в рассмотрение орт r , неподвижный в системе координат $Oxyz$, и орт s , неподвижный в инерциальном пространстве. По теореме о полной и локальной производной для орта s имеем равенство (кинематическое уравнение Пуассона)

$$(10) \quad \dot{s}(t) + \omega(t) \times s(t) = 0,$$

составляющее вместе с уравнениями (9) замкнутую дифференциальную систему. Задача об одноосной стабилизации твердого тела [32] заключается в том, чтобы найти управляющий момент M_u , позволяющий обеспечить для системы (9), (10) существование и асимптотическую устойчивость решения

$$(11) \quad s = r, \quad \omega = 0,$$

соответствующего положению равновесия оси тела.

Как доказано в [32], данная задача может быть решена с использованием управляющего момента вида $M_u = -a\|s(t) - r\|^{\mu-1}s(t) \times r - F\omega(t)$. Здесь первая составляющая представляет собой восстанавливающий момент, а вторая — диссипативный момент. При этом $a > 0$, $\mu \geq 1$, F — постоянная положительно определенная матрица. Похожая задача, относящаяся к классу нелинейных динамических задач [5, 33], отличающаяся, однако, линейностью управляющего момента и неинерциальностью базовой системы координат (такие системы координат широко используются в космодинамике [34, 35] наряду с инерциальными системами координат), была рассмотрена в работе [36]. С целью выполнения требования к гладкости переходных процессов, принципиально важного для некоторых задач управления ориентацией ИСЗ (в частности, в условиях, близких к резонансным [34, 37]), в [36] было применено управление с распределенным запаздыванием (интегральный член), что оказалось эффективным.

Применим аналогичный подход в данной задаче. Для этого введем в систему управления наряду с моментом M_u также момент

$$M_\tau = b \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu-1}s(\xi) \times r d\xi,$$

где b — постоянный коэффициент, τ — постоянное положительное запаздывание. Тогда уравнения Эйлера примут вид

$$(12) \quad \Theta\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta\omega(t)) = -F\omega(t) - a\|s(t) - r\|^{\mu-1}s(t) \times r + \\ + b \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu-1}s(\xi) \times r d\xi.$$

Будем считать, что начальные функции $\chi(\xi)$ для системы (10), (12) принадлежат пространству $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^6)$ непрерывных функций с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [- \tau, 0]} \|\chi(\xi)\|$. Требуется определить условия асимптотической устойчивости положения равновесия (11) системы (10), (12). Такая задача решалась в работе [30] в случае линейных ($\mu = 1$) восстанавливающего момента и момента M_τ . Было доказано, что одноосную стабилизацию тела можно гарантировать, если выполнено неравенство

$$(13) \quad |b|\tau < a,$$

и в диссипативной составляющей управляющего момента имеется достаточно большой положительный множитель.

Цель настоящего раздела — показать, что при использовании существенно нелинейных ($\mu > 1$) восстанавливающего момента и момента M_τ одноосная стабилизация тела может быть обеспечена при менее жестких ограничениях

на параметры системы. В частности, ослабление требований к величине диссипативного момента играет важную роль в задачах угловой стабилизации ИСЗ, поскольку создание диссипативных моментов в космических условиях представляет непростую задачу.

Теорема 3. Пусть $\mu > 1$. Тогда при выполнении неравенства

$$(14) \quad b\tau < a$$

положение равновесия (11) системы (10), (12) асимптотически устойчиво.

Замечание 3. По сравнению с условием (13), неравенство (14) задает более широкую область допустимых значений параметров системы, при этом в теореме 3 не требуется наличия большого параметра в качестве множителя при моменте диссипативных сил. Кроме того, в отличие от линейного случая (см. [30]), из теоремы 3 следует, что при использовании существенно нелинейного момента M_τ одноосную стабилизацию тела можно гарантировать при $a = 0$, $b < 0$, т.е. когда на тело не действует восстанавливающий момент.

6. Результаты численного моделирования

Рассматривается твердое тело с моментами инерции $J_1 = 5$, $J_2 = 6$, $J_3 = 4$. Здесь и далее все физические величины имеют размерности в системе СИ. Ставится задача одноосной стабилизации тела в инерциальной системе координат в положении равновесия (11), при котором $r = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^\top$. Задача решается с использованием управления, построенного в предыдущем разделе, в соответствии с уравнениями (10), (12).

Пусть $F = h \cdot \text{diag}(1, 1, 1)$, $h = 0,7$, $a = 2$, $b = 2$, $\tau = 0,9$. Выбрав $\mu = 1$, соответствующий случаю линейных позиционных сил, получаем пример, который был ранее рассмотрен в статье [30]. Так же, как в [30], предположим, что тело отклонено от положения равновесия так, что при $t \in [-\tau, 0]$ углы крена, тангажа и рыскания (“самолетные” углы) соответственно имели значения $\varphi(t) = 0,5$, $\theta(t) = 0,6$, $\psi(t) = -0,8$, а проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции были равны $\omega_x(t) = \omega_y(t) = \omega_z(t) = 1$. Процесс стабилизации тела, характеризуемый поведением направляющих косинусов стабилизируемой оси относительно базовой системы координат, показан на рис. 1.

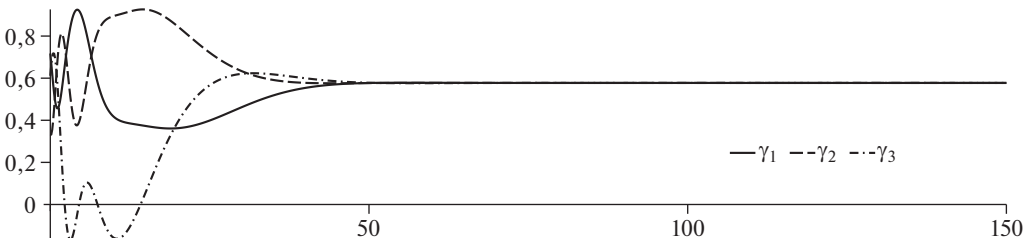


Рис. 1. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = 2$, $\mu = 1$.

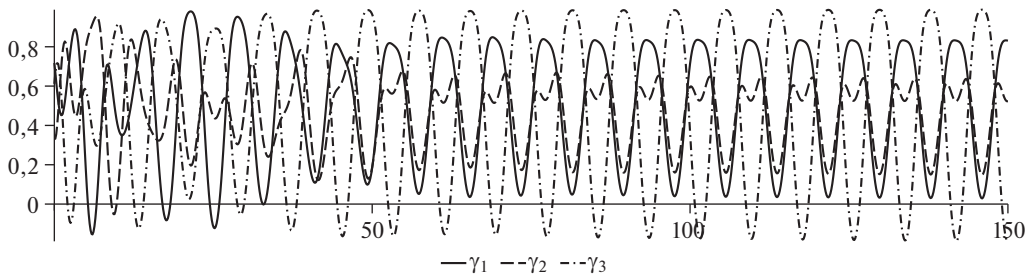


Рис. 2. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = -2$, $\mu = 1$.

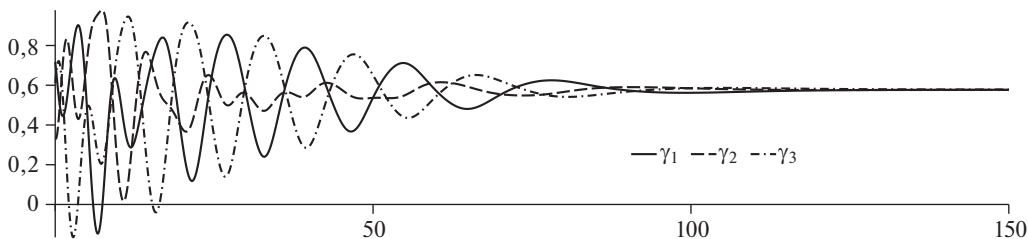


Рис. 3. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = -2$, $\mu = 2$.

Неравенство (13) в этом случае выполняется. Точно так же, неравенство (13) будет выполняться, если заменить знак параметра b на противоположный. Однако численное интегрирование свидетельствует о том, что при $b = -2$ и прежних значениях всех прочих параметров и начальных условий, выбранное управление не справляется с задачей стабилизации оси тела (см. рис. 2). Напомним, что доказанная в [30] теорема гарантирует стабилизацию только при достаточно больших значениях параметра h .

Выберем теперь $\mu = 2$, что соответствует нелинейному восстанавливающему моменту в управлении, и снова проинтегрируем уравнения (10), (12) при $b = -2$ и прежних значениях всех прочих параметров и начальных условий. Результат, показанный на рис. 3, свидетельствует о сходимости процесса стабилизации оси тела, что полностью согласуется с утверждением теоремы 3.

Проиллюстрируем также замечание 3 к теореме 3. Для этого существенно уменьшим коэффициенты при восстанавливающем и диссипативном моментах, выбрав $a = 0,6$, $h = 0,2$, и положим $b = -0,6$. Сначала выберем $\mu = 1$. Неравенство (13) в этом случае не выполняется, а процесс стабилизации оси тела не сходится. Хаотичный процесс, показанный для ясности на коротком промежутке времени на рис. 4, продолжается таким же образом и на интервале времени, имеющем в 100 раз большую продолжительность.

Теперь выберем $\mu = 2$, оставив без изменения все прочие параметры и начальные условия. В этом случае выполняется неравенство (14). Соответствующие результаты численного моделирования показаны на рис. 5.

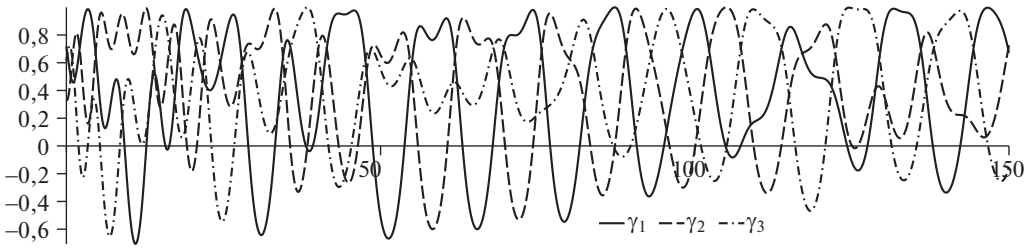


Рис. 4. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $a = 0,6$, $h = 0,2$, $b = -0,6$, $\mu = 1$.

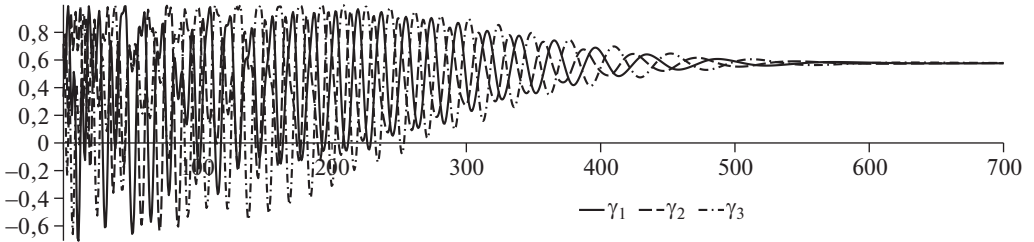


Рис. 5. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $a = 0,6$, $h = 0,2$, $b = -0,6$, $\mu = 2$.

Видно, что процесс одноосной стабилизации тела сходится к программному положению, что согласуется с утверждением теоремы 3. Медленная сходимость процесса объясняется существенной нелинейностью управления, а также малостью значений коэффициентов a и h . При этом малость упомянутых коэффициентов не всегда может рассматриваться лишь как недостаток системы управления. В частности, в задачах угловой стабилизации ИСЗ такое положение дел может являться естественным следствием условий функционирования системы управления.

В замечании 3 также отмечено, что вывод теоремы 3 допускает нулевое значение коэффициента a . Выберем $a = 0$, $h = 1$, $\tau = 1$, $b = -1$, $\mu = 2$, оставив без изменения остальные параметры и начальные условия движения. Представленные на рис. 6 результаты моделирования подтверждают теоретический вывод.

Кроме того, для рассматриваемого случая, используя доказательство теоремы 3, получаем следующие оценки области притяжения и скорости сходимости решений:

$$(15) \quad \|s(t) - r\| \leq 9,21\|\chi\|_{\tau} (1 + 0,23\|\chi\|_{\tau}(t - t_0))^{-1},$$

$$\|\omega(t)\| \leq 7,44\|\chi\|_{\tau} (1 + 0,23\|\chi\|_{\tau}(t - t_0))^{-1}$$

при $\|\chi\|_{\tau} < 0,28$. Далее эти теоретические результаты сравниваются с результатами компьютерного моделирования. На рис. 7 показаны два графика: сплошной линией — полученные численным интегрированием значения

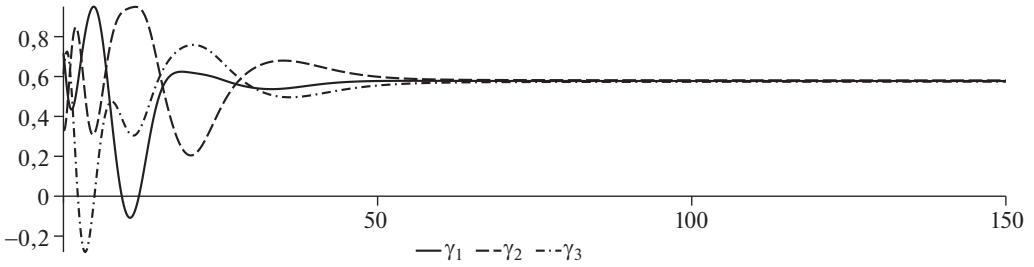


Рис. 6. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $a = 0$, $h = 1$, $b = -1$, $\mu = 2$.

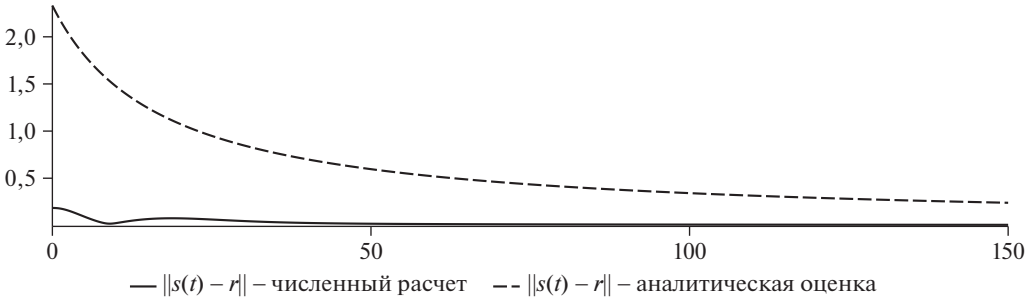


Рис. 7. Сравнение численных и аналитических результатов.

$\|s(t) - r\|$ в зависимости от t , а пунктирной линией — оценка, соответствующая правой части неравенства (15).

Расчеты выполнены для следующих начальных функций: $\varphi(t) = 0,8$, $\theta(t) = 0,8$, $\psi(t) = -0,8$, $\omega_x(t) = \omega_y(t) = \omega_z(t) = 0,1$ при $t \in [-\tau, 0]$. При таком выборе значение $\|\chi\|_\tau$ оказывается равным $0,25$ и, следовательно, неравенство $\|\chi\|_\tau < 0,28$ выполнено.

7. Заключение

В статье рассмотрены вопросы устойчивости решений дифференциальных систем, описывающих движения в механических системах, в том числе, в системах управления, отличающихся существенной нелинейностью позиционных сил и наличием распределенного запаздывания. С использованием функционалов Ляпунова–Красовского полного типа специальной конструкции и метода декомпозиции показано, что, в отличие от линейного случая, для асимптотической устойчивости системы с существенно нелинейными позиционными силами не требуется наличия большого параметра при скоростных силах, причем условия асимптотической устойчивости формулируются в более простой и конструктивной форме. Доказаны две теоремы об устойчивости положений равновесия указанных механических систем, а также теорема о стабилизации оси твердого тела в пространстве с помощью нелинейного по позиционным силам управления с распределенным запаздыванием. Приведе-

ны результаты численного моделирования, подтверждающие выводы, полученные аналитически. В качестве направления для дальнейших исследований отметим вопрос о влиянии величины запаздывания на оценку области притяжения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Используя подходы, разработанные в статьях [20–22, 38], строим функционал Ляпунова–Красовского в следующем виде:

$$(П.1) \quad V(q_t) = \frac{1}{2}\lambda\dot{q}^\top(t)A\dot{q}(t) + \frac{1}{2}q^\top(t)Bq(t) + q^\top(t)A\dot{q}(t) - \\ - q^\top(t) \int_{t-\tau}^t (\xi - t + \tau) \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi + \int_{t-\tau}^t (\alpha + \beta(\xi - t + \tau)) \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi,$$

где λ, α, β — положительные параметры. Дифференцируя его в силу системы (3), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\lambda\dot{q}^\top(t)B\dot{q}(t) + \dot{q}^\top(t)A\dot{q}(t) - \\ & - \lambda\dot{q}^\top(t) \left(\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi + P(q(t))q(t) \right) - \\ & - q^\top(t) \left(\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} + \tau \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(t))}{\partial q} \right) - \dot{q}^\top(t) \int_{t-\tau}^t (\xi - t + \tau) \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi - \\ & - \beta \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi + (\alpha + \beta\tau) \|q(t)\|^{\mu+1} - \alpha \|q(t-\tau)\|^{\mu+1}. \end{aligned}$$

Учитывая свойства однородных функций [32], нетрудно показать, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \lambda c_1 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_2 \|q(t)\|^2 - c_3 \|q(t)\| \|\dot{q}(t)\| - c_4 \tau \|q(t)\| \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi + \\ & + \alpha \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \leq V(q_t) \leq \lambda c_5 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_6 \|q(t)\|^2 + c_3 \|\dot{q}(t)\| \|\dot{q}(t)\| + \\ & + c_4 \tau \|q(t)\| \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi + (\alpha + \beta\tau) \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\lambda c_7 - c_8) \|\dot{q}(t)\|^2 + \lambda \|\dot{q}(t)\| \left(c_9 \|q(t)\|^\mu + c_{10} \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi + p_0 \|q(t)\|^\sigma \right) - \\ & - c_{11} \|q(t)\|^{\mu+1} + c_{12} \tau \|\dot{q}(t)\| \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi - \\ & - \beta \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi + (\alpha + \beta \tau) \|q(t)\|^{\mu+1} - \alpha \|q(t-\tau)\|^{\mu+1}. \end{aligned}$$

Здесь c_k — положительные постоянные, $k = 1, \dots, 12$.

С использованием неравенства Юнга [7] получаем, что положительные числа $\lambda, \alpha, \beta, \delta$ можно выбрать так, чтобы при $\|q_t\|_\tau < \delta$ выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\lambda c_1 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_2 \|q(t)\|^2 + \alpha \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \right) \leq V(q_t) \leq \\ \text{(П.2)} \quad & \leq 2 \left(\lambda c_5 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_6 \|q(t)\|^2 + (\alpha + \beta \tau) \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \right), \end{aligned}$$

$$\text{(П.3)} \quad \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\lambda c_7 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_{11} \|q(t)\|^{\mu+1} + \beta \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \right).$$

Следовательно, (П.1) — функционал Ляпунова–Красовского полного типа, удовлетворяющий требованиям теоремы об асимптотической устойчивости [6, с. 22].

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Переходя к новым переменным $x(t) = \dot{q}(t)$, $y(t) = q(t) + B^{-1}A\dot{q}(t)$, преобразуем систему (1) к виду

$$\begin{aligned} \text{(П.4)} \quad Ax(t) = & -Bx(t) - Q(y(t) - B^{-1}Ax(t)) - \int_{t-\tau}^t D(y(\xi) - B^{-1}Ax(\xi))d\xi, \\ By(t) = & -Q(y(t) - B^{-1}Ax(t)) - \int_{t-\tau}^t D(y(\xi) - B^{-1}Ax(\xi))d\xi. \end{aligned}$$

Нулевые решения изолированных подсистем (7), (8) асимптотически устойчивы. Поэтому (см. [32, 39]) для любых чисел $\nu_1 \geq 2$, $\nu_2 \geq 2$ найдутся

дважды непрерывно дифференцируемые однородные порядка ν_1 и ν_2 соответственно функции Ляпунова $V_1(x)$ и $V_2(y)$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} m_{11}\|x\|^{\nu_1} &\leq V_1(x) \leq m_{12}\|x\|^{\nu_1}, & m_{21}\|y\|^{\nu_2} &\leq V_2(y) \leq m_{22}\|y\|^{\nu_2}, \\ \left\| \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \right\| &\leq m_{13}\|x\|^{\nu_1-1}, & \left\| \frac{\partial V_2(y)}{\partial y} \right\| &\leq m_{23}\|y\|^{\nu_2-1}, \\ \left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \right)^\top &A^{-1}Bx(t) \geq m_{14}\|x\|^{\nu_1}, \\ \left(\frac{\partial V_2(y)}{\partial y} \right)^\top &B^{-1}(Q(y) + \tau D(y)) \geq m_{24}\|y\|^{\nu_2+\mu-1}. \end{aligned}$$

Здесь m_{kj} — положительные постоянные, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(II.5) \quad \tilde{V}(x, y) = V_1(x) + V_2(y).$$

Вычисляя ее производную в силу системы (II.4) и используя свойства однородных функций, получаем оценку

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &\leq -m_{14}\|x(t)\|^{\nu_1} + c_1\|x(t)\|^{\nu_1-1}(\|x(t)\|^\mu + \|y(t)\|^\mu) + \\ &+ c_2\|x(t)\|^{\nu_1-1} \int_{t-\tau}^t (\|x(\xi)\|^\mu + \|y(\xi)\|^\mu) d\xi - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^\top B^{-1} \int_{t-\tau}^t D(y(\xi)) d\xi - \\ &- \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^\top B^{-1}Q(y(t)) + c_3\|y(t)\|^{\nu_2-1}\|Q(y(t)) - Q(y(t) - B^{-1}Ax(t))\| + \\ &+ c_4\|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|D(y(\xi)) - D(y(\xi) - B^{-1}Ax(\xi))\| d\xi, \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные постоянные.

Заметим, что для любых чисел $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ можно указать $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \|Q(y) - Q(y - B^{-1}Ax)\| &\leq \varepsilon_1\|y\|^\mu + h_1\|x\|^\mu, \\ \|D(y) - D(y - B^{-1}Ax)\| &\leq \varepsilon_2\|y\|^\mu + h_2\|x\|^\mu \end{aligned}$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Выберем теперь функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$V(x_t, y_t) = \tilde{V}(x(t), y(t)) - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^\top B^{-1} \int_{t-\tau}^t (\xi + \tau - t) D(y(\xi)) d\xi + \\ + \int_{t-\tau}^t (\alpha_1 + \beta_1(\xi + \tau - t)) \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \int_{t-\tau}^t (\alpha_2 + \beta_2(\xi + \tau - t)) \|y(\xi)\|^{\nu_2 + \mu - 1} d\xi,$$

где $\tilde{V}(x, y)$ — функция Ляпунова, построенная по формуле (П.5), а $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — положительные параметры. Имеем

$$c_5 \|x(t)\|^{\nu_1} + c_6 \|y(t)\|^{\nu_2} - c_7 \tau \|y(t)\|^{\nu_2 - 1} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi + \\ + \alpha_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \alpha_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2 + \mu - 1} d\xi \leq V(x_t, y_t) \leq \\ \leq c_8 \|x(t)\|^{\nu_1} + c_9 \|y(t)\|^{\nu_2} + c_7 \tau \|y(t)\|^{\nu_2 - 1} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi + \\ + (\alpha_1 + \beta_1 \tau) \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + (\alpha_2 + \beta_2 \tau) \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2 + \mu - 1} d\xi, \\ \dot{V} \leq -m_{14} \|x(t)\|^{\nu_1} - m_{24} \|y(t)\|^{\nu_2 + \mu - 1} + c_1 \|x(t)\|^{\nu_1 - 1} (\|x(t)\|^\mu + \|y(t)\|^\mu) + \\ + c_2 \|x(t)\|^{\nu_1 - 1} \int_{t-\tau}^t (\|x(\xi)\|^\mu + \|y(\xi)\|^\mu) d\xi + c_3 \|y(t)\|^{\nu_2 - 1} (\varepsilon_1 \|y(t)\|^\mu + h_1 \|x(t)\|^\mu) + \\ + \tau c_{10} \|y(t)\|^{\nu_2 - 2} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi \left(\|x(t)\|^\mu + \|y(t)\|^\mu + \int_{t-\tau}^t (\|x(\xi)\|^\mu + \|y(\xi)\|^\mu) d\xi \right) + \\ + \varepsilon_2 c_4 \|y(t)\|^{\nu_2 - 1} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi + h_2 c_4 \|y(t)\|^{\nu_2 - 1} \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^\mu d\xi - \\ - \beta_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi - \beta_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2 + \mu - 1} d\xi + \\ + (\alpha_1 + \beta_1 \tau) \|x(t)\|^{\nu_1} - \alpha_1 \|x(t - \tau)\|^{\nu_1} + (\alpha_2 + \beta_2 \tau) \|y(t)\|^{\nu_2 + \mu - 1} - \\ - \alpha_2 \|y(t - \tau)\|^{\nu_2 + \mu - 1}.$$

Здесь $c_k > 0$, $k = 5, \dots, 10$.

Используя неравенство Юнга [7], получаем, что если порядки однородности функций $V_1(x)$ и $V_2(y)$ удовлетворяют условию $1 < (\nu_2 + \mu - 1)/\nu_1 < \mu$, а величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \delta$ достаточно малы, то при $\|x_t\|_\tau + \|y_t\|_\tau < \delta$ будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(c_6 \|y(t)\|^{\nu_2} + \alpha_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \right) + c_5 \|x(t)\|^{\nu_1} + \\ & + \alpha_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi \leq V(x_t, y_t) \leq \\ & \leq c_8 \|x(t)\|^{\nu_1} + (\alpha_1 + \beta_1 \tau) \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \\ & + 2 \left(c_9 \|y(t)\|^{\nu_2} + (\alpha_2 + \beta_2 \tau) \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \right), \\ \dot{V} & \leq -\frac{1}{2} \left(m_{14} \|x(t)\|^{\nu_1} + m_{24} \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + \right. \\ & \left. + \beta_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \beta_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Функционал Ляпунова–Красовского выбираем в виде

$$\begin{aligned} V(s_t, \omega_t) & = \frac{1}{2} \lambda \omega^\top(t) \Theta \omega(t) + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + (s(t) \times r)^\top F^{-1} \Theta \omega(t) + \\ & + b(s(t) \times r)^\top F^{-1} \int_{t-\tau}^t (\xi + \tau - t) \|s(\xi) - r\|^{\mu-1} s(\xi) \times r d\xi + \\ & + \int_{t-\tau}^t (\alpha + \beta(\xi + \tau - t)) \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi, \end{aligned}$$

где λ, α, β — положительные параметры.

Для данного функционала и его производной в силу системы (10), (12) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& c_1 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 - c_2 \|s(t) - r\| \|\omega(t)\| - \\
& - c_3 |b| \tau \|s(t) - r\| \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^\mu d\xi + \alpha \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \leq V(s_t, \omega_t) \leq \\
& \leq c_4 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + c_2 \|s(t) - r\| \|\omega(t)\| + \\
& + c_3 |b| \tau \|s(t) - r\| \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^\mu d\xi + (\alpha + \beta \tau) \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi, \\
& \dot{V} \leq -(\lambda c_5 - c_6) \|\omega(t)\|^2 + \lambda a \|\omega(t)\| \|s(t) - r\|^\mu + \\
& + b(\lambda + c_7 \tau) \|\omega(t)\| \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^\mu d\xi + \\
& + c_8 \|\omega(t)\|^2 \|s(t) - r\| - (a - \tau b) c_9 \|s(t) - r\|^{\mu-1} \|s(t) \times r\|^2 - \\
& - \beta \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi + (\alpha + \beta \tau) \|s(t) - r\|^{\mu+1} - \alpha \|s(t - \tau) - r\|^{\mu+1}.
\end{aligned}$$

Здесь $c_k > 0$, $k = 1, \dots, 9$.

Используя неравенство Юнга, нетрудно показать, что если $\lambda > 0$ достаточно велико, а положительные числа α , β , δ достаточно малы, то при $\|s_t - r\|_\tau + \|\omega(t)\| < \delta$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(c_1 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + \alpha \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \right) \leq V(s_t, \omega_t) \leq \\
& \leq 2 \left(c_4 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + (\alpha + \beta \tau) \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \right), \\
& \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\lambda c_5 \|\omega(t)\|^2 + (a - \tau b) c_9 \|s(t) - r\|^{\mu+1} + \beta \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \right).
\end{aligned}$$

Следовательно [6, с. 22], положение равновесия (11) асимптотически устойчиво.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
2. Ананьевский И.М., Решмин С.А. Непрерывное управление механической системой на основе метода декомпозиции // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 4. С. 3–17.
3. Tkhai V.N. Стабилизация колебания управляемой механической системы с n степенями свободы // АиТ. 2020. № 9. С. 93–104.
Tkhai V.N. Stabilizing the oscillations of a controlled mechanical system with n degrees of freedom // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
4. Su Y.X., Zheng C.H. PID control for global finite-time regulation of robotic manipulators // International J. of Systems Science. 2017. V. 48. No. 3. P. 547–558. <https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1193256>
5. Sedighi H.M., Daneshmand F. Non-linear transversely vibrating beams by the homotopy perturbation method with an auxiliary term // J. of Applied and Computational Mechanics. 2015. V. 1. No. 1. P. 1–9.
6. Kharitonov V.L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013.
7. Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhauser, 2014.
8. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European J. of Control. 2014. V. 20. P. 271–283.
9. Зубов В.И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970.
10. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
11. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
12. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. Ч. I // АиТ. 1989. № 1. С. 87–99.
Pyatnitskii E.S. Design of hierarchical control systems for mechanical and electromechanical processes by decomposition. I // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 1. P. 64–73.
13. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. Ч. II // АиТ. 1989. № 2. С. 57–71.
Pyatnitskii E.S. Design of hierarchical control systems for mechanical and electromechanical processes by decomposition. II // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 2. P. 175–186.
14. Матюхин В.И. Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // АиТ. 1989. № 3. С. 33–44.
Matyukhin V.I. Motion stability of manipulator robots in decomposition mode // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 3. P. 314–323.

15. *Матюхин В.П., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // *АиТ.* 1989. № 9. С. 67–81.
Matyukhin V.I., Pyatnitskii T.S. Controlling the motion of manipulation robots through decomposition with an allowance for the dynamics of actuators // *Autom. Remote Control.* 1989. V. 50. No. 9. P. 1201–1212.
16. *Решимин С.А.* Синтез управления двухзвенным манипулятором // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 1997. № 2. С. 146–150.
17. *Ананьевский И.М., Решимин С.А.* Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2002. № 5. С. 25–32.
18. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2012. № 1. С. 92–108.
19. *Косов А.А.* Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10.* 2005. Вып. 4. С. 123–129.
20. *Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // *АиТ.* 2011. № 6. С. 5–17.
Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Chen Ya. Stability and stabilization of mechanical systems with switching // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 6. P. 1143–1154.
21. *Александров А.Ю., Косов А.А.* Об устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // *ПММ.* 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 774–788.
22. *Aleksandrov A.Yu., Stepenko N.A.* Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching // *J. Appl. Comput. Mech.* 2022. V. 8. No. 3. P. 1113–1119.
23. *Zhang X., Chen X., Zhu G., Su C.-Y.* Output feedback adaptive motion control and its experimental verification for time-delay non-linear systems with asymmetric hysteresis // *IEEE Transactions on Industrial Electronics.* 2020. V. 67. No. 8. P. 6824–6834.
24. *Formal'sky A.M.* On a modification of the PID controller // *Dynamics and Control.* 1997. V. 7. P. 269–277.
25. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* Об устойчивости некоторых управляемых систем с последействием // *Дифференц. уравнения.* 1989. Т. 25. № 11. С. 1848–1852.
Anan'evskii I.M., Kolmanovskii V.B. Stability of some control systems with aftereffect // *Differ. Equ.* 1989. V. 25. No. 11. P. 1287–1290.
26. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // *АиТ.* 1989. № 9. С. 34–43.
Anan'evskii I.M., Kolmanovskii V.B. On stabilization of some control systems with an after-effect // *Autom. Remote Control.* 1989. No. 9. P. 1174–1181.
27. *Павликов С.В.* О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором // *Докл. РАН.* 2007. Т. 412. № 2. С. 176–178.
28. *Павликов С. В.* Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // *ПММ.* 2007. Т. 71. № 3. С. 377–387.

29. *Shen J., Lam J.* Decay rate constrained stability analysis for positive systems with discrete and distributed delays // *Systems Science & Control Engineering*, 2014. V. 2. No. 1. P. 7–12. <https://doi.org/10.1080/21642583.2013.870054>
30. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Анализ устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием на основе декомпозиции // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 13–26.
31. *Зубов В.И.* Каноническая структура векторного силового поля // *Проблемы механики твердого деформируемого тела*. Л.: Судостроение, 1970. С. 167–170.
32. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
33. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // *International J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2011. V. 21. No. 10. P. 2955–2961.
34. *Kosjakov E.A., Tikhonov A.A.* Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body // *International J. of Non-Linear Mechanics*. 2015. V. 73. P. 51–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006>
35. *Tikhonov A.A.* Natural magneto-velocity coordinate system for satellite attitude stabilization: The concept and kinematic analysis // *J. of Applied and Computational Mechanics*. 2021. V. 7. No. 4. P. 2113–2119.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.37817.3094>
36. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay // *IEEE Access*. 2021. V. 9. P. 132623–132630.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3115400>
37. *Тихонов А.А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 4: многочастотные резонансы // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1*. 2000. Вып. 1 (№ 1). С. 131–137.
38. *Efimov D., Aleksandrov A.* Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov-Krasovskii functionals // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2021. V. 31. P. 3730–3746. <https://doi.org/10.1002/rnc.5115>
39. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // *Systems Control Lett.* 1992. V. 19. P. 467–473.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.06.2022

После доработки 25.08.2022

Принята к публикации 29.09.2022

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОСЛАБЛЕНИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ПРОЦЕДУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ И СМЕШИВАНИЯ¹

Предлагается обобщение процедуры динамического расширения и смешивания, которое в отличие от базовой процедуры, во-первых, гарантирует убывание ошибки идентификации неизвестных параметров при выполнении условия частичного конечного возбуждения регрессора, а во-вторых, при частичном неисчезающем возбуждении регрессора с рангом не менее единицы обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибки слежения за регрессионной функцией.

Ключевые слова: идентификация, линейная регрессия, конечное возбуждение, частичное возбуждение, параметрическая ошибка, сходимость, ограниченность, монотонность, сингулярное разложение.

DOI: 10.31857/S0005231023010026, EDN: LUAPNM

1. Введение

За последние годы в отечественной и зарубежной литературе по адаптивному управлению и теории идентификации было опубликовано более сотни работ (см. библиографию цитируемой литературы и обзор [1]), посвященных улучшению идентификации неизвестных постоянных параметров линейных регрессионных уравнений как с точки зрения показателей качества переходных процессов, так и с точки зрения условий, необходимых для сходимости оценок к истинным значениям. Значительная часть из этих работ основана на использовании процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (Dynamic Regression Extension and Mixing — DREM) [2] и ее аналогов (интегральной модификации I-DREM [3], процедур генерации нового скалярного возбужденного регрессора G+D и D+G [4, 5], скалярных контуров оценки со сходимостью за конечное время [6] и пр.).

Базовая процедура DREM [2] состоит из этапов расширения и смешивания регрессора. На первом этапе исходная линейная по параметрам регрессия, как правило с векторным регрессором, с помощью устойчивых динамических операторов и специальных схем расширения [1, 7, 8] преобразуется к

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

расширенной регрессии с матричным квадратным регрессором. На втором этапе полученное уравнение путем домножения на союзную матрицу расширенного регрессора преобразуется к набору скалярных уравнений с общим скалярным регрессором.

В отличие от хорошо известного стандартного градиентного идентификатора [9] процедура DREM [2], во-первых, позволяет ввести набор скалярных законов оценки, в которых существует возможность за счет регулирования скалярных коэффициентов усиления повышать быстродействие и точность идентификации каждого оцениваемого параметра в отдельности, а во-вторых, ослабляет требование постоянного возбуждения регрессора и гарантирует асимптотическую сходимости оценок к истинным значениям, если скалярный регрессор неинтегрируем с квадратом. Модифицированные аналоги DREM [3–6], в свою очередь, ослабляют данное условие и обеспечивают экспоненциальную или финитную сходимости параметрической ошибки к нулю при условии конечного или начального возбуждения регрессора.

Однако, как было аналитически доказано и экспериментально продемонстрировано в [7, 8], условие конечного возбуждения регрессора для DREM подобных процедур [2–6] необходимо для получения невырожденного скалярного регрессора, а поэтому является не только условием сходимости, но и условием реализуемости. При невыполнении этого требования в схемах [2–6] невозможно убывание ошибки оценки неизвестных параметров, также как и ошибки слежения настраиваемой моделью за регрессионной функцией. В то же время классический градиентный идентификатор [9] даже при невыполнении условия конечного возбуждения обеспечивает убывание ошибки идентификации неизвестных параметров и асимптотическую сходимости ошибки слежения, что в сравнении с этим подходом существенно снижает область применимости DREM подобных процедур [2–6].

Вообще говоря, условие конечного возбуждения регрессора является достаточно слабым требованием [10] и не выполняется в двух основных ситуациях: 1) хотя бы один элемент регрессора тождественно равен нулю; 2) существует линейная зависимость между составляющими регрессора [5].

В [10] доказано, что вектор состояний стационарного объекта в форме Фробениуса возбужден конечно на начальном интервале времени, если задающее воздействие недифференцируемо хотя бы в одной точке из интервала, что выполняется, например, если задающее воздействие описывается функцией Хевисайда. Однако практический опыт показывает существование для каждой конкретной задачи идентификации и каждой конкретной параметризации собственных требований, необходимых для конечного возбуждения регрессора. В настоящее время не предложено обобщенных общепринятых формализованных критериев, позволяющих априорно верифицировать конечное возбуждение регрессора в произвольной параметризации. Поэтому в задачах идентификации и адаптивного управления необходимо использовать процедуры и алгоритмы идентификации, способные гарантировать убывание

ошибки оценки неизвестных параметров и сходимость ошибки слежения при отсутствии конечного возбуждения регрессора, что, в частности, мотивирует разработку модифицированной процедуры динамического расширения и смешивания с ослабленным условием реализуемости.

Таким ослабленным требованием может выступать, например, частичное конечное возбуждение регрессора, которое в отличие от условия конечного возбуждения выполняется, пока хотя бы один из элементов регрессора отличен от нуля, даже при линейной зависимости между всеми элементами регрессора [11].

На сегодняшний день в известной авторам литературе предложено два основных подхода [12–14], ослабляющих условие реализуемости базовой процедуры DREM до требования частичного конечного возбуждения.

В [12] предложено использовать закон идентификации с переключением, в котором при выполнении условия конечного возбуждения используется I-DREM закон идентификации, а при выполнении условия частичного конечного возбуждения — стандартный градиентный закон. Во втором случае этот подход обеспечивает качество идентификации неизвестных параметров, соответствующее стандартному градиентному идентификатору, что и является его основным недостатком. В [13, 14] на основе модифицированного процесса Грамма–Шмидта предложен и развит алгоритм удаления линейно зависимых строк и столбцов из матрицы расширенного регрессора, позволяющий при известной аналитической зависимости неизвестных параметров привести задачу идентификации неизвестных параметров к задаче численного решения систем алгебраических уравнений. Однако вызывает определенные сомнения возможность решения данных уравнений для независимых неизвестных параметров и, следовательно, расширения на общий случай результата, полученного в [13, 14].

Таким образом, проблема ослабления условия реализуемости базовой процедуры динамического расширения и смешивания является актуальной и на сегодняшний день не имеет эффективных решений. Поэтому в этой работе предлагается ослабить условие реализуемости процедуры DREM, дополнив ее новым этапом регуляризации расширенного регрессора.

Целью этапа регуляризации является, во-первых, проверка условий, необходимых и достаточных для генерации скалярного невырожденного регрессора, а во-вторых, виртуальное изменение матрицы расширенного регрессора при их невыполнении. Говоря более детально, на этапе регуляризации предлагается выполнить собственное разложение расширенного регрессора, полученного фильтрацией Крейссельмейера [1], что в силу его симметричности и положительной полуопределенности позволяет:

- верифицировать выполнение условия конечного возбуждения расширенного регрессора по его собственным числам;
- подменить, следуя методу гребневой регрессии [15, 16], нулевые собственные числа регрессора на произвольные постоянные.

Смешивание модифицированного расширенного регрессора, полученного после регуляризации, при выполнении условия частичного конечного возбуждения позволяет получить новую регрессию с невырожденным на интервале частичного конечного возбуждения скалярным регрессором, что без использования регуляризации было невозможно. В работе показано, что закон идентификации, построенный по такой регрессии, при выполнении условия конечного возбуждения совпадает с DREM законом идентификации и, дополнительно, при выполнении необходимого условия частичного конечного возбуждения и ряда достаточных условий обеспечивает убывание ошибок идентификации и слежения.

Основным результатом работы является процедура динамического расширения, регуляризации и смешивания регрессора, ослабляющая условие реализуемости базовой процедуры динамического расширения и смешивания.

Основные определения

Введем основные определения из [3, 9–11, 17], которые будут аксиоматически использованы при постановке задачи и формулировании основного результата.

О п р е д е л е н и е 1. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается постоянно ($\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$), если для любого $t \geq t_0 \geq 0$ существуют $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(1.1) \quad \lambda_{\min} \left\{ \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \geq \alpha,$$

где $\alpha > 0$ — степень возбуждения, $\lambda_{\min} \{ \cdot \}$ — оператор, возвращающий минимальное собственное число матрицы.

О п р е д е л е н и е 2. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается конечно ($\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$) на интервале $[t_r^+; t_e] \subset [t_0; \infty)$, если существуют $t_e > t_r^+ \geq t_0 \geq 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(1.2) \quad \lambda_{\min} \left\{ \int_{t_r^+}^{t_e} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \geq \alpha.$$

О п р е д е л е н и е 3. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается постоянно и частично ($\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$) с постоянным рангом $0 < r < n$, если для любого $t > t_0 \geq 0$ существуют $T > 0$ и $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ такие, что $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ верно неравенство

$$(1.3) \quad \underline{\alpha} \leq \lambda_i \left\{ \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \leq \bar{\alpha},$$

где $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ — степень частичного возбуждения.

Определение 4. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ возбуждается конечно и частично ($\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$) с постоянным рангом $0 < r < n$ на интервале $[t_r^+; t_e] \subset [t_0; \infty)$, если существуют $t_e > t_r^+ \geq 0$ и $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ такие, что $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ верно неравенство

$$(1.4) \quad \underline{\alpha} \leq \lambda_i \left\{ \int_{t_r^+}^{t_e} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \right\} \leq \bar{\alpha}.$$

Соотношения между введенными пространствами возбуждения регрессора задаются следующим образом:

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \\ \bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}.$$

Требования (1.1) и (1.2) накладывают ограничения на все собственные числа матрицы Грамма, а требования (1.3) и (1.4) — только на часть из них. Поэтому условие $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ является наиболее слабым и в предельном случае выполняется с $r = 1$, если хотя бы один элемент $\bar{\varphi}(t)$ отличен от нуля на интервале $[t_r^+; t_e] \subset [t_0; \infty)$.

Важную роль в современной теории идентификации выполняет фильтрация Крейссельмейера, позволяющая преобразовать векторный регрессор $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ в матричный $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ с сохранением возбуждения регрессора:

$$(1.5) \quad \forall t \geq t_0 \quad \dot{\varphi}(t) = -l\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{n \times n},$$

где $l > 0$ — параметр фильтра Крейссельмейера.

Выпишем из [8, 11] свойства матричного регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ в зависимости от выполнения условий (1.1)–(1.4) для $\bar{\varphi}(t) \in R^n$.

Следствие 1. $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(t) > \mu$.

Следствие 2. $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \lambda_{\min}(t) > \mu$.

Следствие 3. $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \lambda_i(t) > \mu$.

Следствие 4. $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad \lambda_i(t) > \mu$.

Здесь $k \geq 1$ — положительное целое число, $\mu > 0$ — оценка снизу на собственное число, $\lambda_i(t)$ — i -е собственное число регрессора $\varphi(t)$, $\lambda_{\min}(t) = \min_{1 \leq i \leq n-\bar{r}} \lambda_i(t)$ — минимальное отличное от нуля собственное число регрессора $\varphi(t)$, $\bar{r} = n - r$ — ранговый дефицит.

Доказательство следствий 1 и 2 приводится соответственно в [8, 11], а доказательство следствий 3 и 4 может быть получено аналогично.

На основании определения собственного разложения положительно полуопределенной постоянной матрицы из [17] введем определение собственного разложения динамического регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$.

Определение 5. Собственное разложение регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ переменного ранга $r(t) \leq n$ задается следующим произведением:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} V^T(t)\varphi(t)V(t) &= \begin{bmatrix} V_1^T(t) \\ V_2^T(t) \end{bmatrix} \varphi(t) \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \end{bmatrix} = \\ &= \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & 0_{r(t) \times \bar{r}(t)} \\ 0_{\bar{r}(t) \times r(t)} & 0_{\bar{r}(t)} \end{bmatrix}, \\ \Lambda_1(t) \in R^{r(t) \times r(t)} &= \text{diag} \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{r(t)}(t) \}, \end{aligned}$$

где $V_1(t) \in R^{n \times r(t)}$ — переменный ортонормальный базис для собственного пространства $\varphi(t)$, $V_2(t) \in R^{n \times \bar{r}(t)}$ — переменный ортонормальный базис для нуля пространства $\varphi(t)$, $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_{r(t)}(t) > 0$ — ненулевые собственные числа $\varphi(t)$, $0_{\bar{r}(t)} \in R^{\bar{r}(t) \times \bar{r}(t)}$ — нулевая матрица, $0_{\bar{r}(t) \times r(t)} \in R^{\bar{r}(t) \times r(t)}$, $0_{r(t) \times \bar{r}(t)} \in R^{r(t) \times \bar{r}(t)}$ — нулевые матрицы соответствующих размерностей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим классическую задачу идентификации постоянных параметров линейного регрессионного уравнения:

$$(2.1) \quad \forall t \geq t_0 \quad z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta,$$

где $\bar{\varphi}(t) \in R^n$, $z(t) \in R$ — измеримые регрессор и функция, $\theta \in R^n$ — неизвестные постоянные ($\dot{\theta} \equiv 0$), ограниченные ($\|\theta\| \leq \theta_{\max}$) параметры.

Будем предполагать выполнение для $\bar{\varphi}(t)$ следующего допущения.

Допущение 1. Регрессор $\bar{\varphi}(t)$ ограничен: $\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \bar{\varphi}_{\max}$.

Требование допущения 1 для общего случая возможно выполнить, домножив (2.1) на $n_s = \frac{1}{1 + \bar{\varphi}^T(t)\bar{\varphi}(t)}$.

Необходимо построить закон формирования оценок $\hat{\theta}(t) \in R^n$, обеспечивающий при $\bar{\varphi}(t) \in$ s-FE выполнение неравенств:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \|\tilde{\theta}(t_e)\| &\leq \beta \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|, \quad \beta \in (0; 1), \\ |\tilde{z}(t_e)| &\leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|, \end{aligned}$$

где $\tilde{z}(t) = \bar{\varphi}^T(t)\hat{\theta} - z(t)$ — ошибка слежения, $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ — параметрическая ошибка.

Неравенства (2.2) означают убывание соответственно $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ на интервале $[t_r^+; t_e]$. Требование $\bar{\varphi}(t) \in$ s-FE при этом является условием реализуемости целевого закона, а под реализуемостью понимается возможность уменьшения априорных рассогласований $\tilde{z}(t_r^+)$ и $\tilde{\theta}(t_r^+)$.

2.1. Градиентный закон идентификации

Классическим решением, гарантирующим достижение цели (2.2), является градиентный закон идентификации:

$$(2.3) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma \bar{\varphi}(t) \left(\bar{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t) - z(t) \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

который реализуем при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и в целом обеспечивает следующие свойства:

$$a_1) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0 \text{ (exp)}; \end{cases}$$

$$a_2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0;$$

$$a_3) \quad \lambda_{\min}(\Gamma) = \lambda_{\max}(\Gamma) \Rightarrow \|\tilde{\theta}(t_a)\| \leq \|\tilde{\theta}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b;$$

$$a_4) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Rightarrow \begin{cases} \|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq \beta \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|, & \beta \in (0; 1) \\ |\tilde{z}(t_e)| \leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|; \end{cases}$$

$a_5)$ при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ существует оптимальное значение Γ , обеспечивающее максимизацию скорости экспоненциальной сходимости параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$ к нулю. Изменение элемента Γ оказывает влияние на качество переходных процессов по всем $\tilde{\theta}_i(t)$.

Закон (2.3), несмотря на реализуемость при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ (a_4), обеспечивает экспоненциальную сходимость $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ к нулю при выполнении ограничительного условия неисчезающего возбуждения регрессора (a_1), гарантирует монотонность только нормы параметрической ошибки (a_3), а элементы варьируемого параметра Γ оказывают влияние на качество переходных процессов по всем ошибкам (a_5).

Для преодоления недостатков закона (2.3) в [2] была предложена процедура DREM, согласно которой сначала выполняется специальная обработка регрессии (2.1), состоящая из расширения и смешивания регрессора, а уже после, по новой регрессии, вводится закон оценки неизвестных параметров. Рассмотрим процедуру синтеза и свойства такого закона подробнее.

2.2. Динамическое расширение и смешивание регрессора

На этапе расширения выполняется преобразование исходного векторного регрессора $\bar{\varphi}(t) \in R^n$ в матричный $\varphi(t) \in R^{n \times n}$, например, с помощью фильтра (1.5):

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -l\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t), & \varphi(t_0) &= 0_{n \times n}, \\ \dot{y}(t) &= -ly(t) + \bar{\varphi}(t)z(t), & y(t_0) &= 0_n, \end{aligned}$$

где $y(t) \in R^n$ — расширенная регрессионная функция.

После фильтрации (2.4) имеем расширенное регрессионное уравнение:

$$(2.5) \quad y(t) = \varphi(t)\theta,$$

по регрессору которого согласно следствиям 1–4 возможно верифицировать выполнение условий (1.1)–(1.4).

На этапе смешивания согласно [2] осуществляется преобразование матричного регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ в скалярный $\omega(t) \in R$ путем умножения (2.5) на союзную матрицу $\text{adj} \{ \varphi(t) \}$ и использования свойства $\text{adj} \{ \varphi(t) \} \varphi(t) = \det \{ \varphi(t) \} I_{n \times n}$:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Y(t) &= \omega(t)\theta, \\ Y(t) &:= \text{adj} \{ \varphi(t) \} y(t), \quad \omega(t) := \det \{ \varphi(t) \}, \end{aligned}$$

где $Y(t) \in R^n$.

На основании полученных n скалярных уравнений (2.6) согласно [2] вводится закон идентификации в форме

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i(t) &= \dot{\tilde{\theta}}_i(t) = -\gamma_i \omega(t) \left(\omega(t) \hat{\theta}_i(t) - \omega(t) \theta_i(t) \right) = \\ &= -\gamma_i \omega^2(t) \tilde{\theta}_i(t), \quad \gamma_i > 0, \end{aligned}$$

который реализуем при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$ и в целом обеспечивает следующие свойства:

- $b_1) \quad \begin{aligned} \omega(t) \notin L_2 &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| = 0; \\ \omega(t) \in \text{PE} &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| = 0 \text{ (exp)}; \end{aligned}$
- $b_2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\left| z(t) - \bar{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t) \right|}_{|\tilde{z}(t)|} = 0 \text{ (certainty equivalence);}$
- $b_3) \quad \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \forall t_a \geq t_b;$
- $b_4) \quad \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Rightarrow \begin{cases} \left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \beta \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|, \quad \beta \in (0; 1) \\ \left| \tilde{z}(t_e) \right| \leq \beta \left| \tilde{z}(t_r^+) \right|; \end{cases}$
- $b_5) \quad \text{при } \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \text{ скорость экспоненциальной сходимости параметрической ошибки } \tilde{\theta}_i(t) \text{ может быть увеличена путем увеличения } \gamma_i, \text{ а изменение коэффициента } \gamma_i \text{ оказывает влияние на качество переходного процесса по } \tilde{\theta}_i(t).$

Как следует из сравнения свойств a_1 – a_5 и b_1 – b_5 , ослабленное требование для асимптотической сходимости параметрической ошибки (b_1), монотонность переходных процессов по каждой в отдельности ошибке $\tilde{\theta}_i(t)$ (b_3),

а также возможность влияния с помощью γ_i на качество оценок по конкретной $\tilde{\theta}_i(t)$ (b_5) определяют преимущества закона (2.7) над градиентным (2.3). Однако в то же время закон (2.7) не обеспечивает сходимость к нулю ошибки $\tilde{z}(t)$ без параметрической сходимости (b_2) и обладает более строгим условием реализуемости (b_4).

Поэтому основной целью работы является построение закона идентификации, который сочетает положительные свойства (2.3) и (2.7), а значит, при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$ обладает свойствами b_1 – b_5 закона (2.7), при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ — свойством a_4 закона (2.3) и в отличие от (2.7) обеспечивает сходимость ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ без параметрической сходимости (a_2).

3. Основной результат

3.1. Динамическая регуляризация расширенного регрессора

Следуя определению 5, регрессионное уравнение (2.5) может быть приведено к виду

$$(3.1) \quad y(t) = \varphi(t)\theta = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \end{bmatrix} \Lambda(t) \begin{bmatrix} V_1^T(t) \\ V_2^T(t) \end{bmatrix} \theta = V(t)\Lambda(t)V^T(t)\theta.$$

Заметим, что при $\text{rank} \{\varphi(t)\} = r(t) < n$ матрица $\Lambda(t)$ содержит $\bar{r}(t) > 0$ нулей на главной диагонали, и поэтому $\omega(t) = \det \{\varphi(t)\} \equiv 0 \Rightarrow \|\tilde{\theta}(t_e)\| = \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$. Следовательно, чтобы сделать определитель регрессора $\varphi(t)$ невырожденным при переходе к регрессии со скалярным регрессором (2.6), необходимо виртуально подменить нули главной диагонали матрицы $\Lambda(t)$ числами, отличными от нуля [15, 16]. Для этого введем в рассмотрение величину $\Xi(t)$, дополняющую $\Lambda(t)$ до полного ранга:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Xi(t) &= \bar{\Lambda}(t) - \Lambda(t), \\ \bar{\Lambda}(t) &:= \begin{cases} 0_{n \times n}, & \text{если } \text{diag} \{\bar{\lambda}_1(t), \bar{\lambda}_2(t), \dots, \bar{\lambda}_n(t)\} = \varepsilon I_{n \times n}, \\ \text{diag} \{\bar{\lambda}_1(t), \bar{\lambda}_2(t), \dots, \bar{\lambda}_n(t)\}, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \bar{\lambda}_i(t) &:= \begin{cases} \lambda_i(t), & \text{если } \lambda_i(t) \geq \bar{\varepsilon}, \\ \varepsilon, & \text{если } \lambda_i(t) < \bar{\varepsilon}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $\bar{\Lambda}(t)$ — новая матрица собственных чисел, $\varepsilon > 0$ — коэффициент, определяющий значение виртуальных собственных чисел, $\bar{\varepsilon} \geq 0$ — параметр, определяющий амплитуду собственных чисел $\varphi(t)$, считающихся эквивалентно равными нулю при наличии погрешностей вычислений и внешних возмущений.

Прибавив к (3.1) выражение $\pm V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta$, имеем:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} y(t) &= \varphi(t)\theta = V(t)\Lambda(t)V^T(t)\theta \pm V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \\ &= V(t)\bar{\Lambda}(t)V^T(t)\theta - V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \Phi(t)\theta - V(t)\Xi(t)V^T(t)\theta, \end{aligned}$$

где $\Phi(t) \in R^{n \times n}$ — новый регрессор с собственными числами $\bar{\Lambda}(t)$.

Умножив уравнение (3.3) на матрицу $\text{adj}\{\Phi(t)\}$ и воспользовавшись свойствами

$$\begin{aligned}\text{adj}\{\Phi(t)\} &= \det\{\Phi(t)\}\Phi^{-1}(t), \quad \Phi^{-1}(t) = V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)V^T(t), \\ \text{adj}\{\Phi(t)\}\Phi(t) &= \det\{\Phi(t)\}I_n,\end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned}(3.4) \quad \Upsilon(t) &= \omega(t)\theta - \omega(t)V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \omega(t)\Theta(t), \\ \Upsilon(t) &:= \text{adj}\{\Phi(t)\}y(t), \quad \omega(t) := \det\{\Phi(t)\}, \\ \Theta(t) &:= \theta - V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = \theta - \underbrace{V_2(t)V_2^T(t)\theta}_{d(t)},\end{aligned}$$

где $\Theta(t) \in R^n$ — вектор новых неизвестных параметров, $d(t) \in R^n$ — возмущение, вызывающее различие между $\Theta(t)$ и θ .

Свойства нового регрессора $\omega(t) \in R$ опишем в следующем утверждении.

Утверждение 1. Пусть матрица $\bar{\Lambda}(t)$ формируется алгоритмом (3.2) при $\bar{\varepsilon} = 0$, тогда верны импликации:

- 1) $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \omega(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0$.
- 2) $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \omega(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0$.
- 3) $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \omega(t) \geq \min\{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0$.
- 4) $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \omega(t) \geq \min\{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0$.

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

На основе регрессии (3.4), учитывая доказанные в утверждении 1 свойства, в соответствии с [18] введем закон идентификации с нормализацией возбуждения регрессора:

$$\begin{aligned}(3.5) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma(t)\omega(t)\left(\omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t)\right) = \\ &= -\gamma(t)\omega^2(t)\left(\hat{\theta}(t) - \theta\right) - \gamma(t)\omega^2(t)d(t) = \\ &= -\gamma(t)\omega^2(t)\underbrace{\left(\hat{\theta}(t) - \Theta(t)\right)}_{\tilde{\Theta}(t)}, \quad \hat{\theta}(t_r^+) = \theta_0, \\ \gamma(t) &:= \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min\{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases}\end{aligned}$$

где $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$ — варьируемые параметры закона идентификации, $\tilde{\Theta}(t) \in R^n$ — ошибка идентификации вектора $\Theta(t)$.

В силу алгоритма формирования матрицы дополнения $\Xi(t)$ для закона (3.5) оказывается справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено допущение 1 и $\bar{\varepsilon} = 0$, тогда:

- 1) если $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, то (3.5) обладает свойствами b_1 – b_5 ;
- 2) если $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнены следующие достаточные условия

$$2.1) \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| = \beta_1 \theta_{\max}, \quad \beta_1 > 1,$$

$$2.2) \text{ произведение } \gamma_0 \delta \text{ такое, что } \frac{1}{\beta_1} + e^{-0,5\gamma_0 \delta} \in (0; 1),$$

то целевые неравенства (2.2) выполняются, а закон (3.5) реализуем;

$$3) \omega(t) \notin L_2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \theta_{\max};$$

$$4) \bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Rightarrow \text{li} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \theta_{\max}(\text{exp}).$$

Скорость экспоненциальной сходимости при этом может быть непосредственно отрегулирована выбором параметра γ_0 .

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Как следует из результатов теоремы 1, к сожалению, при произвольных значениях $\tilde{\theta}(t_r^+)$ закон (3.5) оказывается нереализуемым с точки зрения (2.2), поскольку при движении в области с границей θ_{\max} норма ошибки $\tilde{\theta}(t)$ может принимать значения больше, чем $\left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|$, что является недостатком закона (3.5) относительно стандартного градиентного (2.3). Поэтому необходимым условием реализуемости (3.5) является частичное конечное возбуждение регрессора $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$, а достаточными — выполнение предпосылок 2.1) и 2.2). Здесь же необходимо отметить, что выбор $\hat{\theta}(t_r^+) = 0_n$ гарантирует невозрастание ошибки $\tilde{\theta}(t)$ на $[t_r^+; t_e]$, что позволяет говорить о квазиреализуемости закона (3.5) с точки зрения (2.2) при выполнении только необходимого условия $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$.

Таким образом, в соответствии с предложенной процедурой динамической регуляризации регрессора (3.1)–(3.4), с одной стороны, при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$ дополнение $\Lambda(t)$ до полного ранга не осуществляется и закон (3.5) вырождается в (2.7), а с другой стороны, при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ выполняется дополнение $\Lambda(t)$ до полного ранга и (3.5) в отличие от (2.7) при выполнении достаточных условий является реализуемым с точки зрения (2.2).

Глобальную устойчивость ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ при использовании закона (3.5) исследуем, выдвигая различные предположения относительно ранга $r(t)$ и базиса нуль пространства $V_2(t)$. В подразделе 3.2 предположим их постоянство, а в разделе 3.3 — кусочно-постоянный характер изменения.

3.2. Постоянный ранг и базис нуль пространства

Введем допущение о постоянстве ранга и нуль базиса регрессора $\varphi(t) \in R^{n \times n}$.

Допущение 2. Для $\varphi(t) \in R^{n \times n}$ постоянного ранга $r(t) \equiv r < n$, $\bar{r}(t) \equiv \bar{r} > 0$ существует разложение (1.6) с постоянной матрицей $V_2(t) \equiv V_2$.

При выполнении допущения 2 возмущение $d(t) \equiv d$ и неизвестные параметры $\Theta(t) \equiv \Theta$ также не зависят от времени.

Свойства ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ при использовании закона (3.5) и выполнении допущения 2 с учетом результатов утверждения 1 изучим в теореме 2. В ее первой части опишем безусловные свойства, во второй — свойства, гарантируемые при выполнении условия реализуемости, а в третьей и четвертой части сформулируем условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости.

Теорема 2. При выполнении допущений 1 и 2 верны утверждения:

- I. $\forall t \geq t_0 \left| \tilde{\Theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\Theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b.$
- II. $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Rightarrow \begin{cases} \left\| \tilde{\Theta}(t_e) \right\| \leq \beta \left\| \tilde{\Theta}(t_r^+) \right\|; \\ |\tilde{z}(t_e)| \leq \beta |\tilde{z}(t_r^+)|. \end{cases}$
- III. $\omega(t) \notin L_2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| = 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0. \end{cases}$
- IV. $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| = 0 \text{ (exp)}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0 \text{ (exp)}. \end{cases}$

Скорость экспоненциальной сходимости при этом может быть непосредственно отрегулирована выбором параметра γ_0 .

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 1. Условие асимптотической устойчивости $\omega(t) \notin L_2$ строго слабее условия экспоненциальной устойчивости $\overline{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$, так как, например, существует регрессор $\omega(t) = \varepsilon^{n-1} \lambda_1(t)$, $\lambda_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$, такой что $\omega(t) \notin L_2$ и $\overline{\varphi}(t) \notin \text{s-PE}$, поскольку $\nexists \mu > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \lambda_1(t) > \mu$, что противоречит следствию 3. Поэтому при выполнении допущения 2 минимальным требованием для сходимости ошибок $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ к нулю, а $\hat{\theta}(t)$ — к области θ_{\max} при использовании закона (3.5) является неотделимость с квадратом произведения r собственных чисел $\varphi(t)$.

3.3. Кусочно-постоянный ранг и базис нуль пространства

Требования допущения 2 ограничительны, а в приложениях как ранг, так и нуль базис регрессора обычно дискретно изменяются. Поэтому проведем анализ свойств закона (3.5) в предположении кусочно-постоянного характера изменения ранга и нуль базиса регрессора $\varphi(t)$.

Допущение 3. Ранг регрессора $\varphi(t)$ является кусочно-постоянной функцией и существует разложение (1.6) с кусочно-постоянной матрицей $V_2(t)$:

$$(3.6) \quad \forall t \geq t_0 \quad r(t) = \sum_{j_r=1}^{\infty} \Delta_{j_r} h(t - t_{j_r}), \quad V_2(t) = \sum_{j_V=1}^{\infty} \Delta_{j_V} h(t - t_{j_V}),$$

где t_{j_r} — момент времени изменения ранга, Δ_{j_r} — величина изменения ранга в момент времени t_{j_r} , t_{j_v} — момент времени изменения базиса $V_2(t)$, $\Delta_{j_v} \in R^{n \times \bar{r}(t)}$ — величина изменения $V_2(t)$, $h(t - t_{j_r})$, $h(t - t_{j_v})$ — функции единичного скачка.

При выполнении (3.6) возмущение $d(t)$ и неизвестные параметры $\Theta(t)$ являются кусочно-постоянными функциями:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} d(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j h(t - t_j), & \dot{d}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \delta(t - t_j), \\ \Theta(t) &= \theta - \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j h(t - t_j), \end{aligned}$$

где $t_j \in \{t_{j_r}, t_{j_v} | j_r \in \mathbb{N}, j_v \in \mathbb{N}\}$ — моменты времени изменения $d(t)$, $\delta(t - t_j)$ — функция единичного импульса, $\|\Delta_j\| \leq \Delta_{\max}$ — ограниченная величина изменения возмущения.

С учетом результатов утверждения 1 сформулируем свойства, гарантируемые законом (3.5) при выполнении допущений 1 и 3.

Теорема 3. Пусть выполнены допущения 1, 3 и $\bar{\varphi}(t) \in$ s-PE с рангом $r(t) \geq 1$, тогда:

$$(3.8) \quad \forall t \geq kT \begin{cases} \|\tilde{\Theta}(t)\| \leq a(t_j) e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\|, \\ |\tilde{z}(t)| \leq a(t_j) e^{-\gamma_0(t-kT)} |\tilde{z}(kT)|, \end{cases}$$

где $\{a(t_0), a(t_1), \dots, a(t_j), \dots\}$ — числовая последовательность.

Более того, если $\exists a_{\max} \forall t_j \geq t_0 a(t_j) \leq a_{\max}$, то $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ экспоненциально устойчивы:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| = 0 \text{ (exp)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\Theta}(t)\| = 0 \text{ (exp)}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 3 и определение величины $a(t_j)$ приведены в Приложении.

С одной стороны, результаты теоремы 3 демонстрируют робастность закона (3.5) к вариациям ранга и нуль базиса регрессора $\varphi(t)$ в смысле экспоненциального восстановления положения равновесия ошибок $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$, а с другой стороны, описывают необходимые и достаточные требования для их экспоненциальной сходимости к нулю. Такими требованиями являются частичное постоянное возбуждение регрессора с рангом не менее единицы и удовлетворение для всех $t_j \geq t_0$ неравенства $a(t_j) \leq a_{\max}$.

Однако в теореме 3 отсутствует конструктивное описание требований к $a(t_j)$ или Δ_j , при выполнении которых для всех $t_j \geq t_0$ гарантируется

$a(t_j) \leq a_{\max}$ и, следовательно, экспоненциальная устойчивость ошибок $\tilde{\Theta}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ при кусочно-постоянном ранге или нуль базисе.

В следующем следствии приведем два дополнительных условия, при выполнении которых для всех $t_j \geq t_0$ доставляется выполнение неравенства $a(t_j) \leq a_{\max}$.

Следствие 5. Пусть выполнены предпосылки теоремы 3 и дополнительно выполнено одно из условий:

- 1) $j \leq j_{\max} < \infty$;
- 2) $\Delta_{\max} \leq c(t_j) e^{-\gamma_0(t_j - kT)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ $c(t_j) \geq c(t_{j+1}) > 0$.

Тогда существует a_{\max} , такой что $\forall t_j \geq t_0$ $a(t_j) \leq a_{\max}$.

Доказательство следствия 5 приведено в Приложении.

В соответствии с результатами следствия 5 условие $a(t_j) \leq a_{\max}$ выполняется, если норма величины изменения параметров Δ_{\max} ограничена сверху убывающей последовательностью, или при конечном числе j изменений базиса/ранга регрессора.

3.4. Условия частичной идентифицируемости

В задачах идентификации основной целью выступает обеспечение сходимости параметрической ошибки $\hat{\theta}(t)$. Поэтому дополнительно к результатам разделов 3.2 и 3.3 определим условия, при выполнении которых элементы вектора новых неизвестных параметров $\Theta(t)$ частично или полностью совпадают с элементами вектора θ .

Исследование свойств параметров $\Theta(t)$ оформим в виде утверждения.

Утверждение 2. Пусть матрица $\bar{\Lambda}(t)$ формируется алгоритмом (3.2) при $\bar{\varepsilon} = 0$, тогда:

- 1) $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Rightarrow \Theta(t) = \theta$;
- 2) *если выполнено допущение 2 и условия*

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}, \quad n > 2,$$

$$\sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) = 0_n, \quad w_i \neq 0, \quad w_j = 0,$$

$$\text{то } \exists M \subset \{1, \dots, n\}, \quad |M| = p, \quad \forall i \in M, \quad \Theta_i = \theta_i.$$

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении².

Таким образом, в соответствии с утверждением 2 условиями частичной идентифицируемости параметров θ является выполнение допущения 2, частичное возбуждение регрессора $\bar{\varphi}(t)$ и линейная независимость p столбцов

² В части 2) без потери общности предполагается, что первые $n - p$ столбцов регрессора $\varphi(t) = [\varphi_1(t) \dots \varphi_i(t) \dots \varphi_n(t)]$ линейно зависимы (к такому виду в случае $\bar{T}(t) > 0$ всегда можно перейти с помощью перестановки столбцов).

регрессора $\varphi(t)$ при ограниченной снизу $n > 2$ размерности задачи идентификации. Из объединения результатов теоремы 1 и утверждения 2 имеем следствие, описывающее условия сходимости по части параметрических ошибок $\tilde{\theta}_i(t)$.

Следствие 6. Пусть выполняются допущения 1–2 и условия:

$$\sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) = 0_n, \quad w_i \neq 0, \quad w_j = 0, \quad n > 2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} &\Leftrightarrow \forall i \in M \begin{cases} \left| \tilde{\theta}_i(t_e) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_i(t_r^+) \right|, \\ \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b; \end{cases} \\ \text{b) } \omega(t) \notin L_2 &\Leftrightarrow \forall i \in M \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \tilde{\theta}_i(t) \right| = 0, \\ \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b; \end{cases} \\ \text{c) } \bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} &\Leftrightarrow \forall i \in M \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \tilde{\theta}_i(t) \right| = 0 \text{ (exp)}, \\ \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b. \end{cases} \end{aligned}$$

Следствие 6 получено объединением непротиворечивых предпосылок и результатов теоремы 1 и утверждения 2.

Замечание 2. Необходимо отметить существование регрессоров $\varphi(t)$, не удовлетворяющих требованиям утверждения 2, но при этом обеспечивающих существование нулевых элементов в векторе d и позволяющих идентифицировать часть исходных неизвестных параметров θ . Для таких регрессоров равенство элементов d нулю вызвано не наличием в произведении $V_2^T V_2$ нулевых строк/столбцов (см. доказательство утверждения 2), а равенством нулю в целом элементов произведения $V_2^T V_2 \theta$ (в силу ортогональности V_2 и θ).

Например, если $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\theta = \vartheta \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vartheta \neq 0$, то требования из утверждения 2 не выполняются, но $d = 0_n$, $\Theta = \theta$.

Замечание 3. С практической точки зрения важно не только доказать, что при выполнении ряда условий в векторе параметров Θ некоторые элементы совпадают с элементами θ , но и указывать их позиции в процессе идентификации. Для этой цели при выполнении условий 2-й части утверждения 2 в соответствии с доказательством, в качестве указателя могут быть использованы индексы нулевых строк базиса V_2 .

Замечание 4. При выполнении допущения 3 результаты 2-й части утверждения 2 верны локально на интервалах постоянства ранга и базиса нуль пространства регрессора. Следовательно, при варьировании ранга $r(t)$

на различных интервалах $[t_{j-1}; t_j]$ и $[t_j; t_{j+1}]$ возможна частичная идентифицируемость различного числа p элементов вектора θ , а при варьировании базиса нуль пространства регрессора на различных интервалах $[t_{j-1}; t_j]$ и $[t_j; t_{j+1}]$ возможна идентифицируемость различных элементов вектора θ .

4. Математическое моделирование

В среде Matlab/Simulink сравним DREM закон идентификации с регуляризацией (3.5) с классическим градиентным законом (2.3) и DREM законом идентификации без регуляризации (2.7). Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ секунды.

В разделе 4.1 представлены результаты моделирования при выполнении допущения 2, в разделе 4.2 — при выполнении допущения 3.

4.1. Постоянный ранг и постоянный нуль базис

Регрессионное уравнение (2.1) зададим следующим образом:

$$(4.1.1) \quad z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta = \begin{bmatrix} -2e^{-t} \cos(t) & e^{-t} \cos(t) & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Параметры фильтра (2.4), алгоритма виртуальной замены собственных чисел (3.2) и законов идентификации (3.5), (2.3) установим следующим образом:

$$(4.1.2) \quad l = 100, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \bar{\varepsilon} = 10^{-10}, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Gamma = 5I_3.$$

Для обеспечения одинаковой скорости сходимости законов (3.5) и (2.7) коэффициент усиления γ закона (2.7) будем формировать аналогично (3.5), следуя методу нормализации возбуждения регрессора [18]:

$$(4.1.3) \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прежде всего убедимся в выполнении условий реализуемости законов (2.3), (2.7) и (3.5). На рис. 1 представлены значения возмущения d и ранга регрессора $\varphi(t)$ в течение эксперимента.

Как следует из определения регрессора $\bar{\varphi}(t)$, рис. 1,а, условия реализуемости ($\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$) законов (2.3) и (3.5) выполняются для всех $t \geq 0$, а условие реализуемости ($\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$) закона (2.7) не выполняется, поэтому ограничимся результатами моделирования алгоритмов (3.5) и (2.3). Из рис. 1,а,б совместно следует выполнение допущения 2, а значит, поскольку $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$,

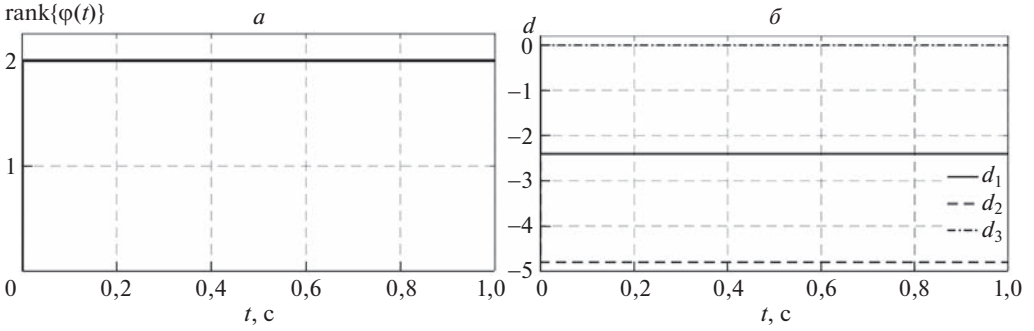


Рис. 1. Значение ранга регрессора $\varphi(t)$ (а), величина возмущения d (б).

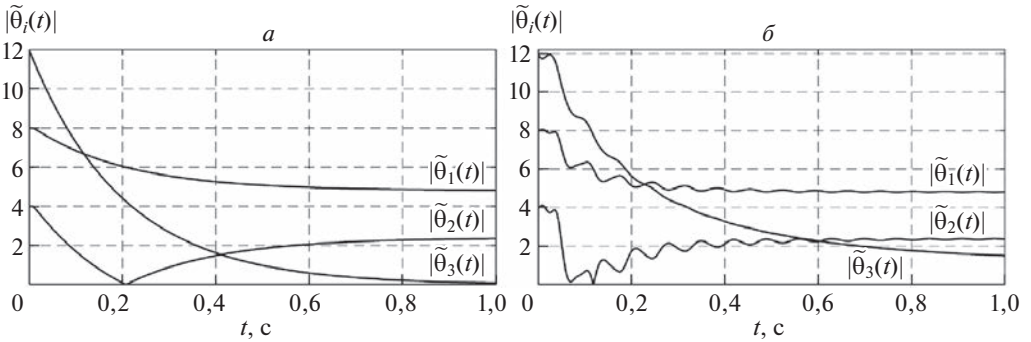


Рис. 2. Переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а) и (2.3) — (б).

закон (3.5) в данном эксперименте гарантирует убывание ошибок $\tilde{\Theta}(t)$, $\tilde{z}(t)$. Более того, поскольку допущение 2 выполнено, $d_3 = 0$ и $r = 2$, то дополнительно также законом (3.5) гарантируется убывание ошибки $\tilde{\theta}_3(t)$.

Сначала установим $\theta_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, что по теореме 1 соответствует квазиреализуемости закона (3.5) (гарантируется убывание $|\tilde{z}(t)|$ и невозрастание $\|\tilde{\theta}(t)\|$ на интервале времени $[0; 1]$).

На рис. 2 изображены переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а) и (2.3) — (б).

Полученные переходные процессы демонстрируют преимущества (3.5) над (2.7) и классическим градиентным (2.3) законом идентификации. В частности, в отличие от (2.7) закон (3.5) позволил уменьшить априорные значения ошибок $\tilde{\theta}_i(t)$, а в отличие от (2.3) обеспечил аperiodический характер переходных процессов и монотонную экспоненциальную сходимость к нулю ошибки $\tilde{\theta}_3(t)$. Монотонность по $\tilde{\theta}_1(t)$ можно объяснить выполнением в эксперименте условия $\theta_1 \leq \Theta_1$, $\hat{\theta}_1(t_0) > \Theta_1$, что является частной благоприятной ситуацией.

На рис. 3,а изображено сравнение ошибок $\tilde{z}(t)$ законов (3.5) и (2.3), а на рис. 3,б приведены переходные процессы по ошибке $\tilde{\Theta}_i(t)$ при применении закона (3.5).

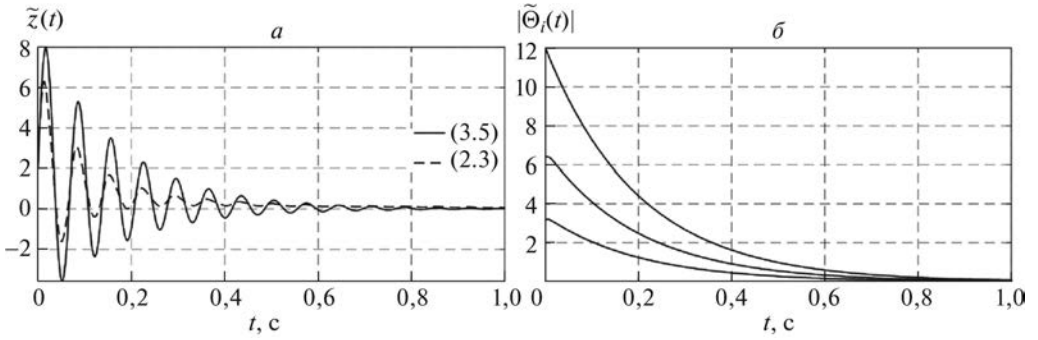


Рис. 3. Переходные процессы (а) по ошибкам $\tilde{z}(t)$ законов (3.5) и (2.3) и (б) по ошибке $\tilde{\Theta}_i(t)$ закона (3.5).

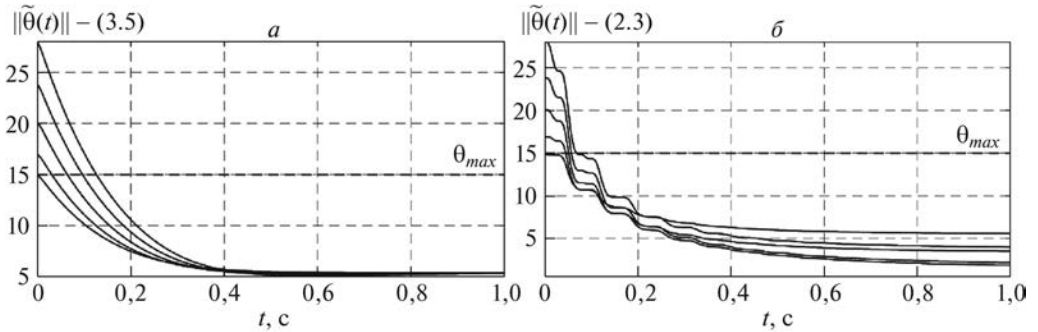


Рис. 4. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при различных начальных условиях.

Рисунок 3,а подтверждает убывание $\tilde{z}(t)$ на интервале времени $[0; 1]$ при применении закона (3.5), рис. 3,б демонстрирует монотонность ошибки $\tilde{\Theta}_i(t)$ $\forall i \in \overline{1, n}$, что было аналитически показано в теореме 2.

На рис. 4 приведены графики по $\|\tilde{\theta}(t)\|$, полученные в результате применения законов (3.5) и (2.3) при различных начальных условиях (для всех начальных условий закон (3.5) оставался либо реализуемым, либо квазиреализуемым).

Переходные процессы, представленные на рис. 4, подтверждают доказанную в теореме 1 равномерную по начальным условиям экспоненциальную сходимость ошибки $\tilde{\theta}(t)$ в область размером θ_{\max} .

Теперь установим $\theta_0 = [0 \ -10 \ 14]^T$, что не обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости из теоремы 1, поскольку $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \approx 4,9$, а $\theta_{\max} = \|\theta\| \approx 15$. На рис. 5 представлены полученные при таком выборе начальных условий переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5) и (2.3).

Временные диаграммы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$, представленные на рис. 5, соответствуют выводам, сделанным в теореме 1. Действительно, при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| < \theta_{\max}$ (3.5) нереализуем, норма ошибки $\|\tilde{\theta}(t)\|$ может принимать значения больше, чем

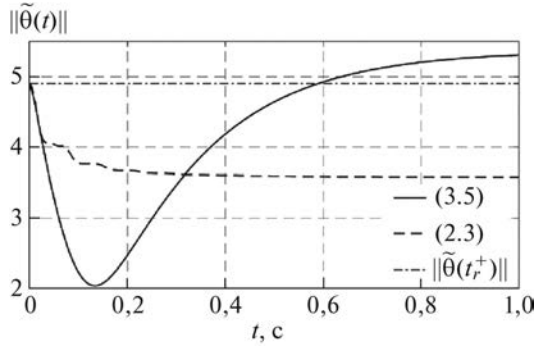


Рис. 5. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5) и (2.3).

$\|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$, а выполнение одновременно всех целевых условий (2.2) не гарантируется.

Таким образом, проведенные численные эксперименты полностью подтвердили описанные в рамках теорем 1–2, утверждения 2 и следствия 6 свойства закона (3.5) при $\bar{\varphi}(t) \in$ s-FE и выполнении допущения 2.

4.2. Кусочно-постоянный ранг и нуль базис

4.2.1. Эксперимент первый

Регрессионное уравнение (2.1) зададим следующим образом:

$$z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta = [\bar{\varphi}_1(t) \quad \bar{\varphi}_2(t) \quad \bar{\varphi}_3(t)] \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$(4.2.1) \quad \bar{\varphi}_1(t) = 9 \sin(t); \quad \bar{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 2 \sin(t), & 0 \leq t \leq 5, \\ 4, & 5 < t \leq 15, \\ 2 \sin(t), & t > 15; \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_3(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ \sin(50t), & 10 < t \leq 15, \\ \sin(t), & t > 15. \end{cases}$$

Параметры фильтра (2.4), алгоритма виртуальной замены собственных чисел (3.2) и законов (2.3), (3.5) выберем в соответствии с выражением:

$$(4.2.2) \quad l = 100, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \bar{\varepsilon} = 10^{-10}, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Gamma = I_3.$$

Для обеспечения одинакового значения скорости сходимости для (3.5) и (2.7) коэффициент усиления γ закона (2.7) будем формировать аналогично (3.5), следуя методу нормализации возбуждения регрессора [18]:

$$(4.2.3) \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

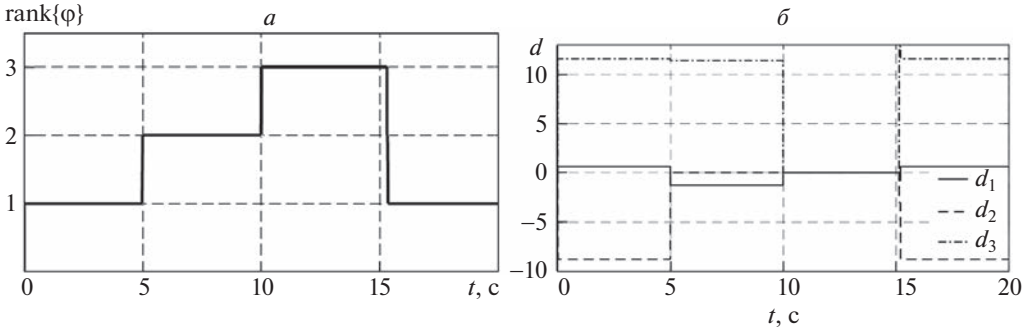


Рис. 6. Значение ранга регрессора $\varphi(t)$ (а), величина возмущения $d(t)$ (б).

Прежде всего убедимся в выполнении условий реализуемости законов (2.3), (2.7) и (3.5). На рис. 6 представлены значения возмущения $d(t)$ и ранга регрессора $\varphi(t)$ в течение эксперимента.

Как следует из рис. 6,а и следствий 2 и 4, необходимое условие реализуемости закона (3.5) выполняется для всех $t \geq 0$, а условие реализуемости (2.7) выполняется только на отрезке $t \in [10; 15,34]$. Согласно рис. 6 число переключений параметров в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} < \infty$ и $r(t) \geq 1$, а тогда согласно результатам теоремы 3 и следствия 5 для (3.5) выполняются все необходимые и достаточные условия экспоненциальной сходимости к нулю ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$. Более того, так как $\forall t \in [5; 10] d_2(t) = 0$, то на интервале $[5; 10]$ также выполнены описанные в утверждении 2 условия частичной идентифицируемости.

Верифицировав выполнение условий реализуемости и сходимости, промоделируем алгоритмы (3.5), (2.7) и (2.3) при различных начальных условиях.

Сначала установим $\theta_0 = [0 \ 5 \ 0]^T$, что по теореме 1 обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости закона (3.5):

$$\beta_1 = \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| \|\theta\|^{-1} \approx \frac{18}{15} = 1,2 \quad \frac{1}{\beta_1} + e^{-\gamma_0 \delta} = \frac{1}{1,2} + e^{-5 \cdot 5} \approx 0,833 \in (0; 1).$$

На рис. 7 изображены переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Полученные переходные процессы подтверждают теоретические выводы, сделанные в замечании 4. Действительно, при выполнении на $[5; 10]$ условий второй части утверждения 2 закон (3.5), в отличие от (2.7) и (2.3), обеспечивает монотонность по одному элементу вектора $\tilde{\theta}(t)$. Сравнивая качество переходных процессов, можно убедиться в преимуществах закона (3.5) над (2.7) и (2.3). По сравнению с (2.3) закон (3.5) на протяжении эксперимента обеспечивает аperiodический характер изменения $\tilde{\theta}_i(t) \forall i \in \overline{1, n}$. В сравнении с (2.7) закон (3.5) реализуем для всех $t \geq 0$, а не только на отрезке $[10; 15,34]$, и обеспечивает на $[5; 10]$ убывание до нуля одного элемента вектора $\tilde{\theta}(t)$.

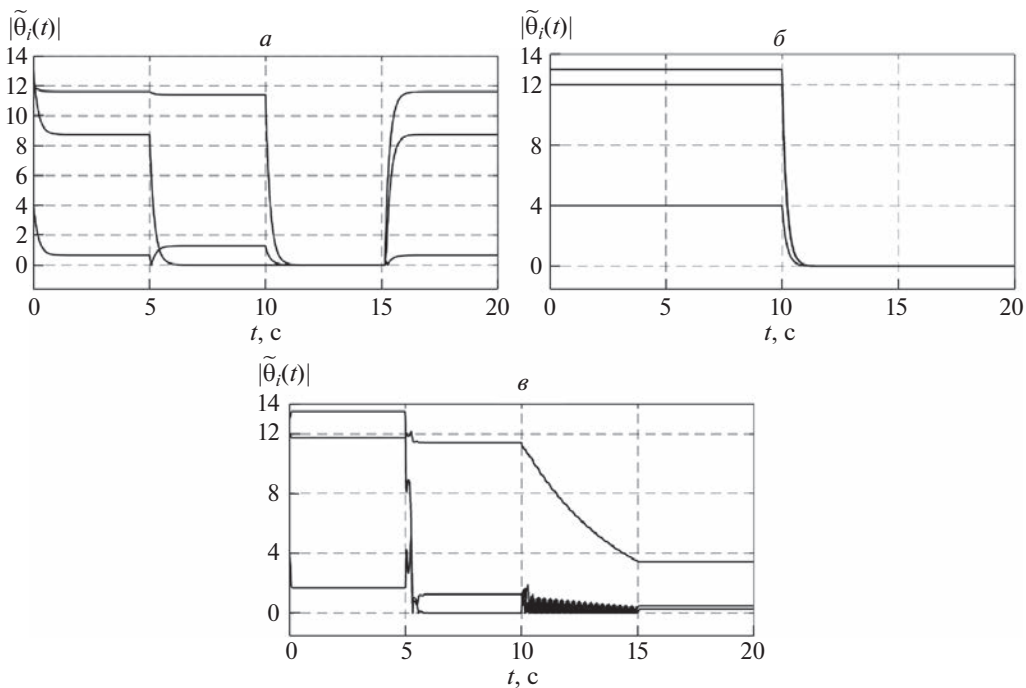


Рис. 7. Переходные процессы по $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

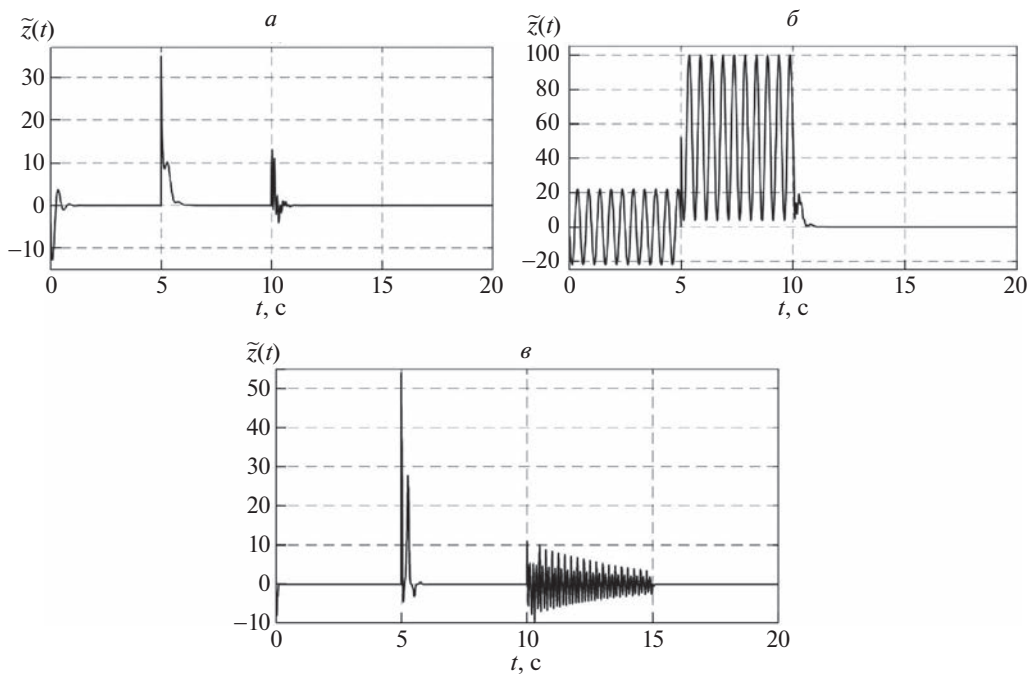


Рис. 8. Переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

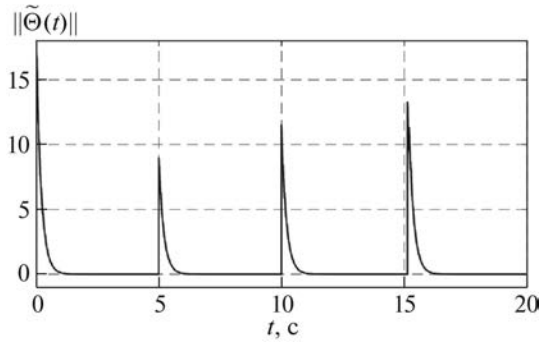


Рис. 9. Изменение нормы ошибки $\tilde{\Theta}(t)$.

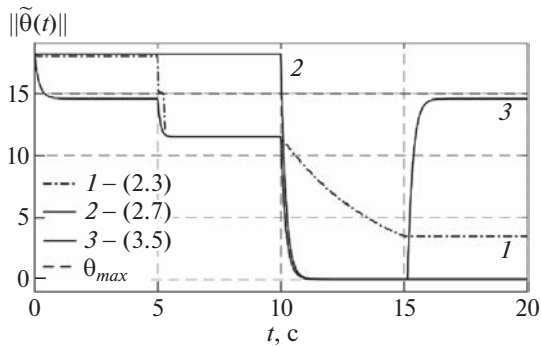


Рис. 10. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

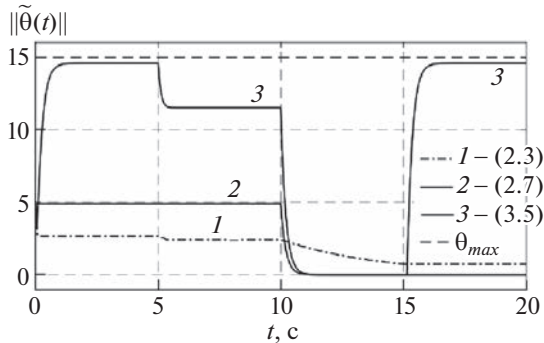


Рис. 11. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

На рис. 8 приведены переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ при использовании (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Переходные процессы, представленные на рис. 8, подтверждают доказанную в теореме 3 экспоненциальную восстанавливаемость положения равновесия ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ при $\bar{\varphi}(t) \in s\text{-PE}$ и выполнении допущения 3.

На рис. 9 приведена временная диаграмма по норме $\tilde{\Theta}(t)$.

Из рис. 9 следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ и выполнении допущения 3, что соответствует выводам, сделанным в теореме 3.

Так как число переключений ранга в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} < \infty$, то согласно результатам теоремы 3 и следствия 5 экспоненциальная восстанавливаемость положений равновесия ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости.

На рис. 10 приведены траектории по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении (3.5), (2.7) и (2.3).

Переходный процесс по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ закона (3.5) подтверждает выводы, сделанные в теореме 1 — целевое условие (2.2) выполняется при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении достаточных условий, а $\tilde{\theta}(t)$ действительно экспоненциально сходится в множество с границей θ_{\max} , что для (2.3) выполняется только для всех $t \geq 5$, а для (2.7) — только при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$.

Теперь установим $\theta_0 = [0 \ -10 \ 14]^T$, что не обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости из теоремы 1, поскольку $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \approx 4,9$, а $\theta_{\max} = \|\theta\| \approx 15$. На рис. 11 представлены полученные при таком выборе начальных условий переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5), (2.7) и (2.3).

Результаты моделирования, представленные на рис. 11, соответствуют выводам, полученным в теореме 1. Действительно, при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| < \theta_{\max}$ закон (3.5) нереализуем (при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| = \theta_{\max}$ — квазиреализуем), а норма ошибки $\|\tilde{\theta}(t)\|$ может принимать значения больше, чем $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$.

4.2.2. Эксперимент второй

Регрессионное уравнение (2.1) зададим следующим образом:

$$z(t) = \bar{\varphi}^T(t)\theta = [\bar{\varphi}_1(t) \ \bar{\varphi}_2(t) \ \bar{\varphi}_3(t)] \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix};$$

$$(4.2.4) \quad \bar{\varphi}_1(t) = \begin{cases} -2e^{-t} \cos(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t}, & 1 < t \leq 2, \\ e^{-t} \cos(t), & t > 2; \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_2(t) = \begin{cases} e^{-t} \cos(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ -2e^{-t} \cos(t), & 1 < t \leq 2, \\ e^{-t} + 0,1, & t > 2; \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_3(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ e^{-t} \cos(t), & 1 < t \leq 2, \\ -2e^{-t} \cos(t), & t > 2. \end{cases}$$

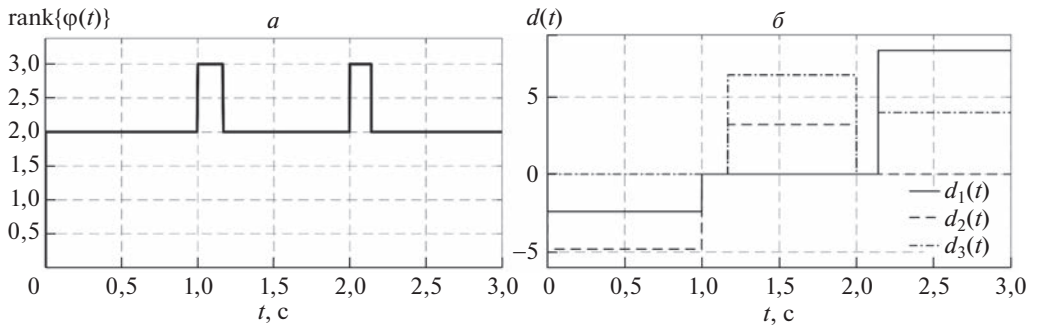


Рис. 12. Значение ранга регрессора $\varphi(t)$ (а), величина возмущения $d(t)$ (б).

Параметры фильтра (2.4), алгоритма виртуальной замены собственных чисел (3.3) и законов (2.3), (3.5) выберем в соответствии с выражением:

$$(4.2.5) \quad l = 100, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \bar{\varepsilon} = 10^{-10}, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Gamma = I_3.$$

Для обеспечения одинакового значения скорости сходимости для (3.5) и (2.7) коэффициент усиления γ закона (2.7) будем формировать аналогично (3.5), следуя методу нормализации возбуждения регрессора [18]:

$$(4.2.6) \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{если } \omega(t) \leq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \}, \\ \frac{\gamma_0}{\omega^2(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прежде всего убедимся в выполнении условий реализуемости законов (2.3), (2.7) и (3.5). На рис. 12 представлены значения ранга регрессора $\varphi(t)$ и возмущения $d(t)$ в течение эксперимента.

Интервалы времени $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$, на которых $\text{rank} \{ \varphi(t) \} = 3$, существенно меньше интервалов времени, на которых $\text{rank} \{ \varphi(t) \} = 2$. Поэтому в отличие от эксперимента в п. 4.2.1 в данном эксперименте ранг регрессора являлся постоянным почти всюду. Отличие ранга от двух на $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$ вызвано смешиванием фильтром (2.4) информации о регрессорах с различными базисами. Именно благодаря эффекту смешивания в проводимом эксперименте для (2.7) выполняется условие реализуемости на $[1; 1,165]$ и $[2; 2,14]$.

В свою очередь, для закона (3.5) необходимое условие реализуемости выполнено для всех $t \geq 0$. Согласно рис. 12 число переключений параметров в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} < \infty$ и $r \geq 1$, а тогда по допущению 3 и результатам теоремы 3 и следствия 5 для (3.5) выполняются все необходимые и достаточные условия экспоненциальной сходимости к нулю ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$. Более того, так как

$$\forall t \in [0; 1] \ d_3(t) = 0, \quad \forall t \in [1; 2] \ d_1(t) = 0, \quad \forall t \in [2; 3] \ d_2(t) = 0,$$

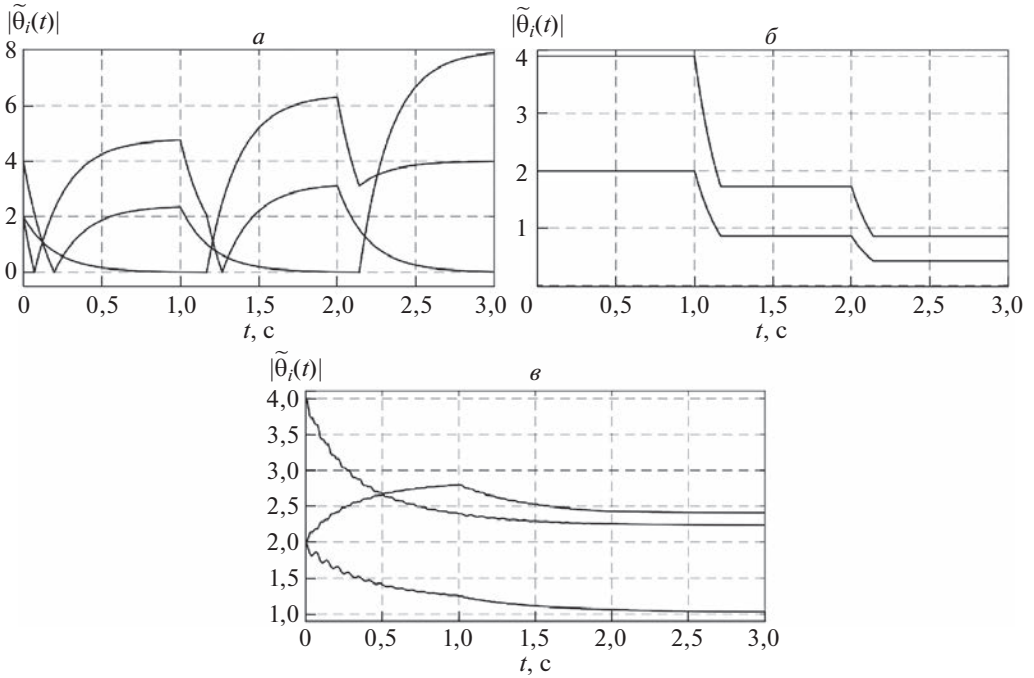


Рис. 13. Переходные процессы по $\tilde{\theta}_i(t)$ законов (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

то в течение эксперимента также выполнялись описанные в утверждении 2 условия частичной идентифицируемости.

Верифицировав выполнение условий реализуемости и сходимости, промоделируем алгоритмы (3.5), (2.7) и (2.3) при различных начальных условиях.

Сначала установим $\theta_0 = [0 \ -10 \ 14]^T$, что не обеспечивает выполнение условий реализуемости из теоремы 1, поскольку $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \approx 4,9$, а $\theta_{\max} = \|\theta\| \approx 15$.

На рис. 13 изображены переходные процессы по ошибкам $\tilde{\theta}_i(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Полученные переходные процессы подтверждают теоретические выводы, сделанные в замечании 4. Действительно, при выполнении условий второй части утверждения 2, закон (3.5), в отличие от (2.7) и (2.3), на интервалах времени, соответствующих $d_i(t) = 0$, обеспечивает монотонное убывание соответствующей ошибки $\tilde{\theta}_i(t)$:

$$\left| \tilde{\theta}_3(1) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_3(0) \right|, \quad \left| \tilde{\theta}_1(2) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_1(1) \right|, \quad \left| \tilde{\theta}_2(3) \right| \leq \beta \left| \tilde{\theta}_2(2) \right|, \quad \beta \in (0; 1).$$

Сравнивая качество переходных процессов, можно убедиться в преимуществах закона (3.5) над (2.7) и (2.3). По сравнению с (2.3) закон (3.5) на протяжении всего эксперимента обеспечивает аperiодический характер из-

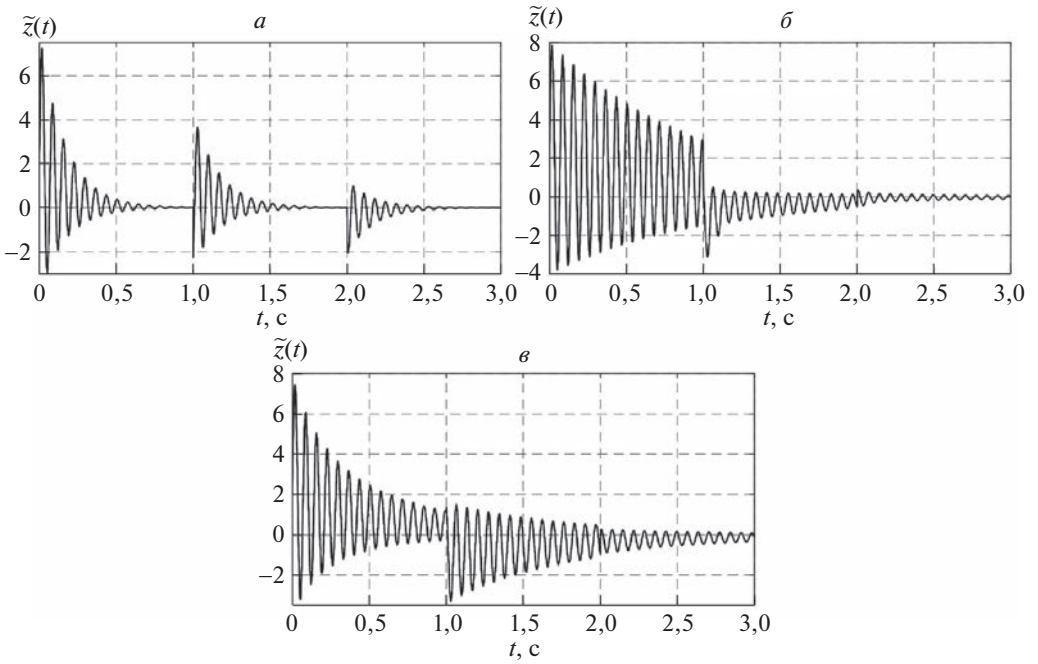


Рис. 14. Переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ для (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

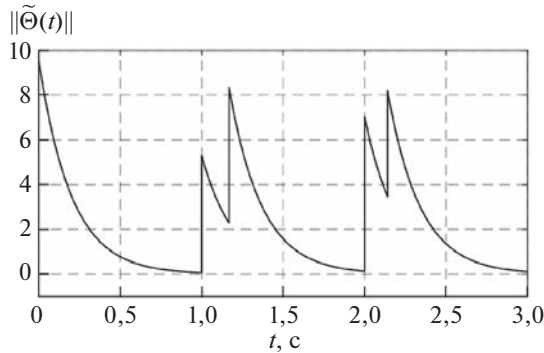


Рис. 15. Изменение нормы ошибки $\tilde{\Theta}(t)$.

менения $\tilde{\theta}_i(t) \forall i \in \overline{1, n}$. В сравнении с (2.7) закон (3.5) реализуем для всех $t \geq 0$, а не только на ограниченных интервалах [1; 1,165] и [2; 2,14].

На рис. 14 приведены переходные процессы по $\tilde{z}(t)$ при использовании (3.5) — (а), (2.7) — (б) и (2.3) — (в).

Переходные процессы, представленные на рис. 14, подтверждают доказанную в теореме 3 экспоненциальную восстанавливаемость положения равновесия ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ при $\bar{\varphi}(t) \in s\text{-PE}$ и выполнении допущения 3.

На рис. 15 приведена временная диаграмма по норме $\tilde{\Theta}(t)$.

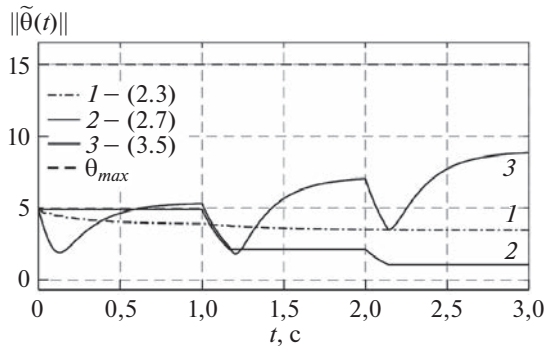


Рис. 16. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

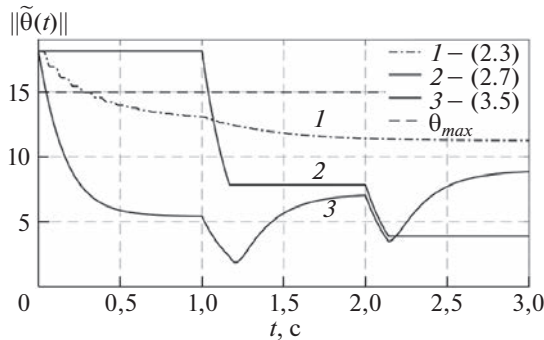


Рис. 17. Переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ для (3.5), (2.7) и (2.3).

Из рис. 15 следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ и выполнении допущения 3, что согласуется с выводами, сделанными в теореме 3.

Так как число переключений ранга в эксперименте конечно $j \leq j_{\max} = 4 < \infty$, то согласно результатам следствия 5 экспоненциальная восстанавливаемость положений равновесия ошибок $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{\Theta}(t)$ эквивалентна экспоненциальной устойчивости.

На рис. 16 приведены траектории по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении (3.5), (2.7) и (2.3).

Результаты моделирования, представленные на рис. 16, соответствуют выводам, полученным в теореме 1. Действительно, при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| < \theta_{\max}$ закон (3.5) нереализуем (при $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| = \theta_{\max}$ — квазиреализуем), а норма ошибки $\|\tilde{\theta}(t)\|$ может принимать значения больше, чем $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\|$.

Теперь установим $\theta_0 = [0 \ 5 \ 0]^T$, что по теореме 1 обеспечивает выполнение достаточных условий реализуемости закона (3.5):

$$\beta_1 = \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| \|\theta\|^{-1} \approx \frac{18}{15} = 1,2; \quad \frac{1}{\beta_1} + e^{-\gamma_0 \delta} = \frac{1}{1,2} + e^{-5 \cdot 1} \approx 0,84 \in (0; 1).$$

На рис. 17 представлены полученные при таком выборе начальных условий переходные процессы по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ при применении законов (3.5), (2.7) и (2.3).

Переходный процесс по $\|\tilde{\theta}(t)\|$ закона (3.5) подтверждает выводы, сделанные в теореме 1 — целевое условие (2.2) выполняется при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении достаточных условий, а $\tilde{\theta}(t)$ действительно экспоненциально сходится в множество с границей θ_{\max} , что для (2.7) выполняется только при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}$.

Таким образом, проведенные численные эксперименты подтвердили все теоретически сформулированные свойства предложенного закона (3.5). Результаты раздела 3.1 справедливы в общем случае $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$, а результаты разделов 3.2 и 3.3 — соответственно при выполнении допущений 2 и 3.

5. Заключение

Для решения задачи идентификации неизвестных постоянных параметров линейного регрессионного уравнения при частичном конечном возбуждении регрессора предложена процедура динамического расширения, регуляризации и смешивания регрессора, обобщающая известную процедуру DREM и расширяющая область ее применимости в прикладных задачах.

В отличие от стандартного градиентного закона идентификации (2.3) предложенная процедура обеспечивает поэлементную монотонность ошибок при выполнении допущения 2 и экспоненциальную сходимость ошибки слежения за функцией (2.1) при частичном постоянном возбуждении регрессора с рангом не менее единицы.

В отличие от DREM разработанная модифицированная процедура, во-первых, ослабляет требование конечного возбуждения регрессора, ранее необходимое для реализуемости (2.7), и гарантирует убывание ошибки идентификации неизвестных параметров при выполнении более слабого условия частичного конечного возбуждения, а во-вторых, обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки слежения за регрессионной функцией (2.1) при частичном неисчезающем возбуждении регрессора с рангом не менее единицы.

Дальнейшие исследования по развитию процедуры динамического расширения, регуляризации и смешивания регрессора могут быть проведены в следующих направлениях:

- синтез схем адаптивного управления с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора для экспоненциальной сходимости ошибки слежения за эталонной моделью;
- построение адаптивных наблюдателей состояний с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора для экспоненциальной сходимости к нулю ошибки слежения за координатами состояния объекта;
- использование условий частичной идентифицируемости (см. утверждение 2 и рис. 13,а, рис. 7,а, рис. 2,а) для решения задач идентификации полного вектора неизвестных параметров в условиях перепараметризации;

— на основании утверждения 2 и результатов моделирования (рис. 13,а, рис. 7,а, рис. 2,а), построение закона идентификации, не требующего конечного или неисчезающего возбуждения регрессора для экспоненциальной сходимости ошибок идентификации полного вектора неизвестных параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Пользуясь следствиями 1–4, запишем оценки снизу на регрессор $\omega(t)$:

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT$$

$$\omega(t) = \det \{\Phi(t)\} = \prod_{i=1}^n \lambda_i(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0,$$

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e]$$

$$\omega(t) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(t) \geq \lambda_{\min}^n(t) > \mu^n > 0,$$

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \omega(t) = \varepsilon^{\bar{r}} \prod_{i=1}^r \lambda_i(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0,$$

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e]$$

$$\omega(t) = \varepsilon^{\bar{r}} \prod_{i=1}^r \lambda_i(t) \geq \min \{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0.$$

Откуда следует справедливость утверждения 1.

Доказательство теоремы 1. **1.** Так как по следствиям 1 и 2 при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ верны импликации:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} &\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \\ &\bar{\varphi}(t) \in \text{FE} \Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \end{aligned}$$

то при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ в соответствии с (3.2) подмена нулевых собственных чисел $\Lambda(t)$ не осуществляется $\Xi(t) = 0_{n \times n}$, для матрицы регрессора $\Phi(t)$ выполняется равенство $\Phi(t) = \varphi(t)$, для неизвестных параметров Θ выполняется $\Theta = \theta$ в силу $\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t) = 0_{n \times n}$, а закон идентификации (3.5) в точности до определения значения коэффициента усиления γ совпадает с (2.7), откуда следует наличие свойств b_1 – b_5 у (3.5) при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$.

2. Введем в рассмотрение следующую функцию (аргументы времени опущены для краткости):

$$(П.2) \quad \forall t \in [t_r^+; t_e] \quad L = \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}.$$

Дифференцируя (П.2) вдоль траекторий (3.5), имеем

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{L} &= -2\tilde{\theta}^T \left(\gamma\omega \left(\omega\hat{\theta} - \omega\theta + \omega V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta \right) \right) = \\ &= -2\tilde{\theta}^T \gamma\omega^2\tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \gamma\omega^2 V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta. \end{aligned}$$

С учетом утверждения 1 и определения коэффициента γ оценка сверху на производную (П.3) для всех $t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e]$ принимает вид

$$(П.4) \quad \begin{aligned} \dot{L} &\leq -2\tilde{\theta}^T \frac{\gamma_0}{\omega^2} \omega^2 \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \frac{\gamma_0}{\omega^2} \omega^2 V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta \leq \\ &\leq -2\tilde{\theta}^T \gamma_0 \tilde{\theta} - 2\tilde{\theta}^T \gamma_0 V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T\theta \leq -2\gamma_0 \|\tilde{\theta}\|^2 + 2\gamma_0 \|\tilde{\theta}\| \theta_{\max}. \end{aligned}$$

Здесь для получения оценки сверху вычислена спектральная норма множителя $V\bar{\Lambda}^{-1}\Xi V^T$, равная единице в силу ортогональности матриц V и V^T .

Положив $a = \sqrt{2\gamma_0}\|\tilde{\theta}\|$, $b = \sqrt{2\gamma_0}\theta_{\max}$ и воспользовавшись неравенством $-a^2 + ab \leq -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, из (П.4) имеем

$$(П.5) \quad \dot{L} \leq -\gamma_0 \|\tilde{\theta}\|^2 + \gamma_0 \theta_{\max}^2.$$

Решив для всех $t \in [t_\delta; t_\delta + \delta]$ дифференциальное неравенство (П.5), получаем:

$$(П.6) \quad \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \quad L \leq e^{-\gamma_0(t-t_\delta)} \|\tilde{\theta}(t_\delta)\|^2 + \theta_{\max}^2.$$

Откуда, учитывая $L = \|\tilde{\theta}\|^2$ и справедливость для всех c, d неравенства $\sqrt{c^2 + d^2} \leq \sqrt{c^2} + \sqrt{d^2}$ имеем

$$(П.7) \quad \|\tilde{\theta}(t_\delta + \delta)\| \leq e^{-0,5\gamma_0\delta} \|\tilde{\theta}(t_\delta)\| + \theta_{\max}.$$

В наиболее консервативном случае для всех $t \in \{[t_r^+; t_\delta], [t_\delta + \delta; t_e]\}$ верно $\omega(t) \equiv 0$, поэтому имеем неравенства $\|\tilde{\theta}(t_r^+)\| \geq \|\tilde{\theta}(t_\delta)\|$, $\|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq \|\tilde{\theta}(t_\delta + \delta)\|$, с учетом которых можем переписать (П.7) в виде

$$(П.8) \quad \|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq e^{-0,5\gamma_0\delta} \|\tilde{\theta}(t_r^+)\| + \theta_{\max}.$$

Подставим предпосылку 2.1) в оценку (П.8):

$$(П.9) \quad \|\tilde{\theta}(t_e)\| \leq \left(e^{-0,5\gamma_0\delta} + \frac{1}{\beta_1} \right) \|\tilde{\theta}(t_r^+)\|.$$

Откуда следует, что выбор коэффициента γ_0 из условия

$$(П.10) \quad 0 < e^{-0,5\gamma_0\delta} + \frac{1}{\beta_1} < 1 \Leftrightarrow \gamma_0 > \frac{-2\ln\left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right)}{\delta}$$

позволяет обеспечить справедливость предпосылки 2.2) и, следовательно, получить оценку:

$$(П.11) \quad \left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \underbrace{\left(e^{-0,5\gamma_0\delta} + \frac{1}{\beta_1} \right)}_{0 < \beta < 1} \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\|,$$

что означает убывание ошибки $\tilde{\theta}(t)$ на интервале $[t_r^+; t_e]$.

Подставив оценку (П.11) в оценку сверху на $\tilde{z}(t_e)$, имеем:

$$(П.12) \quad |\tilde{z}(t_e)| \leq \bar{\varphi}_{\max} \left\| \tilde{\theta}(t_e) \right\| \leq \bar{\varphi}_{\max} \beta \left\| \tilde{\theta}(t_r^+) \right\| = \beta |\tilde{z}(t_r^+)|,$$

что завершает доказательство части 2 и свидетельствует о реализуемости (3.5) при $\bar{\varphi}(t) \in s\text{-FE}$ и выполнении предпосылок 2.1) и 2.2).

3. Для доказательства части 3 вычислим производную ошибки $\tilde{\Theta}(t)$:

$$(П.13) \quad \dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\gamma(t)\omega^2(t)\tilde{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t).$$

Общее решение дифференциального уравнения (П.13) имеет вид:

$$(П.14) \quad \tilde{\Theta}(t) = \phi(t, t_0) \tilde{\Theta}(t_0) - \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \dot{\Theta}(\tau) d\tau,$$

где

$$\phi(t, s) = e^{-\int_s^t \gamma(\tau)\omega^2(\tau) d\tau}.$$

Так как в силу $\sqrt{\gamma_1} \notin L_2$, $\frac{\sqrt{\gamma_0}}{\omega(t)} \notin L_2$ и $\omega(t) \notin L_2$ при всех возможных вариантах переключений нелинейного оператора в (3.5) верно $\sqrt{\gamma}\omega(t) \notin L_2$, то функция $\phi(t, s)$ обладает следующими свойствами:

$$(П.15) \quad \sqrt{\gamma}\omega(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \phi(t, s) \leq 1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, s) = 0. \end{cases}$$

С использованием первого свойства можем получить оценку сверху на (П.14):

$$(П.16) \quad \tilde{\Theta}(t) \leq \phi(t, t_0) \tilde{\Theta}(t_0) - \Theta(t).$$

Используя в (П.16) определения $\tilde{\Theta}(t) = \tilde{\theta}(t) + d(t)$, $\Theta(t) = \theta - d(t)$, имеем:

$$(П.17) \quad \tilde{\theta}(t) \leq \phi(t, t_0) \tilde{\theta}(t_0) - \theta.$$

Откуда на основании второго свойства из (П.15) следует $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}(t)\| \leq \theta_{\max}$, что завершает доказательство третьей части теоремы.

4. При выполнении условия $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ в соответствии с третьей частью утверждения 1 для всех $t \geq kT$ верно $\omega(t) \geq \min\{\lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n\} > 0$ и, следовательно, функция $\phi(t, kT)$ принимает вид:

$$(П.18) \quad \phi(t, kT) = e^{-\gamma_0(t-kT)}.$$

Тогда, записав решение уравнения (П.13) для всех $t \geq kT$, по аналогии с (П.14)–(П.17) возможно получить следующую оценку:

$$(П.19) \quad \|\tilde{\theta}(t)\| \leq e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\| + \theta_{\max}.$$

Откуда следует экспоненциальная сходимость при $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ ошибки $\tilde{\theta}(t)$ к множеству с границей θ_{\max} , что завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. I. Для доказательства первой части теоремы 2 запишем (3.4) в поэлементном виде:

$$(П.20) \quad \Upsilon_i(t) = \omega(t)\Theta_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

С учетом (П.20) закон (3.5) для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ можно записать следующим образом:

$$(П.21) \quad \dot{\hat{\theta}}_i(t) = \dot{\tilde{\Theta}}_i(t) = -\gamma(t)\omega(t) \left(\omega(t)\hat{\theta}_i(t) - \omega(t)\Theta_i \right) = -\gamma(t)\omega^2(t)\tilde{\Theta}_i(t).$$

Так как $\gamma(t)\omega^2(t) > 0$, то $\text{sign}\{\dot{\tilde{\Theta}}_i(t)\} = \text{const}$, а для $\tilde{\Theta}_i(t)$ верно $|\tilde{\Theta}_i(t_a)| \leq |\tilde{\Theta}_i(t_b)| \forall t_a \geq t_b$, что завершает доказательство первой части теоремы.

II. При $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}$ и выполнении допущения 2 в соответствии со следствием 4 решение уравнения (П.13) на $[t_\delta; t_\delta + \delta]$ примет вид:

$$(П.22) \quad \tilde{\Theta}(t) = \phi(t, t_\delta) \tilde{\Theta}(t_\delta) = e^{-\gamma_0(t-t_\delta)} \tilde{\Theta}(t_\delta).$$

В наиболее консервативном случае для всех $t \in \{[t_r^+; t_\delta], [t_\delta + \delta; t_e]\}$ верно $\omega(t) \equiv 0$, поэтому имеем неравенства $\|\tilde{\Theta}(t_r^+)\| \geq \|\tilde{\Theta}(t_\delta)\|$, $\|\tilde{\Theta}(t_e)\| \leq \|\tilde{\Theta}(t_\delta + \delta)\|$, с учетом которых можем получить оценку на ошибку $\tilde{\Theta}(t)$ в момент времени t_e :

$$(П.23) \quad \|\tilde{\Theta}(t_e)\| \leq e^{-\gamma_0\delta} \|\tilde{\Theta}(t_r^+)\|.$$

Ввод в (П.23) обозначения $\beta = e^{-\gamma_0\delta} \in (0; 1)$ позволяет завершить доказательство убывания ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ на интервале $[t_r^+; t_e]$.

Для доказательства убывания ошибки $\tilde{z}(t)$ учтем справедливость в силу $V_1^T(t)V_2 = 0_{r \times r}$ импликации

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \varphi(t)\theta = V_1(t)\Lambda_1(t)V_1^T(t) (\theta - V_2V_2^T\theta) = \\
 &= \varphi(t) (\theta - V_2V_2^T\theta) = \varphi(t)\Theta = \\
 &= \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)\bar{\varphi}^T(\tau) d\tau\Theta = \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau) z(\tau) d\tau = \\
 \text{(П.24)} \quad &= \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)\underbrace{\bar{\varphi}^T(\tau)\theta}_{z(\tau)} d\tau = \int_{t_0^+}^t e^{-l(t-\tau)}\bar{\varphi}(\tau)\underbrace{\bar{\varphi}^T(\tau)\Theta}_{z(\tau)} d\tau \\
 &\quad \Downarrow \\
 z(t) &= \bar{\varphi}^T(t)\theta = \bar{\varphi}^T(t) (\theta - V_2V_2^T\theta) = \bar{\varphi}^T(t)\Theta.
 \end{aligned}$$

Тогда оценка сверху на ошибку слежения с учетом (П.22) имеет вид:

$$\text{(П.25)} \quad \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \quad |\tilde{z}(t)| \leq \bar{\varphi}_{\max} e^{-\gamma_0(t-t_\delta)} \left\| \tilde{\Theta}(t_\delta) \right\|.$$

Откуда с учетом (П.23) непосредственно имеем:

$$\text{(П.26)} \quad |\tilde{z}(t_e)| \leq \bar{\varphi}_{\max} \beta \left\| \tilde{\Theta}(t_r^+) \right\| = \beta |\tilde{z}(t_r^+)|,$$

что завершает доказательство части II.

III. При выполнении допущения 2 для всех $t \in [t_0; \infty)$ решение уравнения (П.13) принимает вид:

$$\text{(П.27)} \quad \tilde{\Theta}(t) = \phi(t, t_0) \tilde{\Theta}(t_0),$$

откуда по второму свойству из (П.15) следует:

$$\text{(П.28)} \quad \sqrt{\gamma(t)}\omega(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| = 0,$$

что выполняется для всех возможных вариантов переключений нелинейного оператора (3.5) в силу $\sqrt{\gamma_1} \notin L_2$, $\frac{\sqrt{\gamma_0}}{\omega(t)} \notin L_2$ и $\omega(t) \notin L_2$.

Применив импликацию (П.28) в оценке сверху на выражение (П.24), получим:

$$\text{(П.29)} \quad \sqrt{\gamma(t)}\omega(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\bar{\varphi}_{\max} \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| \right) = 0.$$

Таким образом, все пункты третьей части теоремы 2 справедливы.

IV. При $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE} \forall t \geq kT$ верно (П.18), откуда на основании (П.22) получаем оценку:

$$(П.30) \quad \forall t \geq kT \quad \left\| \tilde{\Theta}(t) \right\| \leq e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|,$$

что подтверждает экспоненциальную сходимость для всех $t \geq kT$ ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ к нулю.

Имея оценку (П.30) и учитывая ограниченность $\|\bar{\varphi}(t)\| \leq \bar{\varphi}_{\max}$, аналогично (П.25), пользуясь выражением (П.24), можно убедиться в экспоненциальной сходимости для всех $t \geq kT$ ошибки $\tilde{z}(t)$, что завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. При $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ по доказанному в третьей части утверждения 1 для всех $t \geq kT$ верно $\omega(t) \geq \min \{ \lambda_{\min}^n(t), \varepsilon^n \} > 0$, а значит, уравнение (П.13) может быть записано в виде

$$(П.31) \quad \forall t \geq kT \quad \dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\gamma_0 \tilde{\Theta}(t) - \dot{\Theta}(t).$$

Производная $\dot{\Theta}(t)$ в силу допущения 3 в соответствии с выражением (3.7) имеет вид

$$(П.32) \quad \dot{\Theta}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \delta(t - t_j).$$

С учетом (П.32) решим дифференциальное уравнение (П.31):

$$(П.33) \quad \forall t \geq kT \quad \tilde{\Theta}(t) = e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}(kT) - \int_{kT}^t e^{-\gamma_0(t-\tau)} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j \delta(\tau - t_j) d\tau.$$

В соответствии с фильтрующим свойством функции единичного импульсного воздействия для любой дифференцируемой функции $f(t)$ имеем:

$$(П.34) \quad \begin{aligned} \int_{t_0}^t f(\tau) \delta(\tau - t_j) d\tau &= f(t_j) h(\tau - t_j)|_{t_0}^t = \\ &= f(t_j) h(t - t_j) - \underbrace{f(t_j) h(t_0 - t_j)}_{=0} \equiv f(t_j) h(t - t_j). \end{aligned}$$

С использованием (П.34) выражение (П.33) может быть приведено к виду:

$$(П.35) \quad \forall t \geq kT \quad \tilde{\Theta}(t) = e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}(kT) - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(t-t_j)} \Delta_j h(t - t_j).$$

Домножив (П.35) на $\tilde{\Theta}^T(kT)$, получим:

$$(П.36) \quad \forall t \geq kT \quad \tilde{\Theta}^T(kT) \tilde{\Theta}(t) = e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(t-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j).$$

Вынос слагаемого $e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2$ за скобки в правой части выражения (П.36) позволяет для всех $t \geq kT$ записать:

$$(П.37) \quad \tilde{\Theta}^T(kT) \tilde{\Theta}(t) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right)}_{\in R} \times e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}^T(kT) \tilde{\Theta}(kT),$$

$$\tilde{\Theta}(t) = \left(1 - \frac{1}{\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right) \times e^{-\gamma_0(t-kT)} \tilde{\Theta}(kT),$$

где $\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\| \neq 0$, поскольку для всех $t \in [t_0; kT)$ $\omega(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\| \geq \left\| \tilde{\Theta}(t_0) \right\|$.

Выражение (П.37) позволяет получить первое выражение из (3.8) с точностью до обозначения:

$$(П.38) \quad a(t_j) = \left| 1 - \frac{1}{\left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right|.$$

Откуда следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$.

Оценка сверху на ошибку слежения $|\tilde{z}(t)|$ с учетом выражения (П.24) имеет вид

$$(П.39) \quad \forall t \geq kT \quad |\tilde{z}(t)| \leq a(t_j) \bar{\varphi}_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} \left\| \tilde{\Theta}(kT) \right\| = a(t_j) e^{-\gamma_0(t-kT)} |\tilde{z}(kT)|.$$

Откуда следует экспоненциальная восстанавливаемость положения равновесия ошибки $\tilde{z}(t)$.

Если, дополнительно, для $a(t_j)$ существует оценка сверху a_{\max} , то из (3.8) мгновенно имеем:

$$(П.40) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\Theta}(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\| \right) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{z}(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a_{\max} \bar{\varphi}_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} \|\tilde{\Theta}(kT)\| \right) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a_{\max} e^{-\gamma_0(t-kT)} |\tilde{z}(kT)| \right) = 0. \end{cases}$$

Откуда следует экспоненциальная устойчивость ошибки слежения $\tilde{z}(t)$ и параметрической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$, что завершает доказательство теоремы 3.

Доказательство следствия 5. В соответствии с первой частью следствия 5 предположим, что число изменений $\Theta(t)$ конечно: $j \leq j_{\max} < \infty$.

Тогда можем получить следующую оценку сверху на функцию $a(t_j)$:

$$(П.41) \quad \begin{aligned} a(t_j) &= \left| 1 - \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|^2} \sum_{j=1}^{j_{\max}} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right| \leq \\ &\leq 1 + \left| \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|^2} \sum_{j=1}^{j_{\max}} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right| \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \|\Delta_j\| e^{-\gamma_0(kT-t_j)} h(t-t_j). \end{aligned}$$

Поскольку при конечном j моменты времени t_j также конечны, то экспоненциальный множитель в сумме (П.41) ограничен, и верно определение:

$$(П.42) \quad a(t_j) \leq 1 + \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \|\Delta_j\| e^{-\gamma_0(kT-t_j)} h(t-t_j) = a_{\max},$$

что и требовалось доказать в первой части следствия.

Для доказательства второй части следствия с учетом оценки на $\|\Delta_j\|$ аналогично (П.42) получим оценку сверху на $a(t_j)$, но уже при неограниченном числе переключений:

$$(П.43) \quad \begin{aligned} a(t_j) &\leq 1 + \left| \frac{1}{\|\tilde{\Theta}(kT)\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\gamma_0(kT-t_j)} \tilde{\Theta}^T(kT) \Delta_j h(t-t_j) \right| \leq \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c(t_j) h(t-t_j). \end{aligned}$$

Ряд в (П.43) знакоположительный, и все его частичные суммы ограничены в силу монотонности $0 < c(t_{j+1}) \leq c(t_j)$, а поэтому $1 + \sum_{j=1}^{\infty} c(t_j) h(t - t_j) \leq \leq a_{\max}$, что завершает доказательство следствия 5.

Доказательство утверждения 2. Так как по следствиям 1 и 2 при $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ верны импликации:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t) \in \text{PE} &\Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \\ \bar{\varphi}(t) \in \text{FE} &\Leftrightarrow \forall t \in [t_\delta; t_\delta + \delta] \subset [t_r^+; t_e] \quad \lambda_{\min}(t) > \mu > 0, \end{aligned}$$

то в соответствии с выражением (3.3) при $\bar{\varepsilon} = 0$ имеем $\Xi(t) = 0_{n \times n}$, а тогда $\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t) = 0_{n \times n}$ и, следовательно, $\bar{\varphi}(t) \in \text{FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Rightarrow d(t) = 0_n \Rightarrow \Rightarrow \Theta(t) = \theta$, что завершает доказательство п. (а) утверждения 2.

Необходимость условий $\bar{\varphi}(t) \in \text{s-FE}/\bar{\varphi}(t) \in \text{s-PE}$ следует из того, что только при $0 < r < n$ условия части б) непротиворечивы ($\exists p > 0 \sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) = 0_n$, $w_i \neq 0$). Необходимость условия $n > 2$ также следует из противоречия, возникающего при $n = 2$ в общем случае ($\varphi_1(t) \neq 0_n$):

$$w_1 \varphi_1(t) + w_2 \varphi_2(t) = 0_n \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 = 0.$$

Теперь следует доказать для $\exists M \subset \{1, \dots, n\}$, $|M| = p$, $\forall i \in M$, $\Theta_i = \theta_i$ необходимость и достаточность выполнения условия:

$$(П.44) \quad \sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) = 0_n, \quad w_i \neq 0, \quad w_j = 0.$$

Необходимость. Для начала отметим, что согласно (3.5) элементы вектора новых неизвестных параметров Θ совпадают с элементами вектора исходных параметров θ , если соответствующие элементы вектора d равны нулю. Поэтому рассмотрим эту величину подробнее. При $\bar{r} > 0$ произведение $\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)$ имеет структуру:

$$(П.45) \quad \bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1}(t) & 0_{r \times \bar{r}} \\ 0_{\bar{r} \times r} & \varepsilon^{-1} I_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_r & 0_{r \times \bar{r}} \\ 0_{\bar{r} \times r} & \varepsilon I_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_r & 0_{r \times \bar{r}} \\ 0_{\bar{r} \times r} & I_{\bar{r}} \end{bmatrix}.$$

Тогда в силу обозначений (3.4) возможно переписать определение d :

$$(П.46) \quad d = V(t)\bar{\Lambda}^{-1}(t)\Xi(t)V^T(t)\theta = V_2 V_2^T \theta = [d_1 \dots d_i \dots d_n]^T,$$

откуда следует, что d принимает p нулевых значений, если, в частности, число нулевых строк и столбцов матрицы $V_2 V_2^T$ равно p , что, в свою очередь, выполняется, когда матрица V_2 имеет p нулевых строк.

По определению сингулярного разложения положительно полуопределенной симметричной матрицы [15, 16], матрица V_2 может быть найдена решением однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$(П.47) \quad \varphi(t)V_2^k = \sum_{i=1}^n v_i^k \varphi_i(t) = 0_n, \quad \forall k \in \{1, \bar{r}\},$$

где V_2^k — k -й столбец матрицы V_2 .

Для доказательства необходимости условия (П.44) покажем, что если $w_j \neq 0$, то вектор $V_2^k, \forall k \in \{1, \bar{r}\}$, не содержит нулевых элементов.

Выражение (П.47) может быть переписано в следующем эквивалентном виде (с учетом ортонормальности $V_2^k, \forall k \in \{1, \bar{r}\}$):

$$(П.48) \quad \begin{aligned} \varphi(t)V_2^k &= \sum_{i=1}^n v_i^k \varphi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \sum_{i=1}^n w_i \varphi_i(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \left(\sum_{i=1}^{n-p} w_i \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n w_j \varphi_j(t) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-p} v_i^k \varphi_i(t) + \sum_{j=n-p+1}^n v_j^k \varphi_j(t) = 0_n. \end{aligned}$$

Поскольку при нахождении V_2^k выполняется поиск только нетривиальных решений, то при невыполнении условия (П.44) множество решений задается следующим образом:

$$v_i^k = \frac{w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \neq 0; \quad v_j^k = \frac{w_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \neq 0,$$

а тогда $V_2^k, \forall k \in \{1, \bar{r}\}$, не содержит нулевые элементы и, следовательно, $\nexists d_i = 0 \Rightarrow \nexists M \subset \{1, \dots, n\}, |M| = p, \forall i \in M, \Theta_i = \theta_i$, что завершает доказательство необходимости условия (П.45).

Достаточность. Множество решений уравнения вида (П.47) по постановке утверждения при выполнении условия (П.44) задается следующим образом:

$$v_i^k = \frac{w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} \neq 0; \quad v_j^k = \frac{w_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}} = 0,$$

а тогда вектор $V_2^k, \forall k \in \{1, \bar{r}\}$, содержит p нулевых элементов и, следовательно, $\exists M \subset \{1, \dots, n\}, |M| = p, \forall i \in M, \Theta_i = \theta_i$, что завершает доказательство достаточности условия (П.44).

Таким образом, условие (П.44) является необходимым и достаточным для идентифицируемости p неизвестных параметров θ , что завершает доказательство 2-й части утверждения 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On Modified Parameter Estimators for Identification and Adaptive Control. A Unified Framework and Some New Schemes // Annual Reviews in Control. 2020. V. 50. P. 278–293.
2. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement Of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. V. 62, No. 7. P. 3546–3550.
3. *Глушченко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.* I-DREM: ослабление условия квадратичной интегрируемости // АиТ. 2021. № 7. С. 147–165.
Glushchenko A.I., Petrov V.A., Lastochkin K.A. I-DREM: Relaxing the Square Integrability Condition // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 7. P. 1233–1247.
4. *Korotina M., Romero J.G., Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R.* A New On-Line Exponential Parameter Estimator without Persistent Excitation // Sys. Control Letters. 2022. V. 159. P. 1–10.
5. *Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J.G., Yi B.* Identifiability implies robust, globally exponentially convergent on-line parameter estimation: Application to model reference adaptive control // arXiv preprint arXiv:2108.08436. 2021. P. 1–16.
6. *Wang J., Efimov D., Aranovskiy S., Bobtsov A.* Fixed-Time Estimation of Parameters for Non-Persistent Excitation // European J. Control. 2020. V. 55. P. 24–32.
7. *Yi B., Ortega R.* Conditions for convergence of dynamic regressor extension and mixing parameter estimators using LTI filters // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. P. 1–6.
8. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On preserving-excitation properties of Kreisselmeiers regressor extension scheme // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. P. 1–6.
9. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control — Stability, Convergence, and Robustness. N.J.: Prentice Hall, 1989.
10. *Kreisselmeier G., Rietze-Augst G.* Richness and Excitation on an Interval-with Application to Continuous-Time Adaptive Control // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. V. 35. No. 2. P. 165–171.
11. *Roy S.B., Bhasin S.* Novel Model Reference Adaptive Control Architecture Using Semi-Initial Excitation-Based Switched Parameter Estimator // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2019. V. 33. No. 12. P. 1759–1774.
12. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. No. 12. P. 91–96.
13. *Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., Bespalov V., Pyrkin A., Bobtsov A.* Flux Observer for The Levitated Ball with Relaxed Excitation Conditions // Proc. European Control Conf. 2021. P. 2334–2339.
14. *Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., Pyrkin A.* Overparameterized model parameter recovering with finite-time convergence // Int. J. Adapt. Control. Signal Process. 2022. P. 1305–1325.

15. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
Tihonov A.N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method // Soviet Math. 1963. V. 4. P. 1035–1038.
16. *Hansen P.C.* The Truncated SVD as a Method For Regularization // BIT Num. Math. 1987. V. 27. No. 4. С. 534–553.
17. *Meyer C.D.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Siam, 2000.
18. *Глушченко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Нормализация возбуждения регрессора в процедуре динамического расширения // АиТ. 2022. № 1. С. 22–39.
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A., Petrov V.A. Normalization of Regressor Excitation in the Dynamic Extension and Mixing Procedure // Autom. Remote Control. 2022. Vol. 83. No. 1. P. 17–31.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 13.12.2021

После доработки 17.06.2022

Принята к публикации 29.09.2022

Стохастические системы

© 2023 г. А.Н. ТАРАСОВ¹ (tarrapid@gmail.com),
В.М. АЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (azanov59@gmail.com),
А.И. КИБЗУН², д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УДЕРЖАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ТРУБКЕ

Исследуется задача оптимального управления стационарной линейной стохастической системой с дискретным временем, скалярным неограниченным управлением, аддитивным шумом и критерием вероятности пребывания ее траекторий в заданной окрестности нуля. С использованием метода динамического программирования и двусторонних оценок функции Беллмана находится аналитическое выражение оптимального управления для двух шагов по времени и субоптимального управления для произвольного горизонта управления. Эффективность найденного управления проверяется на модельном примере.

Ключевые слова: дискретные системы, стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, метод динамического программирования, функция Беллмана, стационарные системы, неограниченное управление.

DOI: 10.31857/S0005231023010038, **EDN:** LUDTND

1. Введение

Исследование задач оптимального управления стохастическими системами с критериями вероятности выполняются с 1960-х гг. для широкого спектра прикладных областей: аэрокосмической [1–5], робототехнической [6–10], экономической [11–12], биомедицинской [13] и др. [14]. Под критерием вероятности понимается вероятность выполнения некоторых ограничений на вектор состояния, часто характеризующих точность системы управления [1]. Интерес к таким постановкам вызван практическими требованиями, предъявляемыми к системам управления, формализованными в виде вероятностных ограничений [1, 3, 4] и задачами определения множеств стохастической

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта №20-31-90056 (Разделы 1, 2, 3, 4.1).

² Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00213, <https://rscf.ru/project/22-21-00213> (Разделы 4.2, 5, 6).

достижимости [2, 6–8], жизнеспособности [15] (в англоязычной литературе — stochastic viability) и поглощений [16].

Задачи с критерием максимума вероятности пребывания системы в трубке траекторий исследовались в [2, 6–10, 13–15, 19–21]. В [6–10, 13–15] исследован случай дискретного времени, для которого получены условия оптимальности в форме метода динамического программирования (МДП), на основе которого предложен ряд алгоритмов, позволяющих решить задачу стохастической достижимости, где сами множества достижимости строятся с помощью аппроксимации поверхности уровня функции Беллмана. В [19] для линейной системы с дискретным временем получены условия логарифмической вогнутости функции Беллмана и с использованием “разомкнутого управления”, являющегося программным, предложен алгоритм аппроксимации поверхностей уровня функции Беллмана. В [9, 10] для широкого класса систем предложен численный метод поиска оптимального управления в классе полиномов, основанный на сведении исходной задачи к так называемой проблеме моментов (см., например, [21]). В [21] найдены двусторонние оценки функции Беллмана и предложен алгоритм поиска субоптимального управления, основанный на ее нижней границе. Преимущество данного алгоритма заключается в отсутствии необходимости решения уравнения Беллмана, а наличие явного соотношения определения точности субоптимального управления [21] обеспечивает возможность его практического применения.

В настоящей статье исследуется задача оптимального удержания траекторий линейной системы с дискретным временем, скалярным неограниченным управлением и случайным шумом в канале управления в заданной окрестности нуля по вероятностному критерию. С использованием [21] находятся явные выражения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана и двусторонние границы функции Беллмана. С использованием нижних границ получено аналитическое выражение для субоптимального управления. Показано, что для траекторий системы, лежащих на поверхностях уровней 1 и 0 функции Беллмана, данное управление является оптимальным. Рассмотрен пример управления системой второго порядка. Для системы второго порядка показано, что поверхности уровня 1 и 0 обладают свойствами частичной стационарности.

2. Постановка задачи

В статье рассматривается задача оптимального управления линейной стохастической системой с дискретным временем и аддитивным случайным шумом

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + C\xi_k, & k = \overline{0, N}, \\ x_0 = X, \end{cases}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}$ — скалярное управляющее воздействие, ξ_k — случайное возмущение со значениями на \mathbb{R} , N — горизонт управ-

ления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы, $B = (0, \dots, b)^T$, $b \in \mathbb{R}$ и $C = (0, \dots, c)^T$, $c \in \mathbb{R}$.

В качестве критерия рассматривается функционал вероятности

$$(2) \quad P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P} \left(\max_{k=0, \overline{N}} \|\Lambda x_{k+1}\|_\infty \leq \varphi \right),$$

где матрица $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скаляр $\varphi \in \mathbb{R}$ представляют собой параметры множества удержания $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda x\|_\infty \leq \varphi\}$, а $\|x\|_\infty = \max_{i \in \overline{1, n}} |x^i|$ — l_1 -норма вектора, где $x = (x^1, \dots, x^n)^T$.

В отношении системы (1) и функционала (2) введем предположения:

1. Известна полная информация о векторе состояния x_k ; данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая измеримая функция;
2. Начальное состояние $x_0 = X$ является случайным вектором со значениями в \mathbb{R}^n и с известным распределением \mathbf{P}_X ;
3. Управлением называется набор функций $u(\cdot) = (\gamma_0(\cdot), \dots, \gamma_N(\cdot))^T \in \mathcal{U}$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \dots \times \mathcal{U}_N$, где \mathcal{U}_k — множество измеримых функций $\gamma_k(\cdot)$;
4. Случайные величины ξ_k , $k = \overline{0, N}$, имеют распределение с финитной плотностью вероятности $f_{\xi_k}(t)$, $\text{supp}[f_{\xi_k}(t)] = [m_\xi - \epsilon; m_\xi + \epsilon]$, где $m_\xi = \mathbf{M}[\xi_k]$, $\epsilon > 0$, причем $f_{\xi_k}(t)$ симметрична относительно m_ξ , а компоненты вектора $(X, \xi_0, \dots, \xi_N)^T$ независимы;
5. Матрица $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является диагональной и положительно определенной, а $\varphi > 0$.

Рассматривается задача

$$(3) \quad P_\varphi(u(\cdot)) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}$$

физический смысл которой — поиск позиционного управления, максимизирующего вероятность пребывания траекторий системы (1) в прямоугольном параллелепипеде \mathcal{F} в течение заданного промежутка времени $\{1, \dots, N + 1\}$.

Вопросы оптимального управления с критериями в форме (2) в более общем случае рассмотрены в [21, 23], где, в частности, получены условия оптимальности в форме МДП и найдены двусторонние границы функции Беллмана, на основе которых предложен способ построения субоптимального управления. Приведем отдельные теоретические положения работ [21, 23], для их дальнейшего использования при решении задачи (3).

3. Метод динамического программирования и двусторонние оценки функции Беллмана

Введем обозначения:

$$f_k(x_k, u_k, \xi_k) = Ax_k + Bu_k + C\xi_k, \quad \Phi_k(x) = \|\Lambda x\|_\infty.$$

Рассмотрим функцию Беллмана

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_k(x) = \\ & = \sup_{\gamma_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k, \dots, \gamma_N(\cdot) \in \mathcal{U}_N} \mathbf{P} \left(\max_{i=\overline{k, N}} \Phi_{i+1}(x_{i+1}(x_k, \gamma_k(\cdot), \dots, \gamma_i(\cdot), \xi_k, \dots, \xi_i)) \leq \varphi \mid x_k = x \right). \end{aligned}$$

В соответствии с [23] уравнения динамического программирования для задачи (3) имеют вид

$$(4) \quad \gamma_k^*(x) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M}_{\xi_k} [\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k))],$$

$$(5) \quad \mathbf{B}_k(x) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M}_{\xi_k} [\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k))], \quad k = \overline{0, N},$$

$$(6) \quad \mathbf{B}_{N+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x),$$

где $\mathbf{M}_{\xi_k}[\cdot]$ — математическое ожидание по распределению случайной величины ξ , а $\mathbf{I}_{\mathcal{F}}$ — индикаторная функция множества \mathcal{F} .

Известно [23], что если существует решение $u^*(\cdot) = (\gamma_0^*(\cdot), \dots, \gamma_N^*(\cdot))$ задач (4)–(6), то оно является оптимальным управлением в задаче (3). Важно отметить, что решение уравнений (4)–(6) вызывает большие трудности, даже если анализировать относительно простые задачи. Для задачи оптимального удержания траекторий дискретной стохастической системы в трубке общего вида с помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана были получены двусторонние оценки функции правой части уравнения МДП, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия.

На данном фундаменте был предложен алгоритм приближенного поиска оптимального управления [21], который при определенных условиях дает точное решение. Для описания алгоритма используются поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}_k(x) = 1\}, \quad \mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}_k(x) = 0\}$$

и множество $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k\}$. Для удобства введем обозначение $\overline{\mathcal{F}} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}$. Нетрудно видеть, что из определения введенных множеств справедливо, что

$$\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k = \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \mathbf{B}_k(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k, \\ \mathbf{B}_k(x) \in (0, 1), & x \in \mathcal{B}_k, \\ \mathbf{B}_k(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

В [21] были получены рекуррентные соотношения, не зависящие от функции Беллмана и позволяющие найти явный вид для поверхностей $\mathcal{I}_k, \mathcal{O}_k$ и множества \mathcal{B}_k . Благодаря этому были получены условия для оптимальности управления для $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$ и найдены двусторонние оценки функции Беллмана, на базе которых предлагается алгоритм для поиска субоптимального управления для задачи (3).

Рассмотрим стратегию $\underline{u}(\cdot) = (\underline{\gamma}_0(\cdot), \dots, \underline{\gamma}_N(\cdot))$, где $\underline{u}_k = \underline{\gamma}_k(x_k)$, которая на каждом шаге k максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения динамического программирования

$$\underline{\gamma}_k(x) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}),$$

$$(7) \quad \mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}, \quad k = \overline{0, N},$$

$$\mathcal{I}_{N+1} = \mathcal{F}.$$

Для предложенной стратегии из [21] следует, что стратегия является оптимальной при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, $k = \overline{0, N}$ и для любых $x_k \in \mathbb{R}^n$ при $k = N$, а также там приведено выражение для нахождения оценки точности субоптимальной стратегии $\underline{u}(\cdot)$. Воспользуемся теоретическими результатами настоящего раздела для решения задачи (3).

4. Решение задачи

4.1. Аналитическое решение для двух шагов по времени

Воспользуемся методом динамического программирования, найдем решение задач (4)–(6) для $k = N$ и положим $x = x_N$, $u = u_N$. Из выражений (5) и (6) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_N(x) &= \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M}[\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{I}_{\mathcal{F}}(f_N(x, u, \xi_N))] = \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} \{\mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{P}(\|\Lambda(Ax + Bu + C\xi_N)\|_{\infty} \leq \varphi)\}. \end{aligned}$$

Поскольку матрица Λ является диагональной, $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, и для всех $i = \overline{1, n-1}$ выполнено $e_i^T \Lambda b = e_i^T \Lambda c = 0$, где e_i – орт координатной оси, то последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_N(x) &= \max_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{F}}(x) \mathbf{I}_{(-\infty, \varphi]} \left(\max_{i=\overline{1, n-1}} |e_i^T \Lambda Ax| \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{P}(|e_n^T \Lambda(Ax + Bu + C\xi_N)| \leq \varphi) \right\} = \\ &= \begin{cases} \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(|e_n^T \Lambda(Ax + Bu + C\xi_N)| \leq \varphi), & x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}', \\ 0, & x \notin \mathcal{F} \cap \mathcal{F}', \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{F}' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n-1}} |e_i^T \Lambda Ax| \leq \varphi \right\}.$$

Рассмотрим задачу стохастического программирования в первой ветви последнего выражения. Целевая функция может быть преобразована следующим образом:

$$h = \text{sign} (e_n^T \Lambda C) (\varphi - e_n^T \Lambda A x - e_n^T \Lambda B u - e_n^T \Lambda C m_\xi),$$

$$\mathbf{P} (|e_n^T \Lambda (A x + B u + C \xi_N)| \leq \varphi) = \int_{-h}^h f_{\xi_N}^\circ (t) dt \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}},$$

где $f_{\xi_N}^\circ (t)$ — плотность распределения центрированной случайной величины $\xi_N = \xi_N - m_\xi$. Поскольку $f_{\xi_N}^\circ (t)$ является четной функцией, указанная задача стохастического программирования в соответствии с [24, с. 244] имеет детерминированный эквивалент, аналитическое решение которого $u^* = - (e_n^T \Lambda B)^{-1} (e_n^T \Lambda A x + e_n^T \Lambda C m_\xi)$. Подставляя найденное решение в целевую функцию, находим функцию Беллмана на шаге $k = N$:

$$(8) \quad \mathbf{B}_N (x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'} (x) \mathbf{P} \left(|e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right)$$

и решение задачи (3) при $k = N$

$$\gamma_N^* (x) = - (e_n^T \Lambda B)^{-1} (e_n^T \Lambda A x + e_n^T \Lambda C m_\xi).$$

Заметим, что функция (8) равна единице только в случае $|e_n^T \Lambda C \varepsilon| \leq \varphi$, поэтому поверхность уровня 1 функции Беллмана на шаге $k = N$ непуста только в случае выполнения этого неравенства и равна

$$\mathcal{I}_N = \begin{cases} \mathcal{F} \cap \mathcal{F}', & |e_n^T \Lambda C \varepsilon| \leq \varphi, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично с учетом $\mathbf{P} \left(|e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right) \neq 0$ находим выражение для поверхности уровня 0:

$$\mathcal{O}_N = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$$

Найдем теперь оптимальное управление и функцию Беллмана для $k = N - 1$. Используя (4) и (8), запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{N-1} (x) &= \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M} \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}} (x) \mathbf{B}_N (f_{N-1} (x, u, \xi_{N-1})) \right] = \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{M} \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}} (x) \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'} (f_{N-1} (x, u, \xi_{N-1})) \mathbf{P} \left(|e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right) \right] = \\ &= \max_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'} (x) \mathbf{P} \left(|e_n^T \Lambda C \xi_N| \leq \varphi \right) \mathbf{P} \left(\max \left\{ |e_n^T \Lambda (A x + B u + C \xi_{N-1})|, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \max_{i=1, n-1} |e_i^T \Lambda A (A x + B u + C \xi_{N-1})| \right\} \leq \varphi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\Lambda_N = (e_1^T \Lambda A, e_2^T \Lambda A, \dots, e_{n-1}^T \Lambda A, e_n^T \Lambda)^T, \quad \Lambda_N \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Тогда выражение для функции Беллмана при $k = N - 1$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} B_{N-1}(x) &= \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left(\left| e_n^T \Lambda C \xi_N \right| \leq \varphi \right) \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P} \left(\|\Lambda_N (Ax + Bu + C\xi_{N-1})\|_\infty \leq \varphi \right). \end{aligned}$$

Ниже в доказательстве утверждения 1 будет показано, что решение задачи стохастического программирования в правой части последнего выражения имеет вид

$$\gamma_{N-1}^*(x) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \mathbf{P} \left(\|\Lambda_N (Ax + Bu + C\xi_{N-1})\|_\infty \leq \varphi \right) = c_{N-1}(x) - \frac{c}{b} m_\xi,$$

а функция Беллмана равна

$$(9) \quad B_{N-1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left(\left| e_n^T \Lambda C \xi_N \right| \leq \varphi \right) \mathbf{P} \left(\left| \frac{c}{b} \xi_{N-1} \right| \leq r_{N-1}(x) \right),$$

где функции $c_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют вид

$$c_{N-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\overline{\varphi}_{N-1}(x) + \underline{\varphi}_{N-1}(x) \right), \quad r_{N-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\overline{\varphi}_{N-1}(x) - \underline{\varphi}_{N-1}(x) \right),$$

а функции $\overline{\varphi}_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\underline{\varphi}_{N-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{N-1}(x) &= \min_{i=1, n} \frac{\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B}, \\ \underline{\varphi}_{N-1}(x) &= \max_{i=1, n} \frac{-\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B}. \end{aligned}$$

Найдем поверхность уровня 1 функции Беллмана для $k = N - 1$:

$$\mathcal{I}_{N-1} = \begin{cases} \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{N-1}, & |e_n^T \Lambda C \varepsilon| \leq \varphi, \\ \emptyset & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{I}_{N-1} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| (e_n^T \Lambda_N B)^{-1} e_n^T \Lambda_N C \varepsilon \right| \leq r_{N-1}(x) \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2 \left| (e_n^T \Lambda_N B)^{-1} e_n^T \Lambda_N C \varepsilon \right| + \max_{i=1, n} \frac{-\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B} \leq \right. \\ &\quad \left. \leq \min_{i=1, n} \frac{\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| + \frac{-\text{sign}(e_j^T \Lambda_N B) \varphi - e_j^T \Lambda_N A x}{e_j^T \Lambda_N B} \leq \right. \\
&\leq \left. \frac{\text{sign}(e_i^T \Lambda_N B) \varphi - e_i^T \Lambda_N A x}{e_i^T \Lambda_N B}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \right\} = \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_{N-1} x\|_\infty \leq \varphi\},
\end{aligned}$$

где матрица $\Lambda_{N-1} \in \mathbb{R}^{n_{N-1} \times n}$, $n_{N-1} = n(n-1)/2$, составлена следующим образом:

$$\Lambda_{N-1} = \left(e_1^T \Lambda_{N-1}, e_2^T \Lambda_{N-1}, \dots, e_{n_{N-1}}^T \Lambda_{N-1} \right)^T,$$

p -я строка $e_p^T \Lambda_{N-1}$, $p = \overline{1, n_{N-1}}$, определяется выражением

$$e_p^T \Lambda_{N-1} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + \left(\text{sign}(b_{N-1}^i) + \text{sign}(b_{N-1}^j) \right) \varphi} \left(\frac{(a_{N-1}^i)^T}{b_{N-1}^i} - \frac{(a_{N-1}^j)^T}{b_{N-1}^j} \right),$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right|, \\ b_{N-1}^i = e_i^T \Lambda_N B, \\ (a_{N-1}^i)^T = e_i^T \Lambda_N A, \\ a_{N-1}^i \in \mathbb{R}^n, \quad b_{N-1}^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty), \end{cases}$$

а индексы i и j связаны с p системой

$$\begin{cases} p = (n-1)i + j - 1 \\ i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ i < j. \end{cases}$$

Поскольку для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $r_{N-1}(x) > 0$, то с учетом (9) поверхность уровня 0 функции Беллмана на шаге $k = N-1$ имеет вид

$$\mathcal{O}_{N-1} = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$$

Поиск функции Беллмана и оптимального управления на шагах $k = \overline{0, N-2}$ затруднен. Воспользуемся результатами раздела 3 и найдем субоптимальное управление $(\gamma_0(\cdot), \dots, \gamma_{N-2}(\cdot))$ и нижнюю границу функции Беллмана.

4.2. Субоптимальная стратегия на шагах $k = \overline{0, N-2}$

Воспользуемся теоремой 1 и найдем поверхность уровня 1 функции Беллмана, ее нижнюю границу и субоптимальное управление на шагах $k = \overline{0, N-2}$.

Утверждение 1. Пусть выполнено

$$(10) \quad \max_{k=0, \overline{N-2}} \max_{i \in \overline{1, n_{k+1} + n}} |b_k^i| \leq 2\varphi (\tilde{\varepsilon})^{-1},$$

где параметры n_{k+1} , b_k^i и $\tilde{\varepsilon}$ определены ниже. Тогда справедливы утверждения:

1. Поверхности уровня 1 функции Беллмана при $k = \overline{0, N-2}$ имеют вид

$$(11) \quad \mathcal{I}_k = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_k,$$

где

$$\Delta \mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_k x\|_\infty \leq \varphi\},$$

матрица $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$, где

$$\begin{cases} n_k = \frac{1}{2} (n_{k+1} + n) (n_{k+1} + n - 1), & k = \overline{0, N-2}, \\ n_{N-1} = \frac{1}{2} n (n - 1), \end{cases}$$

имеет вид $\Lambda_k = (e_1^\top \Lambda_k, e_2^\top \Lambda_k, \dots, e_{n_k}^\top \Lambda_k)^\top$, где каждая p -я строка, $p = \overline{1, n_k}$, определяется соотношениями

$$(12) \quad e_p^\top \Lambda_k = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_k^i) + \text{sign}(b_k^j)) \varphi} \left(\frac{(a_k^i)^\top}{b_k^i} - \frac{(a_k^j)^\top}{b_k^j} \right),$$

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right|, \\ b_k^i = e_i^\top \tilde{\Lambda}_{k+1} B, \\ (a_k^i)^\top = e_i^\top \tilde{\Lambda}_{k+1} A, \\ \tilde{\Lambda}_{k+1} = (\Lambda_{k+1}, e_1^\top \Lambda A, \dots, e_{n-1}^\top \Lambda A, e_n^\top \Lambda)^\top, \\ a_k^i \in \mathbb{R}^n, \quad b_k^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty), \quad \tilde{\Lambda}_k \in \mathbb{R}^{(n_k+n) \times n}, \end{cases}$$

причем индексы i и j связаны с p системой

$$(14) \quad \begin{cases} p = (i-1)(n_{k+1} + n) + j - 1, \\ i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\}, \\ i < j. \end{cases}$$

2. Решения задачи стохастического программирования (7) при $k = \overline{0, N-2}$ имеют вид

$$(15) \quad \underline{\gamma}_k(x) = c_k(x) - \frac{c}{b} m_\xi,$$

нижняя граница функции Беллмана равна

$$\underline{B}_k(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left(\left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_k(x) \right),$$

где функции $c_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют вид

$$c_k(x) = \frac{1}{2} \left(\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x) \right), \quad r_k(x) = \frac{1}{2} \left(\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x) \right)$$

и функции $\overline{\varphi}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\underline{\varphi}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_k(x) &= \min_{i=1, n_{k+1}+n} \frac{\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i}, \\ \underline{\varphi}_k(x) &= \max_{i=1, n_{k+1}+n} \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i}. \end{aligned}$$

3. Поверхности уровня 0 функции Беллмана при $k = \overline{0, N-2}$ имеют вид

$$(16) \quad \mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$$

4. Верхняя граница функции Беллмана при $k = \overline{0, N-2}$ равна

$$(17) \quad \overline{B}_k(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'}(x) \mathbf{P} \left(\left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_{N-1}(x) \right).$$

Доказательство утверждения 1 вынесено в Приложение.

Замечание. Если $b_k^i = 0$ или $b_k^j = 0$ из п. 1 утверждения 1, то вектор строка, определяемая выражением (12), исключается из Λ_k .

Как видно из п. 1 утверждения 1, условие (25) является необходимым для непустоты поверхностей уровня 1 функции Беллмана на шагах $k = \overline{0, N-2}$. Заметим, что из п. 1 следует, что число строк n_k матрицы Λ_k квадратично растет с каждым шагом обратного времени $k = \overline{0, N-2}$. Субоптимальное управление (31) представляет собой кусочно-линейную функцию состояния с максимальным числом линейных участков, равных n_k . Заметим также, что верхняя граница функции Беллмана для всех $k = \overline{0, N-2}$ с точностью до случайной величины ξ_k совпадает с функцией Беллмана на шаге $k = N-1$ (23), а поверхности уровня 0 стационарны.

5. Пример 1. Управление системой второго порядка

5.1. Описание системы

Рассмотрим систему (1) для случая $n = 2$, описывающую движение материальной точки

$$(18) \quad \begin{cases} r_{k+1} = r_k + v_k h, \\ v_{k+1} = v_k + u_k h + \xi_k, \\ r_0 = X, v_0 = V, \end{cases}$$

где r_k, v_k — координата положения и скорость в k -й момент времени, $\xi_k \sim U[m_\xi - \epsilon, m_\xi + \epsilon]$ — случайные возмущения на шаге k , для которых введены допущения, описанные в разделе 2, $k = \overline{0, N}$. Роль управляющего воздействия u_k выполняет ускорение.

Во введенных в разделе 2 обозначениях получаем

$$x_k = \begin{pmatrix} r_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и установим значения для параметров системы: $N = 6, h = 1, \varphi = 1, 2, \epsilon = 0, 7, m_\xi = 0$ и $\Lambda = \text{diag}[1, 1]$.

5.2. Поверхности уровня 1 функции Беллмана

Перед тем, как перейти к численному эксперименту, важно отметить, что для случая двумерной системы получается установить факт стационарности поверхностей уровня 1 функции Беллмана для шагов $k = \overline{0, N-2}$. Рассмотрим шаг $k = N$. Используя результаты раздела 4.1, находим $\Lambda_N = (e_1^\top \Lambda A, e_2^\top \Lambda)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Рассмотрим шаг $k = N - 1$. Используя результаты раздела 4.1, получаем $n_{N-1} = n(n-1)/2 = 1$ и $\Lambda_{N-1} = (e_1^\top \Lambda_{N-1})^\top \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, где

$$e_1^\top \Lambda_{N-1} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_{N-1}^1) + \text{sign}(b_{N-1}^2)) \varphi} \left(\frac{(a_{N-1}^1)^\top}{b_{N-1}^1} - \frac{(a_{N-1}^2)^\top}{b_{N-1}^2} \right),$$

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| (e_2^\top B)^{-1} e_2^\top C \varepsilon \right|, \\ b_{N-1}^i = e_i^\top \Lambda_N B, \\ (a_{N-1}^i)^\top = e_i^\top \Lambda_N A, \\ a_{N-1}^i \in \mathbb{R}^n, \quad b_{N-1}^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Упростим выражения для параметров a_{N-1}^i и b_{N-1}^i с учетом вида матрицы Λ_N и $e_2^\top \Lambda e_1^\top = 0, e_1^\top \Lambda e_2^\top = 0$:

$$\begin{aligned} (a_{N-1}^1)^\top &= e_1^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} A = e_1^\top \Lambda A A, & b_{N-1}^1 &= e_1^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} B = e_1^\top \Lambda A B, \\ (a_{N-1}^2)^\top &= e_2^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} A = e_2^\top \Lambda A, & b_{N-1}^2 &= e_2^\top \begin{pmatrix} e_1^\top \Lambda A \\ e_2^\top \Lambda \end{pmatrix} B = e_2^\top \Lambda B, \\ \frac{(a_{N-1}^1)^\top}{b_{N-1}^1} &= \frac{e_1^\top \Lambda A A}{e_1^\top \Lambda A B} = \frac{e_1^\top A A}{e_1^\top A B} = \frac{e_1^\top A A}{e_1^\top A e_2^\top B}, & \frac{(a_{N-1}^2)^\top}{b_{N-1}^2} &= \frac{e_2^\top \Lambda A}{e_2^\top \Lambda B} = \frac{e_2^\top A}{e_2^\top B}, \\ \frac{(a_{N-1}^1)^\top}{b_{N-1}^1} - \frac{(a_{N-1}^2)^\top}{b_{N-1}^2} &= \frac{e_1^\top A A}{e_1^\top A e_2^\top B} - \frac{e_2^\top A}{e_2^\top B} = \left(\frac{e_1^\top A}{e_1^\top A e_2^\top} - e_2^\top \right) \frac{A}{e_2^\top B} = \left(\frac{e_1^\top A e_1^\top}{e_1^\top A e_2^\top} \cdot \frac{1}{e_2^\top B} \right) e_1^\top A. \end{aligned}$$

Из этих выражений получаем выражение для матрицы Λ_{N-1} :

$$\Lambda_{N-1} = (\lambda_{N-1} e_1^T A)^T, \quad \lambda_{N-1} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_{N-1}^1) + \text{sign}(b_{N-1}^2)) \varphi} \left(\frac{e_1^T A e_1^T}{e_1^T A e_2^T} \frac{1}{e_2^T B} \right),$$

где $\lambda_{N-1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{N-1} \neq 0$. Таким образом, из утверждения 1 получаем, что множество $\Delta \mathcal{I}_{N-1}$ равно

$$\Delta \mathcal{I}_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|\Lambda_{N-1} x\|_\infty \leq \varphi\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |e_1^T \Lambda_{N-1} x| \leq \varphi\}.$$

Рассмотрим шаг $k = N - 2$. Воспользуемся утверждением 1 и найдем значения параметров управления

$$n_{N-2} = \frac{1}{2} (n_{N-1} + 2) (n_{N-1} + 1) = 3,$$

$$e_p^T \Lambda_{N-2} = \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_{N-1}^i) + \text{sign}(b_{N-1}^j)) \varphi} \left(\frac{(a_{N-2}^i)^T}{b_{N-2}^i} - \frac{(a_{N-2}^j)^T}{b_{N-2}^j} \right),$$

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = 2 \left| (e_2^T B)^{-1} e_2^T C \varepsilon \right|, \\ b_{N-2}^i = e_i^T \tilde{\Lambda}_{N-1} B, \\ (a_{N-2}^i)^T = e_i^T \tilde{\Lambda}_{N-1} A, \\ \tilde{\Lambda}_{N-1} = (\Lambda_{N-1}, e_1^T \Lambda A, e_2^T \Lambda)^T, \\ a_{N-2}^i \in \mathbb{R}^2, \quad b_{N-2}^i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\varepsilon} \in [0, +\infty), \quad \tilde{\Lambda}_{N-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \end{cases}$$

где индексы i и j связаны с p системой

$$\begin{cases} p = i \cdot 3 + j - 4, \\ i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ i < j. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что выполнены равенства

$$(19) \quad a_{N-2}^2 = a_{N-1}^1, \quad a_{N-2}^3 = a_{N-1}^2, \quad b_{N-2}^2 = b_{N-1}^1, \quad b_{N-2}^3 = b_{N-1}^2,$$

$$(20) \quad \frac{(a_{N-2}^1)^T}{b_{N-2}^1} = \frac{\lambda_{N-1} e_1^T A A}{\lambda_{N-1} e_1^T A B} = \frac{e_1^T A A}{e_1^T A B} = \frac{(a_{N-2}^2)^T}{b_{N-2}^2} = \frac{(a_{N-1}^1)^T}{b_{N-1}^1}.$$

С учетом (19) строка $p = 1$ ($i = 1, j = 2$) матрицы Λ_{N-2} оказывается нулевой, поскольку

$$\frac{(a_{N-2}^1)^T}{b_{N-2}^1} - \frac{(a_{N-2}^2)^T}{b_{N-2}^2} = (0, 0).$$

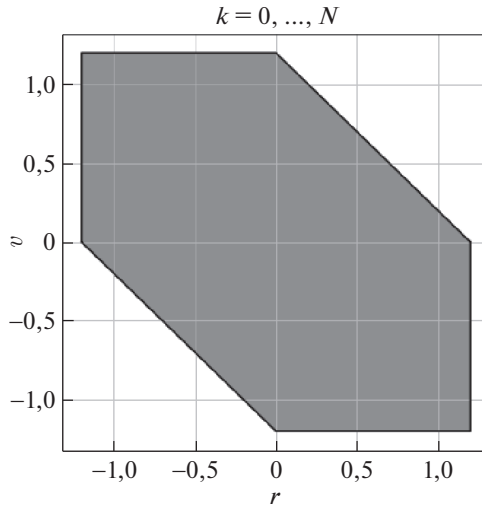


Рис. 1. Поверхность уровня 1 функции Беллмана при $k = 0, \dots, N$.

Аналогично получаем, что строки $p = 2$ ($i = 1, j = 3$) и $p = 3$ ($i = 2, j = 3$) матрицы Λ_{N-2} совпадают, так как выполнено

$$\frac{(a_{N-2}^1)^T}{b_{N-2}^1} - \frac{(a_{N-2}^3)^T}{b_{N-2}^3} = \frac{(a_{N-2}^2)^T}{b_{N-2}^2} - \frac{(a_{N-2}^3)^T}{b_{N-2}^3},$$

и равны $e_1^T \Lambda_{N-1}$ в силу (19) и (21). Таким образом матрица Λ_{N-2} принимает вид

$$\Lambda_{N-2} = ((0, 0), e_1^T \Lambda_{N-1}, e_1^T \Lambda_{N-1})^T,$$

откуда получаем, что множество $\Delta \mathcal{I}_{N-2}$ равно

$$\Delta \mathcal{I}_{N-2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|\Lambda_{N-2} x\|_\infty \leq \varphi\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |e_1^T \Lambda_{N-1} x| \leq \varphi\} = \Delta \mathcal{I}_{N-1}.$$

Отсюда по индукции заключаем, что для всех $k = \overline{0, N-2}$ выполнено

$$\Delta \mathcal{I}_k = \Delta \mathcal{I}_{N-1},$$

и, следовательно, для указанных шагов поверхности уровня 1 функции Беллмана совпадают. Используя описанный выше результат и п. 3 утверждения 1, получаем, что поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана для шагов $k = \overline{0, N-2}$ стационарны. В качестве примера на рис. 1 построена поверхность уровня 1 функции Беллмана для системы (18).

Далее рассмотрим численный эксперимент, используя результаты, приведенные в разделах 4.1 и 4.2, для системы (18) с целью анализа полученного решения.

5.3. Численный эксперимент

Положение системы в начальный момент времени не фиксируется, а генерируется из равномерного распределения. Для положения r_0 и скорости v_0 системы из распределения $U[-1, 1, 1, 1]$. Важно отметить, что носители случайных величин r_0 и v_0 подобраны таким образом, чтобы генерировать точки внутри и вне множества удержания. Выполним симуляцию $M = 100$ траекторий $r_k(i), v_k(i)$ и $u_k(i), k = \overline{0, N}, i = \overline{1, M}$ стохастической системы.

На рис. 2 отображена каждая траектория системы отдельно. Графики подтверждают, что удается удержать систему для случаев, когда начальное состояние системы находится внутри и вне множества удержания, причем начиная с шага 3 траектории системы проходят близко к началу координат. При этом заметно, что часть траекторий $r_k(i)$ и $v_k(i)$ до второго шага лежат вне множества удержания, но после все траектории лежат строго внутри множества удержания.

Для анализа управления, предложенного в разделе 4 (далее — вероятностного управления), сравним его с LQG (Linear quadratic Gaussian control) управлением с единичной матрицей Q и критериальной функцией $J(u(\cdot)) = M[\sum_{k=0}^{N+1} x_k^T x_k]$.

На левом графике рис. 3 изображены зависимости оценки вероятностного критерия от параметра φ при использовании вероятностного (пунктирная линия) и LQG (жирная линия) управлений. Для оценки критериальной функции выполняется симуляция $M = 1000$ траекторий $r_k(i), v_k(i)$ и $u_k(i), k = \overline{0, N}, i = \overline{1, M}$ стохастической системы при заданном φ и используется частотная оценка для критерия. Из графика видно, что при $\varphi \in [0, 1) \cup (1, 35, +\infty]$ значения критериальных функций совпадают, а на отрезке $[1, 1, 35]$ для основной части точек φ оценка вероятности удержания траекторий системы больше для вероятностного управления.

На правом графике рис. 3 изображены зависимости оценки критериальной функции $J(u(\cdot))$ от первой координаты начального состояния x_0^1 при использовании вероятностного (пунктирная линия) и LQG (жирная линия) управле-

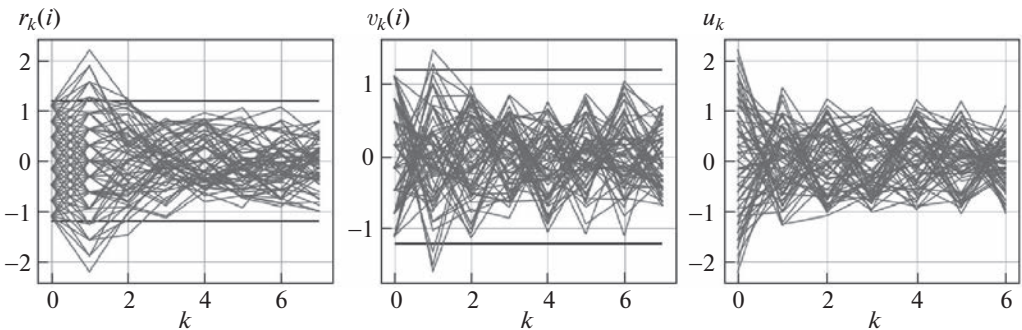


Рис. 2. Изменения траекторий системы $r_k(i), v_k(i)$ и $u_k(i)$.

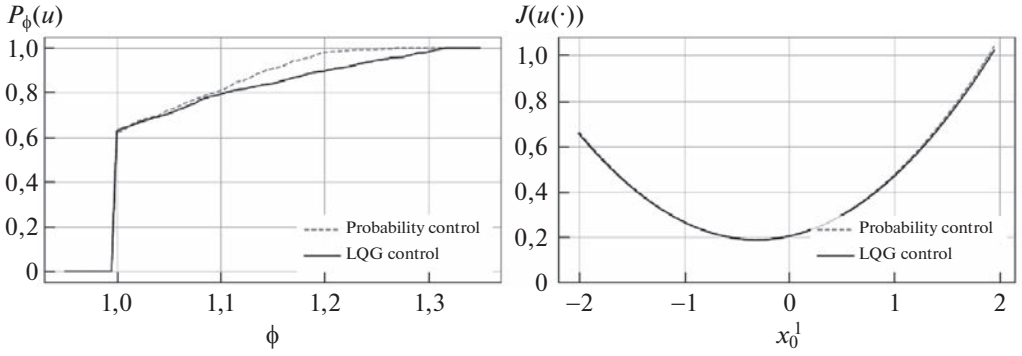


Рис. 3. Значение критериальных функций $P_\phi(u(\cdot))$ и $J(u(\cdot))$ для вероятностного и LQG управлений.

ний и фиксированной второй координате начальных условий x_0^2 на уровне 0,5. Из графика видно, что значения критериальных функций очень близки, но кривая для LQG критерия всегда проходит немного ниже кривой для вероятностного критерия.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального удержания линейной системы с дискретным временем, скалярным неограниченным управлением и случайным шумом в канале управления в заданной окрестности нуля по вероятностному критерию. Найдены аналитические выражения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана и ее двусторонних границ. На основе нижней границы получено явное соотношение для субоптимального управления, являющегося оптимальным, если состояния системы принадлежат поверхностям уровня 1 и 0. Эффективность найденного управления проверена на модельной задаче. Для частного случая системы второго порядка доказано свойство частичной стационарности поверхностей уровня 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Предположим, что на некотором шаге $k + 1$, где $k = \overline{0, N - 2}$, поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид $\mathcal{I}_{k+1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}$,

$$\Delta \mathcal{I}_{k+1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_{k+1}x\|_\infty \leq \varphi\},$$

где $\Lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_{k+1} \times n}$, а $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} \geq n$ — некоторое целое число. Воспользуемся п. 1 теоремы 1 и найдем поверхность уровня 1 на шаге k :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}([Ax + Bu + C\xi_k] \in \{\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}\}) = 1\} = \\ &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}([Ax + Bu + C\xi_k] \in \{\mathcal{F}'_n \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}\}) = 1\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}'_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |e_n^\top \Lambda x| \leq \varphi\}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_{k+1} &= \{\mathcal{F}'_n \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_{k+1}\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max \left\{ |e_n^\top \Lambda x|, \max_{i=1, n-1} |e_i^\top \Lambda A x|, \|\Lambda_{k+1} x\|_\infty \right\} \leq \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу $\tilde{\Lambda}_{k+1} \in \mathbb{R}^{(n_{k+1}+n) \times n}$,

$$\tilde{\Lambda}_{k+1} = (\Lambda_{k+1}, e_1^\top \Lambda A, \dots, e_{n-1}^\top \Lambda A, e_n^\top \Lambda)^\top.$$

Тогда справедливо

$$\tilde{\mathcal{I}}_{k+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} x \right\|_\infty \leq \varphi \right\},$$

а выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана на шаге k имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R} : \mathbf{P} \left(\left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = 1 \right\} = \\ &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_u \mathbf{P} \left(\left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу стохастического программирования

$$(II.1) \quad \mathbf{P} \left(\left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) \rightarrow \max_u,$$

которая позволит найти явный вид поверхности уровня 1, нижнюю границу функции Беллмана и стратегию (3) на шаге $k = \overline{0, N-2}$. Преобразуем целевую функцию (II.1) с учетом обозначений (12)–(14)

$$\begin{aligned} (II.2) \quad \mathbf{P} \left(\left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) &= \\ &= \mathbf{P} \left(\max_{i=1, n_{k+1}+n} |e_i^\top \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu + C\xi_k)| \leq \varphi \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(\max_{i=1, n_{k+1}+n} |(a_k^i)^\top x + b_k^i u + c_k^i \xi_k| \leq \varphi \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} \leq u + \frac{c_k^i}{b_k^i} \xi_k \leq \frac{\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i}, \right. \\ &\quad \left. \forall i = \overline{1, n_{k+1} + n} \right), \end{aligned}$$

где $c_k^i = e_i^T \tilde{\Lambda}_{k+1} C$. Заметим, что для любого $i = \overline{1, n_{k+1} + n}$ выполнено $c_k^i / b_k^i = e_n^T C / e_n^T B$. Тогда последнее выражение для целевой функции принимает вид

$$\begin{aligned}
 (\text{П.3}) \quad & \mathbf{P} \left(\underline{\varphi}_k(x) \leq u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k \leq \overline{\varphi}_k(x) \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left(-\frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)) + \frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x)) \leq u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k \leq \right. \\
 & \quad \left. \leq \frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) - \underline{\varphi}_k(x)) + \frac{1}{2} (\overline{\varphi}_k(x) + \underline{\varphi}_k(x)) \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left(\left| u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k - c_k(x) \right| \leq r_k(x) \right) = \\
 & = \mathbf{P} \left(\left| u + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} \xi_k^\circ + \frac{e_n^T C}{e_n^T B} m_\xi - c_k(x) \right| \leq r_k(x) \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку плотность распределения $f_{\xi_k^\circ}(t)$ центрированной случайной величины ξ_k° является четной функцией, то задача (П.1) имеет решение

$$(\text{П.4}) \quad u^* = \underline{\gamma}_k(x) = c_k(x) - \frac{c}{b} m_\xi,$$

а оптимальное значение целевой функции определяется выражением

$$(\text{П.5}) \quad \mathbf{P} \left(\left\| \tilde{\Lambda}_{k+1} (Ax + Bu^* + C\xi_k) \right\|_\infty \leq \varphi \right) = \mathbf{P} \left(\left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_k(x) \right).$$

Запишем преобразованный вид поверхности уровня 1 функции Беллмана на шаге k

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{P} \left(\left| \frac{c}{b} \xi_k^\circ \right| \leq r_k(x) \right) = 1 \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| \leq r_k(x) \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \underline{\varphi}_k(x) + 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| \leq \overline{\varphi}_k(x) \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, n_{k+1}} \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^T x}{b_k^i} + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left| \frac{c}{b} \varepsilon \right| \leq \min_{i=1, n_{k+1}+n} \frac{\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^T x}{b_k^i} \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\varepsilon} \leq \frac{\text{sign}(b_k^j) \varphi - (a_k^j)^\top x}{b_k^j}, \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\} \right\} = \\
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\varepsilon} \leq \frac{\text{sign}(b_k^j) \varphi - (a_k^j)^\top x}{b_k^j}, \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\} \right\}.
\end{aligned}$$

Видно, что для $\mathcal{I}_k \neq \emptyset$ необходимо, чтобы

$$(П.6) \quad \max_{i \in \{1, n_{k+1} + n\}} |b_k^i| \leq 2\varphi(\tilde{\varepsilon})^{-1}.$$

С учетом (П.4) получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k &= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{-\text{sign}(b_k^i) \varphi - (a_k^i)^\top x}{b_k^i} + \tilde{\varepsilon} \leq \right. \\
&\quad \left. \leq \frac{\text{sign}(b_k^j) \varphi - (a_k^j)^\top x}{b_k^j}, \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\}, i < j \right\} = \\
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{\varphi}{\tilde{\varepsilon} + (\text{sign}(b_k^i) + \text{sign}(b_k^j)) \varphi} \left(\frac{(a_k^i)^\top}{b_k^i} - \frac{(a_k^j)^\top}{b_k^j} \right) x \right| \leq \varphi, \right. \\
&\quad \left. \forall i, j \in \{1, \dots, n_{k+1} + n\}, i < j \right\} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|\Lambda_k x\|_\infty \leq \varphi\} = \\
&= \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap \Delta \mathcal{I}_k.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства п. 1 достаточно убедиться, что на шаге $k = N - 1$ поверхность уровня 1 функции Беллмана имеет вид (11), что следует из раздела 4.1.

П. 1 утверждения 1 доказан.

П. 2 утверждения 2 следует из (П.4) и (П.5).

Предположим, что на некотором шаге $k + 1$, $k = \overline{0, N - 2}$ поверхность уровня 0 функции Беллмана имеет вид $\mathcal{O}_{k+1} = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}'}$. Воспользуемся п. 2 теоремы 1 и найдем поверхность уровня 0 на шаге k

$$\begin{aligned}
(\text{П.7}) \quad \mathcal{O}_k &= \overline{\mathcal{F}} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\xi_k} \left([Ax + Bu + C\xi_k] \in \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}' \right) = 1 \right\} = \\
&= \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}' \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in U_k : \mathbf{P}_{\xi_k} \left([Ax + Bu + C\xi_k] \in \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}'_n \right) = 1 \right\},
\end{aligned}$$

где $\overline{\mathcal{F}}'_n = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}'_n$ (см. доказательство п.1 утверждения 1). Нетрудно видеть, что

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\xi_k} \left([Ax + Bu + C\xi_k] \in \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}'_n \right) = 1 \right\} = \emptyset,$$

откуда с учетом (П.7) заключаем, что $\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}} \cup \overline{\mathcal{F}}'$, и поскольку данное равенство выполнено для $k = N - 2$, то оно выполнено и для всех $k = \overline{0, N - 2}$.

П.3 утверждения 1 доказан.

П.4 утверждения 1 следует из (9), (10) и п.3 утверждения 1.

Утверждение 1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшиев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Lesser K., Oishi M., Erwin R.* Stochastic reachability for control of spacecraft relative motion // Proc. IEEE Conf. Dec. and Ctrl. 2013. P. 4705–4712.
3. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.
Kan Y.S. Control Optimization by the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 6. P. 746–757.
4. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления стохастическими дискретными системами по критерию вероятности // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.
5. *Кузьмин В.П., Ярошевский В.А.* Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях. М.: Наука, 1995.
6. *Soudjani S., Abate A.* Probabilistic reach-avoid computation for partially degenerate stochastic processes // IEEE Trans. Autom. Ctrl. IEEE Trans. Autom. Ctrl., 2014. V. 59. No. 2. P. 528–534.
7. *Summers S., Lygeros J.* Verification of discrete time stochastic hybrid systems: A stochastic reach-avoid decision problem // Automatica. 2010. V. 46. No. 12. P. 1951–1961.
8. *Vinod A., Oishi M.* Scalable underapproximation for the stochastic reach-avoid problem for highdimensional LTI systems using Fourier transforms // IEEE Lett.-Contr. Syst. Soc. 2017. V. 1. No. 2. P. 316–321.
9. *Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M.* Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM J. Optimization. 2015. V. 25. No. 3. P. 1411–1440.

10. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex constrained semialgebraic volume optimization: Application in systems and control. arXiv:1701.08910, 2017.
11. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ.* 2004. №2. С. 179–197.
Grigor'ev P.V., Kan Y.S. Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
12. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // *АиТ.* 2013. № 5. С. 114–136.
Bunto T.V., Kan Y.S. Quantile criterion-based control of the securities portfolio with a nonzero ruin probability // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 5. P. 811–828.
13. *Maidens J.N., Kaynama S., Mitchell I.M., Oishi M.M., Dumont G.A.* Lagrangian methods for approximating the viability kernel in high-dimensional systems // *Automatica.* 2013. V. 49. No. 7. P. 2017–2029.
14. *Kariotoglou N., Raimondo D.M., Summers S., Lygeros J.* Astochastic reachability framework for autonomous surveillance with pan-tilt-zoom cameras // *Proc. European Ctrl. Conf.* 2011. P. 1411–1416.
15. *Doyen L., De Lara M.* Stochastic viability and dynamic programming // *Systems and Control Letters.* 2010. V. 59. No. 10. P. 629–634.
16. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем // *АиТ.* 2020. № 4. С. 21–36.
17. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // *АиТ.* 2018. № 2. С. 3–18.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.
18. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Усиленная оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления с вероятностным критерием качества // *АиТ.* 2019. № 4. С. 53–69.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Refined Estimation of the Bellman Function for Stochastic Optimal Control Problems with Probabilistic Performance Criterion // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 90. No. 4. P. 634–647.
19. *Vinod A.P., Oishi M.M.* Stochastic reachability of a target tube: Theory and computation // *Automatica.* 2021. V. 125.
20. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
21. *Азанов В.М., Тарасов А.Н.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задаче оптимального удержания траекторий дискретной стохастической системы в трубке по критерию вероятности // *АиТ.* 2020. № 10. С. 93–117.
Azanov V.M., Tarasov A.N. Probabilistic criterion-based optimal retention of trajectories of a discrete-time stochastic system in a given tube: bilateral estimation of the Bellman function // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. P. 1819–1839.
22. *Konrad Schmudgen.* The moment problem. Vol. 9. Springer, 2017.

23. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Об оптимальном удержании траектории дискретной стохастической системы в трубке // *АиТ.* 2019. № 1. С. 38–53.
Azanov V.M., Kan Yu.S. On Optimal Retention of the Trajectory of Discrete Stochastic System in Tube // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 1. P. 30–42.
24. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрустальевым.

Поступила в редакцию 24.02.2022

После доработки 16.05.2022

Принята к публикации 28.07.2022

Управление в технических системах

© 2023 г. В.В. ХУТОРЦЕВ, д-р техн. наук (hvv.56@mail.ru)
(Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи)

УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ОБЪЕКТОВ НАБЛЮДЕНИЯ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА В МНОГОКАНАЛЬНОЙ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрена задача поиска объектов наблюдения для случая, когда последовательность их появления удовлетворяет закономерностям пространственно-временного пуассоновского потока. Ее решение получено без учета ограничений, связанных с существенным превышением интенсивности поисковых усилий над интенсивностью потока объектов наблюдения. В качестве математической модели, используемой для оптимизации поиска, рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику изменения математического ожидания числа объектов, присутствующих в подобластях области обзора поисковой системы, но до сих пор не обнаруженных. Определена процедура оптимизации распределения интенсивностей поисковых усилий в каналах поисковой системы для динамического и установившегося режимов поиска. Приведены примеры.

Ключевые слова: поиск объектов наблюдения, пространственно-временной пуассоновский поток, распределение интенсивностей поиска в каналах поисковой системы, система дифференциальных уравнений Колмогорова.

DOI: 10.31857/S000523102301004X, **EDN:** LUKGVX

1. Введение

Одной из важных разновидностей общего класса задач управления измерительными процессами [1, 2] является класс задач управления поиском [3–6]. Рациональное распределение поисковых усилий в поисковой системе (ПС) обеспечивает сокращение необнаруженных объектов наблюдения (ОН) в зоне обзора ПС, уменьшение времени поиска, повышение достоверности обнаружения ОН и т.д.

Как правило, задача поиска рассматривается исходя из предположения о том, что в зоне обзора ПС находится один или несколько ОН и их количество не меняется [3–6]. Такое допущение является достаточно жестким, поскольку для ряда практических задач число ОН является произвольным, а сами объекты могут появляться последовательно, например в соответствии с закономерностями пространственно-временного случайного потока.

Исследованию задачи поиска в последнем случае посвящены работы [7–9]. Их общей чертой является допущение о существенном превышении интенсивности поисковых усилий ПС над интенсивностью пуассоновского потока ОН. Указанное допущение выполняется для ПС в условиях высокого энергетического отношения сигнал-шум. Оно позволяет приближенно свести математическую модель эволюции во времени вероятностных характеристик поиска в виде бесконечномерной системы дифференциальных уравнений Колмогорова к математической модели дискретного марковского процесса с двумя состояниями, описываемой двумерной системой дифференциальных уравнений.

Для ряда практических случаев, когда энергетическое отношение сигнал-шум оказывается недостаточным, допущение о существенном превышении интенсивности поисковых усилий ПС над интенсивностью пуассоновского потока ОН может не выполняться. Указанная ситуация, в частности, возникает, когда при заданной интенсивности потока ОН в области обзора невозможно обеспечить необходимую интенсивность поисковых усилий. Например, для задачи активного радиолокационного поиска при фиксированной мощности зондирующего сигнала это может быть обусловлено большим расстоянием между областью обзора и приемным пунктом ПС либо малыми значениями эффективных поверхностей рассеивания объектов наблюдения из потока. Снижение интенсивности поисковых усилий при заданной интенсивности пуассоновского потока ОН влечет за собой увеличение условной вероятности пропуска ОН [3] и, как следствие, рост вероятности присутствия в области обзора не одного, а сразу нескольких необнаруженных ОН, что делает неправильным применение подходов, рассмотренных в [7–9].

В связи с этим актуальным становится вопрос определения управления распределением поисковых усилий в многоканальных ПС параллельного типа при интенсивностях пуассоновского потока появления ОН в области обзора поисковой системы как сопоставимых с интенсивностью поиска, так и превышающих ее по величине.

2. Анализ структуры математической модели поиска.

Постановка задачи

Обозначим через $X \in R^n$ ($0 < n \leq 3$) область обзора поисковой системы с введенной в ней декартовой системой координат $\{x_1, \dots, x_n\}$. Предположим, что объекты наблюдения появляются в X в соответствии с закономерностями пространственно-временного пуассоновского потока φ [10–13].

Рассмотрим многоканальную ПС, включающую I каналов, каждый из которых обслуживает свою часть области обзора X , которой соответствует подмножество X_i , $i = \overline{1, I}$.

Каждый из каналов обслуживает свою часть области обзора X , которой соответствует подобласть X_i , $i = \overline{1, I}$. При этом будем полагать, что $X = \bigcup_i X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, I}$, $i \neq j$. Тогда любые два потока, определяемые

из φ как

$$(2.1) \quad \varphi_i(t) = \varphi(X_i, t), \quad \varphi_j(t) = \varphi(X_j, t), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, I}, \quad i \neq j,$$

являются пуассоновскими и независимыми.

Временной пуассоновский поток, соответствующий X , может быть определен через (2.1) как

$$(2.2) \quad \varphi(t) = \varphi(X, t) = \sum_i \varphi(X_i, t).$$

Обозначим плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока через $\nu(x, t)$, где $\nu(x, t)$ — неотрицательная измеримая на X функция. Тогда меры интенсивностей, или интенсивности $\xi_i(t)$, временных пуассоновских потоков $\varphi_i(t) = \varphi(X_i, t)$, порождаемых пространственно-временным пуассоновским потоком φ в X_i , $i = \overline{1, I}$, могут быть определены через интеграл по мере Лебега от $\nu(x, t)$ [10–13]

$$(2.3) \quad \xi_i(t) = \int_{X_i} \nu(x, t) dx, \quad i = \overline{1, I}.$$

Для интегрального потока $\varphi(t) = \varphi(X, t)$ соответственно получим

$$(2.4) \quad \xi(t) = \int_X \nu(x, t) dx = \sum_i \int_{X_i} \nu(x, t) dx = \sum_i \xi_i(t).$$

Здесь $dx = \prod_{q=1}^n dx_q$, $0 < n \leq 3$.

В соответствии с (2.3), (2.4) меры интенсивностей, или интенсивности $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $\xi(t)$, являются известными детерминированными функциями, в частности могут быть и константами, и характеризуют временные пуассоновские потоки $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $\varphi(t)$ как потоки с переменными параметрами [14].

Вероятность появления очередного ОН в подобласти X_i в течение времени $[t, t + \Delta t]$ определяется как $\xi_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ [7–9], где $o(\Delta t)$ — остаток порядка малости выше, чем Δt .

Пусть i -й канал ПС обеспечивает интенсивность поиска $\lambda_i(t) \geq 0$, $t \in [0, \bar{t}]$, где \bar{t} — длительность интервала времени поиска. Это означает, что если в X_i присутствует k ОН, то вероятность того, что в течение времени $[t, t + \Delta t]$ хотя бы один из них будет найден, составляет $k\lambda_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ [3, 7]. Интенсивности поиска $\lambda_i(t)$ в подобластях X_i , $i = \overline{1, I}$ полагаются неизвестными детерминированными функциями, подлежащими определению в результате решения оптимизационной задачи.

Задача поисковой системы применительно к подобласти X_i может быть интерпретирована как задача ее обслуживания при потоке ОН, образующем нагрузку пуассоновского типа с мерой интенсивности $\xi_i(t)$. Для описания задач

этого класса, как правило, используется математический аппарат процессов размножения и гибели [10–12, 14–17]. В качестве математической модели таких процессов служит система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова относительно вероятностей пребывания процесса в каждом из возможных состояний, образующая задачу Коши с некоторыми начальными условиями [14–16]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{P}_{i0} &= -\xi_i(t)P_{i0} + \lambda_i(t)P_{i1}, \\ \dot{P}_{ik} &= -(\xi_i(t) + k\lambda_i(t))P_{ik} + \xi_i(t)P_{ik-1} + (k+1)\lambda_i(t)P_{ik+1}, \\ k &= 1, 2, \dots, \quad P_{i0}(0) = 1, \quad P_{ik}(0) = 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in [0, \bar{t}], \end{aligned}$$

где P_{i0} — вероятность отсутствия необнаруженных ОН в X_i ; P_{ik} — вероятность нахождения в X_i k необнаруженных ОН; функции $\{\lambda_i(t), \xi_i(t), i = \overline{1, I}\}$ на интервале $[0, \bar{t}]$ полагаются непрерывными и ограниченными.

Задача Коши (2.5) отражает физический смысл задачи поиска, осуществляемого последовательно во времени по мере появления ОН в области обзора X . В силу линейной зависимости коэффициентов при P_{ik} от k решение (2.5) в соответствии с [15, 17] существует, единственно и обеспечивает выполнение требования регулярности $\sum_k P_{ik} = 1$.

Необходимо отметить, что решение системы (2.5) при $t \in [0, \bar{t}]$, в том числе и при $t = \bar{t}$, для каждого из $k = 1, 2, \dots$ определяется значениями функций $\xi_i(t)$, $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, I}$ и может быть получено с помощью метода производящей функции [14, 15, 17]. В соответствии с общими закономерностями пуассоновских процессов и процессов, ими порождаемых [10–12, 14, 15], при $k \rightarrow \infty$ $P_{ik}(t) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, I} \forall t \in [0, \bar{t}]$.

Использование математических моделей (2.5) для поиска закона управления распределением поисковых усилий в ПС является затруднительным в силу их бесконечной размерности.

Проведем преобразование систем дифференциальных уравнений Колмогорова (2.5) (Приложение 1). В результате получим

$$(2.6) \quad \dot{\mu} = -\lambda(t) \circ \mu + \xi(t), \quad \mu(0) = 0, \quad t \in [0, \bar{t}],$$

где $\mu, \lambda, \xi \in R^I$; $\mu^T = [\mu_1 \dots \mu_I]$; $\lambda(t)^T = [\lambda_1(t) \dots \lambda_I(t)]$; $\xi(t)^T = [\xi_1(t) \dots \xi_I(t)]$; $\mu_i = \sum_k k P_{ik}$ — математическое ожидание числа необнаруженных ОН, находящихся в X_i , $i = \overline{1, I}$; буква T означает операцию транспонирования; операция \circ обозначает произведение Адамара.

Из (2.6) очевидно следует, что $\mu \geq 0 \forall t \in [0, \bar{t}]$. Векторное уравнение (2.6) описывает математическую модель фиктивной динамической системы [1], характеризующей эволюцию во времени математических ожиданий количества необнаруженных ОН, находящихся в подобластях X_i области обзора X . Уравнение (2.6) для каждого значения $i = \overline{1, I}$ является одномерной сверткой бесконечномерной системы (2.5).

Определим критерий качества функционирования поисковой системы соотношением

$$(2.7) \quad \Upsilon = A^T \mu(\bar{t}) + B \int_0^{\bar{t}} \lambda(t)^T \lambda(t) dt \rightarrow \min_{\lambda},$$

где $A^T = [a_1 \dots a_I]$; $a_i > 0$, $i = \overline{1, I}$, $B \in R^1 > 0$ — весовые коэффициенты.

Критерий (2.7) предполагает минимизацию в конечный момент наблюдения двух компонент. Первая компонента характеризует взвешенное суммарное математическое ожидание числа необнаруженных ОН, находящихся в области обзора X , вторая — соответствует аналогу энергетических затрат ПС на проведение поиска.

Поставим задачу определить такое распределение интенсивностей поисковых усилий $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $t \in [0, \bar{t}]$ в (2.6) между каналами многоканальной поисковой системы, обслуживающими непересекающиеся подобласти X_i , $i = \overline{1, I}$ области обзора X , которое бы удовлетворяло критерию (2.7).

3. Синтез управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной поисковой системе

Для синтеза управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока φ в многоканальной поисковой системе в соответствии с (2.6), (2.7) составим гамильтониан

$$(3.1) \quad H = \psi^T (-\lambda \circ \mu + \xi) + B \lambda^T \lambda,$$

где $\psi = \psi(t) \in R^I$ — вектор сопряженных переменных.

Из (3.1) получим систему уравнений относительно $\psi(t)$:

$$(3.2) \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial \mu} H = \psi \circ \lambda, \quad t \in [0, \bar{t}].$$

С учетом (2.7) краевые условия для (3.2) можно представить в виде

$$(3.3) \quad \psi(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \mu(\bar{t})} A^T \mu(\bar{t}) = A.$$

Из условия минимума гамильтониана по λ получим

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} H = -\psi \circ \mu + 2B\lambda = 0.$$

С учетом (3.4) определим структуру оптимального управления

$$(3.5) \quad \lambda = \frac{1}{2B} \psi \circ \mu.$$

Из (2.6), (3.2), (3.3) очевидно следует, что $\lambda \geq 0 \forall t \in [0, \bar{t}]$.

Совокупность соотношений (2.6), (3.2), (3.3), (3.5) образует двухточечную краевую задачу, решение которой является весьма затруднительным. В связи с этим для определения оптимального управления поиском можно воспользоваться методом последовательных приближений Крылова–Черноусько [1, 18].

Пусть на q -м шаге итерационной процедуры сформирован закон управления поиском λ^q .

Метод последовательных приближений предполагает выполнение следующих операций.

1. Проводится решение уравнений (2.6) в прямом времени и формируются значения вектора переменных μ^q , соответствующих управлению λ^q .

2. Проводится решение системы уравнений (3.2) в обратном времени с конечными условиями (3.3) и определяются значения вектора сопряженных переменных $\psi^q(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, соответствующих управлению λ^q и вектору переменных μ^q .

3. По полученным значениям векторов $\mu^q(t)$, $\psi^q(t)$ в соответствии с (3.5) рассчитывается промежуточное значение вектора управлений, соответствующее $(q + 1)$ -му шагу итерационной процедуры

$$(3.6) \quad \tilde{\lambda}^{q+1}(t) = \frac{1}{2B} \psi^q(t) \circ \mu^q(t), \quad t \in [0, \bar{t}].$$

4. Исходя из принципа частичного обновления управления [1, 18] по (3.6) с учетом значений вектора управлений λ^q , полученного на предыдущем шаге, проводится расчет его $(q + 1)$ -й итерации

$$(3.7) \quad \{\lambda^{q+1}(t)\} = \{\tilde{\lambda}^{q+1}(t)\}_{\varepsilon^q} \cup \{\lambda^q(t)\}_{1-\varepsilon^q}, \quad t \in [0, \bar{t}],$$

где $\varepsilon^q \in (0, 1)$.

Параметр ε^q обозначает степень обновления закона управления поиском $\lambda^q(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$. Он определяется из условия минимума целевой функции критерия (2.7) на соответствующем шаге итерационной процедуры.

Далее в качестве исходного для $(q + 2)$ -го шага используется управление $\lambda^{q+1}(t)$, и итерационная процедура 1–4 повторяется.

Отметим, что для начального шага итерационной процедуры ($q = 0$) начальный закон управления λ^0 выбирается из множества допустимых законов управления, задаваемых структурой (3.5).

Оптимальное управление определяется соотношением

$$(3.8) \quad \lambda_{\text{оп}}(t) = \lim_{q \rightarrow \infty} \lambda^q(t), \quad t \in [0, \bar{t}].$$

На практике, как правило, ограничиваются конечным числом итераций $q \leq Q$, где Q — номер шага, после которого вариации целевой функции критерия (2.7) становятся незначительными. При этом полагают, что $\lambda_{\text{оп}}(t) \simeq \lambda^Q(t)$.

4. Пример синтеза закона управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока для двухканальной поисковой системы

Пусть

$$(4.1) \quad I = 2, \quad A^T = [1 \ 1], \quad B = 0,1, \quad \bar{t} = 1, \quad \xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 1.$$

Здесь и далее переменные представлены в безразмерных единицах. Различные значения интенсивностей потоков ξ_1 и ξ_2 в подобластях X_1, X_2 области обзора X , соответствующих каналам двухканальной поисковой системы, выбраны для иллюстрации влияния их величин на структуру закона управления поиском.

С учетом (4.1) конкретизируем математические модели (2.5). В результате получим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{P}_{10} &= -2P_{10} + \lambda_1(t)P_{11}, \\ \dot{P}_{1k} &= -(2 + k\lambda_1(t))P_{1k} + 2P_{1k-1} + (k+1)\lambda_1(t)P_{1k+1}, \\ \dot{P}_{20} &= -P_{20} + \lambda_2(t)P_{21}, \\ \dot{P}_{2k} &= -(1 + k\lambda_2(t))P_{2k} + P_{2k-1} + (k+1)\lambda_2(t)P_{2k+1}, \\ k &= 1, 2, \dots, \quad P_{10}(0) = P_{20}(0) = 1, \quad P_{1k}(0) = P_{2k}(0) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

В соответствии с (2.6) из (4.2) следуют уравнения эволюции во времени математических ожиданий числа необнаруженных ОН в подобластях X_1, X_2 области обзора X :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= -\lambda_1(t)\mu_1 + 2, \quad \mu_1(0) = 0, \\ \dot{\mu}_2 &= -\lambda_2(t)\mu_2 + 1, \quad \mu_2(0) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Конкретизируя критерий качества (2.7), получим

$$(4.4) \quad \Upsilon = \mu_1(\bar{t}) + \mu_2(\bar{t}) + B \int_0^{\bar{t}} (\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) dt \rightarrow \min_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Гамильтониан в соответствии с (3.1) определяется соотношением

$$(4.5) \quad \mathbb{H} = \psi_1(-\lambda_1\mu_1 + 2) + \psi_2(-\lambda_2\mu_2 + 1) + B(\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Из (3.2), (3.3), (4.3), (4.5) следуют уравнения для сопряженных переменных

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_1\lambda_1, \quad \psi_1(\bar{t}) = 1, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_2\lambda_2, \quad \psi_2(\bar{t}) = 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

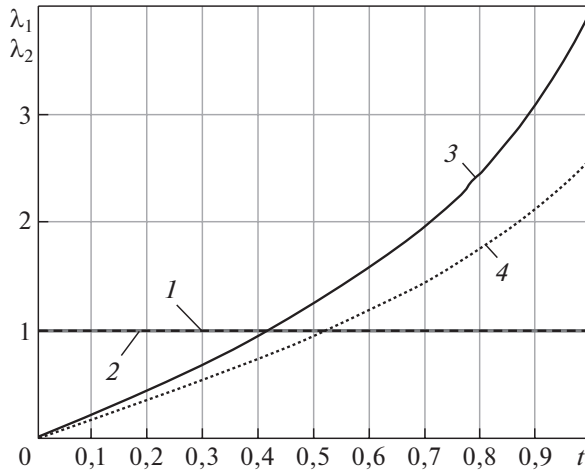


Рис. 1.

Из (3.5) следует структура закона управления поиском

$$(4.7) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2B} \psi_1 \mu_1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2B} \psi_2 \mu_2.$$

При реализации процедуры метода последовательных приближений в качестве начального приближения для подобластей X_1 и X_2 области обзора ПС X использовалось равномерное распределение интенсивности поиска на интервале $[0, 1]$ (прямые 1, 2, рис. 1)

$$(4.8) \quad \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \begin{cases} f = 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

На каждом шаге итерационной процедуры в соответствии с п. 4 алгоритма последовательных приближений подбиралось оптимальное значение параметра $\varepsilon^q \in (0, 1)$, связанного в соответствии с (3.7) с частичным обновлением управления.

График зависимости целевой функции $\Upsilon(q)$ критерия (4.4) от номера итерации при $f = 1$ представлен на рис. 2 (кривая 1).

На этом же рисунке изображены зависимости целевой функции от номера итерации при других начальных приближениях закона управления поиском, соответствующих $f = 0,75$ (кривая 2) и $f = 0,5$ (кривая 3).

Представленные графики имеют кусочно-линейную структуру и иллюстрируют наибольший вклад первого шага итерационной процедуры в уменьшение значений целевой функции Υ .

Во всех случаях вариации значений Υ становятся несущественными уже при $q > 2$. Соответствующие $q = Q = 3$, $f = 1$ законы управления поиском для подобластей $X_1 - \lambda_1(t)$ и $X_2 - \lambda_2(t)$ области обзора X двухканальной

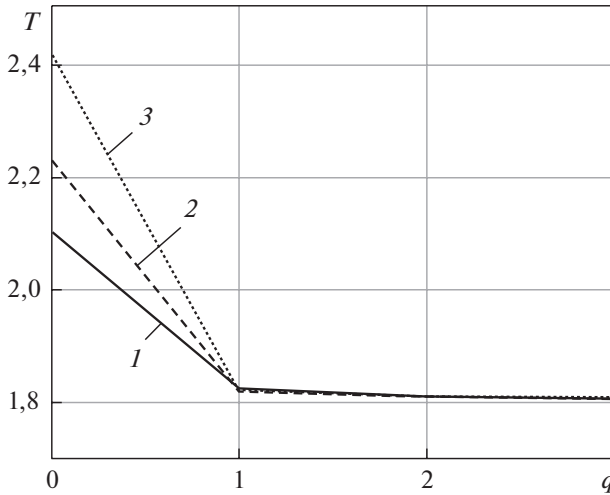


Рис. 2.

ПС представлены на рис. 1 (соответственно кривые 3, 4). Необходимо отметить, что аналогичные законы управления, полученные при $f = 0,75$, $f = 0,5$, практически не отличаются. Из графиков следует, что интенсивность поисковых усилий для подобласти X_1 выше, чем для подобласти X_2 . Это связано с тем, что в соответствии с (4.1) мера интенсивности ξ_1 пуассоновского потока $\varphi_1(t) = \varphi(X_1, t)$ больше, чем мера интенсивности ξ_2 пуассоновского потока $\varphi_2(t) = \varphi(X_2, t)$.

Отметим, что в условиях примера выигрыш от оптимизации закона управления поиском, определяемый в соответствии с соотношением $\delta = \frac{\Upsilon_0 - \Upsilon_{\text{оп}}}{\Upsilon_0}$, составляет $\delta \simeq 0,14$ ($f = 1$), $\delta \simeq 0,19$ ($f = 0,75$), $\delta \simeq 0,25$ ($f = 0,5$).

5. Оптимизация распределения интенсивностей поисковых усилий между каналами многоканальной поисковой системы при установившемся режиме поиска объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока

При решении ряда практических задач функционирование ПС в процессе поиска объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока осуществляется в установившемся режиме. В частности, к ним может быть отнесена задача поиска и обнаружения космического мусора, поток частиц которого может рассматриваться как стационарный пуассоновский поток [19].

Пусть плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока φ не зависит от времени $\nu(x, t) = \nu(x)$. Тогда для подобластей X_i , $i = \overline{1, I}$ области обзора X меры интенсивностей пуассоновских потоков $\varphi_i(t) = \varphi(X_i, t)$, $i = \overline{1, I}$ не будут зависеть от времени:

$$(5.1) \quad \xi_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Определим для интенсивностей поисковых усилий в каналах ПС следующие ограничения:

$$(5.2) \quad \lambda_i = \text{const}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, I},$$

$$(5.3) \quad \|\lambda\|_1 = \Lambda,$$

где $\|\cdot\|_1$ с учетом (5.2) означает l_1 -норму вектора λ на C^I [20].

Тогда математическая модель (2.6) для математического ожидания числа необнаруженных объектов наблюдения в установившемся режиме ($\dot{\mu} = 0$) может быть представлена в виде

$$(5.4) \quad \lambda \circ \mu = \xi.$$

Определим с учетом ограничения (5.3) критерий качества распределения поисковых усилий в каналах ПС

$$(5.5) \quad \Upsilon = A^T \mu + \eta(\|\lambda\|_1 - \Lambda) \rightarrow \min_{\lambda},$$

где $\eta \in R^1$ — неопределенный множитель Лагранжа.

Решение оптимизационной задачи (5.4), (5.5) приводит к следующему результату:

$$(5.6) \quad \lambda_{\text{оп}} = sV,$$

где

$$s = \frac{\Lambda}{\sum_i \sqrt{a_i \xi_i}}, \quad V^T = [\sqrt{a_1 \xi_1} \dots \sqrt{a_I \xi_I}].$$

Проведем сравнение полученного оптимального распределения поисковых усилий (5.6) в ПС с равномерным законом управления поиском

$$(5.7) \quad \lambda_{\text{равн}} = \frac{\Lambda}{I} E_I,$$

где $(E_I)^T = [1 \dots 1] \in R^I$ — единичный вектор.

Пусть $A = E_I$. Тогда математическое ожидание числа необнаруженных ОН, находящихся в области обзора X , для (5.6) составляет

$$(5.8) \quad \mu_{\text{оп}} = \sum_i \mu_{\text{оп}i} = \frac{\left(\sum_i \sqrt{\xi_i}\right)^2}{\Lambda},$$

где

$$\mu_{\text{оп}i} = \frac{\sqrt{\xi_i} \sum_i \sqrt{\xi_i}}{\Lambda}.$$

При равномерном распределении поисковых усилий (5.7) для аналогичной характеристики соответственно получим

$$(5.9) \quad \mu_{\text{равн}} = \mu_{\text{равн}i} = \frac{I \sum_i \xi_i}{\Lambda},$$

где

$$\mu_{\text{равн}i} = \frac{I \xi_i}{\Lambda}.$$

Относительный выигрыш определяется как $\delta = \frac{\mu_{\text{равн}} - \mu_{\text{оп}}}{\mu_{\text{равн}}}$ или

$$(5.10) \quad \delta = 1 - \frac{\left(\sum_i \sqrt{\xi_i} \right)^2}{I \sum_i \xi_i}.$$

Можно показать (Приложение 2), что при любых $\xi_i > 0$, $i = \overline{1, I}$

$$(5.11) \quad \frac{\left(\sum_i \sqrt{\xi_i} \right)^2}{I \sum_i \xi_i} \leq 1,$$

где знак равенства, очевидно, имеет место при одинаковых значениях интенсивностей $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_I$.

Тогда, например, при экспоненциальном распределении мер интенсивностей ξ_i пуассоновских потоков $\varphi_i(t)$ в X_i , $i = \overline{1, I}$, задаваемом соотношением $\xi_i = \exp \left\{ -\frac{(i-m)^2}{D} \right\}$, где $m = 50$, $D = 500$, $I = 100$, выигрыш от оптимизации составляет $\delta = 0,246$.

6. Заключение

Рассмотренный подход к управлению поиском ОН из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной поисковой системе не предполагает использование ограничений о существенном превышении интенсивности поисковых усилий ПС над интенсивностью пуассоновского потока объектов наблюдения.

В его основе лежат математические модели эволюции во времени вероятностных характеристик пуассоновских потоков в подобластях области обзора, обслуживаемых каналами ПС. Каждая из указанных моделей, представляющая из себя бесконечную систему дифференциальных уравнений Колмогорова, сведена к скалярному дифференциальному уравнению, описывающему динамику изменения математического ожидания числа необнаруженных ОН, находящихся в соответствующей подобласти области обзора.

Размерность оптимизируемой фиктивной динамической системы равна количеству каналов ПС. В силу высокой сложности возникающей при оптимизации двухточечной краевой задачи определение управления поиском целесообразно проводить с использованием метода последовательных приближений Крылова–Черноусько с применением принципа частичного обновления управления.

Задача оптимизации распределения поисковых усилий в многоканальной ПС существенно упрощается, если поисковая система функционирует в установившемся режиме. Ее решение сводится к поиску аргумента условного экстремума методом неопределенных множителей Лагранжа.

Приведенные примеры проиллюстрировали выигрыш, получаемый от оптимизации распределения поисковых усилий в многоканальной ПИ при поиске ОН из пространственно-временного пуассоновского потока.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Последовательность преобразования дифференциальных уравнений Колмогорова (2.5)

Домножим k -е уравнение каждой i -й ($i = \overline{1, I}$) системы (2.5) на k ($k = 1, 2, \dots$) и просуммируем их по k . В результате получим

$$(П.1.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \dot{P}_{ik}k = \lambda_i F + \xi_i G,$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} \dot{P}_{ik}k = \dot{\mu}_i$ — скорость изменения математического ожидания числа необнаруженных ОН, находящихся в X_i , $i = \overline{1, I}$;

$$(П.1.2) \quad G = - \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}k + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik-1}k,$$

$$(П.1.3) \quad F_i = - \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik+1}k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik+1}k.$$

Раскрывая суммы в (П.1.2), можно показать, что

$$(П.1.4) \quad G = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} = 1.$$

Проводя аналогичную операцию применительно к (П.1.3), получим

$$(П.1.5) \quad F_i = - \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}k = -\mu_i.$$

Из (П.1.1), (П.1.4), (П.1.5) следует, что

$$(П.1.6) \quad \dot{\mu}_i = -\lambda_i(t)\mu_i + \xi_i(t), \quad i = \overline{1, I}.$$

Описание системы дифференциальных уравнений (П.1.6) соответствует векторной записи (2.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Обоснование неравенства (5.11)

Из (5.11) следует, что

$$(П.2.1) \quad I \sum_{i=1}^I \xi_i \geq \sum_{i=1}^I \xi_i + 2 \sum_{j=1}^{I-1} \sum_{i=j+1}^I \sqrt{\xi_j \xi_i}.$$

Или

$$(П.2.2) \quad (I-1) \sum_{i=1}^I \xi_i \geq 2 \sum_{j=1}^{I-1} \sum_{i=j+1}^I \sqrt{\xi_j \xi_i}.$$

Запишем систему неравенств

$$(П.2.3) \quad \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &\geq 2\sqrt{\xi_1 \xi_2}, \\ \xi_1 + \xi_3 &\geq 2\sqrt{\xi_1 \xi_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{I-1} + \xi_I &\geq 2\sqrt{\xi_{I-1} \xi_I}. \end{aligned}$$

Суммируя неравенства в (П.2.3), получим (П.2.2) и соответственно (П.2.1). Соотношение (5.11) справедливо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшиев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.
2. *Болдырихин Н.В., Хуторцев В.В.* Управление наблюдениями за потоками случайных процессов // *АиТ.* 2006. № 12. С. 43–55.
Boldyrikhin N.V., Khutortsev V.V. Control of observations over random processes fluxes // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 12. P. 1900–1912.
3. *Хеллман О.* Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука, 1985.
4. *Альведе Р., Вегнер И.* Задачи поиска. М.: Мир, 1985.
5. *Абчук В.А., Суздаль В.Г.* Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977.
6. *Аркин В.И.* Задача оптимального распределения поисковых усилий // *Теория вероятностей и ее применения.* 1964. Т. 9. № 1. С. 179–180.

7. Баранов И.В., Хуторцев В.В. Текущая оптимизация поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТИСУ. 2011. № 6. С. 24–34.
8. Хуторцев В.В. Оптимизация последовательно-параллельного поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТИСУ. 2019. № 1. С. 31–41.
9. Хуторцев В.В. Управление поиском объектов из пространственно-временного пуассоновского потока при неоднородной области обзора информационно-измерительной системы // АИТ. 2021. № 9. С. 133–149.
Khutortsev V.V. Controlled Search for Targets Arriving According to a Spatio-Temporal Poisson Point Process by an Information Measurement System with Inhomogeneous Scope // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1568–1580.
10. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
11. Daley D.J., Vere-Jones D. An introduction to the theory of point processes. New York: Springer, 2013. 702 p.
12. Last G. Stochastic analysis for Poisson processes / Peccati G. and Reitzner M. (eds.) Stochast. Anal. for Poisson Point Proc. Springer, Milan. 2016. P. 1–36.
13. Хуторцев В.В. Плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока с нулевой вероятностью наступления событий на стохастических подмножествах его пространственной области определения // Математика и математическое моделирование. 2020. № 3. С. 15–28.
14. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. 1955. Т. 49. С. 3–122.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
16. Колмогоров А.Н. Проблема ожидания / А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика: Сб. статей. М.: Наука, 1986. С. 106–111.
17. Feller W. On Boundaries and Lateral Conditions for the Kolmogorov Differential Equations // Ann. Math. 1957. V. 65. No. 3. P. 527–570.
18. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 142–153.
19. Асланов В.С., Пироженко А.В., Волженюк О.Л., Кислов А.В., Ящук А.В. Определение времени выживания космической тросовой системы // Изв. Самарского научного центра РАН. 2010. Т. 12. № 4. С. 138–143.
20. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 24.05.2022

После доработки 13.07.2022

Принята к публикации 29.09.2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2023 г. Ю.А. ДУБНОВ (yury.dubnov@phystech.edu)

(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва),

А.Ю. ПОПКОВ, канд. техн. наук (aropkov@isa.ru)
(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва),
В.Ю. ПОЛИЩУК, канд. техн. наук (liquid_metal@mail.ru)

(Институт мониторинга климатических и экологических систем, Томск),
Е.С. СОКОЛ (sokoles@uriit.ru)

(Югорский НИИ Информационных технологий, Ханты-Мансийск),
А.В. МЕЛЬНИКОВ, д-р техн. наук (melnikovav@uriit.ru)

(Югорский НИИ Информационных технологий, Ханты-Мансийск),
Ю.М. ПОЛИЩУК, д-р техн. наук (yupolishchuk@gmail.com)

(Югорский НИИ Информационных технологий, Ханты-Мансийск),
Ю.С. ПОПКОВ, д-р техн. наук (popkov@isa.ru)

(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

АЛГОРИТМЫ РАНДОМИЗИРОВАННОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОЩАДИ ТЕРМОКАРСТОВЫХ ОЗЕР В ЗОНАХ ВЕЧНОЙ МЕРЗЛОТЫ¹

Рандомизированное машинное обучение ориентировано на задачи, сопровождаемые значительной неопределенностью в данных и моделях. Алгоритмы машинного обучения формулируются в терминах функциональной задачи энтропийно-линейного программирования. Рассматривается методика их адаптации к задачам прогнозирования на примере временной эволюции площади термокарстовых озер в зонах вечной мерзлоты, которые являются генераторами метана — одного из парниковых газов, влияющих на изменения климата. Предлагаются процедуры рандомизированного машинного обучения, использующие модели динамической регрессии со случайными параметрами, и ретроспективные данные климатических параметров и дистанционного зондирования земной поверхности. Развивается алгоритм рандомизированного машинного обучения, позволяющий вычислять оценки функций плотности распределения вероятностей параметров модели и измерительных шумов. Рандомизированное прогнозирование реализовано в виде алгоритмов трансформа-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-20023).

ции оптимальных распределений в соответствующие им случайные последовательности (алгоритмы сэмплирования). Развиваемые процедуры и технологии рандомизированного прогнозирования применены для обучения, тестирования и прогнозирования эволюции площади термокарстовых озер Западной Сибири.

Ключевые слова: термокарстовые озера, дистанционное зондирование, информационная энтропия, балансовые уравнения, динамическая регрессия, оптимизация, ляпуновская задача, сэмплирование, рандомизированное прогнозирование, рандомизированное машинное обучение.

DOI: 10.31857/S0005231023010051, **EDN:** LUKHYU

1. Введение

Проблемам, технологиям и алгоритмам машинного обучения посвящено огромное количество работ. Общее представление могут дать монографии [1–3]. Рандомизированное машинное обучение (РМО) фокусируется на восстановлении параметров зависимостей *в условиях неопределенности* в данных (неполнота, ошибки с неизвестными характеристиками, различные временные шкалы и др.) и моделях (недостаточность знаний о процессах, структурная неоднозначность, определяющие параметры и др.) [4]. В отличие от машинного обучения рандомизированная версия основана на оценках функций плотностей распределения вероятностей (ПРВ) параметров модели и измерительных шумов, соответствующих максимальной неопределенности в терминах информационной энтропии.

Термокарстовые озера являются объектом с высоким уровнем неопределенности. Заметим, что процессы образования и эволюции площади термокарстовых озер изучены недостаточно [5, 6] и исторические данные о них, в особенности получаемые со спутников, сопровождаются значительными погрешностями [7–9].

В данной статье предлагается технология рандомизированного прогнозирования эволюции площади термокарстовых озер, суть которой состоит в генерации оптимизированных ансамблей прогнозных траекторий путем сэмплирования энтропийно-оптимальных функций ПРВ параметров рандомизированных динамических моделей. Оптимальные характеристики указанных моделей определяются с использованием реальных исторических данных на основе оценок условно максимальной информационной энтропии.

2. Общая структура процедуры энтропийно-рандомизированного моделирования и прогнозирования

Рандомизация как средство придания искусственных, целесообразно организованных случайных свойств событиям, индикаторам, методам, не являющихся по своей природе случайными, является довольно распространенным приемом достижения позитивного эффекта. Тому существует много примеров

в самых разных областях науки, управления, экономики: рандомизированные численные методы оптимизации [10, 11], смешанные (случайные) стратегии в биржевой торговле [12], рандомизированное прогнозирование динамики населения [13], вибрационное управление технологическими процессами [14]. При этом рандомизация предполагает придание неслучайным объектам искусственных стохастических свойств с оптимальными, в выбранном смысле, вероятностными характеристиками. Вопрос о выборе количественных характеристик оптимальности всегда оказывается дискуссионным и неоднозначным. Он требует аргументов, которые бы как-то отражали важную специфику рандомизированного объекта. В частности, принципиальной особенностью процедур моделирования и прогнозирования является сопровождающая их неопределенность в используемых данных, предсказывающих моделях, методах генерации прогнозов и др.

Здесь будет использоваться в качестве характеристики неопределенности *информационная энтропия* [15]. В [16–18] показано, что энтропия согласно первому закону термодинамики является естественным функционалом, характеризующим процессы всеобщей эволюции. Согласно второму закону термодинамики ее максимизация определяет наилучшее состояние эволюционного процесса при наихудших воздействиях на него (максимальной неопределенности). Стоит упомянуть еще одно качество информационной энтропии, связанное с измерительными и иными погрешностями, являющимися важными характеристиками данных. Использование информационной энтропии для учета влияния указанных погрешностей позволяет оценить вероятностные характеристики шумов, оказывающих наихудшее воздействие на процедуры прогнозирования [19].

2.1. Рандомизированное моделирование

В основе рандомизированного моделирования лежат математические модели «вход-выход» со случайными параметрами. На данном этапе технологии формируются структуры базовой модели (*РПМ-В*), ориентированной на имеющиеся исторические данные о входе и выходе, и вспомогательной модели такого же класса (*РПМ-В*), предназначенной для воспроизведения входа базовой модели, с использованием «подходящего» входного процесса для *РПМ-В*. В качестве такового применяется случайная последовательность с оптимизированными свойствами.

Рассмотрим рандомизированную параметризованную базовую модель (*РПМ-В*) и согласованные с ней массивы исторических данных. *РПМ-В* преобразует массив исторических входных данных $X = [\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}]$, где $\mathbf{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, в модельный выход, характеризуемый матрицей $\hat{Z} = [\hat{\mathbf{z}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{z}}^{(s)}]$, где $\mathbf{z}^{(j)} \in \mathbb{R}^m$.

В общем случае это преобразование предполагается динамическим, т.е. модельный выход, наблюдаемый в момент времени j , зависит от входа, наблюдаемого на некотором *историческом* интервале $j - \varrho, \dots, j$, т.е. от мат-

рицы $X_\varrho^{(j)} = [\mathbf{x}^{(j-\varrho)}, \dots, \mathbf{x}^{(j)}]$. Математическим образом этой связи является векторный функционал $\hat{\Omega}(X_\varrho^{(j)}, \mathbf{a} | P(\mathbf{a}))$ со случайными параметрами $\mathbf{a} \in R^d$ интервального типа

$$(2.1) \quad \mathbf{a} \in \mathcal{A} = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+].$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются функцией ПРВ $P(\mathbf{a})$, которая предполагается непрерывно-дифференцируемой.

Выход РПМ-Б в j -й момент времени (момент измерения) представляет собой ансамбль $\hat{Z}^{(j)}(P(\mathbf{a}))$ случайных векторов

$$(2.2) \quad \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}) = \hat{\Omega}(X_\varrho^{(j)}, \mathbf{a} | P(\mathbf{a})), \quad j = \overline{1, s}.$$

Наблюдаемый выход РПМ-Б представим в виде

$$(2.3) \quad \mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{a}, \xi^{(j)}) = \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}) + \xi^{(j)}, \quad j = \overline{1, s},$$

где добавлен измерительный шум $\xi^{(j)} \in R^m$ интервального типа:

$$(2.4) \quad \xi^{(j)} \in \Xi_j = [\xi_-^{(j)}, \xi_+^{(j)}], \quad j = \overline{1, s}$$

с непрерывно-дифференцируемыми функциями ПРВ $Q_j(\xi^{(j)})$, $j = \overline{1, s}$, в соответствии с которыми генерируется для каждого момента измерения выхода объекта ансамбль $\mathbb{K}^{(j)}(Q_j(\xi^{(j)}))$.

Случайные векторы (2.3) образуют ансамбль $\mathbb{V}^{(j)}(P(\mathbf{a}), Q_j(\xi^{(j)}))$, математическое ожидание которого имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \mathbf{v}^{(j)}(\mathbf{a}, \xi^{(j)}) \right\} &= \int_{\mathcal{A}} \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}, P(\mathbf{a})) d\mathbf{a} + \int_{\Xi_j} Q_j(\xi^{(j)}) \xi^{(j)} d\xi^{(j)} = \\ &= \varphi^{(j)} \left[P(\mathbf{a}), Q_j(\xi^{(j)}) \right], \quad j = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

2.2. Обучение РПМ

Обучение РПМ состоит в *оценивании ПРВ* ее параметров и шумов измерений по имеющимся данным. Он реализуется с помощью алгоритмов рандомизированного машинного обучения (РМО-А) [19, 20].

Для РПМ-Б он имеет вид

$$(2.6) \quad [P^*(\mathbf{a}), Q^*(\xi)] = \arg \max_{P(\mathbf{a}), Q(\xi)} \mathcal{H}[P(\mathbf{a}), Q(\xi)]$$

на множестве нормированных функций $P^*(\mathbf{a}), Q(\xi)$, для которых выполняются условия эмпирических балансов средних (2.5):

$$(2.7) \quad \varphi_j \left[P(\mathbf{a}), Q_j(\xi^{(j)}) \right] = \mathbf{y}^{(j)}, \quad j = \overline{1, s},$$

где $\mathbf{y}^{(j)} \in R^m$ — вектор реальных измерений выхода объекта, $\xi = \{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(s)}\}$.

Качество оценивания указанных ПРВ характеризуется энтропийным функционалом

$$(2.8) \quad \mathcal{H}[P(\mathbf{a}), Q(\bar{\xi})] = - \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \ln P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} - \sum_{j=1}^s \int_{\Xi_j} Q_j(\xi^{(j)}) \ln Q_j(\xi^{(j)}) d\xi^{(j)}.$$

Задача (2.6), (2.7) относится к классу функциональных энтропийно-линейных задач ляпуновского типа [21], которые имеют аналитическое решение, получаемое с помощью множителей Лагранжа $\Theta = [\theta^j, j = \overline{1, s}]$ (векторы $\theta^j \in R^m$):

$$(2.9) \quad P^*(\mathbf{a}) = \frac{\exp \left(- \sum_{j=1}^s \langle \theta^{(j)}, \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}) \rangle \right)}{\mathcal{P}(\Theta)},$$

$$Q_j^*(\xi^{(j)}) = \frac{\exp(-\langle \theta^{(j)}, \xi^{(j)} \rangle)}{Q_j(\theta^{(j)})}, \quad j = \overline{1, s}; \quad Q(\xi) = \prod_{j=1}^s Q_j^*(\xi^{(j)}).$$

В знаменателях этих выражений стоят нормировочные константы

$$(2.10) \quad \mathcal{P}(\Theta) = \int_{\mathcal{A}} \exp \left(- \sum_{j=1}^s \langle \theta^{(j)}, \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}) \rangle \right) d\mathbf{a},$$

$$Q_j(\theta^{(j)}) = \int_{\Xi_j} \exp(-\langle \theta^{(j)}, \xi^{(j)} \rangle) d\xi^{(j)}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Оптимальные ПРВ и нормировочные константы параметризованы множителями Лагранжа, которые определяются решением следующих балансовых уравнений:

$$(2.11) \quad \frac{U_j(\Theta)}{\mathcal{P}(\Theta)} + \frac{T_j(\theta^{(j)})}{Q_j(\theta^{(j)})} = \mathbf{y}^{(j)}, \quad j = \overline{1, s},$$

где

$$(2.12) \quad U_j(\Theta) = \int_{\mathcal{A}} \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}) \exp \left(- \sum_{j=1}^s \langle \theta^{(j)}, \hat{\mathbf{z}}^{(j)}(\mathbf{a}) \rangle \right) d\mathbf{a},$$

$$T_j(\theta^{(j)}) = \int_{\Xi_j} \xi^{(j)} \exp(-\langle \theta^{(j)}, \xi^{(j)} \rangle) d\xi^{(j)}, \quad j = \overline{1, s}.$$

2.3. Тестирование обученных РПМ

Тестирование оптимизированных РПМ осуществляется с использованием тестовых последовательностей исторических данных путем сэмплирования энтропийно-оптимизированных ПРВ параметров РПМ и измерительных шумов. Сэмплирование предполагает трансформацию функции ПРВ в соответствующую последовательность случайных векторов.

Общий метод генерации последовательностей случайных векторов с заданной функцией ПРВ изложен в [22]. В результате с помощью метода Монте-Карло генерируется ансамбль случайных траекторий наблюдаемого выхода РПМ (с учетом наихудших в энтропийных терминах измерительных шумов).

В процедурах тестирования используются эмпирические траектории средних по ансамблю (*mean*) (M — количество траекторий в ансамбле)

$$(2.13) \quad \bar{\mathbf{v}}[k] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\mathbf{v}}^{(i)}[k], \quad k = \overline{0, N}.$$

Качество обученных РПМ характеризуется абсолютной ошибкой

$$(2.14) \quad \Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^M (\bar{\mathbf{v}}[k] - \mathbf{v}^r[k])^2}$$

и (или) относительной ошибкой

$$(2.15) \quad \delta = \frac{\sum_{k=1}^M (\bar{\mathbf{v}}[k] - \mathbf{v}^r[k])^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^M \bar{\mathbf{v}}^2[k] + \sum_{k=1}^M (\mathbf{v}^r[k])^2}},$$

где $\mathbf{v}^r[k]$ — исторические тестовые данные.

2.4. Рандомизированное прогнозирование

Применение динамических моделей «вход-выход» для прогнозирования требует некоторой их модификации. Дело в том, что в этом случае необходимо иметь прогноз входного процесса. Для формирования такого прогноза можно использовать идею энтропийно-рандомизированного машинного обучения.

Рассмотрим рандомизированную параметризованную вспомогательную модель (РПМ-В). В отличие от РПМ-Б входом в этой модели является случайная матрица $\Gamma = [\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(s)}]$, где случайные векторы $\gamma^{(j)} \in R^n$ интервального типа, т.е.

$$(2.16) \quad \gamma^{(j)} \in \mathcal{G}_j = [\gamma_-^{(j)}, \gamma_+^{(j)}], \quad \Gamma \in \mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^s \mathcal{G}_j.$$

РПМ-В преобразует случайную матрицу Γ в случайную матрицу $X = [\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}]$. Математическим образом этой связи, так же как для РПМ-Б, является векторный функционал $\hat{\Psi}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b} | W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}))$, в котором матрица $\Gamma_\varrho(j) = [\gamma^{(j-\varrho)}, \dots, \gamma^{(j)}]$ и параметры $\mathbf{b} \in R^p$ интервального типа:

$$(2.17) \quad \mathbf{b} \in \mathcal{B} = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+].$$

Вероятностные свойства функционала $\hat{\Psi}$ будем характеризовать функцией плотности совместного распределения вероятностей параметров \mathbf{b} и матрицы $\Gamma_\varrho^{(j)}$ — ПРВ $W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b})$, которая предполагается непрерывно-дифференцируемой.

Выход РПМ-В в j -й момент времени (момент измерения) представляет собой ансамбль $\hat{\mathbf{X}}^{(j)}(W(\Gamma_\varrho(j), \mathbf{b}))$ случайных векторов

$$(2.18) \quad \hat{\mathbf{x}}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) = \hat{\Psi}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b} | W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b})), \quad j = \overline{1, s}.$$

Наблюдаемый выход РПМ-В представим в виде

$$(2.19) \quad \mathbf{f}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}, \eta^{(j)}) = \hat{\mathbf{x}}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) + \eta^{(j)}, \quad j = \overline{1, s},$$

где добавлен измерительный шум $\eta^{(j)} \in R^m$ интервального типа

$$(2.20) \quad \eta^{(j)} \in \mathcal{E}_j = [\eta_-^{(j)}, \eta_+^{(j)}], \quad j = \overline{1, s}$$

с непрерывно-дифференцируемыми функциями ПРВ $E_j(\eta^{(j)})$, $j = \overline{1, s}$, в соответствии с которыми генерируется для каждого момента измерения выхода объекта ансамбль $\mathbb{E}^{(j)}(E_j(\eta^{(j)}))$.

Случайные векторы (2.19) образуют ансамбль $\mathbb{F}^{(j)}(W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), E_j(\eta^{(j)}))$, математическое ожидание которого имеет вид:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \mathbf{f}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}, \eta^{(j)}) \right\} &= \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{G}} W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) \hat{\mathbf{x}}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) d\Gamma_\varrho^{(j)} d\mathbf{b} + \\ &+ \int_{\mathcal{E}_j} E_j(\eta^{(j)}) \eta^{(j)} d\eta^{(j)} = \psi^{(j)} [W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), E_j(\eta^{(j)})], \quad j = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

Для РПМ-В алгоритм рандомизированного машинного обучения имеет вид

$$(2.22) \quad [W^*(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), E^*(\eta)] = \arg \max_{W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), E(\eta)} \mathcal{H} [W(\Gamma_\varrho, \mathbf{b}), E(\eta)],$$

при условии, что функции $W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), E(\eta)$ нормированы и выполняются эмпирические балансы

$$(2.23) \quad \psi_j [W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), E_j(\eta^{(j)})] = \mathbf{y}^{(j)}, \quad j = \overline{1, s}.$$

В (2.22) энтропийный функционал имеет вид:

$$(2.24) \quad \mathcal{H}[W(\Gamma_\varrho, \mathbf{b}), E(\eta)] = - \sum_{j=1}^s \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{G}_j} W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) \ln W(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) d\Gamma_\varrho^{(j)} d\mathbf{b} - \\ - \sum_{j=1}^s \int_{\mathcal{E}_j} E_j(\eta^{(j)}) \ln E_j(\eta^{(j)}) d\eta^{(j)}.$$

Обозначим через $\Lambda \{ \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(s)} \}$, $\lambda^{(j)} \in R^m$ множители Лагранжа для задачи (2.22, 2.23). Тогда ее решение можно представить в виде:

$$(2.25) \quad W^*(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) = \frac{\exp(-\langle \lambda^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) \rangle)}{\mathcal{W}_j(\lambda^{(j)})}, \quad W^*(\Gamma_\varrho, \mathbf{b}) = \prod_{j=1}^s W^*(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}), \\ E_j^*(\eta^{(j)}) = \frac{\exp(-\langle \lambda^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle)}{\mathcal{E}_j(\lambda^{(j)})}, \quad j = \overline{1, s}; \quad E(\eta) = \prod_{j=1}^s E_j^*(\eta^{(j)}).$$

В знаменателях этих выражений стоят нормировочные константы

$$(2.26) \quad \mathcal{W}_j(\lambda^{(j)}) = \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{G}} \exp(-\langle \lambda^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}^{(j)}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) \rangle) d\Gamma_\varrho^{(j)} d\mathbf{b}, \\ \mathcal{E}_j(\lambda^{(j)}) = \int_{\mathcal{E}_j} \exp(-\langle \lambda^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle) d\eta^{(j)}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Из этих равенств следует, что вероятностные свойства входного вспомогательного шума и параметров модели взаимосвязаны для нелинейного функционала $\hat{\Psi}$.

Из (2.7) видно, что оптимальные ПРВ параметризованы множителями Лагранжа Λ , которые определяются решением следующих балансовых уравнений:

$$(2.27) \quad \frac{\mathcal{N}_j(\lambda^{(j)})}{\mathcal{W}_j(\lambda^{(j)})} + \frac{\mathcal{S}_j(\lambda^{(j)})}{\mathcal{E}_j(\lambda^{(j)})} = \mathbf{y}^{(j)}, \quad j = \overline{1, s},$$

где

$$(2.28) \quad \mathcal{N}_j(\lambda^{(j)}) = \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{G}_j} \hat{\mathbf{z}}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) \exp(-\langle \theta^{(j)}, \hat{\mathbf{z}}(\Gamma_\varrho^{(j)}, \mathbf{b}) \rangle) d\Gamma_\varrho^{(j)} d\mathbf{b}, \\ \mathcal{S}_j(\lambda^{(j)}) = \int_{\mathcal{E}_j} \eta^{(j)} \exp(-\langle \lambda^{(j)}, \eta^{(j)} \rangle) d\eta^{(j)}, \quad j = \overline{1, s}.$$

После того как определена функция ПРВ параметров модели и входной последовательности производится генерация ансамблей прогнозных траекторий с помощью их сэмплирования [22].

Сэмплирование предполагает трансформацию функции ПРВ в соответствующую последовательность случайных векторов. В процедурах рандомизированного прогнозирования используются эмпирические вероятностные и числовые характеристики ансамблей:

- эмпирические функции плотности распределения вероятностей (*эПРВ*) $\mathcal{P}_k(\hat{\mathbf{v}}[k])$;
- эмпирические функции распределения вероятностей (*эРВ*) $\mathfrak{P}_k(\hat{\mathbf{v}}[k])$;
- траектории максимумов *эПРВ* параметров и шумов (*max-pn*)

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}[k] &= \mathbb{B}(\mathbf{a}^*, X_{(k-\rho)}), \quad \mathbf{a}^* = \arg \max P^*(\mathbf{a}), \\ \xi[k] &= \arg \max Q_k^*(\xi[k]), \\ \hat{\mathbf{v}}[k] &= \hat{\mathbf{y}}[k] + \xi[k], \quad k = \overline{0, N}; \end{aligned}$$

- траектории максимумов *эПРВ* наблюдаемых выходов РПМ для $k = \overline{0, N}$ (*max-ePDF*)

$$(2.30) \quad \check{\mathbf{v}}[k] = \arg \max \mathcal{P}_k(\hat{\mathbf{v}}[k]), \quad k = \overline{0, N};$$

- траектории средних по ансамблю (*mean*) (M — количество траекторий в ансамбле)

$$(2.31) \quad \bar{\mathbf{v}}[k] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\mathbf{v}}^{(i)}[k], \quad k = \overline{0, N};$$

- медианные траектории (*med*) (M — количество траекторий в ансамбле)

$$(2.32) \quad \hat{\mathbf{v}}^{(i^*)}[k] \Rightarrow \sum_{i=1}^{i^*} \mathfrak{P}_k(\hat{\mathbf{v}}^{(i)}[k]) = \sum_{i=i^*+1}^M \mathfrak{P}_k(\hat{\mathbf{v}}^{(i)}[k]).$$

Важными характеристиками ансамблей являются так называемые *доверительные* множества, в которых с определенным отклонением или с определенной вероятностью находятся траектории ансамбля. Наиболее информативными являются:

- дисперсионная трубка $\mathcal{D}(\bar{\mathbf{v}}[k])$, $k = \overline{0, N}$

$$(2.33) \quad d(\bar{v}_j[k]) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{v}_j^{(i)}[k] - \bar{v}_j[k])^2}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\mathcal{D}(\bar{\mathbf{v}}[k]) = \left\{ \hat{\mathbf{v}}[k] : \bar{v}_j[k] - d(\hat{v}_j[k]) \leq \hat{v}_j[k] \leq \bar{v}_j[k] + d(\hat{v}_j[k]), \right. \\ \left. j = \overline{1, m}; k = \overline{0, N} \right\};$$

- интерквартильное множество $\mathcal{I}_{(\kappa_1, \kappa_2)}(\hat{\mathbf{v}}[k])$, $k = \overline{0, N}$

$$(2.34) \quad \mathcal{I}_{(\kappa_1, \kappa_2)}(\hat{\mathbf{v}}[k]) = \mathcal{I}_{\kappa_2}(\hat{\mathbf{v}}[k]) \setminus \mathcal{I}_{\kappa_1}(\hat{\mathbf{v}}[k]), \quad \kappa_1 < \kappa_2 < 1,$$

$$\mathcal{I}_{\kappa_2}(\hat{\mathbf{v}}[k]) = \left\{ \hat{\mathbf{v}}[k] : \hat{v}_j[k] < \hat{v}_j^{\kappa_2}[k] \right\}, \quad \hat{v}_j^{\kappa_2}[k] \Rightarrow \mathfrak{P}_k(\hat{v}_j[k]) = \kappa_2,$$

$$\mathcal{I}_{\kappa_1}(\hat{\mathbf{v}}[k]) = \left\{ \hat{\mathbf{v}}[k] : \hat{v}_j[k] < \hat{v}_j^{\kappa_1}[k] \right\}, \quad \hat{v}_j^{\kappa_1}[k] \Rightarrow \mathfrak{P}_k(\hat{v}_j[k]) = \kappa_1,$$

$$(2.35) \quad k = \overline{0, N}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Указанные вероятностные и числовые характеристики энтропийно-оптимальных ансамблей используются для характеристики процедур рандомизированного моделирования и прогнозирования площади термокарстовых озер.

3. Структуры рандомизированных моделей состояния термокарстовых озер

Важным этапом технологии рандомизированного прогнозирования является формирование рандомизированных моделей эволюции площади $S[n]$ термокарстовых озер и влияющих на нее климатических параметров: среднегодовой температуры $T[n]$ и средней суммы осадков $R[n]$. Для моделирования указанных переменных используются математические модели линейной динамической регрессии [23], но *со случайными параметрами (ЛДРР)*.

Феноменологические основы моделирования исследуемого объекта построены на исследованиях, изложенных в [8]. В ней показана зависимость площади озер от двух климатических факторов (среднегодовой температуры и среднегодовой суммы осадков), а также наличие временной «памяти» прошлых состояний объекта.

Согласно феноменологии исследуемого объекта структурная схема ЛДРР имеет вид, изображенный на рис. 1. Она состоит из рандомизированных моделей площади ЛДРР-П, температуры ЛДРР-Т и осадков ЛДРР-О. Измерительные ошибки в данных имитируются шумами ξ , η , ζ соответственно.

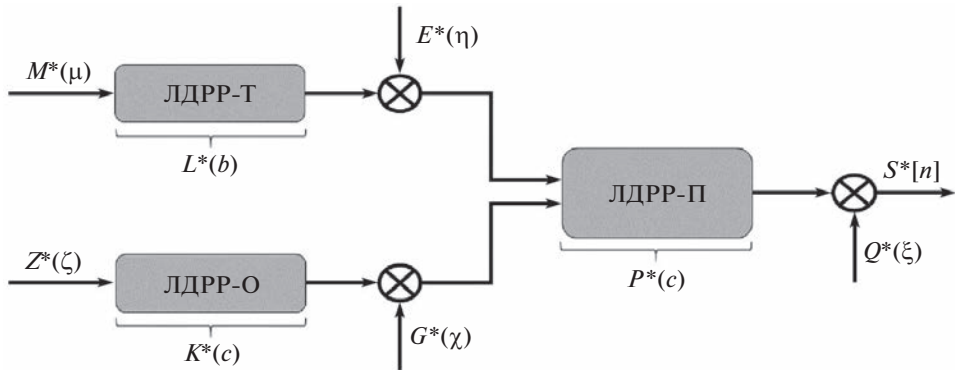


Рис. 1. Блок-схема модели ЛДРР.

Временная эволюция площади $S[n]$ описывается следующим уравнением динамической рандомизированной регрессии с двумя влияющими факторами (среднегодовой температурой $T[n]$ и годовой суммой осадков $R[n]$):

$$(3.1) \quad S[n] = a_0 + \sum_{k=1}^p a_k S[n-k] + a_{(p+1)} T[n] + a_{(p+2)} R[n],$$

где p — глубина «памяти» модели. Случайные параметры интервального типа

$$(3.2) \quad a_k \in \mathcal{A}_k = [a^-_k, a^+_k], \quad k = \overline{0, (p+2)}; \quad \mathbf{a} = \{a_0, \dots, a_{p+2}\} \in \mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{p+2} \mathcal{A}_k$$

характеризуются функцией ПРВ $P(\mathbf{a})$.

Наблюдаемый выход модели, искаженный измерительным $\xi[n]$ шумом, имеет вид

$$(3.3) \quad v[n] = S[n] + \xi[n],$$

где

$$(3.4) \quad \xi[n] \in \Xi_n = [\xi^-[n], \xi^+[n]].$$

Вероятностные свойства характеризуются функциями ПРВ $Q_n(\xi[n])$.

Рандомизированная модель температуры (ЛДРР-Т) $T[n]$ и ее наблюдаемый выход $t[n]$ имеют вид

$$(3.5) \quad T[n] = b_0 + \sum_{k=1}^p b_k T[n-k] + \mu[n], \quad t[n] = T[n] + \eta[n].$$

Параметры этой модели случайные, интервальные

$$(3.6) \quad b_k \in \mathcal{B}_k = [b^-_k, b^+_k], \quad k = \overline{0, p}, \quad \mathbf{b} = \{b_0, \dots, b_p\}, \quad \mathbf{b} \in \mathcal{B} = \bigcup_{k=0}^p \mathcal{B}_k.$$

Входная случайная последовательность также интервального типа:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \mu[n] \in \mathcal{M}_n &= [\mu^-[n], \mu^+[n]], \quad n = \overline{0, N}; \\ \mu &= \{\mu[0], \dots, \mu[N]\}, \quad \mu \in \mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^N \mathcal{M}_n. \end{aligned}$$

Случайные параметры модели и входная случайная последовательность характеризуются совместной функцией ПРВ $W(\mathbf{b}, \mu)$.

Измерительный шум в (3.5) $\eta[n] \in \mathcal{E}_n = [\eta^-[n], \eta^+[n]]$ — интервальный, с функциями ПРВ $E_n(\eta[n])$.

Модель осадков (ЛДРР-О) $R[n]$ и ее наблюдаемый выход $r[n]$ имеют вид:

$$(3.8) \quad R[n] = c_0 + \sum_{k=1}^p c_k R[n-k] + \zeta[n], \quad r[n] = R[n] + \chi[n].$$

Параметры этой модели случайные, независимые, интервальные

$$(3.9) \quad c_k \in \mathcal{C}_k = [c^-_k, c^+_k], \quad k = \overline{0, p}; \quad \mathbf{c} = \{c_0, \dots, c_p\}, \quad \mathbf{c} \in \mathcal{C} = \bigcup_{k=0}^p \mathcal{C}_k$$

и случайная последовательность

$$(3.10) \quad \zeta[n] \in \mathcal{Z}_n = [\zeta^-[n], \zeta^+[n]], \quad \zeta = \{\zeta[0], \dots, \zeta[N]\}, \quad \zeta \in \mathcal{Z} = \bigcup_{n=0}^N \mathcal{Z}_n$$

характеризуются совместной функцией ПРВ $F(\mathbf{c}, \zeta)$. Измерительный шум $\chi[n] \in \mathcal{G}_n = [\chi^-[n], \chi^+[n]]$ с функцией ПРВ $G_n(\chi[n])$.

Следует заметить, что на этапе обучения модели ЛДРР-П имеются данные о площади, температуре и осадкам. Но на этапе прогнозирования данные о температуре и осадкам отсутствуют. Модели ЛДРР-Т и ЛДРР-О предназначены для прогнозирования среднегодовой температуры и среднегодовой суммы осадков, для чего используются вспомогательные случайные последовательности $\mu[n]$, $\zeta[n]$, совместные вероятностные характеристики которых определяются в результате обучения ЛДРР-Т и ЛДРР-О.

4. Алгоритмы РМО для оценивания ПРВ

Для обучения модели используются данные из обучающего массива [24], структурированные по трем географическим зонам (индекс r) и временным интервалам 1973–2007 гг. По историческим данным были определены методом корреляционного анализа параметры «памяти» p соответствующих моделей и сформированы следующие массивы (матрицы) данных:

$$(4.1) \quad \mathbf{S}_p^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{(0)}^{(r)} \\ \dots \\ \mathbf{S}_{(24-p)}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_p^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{(0)}^{(r)} \\ \dots \\ \mathbf{T}_{(24-p)}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_p^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{(0)}^{(r)} \\ \dots \\ \mathbf{R}_{(24-p)}^{(r)} \end{pmatrix},$$

где

$$(4.2) \quad \mathbf{S}_{(n-p)}^{(r)} = \{1, S^{(r)}[n-1], \dots, S^{(r)}[n-p]\}, \quad \mathbf{S}_{(p)}^{(r)} = \{S^{(r)}[p], \dots, S^{(r)}[24]\},$$

$$\mathbf{T}_{(n-p)}^{(r)} = \{1, T^{(r)}[n-1], \dots, T^{(r)}[n-p]\}, \quad \mathbf{T}_{(p)}^{(r)} = \{T^{(r)}[p], \dots, T^{(r)}[24]\},$$

$$\mathbf{R}_{(n-p)}^{(r)} = \{1, R^{(r)}[n-1], \dots, R^{(r)}[n-p]\}, \quad \mathbf{R}_{(p)}^{(r)} = \{R^{(r)}[p], \dots, R^{(r)}[24]\},$$

$$n = \overline{p, 24}.$$

Эти массивы использовались в алгоритмах РМО для оценивания функций ПРВ соответствующих моделей.

1. Алгоритм РМО для ЛДРР-П имеет вид

$$(4.3) \quad \mathcal{H}[P(\mathbf{a}, Q(\xi))] = - \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \ln P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} - \\ - \sum_{n=p}^{24} \int_{\Xi_n} Q_n(\xi[n]) \ln Q_n(\xi[n]) d\xi[n] \Rightarrow \max$$

при ограничениях

$$(4.4) \quad \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = 1, \quad \int_{\Xi_n} Q_n(\xi[n]) d\xi[n] = 1, \\ \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{a}) \mathbf{D}_{(n-p)}^{(r)} \mathbf{a} d\mathbf{a} + \int_{\Xi_n} Q(\xi[n]) \xi[n] d\xi[n] = S^{(r)}[n], \quad n = \overline{p, 24},$$

где блочный вектор-строка равна

$$(4.5) \quad \mathbf{D}_{(n-p)}^{(r)} = \left[\mathbf{S}_{(n-p)}^{(r)}, T^{(r)}[n], R^{(r)}[n] \right].$$

Решение этой задачи, параметризованное множителями Лагранжа $\theta = \{\theta_p, \dots, \theta_{24}\}$, имеет вид

$$(4.6) \quad P^*(\mathbf{a}, \theta) = \frac{\exp(-\langle \theta, D_p^{(r)} \mathbf{a} \rangle)}{\mathcal{P}(\theta)}, \quad \mathcal{P}(\theta) = \int_{\mathcal{A}} \exp(-\langle \theta, D_p^{(r)} \mathbf{a} \rangle) d\mathbf{a},$$

где блочная матрица равна

$$(4.7) \quad D_p^{(r)} = \left(S_p^{(r)} \quad \mathbf{T}_{(p)}^{(r)} \quad \mathbf{R}_{(p)}^{(r)} \right).$$

Измерительный шум для ЛДРР-П имеет энтропийно-оптимальные ПРВ следующего вида:

$$(4.8) \quad Q_n^*(\xi[n], \theta_n) = \frac{\exp(-\xi[n] \theta_n)}{Q_n(\theta_n)}, \quad Q_n(\theta_n) = \int_{\Xi_n} \exp(-\xi[n] \theta_n) d\xi[n].$$

Множители Лагранжа θ определяются из следующей системы уравнений:

$$(4.9) \quad \mathcal{P}^{-1}(\theta) \int_{\mathcal{A}} \exp(-\langle \theta, D_p^{(r)} \mathbf{a} \rangle) \mathbf{D}_{(n-p)}^{(r)} \mathbf{a} d\mathbf{a} + \\ + Q_n^{-1}(\theta) \int_{\Xi} \exp(-\xi[n] \theta_n) d\xi[n] = S^{(r)}[n], \\ n = \overline{p, 24}.$$

Для ЛДРР-Т и ЛДРР-О алгоритм РМО отличается от (4.3)–(4.4) тем, что нужно оценивать совместные функции *ПРВ* $W(\mathbf{b}, \mu)$ и $F(\mathbf{c}, \zeta)$ параметров и входных случайных последовательностей, а также функции *ПРВ* измерительных шумов $E(\eta)$ и $G(\chi)$.

2. Адаптируя алгоритм РМО для ЛДРР-Т, будем иметь:

$$(4.10) \quad \mathcal{H}[W(\mathbf{b}, \mu), E(\eta)] = - \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{M}} W(\mathbf{b}, \mu) \ln W(\mathbf{b}, \mu) d\mathbf{b} d\mu - \\ - \sum_{n=p}^{24} \int_{\mathcal{E}_n} E_n(\eta[n]) \ln E_n(\eta[n]) d\eta[n] \Rightarrow \max$$

при ограничениях

$$(4.11) \quad \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{M}} W(\mathbf{b}, \mu) d\mathbf{b} d\mu = 1, \quad \int_{\mathcal{E}_n} E_n(\eta[n]) d\eta[n] = 1, \\ \int_{\mathcal{B} \cap \mathcal{M}} W(\mathbf{b}, \mu) \left[\mathbf{T}_{(n-p)}^{(r)} \mathbf{b} + \mu[n] \right] d\mathbf{b} d\mu[n] + \int_{\mathcal{E}_n} E_n(\eta[n]) \eta[n] d\eta[n] = T^{(r)}[n], \\ n = \overline{p, 24}.$$

В выражениях (4.10)–(4.11) вектор $\mu = \{\mu[p], \dots, \mu[24]\}$.

Обозначим множители Лагранжа для указанной задачи через $\vartheta = \{\vartheta_p, \dots, \vartheta_{24}\}$. Тогда ее решение — оптимальные функции *ПРВ* — можно представить, в силу линейности модели и независимости параметров и элементов вспомогательной случайной последовательности, в следующем виде:

$$(4.12) \quad W^*(\mathbf{b}, \mu, \vartheta) = L^*(\mathbf{b}, \vartheta) M^*(\mu, \vartheta), \quad M^*(\mu, \vartheta) = \prod_{n=p}^{24} M_n^*(\mu[n], \vartheta_n), \\ L^*(\mathbf{b}, \vartheta) = \frac{\exp\left(-\langle \vartheta, T_p^{(r)} \mathbf{b} \rangle\right)}{\mathcal{L}(\vartheta)}, \quad \mathcal{L}(\vartheta) = \int_{\mathcal{B}} \exp\left(-\langle \vartheta, T_p^{(r)} \mathbf{b} \rangle\right) d\mathbf{b},$$

$$M_n^*(\mu[n], \vartheta_n) = \mathbb{M}_n^{-1}(\vartheta_n) \exp(-\vartheta_n \mu[n]), \quad \mathbb{M}_n(\vartheta_n) = \int_{\mathcal{M}_n} \exp(-\vartheta_n \mu[n]) d\mu[n],$$

$$E_n^*(\eta[n], \vartheta_n) = \mathbb{E}_n^{-1}(\vartheta_n) \exp(-\eta[n] \vartheta_n), \quad \mathbb{E}_n(\vartheta_n) = \int_{\mathcal{E}_n} \exp(-\eta[n] \vartheta_n) d\eta[n],$$

где множители Лагранжа ϑ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}(\vartheta) \int_{\mathcal{B}} \exp\left(-\langle \vartheta, T_p^{(r)} \mathbf{b} \rangle\right) \mathbf{T}_{(n-p)}^{(r)} \mathbf{b} d\mathbf{b} + \\
& + \mathbb{M}_n^{-1}(\vartheta_n) \int_{\mathcal{M}_n} M_n^*(\mu[n], \vartheta_n) \mu[n] d\mu[n] + \\
(4.13) \quad & + \mathbb{E}_n^{-1}(\vartheta_n) \int_{\tilde{\mathcal{E}}_n} E_n^*(\eta[n], \vartheta_n) \eta[n] d\eta[n] = T^{(r)}[n], \quad n = \overline{p, 24}.
\end{aligned}$$

3. Для ЛДРР-О алгоритм РМО, аналогичный (4.12)–(4.13), имеет вид:

$$\begin{aligned}
F^*(\mathbf{c}, \zeta, \lambda) &= V^*(\mathbf{c}, \lambda) Z^*(\zeta, \lambda), \quad Z^*(\zeta, \lambda) = \prod_{n=p}^{24} Z_n^*(\zeta[n], \lambda_n), \\
(4.14) \quad V^*(\mathbf{c}, \lambda) &= \frac{\exp\left(-\langle \lambda, R_p^{(r)} \mathbf{c} \rangle\right)}{\mathcal{V}(\lambda)}, \quad \mathcal{V}(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} \exp\left(-\langle \lambda, R_p^{(r)} \mathbf{c} \rangle\right) d\mathbf{c}, \\
Z_n^*(\zeta[n], \lambda_n) &= \mathbb{Z}_n^{-1}(\lambda_n) \exp(-\lambda_n \zeta[n]), \quad \mathbb{Z}_n(\lambda_n) = \int_{\tilde{\mathcal{Z}}_n} \exp(-\lambda_n \zeta[n]) d\zeta[n], \\
G_n^*(\chi[n], \lambda_n) &= \mathbb{G}_n^{-1}(\lambda_n) \exp(-\chi[n] \lambda_n), \quad \mathbb{G}_n(\lambda_n) = \int_{\tilde{\mathcal{G}}_n} \exp(-\chi[n] \lambda_n) d\chi[n],
\end{aligned}$$

где множители Лагранжа $\lambda = \{\lambda_p, \dots, \lambda_{24}\}$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
(4.15) \quad & \mathcal{V}^{-1}(\lambda) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(-\langle \lambda, R_p^{(r)} \mathbf{c} \rangle\right) \mathbf{R}_{(n-p)}^{(r)} \mathbf{c} d\mathbf{c} + \\
& + \mathbb{Z}_n^{-1}(\lambda_n) \int_{\tilde{\mathcal{Z}}_n} Z_n^*(\zeta[n], \lambda_n) \zeta[n] d\zeta[n] + \\
& + \mathbb{G}_n^{-1}(\lambda_n) \int_{\tilde{\mathcal{G}}_n} G_n^*(\chi[n], \lambda_n) \chi[n] d\chi[n] = R^{(r)}[n], \\
& n = \overline{p, 24}.
\end{aligned}$$

Из равенств (4.6), (4.8), (4.12), (4.14) видно, что энтропийно-оптимальные функции ПРВ — экспоненциального класса, параметризованные соответствующими множителями Лагранжа, значения которых определяются балансовыми уравнениями (4.9), (4.13), (4.15).

5. Результаты обучения, тестирования и прогнозирования временной эволюции площади термокарстовых озер Западной Сибири

1. *Рандомизированное обучение (1973–1997 гг.)*. На предварительном этапе обучения определялись порядки p соответствующих моделей, с использованием исторических данных из обучающей коллекции. Для этого вычислялись автокорреляционные функции $r[k]$ и определялось $k_{\max} = p$, для которого $r[k_{\max}] \leq \delta$, где $\delta = 0,1$.

В результате РМО определены энтропийно-оптимальные ПРВ параметров моделей, вспомогательных случайных последовательностей и измерительных шумов.

ЛДРР-П ($p = 4$). Аналитические выражения для соответствующих параметризованных ПРВ представлены в (4.6), (4.8). Поскольку ЛДРР-П линейные, то они все экспоненциального типа:

$$\begin{aligned}
 P^*(\mathbf{a}, \theta) &= \prod_{k=0}^{(p+2)} P_k^*(a_k), \quad P_k^*(a_k) = \frac{\exp(-q_k a_k)}{\mathcal{P}_k}, \\
 \mathcal{P}_k &= \int_{A_k} \exp(-q_k a_k) da_k, \\
 (5.1) \quad q_0 &= \sum_{n=p}^{24} \theta_n, \quad q_k = \sum_{n=p}^{24} \theta_n S^{(r)}[n-k], \quad k = \overline{1, p}, \\
 q_{p+1} &= \sum_{n=p}^{24} \theta_n T^{(r)}[n], \quad q_{p+2} = \sum_{n=p}^{24} \theta_n R^{(r)}[n], \\
 Q^*(\xi, \bar{\theta}) &= \frac{\exp(-\bar{\theta} \xi)}{\mathcal{Q}}, \quad \mathcal{Q} = \int_{\Xi} \exp(-\bar{\theta} \xi) d\xi, \quad \bar{\theta} = \frac{q_0}{24-p}.
 \end{aligned}$$

На рис. 2 представлены примеры энтропийно-оптимальных функций ПРВ для параметров $P^*(a_2, a_4)$ (а) и шума $Q^*(\xi)$ (б), восстановленные в резуль-

Таблица 1. *ЛДРР-П*: оценки параметров модели

Северная зона термокарстовых озер				
Модель	Порядок	Параметры	Оценки МНК	Оценки РМО
S	4	a_0	-0,2888	-0,2750
		a_1	0,1069	0,1126
		a_2	-0,2224	-0,2212
		a_3	-0,1289	-0,1333
		a_4	0,0535	0,0533
		a_5	0,8330	0,8322
		a_6	0,6245	0,6080

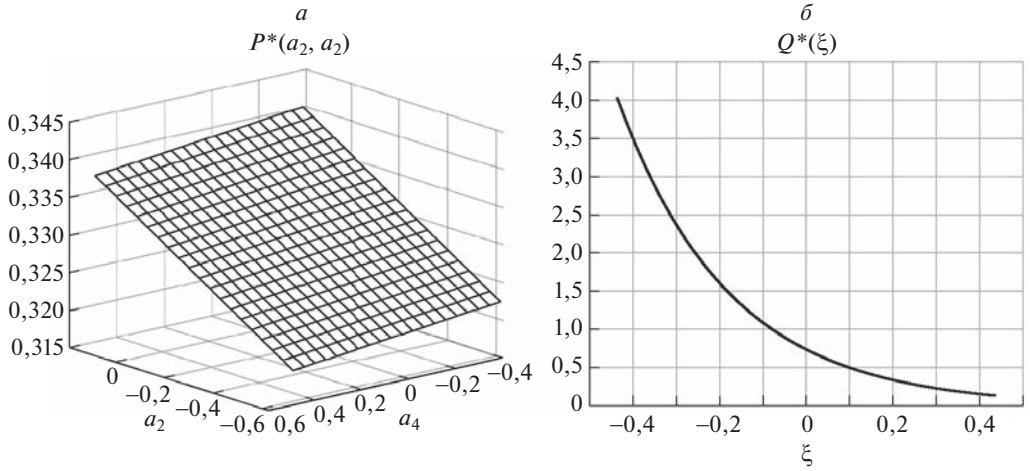


Рис. 2. Примеры восстановленных ПРВ.

тате обучения с использованием исторических данных северной зоны термокарстовых озер, а в табл. 1 приведены средние значения оценок параметров модели площади, полученные на основе РМО и оценками методом наименьших квадратов (МНК). Как видно из данной таблицы, оценки МНК и средние оценки РМО практически совпадают, что объяснимо линейностью используемых РПМ. Однако даже в этом случае процедура РМО позволяет генерировать ансамбль траекторий выхода модели и определять его числовые характеристики.

ЛДРР-Т. Аналитические выражения для соответствующих ПРВ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 W^*(\mathbf{b}, \mu, \vartheta) &= L^*(\mathbf{b}, \vartheta) M^*(\mu, \vartheta), \quad M^*(\mu, \vartheta) = \prod_{n=p}^{(24)} M_n^*(\mu[n], \vartheta_n), \\
 L^*(\mathbf{b}, \vartheta) &= \prod_{k=0}^p L_k^*(b_k), \quad L_k^*(b_k) = \frac{\exp(-w_k b_k)}{\mathcal{L}_k}, \\
 \mathcal{L}_k &= \int_{\mathcal{B}_k} \exp(-w_k b_k) db_k, \\
 (5.2) \quad w_0 &= \sum_{n=p}^{24} \vartheta_n, \quad w_k = \sum_{n=p}^{24} \vartheta_n T^{(r)}[n-k], \quad k = \overline{1, p}, \\
 M_n^*(\mu[n], \vartheta_n) &= \frac{\exp(-\vartheta_n \mu[n])}{\mathfrak{M}_n}, \quad \mathfrak{M}_n = \int_{\mathcal{M}_n} \exp(-\vartheta_n \mu[n]) d\mu[n], \\
 E^*(\eta, \bar{\vartheta}) &= \frac{\exp(-\bar{\vartheta} \eta)}{\mathfrak{E}}, \quad \mathfrak{E} = \int_{\mathcal{E}} \exp(-\bar{\vartheta} \eta) d\eta, \quad \bar{\vartheta} = \frac{w_0}{24-p}.
 \end{aligned}$$

ЛДРР-О. Аналитические выражения для соответствующих ПРВ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 F^*(\mathbf{c}, \zeta, \chi) &= V^*(\mathbf{c}, \lambda) Z^*(\zeta, \lambda), \quad Z^*(\zeta, \lambda) = \prod_{n=p}^{(24)} Z_n^*(\zeta[n], \lambda_n), \\
 V^*(\mathbf{c}, \lambda) &= \prod_{k=0}^p V_k^*(c_k), \quad V_k^*(b_k) = \frac{\exp(-s_k c_k)}{\mathcal{V}_k}, \\
 \mathcal{V}_k &= \int_{\mathcal{C}_k} \exp(-s_k c_k) dc_k, \\
 s_0 &= \sum_{n=p}^{24} \lambda_n, \quad s_k = \sum_{n=p}^{24} \lambda_n R^{(r)}[n-k], \quad k = \overline{1, p}, \\
 Z_n^*(\zeta[n], \lambda_n) &= \frac{\exp(-\lambda_n \zeta[n])}{\mathfrak{Z}_n}, \quad \mathfrak{Z}_n = \int_{\mathcal{Z}_n} \exp(-\lambda_n \zeta[n]) d\zeta[n], \\
 G^*(\chi, \bar{\lambda}) &= \frac{\exp(-\bar{\lambda} \chi)}{\mathfrak{G}}, \quad \mathfrak{G} = \int_{\mathcal{G}} \exp(-\bar{\lambda} \chi) d\chi, \quad \bar{\lambda} = \frac{w_0}{24-p}.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

2. Тестирование (1998–2007 гг.). Процедура тестирования применяется к комбинации обученных моделей, описанной в разделе 2, с использованием тестовых коллекций данных. Основу процедуры составляют сэмплы

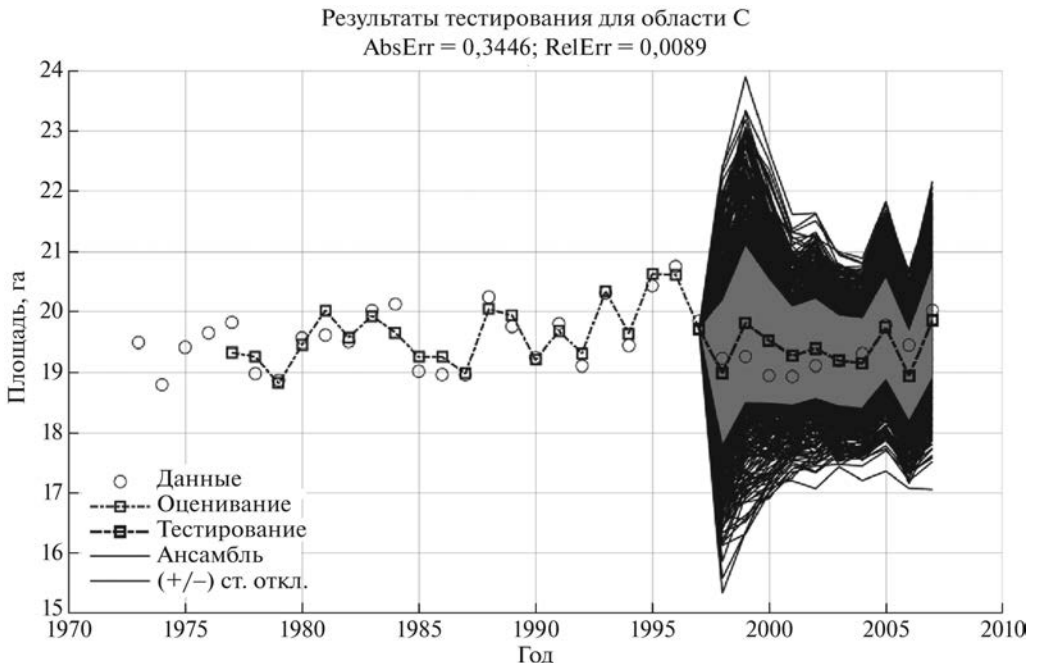


Рис. 3. Динамика площади.

Результаты тестирования для области С
AbsErr = 1,2863; RelErr = 0,0801

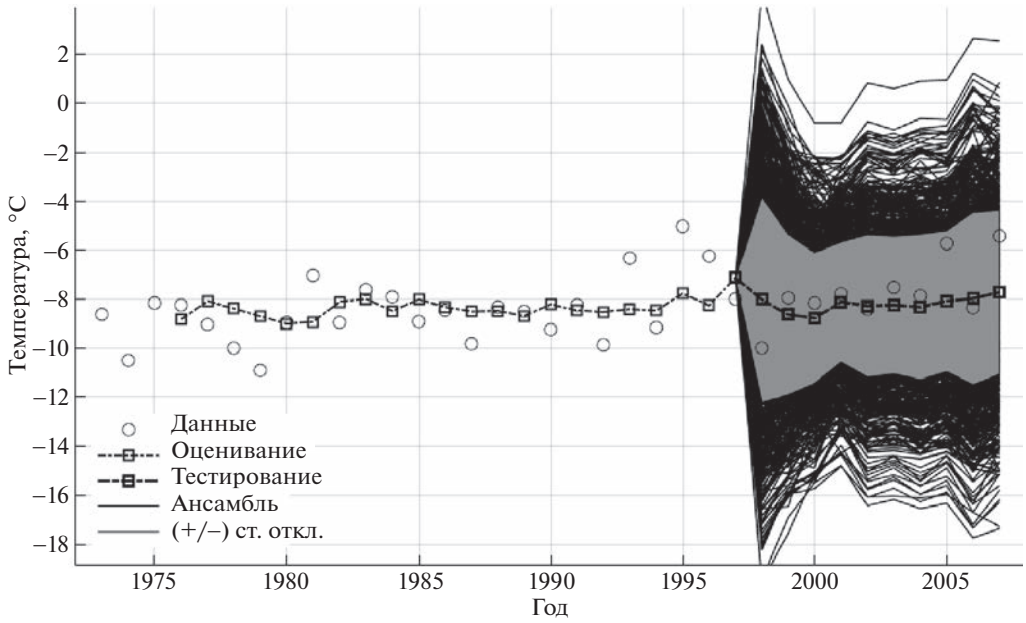


Рис. 4. Динамика среднесуточной температуры.

Результаты тестирования для области С
AbsErr = 107,6399; RelErr = 0,1675

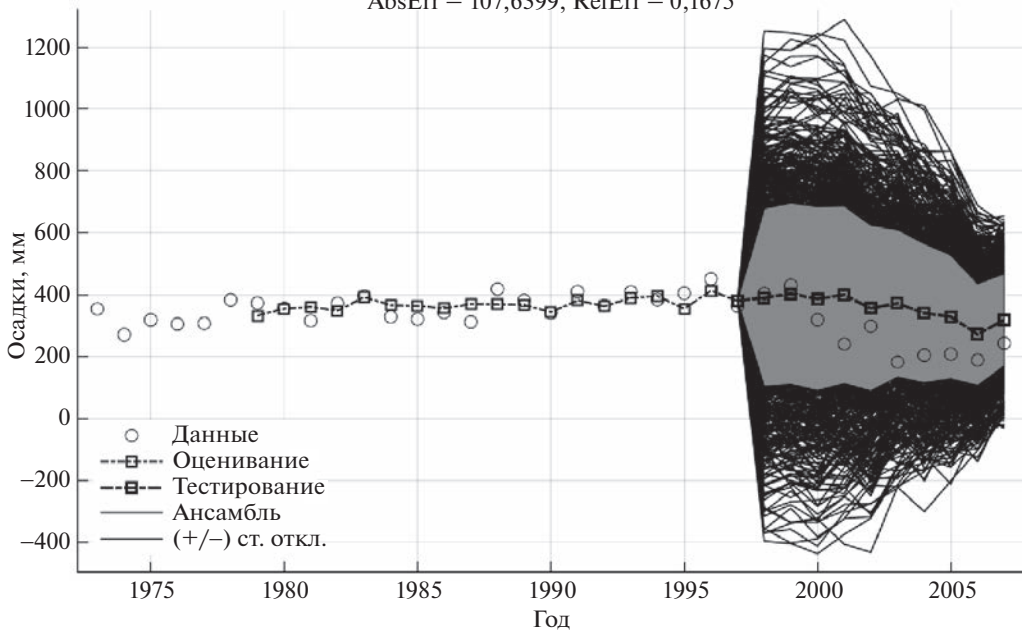


Рис. 5. Динамика годовой суммы осадков.

Результаты прогнозирования для области С
(2008–2022)

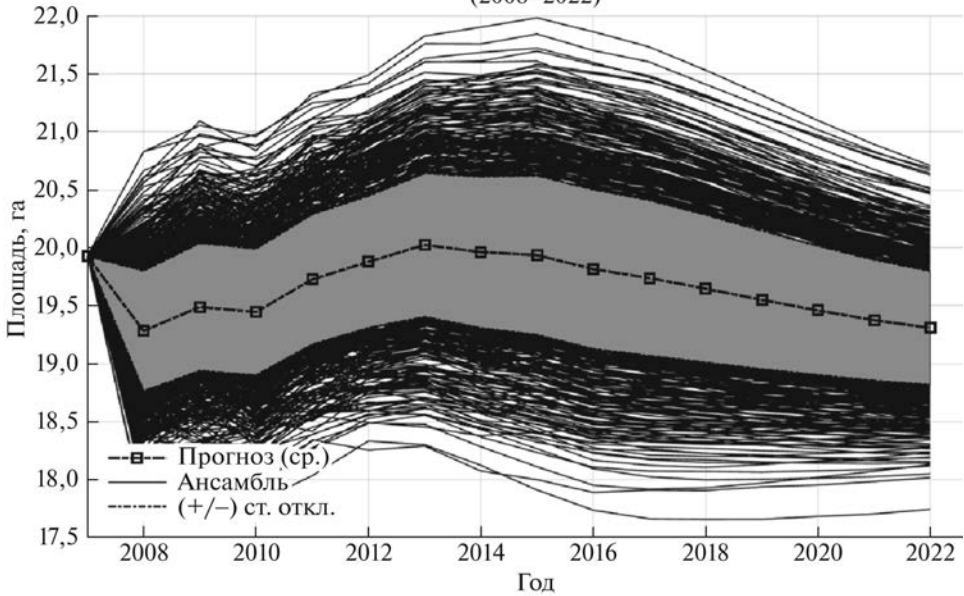


Рис. 6. Прогнозные траектории площади озер: ансамбль, дисперсионные трубки, средние траектории.

оптимальных ПРВ [22] и генерация ансамблей случайных траекторий на интервале тестирования. Оценка качества моделей производилась по степени близости средних модельных траекторий к реальным данным на интервале наблюдений в терминах относительной ошибки (2.15). В табл. 2 приведены значения относительных ошибок тестирования для северной зоны. На рис. 3–5 показаны примеры тестируемых траекторий с указанием соответствующих ошибок.

3. *Рандомизированное прогнозирование (2008–2023 гг.)*. Все прогнозы строятся с использованием модели (рис. 1), элементами которой являются ЛДРР-П, ЛДРР-Т и ЛДРР-О. Энтропийно-оптимальные ПРВ генерируют ансамбли траекторий, характеризующие временную эволюцию площади термокарстовых озер на соответствующем интервале прогноза. Отличие интервала прогноза от интервала тестирования заключается в том, что в данном случае для обучения моделей используются все точки данных.

Для каждой точки по ансамблю вычисляется среднее значение (*mean*) и стандартное отклонение (*std*). Результаты прогнозирования для северной зоны представлены на рис. 6, где показан ансамбль прогнозных траекторий по

Таблица 2. Относительные ошибки тестирования

Оценка	ЛДРР-П	ЛДРР-Т	ЛДРР-О
<i>RelErr</i>	0,0089	0,0801	0,1675

площади озер и отмечены траектория средних значений (темная кривая) и дисперсионная трубка (серая зона).

6. Обсуждение результатов

Процессы формирования и эволюции площади термокарстовых озер в зонах вечной мерзлоты изучены недостаточно как с точки зрения внутренней геологической динамики, так и внешних климатических факторов, влияющих на их формирование. Процедуры трансформации спутниковых снимков в количество и площадь озер сопровождаются весьма существенными погрешностями. Поэтому модельная информация и данные о состоянии исследуемого объекта являются неопределенными.

Алгоритмы РМО ориентированы на оценивание характеристик таких моделей с использованием данных с ошибками неизвестной природы. В результате восстанавливаются функции ПРВ параметров моделей и измерительных шумов, соответствующие максимальной неопределенности.

Сэмплирование оптимальных функций ПРВ и применение метода Монте-Карло позволяют генерировать ансамбли траекторий, характеризующих эволюцию площади термокарстовых озер. Статистическая обработка этих ансамблей позволяет получать различные их числовые характеристики, прежде всего средние траектории и множество траекторий, границами которого являются среднеквадратичные траектории (дисперсионные трубки). Сравнение средних траекторий с реальными данными в терминах относительных среднеквадратичных (интегральных) ошибок для различных участков поверхности составляет 8–17%.

Проведенное исследование данного объекта с применением, адаптацией и тестированием алгоритмов рандомизированного машинного обучения продемонстрировало достаточно высокую точность по воспроизведению средних траекторий (8–17%). Максимальные размеры дисперсионных трубок, вычисленных по генерируемым ансамблям, составляли $\pm 9\%$.

Во всех исследованиях использовались линейные рандомизированные модели динамической регрессии с памятью $p = 3 \div 5$. Для моделирования эволюции площади они дали вполне приемлемые результаты. Но для климатических параметров ошибки тестирования оказывались существенно выше. По-видимому, с переходом на нелинейные варианты моделей удастся повысить точность воспроизведения реальных данных.

Проблемной частью метода РМО остаются балансовые уравнения, в которые входят так называемые интегральные компоненты. Это — многомерные определенные интегралы с параметрами, вычисляемые на простых множествах (параллелепипедах). В данном исследовании, где использовались линейные модели, они вычислялись аналитически и можно было использовать программное интегрирование соответствующих аналитических выражений. Однако при переходе на нелинейные модели такой путь исключен.

7. Заключение

Данная работа является одной из посвященных исследованию работоспособности и эффективности метода рандомизированного машинного обучения. В ней сделан уклон на проблемы использования оптимальных рандомизированных моделей для прогнозирования. Их особенность состоит в том, что прогнозируемая входная последовательность для этих моделей, как правило, неизвестна. В этой ситуации предлагается ее генерировать с помощью вспомогательной случайной последовательности, энтропийно-оптимальные характеристики которой можно восстановить при машинном обучении соответствующей модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vapnik V.N.* Statistical Learning Theory. John Wiley & Sons, 1998.
2. *Bishop C.* Pattern Recognition and Machine Learning. N.Y. Springer, 2007.
3. *Friedman J., Hastie T., Tibshirani R.* The elements of statistical learning. Volume 1, Springer series in statistics, Berlin. Springer, 2009.
4. *Popkov Yu.S., Dubnov Yu.A., Popkov A.Yu.* Randomized Machine Learning: Statement, Solution, Applications // Proc. IEEE Int. Conf. on Intelligent Systems. 2016. P. 27–39.
5. *Zuidhoff F.S., Kolstrup E.* Changes in palsa distribution in relation to climate change in Laivadalen, Northern Sweden, especially 1960–1997 // Permafrost and Periglacial Processes. 2000. V. 11. P. 55–69.
6. *Kirpotin S., Polishchuk Y., Bruksina N.* Abrupt changes of thermokarst lakes in Western Siberia: impacts of climatic warming on permafrost melting // Int. J. Environmental Studies. 2009. V. 66. No. 4. P. 423–431.
7. *Karlson J.M., Lyon S.W., Destouni G.* Temporal behavior of lake size-distribution in a thawing permafrost landscape in Northwestern Siberia // Remote Sensing. 2014. No. 6. P. 621–636.
8. *Bryksina N.A., Polishchuk Yu.M.* Analysis of changes in the number of thermokarst lakes in permafrost of Western Siberia on the basis of satellite images // Cryosphere of Earth. 2015. V. 19. No. 2. P. 114–120.
9. *Liu Q., Rowe M.D., Anderson E.J., Stow C.A., Stumpf R.P.* Probabilistic forecast of microcystin toxin using satellite remote sensing, *in situ* observation and numerical modeling // Environment Modelling and Software. 2020. V. 128. P. 104705.
10. *Vidyasagar M.* Statistical Learning Theory and Randomized Algorithms for Control // IEEE Control System Magazine. 1998. V. 1. No. 17. P. 69–88.
11. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2002.
12. *Biondo A.E., Pluchino A., Rapisarda A., Helbing D.* Are random trading strategies more successful than technical ones? // PLoS ONE. 2013. V. 6. No. 7. P. e68344.
13. *Lutz W., Sandersen S., Scherbov S.* The end of world population growth // Nature. 2001. V. 412. No. 6846. P. 543–545.
14. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их применение. М.: Физматлит, 1997.

15. *Shannon C.* Communication Theory of Secrecy Systems // Bell System Technical Journal. 1949. V. 28. No. 4. P. 656–715.
16. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistical Mechanics // Physics Review. 1957. V. 106. P. 620–630.
17. *Jaynes E.T.* Papers on probability, statistics and statistical physics. Dordrecht. Kluwer Academic Publisher, 1989.
18. *Jaynes E.T.* Probability Theory. The logic and science. Cambridge University Press, 2003.
19. *Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А.* Рандомизированное машинное обучение при ограниченных объемах данных. М.: УРСС, 2019.
20. *Popkov Y., Popkov A.* New Method of Entropy-Robust Estimation for Randomized Models under Limited Data // Entropy. 2014. V. 16. P. 675–698.
21. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1984.
22. *Дарховский Б.С., Попков Ю.С., Попков А.Ю., Алиев А.С.* Метод генерации случайных векторов с заданной функцией плотности распределения вероятностей // АиТ. 2018. № 9. С. 31–45. <https://doi.org/10.31857/S000523100001408-2>
Darkhovsky B.S., Popkov Y.S., Popkov A.Y., Aliev A.S. A Method of Generating Random Vectors with a Given Probability Density Function // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 9. P. 1569–1581. <https://doi.org/10.1134/S0005117918090035>
23. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.
24. *Электронный ресурс:* <https://cloud.uriit.ru/index.php/s/0DOrxL9RmGqXsV0>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Н. Соболевским.

Поступила в редакцию 20.04.2022

После доработки 21.06.2022

Принята к публикации 29.09.2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2023 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИИ ПОВТОРЕНИЯ И АМПЛИТУДНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ¹

Рассматривается линейная дискретная система, функционирующая в повторяющемся режиме, задачей которой является слежение за эталонной траекторией с требуемой точностью при условии, что управление запаздывает вдоль траектории повторения и при амплитудных ограничениях типа насыщения. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением, зависящего от запаздывания и позволяющего обеспечить необходимую точность слежения. Приведен пример, демонстрирующий эффективность метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, амплитудные ограничения, запаздывание, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, стабилизация, векторная функция Ляпунова, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023010063, EDN: LUKRYD

1. Введение

Управление с итеративным обучением (УИО) является эффективным инструментом повышения точности в системах, работающих в повторяющемся режиме [1]. Простым характерным примером таких систем может служить порталный робот-манипулятор, устанавливающий детали в требуемые позиции на конвейере. В настоящее время алгоритмы управления с итеративным обучением находят применение в медицинских роботах для реабилитации больных, перенесших инсульт [2, 3], в устройствах поддержки желудка сердца [4], в установках высокоточного многослойного лазерного напыления [5, 6] и в других приложениях, где процессы носят повторяющийся характер [6–8].

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00612, <https://rscf.ru/project/22-21-00612/>.

Большинство работ, посвященных синтезу алгоритмов УИО, базируется на линейных моделях [9, 10]. В то же время исполнительные органы робототехнических систем, как правило, являются электромеханическими устройствами, для которых характерны нелинейности типа насыщения, зоны нечувствительности, люфта и гистерезиса. Влияние этих нелинейностей может сделать недостижимой требуемую точность и поэтому требует детального исследования. Другим фактором, не учитываемым в линейных моделях, являются запаздывания, которые, в частности, возникают при удаленном управлении.

Исследованию указанных факторов в задачах УИО в текущей литературе посвящен ряд работ, но они не дают исчерпывающего решения связанных с этими факторами задач. В данной работе ограничимся рассмотрением широко распространенной нелинейности с характеристикой типа насыщения. В [11–17] предложены различные алгоритмы УИО для систем с насыщением, но ни в одной из них не обсуждается влияние величины насыщения на точность. Показано, что эти алгоритмы обеспечивают уменьшение ошибки обучения, но нигде не отмечено, как величина насыщения влияет на установившееся значение этой ошибки при неограниченном увеличении числа повторений.

Управление с итеративным обучением учитывает особенность повторяющихся процессов, которая заключается в том, что сигналы ошибок обучения от предыдущих повторений содержат существенную информацию и все алгоритмы УИО эффективно используют эту информацию на текущем шаге. УИО отличается от других стратегий управления с обучением, таких как адаптивное управление и нейросетевое управление. Стратегии адаптивного управления изменяют параметры регулятора, тогда как УИО изменяет только входной сигнал. Кроме того, адаптивные регуляторы обычно не используют информацию, содержащуюся в повторяющихся командных сигналах. Точно так же обучение нейронной сети включает в себя изменение параметров регулятора, модифицируя обучаемую нейронную сеть. Эти сети обычно требуют большого объема обучающих данных, и бывает трудно гарантировать быструю сходимость, тогда как алгоритмы УИО обычно сходятся адекватно всего за несколько итераций [9] и список литературы в [9].

В соответствии с отмеченной особенностью УИО, здесь возможны различные варианты запаздываний: это могут быть запаздывания по состоянию и управлению на каждом повторении и запаздывания вдоль повторений, т.е. на текущем повторении может быть доступна информация не с предыдущего, а с более раннего повторения. В [18–23] предложены различные алгоритмы УИО для систем с запаздыванием по состоянию на повторениях. Другие виды запаздываний в известной авторам литературе не рассматривались.

Данная статья развивает результаты [24] для систем с нелинейностью типа насыщения и запаздыванием вдоль траектории повторения. Одновременный учет этих факторов ранее в литературе не рассматривался, хотя, как показывает приводимый далее пример, их сочетание вполне естественно в

технических системах. Как и в [24], здесь используется подход, основанный на построении 2D-модели в виде повторяющегося процесса [25] в сочетании с дивергентным методом векторных функций Ляпунова [26], что позволяет в итоге применить для получения конечных результатов эффективную технику линейных матричных неравенств. Предложенный алгоритм УИО зависит от запаздывания. Приведен пример и сформулированы возможные пути дальнейших исследований.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную систему в повторяющемся режиме, которая на k -м повторении описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= Ax_k(p) + B\psi_k(p-d), \\ \psi_k(p) &= \text{sat}(u_k(p)), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad p \in [0, N-1], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управления $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор выходных переменных, называемый профилем повторения, k — номер повторения, N — продолжительность повторения, d — число шагов запаздывания, $\psi_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — функция насыщения, которая задается следующим образом:

$$(2.2) \quad \psi_k(p)_j = \text{sat}(u_k(p))_j = \begin{cases} U_j & \text{если } u_{k,j}(p) > U_j, \\ u_{k,j}(p) & \text{если } -U_j \leq u_{k,j}(p) \leq U_j, \\ -U_j & \text{если } u_{k,j}(p) < -U_j, \end{cases}$$

для $1 \leq j \leq n_u$, $k \geq 0$, где $u_{k,j}(p)$ — j -я компонента $u_k(p)$, а U_j — положительная постоянная.

Пусть $y_{ref}(p)$, $0 \leq p \leq N$ — заданная эталонная траектория (желаемый профиль повторения). Тогда

$$(2.3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

является ошибкой обучения на повторении k .

Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений $u_k(p)$, которая, оставаясь ограниченной при всех $k = 0, 1, \dots$, обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения эталонной траектории за конечное число повторений k^* и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(2.4) \quad \|e_k(p)\| \leq e^*, \quad k \geq k^*, \quad 0 \leq p \leq N.$$

3. Переход к эквивалентной 2D модели в виде повторяющегося процесса

Поставленная задача будет решена, если указанная последовательность $u_k(p)$ удовлетворяет условиям

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(p)\| &= \|e_\infty(p)\|, \\ \|e_k(p)\| &\leq \kappa \varrho^k + \mu, \quad \kappa > 0, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \varrho < 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(p)\| &= \|u_\infty(p)\|, \end{aligned}$$

где $u_\infty(p)$ — ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Закон управления с итеративным обучением на текущем будем формировать следующим образом

$$(3.2) \quad \psi_{k+1}(p) = \text{sat}(u_{k+1}(p)), \quad u_{k+1}(p) = \text{sat}(\psi_k(p) + \delta u_{k+1}(p)),$$

где $\delta u_{k+1}(p)$ — корректирующая поправка, которая должна быть выбрана так, чтобы обеспечить условия сходимости (3.1).

Следуя стандартной технике, перейдем от (2.1) к эквивалентной расширенной модели, с этой целью введем вспомогательный вектор \hat{x}_k размерности dn_u , компоненты которого определяются как $\hat{x}_{ki}(p) = \psi_k(p - i)$, $i = 1, \dots, d$. Этот вектор, очевидно, будет удовлетворять уравнению

$$(3.3) \quad \hat{x}_k(p + 1) = A_d \hat{x}_k(p) + B_d \psi_k(p),$$

где

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T.$$

С учетом этого первое уравнение из (2.1) можно записать в виде

$$(3.4) \quad x_k(p + 1) = Ax_k(p) + BC_d \hat{x}_k(p),$$

где $C_d = \underbrace{[0 \ \dots \ 0]}_{d-1} I$.

Обозначим $\bar{x}_{k+1}(p) = [x_{k+1}^T(p) \ \hat{x}_{k+1}^T(p)]^T$ запишем (3.3), (3.4) в виде одного уравнения

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \bar{x}_k(p + 1) &= \hat{A} \bar{x}_k(p) + \hat{B} \psi_k(p), \\ y_k(p) &= \hat{C} \bar{x}_k(p), \end{aligned}$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & BC_d \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [C \ 0].$$

Предположим, что вектор состояния доступен для формирования управления и матрица CB является невырожденной. При отсутствии запаздывания последнее условие позволяет достаточно просто записать уравнение для ошибки обучения, как функции числа повторений. Для расширенной модели $\hat{C}\hat{B} = 0$, что приводит к необходимости дополнительных преобразований. Сначала запишем уравнения для приращений расширенного вектора состояния. Для этого введем вспомогательную переменную

$$(3.6) \quad \eta_{k+1}(p+1) = \bar{x}_{k+1}(p) - \bar{x}_k(p).$$

В соответствии с (3.5) эта переменная удовлетворяют уравнению

$$(3.7) \quad \eta_{k+1}(p+1) = \hat{A}\eta_{k+1}(p) + \hat{B}\Delta\psi_{k+1}(p-1),$$

где $\Delta\psi_{k+1}(p-1) = \psi_{k+1}(p-1) - \psi_k(p-1)$. Учитывая структуру матриц \hat{A} и \hat{B} , нетрудно непосредственно убедиться, что

$$(3.8) \quad \hat{C}\hat{A}^d\hat{B} = CB.$$

Введем в рассмотрение смещенную ошибку обучения $\bar{e}_k(p) = e_k(p+d)$. В соответствии с (2.3), (3.5)–(3.7) она будет описываться уравнением

$$(3.9) \quad \bar{e}_{k+1}(p) = -\hat{C}\hat{A}^{d+1}\eta_{k+1}(p) + \bar{e}_k(p) - CB\Delta\psi_{k+1}(p-1).$$

Заметим, что при формировании управления в (3.2), кроме переменных состояния, доступна также переменная \hat{x}_{kd} . Это дает дополнительную информацию для формирования управления, поэтому корректирующую поправку зададим в виде

$$(3.10) \quad \delta u_{k+1}(p) = K_1\eta_{k+1}(p+1) + K_2\bar{e}_k(p+1),$$

где матрица K_1 имеет вид

$$K_1 = \left[\underbrace{K_{11}}_{n_x} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{(d-1)n_u} \quad \underbrace{K_{12}}_{n_u} \right].$$

Подставляя (3.10) в (3.7), (3.9), получим

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \eta_{k+1}(p+1) &= (\hat{A} + \hat{B}K_1)\eta_{k+1}(p) + \hat{B}K_2\bar{e}_k(p) + \hat{B}\varphi_k(p), \\ \bar{e}_{k+1}(p) &= -(\hat{C}\hat{A}^{d+1} + CBK_1)\eta_{k+1}(p) + \\ &\quad + (I - CBK_2)\bar{e}_k(p) - CB\varphi_k(p), \end{aligned}$$

где $\varphi_k(p) = \Delta\psi_{k+1}(p-1) - \delta u_{k+1}(p-1)$. Обозначим

$$K = [K_1 \ K_2], \quad \zeta_k(p) = [\eta_{k+1}^T(p) \ \bar{e}_k^T(p)]^T.$$

Из (2.2) следует ограничение

$$(3.12) \quad -2U_j \leq \text{sat}(u_{k+1}(p))_j - \text{sat}(u_k(p))_j \leq 2U_j, \quad j = 1, \dots, n_u.$$

В соответствии с (2.2), (3.10) нетрудно видеть, что компоненты функции $\varphi_k(p)$ удовлетворяют ограничениям

$$(3.13) \quad F_j[(\varphi_k(p))_j, (\zeta_k(p))_j] = \left[1 + \frac{1}{2U_j}((\varphi_k(p))_j + (K\zeta_k(p))_j) \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{2U_j}((\varphi_k(p))_j + (K\zeta_k(p))_j) \right] \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_u.$$

Система (3.11) относится к классу нелинейных повторяющихся процессов, которые представляют собой наиболее распространенный частный случай так называемых $2D$ систем [25].

4. Синтез на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Рассмотрим векторную функцию Ляпунова, определенную на траекториях системы (3.11):

$$(4.1) \quad V(\eta_{k+1}(p), \bar{e}_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_2(\bar{e}_k(p)) \end{bmatrix},$$

где $V_1(\eta_{k+1}(p)) > 0$, $\eta \neq 0$, $V_2(\bar{e}_k(p)) > 0$, $\bar{e}_k(p) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$, и определим аналог оператора дивергенции вдоль траекторий этой системы как

$$(4.2) \quad \mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), \bar{e}_k(p)) = V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p)) + \\ + V_2(\bar{e}_{k+1}(p)) - V_2(\bar{e}_k(p)).$$

Теорема 1. Если существуют векторная функция Ляпунова (4.1), положительные числа c_1, c_2, c_3 и неотрицательное число γ такие, что

$$(4.3) \quad c_1 \|\eta_k(p)\|^2 \leq V_1(\eta_k(p)) \leq c_2 \|\eta_k(p)\|^2,$$

$$(4.4) \quad c_1 \|\bar{e}_k(p)\|^2 \leq V_2(\bar{e}_k(p)) \leq c_2 \|\bar{e}_k(p)\|^2,$$

$$(4.5) \quad \mathcal{D}_d V(\eta_{k+1}(p), \bar{e}_k(p)) \leq \gamma - c_3(\|\eta_{k+1}(p)\|^2 + \|\bar{e}_k(p)\|^2),$$

то для системы (3.11) выполняются условия сходимости (3.1).

Доказательство. Для случая $\gamma = 0$ доказательство совпадает с приведенным в [26] (Теорема 1). При $\gamma \neq 0$, следуя технике указанного доказательства, получим

$$(4.6) \quad \|\bar{e}_k(p-1)\|^2 \leq \frac{1}{c_1} \left[\lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} V_2(\bar{e}_0(q)) + \gamma \sum_{n=0}^{k-1} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \right) \lambda^{k-1-n} \right],$$

где $0 < \lambda < 1$. Поскольку $\|\bar{e}_0(q)\|^2$ ограничена для всех $0 \leq q \leq N-1$, существует $\bar{\mu} > 0$, такое что $\|\bar{e}_0(q)\|^2 \leq \bar{\mu}$ и в соответствии с (4.4)

$$(4.7) \quad \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} V_2(\bar{e}_0(q)) \leq c_2 \bar{\mu} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^{p-1-q} = \frac{c_2 \bar{\mu}}{1-\lambda}.$$

Из (4.6) с учетом (4.7) получим

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \|\bar{e}_k(p-1)\|^2 &\leq \alpha \lambda^k + \beta, \\ \alpha &= \frac{c_2 \bar{\mu}}{c_1(1-\lambda)}, \quad \beta = \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}, \quad 1 \leq p \leq N. \end{aligned}$$

Поскольку $\bar{e}_k(p-1)$ по определению является смещенной ошибкой обучения, из (4.8) получим второе неравенство из (3.1) с параметрами $\kappa = \sqrt{\alpha}$, $\varrho = \sqrt{\lambda}$ и $\mu = \sqrt{\beta}$. Кроме того, по аналогии с выводом (4.8) приходим к следующей оценке:

$$(4.9) \quad \|\eta_k(p)\| \leq \kappa \varrho^k + \mu, \quad 0 \leq p \leq N-1.$$

Поскольку $\delta u_{k+1}(p)$ определяется выражением (3.10), из (4.8) и (4.9) следует существование $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\mu}$ таких, что

$$\|\delta u_{k+1}(p)\| \leq \tilde{\kappa} \varrho^k + \tilde{\mu}$$

для всех k и $0 \leq p \leq N-1$. Из второго равенства в (3.2) имеем:

$$\|u_{k+1}(p)\| \leq \|\psi_k(p)\| + \|\delta u_{k+1}(p)\|.$$

Откуда, с учетом ограниченности $\psi_k(p)$ и предыдущего неравенства следует, что $\|u_k(p)\|$ ограничена для всех k и $0 \leq p \leq N-1$ и $\|u_\infty(p)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(p)\|$ также ограничена. Таким образом, все условия из (3.1) выполнены. Теорема доказана.

Обозначим

$$(4.10) \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ -\hat{C}\hat{A}^{d+1} & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ -CB \end{bmatrix},$$

$$D_U = \text{diag}[1/4U_j^2], \quad T_U = D_U^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n_u$$

и определим матрицу $P = \text{diag}[P_1 P_2] \succ 0$ как решение дискретного алгебраического неравенства Риккати

$$(4.11) \quad \bar{A}^T P \bar{A} - (1 - \sigma)P - \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q \preceq 0,$$

где $0 < \sigma < 1$ и $Q \succ 0$ и $R \succ 0$. Это неравенство вводится с целью выделения в правой части выражения для дивергенции соотношений, близких к используемым в классической теории линейно-квадратичного регулятора. В частности, матрицы Q и R по смыслу аналогичны весовым матрицам в упомянутой теории, а параметр σ дает дополнительную возможность влияния на запас устойчивости. После таких преобразований, детально изложенных в [27], удастся эффективно применить технику линейных матричных неравенств (ЛМН). С помощью леммы о дополнении Шура (4.11) легко сводится к ЛМН относительно переменной $X = \text{diag}[X_1 X_2]$ с $X_1 = P_1^{-1}$ и $X_2 = P_2^{-1}$:

$$(4.12) \quad \begin{bmatrix} (1 - \sigma)X & X \bar{A}^T & X \\ \bar{A}X & X + \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad X \succ 0.$$

Если это ЛМН разрешимо, то $P = X^{-1}$ и в соответствии с результатами [27] линейный закон управления без ограничений с корректирующей поправкой (3.10), которую компактно можно записать как $\delta u_{k+1}(p) = K \zeta_k(p)$, гарантирует сходимость ошибки обучения к нулю при $k \rightarrow \infty$, где

$$(4.13) \quad K = [K_1 K_2] = -[\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} \Theta,$$

Θ — блочно диагональная матрица вида

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ 0 & \Theta_2 \end{bmatrix}, \quad \Theta_1 = \text{diag} \left[\underbrace{\Theta_{11}}_{n_x}, \underbrace{0 \dots 0}_{(d-1)n_u}, \underbrace{\Theta_{12}}_{n_u} \right],$$

удовлетворяющая ЛМН

$$(4.14) \quad \begin{bmatrix} M - M\Theta - \Theta M - Q & \Theta \sqrt{M} \\ \sqrt{M} \Theta & -I \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$M = \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}$. Соотношение (4.14) отражает структурные ограничения на матрицу K_1 в (3.10), при отсутствии таких ограничений оно заведомо выполняется. Матрица корректирующей поправки для случая отсутствия ограничений может быть также вычислена альтернативным методом. Пусть переменные X , Y , Z являются решением системы матричных неравенств и уравнений

$$(4.15) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}X + \bar{B}YH)^T & X & (YH)^T \\ \bar{A}X + \bar{B}YH & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ YH & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$HX = ZH, \quad X = \text{diag}[X_1 X_2] \succ 0,$$

где

$$H = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_{n_u} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_{n_y} \end{bmatrix}.$$

В этом случае в соответствии с леммой о дополнении Шура справедливо неравенство

$$(4.16) \quad (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}H)^T P (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}H) - P + Q + (\bar{K}H)^T R \bar{K}H \preceq 0,$$

где $P = \text{diag}[P_1 \ P_2] = X^{-1} \succ 0$,

$$(4.17) \quad \bar{K} = YZ^{-1},$$

из которого следует, что выполняются условия теоремы 1 из [26] с компонентами векторной функции Ляпунова в виде квадратичных форм

$$(4.18) \quad \begin{aligned} V_1(\eta_{k+1}(p)) &= \eta_{k+1}^T(p) P_1 \eta_{k+1}(p), \\ V_2(\bar{e}_k(p)) &= \bar{e}_k^T(p) P_2 \bar{e}_k(p) \end{aligned}$$

и корректирующая поправка $\delta u_{k+1}(p) = \bar{K}H\zeta_k(p)$ гарантирует сходимость ошибки обучения в системе без ограничений к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть для заданных ограничений (3.13) и некоторых матриц $Q \succ 0$, $R \succ 0$ и Θ существует решение $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$ системы (4.12), (4.14), такое что ЛМН

$$(4.19) \quad \begin{bmatrix} -W & -(KW)^T & (\bar{A}W + \bar{B}KW)^T \\ -KW & -TT_U & TT_U \bar{B}^T \\ (\bar{A}W + \bar{B}KW) & \bar{B}TT_U & -W \end{bmatrix} \prec 0$$

разрешимо относительно переменных $W = \text{diag}[W_1 \ W_2] \succ 0$, $T = \text{diag}[T_j] \succ 0$, $j = 1, \dots, n_u$, при K , определяемым (4.13). Тогда закон управления с итеративным обучением (3.2), (3.10) обеспечивает условия сходимости (3.1).

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции (4.1) в виде квадратичных форм вида (4.18), где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ и образуем блочную матрицу $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$. Поскольку система (4.12), (4.14) разрешима, определим K по формуле (4.13). Вычисляя дивергенцию (4.2) вдоль траекторий (3.11), получим

$$(4.20) \quad \mathcal{D}_d V(\eta, \bar{e}) = [(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}_\varphi]^T P [(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}_\varphi] - \zeta^T P \zeta.$$

Поскольку $V_1(\eta_{k+1}(p)) \succ 0$ и $V_2(\bar{e}_k(p)) \succ 0$, то справедливы условия (4.3) и (4.4) Теоремы 1.

Для выполнения условия (4.5) Теоремы 1 при выполнении ограничений (3.13) достаточно, чтобы для всех φ и ζ выполнялось неравенство

$$(4.21) \quad \mathcal{D}_d V(\eta, \bar{e}) + \sum_{j=1}^{n_u} d_j F_j[(\varphi_k)_j, (\zeta_k)_j] \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

где d_j , $j = 1, \dots, n_u$ — положительные постоянные и ϵ — достаточно малое положительное число [28]. При выполнении (4.21) получим что

$$\mathcal{D}_d V(\eta, \bar{e}) \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

для всех φ и ζ , и, следовательно, при ограничениях (3.13). Таким образом, все условия теоремы 1 будут выполнены, а условие (4.21) можно переписать в виде

$$(4.22) \quad \mathcal{D}_d V(\eta, e) - \zeta^T (KH)^T DD_U KH \zeta - 2\zeta^T (KH)^T DD_U \varphi - \\ - \varphi^T DD_U \varphi + \text{tr}(D) \leq \gamma - \epsilon \|\zeta\|^2,$$

где $D = \text{diag}[d_j]$, $j = 1, 2, \dots, n_u$ и ϵ — достаточно малое положительное число.

В случае, когда $n_u = 1$, этот подход, известный как S -процедура, гарантирует, что (4.21) является не только достаточным, но и необходимым условием выполнения (4.5) при ограничениях (3.13) [29].

Выбирая $\gamma = \text{tr}(D)$, получим, что условие (4.5) теоремы 1 выполняется, если

$$(4.23) \quad [(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}\varphi]^T P[(\bar{A} + \bar{B}KH)\zeta + \bar{B}\varphi] - \zeta^T P \zeta - \\ - 2\zeta^T (KH)^T DD_U \varphi - \varphi^T DD_U \varphi < 0,$$

или

$$[\zeta^T \ \varphi^T] \bar{M}_i [\zeta^T \ \varphi^T]^T < 0,$$

где

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}KH)^T P(\bar{A} + \bar{B}KH) - P & (\bar{B}^T P(\bar{A} + \bar{B}KH) - DD_U KH)^T \\ \bar{B}^T P(\bar{A} + \bar{B}KH) - DD_U KH & \bar{B}^T P \bar{B} - DD_U \end{bmatrix}.$$

Матрица \bar{M} может быть переписана как

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -P & -(KH)^T DD_U \\ -DD_U KH & -DD_U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}KH)^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} P[(\bar{A} + \bar{B}KH) \ \bar{B}].$$

По лемме о дополнении Шура $\bar{M}_i < 0$ если и только если

$$(4.24) \quad \begin{bmatrix} -P & -(KH)^T DD_U & (\bar{A}_i + \bar{B}KH)^T \\ -DD_U(KH) & -DD_U & \bar{B}^T \\ (\bar{A}_i + \bar{B}KH) & \bar{B} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Обозначим $W = P^{-1}$, $T = D^{-1}$. Умножая (4.24) на $\text{diag}[P^{-1} [DD_U]^{-1} I]$ справа и слева, получим, что справедливо (4.19). Теорема доказана.

Используя другой метод вычисления матрицы K , сформулируем альтернативную версию теоремы.

Теорема 3. Пусть для заданных ограничений (3.13) и некоторых матриц $Q \succ 0$, $R \succ 0$ существует решение $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$, Y , Z системы (4.15), такое что ЛМН (4.19) разрешимо относительно переменных $W = \text{diag}[W_1 \ W_2] \succ 0$, $T = \text{diag}[T_j] \succ 0$, $j = 1, \dots, n_u$, при $K = \bar{K}H$, где \bar{K} определяется из (4.17). Тогда закон управления с итеративным обучением (3.2), (3.10) обеспечивает условия сходимости (3.1).

5. Пример

Рассмотрим модель экспериментальной установки из [30]. Она состоит из двух синхронных двигателей с постоянными магнитами, валы которых соединены муфтой. Первый двигатель (А) является приводом, а второй двигатель (Б) создает крутящий момент нагрузки. Целью управления является воспроизведение валом привода заданной траектории изменения углового положения $\theta(t)$. Непрерывная модель динамики установки имеет вид

$$(5.1) \quad T_e(t) = i_A(t)k_{tA} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + T_1(t),$$

где $T_e(t)$ — крутящий момент, создаваемый двигателем А, k_{tA} — постоянная крутящего момента двигателя А, J — общий момент инерции, b — результирующий коэффициент трения, $T_1(t)$ — крутящий момент нагрузки (двигателя Б). Численные значения параметров следующие: $T_{cA} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ с, $k_{tA} = 0,93$ Н·м/А, $J = 9,3 \cdot 10^{-4}$ кг·м², $b = 2,4 \cdot 10^{-3}$ кг·м²/с.

Дискретный сигнал управления вычисляется с шагом дискретности $T_s = 2$ мс при запаздывании на 1 шаг. Этот сигнал преобразуется в управляющий ток с помощью экстраполяции нулевого порядка и последующего усиления. Результирующая дискретная модель в пространстве состояний имеет вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= Ax_k(p) + Bu_k(p) + Ed_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,0020 & 0,0020 \\ 0 & 0,9949 & 1,9948 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -0,0021 \\ -2,1450 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0],$$

$$x_k(p) = \begin{bmatrix} \theta_k(p) \\ \omega_k(p) \\ i_{Ak}(p) \end{bmatrix}, \quad u_k(p) = i_{Ak}^{\text{ref}}(p), \quad d_k(p) = T_{1k}(p),$$

$\theta_k(p)$ — угол поворота вала на k -м повторении, $\omega_k(p)$ — угловая скорость вала на k -м повторении, $i_{Ak}(p)$ — величина тока на двигателе А на k -м повторении,

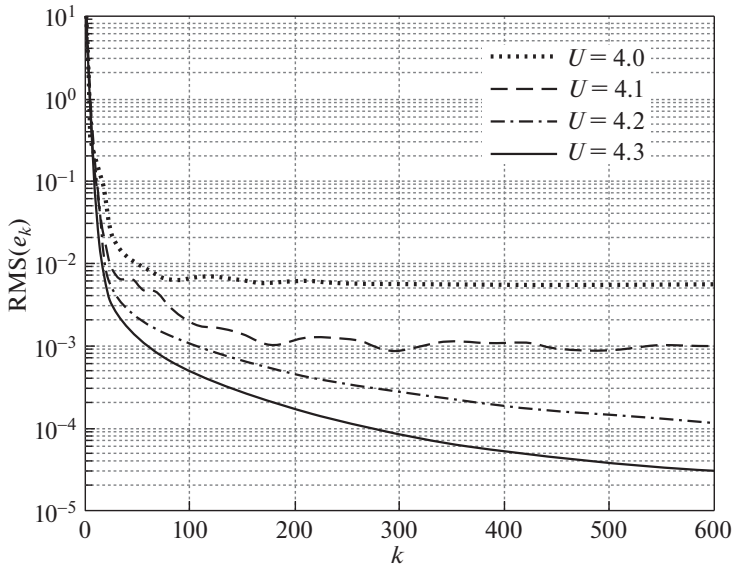


Рис. 1. Изменение среднеквадратической ошибки обучения при различных уровнях насыщения.

$i_{Ak}^{\text{ref}}(p)$ — величина управляющего тока на k -м повторении, $T_{lk}(p)$ — величина крутящего момента нагрузки на k -м повторении.

В соответствии с результатами предыдущего раздела закон управления с итеративным обучением имеет вид

$$(5.3) \quad u_k(p) = \text{sat}(u_{k-1}(p) + K_1(x_k(p) - x_{k-1}(p)) + K_2 e_{k-1}(p + 2)),$$

где K_1 и K_2 вычисляются в соответствии с условиями теоремы 2. При этом при решении (4.12), (4.14) использованы следующие параметры:

$$Q = \text{diag}[0,2 \cdot 10^6 \quad 10^4 \quad 10^4 \quad 10^{10}], \quad R = 1,5, \quad \sigma = 0,9,$$

$$\Theta = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1,2].$$

Для этих параметров неравенство (4.19) выполняется для всех рассматриваемых далее значений величины насыщения. В результате получим

$$K_1 = [-30,1869 \quad -0,5717 \quad -1,0856], \quad K_2 = 14,3028.$$

При отсутствии ограничений на управление максимальное значение управляющего сигнала составляет 4.7 А. Оценку влияния величины ограничения на точность слежения проведем по среднеквадратической ошибке обучения

$$(5.4) \quad \text{RMS}(e_k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|e_k(p)\|^2}.$$

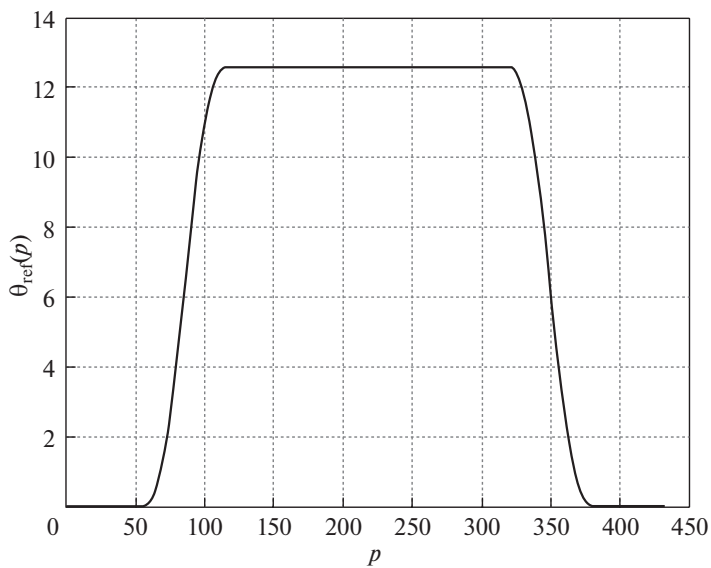


Рис. 2. Эталонная траектория изменения угла.

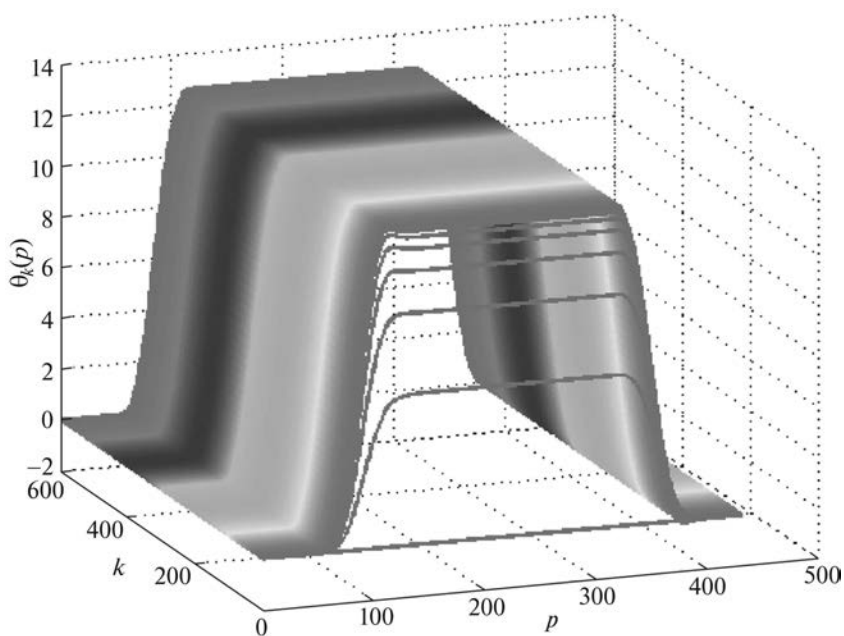


Рис. 3. Изменение угла в зависимости от числа повторений при уровне насыщения $U = 4,3$.

Характер изменения этой ошибки в зависимости от числа повторений при различных уровнях насыщения представлен на рис. 1.

Чтобы отметить значения, близкие к установившимся, число шагов повторения взято достаточно большим ($k = 600$). Моделирование показало, что

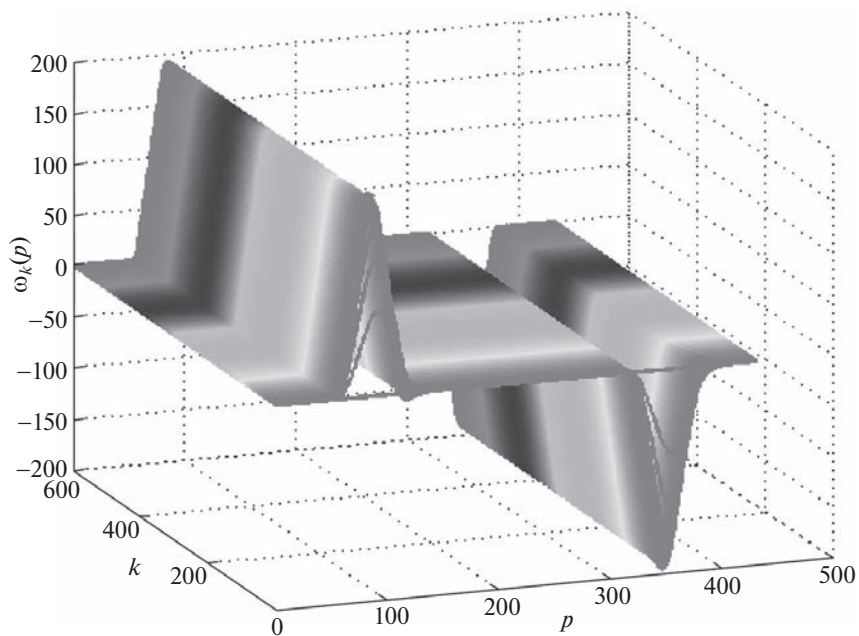


Рис. 4. Изменение угловой скорости в зависимости от числа повторов при уровне насыщения $U = 4,3$.

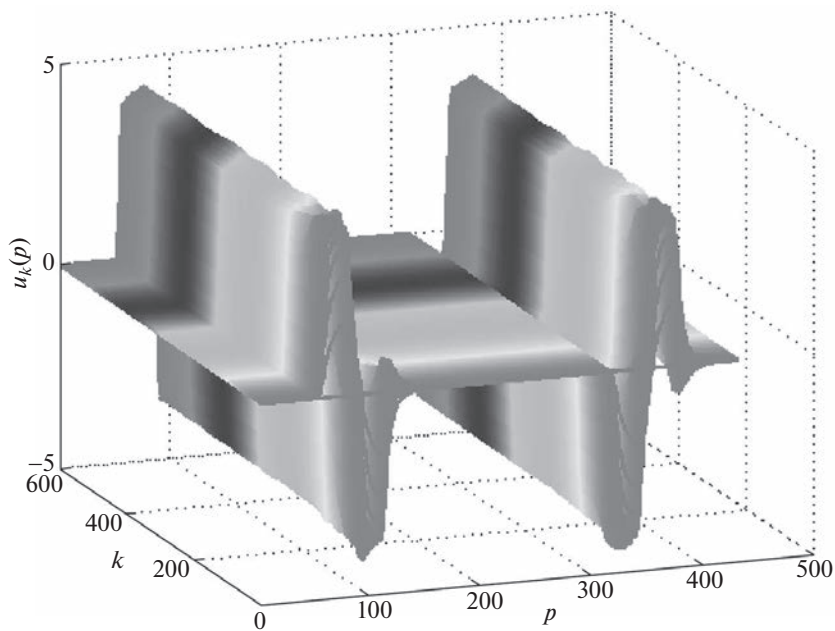


Рис. 5. Изменение управляющего сигнала в зависимости от числа повторов при уровне насыщения $U = 4,3$.

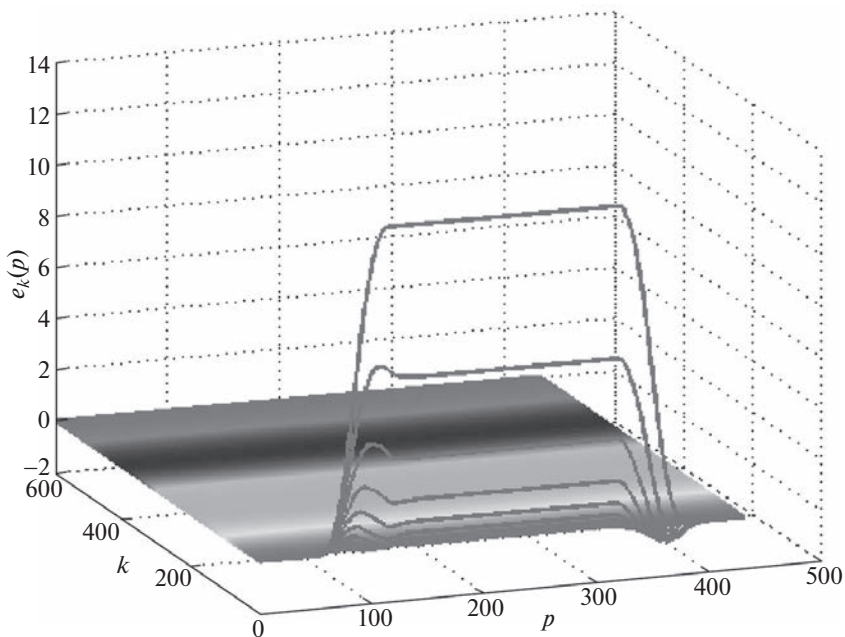


Рис. 6. Изменение ошибки обучения в зависимости от числа повторений при уровне насыщения $U = 4,3$.

при уменьшении уровня насыщения с 4,3 до 4,0 А установившаяся ошибка увеличивается примерно в 100 раз. На рис. 2 представлена эталонная траектория изменения угла. Рисунки 3 и 4 показывают характер изменения угла и угловой скорости привода в зависимости от числа повторений. На рис. 5 и 6 показаны характер изменения управляющего сигнала и ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

6. Заключение

Полученный закон управления с итеративным обучением построен для определенной величины запаздывания и не гарантирует сходимости ошибки обучения при другом запаздывании. В то же время интересно получить результат для случая переменного запаздывания из определенного диапазона. Как было отмечено во введении, УИО корректирует входной сигнал, не меняя структуры системы, и достижение требуемой точности зависит как от информационной структуры, так и от мощности входного сигнала. В случае нелинейности типа насыщения на входе, мощность сигнала ограничивается, предельная ошибка при $k \rightarrow \infty$ стабилизируется относительно некоторого значения, отличного от нуля, и требуемая точность может не достигаться. С другой стороны, при отсутствии насыщения обученное управление имеет естественную границу и наилучший результат будет достигнут, когда эта граница лежит внутри области насыщения. В противном случае необходи-

мо тщательно изучить влияние насыщения на снижение точности, которое, как показывает пример, может быть существенным, на практике этот анализ может служить рекомендацией для выбора привода нужной мощности.

Определенным недостатком предложенного подхода является отсутствие явных зависимостей скорости сходимости ошибки обучения и достижимой точности от величины запаздывания и уровня насыщения.

Существенный интерес в дальнейшем представляет разработка алгоритмов УИО при запаздывании вдоль повторений, которое возможно при удаленном управлении, и при смешанном запаздывании — вдоль повторений и относительно повторений одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // *J. Robot. Syst.* 1984. V. 1. P. 123–140.
2. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burrigide J.H., Meadmore K.L.* Iterative learning control in health care: electrical stimulation and robotic-assisted upper-limb stroke rehabilitation // *IEEE Control Syst. Magaz.* 2012. V. 47. P. 70–80.
3. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burrigide J.H.* The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // *J. of NeuroEngineer. and Rehabilitation.* 2014. P. 11–105.
4. *Ketelhut M., Stemmler S., Gesenhues J., Hein M., Abel D.* Iterative learning control of ventricular assist devices with variable cycle durations // *Control Engineer. Practice.* 2019. V. 83. P. 33–44.
5. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // *IEEE Transact. Control Syst. Technol.* 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
6. *Lim I., Hoelzle D.J., Barton K.L.* A multi-objective iterative learning control approach for additive manufacturing applications // *Control Engineer. Practice.* 2017. V. 64. P. 74–87.
7. *Sornmo O., Bernhardsson B., Kroling O., Gunnarsson P., Tenghamn R.* Frequency-domain iterative learning control of a marine vibrator // *Control Engineer. Practice.* 2016. V. 47. P. 70–80.
8. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P.* Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // *Control Engineer. Practice.* 2010. V. 18. P. 339–348.
9. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // *IEEE Control Syst. Magaz.* 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
10. *Ahn H.-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev.* 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
11. *Xu J.-X., Tan Y., Lee T.-H.* Iterative learning control design based on composite energy function with input saturation // *Automatica.* 2004. V. 40. P. 1371–1377.

12. *Mishra S., Topcu U., Tomizuka M.* Iterative Learning Control with Saturation Constraints // Proc. 2009 American Control Conf. 2009. P. 943–948.
13. *Zhang R., Chi R.* Iterative Learning Control for a Class of MIMO Nonlinear System with Input Saturation Constraint // Proc. 36th Chinese Control Conf. 2017. P. 3543–3547.
14. *Lješnjanić M., Tan Y., Oetomo D., Freeman C.T.* Spatial Iterative Learning Control: Systems with Input Saturation // 2017 American Control Conf. 2017. P. 5121–5126.
15. *Wei Z-B., Quan Q., Cai K-Y.* Output Feedback ILC for a Class of Nonminimum Phase Nonlinear Systems With Input Saturation: An Additive-State-Decomposition-Based Method // IEEE Trans. Autom. Control. 2017. V. 62. P. 502–508.
16. *Sebastian G., Tan Y., Oetomo D., Mareels I.* Iterative Learning Control for Linear Time-varying Systems with Input and Output Constraints // 2018 Australian and New Zealand Control Conf. (ANZCC). 2018. P. 87–92.
17. *Sebastian G., Tan Y., Oetomo D.* Convergence analysis of feedback-based iterative learning control with input saturation // Automatica. 2019. V. 101. P. 44–52.
18. *Chen Y., Gong Z., Wen C.* Analysis of a High-Order Iterative Learning Control Algorithm for Uncertain Nonlinear Systems with State Delays // Automatica. 1998. V. 34. P. 345–353.
19. *Liu T., Gao F., Wang Y.* IMC-based iterative learning control for batch processes with uncertain time delay // Journal of Process Control. 2010. V. 20. P. 173–180.
20. *Wang L., Mo S., Zhou D., Gao F., Chen X.* Delay-range-dependent robust 2D iterative learning control for batch processes with state delay and uncertainties // Journal of Process Control. 2013. V. 23. P. 715–730.
21. *Tao H., Paszke W., Yang H., Galkowski K.* Finite frequency range robust iterative learning control of linear discrete system with multiple time-delays // Journal of the Franklin Institute. 2019. V. 356. P. 2690–2708.
22. *Tao H., Paszke W., Rogers E., Yang H., Galkowski K.* Finite frequency range iterative learning fault-tolerant control for discrete time-delay uncertain systems with actuator faults // ISA Transactions. 2019. V. 95. P. 152–163.
23. *Browne F., Rees B., Chiu G.T.-C., Jain N.* Iterative Learning Control With Time-Delay Compensation: An Application to Twin-Roll Strip Casting // IEEE Trans. Control Systems Technology. 2021. V. 29. P. 140–149.
24. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K.* Iterative Learning Control with Input Saturation // IFAC PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 29. P. 338–343.
25. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.
26. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // Syst. & Control Lett. 2016. V. 91. P. 14–20.
27. *Емельянова Ю.П., Пакшин П.В.* Синтез управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния // АИТ. 2019. № 9. С. 9–24.
Emelianova J.P., Pakshin P.V. Iterative Learning Control Design Based on State Observer // Automation and Remote Control. 2019. V 80. P. 1561–1573.
28. *Tarbouriech S., Garcia G., Gomes da Silva Jr. J.M., Queinnec I.* Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators.– London: Springer-Verlag. 2011.

29. *Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. – London: World Scientific Press. 2004.
30. *Mandra S., Galkowski S., Aschemann H.* Robust guaranteed cost ILC with dynamic feedforward and disturbance compensation for accurate PMSM position control // Control Engineering Practice. 2017. V. 65. P. 36–47.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 19.08.2022

После доработки 19.09.2022

Принята к публикации 29.09.2022

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. Ю.Н. СОТСКОВ, д-р физ.-мат. наук (sotskov48@mail.ru)
(Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РАСПИСАНИЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С ПРЕРЫВАНИЯМИ ОПЕРАЦИЙ КАК ОПТИМАЛЬНАЯ РАСКРАСКА СМЕШАННОГО ГРАФА¹

Установлена взаимосвязь задач теории расписаний с критерием минимизации длины расписания и задач поиска оптимальных (строгих) раскрасок вершин смешанного графа, т.е. назначений минимального множества упорядоченных цветов вершинам $V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которых вершинам v_i и v_j , инцидентным ребру $[v_i, v_j] \in E$, назначаются разные цвета, а для дуги $(v_k, v_l) \in A$ цвет вершины v_k не больше (меньше) цвета вершины v_l . Показано, что любая задача поиска оптимальной раскраски вершин смешанного графа G может быть представлена как задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания частично упорядоченного множества требований с целочисленными длительностями p_{ij} операций при допустимости прерываний их выполнения. В отличие от классических задач теории расписаний, в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ для выполнения операции может требоваться несколько приборов и помимо двух типов отношений предшествования, заданных на множестве операций, необходимо, чтобы единичные операции заданного подмножества выполнялись одновременно. Задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски вершин смешанного графа G , который определяет исходные данные задачи. В силу доказанных утверждений для результатов, полученных для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, имеются аналоги для соответствующих задач оптимальных раскрасок вершин смешанных графов G , и наоборот.

Ключевые слова: расписание, прерывание, быстродействие, смешанный граф, оптимальная раскраска.

DOI: 10.31857/S0005231023010075, EDN: LULDPY

1. Введение

Для оперативно-календарного планирования (ОКП) производства требуется построение оптимальных расписаний обслуживания заданных требований на имеющемся оборудовании (машинах, станках, процессорах). Опти-

¹ Исследование поддержано Белорусским Республиканским Фондом Фундаментальных Исследований, проект № Ф21-010 и проект № Ф23РНФ-017.

мизация расписаний производственных процессов является важным фактором эффективности производства, поскольку позволяет сокращать производственные затраты, время реализации поступивших заявок, своевременно снабжать производственные процессы сырьем и комплектующими изделиями, необходимыми для изготовления конечной продукции.

Практические задачи ОКП многообразны как по условиям, ограничениям и назначению производства, так и по целям, которые достигаются при реализации построенных расписаний. Для решения задач ОКП, как правило, разрабатываются специальные алгоритмы оптимизации расписаний с учетом условий конкретного производства. Расширение области применения алгоритмов теории расписаний в ОКП может быть основано на моделях более сложных обслуживающих систем с целью единообразного представления различных классов расписанческих задач и разработки на основе таких моделей общих методов построения оптимальных расписаний.

Известно, что задачи построения оптимальных по быстродействию расписаний с единичными длительностями заданных операций эквивалентны задачам поиска оптимальных раскрасок вершин графов. Если же при построении расписаний необходимо учитывать не только отношения предшествования, заданные на множестве операций, но и невозможность совместного выполнения операций на одном оборудовании (обслуживающих приборах), то для оптимизации расписаний можно использовать раскраски вершин смешанных графов, введенные в [1, 2].

Пусть $G = (V, A, E)$ обозначает конечный смешанный граф с непустым множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$, множеством дуг A и множеством ребер E . Дуга $(v_i, v_j) \in A$ определяет упорядоченную пару вершин v_i и v_j , а ребро $[v_p, v_q] \in E$ — неупорядоченную пару вершин v_p и v_q . Будем предполагать далее, что рассматриваемый смешанный граф $G = (V, A, E)$ не содержит кратных дуг, кратных ребер и петель. Если множество A пусто, то получаем граф (V, \emptyset, E) . Если же множество E пусто, то получаем ориентированный граф (V, A, \emptyset) .

В [1] введено следующее определение раскраски (вершин) смешанного графа.

Определение 1 [1]. Целочисленную функцию $c : V \rightarrow \{1, \dots, t\}$ называют раскраской $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, если нестрогое неравенство $c(v_i) \leq c(v_j)$ выполняется для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ и $c(v_p) \neq c(v_q)$ для каждого ребра $[v_p, v_q] \in E$. Раскраска $c(G)$ является оптимальной, если в ней используется минимальное количество $t =: \chi(G)$ различных цветов $c(v_i) \in \{1, \dots, t\}$. Минимальное число $\chi(G)$ называют хроматическим числом смешанного графа G .

Если $A = \emptyset$, то раскраска $c(G)$ является обычной раскраской вершин графа $G = (V, \emptyset, E)$. В отличие от раскраски графа (V, \emptyset, E) , существующей для любого графа, раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ с непустыми множествами дуг и ребер может не существовать. Следующий

критерий существования раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ доказан в [1].

Теорема 1 [1]. Раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует тогда и только тогда, когда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа G не содержит ни одного контура с парой вершин смежных в подграфе (V, \emptyset, E) .

Смешанный граф $G = (V, A, E)$ будем называть раскрашиваемым, если для него существует раскраска $c(G)$. Задача поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа является NP-трудной, даже если $A = \emptyset$ [3]. Взаимосвязь задач поиска оптимальных раскрасок смешанного графа с задачами теории расписаний с критерием минимизации длины расписания (минимизации общего времени обслуживания требований) при условии, что все операции обслуживания требований имеют единичные длительности, исследовалась в статьях [4–8]. В [9] представлен обзор опубликованных результатов по раскраскам смешанных графов и эквивалентным задачам построения оптимальных расписаний выполнения операций с единичными длительностями.

В данной статье установлено, что задача поиска оптимальной раскраски любого раскрашиваемого смешанного графа сводится к задаче построения оптимального по быстродействию расписания выполнения частично упорядоченного множества операций с целочисленными длительностями при допустимости прерываний их выполнения. В отличие от классических задач теории расписаний, в рассматриваемой задаче для выполнения операции может требоваться несколько различных приборов (машин, процессоров). Помимо двух типов отношений предшествования, заданных на множестве операций, в задаче может потребоваться, чтобы единичные операции заданного подмножества выполнялись одновременно. В силу доказанных утверждений результаты, полученные для исследованных задач построения оптимальных по быстродействию расписаний, имеют аналоги для соответствующих задач поиска оптимальных раскрасок вершин смешанных графов, и наоборот.

2. Оптимальные расписания обслуживания требований с различными маршрутами и раскраски вершин смешанного графа

Далее используется терминология монографий [10, 11] по теории графов и монографий [12, 13] по теории расписаний.

Для классификации задач теории расписаний используется введенное в [14] трехпозиционное обозначение $\alpha|\beta|\gamma$, в котором α обозначает обслуживающую систему и количество приборов (машин, процессоров), β — характеристики обслуживаемых требований (работ, заданий), а γ — целевую функцию. Используются приведенные в [13] параметры классификации задач теории расписаний.

2.1. Единичные длительности операций и строгая
раскраска смешанного графа

Начнем с постановки задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ построения оптимального по быстродействию расписания (такой критерий оптимальности обозначается C_{\max}) обслуживания множества требований $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ с различными маршрутами (такую многостадийную обслуживающую систему называют job-shop, т.е. цех работ) и единичными длительностями $p_{ij} = 1$ всех заданных операций Q_{ij} . В задаче $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ множество требований \mathcal{J} необходимо обслужить оптимально на множестве $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{|\mathcal{M}|}\}$ специализированных (различных) приборов. Обслуживание требования $J_i \in \mathcal{J}$ подразумевает выполнение множества $\mathcal{Q}_i = \{Q_{i,1}, \dots, Q_{i,|\mathcal{Q}_i|}\}$ операций в заданном для них порядке, а именно: $(Q_{i,1}, \dots, Q_{i,|\mathcal{Q}_i|})$. Для каждой операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}_i$ задан специализированный прибор $M_{\mu(i,j)}$ множества $\mathcal{M} \ni M_{\mu(i,j)}$, на котором операция Q_{ij} должна выполняться.

Все требования множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ готовы к обслуживанию в начальный момент $t = 0$ горизонта планирования, и прерывания выполнения любой операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}_i$ по обслуживанию требования $J_i \in \mathcal{J}$ запрещены. Следовательно, допустимое расписание обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ однозначно определяется моментами начала $S(Q_{ij}) \geq 0 = t$ или же моментами завершения $C(Q_{ij}) = S(Q_{ij}) + p_{ij}$ выполнения всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{Q}_i$.

Пусть подмножество $\mathcal{Q}^{(k)}$ множества \mathcal{Q} состоит из всех операций, которые должны выполняться на приборе $M_k \in \mathcal{M}$. Любая пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(k)}$ не может выполняться одновременно при реализации допустимого расписания.

Из приведенной постановки задачи теории расписаний следует, что допустимое расписание для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ должно определять $|\mathcal{M}|$ линейных строгих порядков выполнения множеств операций $\mathcal{Q}^{(k)}$ на специализированных приборах $M_k \in \mathcal{M}$, причем оптимальное по быстродействию расписание

$$(1) \quad \left\{ C(Q_{1,1}), \dots, C(Q_{1,|\mathcal{Q}_1|}), \dots, (C(Q_{|\mathcal{J}|,1}), \dots, C(Q_{|\mathcal{J}|,|\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}|})) \right\} =: \mathbf{S}$$

должно иметь наименьшую длину $C_{\max} := \max\{C_1, \dots, C_{|\mathcal{J}|}\}$ среди всех допустимых расписаний обслуживания требований множества \mathcal{J} . Здесь и далее C_i обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$, т.е. $C_i = C(Q_{i,|\mathcal{Q}_i|})$, где $Q_{i,|\mathcal{Q}_i|}$ — последняя операция по обслуживанию требования J_i .

При решении задачи $\alpha|\beta|C_{\max}$ поиск оптимального расписания можно ограничить множеством активных расписаний [12], поскольку существует оптимальное по быстродействию расписание, которое является активным.

Определение 2. Допустимое для задачи $\alpha|\beta|C_{\max}$ расписание \mathbf{S} называют активным, если выполнение любой операции из множества \mathcal{Q} не может быть начато раньше без нарушения порядка выполнения операций при

расписании \mathbf{S} или (и) другая операция будет выполняться позже, чем при расписании \mathbf{S} .

В [2] введено следующее определение строгой раскраски смешанного графа.

Определение 3 [2]. Целочисленную функцию $c_{<} : V \rightarrow \{1, \dots, t\}$ называют строгой раскраской $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, если неравенство

$$(2) \quad c_{<}(v_i) < c_{<}(v_j)$$

выполняется для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ и $c_{<}(v_p) \neq c_{<}(v_q)$ для каждого ребра $[v_p, v_q] \in E$. Строгая раскраска $c_{<}(G)$ является оптимальной, если в ней используется минимальное количество $t =: \chi_{<}(G)$ различных цветов $c_{<}(v_i) \in \{1, \dots, t\}$.

Строгую раскраску $c_{<}(G)$ можно интерпретировать как частный случай раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ (см. определение 1).

Замечание 1. Раскраску $c(G)$ можно использовать вместо строгой раскраски $c_{<}(G)$ для любого смешанного графа $G = (V, A, E)$, в котором для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ выполняется следующая импликация:

$$(3) \quad (v_i, v_j) \in A \Rightarrow [v_i, v_j] \in E.$$

Если же в смешанном графе $G = (V, A, E)$ имеется дуга $(v_i, v_j) \in A$, для которой импликация (3) не выполняется, то добавим ребро $[v_i, v_j]$ в смешанный граф G для каждой такой дуги (v_i, v_j) . Тогда любая строгая раскраска $c_{<}(G)$ смешанного графа G может быть представлена как раскраска $c(G^+)$ смешанного графа $G^+ = (V, A, E^+)$, полученного в результате добавления всех указанных ребер.

Как следствие из теоремы 1, получаем следующий критерий существования строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Следствие 1. Строгая раскраска $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует тогда и только тогда, когда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ не содержит контуров.

В [4] для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ доказана следующая

Теорема 2 [4]. Задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ эквивалентна задаче поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которого $V = \mathcal{Q}$ и выполняются следующие два условия:

(а) $(\mathcal{Q}, A, \emptyset) = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} (\mathcal{Q}_i, A_i, \emptyset)$, где каждый ориентированный подграф $(\mathcal{Q}_i, A_i, \emptyset)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ является путем, проходящим через все вершины множества \mathcal{Q}_i , и выполняется равенство $\mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j = \emptyset$ для всех индексов $i \neq j$;

(б) $(\mathcal{Q}, \emptyset, E) = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} (\mathcal{Q}^{(k)}, \emptyset, E^{(k)})$, где каждый подграф $(\mathcal{Q}^{(k)}, \emptyset, E^{(k)})$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ является полным графом, и равенство $\mathcal{Q}^{(k)} \cap \mathcal{Q}^{(l)} = \emptyset$ выполняется для всех индексов $k \neq l$.

С учетом замечания 1 непосредственно из теоремы 2 получаем

Следствие 2. Задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которого $V = Q$ и выполняются условия (а), (б) и (3).

2.2. Прерывания операций с целочисленными длительностями

В этом подразделе теорема 2 обобщается на задачу $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания множества требований \mathcal{J} с целочисленными длительностями $p_{ij} \geq 1$ операций $Q_{ij} \in Q$, при выполнении которых допускаются прерывания. В обозначении задачи $pmtn$ определяет допустимость прерываний операций, а $[p_{ij}]$ — целочисленность длительностей заданных операций. Допустимость прерываний операций множества Q приводит к расширению множества активных расписаний, что во многих случаях может усложнить поиск оптимального по быстродействию расписания. С другой стороны, прерывания всех или некоторой части операций множества Q может привести к уменьшению длины C_{\max} оптимального активного расписания. Следовательно, при решении многих задач $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ желательно ограничить количество моментов времени, в которые допустимы прерывания выполнения операций из множества Q без потери активного расписания наименьшей длины C_{\max} .

В дальнейшем для задачи $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ поиск оптимального расписания будет ограничен множеством активных расписаний, при реализации которых прерывания операций допустимы только в целочисленные моменты времени. Такое сокращение области поиска решения задачи $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ основано на следующем замечании.

Замечание 2. Поскольку все требования множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ готовы к обслуживанию в момент времени $t = 0$, и длительности $p_{ij} \geq 1$ всех операций $Q_{ij} \in Q$ являются целочисленными, то существует оптимальное активное расписание, при котором прерывания операций ограничены целочисленными моментами времени.

Справедливость замечания 2 следует из того, что прерывание выполнения операции $Q_{ij} \in Q$ может привести к уменьшению длины активного расписания \mathbf{S} без прерываемых операций только при условии, что это прерывание произойдет в момент завершения хотя бы одной операции, что позволит начать выполнение другой операции $Q_{uv} \in Q$, $u \neq i$, на освободившемся приборе $M_{\mu(i,j)} = M_{\mu(u,v)} \in \mathcal{M}$. Поскольку все требования множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ готовы к обслуживанию в момент времени $t = 0$, и длительности $p_{ij} \geq 1$ всех операций $Q_{ij} \in Q$ являются целочисленными, то в активном расписании \mathbf{S} без прерываний операций выполнение любой операции может завершиться только в целочисленный момент времени.

Учитывая замечание 2, разобьем операцию $Q_{1,1} \in Q_1$ целочисленной длительности на $p_{1,1}$ единичных операций. Полученное множество единичных операций обозначим $\{v_1, \dots, v_{p_{1,1}}\}$.

Здесь и далее будем предполагать, что единичные операции линейно упорядочены и должны выполняться в порядке возрастания их номеров (индексов) в процессе реализации любого допустимого расписания.

Множество единичных операций, на которые разбивается следующая операция $Q_{1,2} \in \mathcal{Q}_1$ требования J_1 , обозначим $\{v_{p_{1,1}+1}, \dots, v_{p_{1,1}+p_{1,2}}\}$. Аналогично продолжим разбиение операций множества $\mathcal{Q}_1 \setminus \{Q_{1,1}, Q_{1,2}\}$ на единичные операции и присвоим им очередные номера (индексы). Так, последняя операция $Q_{1,|\mathcal{Q}_1|} \in \mathcal{Q}_1$ требования J_1 будет разбита на следующие единичные операции: $\left\{v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|-1} p_{1,j}+1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}}\right\}$.

В результате описанного разбиения операций множества \mathcal{Q}_1 получим множество

$$(4) \quad \mathcal{W}_1 = \left\{v_1, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}}\right\}$$

линейно упорядоченных единичных операций обслуживания первого требования $J_1 \in \mathcal{J}$ в задаче $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$.

Начиная с очередной единичной операции $v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}+1}$, последовательно обозначим все единичные операции, на которые разбиваются операции множества $\mathcal{Q}_2 = \{Q_{2,1}, \dots, Q_{2,|\mathcal{Q}_2|}\}$ обслуживания второго требования $J_2 \in \mathcal{J}$. Получим множество

$$(5) \quad \mathcal{W}_2 = \left\{v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j}+1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_2|} p_{2,j}}\right\}$$

линейно упорядоченных единичных операций обслуживания требования $J_2 \in \mathcal{J}$.

Продолжая аналогично, будем обозначать единичные операции обслуживания требований множества $\mathcal{J} \setminus \{J_1, J_2\}$ в порядке возрастания номеров требований и индексов полученных единичных операций.

На последнем этапе разбиения целочисленных операций множества \mathcal{J} на единичные операции получим множество

$$(6) \quad \mathcal{W}_{|\mathcal{J}|} = \left\{v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|-1}|} p_{|\mathcal{J}|-1,j}+1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}|} p_{|\mathcal{J}|,j}}\right\}$$

линейно упорядоченных единичных операций обслуживания последнего требования $J_{|\mathcal{J}|}$ множества \mathcal{J} .

Итак, с учетом замечания 2 обслуживание всех требований множества \mathcal{J} состоит из выполнения следующего множества единичных операций $\mathcal{W} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$.

Пусть $\mathcal{J}^{(k)}$ обозначает подмножество множества требований $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{J}^{(k)}$, обслуживание которых включает операции, выполняемые на приборе $M_k \in \mathcal{M}$. Если $J_i \in \mathcal{J}^{(k)}$, то подмножество $\mathcal{Q}_i^{(k)}$ множества $\mathcal{Q}_i \supseteq \mathcal{Q}_i^{(k)}$ содержит все операции требования J_i , которые выполняются на приборе $M_k \in \mathcal{M}$.

2.3. Пример 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Опишем сведение задачи $J[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ к задаче поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа G на примере 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с множеством требований $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ и множеством приборов $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_5\}$. Исходные данные примера 1 представлены в табл. 1.

Построим смешанный граф $G = (V, A, E)$, который будет определять все исходные данные примера 1 в сетевом виде.

Обслуживание требования J_1 состоит из четырех операций $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$ с длительностями $p_{1,1} = 2$, $p_{1,2} = 4$, $p_{1,3} = 2$ и $p_{1,4} = 1$. Используя обозначения (4), получаем линейно упорядоченное множество единичных операций $\mathcal{W}_1 = \{v_1, \dots, v_9\}$, которые включаем в искомое множество вершин $V \supset \mathcal{W}_1$. Поскольку все операции требования J_1 и все единичные операции, на которые разбивается каждая операция множества \mathcal{Q}_1 , линейно упорядочены при выполнении любого допустимого расписания, то в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ включаем следующее множество дуг: $\mathcal{A}_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_8, v_9)\}$; $\mathcal{A}_1 \subset A$.

Обслуживание требования J_2 состоит из пяти операций $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$ и $Q_{2,5}$ с длительностями $p_{2,1} = 3$, $p_{2,2} = 2$, $p_{2,3} = 2$, $p_{2,4} = 3$ и $p_{2,5} = 1$. Используя обозначения (5), получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_2 = \{v_{10}, \dots, v_{20}\}$, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_2$. Поскольку все операции требования J_2 линейно упорядочены при выполнении любого допустимого расписания, то в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ добавляем следующее множество дуг: $\mathcal{A}_2 = \{(v_{10}, v_{11}), (v_{11}, v_{12}), \dots, (v_{19}, v_{20})\}$; $\mathcal{A}_2 \subset A$.

Обслуживание требования J_3 состоит из пяти операций $Q_{3,1}$, $Q_{3,2}$, $Q_{3,3}$, $Q_{3,4}$ и $Q_{3,5}$ с длительностями $p_{3,1} = 2$, $p_{3,2} = 1$, $p_{3,3} = 1$, $p_{3,4} = 3$ и $p_{3,5} = 1$. Используя обозначения (6), получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_3 = \{v_{21}, \dots, v_{28}\}$, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_3$. Поскольку все операции требования J_3 линейно упорядочены при выполнении любого допустимого расписания, то в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ до-

Таблица 1. Исходные данные примера 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Операции $Q_{1,j}$ требования J_1	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$Q_{1,4}$	–
Приборы $M_{\mu(1,j)}$	M_1	M_2	M_3	M_4	–
Длительности $p_{1,j}$ операций $Q_{1,j}$	2	4	2	1	–
Операции $Q_{2,j}$ требования J_2	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$	$Q_{2,4}$	$Q_{2,5}$
Приборы $M_{\mu(2,j)}$	M_2	M_5	M_1	M_2	M_4
Длительности $p_{2,j}$ операций $Q_{2,j}$	3	2	2	3	1
Операции $Q_{3,j}$ требования J_3	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	$Q_{3,4}$	$Q_{3,5}$
Приборы $M_{\mu(3,j)}$	M_5	M_3	M_1	M_5	M_3
Длительности $p_{3,j}$ операций $Q_{3,j}$	2	1	1	3	1

бавляем следующее множество дуг: $\mathcal{A}_3 = \{(v_{21}, v_{22}), (v_{22}, v_{23}), \dots, (v_{27}, v_{28})\}$; $\mathcal{A}_3 \subset A$.

Итак, построен ориентированный подграф $(V, A, \emptyset) = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} (\mathcal{W}_i, \mathcal{A}_i, \emptyset)$, $|\mathcal{J}| = 3$, искомого смешанного графа (V, A, E) с множеством вершин

$$(7) \quad V = \mathcal{W} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$$

и множеством дуг

$$(8) \quad A = \mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{A}_i.$$

Множество ребер E смешанного графа $G = (V, A, E)$ будем строить последовательно для каждого множества $\mathcal{Q}^{(k)} = \bigcup_{J_i \in \mathcal{J}^{(k)}} \mathcal{Q}_i^{(k)}$ операций, выполняемых на приборе $M_k \in \{M_1, \dots, M_5\}$.

Для прибора M_1 множество $\mathcal{Q}^{(1)}$ разбивается на две единичные операции $\{v_1, v_2\}$ требования J_1 , две единичные операции $\{v_{15}, v_{16}\}$ требования J_2 и единичную операцию v_{24} требования J_1 . Поскольку ни одна пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(1)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный трехдольный граф (V_1, \emptyset, E_1) , в котором $V_1 = \{v_1, v_2; v_{15}, v_{16}; v_{24}\}$ и $E_1 = \{[v_1, v_{15}], [v_1, v_{16}], [v_2, v_{15}], [v_2, v_{16}]; [v_1, v_{24}], [v_2, v_{24}]; [v_{15}, v_{24}], [v_{16}, v_{24}]\}$. *Здесь и далее вершины разных долей построенного k -дольного графа и построенные ребра, инцидентные вершинам разных долей графа, отделяются знаком; (точка с запятой).*

Для прибора M_2 множество $\mathcal{Q}^{(2)}$ разбивается на четыре единичные операции $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ требования J_1 и шесть единичных операций $\{v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$ требования J_2 . Поскольку ни одна пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(2)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный двудольный граф (V_2, \emptyset, E_2) , в котором $V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_6; v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$ и $|E_2| = |\mathcal{Q}_1^{(2)}| \cdot |\mathcal{Q}_2^{(2)}| = 4 \cdot 6 = 24$.

Для прибора M_3 множество $\mathcal{Q}^{(3)}$ разбивается на две единичные операции $\{v_7, v_8\}$ требования J_1 и две единичные операции $\{v_{23}, v_{28}\}$ требования J_3 . Поскольку пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(3)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный двудольный граф (V_3, \emptyset, E_3) , в котором $V_3 = \{v_7, v_8; v_{23}, v_{28}\}$ и $|E_3| = |\mathcal{Q}_1^{(3)}| \cdot |\mathcal{Q}_3^{(3)}| = 2 \cdot 2 = 4$.

Для прибора M_4 множество $\mathcal{Q}^{(4)}$ разбивается на единичную операцию v_9 требования J_1 и единичную операцию v_{20} требования J_2 . Поскольку операции множества $\mathcal{Q}^{(4)}$ не могут выполняться одновременно, то необходимо соединить ребром операции v_9 и v_{20} и тем самым построить тривиальный полный двудольный граф (V_4, \emptyset, E_4) , в котором $V_4 = \{v_9; v_{20}\}$ и $E_4 = \{[v_9, v_{20}]\}$.

Для прибора M_5 множество $\mathcal{Q}^{(5)}$ разбивается на две единичные операции $\{v_{13}, v_{14}\}$ требования J_2 и пять единичных операций $\{v_{21}, v_{22}, v_{25}, v_{26}, v_{27}\}$ тре-

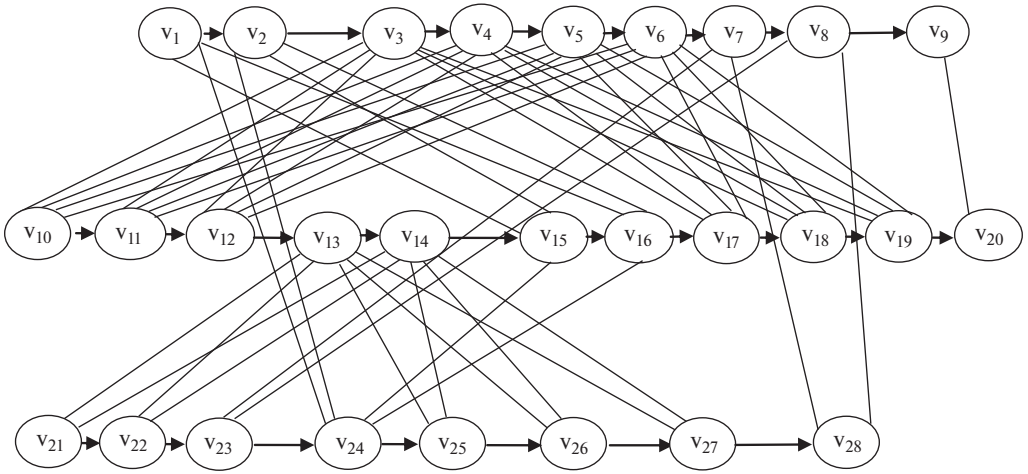


Рис. 1. Смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные примера 1 задачи $J5[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

бования J_3 . Поскольку ни одна пара операций из множества $\mathcal{Q}^{(5)}$ не может выполняться одновременно, то необходимо построить полный двудольный граф (V_5, \emptyset, E_5) , в котором $V_5 = \{v_{13}, v_{14}; v_{21}, v_{22}, v_{25}, v_{26}, v_{27}\}$ и $|E_5| = |\mathcal{Q}_2^{(5)}| \cdot |\mathcal{Q}_3^{(5)}| = 2 \cdot 5 = 10$.

Итак, построен подграф $(V, \emptyset, E) = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} (V_k, \emptyset, E_k)$, $|\mathcal{M}| = 5$, искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством ребер

$$(9) \quad E = \mathcal{E} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{M}|} \mathcal{E}_i.$$

Каждый подграф (V_k, \emptyset, E_k) смешанного графа G является полным $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом и выполняется равенство $V_k \cap V_l = \emptyset$ для всех пар различных индексов $k \neq l$.

На рис. 1 представлен смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные примера 1. Покажем далее, что поиск оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа G можно представить как решение примера 1.

Отметим, что для рассмотренной в подразделе 2.1 задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ справедливы равенства $p_{ij} = 1$ для всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, поэтому расписание (1) для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ определяется моментами завершения единичных операций \mathcal{Q} по обслуживанию всех требований множества \mathcal{J} .

Для задачи $J|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ с прерываниями целочисленных операций допустимое расписание обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ определяется моментами завершения $C(v_j)$ всех единичных операций $v_j \in \mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$. Величина p_{ij} равна целочисленной длительности операции Q_{ij} . Учитывая замечание 2, помимо множества (1) моментов завершения целочисленных операций \mathcal{Q} по обслуживанию требований мно-

жества \mathcal{J} , необходимо определить и моменты завершения всех единичных операций множества \mathcal{W} . Следовательно, допустимое расписание \mathbf{S} для задачи $J[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с прерываниями целочисленных операций определяется следующим множеством:

$$(10) \quad \{C(v_1), \dots, C(v_{|\mathcal{W}|})\} =: \mathbf{S}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для смешанного графа $G = (V, A, E)$, построенного для примера 1, для всех вершин $v_i \in \mathcal{W}$ выполняются следующие равенства:

$$(11) \quad C(v_i) = c_{<}(v_i).$$

Из равенств (10) и (11) следует, что оптимальное по быстродействию расписание $\mathbf{S} = \{C(v_1) = c_{<}(v_1), \dots, C(v_{28}) = c_{<}(v_{28})\}$ для примера 1 определяется следующей оптимальной строгой раскраской $c_{<}(G)$ смешанного графа G , представленного на рис. 1:

$$\begin{aligned} c_{<}(v_1) &= 1, & c_{<}(v_2) &= 2, & c_{<}(v_3) &= 4, & c_{<}(v_4) &= 5, & c_{<}(v_5) &= 6, \\ c_{<}(v_6) &= 7, & c_{<}(v_7) &= 8, & c_{<}(v_8) &= 9, & c_{<}(v_9) &= 10, & c_{<}(v_{10}) &= 1, \\ c_{<}(v_{11}) &= 2, & c_{<}(v_{12}) &= 3, & c_{<}(v_{13}) &= 4, & c_{<}(v_{14}) &= 5, & c_{<}(v_{15}) &= 6, \\ c_{<}(v_{16}) &= 7, & c_{<}(v_{17}) &= 8, & c_{<}(v_{18}) &= 9, & c_{<}(v_{19}) &= 10, & c_{<}(v_{20}) &= 11, \\ c_{<}(v_{21}) &= 1, & c_{<}(v_{22}) &= 2, & c_{<}(v_{23}) &= 3, & c_{<}(v_{24}) &= 4, & c_{<}(v_{25}) &= 6, \\ & & c_{<}(v_{26}) &= 7, & c_{<}(v_{27}) &= 8, & c_{<}(v_{28}) &= 10. \end{aligned}$$

Вычислим длину оптимального расписания для примера 1:

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \max\{C_1, C_2, C_3\} = \max\{c_{<}(v_9), c_{<}(v_{20}), c_{<}(v_{28})\} = \\ &= \max\{10, 11, 10\} = 11. \end{aligned}$$

Оптимальность строгой раскраски $c_{<}(G)$ следует из того, что в подграфе (V, A, \emptyset) построенного смешанного графа $G = (V, A, E)$ имеется путь (v_{10}, \dots, v_{20}) , длина которого равна 11, из чего следует нестрогое неравенство $\chi_{<}(G) \geq 11$.

2.4. Задача $J[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и соответствующая задача поиска строгой раскраски вершин смешанного графа с полными k -дольными подграфами

Введенные обозначения позволяют сформулировать следующую теорему, в которой используется условие (а), определенное в теореме 2.

Теорема 3. Задача $J[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, множество вершин которого определяется равенством $V = \mathcal{W}$, и выполняются условие (а) и условие

(в) $(V, \emptyset, E) = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} (V_k, \emptyset, E_k)$, где каждый граф (V_k, \emptyset, E_k) является полным $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом, и равенство $V_k \cap V_l = \emptyset$ выполняется для всех индексов $k \neq l$.

Доказательство. Для произвольной задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ докажем существование смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{W}$, оптимальная строгая раскраска которого определяет оптимальное расписание для задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$, и выполняются условия (а) и (в).

Из замечания 2 следует, что оптимальное расписание для задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ можно искать в классе активных расписаний, в которых прерывания операций допускаются только в целочисленные моменты времени. Следовательно, задачу $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ можно представить как задачу $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ построения оптимального по быстрдействию расписания обслуживания заданного множества $\mathcal{W} = \{v_1, \dots, v_{|\mathcal{W}|}\} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$ требований с единичными длительностями. Построение множества требований \mathcal{W} для задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ основано на последовательном разбиении множеств операций \mathcal{Q}_i по обслуживанию всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ для задачи $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на единичные операции, как это описано в подразделе 2.2 (см. равенство (4) для операций множества \mathcal{Q}_1 , равенство (5) для операций множества \mathcal{Q}_2 и равенство (6) для операций множества $\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}$).

Нетрудно убедиться в том, что теорема 3 следует из теоремы 2, поскольку условие (б) для смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{Q}$ превращается в условие (в) для смешанного графа $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$ с построенным в подразделе 2.3 множеством вершин $\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$ (см. равенство (7)), множеством дуг $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{A}_i$ (равенство (8)) и множеством ребер $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{E}_i$ (равенство (9)). Теорема 3 доказана.

Учитывая замечание 1, получаем

Следствие 3. Задача $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, для которого выполняются условия (а), (в) и равенство $V = \mathcal{W}$.

3. Оптимальное расписание выполнения многопроцессорных операций и соответствующая раскраска вершин смешанного графа

В разделе 2 приведена теорема 2 и доказана теорема 3 о сведении классических задач теории расписаний $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ к задачам поиска оптимальных строгих раскрасок $c_{<}(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, для которых должны выполняться условия (а) и (б) и условия (а) и (в) соответственно. Нетрудно убедиться в том, что для произвольно заданного смешанного графа $G = (V, A, E)$ задача поиска оптимальной строгой раскраски $c_{<}(G)$ может не сводиться ни к задаче $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$, ни к задаче $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$.

В этом разделе представлены обобщения задач $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $J[p_{ij}, pmtn|C_{\max}$, к которым сводится задача поиска оптимальной раскраски $c(G)$ любого заданного смешанного графа $G = (V, A, E)$.

3.1. Единичные длительности многопроцессорных операций

В отличие от классических задач $J|\beta|C_{\max}$ теории расписаний, в которых каждая операция выполняется на одном из приборов множества \mathcal{M} , в обслуживающих системах с многопроцессорными операциями (заданиями), в течение всего периода продолжительности $p_{ij} \geq 0$ для выполнения операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ может требоваться либо единственный прибор, либо несколько специализированных приборов из множества \mathcal{M} [13]. Как и во всех задачах $\alpha|\beta|\gamma$ теории расписаний, при реализации любого допустимого расписания не может одновременно выполняться ни одна пара операций, для выполнения которых требуется хотя бы один общий прибор $M_k \in \mathcal{M}$.

В монографии [13, с. 264–283] приведены результаты исследований задач $GMPT||C_{\max}$, где сокращение MPT используется для обозначения многопроцессорных заданий (Multi-Processor Tasks), а G определяет обслуживаемую систему (general shop — общий цех работ) с произвольными отношениями предшествования, заданными на множестве многопроцессорных операций \mathcal{Q} . В задаче $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ требуется, чтобы момент завершения $C(Q_{ij})$ операции $Q_{ij} = v_{k_{ij}}$ предшествовал началу $S(Q_{rq})$ операции $Q_{rq} = v_{k_{rq}}$. Такое отношение предшествования операций типа завершение-начало будем обозначать $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$. Нетрудно видеть, что смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные задачи $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, должен содержать как дугу $(v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}})$, так и ребро $[v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}}]$ (см. определение 1).

Следует отметить, что интенсивные исследования задач $GMPT|\beta|\gamma$ продолжаются уже несколько десятилетий [15–23], поскольку такие задачи возникают во многих практических задачах ОКП. Опубликованные до 1996 г. результаты исследований задач $GMPT|\beta|\gamma$ представлены в обзоре [19]. Задачи $GMPT|p_{ij} = 1|\gamma$ с единичными длительностями многопроцессорных операций исследовались в [19–23].

Рассмотрим задачу $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, которая эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, как установлено в [24]. Задача $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ является частным случаем задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, а задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ — частный случай задачи $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$.

Отличие задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ от задачи $GMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ [13, с. 264–268] состоит в следующем:

1) помимо задания отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ типа завершение-начало, в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на множестве операций \mathcal{Q} могут быть заданы отношения предшествования типа начало-начало (т.е. момент начала $S(Q_{ij})$ операции $Q_{ij} = v_{k_{ij}}$ должен предшествовать началу $S(Q_{rq})$ операции $Q_{rq} = v_{k_{rq}}$);

2) также в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ могут быть заданы подмножества единичных операций $\{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} =: V(h)$ множества V , которые должны выполняться одновременно при любом допустимом расписании.

Опишем отношения предшествования типа начало-начало, как обобщение задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ при условии, что исходные данные этой задачи представлены в виде смешанного графа $G = (V, A, E)$ и, следовательно, задача $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ сводится к задаче поиска оптимальной раскраски смешанного графа G (следствие 2).

При описании отношений предшествования, заданных на множестве \mathcal{Q} , будем использовать обозначения $v_{k_{ij}} \in \mathcal{W}$ единичных операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, введенные в подразделе 2.2 для операций с целочисленными длительностями задачи $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, что допустимо, поскольку все операции задачи $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ имеют единичные длительности. Взаимно однозначное соответствие элементов множества \mathcal{Q} и множества \mathcal{W} определяется равенством (4) для операций требования J_1 , равенством (5) для операций требования J_2 и равенством (6) для операций последнего требования $J_n \in \mathcal{J}$.

Пусть в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ требуется, чтобы момент завершения $C(Q_{ij})$ операции $Q_{ij} = v_{k_{ij}}$ предшествовал началу $S(Q_{rq})$ операции $Q_{rq} = v_{k_{rq}}$. Тогда смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, должен содержать как дугу $(v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}})$, так и ребро $[v_{k_{ij}}, v_{k_{rq}}]$ (согласно определению 1). Помимо задания отношения $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ типа завершение-начало, в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ может потребоваться, чтобы момент начала $S(Q_{uv})$ операции $Q_{uv} = v_{k_{uv}}$ предшествовал моменту начала $S(Q_{el})$ операции $Q_{el} = v_{k_{el}}$. Тогда смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, содержит дугу $(v_{k_{uv}}, v_{k_{el}})$ и не содержит ребро $[v_{k_{uv}}, v_{k_{el}}]$. Такое отношение предшествования типа начало-начало будем обозначать $v_{k_{uv}} \mapsto v_{k_{el}}$.

Помимо задания отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ и $v_{k_{uv}} \mapsto v_{k_{el}}$, в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ может потребоваться, чтобы заданное подмножество единичных операций $\{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} =: V(h)$ множества V выполнялось одновременно при любом допустимом расписании. Для задания такого условия ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ должен содержать контур $(v_{h_1}, v_{h_2}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_1})$, т.е. множество A должно содержать следующее подмножество дуг:

$$\left\{ (v_{h_1}, v_{h_2}), (v_{h_2}, v_{h_3}), \dots, (v_{h_{|V(h)|-1}}, v_{h_{|V(h)|}}), (v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_1}) \right\} \subseteq A.$$

Пусть в задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ задано w подмножеств $V(1), \dots, V(w)$ единичных операций, причем операции каждого подмножества $V(h) = \{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} \subseteq V$ должны выполняться одновременно при любом допустимом расписании, $h \in \{1, \dots, w\}$. Тогда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ должен содержать следующее подмножество дуг:

$$(12) \quad \mathcal{A}_0 = \bigcup_{h=1}^w \left\{ (v_{h_1}, v_{h_2}), (v_{h_2}, v_{h_3}), \dots, (v_{h_{|V(h)|-1}}, v_{h_{|V(h)|}}), (v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_1}) \right\}.$$

Поскольку смешанный граф $G = (V, A, E)$ определяет исходные данные индивидуальной задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, то такую индивидуальную задачу будем называть задачей $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$. В отличие от классических задач теории расписаний $J|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $J|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, имеющих решение при любых исходных данных, существуют примеры (индивидуальные задачи) $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$, для которых не существует допустимых расписаний. Следующий критерий существования допустимого расписания для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ доказан в [24, с. 76].

Теорема 4 [24]. Допустимое расписание для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ существует тогда и только тогда, когда ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ не содержит ни одного контура со смежными вершинами подграфа (V, \emptyset, E) .

В [24, с. 76] для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ доказана и следующая

Лемма 1 [24]. Разрешимая задача $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ того же смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Нетрудно убедиться в том, что не все задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ сводятся к оптимальным строгим раскраскам $c_{<}(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, поскольку строгое неравенство (2) не может быть использовано для задания отношения предшествования $v_{k_{ij}} \mapsto v_{k_{rq}}$ типа начало-начало и, как следствие, ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа G , для которого существует строгая раскраска $c_{<}(G)$, не содержит контуров (сравните теоремы 1 и 4 со следствием 1).

3.2. Прерывания многопроцессорных операций с целочисленными длительностями

Следующая теорема 5 обобщает лемму 1 на задачу $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ поиска оптимального по быстродействию расписания обслуживания множества требований \mathcal{J} с целочисленными длительностями $p_{ij} \geq 1$ всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ при допустимости прерываний их выполнения.

Теорема 5. Разрешимая задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$. Для любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на том же смешанном графе $G = (V, A, E)$, которая эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Доказательство. Для разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ поиска оптимального по быстродействию расписания обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_{|\mathcal{J}|}\}$ на заданных специализированных приборах $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{|\mathcal{M}|}\}$ покажем, как можно построить смешанный граф $G = (V, A, E)$, оптимальная раскраска которого определяет решение задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Учитывая замечание 2, оптимальное по быстродействию расписание для разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ будем искать в классе активных расписаний, в которых прерывания операций допускаются только в целочисленные моменты времени. Для этого определим множество единичных операций $\mathcal{W} = \{v_1, \dots, v_{|\mathcal{W}|}\} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$ в результате последовательного разбиения множеств целочисленных операций \mathcal{Q}_i по обслуживанию всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на единичные операции, как это описано в подразделе 2.2, в котором для операций \mathcal{Q}_1 первого требования равенство (4) определяет подмножество \mathcal{W}_1 единичных операций, а для операций \mathcal{Q}_2 второго требования равенство (5) определяет подмножество \mathcal{W}_2 единичных операций. Аналогичные равенства для множеств $\mathcal{Q}_3, \dots, \mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|-1}$ последовательно определяют подмножества $\mathcal{W}_3, \dots, \mathcal{W}_{|\mathcal{J}|-1}$ единичных операций. Так, для операций $\mathcal{Q}_{|\mathcal{J}|}$ последнего требования $\mathcal{J}_{|\mathcal{J}|}$ равенство (6) определяет подмножество $\mathcal{W}_{|\mathcal{J}|}$ единичных операций. В результате последовательного разбиения всех целочисленных операций на единичные операции получаем подграф $(\mathcal{W}, \emptyset, \emptyset)$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{W}_i$.

Для любого активного расписания обслуживание требования $J_i \in \mathcal{J}$ состоит из выполнения линейно упорядоченного множества целочисленных операций $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{Q}$, которому соответствует линейно упорядоченное множество единичных операций

$$\mathcal{W}_i = \left\{ v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j} + 1}, \dots, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j}} \right\}.$$

Множество дуг

$$\mathcal{A}_i = \left\{ \left(v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j} + 1} \right), \dots, \left(v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j} + 1} \right) \right\}$$

и множество ребер

$$\mathcal{E}_i = \left\{ \left[v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_{i-1}|} p_{i-1,j} + 1} \right], \dots, \left[v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j}}, v_{\sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_1|} p_{1,j} + \dots + \sum_{j=1}^{|\mathcal{Q}_i|} p_{i,j} + 1} \right] \right\}$$

определяют линейный порядок выполнения операций множества \mathcal{W}_i при реализации допустимого расписания для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Пусть помимо отношений предшествования типа завершение-начало между операциями множества \mathcal{Q}_i по обслуживанию одного и того же требования $J_i \in \mathcal{J}$, в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ задано следующее множе-

ство $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ отношений предшествования типа завершение-начало между операциями разных требований:

$$(13) \quad \mathcal{R}_{\rightarrow} = \{v_{r_1} \rightarrow v_{r_2}, \dots, v_{r_{n-1}} \rightarrow v_{r_n}\};$$

и следующее множество \mathcal{R}_{\mapsto} отношений предшествования типа начало-начало между операциями разных требований:

$$(14) \quad \mathcal{R}_{\mapsto} = \{v_{l_1} \mapsto v_{l_2}, \dots, v_{l_{m-1}} \mapsto v_{l_m}\}.$$

Согласно определению 1, для представления отношений предшествования (13) в искомый смешанный граф $G = (V, A, E)$ следует включить множество дуг $\mathcal{A}_{|\mathcal{J}|+1} := \{(v_{r_1}, v_{r_2}), \dots, (v_{r_{n-1}}, v_{r_n})\}$ и множество ребер $\mathcal{E}_{|\mathcal{J}|+1} := \{[v_{r_1}, v_{r_2}], \dots, [v_{r_{n-1}}, v_{r_n}]\}$, а для представления отношений предшествования (14) в смешанный граф $G = (V, A, E)$ достаточно включить только множество дуг $\mathcal{A}_{|\mathcal{J}|+2} := \{(v_{l_1}, v_{l_2}), \dots, (v_{l_{m-1}}, v_{l_m})\}$.

В задаче $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ также могут быть заданы подмножества $V(1), \dots, V(w)$ единичных операций множества \mathcal{Q} такие, что все операции подмножества $V(h) = \{v_{h_1}, \dots, v_{h_{|V(h)|}}\} \subseteq V$ должны выполняться одновременно при любом допустимом расписании, $h \in \{1, \dots, w\}$. При задании такого условия в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ множество отношений предшествования \mathcal{R}_{\mapsto} , представленное в (14), должно содержать следующее подмножество отношений предшествования: $\bigcup_{h=1}^w \left\{ v_{h_1} \mapsto v_{h_2}, v_{h_2} \mapsto v_{h_3}, \dots, v_{h_{|V(h)|-1}} \mapsto v_{h_{|V(h)|}}, v_{h_{|V(h)|}} \mapsto v_{h_1} \right\}$. Тогда построенное множество дуг $\mathcal{A}_{|\mathcal{J}|+2}$ должно содержать и множество $\mathcal{A}_0 \subseteq A$, определенное в (12).

Обозначим $\mathcal{A} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|+2} \mathcal{A}_i$ и $\mathcal{E} := \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|+1} \mathcal{E}_i$. Итак, построен подграф $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$, в котором $V = \mathcal{W}$ и $A = \mathcal{A}$.

Множество $E \setminus \mathcal{E}$ остальных ребер смешанного графа G определим далее таким образом, чтобы было невозможно выполнять на приборе $M_k \in \mathcal{M}$ одновременно ни одной пары единичных операций из множества $\mathcal{Q}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, |\mathcal{M}|\}$, при любом расписании, допустимом для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$. Для каждого прибора $M_k \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{Q}^{(k)}$ целочисленных операций, выполняемых на этом приборе, определяет множество V_k всех единичных операций, выполняемых на приборе M_k .

Мощность множества V_k равна сумме длительностей всех операций по обслуживанию требований множества $\mathcal{J}^{(k)} = \{J_{k_1}, \dots, J_{|\mathcal{J}^{(k)}|}\}$, т.е. $|V_k| = \sum_{J_i \in \mathcal{J}^{(k)}} p_{ik}$. Разобьем множество V_k на $|\mathcal{J}^{(k)}|$ подмножеств \mathcal{V}_k^j единичных операций по обслуживанию требований $J_{k_j} \in \mathcal{J}^{(k)}$:

$$V_k = \mathcal{V}_k^1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_k^{|\mathcal{J}^{(k)}|}, \quad \mathcal{V}_k^j \neq \emptyset, \quad \mathcal{V}_k^j \cap \mathcal{V}_k^l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

Нетрудно убедиться в том, что запрещение одновременного выполнения любой пары единичных операций из множества V_k в допустимом расписании

задается полным $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом (V_k, \emptyset, E_k) , долями которого являются множества $\mathcal{V}_k^1, \dots, \mathcal{V}_k^{|\mathcal{J}^{(k)}|}$, и мощность множества ребер E_k равна произведению $\prod_{J_{k_j} \in \mathcal{J}^{(k)}} |\mathcal{V}_k^{j}|$.

Итак, определено множество ребер $E \setminus \mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} E_k$ и построен смешанный граф $G = (V, A, E)$, в котором $V = \mathcal{W}$, $A = \mathcal{A}$ и $E = \mathcal{E} \cup E_1 \cup \dots \cup E_{|\mathcal{M}|}$. Из построения смешанного графа $G = (V, A, E)$ следует, что все отношения предшествования операций, заданные в задаче $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, определяются подграфом $(\mathcal{W}, \mathcal{A}, \mathcal{E})$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, а запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_k на одном и том же приборе $M_k \in \mathcal{M}$ определяется подграфом $(\mathcal{W}, \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} A_i, \{ \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{M}|} E_k \} \cup \{ \bigcup_{i=1}^{|\mathcal{J}|} \mathcal{E}_i \})$ смешанного графа $G = (V, A, E)$. Следовательно, для разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ существует допустимое расписание

$$(15) \quad \mathbf{S} = \{C(v_1), \dots, C(v_{|\mathcal{W}|})\},$$

определяющее раскраску $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, в которой равенство $c(v_i) = C(v_i)$ выполняется для всех вершин $v_i \in \mathcal{W}$. Очевидно, что оптимальное по быстродействию расписание определяет оптимальную раскраску $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, что и завершает доказательство первой части теоремы 5.

Заметим, что оптимальное по быстродействию расписание для задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ совпадает с решением задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1, pmtn|C_{\max}$, поскольку согласно замечанию 2, если все операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ имеют единичные длительности $p_{ij} = 1$, то прерывания выполнения той или иной операции из множества \mathcal{Q} не приводит к уменьшению длины C_{\max} искомого оптимального по быстродействию активного расписания. Поэтому возможность прерываний единичных операций при решении задачи $G_cMPT|p_{ij} = 1, pmtn|C_{\max}$ можно попросту игнорировать при поиске оптимального по быстродействию активного расписания. Следовательно, задачу $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ можно решать, как частный случай $G_cMPT|p_{ij} = 1, pmtn|C_{\max}$ задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, представленный в теореме 5. Таким образом, вторая часть теоремы 5 непосредственно следует из леммы 2.

Лемма 2 [24]. Для любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ существует задача $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на том же смешанном графе $G = (V, A, E)$, которая эквивалентна задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$.

Приведенное в статье [24, с. 78–79] доказательство леммы 2 содержит алгоритм, который для любого заданного раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ строит задачу $G_cMPT|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на том же смешанном графе G , поиск решения которой эквивалентен поиску оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$. Теорема 5 доказана.

4. Пример 2 задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Проиллюстрируем первую часть теоремы 5 на следующем примере 2 разрешимой задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с пятью требованиями $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_5\}$ и девятью приборами $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_9\}$. В табл. 2 представлены операции множества \mathcal{Q} , длительности их выполнения и приборы множеств $\mathcal{M}_{\mu(i,j)} \subseteq \mathcal{M}$, которые требуются для выполнения операции $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$. Перед тем, как задать отношения предшествования между операциями разных требований для примера 2, построим подграф $G' = (V, A', E')$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$.

Смешанный граф $G' = (V, A', E')$ будет представлять ту часть исходных данных примера 2, которая представлена в табл. 2. При построении всего смешанного графа $G = (V, A, E)$ будем использовать следующее

Замечание 3. Так как рассматриваемая задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ имеет решение, то согласно теореме 4 ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа $G = (V, A, E)$ не должен содержать ни одного контура со смежными вершинами подграфа (V, \emptyset, E) .

Обслуживание требования J_1 состоит из двух операций $Q_{1,1}$ и $Q_{1,2}$ с длительностями $p_{1,1} = 5$ и $p_{1,2} = 1$. Используя обозначения (4), получаем множество $\mathcal{W}_1 = \{v_1, \dots, v_6\}$ линейно упорядоченных единичных операций, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_1$ смешанного графа G' . Поскольку операции обслуживания требования J_1 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' включаем множество дуг $\mathcal{A}_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_5, v_6)\}$, $\mathcal{A}_1 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_1 = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_5, v_6]\}$, $\mathcal{E}_1 \subset E'$.

Обслуживание требования J_2 состоит из трех операций $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$ и $Q_{2,3}$ с длительностями $p_{2,1} = 3$, $p_{2,2} = 1$ и $p_{2,3} = 3$. Используя обозначения (5), получаем множество $\mathcal{W}_2 = \{v_7, \dots, v_{13}\}$ единичных операций, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_2$. Поскольку все операции требования J_2 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_2 = \{(v_7, v_8), (v_8, v_9), \dots, (v_{12}, v_{13})\}$, $\mathcal{A}_2 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_2 = \{[v_7, v_8], [v_8, v_9], \dots, [v_{12}, v_{13}]\}$, $\mathcal{E}_2 \subset E'$.

Обслуживание требования J_3 состоит из трех операций $Q_{3,1}$, $Q_{3,2}$ и $Q_{3,3}$ с длительностями $p_{3,1} = 2$, $p_{3,2} = 1$ и $p_{3,3} = 2$. Используя обозначения (6), получаем множество $\mathcal{W}_3 = \{v_{14}, \dots, v_{18}\}$ единичных опера-

Таблица 2. Часть исходных данных примера 2 задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$

Операции	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{5,1}$	$Q_{5,2}$
Приборы	M_1	M_7	M_1	M_6	M_7	M_2	M_5	M_3	M_3	M_8	M_9	M_4	M_5
множества	M_6		M_2			M_3	M_7	M_8	M_4				M_9
$\mathcal{M}_{\mu(i,j)}$									M_5				
p_{ij}	5	1	3	1	3	2	1	2	4	2	2	4	2

ций, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_3$. Поскольку все операции требования J_3 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_3 = \{(v_{14}, v_{15}), (v_{15}, v_{16}), (v_{16}, v_{17}), (v_{17}, v_{18})\}$, $\mathcal{A}_3 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_3 = \{[v_{14}, v_{15}], [v_{15}, v_{16}], [v_{16}, v_{17}], [v_{17}, v_{18}]\}$, $\mathcal{E}_3 \subset E'$.

Обслуживание требования J_4 состоит из трех операций $Q_{4,1}$, $Q_{4,2}$ и $Q_{4,3}$ с длительностями $p_{4,1} = 4$, $p_{4,2} = 2$ и $p_{4,3} = 2$. Продолжая последовательно обозначать единичные операции, получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_4 = \{v_{19}, \dots, v_{26}\}$, которые включаем в множество вершин $V \supset \mathcal{W}_4$. Поскольку все операции требования J_4 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_4 = \{(v_{19}, v_{20}), (v_{20}, v_{21}), \dots, (v_{25}, v_{26})\}$, $\mathcal{A}_4 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_4 = \{[v_{19}, v_{20}], [v_{20}, v_{21}], \dots, [v_{25}, v_{26}]\}$, $\mathcal{E}_4 \subset E'$.

Обслуживание требования J_5 состоит из двух операций $Q_{5,1}$ и $Q_{5,2}$ с длительностями $p_{5,1} = 4$ и $p_{5,2} = 2$. Используя обозначения (6), получаем множество единичных операций $\mathcal{W}_5 = \{v_{27}, \dots, v_{32}\}$, которые включаем в искомое множество вершин $V \supset \mathcal{W}_5$. Поскольку все операции требования J_5 линейно упорядочены при реализации допустимого расписания, то в смешанный граф G' добавляем множество дуг $\mathcal{A}_5 = \{(v_{27}, v_{28}), (v_{28}, v_{29}), \dots, (v_{31}, v_{32})\}$, $\mathcal{A}_5 \subset A'$, и множество ребер $\mathcal{E}_5 = \{[v_{27}, v_{28}], [v_{28}, v_{29}], \dots, [v_{31}, v_{32}]\}$, $\mathcal{E}_5 \subset E'$. Итак, построен подграф $G' = (V, A', E')$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ с множеством вершин $V = \mathcal{W} := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{W}_i$, множеством дуг $A' := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{A}_i$ и множеством ребер $E' := \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{E}_i$.

Пусть помимо заданных в табл. 1 отношений предшествования между операциями множества \mathcal{Q}_i по обслуживанию одного и того же требования $J_i \in \mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_5\}$, в примере 2 задано следующее множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ между операциями из разных множеств $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{Q}$ (т.е. $v_{k_{ij}} \in \mathcal{Q}_i, v_{k_{rq}} \in \mathcal{Q}_r, r \neq i$):

$$(16) \quad \mathcal{R}_{\rightarrow} = \{v_1 \rightarrow v_7, v_{22} \rightarrow v_{14}, v_{22} \rightarrow v_{30}, v_{27} \rightarrow v_{19}\}$$

и задано также множество \mathcal{R}_{\mapsto} отношений предшествования $v_{k_{ij}} \mapsto v_{k_{rq}}$:

$$(17) \quad \mathcal{R}_{\mapsto} = \{v_9 \mapsto v_{19}, v_{10} \mapsto v_{23}, v_{23} \mapsto v_{15}, v_{15} \mapsto v_{10}, v_{17} \mapsto v_{25}\}.$$

Заметим, что операции множества $V(h) = \{v_{10}, v_{15}, v_{23}\}$ должны выполняться одновременно при реализации любого допустимого расписания, поскольку множество (17) содержит отношения предшествования $v_{10} \mapsto v_{23}$, $v_{23} \mapsto v_{15}$ и $v_{15} \mapsto v_{10}$. Следовательно, ориентированный подграф (V, A, \emptyset) искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ должен содержать контур $(v_{10}, v_{23}, v_{15}, v_{10})$.

Для представления множества (16) отношений предшествования $v_{k_{ij}} \rightarrow v_{k_{rq}}$ в построенный смешанный граф $G' = (V, A', E')$ добавляем множество дуг $\mathcal{A}_6 = \{(v_1, v_7), (v_{22}, v_{14}), (v_{22}, v_{30}), (v_{27}, v_{19})\}$, $\mathcal{A}_6 \subset A'$, а также множество ребер $\mathcal{E}_6 = \{[v_1, v_7], [v_{14}, v_{22}], [v_{22}, v_{30}], [v_{19}, v_{27}]\}$, $\mathcal{E}_6 \subset E'$.

Для представления множества (17) отношений предшествования $v_{k_{ij}} \mapsto v_{k_{rq}}$ в построенный смешанный граф добавляем множество дуг $\mathcal{A}_7 = \{(v_9, v_{19}), (v_{10}, v_{23}), (v_{23}, v_{15}), (v_{15}, v_{10}), (v_{17}, v_{25})\}$, $\mathcal{A}_7 \subset \{A' \cup A_6\}$.

Итак, построен ориентированный подграф (V, A, \emptyset) искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ и подмножество $\mathcal{E}_6 \cup E'$ множества ребер E .

Остальные ребра множества $E \setminus \{\mathcal{E}_6 \cup E'\}$ искомого смешанного графа $G = (V, A, E)$ будем строить последовательно для всех множеств $\mathcal{Q}^{(k)} = \bigcup_{J_i \in \mathcal{J}^{(k)}} \mathcal{Q}_i^{(k)}$ операций, выполняемых на приборах $M_k \in \{M_1, \dots, M_9\}$.

Для прибора M_1 множество $\mathcal{Q}^{(1)} = \{\mathcal{Q}_{1,1}, \mathcal{Q}_{2,1}\}$ целочисленных операций определяет множество из восьми единичных операций $\{v_1, \dots, v_5, v_7, v_8, v_9\} =: V_1$, которое разбивается на пять единичных операций $\{v_1, \dots, v_5\}$ требования J_1 и три единичные операции $\{v_7, v_8, v_9\}$ требования J_2 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_1 задается полным двудольным графом (V_1, \emptyset, E'_1) , в котором $V_1 = \{v_1, \dots, v_5; v_7, v_8, v_9\}$. Как и в подразделе 2.3, вершины разных долей k -дольного графа отделяются точкой с запятой. Учитывая замечание 3, ребра $[v_1, v_7]$, $[v_1, v_8]$ и $[v_1, v_9]$ можно исключить из полного двудольного графа (V_1, \emptyset, E'_1) , поскольку порядок выполнения операций v_1 и v_i , $i \in \{7, 8, 9\}$, определяется путем в ориентированном графе (V, A, \emptyset) и цепью в графе $(V, \emptyset, \{\mathcal{E}_6 \cup E'\})$ между вершинами v_1 и v_i . Поэтому вместо полного двудольного графа (V_1, \emptyset, E'_1) , в котором $|E'_1| = |\mathcal{Q}_1^{(1)}| \cdot |\mathcal{Q}_2^{(1)}| = 5 \cdot 3 = 15$, построим двудольный граф (V_1, \emptyset, E_1) , в котором $E_1 = \{[v_2, v_7], \dots, [v_5, v_7], [v_2, v_8], \dots, [v_5, v_8], [v_2, v_9], \dots, [v_5, v_9]\}$.

Для прибора M_2 множество $\mathcal{Q}^{(2)}$ целочисленных операций определяет множество V_2 , которое состоит из пяти единичных операций и разбивается на три единичные операции $\{v_7, v_8, v_9\}$ требования J_2 и две единичные операции $\{v_{14}, v_{15}\}$ требования J_3 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_2 задается полным двудольным графом (V_2, \emptyset, E_2) , в котором $V_2 = \{v_7, v_8, v_9; v_{14}, v_{15}\}$ и $E_2 = \{[v_7, v_{14}], [v_7, v_{15}], [v_8, v_{14}], [v_8, v_{15}], [v_9, v_{14}], [v_9, v_{15}]\}$.

Для прибора M_3 множество $\mathcal{Q}^{(3)}$ целочисленных операций определяет множество V_3 , которое состоит из восьми единичных операций и разбивается на четыре единичные операции $\{v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}\}$ требования J_3 и четыре единичные операции $\{v_{19}, \dots, v_{22}\}$ требования J_4 . Поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{14}$, и операции множеств \mathcal{Q}_3 и \mathcal{Q}_4 по обслуживанию требований J_3 и J_4 упорядочены, то нет необходимости добавлять ребра в искомый смешанный граф для запрещения одновременного выполнения пары операций из множества $\mathcal{Q}^{(2)}$. В таком случае полагаем $E_3 = \emptyset$.

Для прибора M_4 множество $\mathcal{Q}^{(4)}$ целочисленных операций определяет множество V_4 , которое состоит из восьми единичных операций и разбивается на четыре единичные операции $\{v_{19}, \dots, v_{22}\}$ требования J_4 и четыре единичные операции $\{v_{27}, \dots, v_{30}\}$ требования J_5 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_4 задается полным двудольным

графом (V_4, \emptyset, E'_4) , в котором $V_4 = \{v_{19}, \dots, v_{22}; v_{27}, \dots, v_{30}\}$. В силу замечания 3, ребра множества $\{[v_{19}, v_{28}], [v_{19}, v_{29}], [v_{19}, v_{30}]\}$ можно удалить из полного двудольного графа (V_4, \emptyset, E'_4) , поскольку порядок выполнения операций v_{19} и v_i , $i \in \{28, 29, 30\}$, определяется путем в ориентированном графе (V, A, \emptyset) и цепью в графе $(V, \emptyset, \{E_6 \cup E'\})$ между вершинами v_{19} и v_i . Поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{30}$, то удалим ребра множества $\{[v_{19}, v_{30}], [v_{20}, v_{30}], [v_{21}, v_{30}]\}$ и вместо полного двудольного графа (V_4, \emptyset, E'_4) , в котором $|E'_4| = |\mathcal{Q}_4^{(4)}| \cdot |\mathcal{Q}_5^{(4)}| = 4 \cdot 4 = 16$, построим двудольный граф (V_4, \emptyset, E_4) , в котором $E_4 = \{[v_{20}, v_{28}], [v_{20}, v_{29}], [v_{21}, v_{28}], [v_{21}, v_{29}]\}$.

Для прибора M_5 множество $\mathcal{Q}^{(5)}$ целочисленных операций определяет множество V_5 , которое состоит из семи единичных операций и разбивается на единичную операцию v_{16} требования J_3 , четыре единичные операции $\{v_{19}, \dots, v_{22}\}$ требования J_4 и две операции $\{v_{31}, v_{32}\}$ требования J_5 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_5 задается полным трехдольным графом (V_5, \emptyset, E'_5) , в котором $V_5 = \{v_{16}; v_{19}, \dots, v_{22}; v_{31}, v_{32}\}$. В силу замечания 3, ребра множества $\{[v_{16}, v_{19}], \dots, [v_{16}, v_{22}]\}$ удалим из полного трехдольного графа (V_5, \emptyset, E'_5) , поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{14}$. Поскольку множество $\mathcal{R}_{\rightarrow}$ содержит отношение предшествования $v_{22} \rightarrow v_{30}$, то удалим и ребра множества $\{[v_{19}, v_{31}], [v_{19}, v_{32}], [v_{20}, v_{31}], [v_{20}, v_{32}], [v_{21}, v_{31}], [v_{21}, v_{32}], [v_{22}, v_{31}], [v_{22}, v_{32}]\}$ и вместо полного трехдольного графа (V_5, \emptyset, E'_5) , в котором $|E'_5| = |\mathcal{Q}_3^{(5)}| \cdot |\mathcal{Q}_4^{(5)}| \cdot |\mathcal{Q}_5^{(5)}| = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$, построим трехдольный граф (V_5, \emptyset, E_5) , в котором $E_5 = \{[v_{16}, v_{31}], [v_{16}, v_{32}]\}$.

Для прибора M_6 множество $\mathcal{Q}^{(6)}$ целочисленных операций определяет множество V_6 , которое состоит из шести единичных операций и разбивается на пять единичных операций $\{v_1, \dots, v_5\}$ требования J_1 и единичную операцию v_{10} требования J_2 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_6 задается полным двудольным графом (V_6, \emptyset, E_6) , в котором $V_6 = \{v_1, \dots, v_5; v_{10}\}$ и $E_6 = \{[v_1, v_{10}], \dots, [v_5, v_{10}]\}$.

Для прибора M_7 множество $\mathcal{Q}^{(7)}$ целочисленных операций определяет множество V_7 , которое состоит из пяти единичных операций и разбивается на единичную операцию v_6 требования J_1 , три единичные операции $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ требования J_2 и единичную операцию v_{16} требования J_3 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_7 задается полным трехдольным графом (V_7, \emptyset, E_7) , в котором $V_7 = \{v_6; v_{11}, v_{12}, v_{13}; v_{16}\}$ и $E_7 = \{[v_6, v_{11}], [v_6, v_{12}], [v_6, v_{13}]; [v_6, v_{16}]; [v_{11}, v_{16}], [v_{12}, v_{16}], [v_{13}, v_{16}]\}$.

Для прибора M_8 множество $\mathcal{Q}^{(8)}$ целочисленных операций определяет множество V_8 , которое состоит из четырех единичных операций и разбивается на две единичные операции $\{v_{17}, v_{18}\}$ требования J_3 и две единичные операции $\{v_{23}, v_{24}\}$ требования J_4 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_8 задается полным двудольным графом (V_8, \emptyset, E_8) , в котором $V_8 = \{v_{17}, v_{18}; v_{23}, v_{24}\}$ и $E_8 = \{[v_{17}, v_{23}], [v_{17}, v_{24}], [v_{18}, v_{23}], [v_{18}, v_{24}]\}$.

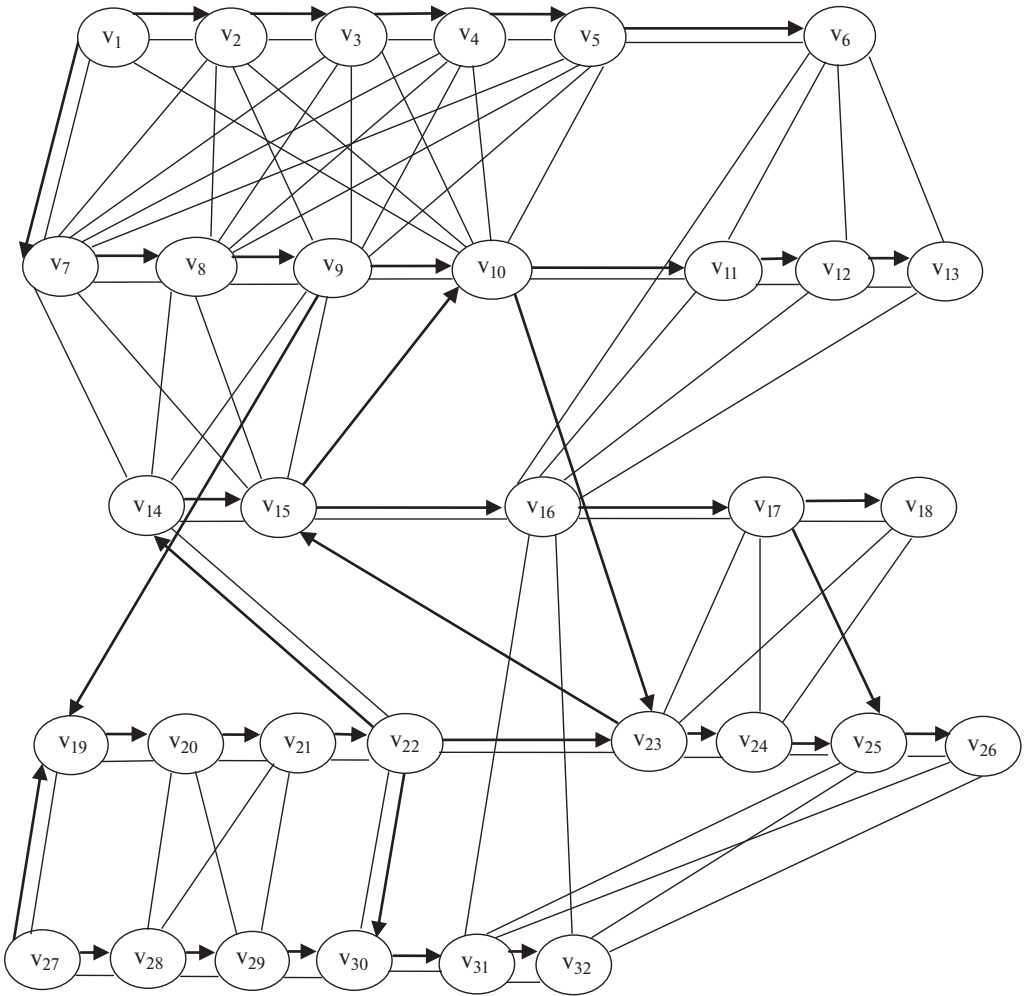


Рис. 2. Смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий исходные данные примера 2 задачи $G_cMPT[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Для прибора M_9 множество $\mathcal{Q}^{(9)}$ целочисленных операций определяет множество V_9 , которое состоит из четырех единичных операций и разбивается на две единичные операции $\{v_{25}, v_{26}\}$ требования J_4 и две единичные операции $\{v_{31}, v_{32}\}$ требования J_5 . Запрещение одновременного выполнения любой пары операций из множества V_9 задается полным двудольным графом (V_9, \emptyset, E_9) , в котором $V_9 = \{v_{25}, v_{26}; v_{31}, v_{32}\}$ и $E_9 = \{[v_{25}, v_{31}], [v_{25}, v_{32}], [v_{26}, v_{31}], [v_{26}, v_{32}]\}$.

Итак, построен подграф $(V, \emptyset, E \setminus \{\mathcal{E}_6 \cup E'\}) = \bigcup_{k=1}^9 (V_k, \emptyset, E_k)$ смешанного графа (V, A, E) , где каждый граф (V_k, \emptyset, E_k) является $|\mathcal{J}^{(k)}|$ -дольным графом. На рис. 2 представлен построенный смешанный граф $G = (V, A, E)$, определяющий все исходные данные примера 2 задачи $G_cMPT[[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с пятью требованиями $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_5\}$ и девятью приборами $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_9\}$.

В соответствии с теоремой 5 индивидуальная задача $G_cMPT|[p_{ij}]$, $pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ (т.е. пример 2) сведена к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ того же смешанного графа $G = (V, A, E)$. Допустимое расписание \mathbf{S} для задачи $G_cMPT|[p_{ij}]$, $pmtn|C_{\max}$ с прерываниями операций \mathcal{Q} определяется множеством (15) моментов завершения выполнения единичных операций множества \mathcal{W} . Активное расписание определяется раскраской $c(G)$ смешанного графа G , в которой $c(v_i) = C(v_i)$ для всех вершин $v_i \in \mathcal{W}$.

Оптимальное по быстродействию активное расписание для примера 2 определяется следующей оптимальной раскраской $c(G)$ смешанного графа G , представленного на рис. 2:

$$\begin{aligned} c(v_1) &= 1, & c(v_2) &= 5, & c(v_3) &= 6, & c(v_4) &= 7, & c(v_5) &= 8, & c(v_6) &= 9, \\ c(v_7) &= 2, & c(v_8) &= 3, & c(v_9) &= 4, & c(v_{10}) &= 9, & c(v_{11}) &= 11, & c(v_{12}) &= 12, \\ c(v_{13}) &= 13, & c(v_{14}) &= 8, & c(v_{15}) &= 9, & c(v_{16}) &= 10, & c(v_{17}) &= 11, \\ c(v_{18}) &= 12, & c(v_{19}) &= 4, & c(v_{20}) &= 5, & c(v_{21}) &= 6, & c(v_{22}) &= 7, \\ c(v_{23}) &= 9, & c(v_{24}) &= 10, & c(v_{25}) &= 12, & c(v_{26}) &= 13, & c(v_{27}) &= 1, \\ c(v_{28}) &= 2, & c(v_{29}) &= 3, & c(v_{30}) &= 8, & c(v_{31}) &= 9, & c(v_{32}) &= 11. \end{aligned}$$

Оптимальность раскраски $c(G)$ следует из справедливости неравенства $\chi(G) \geq 13$, поскольку ориентированный подграф (V, A, \emptyset) смешанного графа G содержит путь $(v_1, v_7, v_8, v_9, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{25}, v_{26})$, вес которого равен 13. Здесь вес пути в смешанном графе $G = (V, A, E)$ полагаем равным сумме весов $w(v_i, v_j)$ всех дуг (v_i, v_j) , образующих этот путь, а вес дуги $(v_i, v_j) \in A$ полагаем равным единице, если $[v_i, v_j] \in E$, и $w(v_i, v_j) = 0$ в противном случае.

5. Активные расписания для задачи $G_cMPT|[p_{ij}]$, $pmtn|C_{\max}$ и соответствующие минимальные раскраски вершин смешанного графа

Пусть E^* обозначает подмножество всех ребер $[v_i, v_j]$ множества E , для которых вершины v_i и v_j не являются смежными в ориентированном графе (V, A, \emptyset) . В силу определения 1 любая раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ для каждого ребра $[v_i, v_j] \in E^*$ определяет различные цвета $c(v_i) \neq c(v_j)$. Если $c(v_i) < c(v_j)$, то добавляем дугу (v_i, v_j) в смешанный граф G , а если $c(v_i) > c(v_j)$, то добавляем в смешанный граф симметричную дугу (v_j, v_i) . В результате добавления указанных дуг для всех ребер $[v_i, v_j] \in E^*$ смешанный граф $G = (V, A, E)$ превращается в смешанный граф $G(c) = (V, A \cup A(c), E)$, $|E^*| = |A(c)|$, для каждого ребра $[v_p, v_q] \in E$ которого справедлива следующая импликация:

$$(18) \quad [v_p, v_q] \in E \Rightarrow (v_p, v_q) \in A \cup A(c).$$

Из (18) следует, что любая раскраска $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ определяет порядок цветов $c(v_i)$ для всех вершин $v_i \in V$. Следовательно, можно определить следующее множество минимальных раскрасок $c(G)$ смешанного графа G .

Определение 4. Раскраску $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ называют минимальной, если ни один цвет $c(v_i)$, $v_i \in V$, нельзя уменьшить без нарушения определенного раскраской $c(G)$ порядка цветов $c(v_i)$ для всех вершин $v_i \in V$ и (или) какую-то вершину $v_j \in V \setminus \{v_i\}$ пришлось бы окрасить в цвет больше цвета $c(v_j)$.

Поиск оптимальной раскраски смешанного графа $G = (V, A, E)$ можно ограничить множеством минимальных раскрасок, поскольку, очевидно, существует оптимальная раскраска любого заданного раскрашиваемого смешанного графа G , которая является минимальной. Заметим, что оптимальная раскраска $c(G)$ смешанного графа G , построенного для примера 2, является минимальной.

Минимальная раскраска $c(G)$ определяет оптимальное расписание (15) для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$, причем это расписание является активным. Из леммы 2 и определений 2 и 4 следует, что любое активное расписание \mathbf{S} , существующее для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$, однозначно определяет минимальную раскраску вершин смешанного графа G , и наоборот. Получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathbf{C}(G)$ всех минимальных раскрасок $c(G)$ раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ и множеством $\mathbf{S}(G)$ всех активных расписаний, существующих для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$.

Согласно теоремам 5 и 6 можно сократить размерность множества допустимых расписаний, которые сравниваются при решении задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, и соответственно, сократить размерность множества сравниваемых раскрасок $c(G)$ при поиске оптимальной раскраски.

Из второй части теоремы 5 следует, что задача поиска оптимальной раскраски $c(G)$ любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ имеет ту же асимптотическую сложность, что и задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$, причем справедливо равенство $|\mathbf{C}(G)| = |\mathbf{S}(G)|$.

Согласно первой части теоремы 5, сведение задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ к поиску оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа G является псевдополиномиальным. Такое сведение целесообразно при решении практических задач ОКП, если длительности c_{ij} операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$ не велики. Для задачи с большими целочисленными длительностями операций множества \mathcal{Q} можно вычислить наибольший общий делитель D целочисленных длительностей всех операций множества \mathcal{Q} .

Если полученное значение D превосходит единицу, то вместо исходной задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ целесообразно решать ее аналог с модифицированными длительностями, равными $\frac{c_{ij}}{D}$ для всех операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$.

Сократить размерность смешанного графа $G = (V, A, E)$, порождаемого задачей $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, можно и в результате подходящей декомпозиции начальной задачи на подзадачи меньшей размерности на основе запланированных прерываний производственного процесса, например, в моменты начала обеденного перерыва или после завершения рабочей смены. За время такого перерыва уточненные и дополненные данные могут быть включены в исходные данные очередной подзадачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, в результате решения которой может быть получено более эффективное расписание производственного процесса.

Следует отметить, что в теории расписаний общепринято предположение о том, что прерывание операции не связано с какими-то затратами и выполняется мгновенно, как и последующее возобновление прерванной операции. Такие идеальные прерывания операций не характерны для многих практических задач ОКП. В практических задачах требуется определенное время для прерывания производственной операции, также необходимо учитывать временные затраты на переналадку прибора после прерывания операции и на последующую наладку прибора с целью возобновления ранее прерванной операции. На практике для учета времени наладки и переналадки приборов в исходные данные задачи следует включать специальные операции наладки и переналадки приборов и решать задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с исходными данными, включающими операции наладки и переналадки приборов. При этом длительности переналадки и наладки приборов $M_{\mu(ij)} \in \mathcal{M}$ должны быть меньше длительностей операций $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, прерывания которых целесообразны.

6. Обсуждение полученных результатов и перспективы использования

Утверждения, представленные в разделах 1–5, можно использовать для построения сетевых моделей в виде смешанных графов $G = (V, A, E)$ для многочисленных задач $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ теории расписаний при допустимости прерываний выполнения операций и для задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ без прерываемых операций. На основе построенных сетевых моделей можно разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы минимизации длины C_{\max} активных расписаний. Такие алгоритмы будут включать поиск оптимальных раскрасок $c(G)$ или строгих раскрасок $c_<(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, определяющих исходные данные задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или разрешимой задачи $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$.

Установленная взаимосвязь представленных в статье обобщений классических задач теории расписаний и задач поиска оптимальных (строгих) раскрасок вершин смешанных графов позволяет решать любые разрешимые задачи

$\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ и любые задачи $\alpha|p_{ij}|C_{\max}$, а также многочисленные частные случаи этих задач в терминах теории графов и не использовать при этом специальные термины теории расписаний, которые связаны с практическими задачами ОКП. Оказалось, что терминов теории графов вполне достаточно как для постановки любой задачи $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ или $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$, так и для разработки алгоритмов решения задач теории расписаний в результате поиска оптимальных (строгих) раскрасок смешанных графов $G = (V, A, E)$, определяющих условия поставленных задач.

В качестве иллюстрации преимущества использования терминологии теории графов при решении задач $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ и $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ перечислим термины теории расписаний, использованные в этой статье: *цех работ (общий), обслуживающая система (многостадийная), job-shop, general shop, прибор (обслуживающий, специализированный), машина, станок, процессор, расписание (активное, допустимое, оптимальное), критерий оптимальности расписания, процесс реализации допустимого расписания, оптимальное по быстрдействию расписание, требование (первое, второе, последнее), задание, обслуживание требования, время готовности требования к обслуживанию, горизонт планирования, длина расписания, операция (многопроцессорная, прерываемая), прерывание (целочисленное), маршрут обслуживания требования, первая (последняя) операция требования, длительность (выполнения) операции (единичная, целочисленная), назначение операции на прибор, недопустимость одновременного выполнения операций, необходимость совместного выполнения (единичных) операций, начало операции, завершение операции, момент начала (завершения) операции, прерывание операции, быстрдействие расписания, отношение предшествования операций (завершение-начало, начало-начало), время реализации заявок, условия (эффективность) производства, момент времени (целочисленный)*. Для описания и доказательства тех же результатов статьи в терминах раскрасок вершин смешанных графов использовалось меньше терминов теории графов, а именно: *вершина (инцидентная, смежная), дуга, ребро (инцидентное), граф (конечный, ориентированный, смешанный, k-дольный, полный, раскрашиваемый), подграф, раскраска (строгая, минимальная, оптимальная), цвет вершины, хроматическое число, путь, длина (вес) пути, цепь, контур*.

Утверждения об эквивалентности задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ и задач поиска оптимальной раскраски $c(G)$ или строгой раскраски $c_{<}(G)$ того же смешанного графа $G = (V, A, E)$, а также утверждения о полиномиальной сводимости задачи поиска оптимальной раскраски $c(G)$ любого раскрашиваемого смешанного графа $G = (V, A, E)$ к задаче $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ и утверждения о псевдополиномиальном сведении любой разрешимой задачи $\alpha|p_{ij}, pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$ имеют важное значение как для теории расписаний, так и для теории графов.

Представленные и доказанные в статье результаты можно рассматривать как обоснование теоретико-графового метода решения задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ путем сведения их к соответствующим задачам поиска оптимальных раскрасок $c(G)$ или оптимальных строгих раскрасок $c_{<}(G)$ смешанных графов $G = (V, A, E)$, определяющих условия и ограничения расписанческих задач. Условия и ограничения индивидуальной задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ определяются соответствующим смешанным графом $G = (V, A, E)$. Для задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ такой смешанный граф $G = (V, A, E)$ определяется однозначно, а для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ с точностью до избыточных ребер из множества E , которые можно найти и удалить в результате разбиения по рангам вершин ориентированного подграфа $G = (V, A, \emptyset)$ смешанного графа $G = (V, A, E)$, как это продемонстрировано на примере 2 в разделе 4. Представленные в статье результаты могут быть использованы для исследования раскрасок специальных классов смешанных графов, порождаемых задачами $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, что может способствовать привлечению специалистов в области теории графов к решению задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ и $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и их многочисленных частных случаев.

Нетрудно убедиться в том, что разные задачи $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ могут быть заданы одним и тем же смешанным графом $G = (V, A, E)$. Поэтому результаты полученные для раскраски $c(G)$ или строгой раскраски $c_{<}(G)$ конкретного смешанного графа $G = (V, A, E)$ применимы, как правило, для целого множества расписанческих задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или задач $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ соответственно. Следовательно, свойства раскрасок и алгоритмы поиска оптимальных раскрасок смешанных графов $G = (V, A, E)$ специального вида могут быть использованы для решения всех задач $\alpha|p_{ij} = 1|C_{\max}$ или $\alpha|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$, соответственно, исходные данные которых задаются такими же смешанными графами.

7. Заключение

Исследована взаимосвязь задач оптимальной раскраски вершин смешанного графа $G = (V, A, E)$ и задач $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ построения оптимального по быстрдействию расписания выполнения частично упорядоченного множества целочисленных операций при допустимости их прерываний, при задании двух типов отношений предшествования на множестве операций (окончание-начало и начало-начало двух операций) и необходимости одновременного выполнения подмножества единичных операций. Из теоремы 5 следует, что задача поиска оптимальной раскраски вершин смешанного графа $G = (V, A, E)$ полиномиально сводится к решению задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на том же смешанном графе G . Из конструктивного доказательства этой теоремы следует, что для многих утверждений, доказанных для оптимальных раскрасок вершин смешанных графов (см., например, [1–9, 24]), существуют аналогичные утверждения для за-

дачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и ее частных случаев. Установлено также, что любая разрешимая задача $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ на смешанном графе $G = (V, A, E)$ псевдополиномиально сводится к задаче поиска оптимальной раскраски $c(G)$ вершин того же смешанного графа G , что позволяет получать утверждения для задач поиска оптимальных раскрасок вершин смешанных графов непосредственно из утверждений, доказанных для задачи $G_cMPT|[p_{ij}], pmtn|C_{\max}$ и ее многочисленных частных случаев [2, 5, 12, 13, 15–24].

Автор благодарен рецензентам за полезные замечания и предложения, которые позволили улучшить представление полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sotskov Y.N., Tanaev V.S.* Хроматический многочлен смешанного графа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 6. С. 20–23.
2. *Hansen P., Kuplinsky J., de Werra D.* Mixed graph colorings // Math. Methods Oper. Res.. 1997. V. 45. P. 145–160.
3. *Karp R.M.* Reducibility among combinatorial problems / In *Complexity of Computer Computations*, R.E. Miller, J.W. Thatcher (Editors.) // New York, USA: Plenum Press. 1972. P. 85–103.
4. *Sotskov Y.N., Dolgui A., Werner F.* Mixed graph coloring for unit-time job-shop scheduling // Int. J. of Math. Algorithms. 2001. V. 2. P. 289–323.
5. *Sotskov Y.N., Tanaev V.S., Werner F.* Scheduling problems and mixed graph colorings // Optimization. 2002. V. 51. No. 3. P. 597–624.
6. *Al-Anzi F.S., Sotskov Y.N., Allahverdi A., Andreev G.V.* Using mixed graph coloring to minimize total completion time in job shop scheduling // Appl. Math. Comput. 2006. V. 182. P. 1137–1148.
7. *Kouider A., Ait Haddadene H., Ourari S., Oulamara A.* Mixed graph coloring for unit-time scheduling // Int. J. Product. Res. 2017. V. 55. No. 6. P. 1720–1729.
8. *Kouider A., Ait Haddadene H., Oulamara A.* On minimization of memory usage in branch-and-bound algorithm for the mixed graph coloring: application to the unit-time job shop scheduling // Comput. Oper. Res. 2019. V. 4967. P. 1001–1008.
9. *Sotskov Y.N.* Mixed graph colorings: A historical review // Mathematics. 2020. V. 8. P. 1–24.
10. *Harary F.* Graph Theory. MA, USA: Addison-Wesley, Reading, 1969.
11. *Thulasiraman K., Swamy M.N.S.* Graphs: Theory and Algorithms. Toronto, Canada: John Wiley & Sons, Inc. 1992.
12. *Tanaev V.S., Sotskov Y.N., Strusevich V.A.* Scheduling Theory: Multi-Stage Systems. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
13. *Brucker P.* Scheduling Algorithms, Berlin, Germany: Springer, 1995.
14. *Graham R.E., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Ann. Discret. Math. 1979. V. 5. P. 287–326.

15. *Hoogeveen J.A., van de Velde S.L., Veltman B.* Complexity of scheduling multiprocessor tasks with prespecified processor allocations // *Discret. Appl. Math.* 1994. V. 55. P. 259–272.
16. *Brucker P., Kramer A.* Shop scheduling problems with multiprocessor tasks on dedicated processors // *Ann. Oper. Res.* 1995. V. 57. P. 13–27.
17. *Chou F.D.* Particle swarm optimization with cocktail decoding method for hybrid flow shop scheduling problems with multiprocessor tasks // *Int. J. Prod. Econom.* 2013. V. 141. P. 137–145.
18. *Kurdi M.* Ant colony system with a novel Non-Daemon Actions procedure for multiprocessor task scheduling in multistage hybrid flow shop // *Swarm Evol. Comput.* 2019. V. 44. P. 987–1002.
19. *Drozdowski M.* Scheduling multiprocessor – an overview // *Eur. J. Oper. Res.* 1996. V. 94. P. 215–230.
20. *Baptiste P.* A note on scheduling multiprocessor tasks with identical processing times // *Comput. Oper. Res.* 2003. V. 30. P. 2071–2078.
21. *Zinder Y., Dob V.H., Oguz C.* Computational complexity of some scheduling problems with multiprocessor tasks // *Discret. Optimization.* 2005. V. 2. P. 391–408.
22. *Kis T.* Scheduling multiprocessor UET tasks of two sizes // *Theor. Comput. Sci.* 2009. V. 410. P. 4864–4873.
23. *Giario K., Kubale M., Obszarski P.* A graph coloring approach to scheduling of multiprocessor tasks on dedicated machines with availability constraints // *Discret. Appl. Math.* 2009. V. 157. P. 3625–3630.
24. *Sotskov Y.N.* Mixed graph coloring as scheduling multi-processor tasks with equal processing times // *J. Belarusian State Univ. Math. Inform.* 2021. V. 2. P. 67–81.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 04.11.2021

После доработки 15.08.2022

Принята к публикации 29.09.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

- Александров А.Ю., Тихонов А.А.** Анализ устойчивости механических систем с существенно нелинейными позиционными силами при наличии распределенного запаздывания 3
- Глуценко А.И., Ласточкин К.А.** Ослабление условия реализуемости процедуры динамического расширения и смешивания 23

Стохастические системы

- Тарасов А.Н., Азанов В.М., Кибзун А.И.** Об одной задаче оптимального удержания траекторий дискретной стохастической системы в трубке 63

Управление в технических системах

- Хуторцев В.В.** Управление поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной поисковой системе 84

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

- Дубнов Ю.А., Попков А.Ю., Полищук В.Ю., Сокол Е.С., Мельников А.В., Полищук Ю.М., Попков Ю.С.** Алгоритмы рандомизированного машинного обучения для прогнозирования эволюции площади термокарстовых озер в зонах вечной мерзлоты 98
- Пакшин П.В., Емельянова Ю.П.** Управление с итеративным обучением дискретной системой при запаздывании вдоль траектории повторения и амплитудных ограничениях 121

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Сотсков Ю.Н.** Оптимальное по быстродействию расписание обслуживания требований с прерываниями операций как оптимальная раскраска смешанного графа 139

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

- Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.** Stability Analysis of Mechanical Systems with Essentially Nonlinear Positional Forces under Distributed Delay 3
- Glushchenko A.I., Lastochkin K.A.** Relaxation of Conditions for Convergence of Dynamic Regressor Extension and Mixing Procedure 23

Stochastic Systems

- Tarasov A.N., Azanov V.M., Kibzun A.I.** On One Problem of Optimal Trajectory Retention of a Discrete Stochastic System in a Tube 63

Control in Technical Systems

- Khutortsev V.V.** Managing the Search for Surveillance Objects from Space-Time Poisson Stream in a Multi-Channel Search Engine 84

Intellectual Control Systems, Data Analysis

- Dubnov Y.A., Popkov A.Y., Polyschuk V.Y., Sokol E.S., Melnikov A.V., Polyschuk Y.M., Popkov Y.S.** Randomized Machine Learning Algorithms for Forecasting the Evolution of the Thermokarst Lakes in the Permafrost Zones 98
- Pakshin P.V., Emelianova J.P.** Iterative Learning Control of a Discrete-Time System under Delay Along the Sample Trajectory and Input Saturation 121

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Sotskov Y.N.** Scheduling Jobs with Operation Preemptions to Minimize Makespan as the Optimal Coloring of a Mixed Graph 139