

ISSN 0005-2310

# АТ ВТОМАТИКА и ДЕЛЕМЕХАНИКА



1

2025



Российская Академия Наук

# АТ ВТОМАТИКА и ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год



ЯНВАРЬ

Москва

2025

**Учредители журнала:**

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галляев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Самохин А.С.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,  
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноуско Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,  
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,  
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,  
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,  
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,  
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,  
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,  
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,  
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: [redacsia@ipu.ru](mailto:redacsia@ipu.ru)

Зав. редакцией *E.A. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

# Линейные системы

© 2025 г. В.Е. ХАРТОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (hartovskij@grsu.by),  
О.И. УРБАН (urban\_ola@mail.ru)

(Гродненский государственный университет имени Я. Купалы)

## ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ РЕГУЛЯТОРОВ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ<sup>1</sup>

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтравального типа с сосредоточенными запаздываниями получен критерий существования и предложен конструктивный способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу, одновременно решавшего задачу финитной стабилизации (полного успокоения) и обеспечивающего замкнутой системе конечный (но не произвольный) спектр. Отличительной чертой регулятора является отсутствие в структуре распределенного запаздывания, что важно для его практической реализации. Полученные в работе результаты проиллюстрированы числовым примером.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностная система, нейтравальный тип, запаздывание, финитная стабилизация, регулятор.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010011, **EDN:** JQZUXO

### 1. Введение

При моделировании многих процессов в экологии, медицине, электродинамике, механике деформированного твердого тела, технике, экономике и других областях [1–3] используются системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Учет запаздывания в модели, с одной стороны, способствует повышению надежности при описании реальных явлений и прогнозированию поведения соответствующих систем. С другой стороны, включение характеристик процесса в предшествующие моменты времени в закон эволюции системы увеличивает ее сложность. В связи с этим исследованию общей теории систем с запаздыванием, а также использованию таких систем в прикладных областях посвящено достаточно много работ (см. например, Введение в [3]). В настоящей статье исследуется вопрос финитной стабилизации линейных систем нейтравального типа с сосредоточенными запаздываниями в состоянии и управлении.

Задачи стабилизации для систем с запаздыванием являются достаточно сложными [4–11] и на сегодняшний день до конца не изучены. Один из воз-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

можных подходов основан на вычислении неустойчивых собственных значений спектра с последующей заменой их подходящими числами. Однако вопрос нахождение таких значений является нетривиальной задачей. Поэтому более универсальным является метод, основанный на решении задачи назначения замкнутой системе конечного спектра [12–15], как правило состоящего из чисел с отрицательными действительными частями.

Множество собственных значений линейной системы с последействием в общем случае бесконечно, поэтому вопрос управления всеми собственными значениями такой системы естественно рассматривать как управление коэффициентами характеристического квазиполинома – задача модального управления [16–19]. Другое направление исследований, связанное с проблемой стабилизации, заключается [14, 20–22] в решении задачи построения регулятора с обратной связью, обеспечивающего равенство нулю через ограниченное время всех компонент исходной разомкнутой системы, т.е. обеспечивающего финитную стабилизацию [23, 24] (другими словами, решение задачи полной 0-управляемости регулятором с обратной связью). Одна из оригинальных идей решения задачи финитной стабилизации заключается [14, 20] в замыкании системы обратной связью так, чтобы замкнутая система стала системой с конечным спектром, точно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам вектора-решения исходной системы. Дальнейшее развитие этих идей на системы нейтрального типа получено в [15, 17, 21, 22], а системное изложение этих результатов в монографии [25].

В настоящей работе для линейных автономных систем нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями построен регулятор финитной стабилизации по выходу, под которым понимается регулятор с обратной связью в виде измерений наблюдаемого выходного сигнала, обеспечивающий одновременно финитную стабилизацию и конечный спектр. Подобная задача с условием выбора любого конечного спектра в случае системы запаздывающего типа со скалярными входом и выходом изучена в [24], а для многовходных систем нейтрального типа в [26]. К недостаткам статьи [26] следует отнести наличие в регуляторе слагаемых с распределенными запаздываниями, хотя исходный объект управления содержит только сосредоточенное запаздывание. Интегралы, содержащие распределенное запаздывание, при практической реализации заменяются конечными суммами, что даже при использовании квадратурных формул высокой точности может привести к нежелательным последствиям (например, потере устойчивости) [27, 28]. Принципиальное отличие настоящей статьи от [26] заключается в новой конструкции регулятора, который содержит сугубо сосредоточенные соизмеримые запаздывания. Идея состоит в том, что строится разрывная обратная связь, определяемая двумя контурами регулятора: внутренним и внешним. Внутренний контур обеспечивает «глаживание» решения с течением времени, что достигается за счет построения обратной связи, которая преобразует исходную систему в систему запаздывающего типа. После того как решение достигнет необходимой гладкости, «включается» второй контур, цель которо-

го – обеспечить точечную врожденность замкнутой системы в направлениях, соответствующих всем компонентам вектора решения исходной (разомкнутой) системы.

## 2. Постановка задачи

Пусть исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m D_i \dot{x}(t - ih) &= \sum_{i=0}^m \left( A_i x(t - ih) + B_i u(t - ih) \right), \quad t > 0, \\ y(t) &= \sum_{i=0}^m C_i x(t - ih), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

где  $x$  – вектор состояния этой системы,  $u$  – управление,  $y$  – наблюдаемый выходной сигнал (выход),  $h = \text{const} > 0$ ;  $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$ .

Обозначим:  $I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$  – единичная матрица,  $\lambda_h$  – оператор сдвига, определяемый для заданного  $h > 0$  правилом  $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (для произвольной функции  $f$ ). Введем полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^m D_i \lambda^i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^m C_i \lambda^i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^m B_i \lambda^i$$

и перепишем исходный объект управления в операторном виде

$$(1) \quad (I_n - D(\lambda_h)) \dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0,$$

$$(2) \quad y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0.$$

Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием

$$(3) \quad x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0].$$

Считаем, что  $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$  – неизвестная функция, где  $\tilde{\mathcal{C}}^k(\cdot)$  – класс функций,  $k - 1$  раз непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывную производную порядка  $k$ . Управление  $u$  – кусочно-непрерывная функция.

Пусть  $\mathbb{R}^{n \times m}[p, \lambda]$  ( $\mathbb{R}^{n \times m}[\lambda]$ ) – множество матриц размера  $n \times m$ , элементы которых суть полиномы переменных  $p, \lambda$  ( $\lambda$ ) (если  $m = n = 1$ , то верхний индекс не пишем),  $p_D = d/dt$  – оператор дифференцирования.

Определим регулятор с обратной связью по наблюдаемому выходу

$$(4) \quad \begin{aligned}u(t) &= U_{11}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{12}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= U_{21}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{22}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0.\end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$  – вспомогательная переменная,  $t_0 > 0$  – некоторое число, выбор которого указывается ниже ( $u(t) \equiv 0$ ,  $t \leq t_0$ ),  $U_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times l}[p, \lambda]$ ,  $U_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \tilde{n}}[p, \lambda]$ ,  $U_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times l}[p, \lambda]$ ,  $U_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}[p, \lambda]$ . Для реализации регулятора (4) задаем начальное условие

$$(5) \quad \tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [t_0 - \tilde{h}, t_0] \quad (\tilde{h} = \tilde{\alpha}h, \quad \tilde{\alpha} = \max\{\deg_\lambda U_{k2}(p, \lambda), k = 1, 2\}),$$

где  $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\tilde{p}}([t_0 - \tilde{h}, t_0], \mathbb{R}^{\tilde{n}})$  – любая функция,  $\tilde{p} = \max\{\deg_p U_{k2}(p, \lambda), k = 1, 2\}$ , запись  $\deg_\lambda f(\lambda)$  обозначает степень полинома (в том числе и матричного).

Цель настоящей работы – построить регулятор в виде (4), который обеспечит выполнение следующих условий: а) каковы бы ни были начальные функции  $\varphi$  в (3) и  $\tilde{\varphi}$  в (5), существует число  $t_1 > 0$  такое, что векторная компонента  $x$  вектора-решения  $\text{col}[x, \tilde{x}]$  замкнутой системы (1), (4) равна нулю начиная с момента времени, равного  $t_1$ ,

$$(6) \quad x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1;$$

б) замкнутая система (1), (4) является линейной автономной системой нейтрального типа с конечным спектром.

*Замечание 1.* а) Под линейной автономной однородной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями понимаем линейную автономную систему  $\Upsilon(p_D, \lambda_h)x(t) = 0$ ,  $\Upsilon(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[p, \lambda]$ , имеющую характеристический квазиполином вида  $|\Upsilon(p, \lambda)| = \sum_{i=0}^\nu p^i d_i(\lambda)$ , где  $\nu = n \deg_p \Upsilon(p, \lambda)$ ,  $d_i(\lambda)$  – полиномы, причем  $d_\nu(0) = 1$ , запись вида  $|\cdot|$  обозначает определитель матрицы. Введя вспомогательные переменные, такую систему можно переписать в виде (1). Линейные автономные дифференциально-разносные системы запаздывающего типа ( $\tilde{d}_\nu(\lambda) \equiv 1$ ) и обыкновенные системы рассматриваем как частный случай систем нейтрального типа. б) В силу того, что  $U_{ij}(p, \lambda)$  – полиномиальные матрицы, система (1), (4) имеет только сосредоточенные соизмеримые запаздывания.

*Определение 1.* Регулятор вида (4), обеспечивающий реализацию условий а), б), будем называть регулятором финитной стабилизации по выходу.

Обозначим:  $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ .

*Лемма 1.* Пусть для системы (1), (2) существует регулятор финитной стабилизации по выходу (4). Тогда выполняются условия

$$(7) \quad \text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$(8) \quad \text{rank} [I_n - D(\lambda), B(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

$$(9) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$(10) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство см. в Приложении.

### 3. Основной результат

Сформулируем основной результат настоящей работы.

**Теорема 1.** Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор финитной стабилизации по выходу (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (7)–(10).

**Доказательство. Необходимость** обоснована леммой 1.

**Достаточность.** Доказательство достаточности условий теоремы 1 разобьем на две части. В первой части строится регулятор, реализация которого возможна при условии, что выход  $y(t)$  является  $\rho_0 - 1$  раз непрерывно дифференцируемой функцией, имеющей кусочно-непрерывную производную порядка  $\rho_0$ , где число  $\rho_0$  определяется в процессе построения регулятора и указывается в замечании 2. Для того чтобы обеспечить указанное условие на функцию  $y(t)$ , считаем, что  $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}$ . Во второй части доказательства рассматривается общий случай  $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1$  и  $\rho_0 > 1$ , т.е. гладкость начальной функции не обеспечивает требование к гладкости выхода  $y(t)$ , которое описано выше.

#### 3.1. Случай $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}$ .

Для доказательства достаточности условий теоремы построим регулятор (4). Процесс построения будет состоять из следующих шагов: 1) построение регулятора финитной стабилизации по состоянию; 2) построение финитного наблюдателя; 3) синтез регулятора финитной стабилизации по выходу на основе параметров построенных регулятора и наблюдателя.

1. Построение регулятора финитной стабилизации по состоянию. В силу соотношений (7), (8) для системы (1) существует [22; 25, с. 358] регулятор (назовем его регулятором финитной стабилизации по состоянию)

$$(11) \quad \begin{aligned} u(t) &= L_{00}(p_D, \lambda_h)x(t) + L_{01}(p_D, \lambda_h)\bar{x}(t), \\ \dot{x}(t) &= L_{10}(p_D, \lambda_h)x(t) + L_{11}(p_D, \lambda_h)\bar{x}(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  – вспомогательная переменная,  $L_{00}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[p, \lambda]$ ,  $L_{01}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \bar{n}}[p, \lambda]$ ,  $L_{10}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times n}[p, \lambda]$ ,  $L_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}[p, \lambda]$ ,  $\deg_p L_{ij}(p, \lambda) = 1$ , для которого выполняются следующие условия: 1) найдется число  $\bar{t}_1 > 0$  такое, что независимо от начального условия системы (1), (11) выполняется тождество

$$(12) \quad x(t) \equiv 0, \quad t \geq \bar{t}_1;$$

2) система (1), (11) является линейной автономной системой нейтрально-го типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и конечным (но не наперед заданным) спектром. В силу того, что спектр замкнутой системы конечен, определитель характеристической матрицы этой системы будет полиномом, т.е. справедливо равенство

$$(13) \quad |W_0(p, \lambda)| = d_0(p).$$

Здесь  $d_0(p)$  – некоторый полином,  $W_0(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица системы (1), (11), имеющая вид

$$(14) \quad W_0(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda) & -B(\lambda)L_{01}(p, \lambda) \\ -L_{10}(p, \lambda) & pI_{\bar{n}} - L_{11}(p, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Укажем идею построения регулятора (11) [22; 25, с. 358]. Условия (7), (8) являются необходимыми и достаточными для существования таких матриц  $L_{ij}(p, \lambda)$  в (11), что система, соответствующая матрице (14), является точечно вырожденной в направлениях  $\bar{e}_i$ ,  $i = \overline{1, n + \bar{n} - 1}$ , где  $\bar{e}_i$  – столбец матрицы  $I_{n+\bar{n}}$  с номером  $i$ . Это означает [29], что существует такой момент времени  $\bar{t}_1$ , что  $\bar{e}'_i \text{col}[x(t), \bar{x}(t)] \equiv 0$ ,  $t \geq \bar{t}_1$ ,  $i = \overline{1, n + \bar{n} - 1}$  (символ «'» (штрих) обозначает операцию транспонирования). Последнее тождество обеспечивает (12). Процесс построения матриц  $L_{ij}(p, \lambda)$  из (11) описан в [22; 25, с. 358].

2. *Построение финитного наблюдателя.* Под финитным наблюдателем понимаем [30, 31] зависящую от выхода (3) линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями, конечным спектром и выходом  $v$ , обладающую следующим свойством: существует момент времени  $t_* > 0$ , начиная с которого независимо от начальных условий наблюдателя и уравнения (1) выход наблюдателя  $v$  равен решению  $x$  уравнения (1), порождающего выход  $y$ :  $x(t) = v(t)$ ,  $t \geq t_*$ .

В [30, 31] показано, что условия (9), (10) необходимы и достаточны для существования финитного наблюдателя. При этом наблюдатель можно построить как в виде системы с распределенными запаздываниями и любым конечным заданным спектром [30], так и в виде системы без распределенного запаздывания с конечным, но не заданным спектром [31]. Для целей настоящей статьи проведем модификацию одного из наблюдателей из работы [31].

В силу условия (10) найдутся [17, 22] матрицы  $L_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$  и  $L_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$  такие, что справедливо тождество

$$(15) \quad |I_{n+l} - D_L(\lambda)| \equiv 1, \quad D_L(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda L_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda L_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\Pi(\lambda) = [\Pi_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2$  – матрица, присоединенная к матрице  $(I_{n+l} - D_L(\lambda))$ , где  $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\lambda]$ ,  $\Pi_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times l}[\lambda]$ ,  $\Pi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times n}[\lambda]$ ,  $\Pi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l \times l}[\lambda]$ . Из (15) следует, что  $\Pi(\lambda) = (I_{n+l} - D_L(\lambda))^{-1}$ . Введем новую функцию  $\chi(t)$  по формуле

$$(16) \quad \chi(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t), \quad t \geq 0.$$

Пусть  $\tilde{\chi}(t)$ , ( $\tilde{\chi} \in \mathbb{R}^l$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) – произвольная функция. Действуя на равенство

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda_h) & -\lambda_h L_1(\lambda_h) \\ -C(\lambda_h) & I_l - \lambda_h L_2(\lambda_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{\chi}(t) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \chi(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_h L_1(\lambda_h) \tilde{\chi}(t) \\ (I_l - \lambda_h L_2(\lambda_h)) \tilde{\chi}(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

слева оператором  $\Pi(\lambda_h)$ , доказываем соотношение

$$(17) \quad x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\chi(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \gamma_2 h,$$

где  $\gamma_2 = \max\{\nu_{1j}, j = 1, 2\}$ ,  $\nu_{ij} = \deg_\lambda \Pi_{ij}(\lambda)$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\lambda) &= A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda), \quad \tilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix}, \\ \tilde{y}(t) &= C_y(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \gamma_3 h, \quad C_y(\lambda) = \begin{bmatrix} I + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{12}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = m + \gamma_2. \end{aligned}$$

На основании (16), (17) систему (1), (2) перепишем в виде неоднородной линейной автономной дифференциально-разностной системы запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и известным выходом  $\tilde{y}$ :

$$(18) \quad \dot{\chi}(t) = \tilde{A}(\lambda_h)\chi(t) + B(\lambda_h)u(t) - A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > \gamma_3 h,$$

$$(19) \quad \tilde{y}(t) = \tilde{C}(\lambda_h)\chi(t), \quad t \geq \gamma_3 h.$$

В силу соотношения (9) для системы (18), (19) выполняется условие [30, 31]

$$(20) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \tilde{A}(e^{-ph}) \\ \tilde{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}.$$

Из (20) следует [12], что для любого  $i_0 \in \{1, \dots, n+l\}$  найдется  $V_{i_0}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times (n+l)}[\lambda]$  такая, что

$$(21) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \tilde{A}(e^{-ph}) - V_{i_0}(e^{-ph})\tilde{C}(e^{-ph}) \\ \tilde{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C},$$

где  $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$  – строка матрицы  $\tilde{C}(\lambda)$  с номером  $i_0$ . Положим

$$(22) \quad \tilde{A}_V(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\tilde{C}(\lambda), \quad K_0(\lambda) = -A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda_h) - V_{i_0}(\lambda)C_y(\lambda).$$

Используя уравнения (18), (19) и формулы (22), систему (1), (2) заменим системой

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \tilde{A}_V(\lambda_h)\chi(t) + B(\lambda_h)u(t) + K_0(\lambda_h)y(t), \quad t > \tilde{t}_1, \\ \tilde{y}_{i_0}(t) &= \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\chi(t), \quad t \geq \tilde{t}_1, \end{aligned}$$

где  $\tilde{y}_{i_0}(t)$  – компонента вектора  $\tilde{y}$  с номером  $i_0$ ,  $\tilde{t}_1 = (\nu_0 + \gamma_3)h$ ,  $\nu_0 = \deg_\lambda V_{i_0}(\lambda)$ .

В силу условия (21) для системы (23) существует [31] финитный наблюдатель в виде системы с конечным спектром запаздывающего типа, имеющей сугубо сосредоточенные соизмеримые запаздывания

$$(24) \quad \dot{z}(t) = Q(p_D, \lambda_h)z(t) + K(\lambda_h)y(t) + \overline{B}(\lambda_h)u(t), \quad t > \tilde{t}_1,$$

и выход  $v_z$ , определяющий оценку решения  $\chi$  системы (23),

$$(25) \quad v_z(t) = [I_n, 0_{n \times 3}]z(t), \quad t \geq \tilde{t}_1.$$

Здесь  $z = \text{col}[z_1, z_2]$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^3$ ,  $z_1 = \text{col}[z_{11}, \dots, z_{1n}]$ ,  $z_2 = \text{col}[z_{21}, z_{22}, z_{23}]$ ,  $Q(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{(n+3) \times (n+3)}[p, z]$ ,  $0_{n \times m}$  – нулевая  $n \times m$ -матрица,

$$(26) \quad \overline{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) \\ 0_{3 \times r} \end{bmatrix},$$

матрица  $K(\lambda)$  определяется из равенства

$$(27) \quad K(\lambda_h)y(t) = \begin{bmatrix} K_0(\lambda_h) \\ 0_{3 \times l} \end{bmatrix}y(t) - e_{n+1}\tilde{y}_{i_0}(t) = \left( \begin{bmatrix} K_0(\lambda_h) \\ 0_{3 \times l} \end{bmatrix} - e_{n+1}\tilde{e}'_{i_0}C_y(\lambda_h) \right)y(t),$$

где  $e_i$ ,  $\tilde{e}_i$  – столбцы матрицы  $I_{n+3}$ ,  $I_{n+l}$  с номером  $i$  соответственно. Матрица  $Q(p, \lambda)$  определяется [31] по схеме построения матрицы, задающей финитный наблюдатель для однородной системы запаздывающего типа со скалярным выходом. Элементы матрицы  $Q(p, \lambda)$  таковы, что однородная система (24) после введения вспомогательных переменных может быть записана в стандартном виде линейной автономной системы запаздывающего типа (т.е. в виде  $\dot{X}(t) = \Sigma(\lambda_h)X(t)$ , где  $\Sigma(\lambda)$  – полиномиальная матрица), и

$$(28) \quad |pI_{n+3} - Q(p, \lambda)| = d_1(p),$$

где  $d_1(\lambda)$  – полином. Матрица  $Q(p, \lambda)$  имеет вид

$$(29) \quad Q(p, \lambda) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \tilde{a}_{11}^V(\lambda) & \dots & \tilde{a}_{1n}^V(\lambda) & g_{11}(\lambda) & \tilde{g}_{12} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1}^V(\lambda) & \dots & \tilde{a}_{nn}^V(\lambda) & g_{n1}(\lambda) & \tilde{g}_{n2} & 0 \\ \hline \tilde{c}_{i_0}^1(\lambda) & \dots & \tilde{c}_{i_0}^n(\lambda) & g_{n+11}(p, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda g_{n+21}(p, \lambda) & g_{n+22}(p, \lambda) & g_{n+23}(\lambda) \\ 0 & \dots & 0 & \lambda g_{n+31}(\lambda) & g_{n+32}(\lambda) & g_{n+33}(\lambda) \end{array} \right],$$

где  $\tilde{a}_{ij}^V(\lambda)$  – элементы матрицы  $\tilde{A}_V(\lambda)$ ,  $\tilde{A}_V(\lambda) = [\tilde{a}_{ij}^V(\lambda)]_{n \times n}$ ,  $\tilde{c}_{i_0}^j(\lambda)$  – элементы вектора  $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ ,  $\tilde{c}_{i_0}(\lambda) = [\tilde{c}_{i_0}^1(\lambda), \dots, \tilde{c}_{i_0}^n(\lambda)]$ ,  $g_{ij}(p, \lambda)$ ,  $g_{ij}(\lambda)$  – полиномы переменных  $p$ ,  $\lambda$  и  $\lambda$  соответственно,  $\tilde{g}_{i2} \in \mathbb{R}$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Пусть  $\rho_0 = \max\{\deg_p g_{n+21}(p, \lambda) - \deg_p(g_{n+11}(p, \lambda) - p), 1\}$ . Компонента  $z_{21}$  зависит от выхода  $y$ . Поэтому для существования в системе (24) слагаемого  $\lambda_h g_{n+21}(p_D, \lambda_h)z_{21}$  необходимо, чтобы  $z_{21} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}([\tilde{t}_1, +\infty), \mathbb{R})$ . Значит, должно быть  $\tilde{y}_{i_0} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}([\tilde{t}_1, +\infty), \mathbb{R})$ , это обеспечивается тем, что  $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$ .

Компоненты начальной функции  $z(t)$ ,  $t \in [\tilde{t}_1 - h_0, \tilde{t}_1]$  ( $h_0$  – длина отрезка последействия системы (24)), берутся достаточно гладкими с кусочно-непрерывной старшей производной (порядок старшей производной для каждой

компоненты определяется максимальной степенью переменной  $p$  соответствующих полиномов в матрице (29)). В частности, можно положить  $z(t) \equiv 0$ ,  $t \in [t_0 - h_0, t_0]$ .

Поясним идею выбора элементов матрицы  $Q(p, \lambda)$ . Обозначим:  $\zeta = v_z - \chi = z_1 - \chi$  – ошибка оценки,  $\tilde{\zeta} = \text{col}[\zeta, z_2]$ . Тогда из (29), (25) видно, что вектор-функция  $\dot{\tilde{\zeta}}(t)$  определяется линейной автономной системой запаздывающего типа

$$(30) \quad \dot{\tilde{\zeta}}(t) = Q(p_D, \lambda_h)\tilde{\zeta}(t), \quad t > \tilde{t}_1.$$

Элементы матрицы  $Q(p, \lambda)$  выбираются так, чтобы система (30) была точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым  $n + 2$  столбцам матрицы  $I_{n+3}$ , т.е. в направлениях  $e_i$ ,  $i = \overline{1, n+2}$ . Значит, найдется момент времени  $\tilde{t}_2$  такой, что какова бы ни была начальная функция, определяющая решение системы (30), будут выполняться тождества  $e'_i \tilde{\zeta}(t) \equiv 0$ ,  $t \geq \tilde{t}_2$ ,  $i = \overline{1, n+2}$ . Отсюда получаем, что независимо от начальных функций систем (1) и (24) выполняется равенство

$$(31) \quad \chi(t) = v_z(t), \quad t \geq \tilde{t}_2.$$

Оценку решения системы (1), (2) получим, используя формулу (17). Положим

$$(32) \quad v(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)[I_n, 0_{n \times 3}]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geq \tilde{t}_1.$$

Из равенства (31) и формулы (17) следует, что

$$(33) \quad x(t) = v(t), \quad t \geq \tilde{t}_3,$$

где  $\tilde{t}_3 = \tilde{t}_2 + \nu_{11}h$ . Таким образом построен финитный наблюдатель (24), (32).

*3. Синтез регулятора финитной стабилизации по выходу.* Построим соотношения, которые будут определять регулятор (4). Для этого в уравнениях (24) заменим управления  $u(t)$  согласно первой формуле в (11). После этого в полученном уравнении и в соотношениях (11) переменную  $x$  выразим через  $z, y$  согласно (33), (32). Далее переменные  $\bar{x}, z$  обозначим как  $x_1, x_2$  соответственно и запишем полученный регулятор

$$(34) \quad u(t) = R_{01}(p_D, \lambda_h)x_1(t) + R_{02}(p_D, \lambda_h)x_2(t) + R_{00}(p_D, \lambda_h)y(t),$$

$$(35) \quad \dot{x}_1(t) = R_{11}(p_D, \lambda_h)x_1(t) + R_{12}(p_D, \lambda_h)x_2(t) + R_{10}(p_D, \lambda_h)y(t),$$

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & R_{22}(p_D, \lambda_h)x_2(t) + \overline{B}(\lambda_h) \left( R_{01}(p_D, \lambda_h)x_1(t) + \right. \\ & \left. + R_{02}(p_D, \lambda_h)x_2(t) + R_{00}(p_D, \lambda_h)y(t) \right) + K(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0, \end{aligned}$$

где  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$  ( $n_1 = \bar{n}$ ,  $n_2 = n + 3$ ), – вспомогательные переменные,  $t_0 = \alpha_0h$ ,  $\alpha_0 = \max \{ \deg_\lambda R_{00}(p, \lambda) + m, \deg_\lambda R_{10}(p, \lambda), \deg_\lambda K(\lambda) \}$ ,

$$(37) \quad \begin{aligned} R_{i0}(p, \lambda) &= -L_{i0}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda), \quad R_{i1}(p, \lambda) = L_{i1}(p, \lambda), \\ R_{i2}(p, \lambda) &= L_{i0}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)[I_n, 0_{n \times 3}], \quad i = 0, 1, \quad R_{22}(p, \lambda) = Q(p, \lambda). \end{aligned}$$

Для того чтобы записать регулятор (34)–(36) в виде (4), положим  $\tilde{x} = \text{col}[x_1, x_2]$ ,  $U_{11}(p, \lambda) = R_{00}(p, \lambda)$ ,  $U_{12}(p, \lambda) = \text{col}[R_{01}(p, \lambda), R_{02}(p, \lambda)]$ ,

$$U_{21}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} R_{10}(p, \lambda) \\ \overline{B}(\lambda)R_{00}(p, \lambda) + K(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$U_{22}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} R_{11}(p, \lambda) & R_{12}(p, \lambda) \\ \overline{B}(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & R_{22}(p, \lambda) + \overline{B}(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\hat{e}_i$  – столбцы единичной матрицы  $I_{n+n_1+n_2}$ .

*Утверждение 1.* Система (1), (2), (34)–(36) является точечно вырожденной в направлениях  $\hat{e}_i$ ,  $i = \overline{1, n+n_1-1}$ ,  $i = \overline{n+n_1+1, n+n_1+n_2-1}$ , а множество ее спектральных значений и их кратность определяются корнями полинома  $d_0(\lambda)d_1(\lambda)$ .

Доказательство см. в Приложении.

Из утверждения 1 следует, что построенный регулятор (34)–(36) является регулятором финитной стабилизации по выходу. Теорема 1 для случая  $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}$  доказана.

### 3.2. Случай $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1$ .

Если число  $\rho_0$  из замечания 2 равно единице,  $\rho_0 = 1$ , то регулятор (34)–(36) есть искомый регулятор финитной стабилизации и рассуждения раздела 3.2 не требуются. Далее предполагаем, что  $\rho_0 > 1$ .

Регулятор финитной стабилизации по выходу будем строить в виде регулятора переменной структуры (разрывной обратной связи) [33], которая будет состоять из двух последовательно соединенных контуров: внутреннего  $\hat{u}$  и внешнего  $v$ :

$$(38) \quad u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_5, \\ \hat{u}(t), & t \in (t_5, t_6], \\ \hat{u}(t) + v(t), & t > t_6. \end{cases}$$

Внутренний контур  $\hat{u}$  обеспечит системе (1), замкнутой этим контуром, «сглаживание» решения с течением времени. После того, как решение системы будет  $\rho_0 - 1$  раз непрерывно-дифференцируемым и иметь кусочно-непрерывную производную порядка  $\rho_0$ , «включается» внешний контур  $v$  вида (34)–(36), который обеспечит точечную вырожденность замкнутой системы.

*Замечание 3.* В общем случае контуры  $\hat{u}$  и  $v$  в качестве аргументов могут содержать вспомогательные переменные. Поэтому полное описание регулятора финитной стабилизации по выходу будет представлять собой соотношение (38), а также дополнительные дифференциальные уравнения с начальными условиями, описывающие поведение вспомогательных переменных аналогично соотношениям (4), (5).

Укажем условие на параметры однородной ( $u \equiv 0$ ) системы (1), при выполнении которого гладкость ее решения с течением времени повышается. Обозначим через  $\Pi_D(\lambda)$  матрицу, присоединенную к матрице  $(I_n - D(\lambda))$ ,  $m_0 = \deg_\lambda A(\lambda)\Pi_D(\lambda)$ .

*Лемма 2.* Пусть для однородной ( $u \equiv 0$ ) системы (1) выполняется условие

$$(39) \quad |I_n - D(\lambda)| \equiv 1,$$

а в начальном условии (3)  $\varphi \in \widetilde{C}^1$ . Тогда для любого  $\rho_1 \in \mathbb{N}$  и решения  $x$  системы (1) выполняется  $x \in \widetilde{C}^{\rho_1}([t_4 + \rho_1 m_0 h, +\infty), \mathbb{R}^n)$ , где  $t_4 = h \deg_\lambda \Pi_D(\lambda)$ .

Доказательство см. в Приложении.

*Замечание 4.* Тождество (39) эквивалентно тому, что характеристический квазиполином системы (1) имеет вид  $|W(p, \lambda)| = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} p^i \hat{d}_i(\lambda)$ , где  $\hat{d}_i(\lambda)$  – полиномы.

*Замечание 5.* Из доказательства леммы 2 (см. Приложение) следует, что при выполнении (39) однородная система нейтрального типа при помощи невырожденной замены переменных приводится к системе запаздывающего типа, решение которой «сглаживается» с течением времени. Приведем иные рассуждения, показывающие, что если для однородной системы нейтрального типа имеет место (39), то с возрастанием времени  $t$  гладкость решения повышается. Для наглядности будем предполагать, что  $D_1 \neq 0$ ,  $D_i = 0$ ,  $i = \overline{2, m}$ , т.е. система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) - D_1 \dot{x}(t-h) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$(40) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\lambda_h)x(t) + D_1 \dot{x}(t-h) = \\ &= A(\lambda_h)x(t) + D_1(A(\lambda_h)x(t-h) + D_1 \dot{x}(t-2h)) = \\ &= \dots = \sum_{i=0}^{\tilde{m}-1} D_1^i A(\lambda_h)x(t-ih) + D_1^{\tilde{m}} \dot{x}(t-\tilde{m}h), \quad t > \tilde{m}h, \quad \tilde{m} \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Условие (39) в рассматриваемом случае ( $D_1 \neq 0$ ,  $D_i = 0$ ,  $i = \overline{2, m}$ ) имеет вид  $|I_n - \lambda D_1| \equiv 1$ . Это значит, что матрица  $D_1$  является нильпотентной. Пусть  $\tilde{m}_0$  – индекс нильпотентности матрицы  $D_1$ ,  $D_1^{\tilde{m}_0} = 0$ . Тогда из (40) имеем

$$(41) \quad \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{\tilde{m}_0-1} D_1^i A(\lambda_h)x(t-ih), \quad t > \tilde{m}_0 h.$$

Система (41) есть система запаздывающего типа с  $m(\tilde{m}_0 - 1)$  соизмеримыми запаздываниями. Это говорит о том, что при  $t > k\tilde{m}_0 h$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , гладкость решения увеличивается на  $k$  единиц.

Подобные рассуждения справедливы и при произвольной полиномиальной матрице  $\tilde{D}(\lambda)$  (условие (39) как необходимое и достаточное для нильпотентности некоторой матрицы, стоящей при производных решения, содержащих запаздывания, обсуждается в [25, с. 218] (см. лемму 4.10)).

*Лемма 3.* Пусть выполняются условия (8), (10). Тогда существуют матрицы  $\tilde{U}_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times l}[\lambda]$ ,  $\tilde{U}_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times (r+n+l)}[\lambda]$ ,  $\tilde{U}_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+r+l) \times n}[\lambda]$ ,  $\tilde{U}_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(r+n+l) \times (r+n+l)}[\lambda]$  такие, что

$$(42) \quad \tilde{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) + B(\lambda)\tilde{U}_{11}(\lambda)C(\lambda) & B(\lambda)\tilde{U}_{12}(\lambda) \\ \tilde{U}_{21}(\lambda)C(\lambda) & \tilde{U}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(0) = 0_{(2n+r+l) \times (2n+r+l)}.$$

Доказательство см. в Приложении.

Регулятор внутреннего контура определим соотношениями

$$(43) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(t) &= p_D \tilde{U}_{11}(\lambda_h)y(t) + p_D \tilde{U}_{12}(\lambda_h)x_3(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_3(t) &= p_D \tilde{U}_{21}(\lambda_h)y(t) + p_D \tilde{U}_{22}(\lambda_h)x_3(t) + v_2(t), \quad t > t_5, \end{aligned}$$

где  $x_3 \in \mathbb{R}^{n+r+l}$  – вспомогательная переменная,  $v = \text{col}[v_1, v_2]$ , матрицы  $\tilde{U}_{ij}(\lambda)$  обеспечивают (42),  $t_5 = h \max \{m + \deg_\lambda \tilde{U}_{11}(\lambda), \deg_\lambda \tilde{U}_{21}(\lambda)\}$ . Запишем систему (1), (43):

$$(44) \quad \begin{aligned} (I_{2n+r+l} - \tilde{D}(\lambda)) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\lambda_h) & 0_{n \times (n+r+l)} \\ 0_{(n+r+l) \times n} & 0_{(n+r+l) \times (n+r+l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B(\lambda_h) & 0_{n \times (n+r+l)} \\ 0_{(n+r+l) \times r} & I_{n+r+l} \end{bmatrix} v(t), \quad t > t_5. \end{aligned}$$

За счет условия  $\tilde{D}(0) = 0_{(2n+r+l) \times (2n+r+l)}$  система (44) имеет нейтральный тип, а в силу (42) для нее выполняется условие леммы 2.

Зададим начальное условие  $x_3(t) = \varphi_3(t)$ ,  $t \in [t_5 - h_3, t_5]$ , где  $\varphi_3 \in \mathcal{C}^1([t_5 - h_3, t_5], \mathbb{R}^{n+r+l})$  – любая функция,  $h_3 = h \max \{\deg_\lambda \tilde{W}_{13}(\lambda), \deg_\lambda \tilde{W}_{23}(\lambda)\}$ .

Для системы (44) добавим выходной сигнал

$$(45) \quad y_1(t) = \begin{bmatrix} C(\lambda_h) & 0_{l \times (n+r+l)} \\ 0_{(n+r+l) \times n} & I_{n+r+l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

где  $y_1(t) = \text{col}[y(t), x_3(t)]$ . Несложно убедиться, что для системы (44), (45) выполняются условия теоремы 1.

В системе (44) полагаем  $v(t) = 0$ ,  $t \leq t_6$ . При  $t > t_6$  контур  $v$  строим по схеме раздела 3.1, но для системы (44), (45). Число  $t_6$  выбираем таким, чтобы выполнялось требование к гладкости решения, описанное в замечании 2.

*Замечание 6.* В ряде случаев может оказаться, что существует полиномиальная матрица  $\tilde{U}(\lambda)$  такая, что  $|I_n - D(\lambda) - \lambda B(\lambda)\tilde{U}(\lambda)C(\lambda)| \equiv 1$ . Тогда для уменьшения размера матриц регулятора финитной стабилизации по выходу вместо (43) следует взять регулятор внутреннего контура в виде  $\tilde{u}(t) = p_D \tilde{U}(\lambda_h)y(t) + v(t)$ . В этом случае вместо выхода (45) берем выход (3), а переменная  $x_3$  и соответствующие ей блоки в (44) будут отсутствовать (см. пример ниже).

*Пример 1.* Продемонстрируем заложенный в доказательстве теоремы 1 способ построения регулятора финитной стабилизации вида (4) на примере системы (1), (2) с матрицами ( $h = \ln 2$ )

$$(46) \quad D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C(\lambda) = [1 + \lambda, \ 0].$$

В данном случае условия теоремы 1 выполнены. Согласно замечанию 6 находим (ниже  $[\lambda_h]$  – матрица размера  $1 \times 1$ )

$$(47) \quad \tilde{u}(t) = p_D [\lambda_h] y(t) + v(t), \quad t > t_5 = 2h.$$

Система (44), (45) для случая (46), (47) будет иметь вид

$$(48) \quad \begin{aligned} \left( I_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_h & 0 \end{bmatrix} \right) \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 - \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad y(t) = [1 + \lambda_h, \ 0] x(t), \quad t > t_5. \end{aligned}$$

Эту систему интерпретируем далее как систему (1), (2) и выполняем шаги 1)–3) из раздела 3.1.

1. Регулятор (11) строим согласно [22]:

$$(49) \quad \begin{aligned} v(t) &= \left[ -\frac{2}{3}\lambda_h^3 + \lambda_h^2 + \frac{8}{3}\lambda_h - 2, \ -\frac{2}{3}\lambda_h^2 + \lambda_h - \frac{4}{3} \right] x(t) + \\ &+ \left[ \lambda_h^3 - \frac{7}{2}\lambda_h^2 + \frac{7}{2}\lambda_h - 1 \right] \bar{x}(t), \\ \dot{x}(t) &= \left[ -\frac{4}{9}\lambda_h^2 + \frac{10}{9}\lambda_h + \frac{8}{3}, \ \frac{4}{9}\lambda_h + \frac{10}{9} \right] x(t) + \left[ \frac{2}{3}\lambda_h^2 - 3\lambda_h + \frac{7}{3} \right] \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Систему (48) замкнем регулятором (49). Характеристическая матрица  $W_0(p, \lambda)$  (см. (14)) имеет вид

$$(50) \quad W_0(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p + 1 + \frac{2}{3}\lambda^3 - \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda & \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{3} & -\lambda^3 + \frac{7}{2}\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + 1 \\ p\lambda + \frac{2}{3}\lambda^3 - \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + 2 & p + \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda + \frac{4}{3} & -\lambda^3 + \frac{7}{2}\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + 1 \\ \frac{4}{9}\lambda^2 - \frac{10}{9}\lambda - \frac{8}{3} & \frac{4}{9}\lambda - \frac{10}{9} & p - \frac{2}{3}\lambda^2 + 3\lambda - \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $d_0(p) = p^3 - p$ . Для исследования точечной вырожденности можно применить, например, теорему 1.1 из [29]. Кратко проиллюстрируем этот процесс. Поскольку элементы первых двух строк матрицы, присоединенной к матрице  $W_0(p, e^{-ph})$  из (50), обращаются в ноль на корнях полинома  $d_0(p)$ , то элементы первых двух строк матрицы  $(W_0(p, e^{-ph}))^{-1}$  – целые функции. Отсюда следует [29] точечная вырожденность в направлениях  $[1, 0, 0]$  и  $[0, 1, 0]$ , т.е. имеет место (12). Максимальная степень переменной  $\lambda$  в этих строках не превышает числа 5, поэтому  $\bar{t}_1 = 5h$ .

2. Строим финитный наблюдатель (24), (32). В данном случае находим

$$D_L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 + \lambda & 0 & -\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}, \quad \Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2} + 1 & 0 & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 + \lambda & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3}{2}\lambda + 1 & 0 \\ -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y(\lambda) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{2} + 1 \\ \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$V_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i_0 = 2).$$

Система (23) принимает вид

$$(51) \quad \dot{\chi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \chi(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \tilde{y}_2(t) = \left[ -\frac{\lambda_h^2}{2} - \frac{\lambda_h}{2}, 0 \right] \chi(t).$$

Используя (51), окончательно получаем соотношения (24), (32):

$$\dot{z}(t) = Q(p_D, \lambda_h)z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\lambda_h^2}{2} + \frac{\lambda_h}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_h}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} \frac{\lambda_h}{2} \\ 0 \end{bmatrix} y(t).$$

Выпишем элементы матрицы  $Q(p, \lambda)$ , расположенные в блоках с номерами (1,2), (2,2) (вид остальных элементов очевиден):

$$g_{11}(\lambda) = 0, \quad g_{21}(\lambda) = 0, \quad g_{31}(p, \lambda) = -1,$$

$$\begin{aligned}
g_{41}(p, \lambda) = & \frac{428\,259\,827\,248}{370\,825\,875} + \frac{13\,308\,418}{37\,975}p + \frac{3\,263\,970\,139}{410\,130}p\lambda^2 - \\
& - \frac{64\,061\,677\,864\,590\,419}{683\,506\,252\,800}\lambda^7 - \frac{4\,504\,350\,207\,517}{370\,825\,875}\lambda + \frac{10\,314\,197}{36\,325\,800}\lambda^{14} + \\
& + \frac{109\,094\,554\,247\,916\,287}{683\,506\,252\,800}\lambda^6 - \frac{17\,328\,104\,121\,953\,0591}{854\,382\,816\,000}\lambda^5 - \\
& - \frac{5\,199\,361\,041\,200\,909}{379\,725\,696\,000}\lambda^9 + \frac{47\,137\,018\,631\,639\,513}{1\,139\,177\,088\,000}\lambda^8 + \\
& + \frac{1\,145\,930\,623\,773\,433}{341\,753\,126\,400}\lambda^{10} - \frac{3631}{605\,430}\lambda^{15} - \frac{21\,985\,862\,341}{3\,645\,600}p\lambda^5 + \\
& + \frac{460\,650\,668\,593}{43\,747\,200}p\lambda^4 - \frac{154\,784\,798\,249}{13\,124\,160}p\lambda^3 + \frac{255\,035\,489\,398}{4\,944\,345}\lambda^2 + \\
& + \frac{3\,925\,747\,081}{1\,749\,888}p\lambda^6 - \frac{90\,876\,950\,917}{15\,256\,836\,000}\lambda^{13} - \frac{1\,159\,012\,171}{2\,187\,360}p\lambda^7 - \\
& - \frac{1\,743\,623\,839\,315\,721}{14\,239\,713\,600}\lambda^3 + \frac{30\,878}{315}p^2 + \frac{222\,361}{2520}p^2\lambda^4 - \\
& - \frac{433\,453}{1008}p^2\lambda^3 + \frac{819\,967}{1008}p^2\lambda^2 - \frac{718\,133}{1260}p^2\lambda - \frac{3\,824\,219\,437}{1\,367\,100}p\lambda - \\
& - \frac{3631}{630}p^2\lambda^5 + \frac{160\,864\,251\,357\,763\,979}{854\,382\,816\,000}\lambda^4 - \frac{101\,487\,682\,282\,697}{170\,876\,563\,200}\lambda^{11} - \\
& - \frac{3\,412\,403}{585\,900}p\lambda^9 + \frac{3631}{19\,530}p\lambda^{10} + \frac{2\,474\,356\,747}{32\,810\,400}p\lambda^8 + \\
& + \frac{4\,478\,040\,783\,667}{61\,027\,344\,000}\lambda^{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{51}(\lambda) = & - \frac{7\,991\,397\,801\,907\,001}{3\,218\,768\,595\,000}\lambda + \frac{430\,769\,061\,660\,938\,381}{51\,500\,297\,520\,000}\lambda^4 - \\
& - \frac{90\,522\,930\,353\,255\,419}{794\,576\,018\,880\,000}\lambda^9 + \frac{7\,882\,042\,993\,003\,211}{397\,288\,009\,440\,000}\lambda^{10} + \\
& + \frac{38\,819\,644\,979\,750\,780\,339}{11\,124\,064\,264\,320\,000}\lambda^6 + \frac{5\,294\,886\,380\,912\,311\,157}{11\,124\,064\,264\,320\,000}\lambda^8 - \\
& - \frac{16\,491\,589\,988\,451\,048\,767}{11\,124\,064\,264\,320\,000}\lambda^7 - \frac{2\,550\,527\,148\,568\,185\,769}{309\,001\,785\,120\,000}\lambda^3 - \\
& - \frac{68\,686\,980\,782\,797}{28\,377\,714\,960\,000}\lambda^{11} + \frac{440\,289\,519\,864\,500\,737}{77\,250\,446\,280\,000}\lambda^2 - \\
& - \frac{7\,699\,195\,015\,471\,454\,567}{1\,236\,007\,140\,480\,000}\lambda^5 + \frac{3631}{18\,768\,330}\lambda^{14} - \frac{384\,159}{41\,707\,400}\lambda^{13} + \\
& + \frac{30\,684\,351\,847}{157\,653\,972\,000}\lambda^{12} + \frac{23\,072\,498\,192\,986}{44\,705\,119\,375},
\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{12} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = 2,$$

$$\begin{aligned}
g_{42}(p, \lambda) = & -\frac{22963886}{1177225} - \frac{6049}{1085}p - p^2 - \frac{237550583}{1367100}\lambda - \frac{113747}{1260}p\lambda + \\
& + \frac{1277029067}{607600}\lambda^2 + \frac{1419991}{2520}p\lambda^2 - \frac{1644438853}{234360}\lambda^3 - \frac{817177}{1008}p\lambda^3 + \\
& + \frac{92476221137}{8202600}\lambda^4 + \frac{2164661}{5040}p\lambda^4 - \frac{14100715427003}{1356163200}\lambda^5 - \\
& - \frac{6890671}{78120}p\lambda^5 + \frac{131464618651}{21873600}\lambda^6 + \frac{3631}{630}p\lambda^6 - \frac{3920013073}{1749888}\lambda^7 + \\
& + \frac{1930062779}{3645600}\lambda^8 - \frac{2473263067}{32810400}\lambda^9 + \frac{105765593}{18162900}\lambda^{10} - \frac{3631}{19530}\lambda^{11}, \\
g_{52}(\lambda) = & -\frac{36874722147}{5109156500} - \frac{2362315264557}{20436626000}\lambda + \frac{20884081349269}{61309878000}\lambda^2 - \\
& - \frac{538059413076769}{1103577804000}\lambda^3 + \frac{1793665758154211}{4414311216000}\lambda^4 - \\
& - \frac{1445125981988557}{6621466824000}\lambda^5 + \frac{1026288639816701}{13242933648000}\lambda^6 - \\
& - \frac{8405817164119}{472961916000}\lambda^7 + \frac{1174407170347}{472961916000}\lambda^8 - \frac{106666081}{563049900}\lambda^9 + \\
& + \frac{3631}{605430}\lambda^{10}, \\
g_{43}(\lambda) = & -\frac{63}{4}\lambda^5 + \frac{651}{8}\lambda^4 - \frac{1395}{8}\lambda^3 + \frac{651}{4}\lambda^2 - 63\lambda + \lambda^6 + 8, \\
g_{53}(\lambda) = & -\frac{1}{31}\lambda^5 + \frac{31}{60}\lambda^4 - \frac{155}{56}\lambda^3 + \frac{155}{24}\lambda^2 - \frac{31}{4}\lambda + \frac{3879}{1085}.
\end{aligned}$$

В данном случае  $d_1(p) = (p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$  (см. (28)). Используя теорему 1.1 из [29], убеждаемся, что у системы (30) вырождаются первые 4 компоненты.

3. Теперь выпишем для системы (48) матрицы регулятора финитной стабилизации (34)–(36):

$$\begin{aligned}
R_{00}(p, \lambda) = & \left[ -\frac{1}{3}\lambda^4 + \frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 - \lambda \right]; \quad R_{01}(p, \lambda) = \left[ \lambda^3 - \frac{7}{2}\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda - 1 \right]; \\
R_{02}(p, \lambda) = & \left[ -\frac{1}{3}\lambda^4 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{7}{3}\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda - 2, -\frac{2}{3}\lambda^2 + \lambda - \frac{4}{3}, 0, 0, 0 \right]; \\
R_{10}(p, \lambda) = & \left[ -\frac{2}{9}\lambda^3 + \frac{5}{9}\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda \right]; \quad R_{11}(p, \lambda) = \left[ \frac{2}{3}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{7}{3} \right]; \\
R_{12}(p, \lambda) = & \left[ -\frac{2}{9}\lambda^3 + \frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{22}{9}\lambda + \frac{8}{3}, -\frac{4}{9}\lambda + \frac{10}{9}, 0, 0, 0 \right]; \\
R_{22}(p, \lambda) = & Q(p, \lambda); \quad K(\lambda) = \text{col} \left[ 0, 0, \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda, 0, 0 \right].
\end{aligned}$$

Составим характеристическую матрицу  $W_1(p, \lambda)$  замкнутой системы (48), (34)–(36) (см. доказательство утверждения 1). Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $|W_1(p, \lambda)| = d_1(p)d_0(p)$ . Используя теорему 1.1 из работы [29] проверяем, что у системы (48), (34)–(36) вырождаются компоненты с номерами 1, 2, 4–7 за время, равное  $16h$  ( $16$  — максимальная степень переменной  $\lambda$  полиномов, являющихся элементами матриц регулятора (4)). На этом выполнение шага 3) завершается. В данном случае  $\rho_0 = 2$ , в лемме 2 полагаем  $\rho_1 = 2$ ,  $t_4 = 4h$ , после чего видим, что можно взять  $t_6 = t_5 + t_4 + 4h = 10h$ , поскольку  $t_0 = 2$  (см. лемму 2). Окончательно регулятор финитной стабилизации по выходу определяется формулой (38), а в тождестве (6) можно положить  $t_1 = t_6 + 16h = 26h$ .

#### 4. Заключение

В работе получен критерий существования и предложен метод синтеза регулятора финитной стабилизации по выходу. Условия (7), (8) представляют собой [25, с. 206; 32] критерий полной 0-управляемости системы (1), (2) (критерий полного успокоения системы). Условия (9), (10) есть [25, с. 204; 32] критерий финальной наблюдаемости системы (1), (2) – существование однозначного непрерывного оператора восстановления состояния системы (1) по прошлому выходу (2). Таким образом, регулятор финитной стабилизации по выходу существует тогда и только тогда, когда система (1), (2) одновременно полностью 0-управляема и финально наблюдаема. В основе процедуры построения регулятора финитной стабилизации по выходу лежат методы проектирования регуляторов и наблюдателей [22, 25, 31], которые базируются на алгебраических операциях, реализованных в большинстве современных систем компьютерной математики. Это обстоятельство позволяет автоматизировать при разработке систем автоматического управления необходимые вычислительные процедуры, заложенные в работе.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Если для любой начальной функции  $\varphi$  в (3) существует управление  $u$  (программное или в виде обратной связи), обеспечивающее (6), то система (1) является полностью 0-управляемой. Отсюда следует [32] необходимость условий (7), (8). Докажем необходимость условия (9). Считаем, что существует регулятор финитной стабилизации по выходу (4). Предположим противное, условие (9) нарушается при некотором  $p_0 \in \mathbb{C}$ . Выберем вектор  $g_0 \in \mathbb{C}^n$  как решение алгебраической системы  $W(p_0, e^{-p_0 h})g_0 = 0$ ,  $C(e^{-p_0 h})g_0 = 0$ . Определим функцию  $x_{p_0}(t) = \mathbf{Re}(g_0 e^{p_0 t})$ ,  $t \geq -mh$ , если она не равна нулю, или  $x_{p_0}(t) = \mathbf{Im}(g_0 e^{p_0 t})$ ,  $t \geq -mh$ , в противном случае.

Регулятор (4) обеспечивает тождество (6) независимо от начальных условий (3) и (5). Положим в (3) и (5) соответственно  $\varphi(t) = x_{p_0}(t)$ ,  $t \in [-mh, 0]$ ,

$\tilde{\varphi}(t) = 0$ ,  $t \in [t_0 - \tilde{h}, t_0]$ . Выпишем характеристическую матрицу системы (1), (4) ( $e^{-ph} = \lambda$ )

$$(II.1) \quad W_1(p, \lambda) = \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)U_{11}(p, \lambda)C(\lambda) & -B(\lambda)U_{12}(p, \lambda) \\ -U_{21}(p, \lambda)C(\lambda) & pI_{\tilde{n}} - U_{22}(p, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Из (II.1) следует, что функция  $\text{col}[x_{p_0}(t), 0]$ ,  $t > t_0$ , есть ненулевое решение замкнутой системы (1), (4). Это противоречит (6).

Докажем необходимость условия (10). По определению регулятора фи-нитной стабилизации по выходу спектр системы конечен,  $|W_1(p, \lambda)| = w(p)$ ,  $w(p)$  – полином. Введем вспомогательную систему

$$(II.2) \quad (I_n - \Phi_0(\lambda_h))\dot{\xi}(t) = \Phi(\lambda_h)\xi(t) + \Psi(\lambda_h)\bar{u}(t), \quad t > 0,$$

где  $\Phi_0(\lambda) = (D(\lambda))'$ ,  $\Phi(\lambda) = (A(\lambda))'$ ,  $\Psi(\lambda) = (C(\lambda))'$ ,  $\bar{u}$  – кусочно-непрерывное управление. Начальные условия для системы (II.2) выбираются аналогично начальным условиям (3).

Для системы (II.2) определим регулятор

$$(II.3) \quad \begin{aligned} \bar{u}(t) &= H_{11}(p_D, \lambda_h)\xi(t) + H_{12}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= H_{21}(p_D, \lambda_h)\xi(t) + H_{22}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \end{aligned}$$

где  $H_{11}(p, \lambda) = (B(\lambda)U_{11}(p, \lambda))'$ ,  $H_{12}(p, \lambda) = (U_{21}(p, \lambda))'$ ,  $i = 1, 2$ . Обозначим через  $W_\xi(p, \lambda)$  характеристическую матрицу системы (II.2), (II.3). Легко видеть, что  $W_\xi(p, \lambda) = (W_1(p, \lambda))'$ , поэтому  $|W_\xi(p, e^{-ph})| = w(p)$ . Таким образом получили, что для системы (II.2) существует обратная связь такая, что замкнутая система имеет конечный (но не наперед заданный) спектр, т.е. является спектрально приводимой. Поэтому [15] выполняется условие  $\text{rank}[I_n - \Phi_0(\lambda), \Psi(\lambda)] = n \forall \lambda \in \mathbb{C}$ , которое равносильно (10). Лемма 1 доказана.

**Доказательство утверждения 1.** Выпишем характеристическую матрицу  $W_1(p, e^{-ph})$  системы (1), (2), (34)–(36) ( $\lambda = e^{-ph}$ ):

$$(II.4) \quad W_1(p, \lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} W(p, \lambda) - B(\lambda)R_{00}(p, \lambda)C(\lambda) & -B(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & -B(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \\ -R_{10}(p, \lambda)C(\lambda) & pI_{n_1} - R_{11}(p, \lambda) & -R_{12}(p, \lambda) \\ -(K(\lambda) + \overline{B}(\lambda)R_{00}(p, \lambda))C(\lambda) & -\overline{B}(\lambda)R_{01}(p, \lambda) & pI_{n_2} - R_{22}(p, \lambda) - \overline{B}(\lambda)R_{02}(p, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Представим переменную  $x_2$  в соотношениях (34)–(36) как вектор, состоящий из двух векторных компонент:  $x_2 = \text{col}[x_{21}, x_{22}]$ ,  $x_{21} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_{22} \in \mathbb{R}^{n_2}$ , а матрицы  $R_{i2}(p, \lambda)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , и  $K(\lambda)$  в (37) разобьем на блоки, отвечающие компонентам  $x_{21}$ ,  $x_{22}$ , и запишем их в подробном виде:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} R_{02}(p, \lambda) &= [L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda), 0_{r \times 3}], \quad R_{12}(p, \lambda) = [L_{10}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda), 0_{n_1 \times 3}], \\ R_{22}(p, \lambda) &= \begin{bmatrix} A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\widetilde{C}(\lambda) & Q_{12}(p, \lambda) \\ Q_{21}(p, \lambda) & Q_{22}(p, \lambda) \end{bmatrix}, \quad K(\lambda) = \begin{bmatrix} K_0(\lambda) \\ -K_1(\lambda) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь вид блоков  $Q_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times 3}[\lambda]$ ,  $Q_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{3 \times n}[\lambda]$ ,  $Q_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}[\lambda]$  соответствует разбиению на блоки матрицы  $Q(p, \lambda)$  в (29) (первый верхний блок матрицы (29) есть матрица  $A_V(\lambda)$ , описанная в (22)),  $K_1(\lambda) = \text{col}[1, 0, 0] \tilde{e}'_{i_0} C_y(\lambda)$  (см. (27)).

**Замечание 7.** Ниже необходимо будет выписать матрицы, разбитые на блоки. Для того чтобы уместить их по ширине страницы и тем самым сделать рассуждения более наглядными, в обозначениях блоков матриц в ряде случаев будем опускать аргументы. Например, записи типа  $B$ ,  $L_{00}\Pi_{11}$  и т.п. будут обозначать соответственно  $B(\lambda)$ ,  $L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)$  и т.п.

С учетом разбиения на блоки (П.5), определения матриц  $K_0(\lambda)$  и  $\bar{B}(\lambda)$  по формулам (22), (26) перепишем матрицу (П.4):

$$(П.6) \quad W_1(p, \lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} W + BL_{00}\Pi_{12}C & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ L_{10}\Pi_{12}C & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ BL_{00}\Pi_{12}C + (A\Pi_{12} + V_{i_0}C_y)C & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ K_1C & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}.$$

В системе (1), (2), (34)–(36) введем новую переменную  $\varepsilon$  согласно формуле

$$(П.7) \quad x_{21}(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t) + \varepsilon(t), \quad t \geq t_0.$$

Замену переменных (П.7) можно определить формулами

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t), \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} &= \Omega(\lambda_h) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t), \\ \varepsilon(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}, \\ \Omega(\lambda) &= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_1} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 3} \\ 0_{n_1 \times n} & I_{n_1} & 0_{n_1 \times n} & 0_{n_1 \times 3} \\ I_n - D(\lambda) & 0_{n \times n_1} & I_n & 0_{n \times 3} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & 0_{3 \times n} & I_3 \end{bmatrix}, \\ |\Omega(\lambda)| &\equiv 1. \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что матрица  $W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)$  будет характеристической матрицей, полученной после замены системы, и  $|W_1(p, \lambda)| = |W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)|$ .

Для дальнейших преобразований матрицы  $W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)$  получим некоторые соотношения. Предварительно заметим, что из определения матриц  $\Pi_{ij}(\lambda)$  имеем

$$(П.8) \quad \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) - \Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) = I_n.$$

Далее в матрице (П.6) к блоку с номером (3,1) прибавим блок с номером (3,3), предварительно умноженный на матрицу  $(I_n - D(\lambda))$  справа. Используя формулу (П.8), выпишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 & B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + (A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)C_y(\lambda))C(\lambda) + \\
 & + \left( pI_n - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) - V_{i_0}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda) \right) (I_n - D(\lambda)) = \\
 & = B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + \\
 & + V_{i_0}(\lambda) \begin{bmatrix} (I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda))C(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) \end{bmatrix} + p(I_n - D(\lambda)) - \\
 & - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) - V_{i_0}(\lambda) \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) \\ ((I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n)(I_n - D(\lambda)) \end{bmatrix} - \\
 & - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) = -B(\lambda)L_{00}(p, \lambda) + p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda) + \\
 & + V_{i_0}(\lambda) \begin{bmatrix} C(\lambda) + C(\lambda)(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda))) \\ ((I_n - D(\lambda))(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda))) + (I_n - D(\lambda)) \end{bmatrix} = \\
 & = W(p, \lambda) - B(\lambda)L_{00}(p, \lambda).
 \end{aligned} \tag{П.9}$$

Затем в матрице (П.6) к первой строке блока с номером (4,1) прибавим первую строку блока с номером (4,3), умноженную на матрицу  $(I_n - D(\lambda))$  справа (заметим, что оставшиеся две нижних строки указанных выше блоков являются нулевыми, это следует из (29) и вида матрицы  $K_1(\lambda)$ ). Используя промежуточные рассуждения в цепочке равенств (П.9), имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & [1, 0, 0]K_1(\lambda)C(\lambda) - [1, 0, 0]Q_{21}(p, \lambda)(I_n - D(\lambda)) = \\
 & = \tilde{e}'_{i_0} \left( \begin{bmatrix} (I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda))C(\lambda) \\ (I_n - D(\lambda))\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) \end{bmatrix} - \right. \\
 & \quad \left. - \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)(I_n - D(\lambda)) \\ ((I_n - D(\lambda))\Pi_{11}(\lambda) - I_n)(I_n - D(\lambda)) \end{bmatrix} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{П.10}$$

Используя формулу (П.8) и соотношения (П.9), (П.10), видим, что

$$\begin{aligned}
 & W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda) = \\
 & = \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ W - BL_{00} & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

В матрице  $W_1(p, \lambda)\Omega(\lambda)$  умножим первую строку блоков на  $(-1)$  и прибавим к третьей, полученным результатом заменим третью строку блоков. Матрицу, определяющую данное преобразование, обозначим через  $\Omega_1$ . Очевидно,

что  $|\Omega_1| = 1$  и

$$\begin{aligned}
 & (\text{П.11}) \quad \Omega_1 W_1(p, \lambda) \Omega(\lambda) = \\
 & = \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n \times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1 \times 3} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n_1} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\tilde{C} & -Q_{12} \\ 0_{3 \times n} & 0_{3 \times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} W_0(p, \lambda) & \widetilde{W}(p, \lambda) \\ 0_{(n+1) \times (n+n_1)} & pI_{n+3} - Q(p, \lambda) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

где блок  $\widetilde{W}(p, \lambda)$  определяется очевидным образом. Из структуры матрицы (П.11) видно, что функция  $\text{col}[\varepsilon, x_{22}]$  определяется системой с характеристической матрицей  $I_{n+3} - Q(p, \lambda)$ , (т.е. системой вида (30), которая, напомним, является точечно вырожденной). Поэтому  $e_i' \text{col}[\varepsilon(t), x_{22}(t)] \equiv 0$ ,  $t \geq t_0 + \tilde{t}_2$ ,  $i = \overline{1, n+2}$ . Значит, при  $t \geq \bar{t}_4$ , имеем  $\bar{t}_4 = t_0 + \tilde{t}_2 + \gamma_5 h$ , где  $\gamma_5$  – максимальная степень переменной  $\lambda$  в блоке  $\widetilde{W}(p, \lambda)$ , функция  $\text{col}[x, x_1]$  определяется однородной системой с характеристической матрицей (14), которая также является точечно вырожденной. Поэтому при  $t_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_4$ , где  $\bar{t}_1$  определено в (12), имеют место тождества  $\bar{e}_i' \text{col}[x(t), x_1(t)] \equiv 0$ ,  $t \geq t_1$ . Отсюда и из (П.7) следует точечная вырожденность системы (1), (2), (34)–(36).

Из вида матрицы  $\Omega_1 W_1(p, \lambda) \Omega(\lambda)$  в (П.11) и равенств (28), (13) следует, что собственные значения системы (1), (2), (34)–(36) определяются корнями полинома  $d_1(\lambda)d_0(\lambda)$ . Утверждение 1 доказано.

*Доказательство леммы 2.* В системе (1) введем новую переменную  $X(t) = (I_n - D(\lambda_h))x(t)$ ,  $t \geq 0$ . Тогда  $x(t) = \Pi_D(\lambda_h)X(t)$ ,  $t \geq h \deg_\lambda \Pi_D(\lambda)$ , и функция  $X(t)$  определяется системой запаздывающего типа

$$(\text{П.12}) \quad \dot{X}(t) = A(\lambda_h)\Pi_D(\lambda_h)X(t), \quad t > hm_0.$$

Известно, что гладкость решения системы запаздывающего типа (П.12) с увеличением времени на величину  $m_0h$  увеличивается на единицу. Поэтому для заданного  $\rho_1$  при  $t \geq m_0h + (\rho_1 - 1)m_0h = \rho_1 m_0h$  функция  $X(t)$  такова, что  $X \in \tilde{C}^{\rho_1}([\rho_1 m_0h, +\infty), \mathbb{R}^n)$ . Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения. Лемма доказана.

*Доказательство леммы 3.* В силу условия (10) найдутся [15; 25, с. 228] полиномиальные матрицы  $M_{ij}(\lambda)$ ,  $K_{ij}(\lambda)$  подходящих размеров такие, что

$$\begin{aligned}
 & (\text{П.13}) \quad \begin{vmatrix} I_n - D(\lambda) - \lambda B(\lambda)M_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)M_{12}(\lambda) \\ -\lambda M_{21}(\lambda) & I_r - \lambda M_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1, \\
 & \begin{vmatrix} I_n - D(\lambda) - \lambda K_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda K_{12}(\lambda) \\ -\lambda K_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l - \lambda K_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1.
 \end{aligned}$$

Определим матрицы

$$\tilde{U}_{11}(\lambda) = 0_{r \times n}, \quad \tilde{U}_{12}(\lambda) = [\lambda M_{12}(\lambda), \lambda M_{11}(\lambda), 0_{n \times l}],$$

$$\tilde{U}_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0_{(r \times n)} \\ -\lambda K_{11}(\lambda) \\ -\lambda K_{21}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{U}_{22}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda M_{22}(\lambda) & \lambda M_{21}(\lambda) & 0_{r \times l} \\ \lambda B(\lambda)M_{12}(\lambda) & D(\lambda) + \lambda K_{11}(\lambda)C(\lambda) + \lambda B(\lambda)M_{11}(\lambda) & \lambda K_{12}(\lambda) \\ 0_{l \times r} & \lambda K_{21}(\lambda)C(\lambda) & \lambda K_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что  $\tilde{U}_{ij}(0)$  – нулевые матрицы. Обозначим:

$$\Gamma(\lambda) = E(I_{2n+r+l} - \tilde{D}(\lambda))E^{-1}, \text{ где } E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times r} & 0_{n \times n} & 0_{n \times l} \\ 0_{r \times n} & I_r & 0_{r \times n} & 0_{r \times l} \\ -I_n & 0_{n \times r} & I_n & 0_{n \times l} \\ 0_{l \times n} & 0_{l \times r} & 0_{l \times n} & I_l \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\Gamma(\lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) - \lambda B(\lambda)M_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)M_{12}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)M_{11}(\lambda) & 0_{n \times l} \\ -\lambda M_{21}(\lambda) & I_r - \lambda M_{22}(\lambda) & -\lambda M_{21}(\lambda) & 0_{r \times l} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times r} & I_n - D(\lambda) - \lambda K_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda K_{12}(\lambda) \\ 0_{l \times n} & 0_{l \times r} & -\lambda K_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l - \lambda K_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Учитывая тождества (П.13), заключаем, что  $|\Gamma(\lambda)| \equiv 1$ . Отсюда следует (42). Лемма доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 2012. 122 с.  
<https://rucont.ru/efd/209395> (дата обращения: 15.07.2024)
- Глаголев М.В., Сабреков А.Ф., Гончаров В.М. Дифференциальные уравнения с запаздыванием как математические модели динамики популяций // Динамика окружающей среды и глобальные изменения климата. 2018. Т. 9. № 2. С. 40–63.  
<https://doi.org/10.17816/edgcc10483>
- Полосков И.Е. Методы анализа систем с запаздыванием [Электронный ресурс]: монография: Пермский государственный национальный исследовательский университет. Электронные данные. Пермь. 2020. – 19 Мб ; 900 с. Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/poloskov-metody-analiza-sistem.pdf>.
- Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
- Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
- Pandolfi L. Stabilization of neutral functional-differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 20. No. 2. P. 191–204. <https://doi.org/10.1007/BF01767451>

7. *Lu W.S., Lee E., Zak S.* On the stabilization of linear neutral delay-difference systems // IEEE Transact. Autom. Control. 1986. V. 31. No. 1. P. 65–67.  
<https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104115>
8. *Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V.* On Pole Assignment and Stabilizability of Neutral Type Systems / In Topics in Time-Delay Systems. V. 388 of Lecture Notes in Control and Inf. Sci. Berlin: Springer, 2009. P. 85–93.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-02897-7\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02897-7_8)
9. *Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.* Исследование регуляризации вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с последействием // Тр. ин-та мат. и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 1. С. 80–99.  
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-80-99>
10. *Hu G.D., Hu R.* A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems // Syst. Control. Lett. November 2023. V. 181. Art. 105650.  
<https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2023.105650>
11. *Миняев С.И., Фурсов А.С.* Топологический подход к одновременной стабилизации объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1453–1461. <https://doi.org/10.1134/S0374064113110095>
12. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. AC-31. No. 6. P. 543–550. <https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336>
13. *Wang Q.G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. Springer-Verlag, 1999. 129 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-84628-531-8>
14. *Метельский А.В.* Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452. <https://doi.org/10.1134/S0374064113110083>
15. *Хартовский В.Е.* Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 375–390.  
<https://doi.org/10.1134/S0374064117030086>
16. *Марченко В.М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017. <https://doi.org/10.1134/S0012266111070111>
17. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521. <https://doi.org/10.1134/S0374064116110078>
18. *Хартовский В.Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // АиТ. 2017. № 11. С. 3–19. <https://doi.org/10.1134/S0005117917110017>
19. *Zaitsev V., Kim I.* Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. No. 9. P. 2158. <https://doi.org/10.3390/math9172158>
20. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 19–28. <https://doi.org/10.1134/S1064230709060033>
21. *Метельский А.В., Урбан О.И., Хартовский В.Е.* Успокоение решения дифференциальных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 2. С. 40–50. <https://doi.org/10.7868/S0002338815020109>

22. Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403. <https://doi.org/10.1134/S0374064116030122>
23. Фомичев В.В. Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1516–1521. <https://doi.org/10.1134/S0374064115110126>
24. Метельский А.В. Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682. <https://doi.org/10.1134/S0374064119120082>
25. Хартовский В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей : моногр. Гродно: ГрГУ, 2022. 500 с.
26. Хартовский В.Е. Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единственным регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706. <https://doi.org/10.31857/S0374064124050093>
27. Харитонов В.Л. Управления на основе предиктора: задача реализации // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 51–65.  
URL: <http://diffjournal.spbu.ru/pdf/kharitonov2.pdf>
28. Mondie S., Mihai W. Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-delay Systems with a Safe Implementation // IEEE Transact. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147>
29. Kappel F. Degenerate difference-differential equations. Algebraic theory // Differential Equations. 1977. V. 24. No. 1. P. 99–126.
30. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // АиТ. 2019. № 12. С. 80–102. <https://doi.org/10.1134/S0005231019120055>
31. Метельский А.В., Хартовский В.Е. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285. <https://doi.org/10.31857/S0374064121020138>
32. Хартовский В.Е., Павловская А.Т. Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // АиТ. 2013. № 5. С. 59–80. <https://doi.org/10.1134/S0005117913050032>
33. Емельянов С.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация линейных динамических объектов регулятором переменной структуры // АиТ. 2012. № 7. С. 15–24. <https://doi.org/10.1134/S0005117912070028>

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 16.07.2024

После доработки 22.09.2024

Принята к публикации 23.09.2024

# Нелинейные системы

© 2025 г. М.Г. ЮМАГУЛОВ, д-р физ.-мат. наук (yum\_mg@mail.ru),  
Л.С. ИБРАГИМОВА, канд. физ.-мат. наук (lilibr@mail.ru)  
(Уфимский университет науки и технологий)

## УРАВНЕНИЕ ЛУРЬЕ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

Предлагаются новые подходы в задаче конструирования эквивалентных гамильтоновых систем для линейных и нелинейных уравнений Лурье (дифференциальных уравнений, содержащих производные только четных порядков). Подходы основаны на переходе от линейной части уравнения Лурье к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием полученной системы. Предлагаемая схема не требует сложных и громоздких преобразований исходного уравнения. Эффективность предлагаемых формул иллюстрируется примерами.

*Ключевые слова:* уравнение Лурье, гамильтонова система, нормальная форма, эквивалентность, наблюдаемость.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010027, **EDN:** JQXIHS

### 1. Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$(1) \quad L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y),$$

в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}p^2 + a_n,$$
$$M(p) = b_0p^{2m} + b_1p^{2m-2} + \dots + b_{m-1}p^2 + b_m,$$

– взаимно простые многочлены ( $0 \leq m < n$ ), а  $f(y)$  – скалярная непрерывная функция. Уравнение (1) описывает (см., например, [1, 2]) динамику одноконтурной системы управления, состоящей из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией  $W(p) = M(p)/L(p)$  и нелинейной обратной связи с характеристикой  $f(y)$ . Отметим, что уравнения вида (1) часто называют *уравнениями Лурье*.

<sup>1</sup> Авторы благодарны профессорам Э.М. Мухамадиеву и А.Б. Назимову за полезное обсуждение рассмотренных в настоящей статье вопросов. Это обсуждение состоялось в октябре 2022 г. в г. Уфе в период проведения международной конференции “Уфимская осенняя математическая школа” при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа и ООО “ВинТех”.

Многочлены  $L(p)$  и  $M(p)$  содержат степени только четных порядков. К дифференциальным уравнениям четных порядков приводят многие задачи теории управления, теории гамильтоновых систем, теории интегрируемых уравнений, спектральной теории и др. Важным направлением исследования таких уравнений является задача о введении на них гамильтоновой структуры. Наличие такой структуры и, как следствие, существование первых интегралов и различных типов симметрий позволяет существенно продвинуться в задаче изучения динамики системы. Вопросы о наличии гамильтоновой структуры для многих типов дифференциальных уравнений и соответственно вопросы конструирования для уравнений вида (1) эквивалентной гамильтоновой системы в различных постановках обсуждались в ряде работ (см., например, [2–9]). Постановки задач, рассмотренных в настоящей статье, близки к постановкам задач, изученных в [10, 11].

В настоящей работе предлагаются новые подходы к изучению указанных вопросов. Предлагаемые подходы основаны на переходе от линейной части уравнения Лурье к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием линейной и нелинейной систем. Полученные результаты приводят к эффективным алгоритмам построения гамильтониана системы. Результаты могут найти приложения в задачах исследования динамики систем, описываемых дифференциальными уравнениями четных порядков, в задачах исследования устойчивости и бифуркаций точек равновесия и периодических решений линейных и нелинейных уравнений Лурье.

## 2. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые понятия теории систем, теории управления (см., например, [1, 2, 7, 8]) и теории гамильтоновых систем (см., например, [3, 4]).

### 2.1. Эквивалентность систем

Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – это две системы, описываемые уравнениями вход–выход–состояние. Пусть эти системы обладают одним и тем же пространством  $\mathcal{U}$  входов  $u(t)$  и одним и тем же пространством  $\mathcal{Y}$  выходов  $y(t)$ . Пусть  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{T}$  – это пространства состояний систем  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно.

Системы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  называют *эквивалентными*, если для каждого состояния  $\alpha \in \mathcal{S}$  найдется состояние  $\beta \in \mathcal{T}$  так, что при одинаковых входах  $u(t) \in \mathcal{U}$  выходы систем  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  совпадут, и наоборот. В этом случае будем писать  $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ .

### 2.2. О наблюдаемости систем

Рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнением

$$(2) \quad x' = Ax + \xi u(t), \quad y = (x(t), c),$$

в котором  $A$  – квадратная (порядка  $n$ ) матрица,  $\xi, c \in R^n$  – фиксированные векторы, а символ  $(x, c)$  обозначает скалярное произведение векторов  $x$  и  $c$  из  $R^n$ . В этой системе  $u$  – вход,  $y$  – выход,  $x$  – состояние.

Здесь и всюду ниже векторы будут рассматриваться как векторы-столбцы, если только прямо не оговорено, что они в данной формуле рассматриваются как векторы-строки.

Определим квадратную (порядка  $n$ ) матрицу

$$(3) \quad D = \begin{bmatrix} c \\ A^*c \\ (A^*)^2c \\ \vdots \\ (A^*)^{n-1}c \end{bmatrix},$$

где  $A^*$  – транспонированная матрица, а векторы  $c, A^*c, (A^*)^2c, \dots, (A^*)^{n-1}c$  рассматриваются как вектор-строки. Матрица  $D$  называется *матрицей наблюдаемости* системы (П.3). Система (П.3) называется *наблюдаемой*, если  $\det D \neq 0$ .

### 2.3. О гамильтоновых системах

*Автономной гамильтоновой системой* называют динамическую систему, описываемую уравнением

$$(4) \quad x' = J\nabla H(x), \quad x \in R^{2n},$$

в котором

$$(5) \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x) = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right)^T;$$

здесь  $0$  и  $I$  – это соответственно нулевая и единичная (порядка  $n$ ) матрицы,  $H(x)$  – скалярная вещественная гладкая функция, называемая *гамильтонианом* системы (4).

*Линейной автономной гамильтоновой системой* (ЛАГС) называют систему вида

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = JAx, \quad x \in R^{2n},$$

в которой  $A$  – вещественная квадратная симметрическая (порядка  $2n$ ) матрица. Гамильтониан этой системы равен

$$(7) \quad H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x).$$

Ниже участвующую в системе (6) матрицу  $JA$  будем называть *гамильтоновой*. Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы  $JA$ :

- G1) если матрица  $JA$  имеет собственное значение  $\lambda$ , то числа  $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$  также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;
- G2) если матрица  $JA$  имеет собственное значение  $\lambda = 0$ , то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом;

G3) характеристический многочлен матрицы  $JA$  содержит степени только четных порядков.

Отметим также, что каждая гамильтонова матрица входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют одного представителя, называемого *нормальной формой*. Вид нормальной формы определяется свойствами корневых подпространств матрицы  $JA$ . Более детально с теорией нормальных форм и в частности со списками нормальных форм можно познакомиться в [3, 9, 12, 13].

Одной из специфик нормальных форм является то, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы. Для иллюстрации этого рассмотрим гамильтоновы матрицы четвертого порядка, имеющие две пары простых чисто мнимых собственных значений  $\pm\omega_1 i$  и  $\pm\omega_2 i$  (здесь  $\omega_1 > 0$  и  $\omega_2 > 0$ ). В этом случае имеется два вида нормальных форм:

$$(8) \quad JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{здесь } \sigma = 1 \text{ или } \sigma = -1.$$

В случае  $\sigma = 1$  говорят о том, что числа  $\omega_1 i$  и  $\omega_2 i$  являются *собственными значениями первого рода*, а при  $\sigma = -1$  – *собственными значениями первого и второго рода* соответственно. Отметим, что не существует симплектических преобразований, переводящих нормальную форму при  $\sigma = 1$  в нормальную форму при  $\sigma = -1$ .

Указанные свойства гамильтоновых матриц определяют многие важные качественные характеристики гамильтоновых систем (линейных и нелинейных), такие как свойства сильной устойчивости, устойчивость в линейной и нелинейной постановке и др. (см., например, [9–15]).

Как будет показано ниже, отмеченный факт может приводить к тому, что задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1) может иметь качественно различные решения, а именно, приводить к гамильтоновым системам вида (6) с различными нормальными формами.

### 3. Линейная задача

#### 3.1. Стандартная замена

Обсудим задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы сначала для линейного уравнения

$$(9) \quad L\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0.$$

Это уравнение стандартной заменой

$$(10) \quad z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad \dots, \quad z_{2n} = y^{(2n-1)}$$

сводится к эквивалентной системе в пространстве состояний

$$(11) \quad z' = A_0 z, \quad y = (z, c_0),$$

в которой  $z, c_0, \gamma \in R^{2n}$ , символ  $(z, c_0)$  обозначает скалярное произведение векторов,

$$(12) \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & -a_{n-1} & 0 & \dots & -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Система (11) является гамильтоновой только при  $n = 1$ , т.е. когда уравнение (9) является простейшим вида  $y'' + a_1 y = 0$ . При  $n \geq 2$  система (11) уже не является гамильтоновой. Ниже всюду будем предполагать, что  $n \geq 2$ .

### 3.2. Построение гамильтоновой системы

Так как многочлен  $L(p)$  содержит степени только четных порядков, то корни уравнения  $L(p) = 0$  обладают свойствами, аналогичными свойствам G1 и G2 гамильтоновых матриц. Поэтому многочлену  $L(p)$  с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм с тем же набором собственных значений.

Предлагается следующая схема конструирования для уравнения (9) эквивалентной гамильтоновой системы.

На первом этапе по корням уравнения  $L(p) = 0$  определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц  $JA$ .

На втором этапе задается ненулевой вектор  $c \in R^{2n}$  и гамильтонова система

$$(13) \quad \frac{dx}{dt} = JA x, \quad y = (x(t), c).$$

*Теорема 1.* Уравнение (9) и гамильтонова система (13) эквивалентны тогда и только тогда, когда система (13) наблюдаема.

Эта теорема может быть дополнена следующим утверждением. Положим

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}. \quad \text{Здесь } y^{(k)} \text{ — это производные заданной скалярной функции } y = y(t).$$

*Теорема 2.* Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения  $L(p) = 0$  выбрана одна из возможных нормальных форм  $JA$ . Пусть вектор  $c$  выбран таким образом, что система (13) наблюдаема. Тогда замена  $x = D^{-1}\tilde{y}$  (здесь  $D$  — матрица наблюдаемости системы (13)) приводит

уравнение (9) к эквивалентной гамильтоновой системе (13) с гамильтонианом (7). При этом матрицы  $A_0$  и  $JA$  связаны равенством  $A_0 = D(JA)D^{-1}$ .

Доказательства теорем 1 и 2, а также других основных утверждений вынесены в Приложение.

**Замечание 1.** В соответствии с теоремами 1 и 2 задача построения для уравнения (9) эквивалентной гамильтоновой системы в нормальной форме может иметь более одного решения. Другими словами, уравнение (9) линейными невырожденными преобразованиями может сводиться к качественно различным гамильтоновым системам вида (13) в том смысле, что соответствующие гамильтоновы матрицы входят в разные классы эквивалентности симплектически подобных матриц.

Отметим также, что задача построения для уравнения (9) эквивалентной гамильтоновой системы с конкретной нормальной формой может не иметь решения. Такая ситуация возникает, например, когда уравнение  $L(p) = 0$  имеет кратные корни. В этом случае уравнению (9) могут соответствовать такие варианты нормальных форм гамильтоновых матриц, для которых соответствующая система не является наблюдаемой при любом векторе  $c$ .

### 3.3. Линейное звено с двумя степенями свободы

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение Лурье четвертого порядка

$$(14) \quad y'''' + ay'' + by = 0,$$

в котором вещественные коэффициенты  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям

$$(15) \quad a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0.$$

В этом случае все четыре корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

различны и являются чисто мнимыми вида  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ , где числа  $\omega_1 > 0$  и  $\omega_2 > 0$  являются корнями уравнения  $\omega^4 - a\omega^2 + b = 0$ , т.е.

$$(16) \quad \omega_1^2 = \frac{a + \sqrt{d}}{2}, \quad \omega_2^2 = \frac{a - \sqrt{d}}{2}.$$

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (14) эквивалентной гамильтоновой системы.

Воспользуемся предложенной выше схемой. В рассматриваемой задаче уравнению (14) могут соответствовать две различные нормальные формы искомой гамильтоновой системы, а именно, матрицы (8) при  $\sigma = 1$  и  $\sigma = -1$ . Покажем, что соответствующим выбором вектора  $c \in R^4$  можно получить две качественно различные ЛАГС вида (13), в которых матрица  $JA$  имеет вид нормальной формы (8) и которые будут эквивалентны уравнению (14) как при  $\sigma = 1$ , так и при  $\sigma = -1$ .

Пусть, например,  $c = (c_1, c_2, 0, 0)$  – некоторый вектор такой, что  $c_1 c_2 \neq 0$ . Покажем, что тогда уравнение (14) можно свести линейным невырожденным преобразованием к гамильтоновой системе вида (13).

Воспользуемся теоремой 1, для чего следует определить наблюдаемость системы (13), в которой  $JA$  имеет вид нормальной формы (8). Имеем

$$(17) \quad (JA)^* c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 c_1 \\ \sigma \omega_2 c_2 \end{bmatrix}, \quad (JA^*)^2 c = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 c_1 \\ -\sigma \omega_2^2 c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (JA^*)^3 c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1^3 c_1 \\ -\sigma \omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица (3) здесь имеет вид

$$(18) \quad D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma \omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma \omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma \omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det D(c) = \begin{cases} -c_1^2 c_2^2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2, & \text{если } \sigma = 1, \\ c_1^2 c_2^2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1^4 - \omega_2^4), & \text{если } \sigma = -1. \end{cases}$$

Следовательно,  $\det D(c) \neq 0$  при  $c_1 c_2 \neq 0$  и  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Таким образом, матрица  $D(c)$  обратима и, следовательно, система (13) наблюдаема. Тогда по теореме 1 уравнение (14) и система (13) эквивалентны. А по теореме 2 замена

$\tilde{y} = D(c)x$ , где  $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{bmatrix}$ , приводит систему (13) к скалярному дифференциальному уравнению (14). Решения  $y(t)$  и  $x(t)$  уравнения (14) и системы (13) связаны равенством  $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ .

Задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для линейного уравнения (14) решена. Еще раз обратим внимание на тот факт, что уравнение (14) приводимо к двум различным гамильтоновым представлениям (13) с нормальными формами (8). Конкретный выбор нормальной формы требует знания дополнительной информации об изучаемом объекте.

### Пример 1

В небесной механике (см., например, [13, 16–18]) одной из наиболее интересных является плоская ограниченная круговая задача трех тел. В линейной постановке задача исследования движения тела малой массы в окрестности треугольных точек либрации приводит к дифференциальному уравнению

$$(19) \quad y''' + y'' + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)y = 0.$$

Характеристическое уравнение этого уравнения имеет вид

$$(20) \quad \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

Перейдем (следуя вышеприведенной схеме) от уравнения (19) к эквивалентной ЛАГС вида (13). Пусть  $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1 - \mu^*, 1)$ , где  $\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0,0385$ . В этом случае все четыре корня уравнения (20) будут чисто мнимыми:  $\lambda_{1,2} = \pm\omega_1(\mu)i$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm\omega_2(\mu)i$ ; здесь

$$\omega_1(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}, \quad \omega_2(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}.$$

Следовательно, имеется два варианта нормальных форм (8). Определив из каких-либо соображений вид нормальной формы, выберем далее в качестве вектора  $c$ , например, вектор  $c = (1, 1, 0, 0)$ . Тогда в соответствии с (17) и (18) построим матрицу  $D = D(c)$ , которая оказывается невырожденной. Следовательно, уравнение (19) заменой  $\tilde{y} = D(c)x$  сводится к эквивалентной гамильтоновой системе вида (13), при этом их решения  $y(t)$  и  $x(t)$  будут связаны равенством  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ .

Отметим, что анализ исходной постановки задачи трех тел показывает, что в нормальной форме (8) следует брать  $\sigma = -1$  (см. [13]).

## 4. Нелинейная задача

### 4.1. Основные утверждения

Обсудим теперь задачу конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для нелинейного уравнения Лурье (1).

Как и в линейной задаче, на первом этапе предлагается по корням уравнения  $L(p) = 0$  определить возможные варианты нормальных форм линейной составляющей искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц  $JA$ .

На втором этапе задается ненулевой вектор  $c \in R^{2n}$  и линейная гамильтонова система (13). Пусть эта система наблюдаема. Пусть  $D = D(c)$  – соответствующая матрица наблюдаемости.

Определим векторы

$$(21) \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(y) = \begin{bmatrix} f(y) \\ (f(y))' \\ (f(y))'' \\ \vdots \\ (f(y))^{(2n-3)} \end{bmatrix}.$$

В этих формулах:

- производные  $y^{(k)}$  и  $(f(y))^{(k)}$  вычисляются по  $t$  от заданной функции  $y = y(t)$  и соответственно от  $f(y(t))$ ;
- координаты вектора  $\gamma$  определяются равенствами

$$(22) \quad \begin{aligned} \gamma_2 &= \gamma_4 = \dots = \gamma_{2n-2m-2} = 0, & \gamma_{2n-2m} &= b_0, \\ \gamma_{2n-2m+2} + \gamma_{2n-2m}a_1 &= b_1, \dots, & \gamma_{2n} + \gamma_{2n-2}a_1 + \dots + \gamma_{2n-2m}a_m &= b_m. \end{aligned}$$

Определим также прямоугольную порядка  $2n \times (2n - 2)$  матрицу

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2n-2} & 0 & \gamma_{2n-4} & \dots & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

*Лемма 1.* Пусть линейная система (13) наблюдаема. Тогда замена

$$(23) \quad x = (D(c))^{-1}[\tilde{y} - T\tilde{f}(y)]$$

осуществляет переход от уравнения (1) к системе

$$(24) \quad x' = JAx + \xi f(y), \quad y = (x(t), c),$$

в которой матрица  $JA$  – это выбранная нормальная форма,  $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$ .

В справедливости леммы 1 можно убедиться прямым подсчетом.

Отметим, что уравнение (1) и система (24) эквивалентны. Однако получаемая при замене (23) нелинейная система (24) совсем не обязательно будет гамильтоновой.

Напомним, что вектор  $c$  выбирался из единственного условия наблюдаемости линейной системы (13). Это предоставляет большую свободу в выборе вектора  $c$ . Оказывается, при некоторых дополнительных условиях на вектор  $c$  нелинейная система (24) уже будет гамильтоновой. А именно, верна

*Лемма 2.* Пусть вектор  $c$  выбран исходя из двух требований:

- линейная система (13) наблюдаема;
- при некотором вещественном  $\alpha$  выполняется равенство

$$(25) \quad \gamma = \alpha D(c)Jc,$$

в котором  $D(c)$  – матрица наблюдаемости системы (13),  $\gamma$  – вектор из (21),  $J$  – матрица (5).

Тогда замена (23) приводит к нелинейному уравнению (1) к системе (24), которая является гамильтоновой, при этом функция

$$(26) \quad H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F((x, c))$$

является ее гамильтонианом. Здесь  $F(y)$  – это первообразная функции  $f(y)$ , т.е.  $F'(y) = f(y)$ .

**Замечание 2.** Равенство (25) в развернутом виде сводится к системе из  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2n$  неизвестных

$$\alpha c_1^2, \alpha c_2^2, \dots, \alpha c_{2n}^2,$$

с параметром  $\alpha$ . В указанные уравнения входят и коэффициенты, определяющие вид выбранной нормальной формы. Это приводит к тому, что только при одном выборе нормальной формы система уравнений (25) имеет решение. Другими словами, в нелинейной задаче (в отличие от линейной) вид нормальной формы конструируемой гамильтоновой системы определяется однозначно. Указанный факт ниже доказывается для систем с двумя степенями свободы.

Таким образом, верна

**Теорема 3.** Пусть в соответствии со свойствами корней уравнения  $L(p) = 0$  выбрана одна из возможных нормальных форм JA. Пусть вектор с выбран таким образом, что:

- 1) линейная система (13) наблюдаема,
- 2) выполняется равенство (25) при некотором  $\alpha$ .

Тогда замена (23) приводит уравнение (1) к эквивалентной гамильтоновой системе (24) с гамильтонианом (26), при этом вид нормальной формы гамильтоновой системы определяется однозначно.

#### 4.2. Уравнения с двумя степенями свободы

В качестве основного приложения рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$(27) \quad L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y),$$

в котором

$$(28) \quad L(p) = p^4 + ap^2 + b, \quad M(p) = b_0p^2 + b_2$$

– взаимно простые вещественные многочлены, а  $f(y)$  – скалярная непрерывная функция. Уравнения вида (27) часто называют *уравнениями с двумя степенями свободы*.

Как и в разделе 3.3, будем предполагать, что коэффициенты  $a$  и  $b$  многочлена  $L(p)$  удовлетворяют условиям (15) и, следовательно, все четыре корня

многочлена  $L(p)$  являются чисто мнимыми вида  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$ , где числа  $\omega_1 > 0$  и  $\omega_2 > 0$  определены равенствами (16). Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (27) эквивалентной гамильтоновой системы. Воспользуемся теоремой 3.

В разделе 3.3 было отмечено, что многочлену  $L(p)$  соответствует две различные нормальные формы искомой гамильтоновой системы, а именно, матрицы (8) при  $\sigma = 1$  и  $\sigma = -1$ . В качестве вектора  $c$  будем рассматривать, как и в разделе 3.3, вектор  $c = (c_1, c_2, 0, 0)$  такой, что  $c_1 c_2 \neq 0$ . В этом случае линейная система (13) наблюдаема.

Остается обеспечить выполнение условия 2) теоремы 3, т.е. выбрать вектор  $c$  так, чтобы выполнялось равенство (25). В этом равенстве  $D(c)$  – это матрица (18), а четырехмерный вектор  $\gamma$  определяется в соответствии с равенствами (21) и (22) применительно к уравнению (27):

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ 0 \\ b_2 - ab_0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому равенство (25) сводится к системе из двух уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\omega_1 c_1^2 + \sigma \omega_2 c_2^2) = -\gamma_2 \\ \alpha(\omega_1^3 c_1^2 + \sigma \omega_2^3 c_2^2) = \gamma_4 \end{cases}$$

относительно неизвестных  $\alpha c_1^2$  и  $\alpha c_2^2$ . Отсюда получим

$$\alpha c_1^2 = \frac{\omega_2^2 \gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad \alpha c_2^2 = -\frac{\omega_1^2 \gamma_2 + \gamma_4}{\sigma \omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Отметим, что в силу предположения о взаимной простоте многочленов (28) имеем

$$(\omega_1^2 \gamma_2 + \gamma_4)(\omega_2^2 \gamma_2 + \gamma_4) \neq 0.$$

Поэтому  $\alpha \neq 0$  и

$$\left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 = -\sigma \frac{\omega_2}{\omega_1} \kappa,$$

где

$$(29) \quad \kappa = \frac{\omega_2^2 \gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1^2 \gamma_2 + \gamma_4}.$$

Таким образом, уравнение (25) разрешимо либо только при  $\sigma = 1$  (если  $\kappa < 0$ ), либо только при  $\sigma = -1$  (если  $\kappa > 0$ ).

Пусть  $\kappa < 0$  ( $\kappa > 0$ ). В этом случае в качестве решения уравнения (25) можно взять значения:

$$(30) \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \sqrt{-\frac{\omega_1}{\kappa \omega_2}} \quad \left( c_2 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\kappa \omega_2}} \right), \quad \alpha = \frac{\omega_2^2 \gamma_2 + \gamma_4}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Таким образом, верна

**Теорема 4.** Пусть  $\kappa < 0$  ( $\kappa > 0$ ). Пусть числа  $\alpha$ ,  $c_1$  и  $c_2$  определяются равенствами (30). Тогда замена (23) приводит уравнение (27) к эквивалентной гамильтоновой системе (24) с гамильтонианом (26):

$$H(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \alpha F(x_1 c_1 + x_2 c_2).$$

Здесь  $F(y)$  – это первообразная функции  $f(y)$ , т.е.  $F'(y) = f(y)$ . При этом вид нормальной формы (8) определяется однозначно, а именно, в ней  $\sigma = 1$  ( $\sigma = -1$ ).

## Пример 2

Пусть уравнение (27) имеет вид

$$(31) \quad y'''' + 5y'' + 4y = (f(y))'' + 3f(y),$$

т.е. в многочленах (28) имеем  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $b_0 = 1$  и  $b_2 = 3$ . Тогда  $\omega_1 = 2$  и  $\omega_2 = 1$ , а вектор  $\gamma$  равен:  $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ , т.е.  $\gamma_2 = 1$  и  $\gamma_4 = -2$ .

По формуле (29) имеем  $\kappa = -1/2 < 0$ . Тогда по теореме 4 вид нормальной формы (8) определяется однозначно: в ней следует положить  $\sigma = 1$ . Далее, числа (30) здесь равны:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $\alpha = -1/6$ .

Следовательно, по теореме 4 замена (23) (в которой  $D(c)$  – матрица (18) при  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ) приводит уравнение (31) к эквивалентной гамильтоновой системе вида (24), в которой  $JA$  – матрица (8) при

$\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1$  и  $\sigma = 1$ , а вектор  $\xi = (D(c))^{-1}\gamma$  равен  $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ . Гамильтониан этой системы равен

$$H(x) = \frac{2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2}{2} - \frac{1}{6}F(x_1 + 2x_2).$$

## 5. Заключение

В статье предложены новые подходы в задаче конструирования эквивалентных гамильтоновых систем для линейных и нелинейных уравнений Лурье (дифференциальных уравнений, содержащих производные только четных порядков). Подходы основаны на переходе от линейной части уравнения Лурье к нормальным формам соответствующих гамильтоновых систем с последующим преобразованием полученной системы. Предлагаемая схема не

требует сложных и громоздких преобразований исходного уравнения. Показано, что в линейном случае задача конструирования эквивалентных гамильтоновых систем может приводить к качественно различным системам. В то же время для нелинейных систем указанная задача в естественном смысле однозначно разрешима. В Приложении приводятся аналогичные результаты в общей постановке (безотносительно к требованию на исходные уравнения, чтобы они содержали производные только четных порядков). Основные результаты доведены до расчетных формул и алгоритмов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *Вспомогательные построения*

Доказательства основных утверждений работы базируются на приводимых ниже вспомогательных утверждениях общего характера, относящихся не только к гамильтоновым системам и представляющих самостоятельный интерес.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка

$$(П.1) \quad L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)u(t),$$

в котором

$$(П.2) \quad \begin{aligned} L(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ M(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m \end{aligned}$$

— взаимно простые вещественные многочлены степеней  $n$  и  $m$  ( $n > m \geq 0$ ).

Требуется построить эквивалентную уравнению (П.1) систему, описываемую уравнениями

$$(П.3) \quad x' = Ax + \xi u(t), \quad y = (x(t), c),$$

где  $A$  — квадратная (порядка  $n$ ) матрица,  $\xi, c \in R^n$  — фиксированные векторы, а символ  $(x, c)$  обозначает скалярное произведение векторов  $x$  и  $c$  из  $R^n$ . Обратная задача: по системе (П.3) построить эквивалентную ей систему, описываемую дифференциальным уравнением (П.1).

Наиболее простым является переход от (П.1) к эквивалентной системе

$$(П.4) \quad z' = A_0 z + \gamma u(t), \quad y = (z(t), c_0),$$

в которой  $c_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix},$$

а координаты вектора  $\gamma$  определяются равенствами:

$$(П.5) \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-m-1} = 0, \quad \gamma_{n-m} = b_0, \quad \gamma_{n-m+1} + \gamma_{n-m}a_1 = b_1, \\ \dots, \quad \gamma_n + \gamma_{n-1}a_1 + \dots + \gamma_{n-m}a_m = b_m.$$

Прямой подсчет показывает, что переход от уравнения (П.1) к системе (П.4) осуществляется замена  $z = \tilde{y} - T\tilde{u}$ , в которой

$$(П.6) \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{bmatrix},$$

а прямоугольная порядка  $n \times (n-1)$  матрица  $T$  равна

$$(П.7) \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \dots & \gamma_1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичные задачи возникают и для нелинейных систем. В них аналогом уравнения (П.1) является система с нелинейной обратной связью, описываемая уравнением

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y),$$

где  $L(p)$  и  $M(p)$  – многочлены (П.2), а  $f(y)$  – скалярная непрерывная функция. Аналогом системы (П.3) является система, описываемая уравнениями

$$x' = Ax + \xi f(y), \quad y = (x(t), c).$$

Обсуждению различных вопросов, связанных с указанными задачами, посвящены многие работы. Здесь особо следует указать фундаментальную монографию [8], в которой (в рамках линейной теории) не только проведен детальный анализ таких базовых понятий, как “система”, “эквивалентность”, “передаточная функция” и др., но и предложены конструктивные способы построения эквивалентных систем.

Для изучения сформулированных задач рассмотрим следующие системы, описываемые уравнениями вход–выход–состояние:

- система  $\mathcal{A}$ , описываемая уравнением (П.1),
- система  $\mathcal{B}$ , описываемая уравнениями

$$(П.8) \quad x' = Ax + \xi u(t), \quad w = (x(t), c),$$

- система  $\mathcal{C}$ , описываемая уравнениями

$$(П.9) \quad z' = A_0 z + \gamma u(t), \quad v = (z(t), c_0).$$

Отметим, что системы (П.8) и (П.9) – это те же самые системы (П.3) и (П.4). Представление их в новой форме преследует единственную цель, чтобы избежать путаницы с обозначениями выходов рассматриваемых систем.

В качестве пространства входов систем  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  будем рассматривать множество  $C^m$ -гладких функций  $u(t)$ , а в качестве пространства состояний – пространство  $R^n$ . Выход  $y(t)$  системы  $\mathcal{A}$  при данном входе  $u(t)$  и данном начальном (в момент времени  $t = 0$ ) состоянии  $\tilde{y}_0 = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  определим как решение задачи Коши

$$\begin{cases} L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)u(t), \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Выход  $w(t)$  системы  $\mathcal{B}$  при данном входе  $u(t)$  и данном начальном (в момент времени  $t = 0$ ) состоянии  $x_0 \in R^n$  определим равенством  $w(t) = (x(t), c)$ , где  $x(t)$  – это решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = Ax + \xi u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Аналогично определяется выход  $v(t)$  системы  $\mathcal{C}$ .

Имеют место следующие утверждения.

**Теорема 5.** Системы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{C}$  эквивалентны.

**Теорема 6.** Системы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда система  $\mathcal{B}$  является наблюдаемой и выполнены равенства  $A_0 = DAD^{-1}$  и  $\gamma = D\xi$  (здесь  $D$  – матрица наблюдаемости системы  $\mathcal{B}$ ,  $\gamma$  – вектор, координаты которого определены равенствами (П.5)).

Пусть системы  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  эквивалентны. Тогда система (П.4) приводима к системе (П.3) невырожденной заменой переменных  $x = D^{-1}z$ .

**Теорема 7.** Системы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда система  $\mathcal{B}$  является наблюдаемой и выполнены равенства  $A_0 = DAD^{-1}$  и  $\gamma = D\xi$ .

Пусть системы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  эквивалентны. Тогда уравнение (П.1) приводимо к системе (П.3) заменой переменных

$$x = D^{-1}(\tilde{y} - T\tilde{u});$$

здесь  $T$  – матрица (П.7),  $\tilde{y}$  и  $\tilde{u}$  – векторы из (П.6).

Теорема 5 – это известное утверждение (см., например, [2, 7, 8]). Справедливость теоремы 7 следует из теорем 5 и 6. Доказательство теоремы 6 проводится стандартными методами теории систем.

**Доказательство теоремы 1. Необходимость.** Пусть уравнение (9) и гамильтонова система (13) эквивалентны. Тогда по теореме 7 система (13) наблюдаема и выполнено равенство  $A_0 = D(JA)D^{-1}$ , где  $A_0$  – матрица (12),  $D$  – матрица наблюдаемости системы (13).

*Достаточность.* Пусть система (13) наблюдаема. Требуется показать, что уравнение (9) и гамильтонова система (13) эквивалентны. Для этого покажем, что выход  $y(t) = (x(t), c)$  системы (13) является и выходом уравнения (9) при начальном состоянии  $y_0$  таком, что  $y_0 = (x(0), c)$ . И наоборот, каждый выход  $y(t)$  уравнения (9) является и выходом системы (13) при начальном состоянии  $x_0$  таком, что  $y_0 = (x_0, c)$ .

Ограничимся рассмотрением случая, когда система (13) является четырехмерной, т.е. в ней  $n = 2$ . Тогда уравнение (9) принимает вид (14) и, следовательно,  $L(p) = p^4 + ap^2 + b$ .

Для выхода  $y(t) = (x(t), c)$  системы (13) имеем

$$y' = (x', c) = (x, A^*c), \quad y'' = (x, (A^*)^2c), \quad y''' = (x, (A^*)^4c).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y'''' + ay'' + by &= (x, (A^*)^4c) + (x, (A^*)^2c)a + (x, c)b = \\ &= (x, [(A^*)^4 + a(A^*)^2 + bI]c) = 0, \end{aligned}$$

так как матрица  $A$  (а следовательно, и транспонированная матрица  $A^*$ ) является решением своего характеристического уравнения  $p^4 + ap^2 + b = 0$ . Таким образом, функция  $y(t) = (x(t), c)$  является решением уравнения (9).

Пусть теперь  $y(t)$  – выход уравнения (14); этому выходу отвечает начальное состояние  $\tilde{y}_0 = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ . Определим начальное состояние  $x_0$  четырехмерной системы (13) из системы уравнений

$$(x_0, c) = y_0, \quad (x_0, A^*c) = y_1, \quad (x_0, (A^*)^2c) = y_2, \quad (x_0, (A^*)^3c) = y_3$$

или (что то же самое) из уравнения  $D(c)x_0 = \tilde{y}_0$ . В силу наблюдаемости системы (13) это уравнение имеет единственное решение  $x_0 = (D(c))^{-1}\tilde{y}_0$ . Несложно видеть, что выход системы (13) при найденном начальном состоянии  $x_0$  совпадает с функцией  $y(t)$ .

Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Справедливость этого утверждения следует из теоремы 7.

*Доказательство леммы 2.* В силу леммы 1 замена (23) преобразует уравнение (1) к системе (24). Для доказательства леммы 2 остается показать, что функция (26) является гамильтонианом системы (24), т.е. показать справедливость равенства

$$J\nabla H(x) = JAx + \xi f((c, x)),$$

или так как  $J\nabla H(x) = JAx + \alpha J\nabla F((x, c))$ , то следует показать справедливость равенства

$$\alpha J\nabla F((x, c)) = \xi f((c, x)).$$

Имеем  $\nabla F((x, c)) = f((c, x))c$ . Отсюда получим  $J\nabla F((x, c)) = f((c, x))Jc$ . Таким образом, следует показать справедливость равенства  $\alpha Jc = \xi$ . А это равенство следует из (25) и равенства  $\xi = D^{-1}\gamma$  (см. лемму 1).

Лемма 2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонов Г.А. Теория управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.
2. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
3. Журавлев В.Ф., Петров Ф.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015.
4. Meyer K., Hall G., Offin D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York: Springer, 2009.
5. Красносельский М.А., Лицшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
6. Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С. Исследование задачи о параметрическом резонансе в системах Лурье со слабоосцилирующими коэффициентами // АиТ. 2022. № 2. С. 107–121.
7. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
8. Заде Л., Дезоэр Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970.
9. Брюно А.Д. Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019. № 56. 27 с.
10. Красносельский А.М., Рачинский Д.И. О гамильтоновости систем Лурье // АиТ. 2000. № 8. С. 25–29.
11. Красносельский А.М., Рачинский Д.И. Существование континуумов циклов в гамильтоновых системах управления // АиТ. 2001. № 2. С. 65–74.
12. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркции векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
13. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
14. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
15. Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С. Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем // Уфимский математический журнал. 2021. Том 13. № 3. С. 178–195.
16. Поляк Б.Т., Шалби Л.А. Стабилизация космического аппарата в точках Лагранжа с минимальным расходом топлива // АиТ. 2019. № 12. С. 160–172.
17. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск.: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьют. исслед., 2009.
18. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н., Исанбаева Н.Р. Бифуркции в окрестностях границ областей устойчивости точек либрации задачи трех тел // Астрономический журнал. 2018. Т. 95. № 2. С. 158–168.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 05.04.2024

После доработки 25.11.2024

Принята к публикации 03.12.2024

# *Управление в технических системах*

© 2025 г. В.С. ВЕРБА, чл.-корр. РАН ([vvs.msk@gmail.com](mailto:vvs.msk@gmail.com)),  
В.И. МЕРКУЛОВ, д-р техн. наук ([mvipost41@gmail.com](mailto:mvipost41@gmail.com))  
(АО «Концерн «Вега», Москва),  
В.П. ХАРЬКОВ, д-р техн. наук ([charkovvp@rambler.ru](mailto:charkovvp@rambler.ru))  
(ООО «НПО НаукаСофт», Москва)

## **ПОДХОДЫ К ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОВ НАВЕДЕНИЯ НА ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ИНТЕНСИВНО МАНЕВРИРУЮЩИЕ ЦЕЛИ. ЧАСТЬ 2. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ОПТИМИЗАЦИИ**

На основе требований к методам оптимизации систем перехвата высокоскоростных летательных аппаратов, сформулированных в первой части статьи, проведен анализ возможностей различных способов оптимизации по решению этой задачи. На качественном уровне рассмотрены возможности классической теории оптимального управления, ее вариантов с локальной оптимизацией, вариантов с локальной оптимизацией по минимуму квадратично-биквадратных функционалов качества, на базе концепции обратных задач динамики с оценкой вариантов оптимизации информационного обеспечения всех подходов.

*Ключевые слова:* статистическая теория оптимального управления, локальная оптимизация, квадратично-биквадратный функционал качества, обратная задача динамики, адаптивная аналого-дискретная фильтрация.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010033, **EDN:** JQVOGZ

### **1. Введение**

Военно-техническое совершенство систем наведения во многом определяется способами оптимизации законов управления и их информационного обеспечения,ложенными в основу их разработки. К настоящему времени известно большое число способов оптимизации, в различной степени учитывающих требования точности и экономичности функционирования [1]. Среди них необходимо выделить варианты статистической теории оптимального управления (СТОУ), позволяющие синтезировать системы наведения, совместно наилучшие по точности и экономичности затрат на управление. В основу оптимизации этих вариантов положен принцип минимизации квадратичных функционалов качества, учитывающих и ошибки управления, и затраты энергии на его реализацию.

Среди этих вариантов необходимо выделить достаточно сложные классические варианты СТОУ, обеспечивающие оптимальность систем наведения

за все время перехвата [2–9], и более простые варианты, обеспечивающие их локальную оптимальность на каждый текущий момент времени [2–4, 10–12].

В практике разработки сложных технических систем различного назначения используются также варианты синтеза, основанные на концепции обратных задач динамики [13–18], особенностью которых является возможность достаточно простого учета при синтезе законов управления различного рода нелинейностей.

Среди способов синтеза, не учитывающих расход энергии управляющих сигналов, наиболее распространены градиентные методы [1, 19], обеспечивающие оптимизацию управления по различного рода функционалам, имеющим экстремум на интервале работы системы.

При оптимизации информационных систем широкое распространение получили различные модификации фильтров Калмана [3, 4, 20–23].

В последнее время все большее распространение при синтезе систем, функционирующих в условиях априорной неопределенности, находят так называемые интеллектуальные способы оптимизации, основанные на использовании нейросетевых подходов [24, 25].

Анализ требований к используемым методам оптимизации, выполненный в [26], позволяет выделить прежде всего возможность формирования нестационарных методов самонаведения, возможность функционирования в заданном поле условий применения и ограничений и возможность реализации по динамическим свойствам носителя и способности формировать оценки координат, используемых в методе наведения. Необходимо отметить, что последнюю возможность можно оценить только по результатам синтеза конкретных методов наведения.

Практические способы реализации нестационарности методов наведения, обеспечивающие возможность изменения управляемых и информационных приоритетов в полете, основанные на использовании нестационарных моделей состояния и коэффициентов матриц штрафов за точность и экономичность функционирования как функций дальности и скорости, детально рассмотрены в [4].

Кроме того, в [4] подробно рассмотрены методики синтеза законов наведения на высокоскоростные летательные аппараты (ВСЛА) на основе классического подхода статистической теории оптимального управления в постановке Летова–Калмана и на основе ее локального варианта, позволяющего в качестве возмущений учесть несоответствие динамических свойств цели и перехватчика.

Далее на качественном уровне будет проведена оценка различных способов оптимизации методов наведения на ВСЛА, в той или иной степени учитываящих требования, рассмотренные в [26].

При этом будет использоваться двойная нумерация разделов и формул, в рамках которой первая цифра соответствует номеру части статьи, а вторая определяет конкретный раздел или формулу.

## 2. Анализ возможностей классической теории оптимального управления в постановке Летова–Калмана

В приложении к решаемой задаче математический аппарат традиционной статистической теории оптимального управления [3–9] в наиболее простом варианте позволяет для перехватчика

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{F}_y \mathbf{x}_y(t) + \mathbf{B}_y \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi}_y(t), \quad \mathbf{x}_y(0) = \mathbf{x}_{y0},$$

предназначенного для наведения на цель, движущуюся по траектории

$$(2.2) \quad \dot{\mathbf{x}}_t(t) = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t(t) + \boldsymbol{\xi}_t(t), \quad \mathbf{x}_t(0) = \mathbf{x}_{t0},$$

при наличии измерений

$$(2.3) \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{H} \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}_z(t), \quad \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_t^T(t) \quad \mathbf{x}_y^T(t)]^T$$

сформировать закон управления

$$(2.4) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T \mathbf{P}(t) [\hat{\mathbf{x}}_t(t) - \hat{\mathbf{x}}_y(t)],$$

$$(2.5) \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{L} - \mathbf{F}_y^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{F}_y + \mathbf{P}(t)^T \mathbf{B}_y \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(t_K) = \mathbf{Q},$$

оптимальный по минимуму квадратичного функционала Летова–Калмана

$$(2.6) \quad I = M \left\{ [\mathbf{x}_t(t_K) - \mathbf{x}_y(t_K)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}_t(t_K) - \mathbf{x}_y(t_K)] + \right. \\ \left. + \int_0^{t_K} [\mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_y(t)]^T \mathbf{L} [\mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_y(t)] dt + \int_0^{t_K} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{u}(t) dt \right\}.$$

Здесь  $\mathbf{x}_y$  и  $\mathbf{x}_t$  –  $n$ -мерные векторы состояний перехватчика и цели;  $\mathbf{F}_y$  и  $\mathbf{F}_t$  – матрицы внутренних связей процессов (2.1) и (2.2);  $\mathbf{u}$  –  $r$ -мерный ( $r \leq n$ ) вектор управления;  $\mathbf{B}_y$  – матрица эффективности управления;  $\mathbf{z}$  –  $m$ -мерный ( $m \leq 2n$ ) вектор измерений;  $\mathbf{H}$  – матрица связи (2.1) и (2.2) с (2.3);  $\mathbf{P}$  – симметричная матрица, определяющая текущий вес ошибок управления;  $t$  и  $t_K$  – текущее и конечное время управления;  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{L}$  – неотрицательно определенные матрицы штрафов за конечную и текущую точность управления;  $\mathbf{K}$  – положительно определенная матрица штрафов за величину сигналов управления;  $\boldsymbol{\xi}_y$ ,  $\boldsymbol{\xi}_t$  и  $\boldsymbol{\xi}_z$  – векторы центрированных гауссовских шумов состояния и измерений;  $\hat{\mathbf{x}}_y$  и  $\hat{\mathbf{x}}_t$  – векторы оптимальных оценок процессов (2.1) и (2.2).

Необходимо отметить, что в состав минимизируемого функционала (2.6) входят три слагаемых. Первое – терминальное, определяет точность системы в конце управления, второе определяет интегральную точность за все время управления, а третье – расход энергии управляющих сигналов. По совокупности управление (2.4), (2.5), минимизирующее функционал (2.6), является

совместно наилучшим по точности и экономичности, что является несомненным достоинством.

Анализ (2.1)–(2.5) позволяет сделать ряд общих выводов.

1. Формируемый сигнал управления (2.4), (2.5) зависит от состояния системы  $\dot{\mathbf{x}}_y$  и  $\dot{\mathbf{x}}_t$ , ее способности воспринимать сигналы управления (которая определяется матрицей  $\mathbf{B}_y$ ), штрафов  $\mathbf{K}$  за сигналы управления и весовой матрицы  $\mathbf{P}$ . Чем больше штраф за управление, тем меньше сигналы  $\mathbf{u}$  и тем экономичней система, но тем менее она точна. Последнее предопределяется тем, что малые значения  $\mathbf{u}$  вызывают в (2.1) малые значения  $\dot{\mathbf{x}}_y$ , а соответственно и малые целенаправленные изменения  $\mathbf{x}_y$ . Если система (2.1) хорошо воспринимает сигналы управления  $\mathbf{u}$  (матрица  $\mathbf{B}_y$  имеет большие коэффициенты), то имеет смысл делать их большими, так как в такой ситуации будут иметь место большие значения  $\dot{\mathbf{x}}_y$  и система будет быстро изменять свое состояние  $\mathbf{x}_y$ . Если же коэффициенты матрицы  $\mathbf{B}_y$  малы, то не следует использовать большие сигналы управления, поскольку это приведет к неоправданно большим расходам энергии при очень малом выигрыше в точности.

2. Коэффициенты матрицы  $\mathbf{P}$  совокупным образом учитывают в (2.4) штрафы за текущую точность и экономичность, определяемые матрицами  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{K}$ , детерминированные связи и эффективность сигналов управления, обусловленные матрицами  $\mathbf{F}_y$  и  $\mathbf{B}_y$ . Влияние детерминированных связей проявляется в том, что изменение штрафа  $l_{ii}$  за точность функционирования по какой-либо координате  $x_i$  приводит к изменению точности и по другим, функционально связанным с  $x_i$  координатам. Происходящие при этом изменения матрицы  $\mathbf{P}$  приводят к изменению сигналов управления, а соответственно и экономичности системы.

3. Спецификой использования (2.4), (2.5) является то обстоятельство, что коэффициенты матрицы (2.5) вычисляются в обратном времени от  $t_k$  к  $t$  в процессе решения уравнения Риккати, в то время как в (2.4) они используются уже в прямом времени. Необходимо отметить, что сложность формирования управления, обусловленная в основном числом уравнений (2.5), которые нужно решить для определения матрицы  $\mathbf{P}$ , существенно превышает сложность самой оптимизируемой системы (2.1). Причем даже незначительное увеличение размерности (2.1) приводит к существенно неадекватному увеличению числа уравнений, которые нужно решать в процессе вычисления матрицы  $\mathbf{P}$  (число уравнений равно  $n^2$ ). Это явление, называемое «проклятием размерности» и характерное для многих видов оптимальных систем, сдерживает применение алгоритмов оптимального управления для сложных систем высокой размерности. Необходимо, однако, отметить, что для стационарных систем матрицу  $\mathbf{P}$ , определяемую только априорными сведениями, можно вычислить заранее. Соответственно, заранее могут быть вычислены для (2.4) и коэффициенты  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_y^T\mathbf{P}(t)$ , число которых обусловлено размерностью  $r \times n$ . Последнее обстоятельство позволяет несколько упростить процедуру использования (2.4), (2.5) на практике.

4. Назначение различных штрафов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{Q}$  на текущую и конечную точность позволяет реализовать различные ошибки на разных этапах работы системы перехвата и тем самым обеспечить требуемую точность в конце управления при весьма малых текущих затратах энергии.

В приложении к задаче синтеза метода наведения на ВСЛА в отношении аппарата (2.1)–(2.6) можно сделать следующие заключения:

- манипулируя видом матриц  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{K}$ , используя представление их элементов в виде функции координат состояния, можно сформировать нестационарный закон наведения [4] с перераспределением управлений функций в зависимости от значения координат состояния при существенном усложнении процедуры вычисления (2.5);
- линейная зависимость (2.4) от ошибок управления ( $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_y$ ) не обеспечивает усиления роли управления для увода от границ потери устойчивости;
- для реализации (2.4), (2.5) необходимо знать время наведения, что практически невозможно;
- при использовании линейных (линеаризованных) моделей состояния формирование управления (2.4), (2.5) обеспечивает приемлемую универсальность метода наведения, реализуя устойчивое функционирование в широком поле условий применения [3];
- необходимость решения высокоразмерной двухточечной краевой задачи, обусловленной необходимостью решения уравнения (2.5) в обратном времени от  $t_k$  к  $t$ , в то время как управление (2.4) формируется в прямом времени от  $t$  к  $t_k$ , существенно усложняет процедуру формирования управления;
- в законе (2.4) зависимость сигнала управления от динамических свойств перехватчика ( $\mathbf{F}_y$ ) учитывается при решении (2.5) сложным образом, затрудняющим предсказание его значимости при решении задач перехвата;
- способность формировать все оптимальные оценки  $\hat{\mathbf{x}}_y$  и  $\hat{\mathbf{x}}_t$ , необходимые для реализации (2.4), определяется условием наблюдаемости (см. раздел 6) [3], выполнение которого зависит от вида внутренних связей (2.1), (2.2) и набора измерителей в составе (2.3).

В заключение необходимо отметить, что по своим возможностям классическая теория оптимального управления в постановке Летова–Калмана не удовлетворяет всем требованиям по реализации метода наведения на ВСЛА.

При этом наиболее сложными препятствиями для использования этого способа для оптимизации методов перехвата является необходимость знания времени наведения и сложность решения двухточечной краевой задачи.

### 3. Анализ возможностей вариантов локальной оптимизации по минимуму квадратичных функционалов

Более перспективным является использование вариантов локальной оптимизации, обеспечивающей минимизацию функционалов качества на каждый текущий момент времени, не требуя знания времени наведения. При этом

можно сформировать управление без решения сложной двухточечной краевой задачи, что существенно упрощает процедуру его получения. Кроме того, в рамках этого подхода достаточно просто без расширения вектора состояния учесть в законе управления различные возмущения, воздействующие на перехватчик. В этом случае вариант локальной оптимизации позволяет [3] для перехватчика

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{F}_y \mathbf{x}_y(t) + \mathbf{B}_y \mathbf{u}(t) + \mathbf{s}_y(t) + \boldsymbol{\xi}_y(t), \quad \mathbf{x}_y(0) = \mathbf{x}_{y0},$$

предназначенного для перехвата ВСЛА, движущегося по траектории (2.2), при наличии измерений (2.3) сформировать управление

$$(3.2) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T [\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}_t(t) - \hat{\mathbf{x}}_y(t)) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{s}}_y(t)],$$

оптимальное по минимуму функционала

$$(3.3) \quad I = M \left\{ [\mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_y(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_y(t)] + \right. \\ \left. + 2[\mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_y(t)]^T \mathbf{G} \mathbf{s}_y(t) + \mathbf{s}_y^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{s}_y(t) + \int_0^t \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{u}(t) dt \right\}.$$

Здесь:  $\mathbf{s}_y$  и  $\hat{\mathbf{s}}_y$  –  $n$ -мерные векторы измеряемых возмущений, действующих на перехватчик, и их оптимальных оценок;  $\mathbf{G}$  – неотрицательно определенная матрица, определяющая вес возмущений в законе управления (3.2). Анализ (3.1)–(3.3) в приложении к задаче синтеза метода наведения на ВСЛА [26] позволяет сформулировать следующие выводы.

1. Используя коэффициенты матриц  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{G}$  в виде функций координат состояния (обычно дальности и скорости сближения), можно сформировать законы управления [4] с достаточно просто назначаемыми моментами изменения управляющих приоритетов как в процессе наведения на цель, так и в рамках траекторного управления наблюдением [4] и регулировки влияния возмущений на различных участках траектории перехвата.

2. Способ обладает высокой реализуемостью, обусловленной следующими особенностями:

- способностью оптимизировать систему наведения под конкретный вид носителя за счет формирования дополнительных корректирующих сигналов, компенсирующих его инерционность;
- способностью учитывать широкий спектр как естественных, так и виртуальных возмущений [3] в виде несоответствия динамических свойств цели и перехватчика, результатов прогноза пространственного положения цели, компенсирующего инерционность носителя, приближения координат состояния к допустимым границам потери устойчивости и т.д.;
- простотой формирования сигналов управления на каждый текущий момент времени, не требующей знания времени наведения и решения сложной двухточечной краевой задачи.

Возможность формирования оценок всех координат состояния, используемых в методе наведения, может быть определена только по результатам синтеза конкретных законов управления.

3. Способ обладает широкой универсальностью, характеризуемой способностью синтезировать методы наведения, устойчиво функционирующие в широком поле условий применения, в том числе и в условиях, не соответствующих моделям, положенным в основу синтеза [4].

4. Ввиду линейной зависимости (3.2) от ошибок управления способ не обеспечивает уверенного увода от границ потери устойчивости.

#### **4. Анализ возможностей вариантов локальной оптимизации по минимуму квадратично-биквадратных функционалов**

Анализ возможностей вариантов синтеза методов наведения с локальной оптимизацией по минимуму традиционных квадратичных функционалов [4] свидетельствует, что по-прежнему остаются проблемными задачи увода носителя от границ потери устойчивости и использования в законе управления производных угловой скорости линии визирования (УСЛВ), что существенно усложняет процедуру их информационного обеспечения.

Решение обеих задач может быть обеспечено использованием методов наведения с нелинейной (кубической) зависимостью от ошибок управления, сформированных в процессе локальной минимизации квадратично-биквадратных функционалов [3, 27].

В простейшем случае такой подход позволяет для перехватчика (2.1), предназначенного для наведения на цель, движущуюся по траектории (2.2) при наличии измерений (2.3), сформировать закон управления

$$(4.1) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T \{ \mathbf{Q} + 2 [\Delta \hat{\mathbf{x}}(t) \Delta \hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{R}] \} \Delta \hat{\mathbf{x}}(t), \quad \Delta \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_T(t) - \hat{\mathbf{x}}_y(t),$$

оптимальный по минимуму функционала

$$(4.2) \quad I = M \left\{ \Delta \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T [\Delta \mathbf{x}(t) \Delta \mathbf{x}(t)^T \mathbf{R}] \Delta \mathbf{x}(t) + \right. \\ \left. + \int_0^t \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{u}(t) dt \right\}.$$

Анализ (4.1) позволяет сделать следующие выводы.

1. Сигнал управления содержит два слагаемых: одно из них

$$(4.3) \quad \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T \mathbf{Q} \Delta \hat{\mathbf{x}}(t)$$

– определяет его линейную составляющую, а второе

$$(4.4) \quad 2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}_y^T [\Delta \hat{\mathbf{x}}(t) \Delta \hat{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{R}] \Delta \hat{\mathbf{x}}(t)$$

– кубическую составляющую. При этом в (4.4) наряду со слагаемыми, пропорциональными  $\Delta x_i^3$  ( $i = \overline{1, n}$ ) содержатся и комбинированные составляющие  $\Delta x_i^2 \Delta x_j$  и  $\Delta x_i \Delta x_j^2$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i \neq j$ ).

2. Соотношения между (4.3) и (4.4) зависят не только от коэффициентов матриц **Q** и **R**, но и от соотношения ошибок управлени  $\Delta x_i$  и  $\Delta x_j$ .

При малых ошибках  $\Delta x_i \rightarrow 0$  кубическая составляющая практически не влияет на сигнал управления и точность наведения, обеспечивая высокую чувствительность (4.1) к малым ошибкам.

При больших  $\Delta x_i$  превалирующей становится кубическая составляющая, обеспечивая ускоренную отработку опасных ошибок управления.

При этом в синтезированных законах [4, 27] не требуется знание оценок производных УСЛВ, роль которых в определенной степени играют слагаемые  $\Delta x_i^2 \Delta x_j$  и  $\Delta x_i \Delta x_j^2$ .

3. Манипулируя конкретным составом коэффициентов в матрицах  $[\Delta \mathbf{x}(t) \Delta \mathbf{x}(t)^T]$  и **R**, можно получить различные варианты законов управления с разным составом комбинационных составляющих.

4. Использование варианта локальной оптимизации по функционалу (4.2) позволяет сохранить все ее преимущества, рассмотренные в разделе 3.

Проведенный анализ [3–9] показал, что по возможностям удовлетворения совокупности перечисленных в [26] требований более предпочтительным является использование математического аппарата локального варианта статистической теории оптимального управления с минимизацией квадратично-биквадратных функционалов, позволяющего реализовать широкий спектр законов управления, совместно наилучших по точности и экономичности.

## 5. Обратные задачи динамики

Существует целый класс задач управления, когда процесс синтеза не может быть сведен к минимизации некоторого строго заданного функционала. В частности, это возникает тогда, когда задача управления имеет естественный глобальный критерий качества, правильно и полно отражающий содержание задачи. Здесь цель управления часто заключается в поддержании определенных соотношений между отдельными компонентами вектора состояния объектов. Эти соотношения обычно описывают условия нормального функционирования объекта управления либо характер переходного процесса.

В последнее время для решения таких задач наиболее часто стали применяться методы синтеза управления на основе концепции обратных задач динамики [13, 14]. Одной из первых работ, послужившей основой для развития метода обратных задач динамики, является задача о реализации некоторой назначеннной в виде модели траектории движения управляемой системы [15]. Известен ряд различных приемов и методов решения задач, связанных с определением управления на основе этого метода [16–18]. В [18] показано, что

структурные свойства алгоритмов управления для линейных систем полностью идентичны алгоритмам, синтезированным по классической теории аналитического конструирования с квадратичными функционалами качества.

Рассмотрим основные положения метода обратных задач динамики (ОЗД) с целью определения соответствия требованиям [26], предъявляемым к методам синтеза управления в задачах наведения.

Пусть дана управляемая и наблюдаемая динамическая система, математическая модель которой представляется дифференциальным оператором

$$(5.1) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_y(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{s}_y(t), t),$$

где  $\mathbf{x}_y(t) = [x_{y1}(t), \dots, x_{yn}(t)]^T$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы;

$\mathbf{a}(t) = [a_1(t), \dots, a_p(t)]^T$  –  $p$ -мерный вектор параметров;

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T$  –  $r$ -мерный вектор управляющих функций;

$\mathbf{s}_y(t) = [s_{y1}(t), \dots, s_{yn}(t)]^T$  –  $n$ -мерный вектор контролируемых внешних возмущающих воздействий, являющихся заданной функцией времени, принадлежащей пространству  $L_2$ ;

вектор-функция  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_y(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{s}_y(t), t)$  предполагается непрерывной и дифференцируемой по совокупности переменных  $\mathbf{x}_y, \mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{s}_y$ .

Требуется найти такое управление  $\mathbf{u}(t)$ , которое обеспечивает экстремальное значение функционалу качества вида

$$(5.2) \quad I = \int_{t_0}^t L(\mathbf{x}_y(t), \mathbf{x}_t(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{s}_y(t), t) dt,$$

в котором  $L(\mathbf{x}_y(t), \mathbf{x}_t(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{s}_y(t), t)$  – скалярная неотрицательная функция. Время  $t$  окончания управления может быть заданным или быть свободным. На соотношение координат  $\mathbf{x}_y(t), \mathbf{x}_t(t)$  накладываются ограничения в виде некоторой гиперповерхности [16]

$$(5.3) \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) = 0.$$

Если под действием возмущений или при ненулевых начальных условиях соотношение (5.3) не выполняется, то управляемый объект в силу наличия его инерционности будет стремиться к этой гиперповерхности согласно выражению

$$(5.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) = 0.$$

В выражениях (5.3) и (5.4) функция  $\mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t)$  –  $r$ -мерная векторная функция, непрерывно дифференцируемая по своим аргументам, а символ  $\infty$  означает время завершения переходных процессов объекта управления.

В общем случае можно считать, что закон стремления к нулю функции  $C(x_y, x_t)$  в (5.4) удовлетворяет решению уравнения

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \psi_1 & \left[ \lambda_i, \dot{C}(x_y, x_t), \ddot{C}(x_y, x_t), \dots, C^{(k)}(x_y, x_t) \right] = \\ & = \psi_2 \left[ \beta, \dot{C}(x_y, x_t) \right], \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

где  $\lambda_i, \beta$  – произвольные постоянные числа, обеспечивающие устойчивость решения (5.5);  $i$  – номер постоянного коэффициента, учитывающего вес  $k$ -й производной ограничения (5.3) или (5.4);  $\psi_1[\bullet]$  и  $\psi_2[\bullet]$  –  $r$ -мерные в общем случае нелинейные векторные функции, однако во многих технических приложениях функции  $\psi_1[\bullet]$  и  $\psi_2[\bullet]$  в уравнении (5.5) можно описать следующими соотношениями:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \psi_1[\bullet] & = C^{(k)}(x_y, x_t) + \lambda_{k-1} C^{(k-1)}(x_y, x_t) + \dots + \lambda_1 \dot{C}(x_y, x_t); \\ \psi_2[\bullet] & = \beta_0 C(x_y, x_t) \quad \text{либо} \quad \psi_2[\bullet] = \beta_0 C(x_y, x_t) + \beta_2 C^3(x_y, x_t). \end{aligned}$$

Координаты  $n$ -мерного вектора  $x_t(t)$  по своей физической природе либо совпадают с вектором  $x_y(t)$ , либо представляют некоторую комбинацию его компонент.

Управление  $u(t)$  необходимо определить в виде функции координат состояния системы (5.1) и координат требуемой траектории. Если учесть, что задачу перехвата можно представить в виде совокупности двух движений в горизонтальной и вертикальной плоскостях, то применение метода синтеза управления рассмотрим на примере управления в одной плоскости под действием одного управляющего сигнала.

### *Скалярное управляющее воздействие*

Внешнее возмущающее воздействие  $s_y(t)$  в (5.1) является заданной функцией времени, причем все его компоненты контролируемы.

Рассмотрим случай, когда система (5.1) может быть записана в виде системы линейных уравнений:

$$(5.7) \quad \dot{x}(t) = Fx(t) + Bu(t) + s_y(t),$$

где  $F = \|f_{ij}\|$  – квадратная матрица размерности  $n \times n$  с известными элементами;  $B$  – вектор-столбец, определяющий коэффициенты, с которыми управление входит в каждое уравнение системы; внешнее возмущающее воздействие  $s_y(t)$  является заданной функцией времени, причем все его компоненты контролируемы;  $u(t)$  – скалярное управление.

Заметим, что число управляемых координат вектора  $x(t)$  в установившемся режиме, а следовательно и размерность вектора  $C(x_y, x_t)$ , определяется размерностью вектора управления. Тогда без ограничения общности мож но считать, что система (5.7) эквивалентна скалярному дифференциальному

уравнению

$$(5.8) \quad \dot{x}_{y1}^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_{y1}^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^r b_j u^{(j)}(t) + \sum_{l=0}^n k_l s_{yl}(t),$$

где  $x_1(t)$  – выходная координата системы (5.7);  $k_l$  – весовой коэффициент возмущений  $s_{yl}$ .

Для определенности полагаем, что функция  $\mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t)$  имеет вид

$$(5.9) \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) = x_{y1}(t) - x_{t1}(t).$$

Решение этой задачи будем определять из условия, что  $\mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t)$  стремится к нулю по некоторому закону

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) = 0.$$

Причем закон изменения  $\mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t)$  может быть задан любым дифференциальным оператором, например (5.6):

$$(5.10) \quad \mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) + \lambda_{n-1} \cdot \mathbf{C}^{(n-1)}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) + \dots + \lambda_0 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) = 0,$$

где  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  – любые положительные числа, обеспечивающие устойчивость системы (5.6).

Подставляя (5.8) в (5.10), получаем дифференциальное уравнение  $r$ -го порядка относительно  $u(t)$ :

$$(5.11) \quad b_r u^{(r)}(t) + b_{r-1} u^{(r-1)}(t) + \dots + b_0 u(t) = z(t),$$

$$\text{где } z(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_{y1}^{(i)}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (x_{y1} - x_{t1}) + x_{t1}^{(n)}(t) - \sum_{l=0}^n k_l s_{yl}(t).$$

Наибольший интерес представляет случай, когда в уравнении (5.7) компоненты вектора  $\mathbf{B}$ , за исключением последнего, равны нулю. Тогда управление, удовлетворяющее (5.11), определяется выражением

$$(5.12) \quad u(t) = b_0^{-1} \left[ - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x_{y1}^{(j)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_{y1}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x_{t1}^{(j)}(t) \right] - b_0^{-1} \left[ \sum_{l=0}^n k_l s_{yl}(t) - x_{t1}^{(n)}(t) \right].$$

Здесь принято, что  $\lambda_n = 1$ .

Рассмотрим более подробно особенности управляемого процесса в случае, если управление определяется уравнением (5.11) или (5.12). Пусть параметры системы (5.7)  $\alpha_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , и  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$ , известны точно, тогда уравнение управляемого процесса имеет вид

$$(5.13) \quad x_{y1}^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x_{y1}^{(j)}(t) = \lambda_0 x_{y1}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x_{t1}^{(j)}(t),$$

или в матричной форме

$$(5.14) \quad \dot{\mathbf{x}}_y(t) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{x}_t(t).$$

Из (5.13) и (5.14) следует, что вне зависимости от свойств исходной системы свойства управляемого процесса однозначно определяются коэффициентами  $\lambda_j$ . Это обусловлено тем, что  $\mathbf{A}_\lambda$  – матрица Фробениуса, последняя строка которой определяется коэффициентами  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Неизвестные коэффициенты  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , определяются из необходимых условий экстремума функционала (5.2).

В заключение отметим, что управление  $u(t)$ , синтезированное согласно предложенном методу, является функцией координат состояния  $\mathbf{x}_y$ ,  $\mathbf{x}_t$  и параметров  $\lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Кроме того, и для нелинейной системы математическая модель управляемого процесса также определяется уравнением вида (5.14), т.е. уравнением желаемого процесса.

Анализ условий применения изложенного метода синтеза управления в задачах перехвата целей типа ВСЛА показывает:

- во-первых, он позволяет оценить возможность формирования законов управления как для фиксированного, так и для текущего времени наведения;
- во-вторых, применение метода ОЗД позволяют синтезировать как линейные, так и нелинейные законы за счет применения различных функций  $\psi_2[\bullet] = \beta_0 \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t)$  – линейное управление,  $\psi_2[\bullet] = \beta_0 \mathbf{C}(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t) + \beta_2 \mathbf{C}^3(\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_t)$ , – линейно-кубическое управление, что дает возможность реализовать увод от границ потери устойчивости;
- в-третьих, законы управления могут быть как стационарными, так и нестационарными, что определяется видом представления математических моделей (5.1)–(5.7) и видом маневрирования цели, происходящими из вида законов управления (5.11) и (5.12);
- в-четвертых, вне зависимости от вида закона управления замкнутая система управления, как следует из системы (5.14), обладает требуемыми свойствами, поскольку она определяется линейным дифференциальным уравнением и обеспечивает достигаемые требования по устойчивости, перерегулированию и робастности по отношению к априорным ошибкам в пределах не более 30%.

Метод позволяет осуществить перехват цели за заданное фиксированное время в случае представления траектории перехвата в виде полета по прямой и дуге с известным радиусом.

Кроме того, законы управления, синтезированные по методу ОЗД, не требуют больших вычислительных ресурсов для их реализации в реальном масштабе времени.

## 6. Анализ возможностей оптимизации информационного обеспечения методов наведения

Информационное обеспечение, которое сводится к формированию оценок координат относительного и абсолютного движения цели и перехватчика, используемым в методах наведения, является необходимым условием их реализации [26]. Обзор методов наведения, выполненный в [2, 4, 27], свидетельствует, что для их реализации, в общем случае, в каждой плоскости управления должны формироваться оценки дальности, скорости сближения, бортового пеленга цели, угловой скорости линии визирования (УСЛВ) цели и ее производных.

Необходимые условия, определяющие возможность формирования этих оценок, определяются критерием наблюдаемости [2, 3] на основе взаимосвязей между исходными моделями состояния (2.1), (2.2) и (2.3). В приложении к линейным системам этот критерий определяется соотношением

$$(6.1) \quad \text{rank} \left[ \mathbf{H}^T \left| \mathbf{F}^T \mathbf{H}^T \right| \left( \mathbf{F}^T \right)^2 \mathbf{H}^T \left| \dots \right| \left( \mathbf{F}^T \right)^{N-1} \mathbf{H}^T \right] = N = 2n,$$

где  $\mathbf{F}$  – динамическая матрица обобщенного вектора состояния, используемого в (2.3).

Физический смысл (6.1) состоит в том, что при их выполнении на основе (2.1), (2.2) и (2.3) можно получить  $N$  независимых уравнений с  $N$  неизвестными, однозначно связывающих измерения с оценками.

В прикладном плане, наряду с выяснением самой возможности синтеза алгоритмов фильтрации, (6.1) позволяет определить набор измерителей, при котором будет обеспечиваться оценивание требуемого вектора состояния. Кроме того, из (6.1) следует, что для решения этой задачи должны как минимум измеряться нулевые производные вектора состояния [4]. В приложении к задаче синтеза методов наведения должны как минимум измеряться дальность и бортовой пеленг цели.

Следует отметить, что различные координаты состояния вносят различный вклад в ошибки наведения. Проведенные исследования [2, 28] показали, что ошибки оценивания угловых координат влияют на точность самонаведения, на порядок и более сильно, чем ошибки оценивания дальности и ее производных.

В зависимости от типа антенной системы возможны различные подходы к выбору процедуры оптимизации информационного обеспечения.

Первый основан на использовании алгоритмов адаптивной аналого-дискретной фильтрации.

Второй подход основан на использовании многоступенчатой фильтрации. Третий подход базируется на трансформации входных сигналов, обеспечивающей оптимальность использования заданного привода антенны с механическим управлением.

Четвертый основан на использовании следящих систем с нелинейной зависимостью от ошибок сопровождения, обеспечивающей их оптимальность по минимуму локального квадратично-биквадратного функционала качества (см. раздел 4).

Теоретические основы, лежащие в основе этих подходов, конкретные алгоритмы оценивания и результаты исследования их эффективности подробно рассмотрены в [3, 4, 28].

Использование аналого-дискретной фильтрации обусловлено тремя причинами:

- необходимостью непрерывного формирования сигнала траекторного управления перехватчиком;
- дискретным и разновременным поступлением в алгоритм оценивания измерений, формируемых датчиками различной физической природы (например, РЛС и системы воздушных сигналов);
- невозможностью использования моделей состояния, адекватно отражающих сложные пространственные маневры ВСЛА, что предопределяет необходимость традиционных фильтров Калмана и необходимость использования различных вариантов адаптации.

Суть аналого-дискретной фильтрации состоит в том, что экстраполяция осуществляется с малым шагом  $\tau$ , приближаясь по своей точности к аналоговому прогнозу и обеспечивая непрерывный режим формирования сигнала управления носителем, а коррекция осуществляется с достаточно большим интервалом  $T \gg \tau$  в моменты поступления измерений.

В общем случае алгоритмы адаптивной аналого-дискретной фильтрации позволяют для процессов [3]

$$(6.2) \quad \mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \boldsymbol{\xi}_x(k-1)$$

при наличии наблюдений

$$(6.3) \quad \mathbf{z}(k) = \mathbf{Q}_z [\mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\xi}_z(k)],$$

$$\mathbf{Q}_z(k) = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{при } k = nT/\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{при } k \neq nT/\tau \end{cases}$$

сформировать оценки

$$(6.4) \quad \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}_\Theta(k) + \mathbf{K}_{\phi\alpha}(k)\Delta\mathbf{z}(k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$(6.5) \quad \Delta\mathbf{z}(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{Q}_z(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{x}_\Theta(k),$$

$$(6.6) \quad \mathbf{x}_\Theta(k) = \Phi(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{u}_K(k),$$

$$(6.7) \quad \mathbf{u}_K(k) = \begin{cases} \mathbf{f}_\Pi(\Delta\mathbf{z}(k)) & \text{при } k = nT/\tau, \text{ если используется} \\ & \text{адаптивная коррекция результатов прогноза,} \\ 0 & \text{при } k \neq nT/\tau, \\ 0, & \text{если коррекция результатов прогноза не используется,} \end{cases}$$

$$(6.8) \quad \mathbf{K}_{\text{фа}}(k) = \mathbf{Q}_y(k) \mathbf{D}(k) \mathbf{H}^T(k) \mathbf{D}_z^{-1}(k),$$

$$(6.9) \quad \mathbf{Q}_y(k) = \begin{cases} \mathbf{f}_y(\Delta \mathbf{z}(k)) & \text{при } k = nT/\tau, \text{ если используется адаптивная} \\ & \text{коррекция коэффициентов усиления невязки,} \\ \mathbf{E} & \text{при } k \neq nT/\tau, \\ \mathbf{E}, & \text{если коррекция коэффициентов усиления невязки не} \\ & \text{используется,} \end{cases}$$

$$(6.10) \quad \mathbf{D}(k) = \begin{cases} [\mathbf{E} - \mathbf{K}_{\text{фа}}(k) \mathbf{H}(k)] \mathbf{D}_s(k) & \text{при } k = nT/\tau, \\ \mathbf{D}_s(k) & \text{при } k \neq nT/\tau, \end{cases} \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0.$$

$$(6.11) \quad \mathbf{D}_s(k) = \Phi(k, k-1) \mathbf{D}(k-1) \Phi^T(k, k-1) + \mathbf{D}_x(k-1).$$

Здесь:  $\Phi$  – матрица внутренних связей (6.2);  $\mathbf{Q}_z(k)$  – матрица признаков прихода измерений;  $\mathbf{D}_x$  – матрица дисперсий шумов  $\xi_x$  состояний (6.2);  $\mathbf{D}_z$  – матрица дисперсий шумов  $\xi_z$  измерений (6.3);  $\mathbf{D}$  – матрица ошибок оценивания;  $\mathbf{u}_k$  – поправка прогноза, величина которого определяется по результатам анализа невязки  $\mathbf{f}_y(\Delta \mathbf{z}(k))$ ;  $\mathbf{Q}_y$  – матрица весовых множителей, используемых при автоматической коррекции коэффициента усиления невязки по результатам  $\mathbf{f}_y(\Delta \mathbf{z}(k))$  ее анализа;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

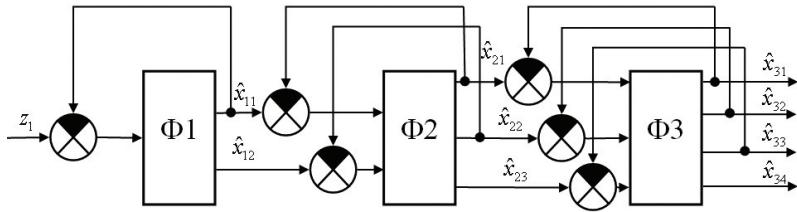
Отличие (6.3)–(6.11) от типового алгоритма Калмана заключается в двух особенностях. Первая состоит в том, что экстраполяция состояния (6.6) и вычисление ковариационной матрицы ошибок прогноза (6.11) выполняются с малым интервалом  $\tau$ , а измерение (6.3) и коррекция оценок  $\hat{\mathbf{x}}$  (6.4) – с большим интервалом  $T \gg \tau$ . Причем вторая особенность предопределяет возможность использовать самые разнообразные приемы адаптации и разновременно поступающие измерения.

В (6.2)–(6.11) приведены два наиболее эффективных способа предотвращения расходимости алгоритма фильтрации (6.3), (6.4) при интенсивном маневрировании ВСЛА. Один из них основан на формировании адаптивной поправки (6.7) прогноза, другой – на коррекции (6.9) коэффициента (6.8) усиления невязки. Предпочтительность выбора того или иного способа адаптации зависит от размерности модели движения цели и состава измерителей.

Процедуры расчета поправок (6.7) и (6.9), в том числе и при использовании разновременно приходящих измерений, подробно рассмотрены в [3].

Следует отметить, что в промежутках между приходом измерений (6.3) сигнал управления перехватчиком формируется по результатам прогноза (6.6) при  $\mathbf{u}_k = 0$ . За это время накапливается ошибка прогноза, обусловленная несоответствием реального полета ВСЛА используемой модели (6.2). С приходом измерений (6.3) от какого-либо из датчиков в моменты времени, соответствующие  $n = 1, 2, 3, \dots$ , выполняются две операции.

В соответствии с первой по правилам, изложенным в [3, 28], вычисляются адаптивные поправки (6.7) прогноза (6.6) с изменением величины невязки (6.5) либо поправки (6.9), изменяющей ее вес.



Функциональная схема трехступенчатого фильтра четвертого порядка.

В рамках второй операции осуществляется формирование оценки по правилу (6.4) с учетом выбранного способа адаптации. При этом реальная точность оценивания по сравнению с потенциальной, определяемой (6.10), (6.11), несколько ухудшается, однако обеспечивается устойчивость оценивания при выполнении ВСЛА сложных маневров.

Наряду с адаптивной коррекцией прогноза (6.7) или коррекцией коэффициентов усиления невязки (6.9), рассмотренных в [4], весьма эффективным является способ фильтрации с идентификацией параметров  $\Phi(k, k - 1)$  (6.2) исходной модели состояния. Необходимо, однако, подчеркнуть, что обеспечивая эффективную адаптацию модели к условиям применения, этот способ требует существенно больших вычислительных затрат [28].

Оценивание дальности, скорости сближения и ее производных по результатам независимых измерений дальности (времени запаздывания отраженных сигналов) и скорости (доплеровской частоты) не представляет особых трудностей. В то же время оценивание бортовых пеленгов, УСЛВ и ее производных по измерениям лишь углов является достаточно сложной задачей.

Одним из наиболее простых способов ее решения является использование многоступенчатой фильтрации [4]. Поставленная задача достигается тем, что измерения подаются на вход многоступенчатого фильтра, представляющего собой набор последовательно соединенных фильтров нарастающей размерности ( $n \geq 2$ ), каждый из которых формирует оценки, используемые в следующем фильтре в качестве измерений, что определяет возрастание в них числа обратных связей и соответственно повышение устойчивости и точности оцениваемых производных.

Принципы функционирования предложенного способа поясняются на примере трехступенчатого фильтра четвертого порядка при условии, что используется один измеритель. Его функциональная схема приведена на рисунке, где  $\Phi_1$  – первая ступень многоступенчатого фильтра, формирующая по измерению  $z_1$  оценки  $\hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}$  и передающая их на вторую ступень в качестве измерений;  $\Phi_2$  – вторая ступень многоступенчатого фильтра, формирующая оценки  $\hat{x}_{21}, \hat{x}_{22}, \hat{x}_{23}$  и передающая их на третью ступень в качестве измерений;  $\Phi_3$  – третья ступень многоступенчатого фильтра, формирующая оценки  $\hat{x}_{31}, \hat{x}_{32}, \hat{x}_{33}, \hat{x}_{34}$  и передающая их потребителю.

Эффективность предложенного способа многоступенчатой фильтрации была проверена в [4] на примере устойчивого формирования оценок угла и его производных вплоть до четвертого порядка при наличии одного измерителя.

## 7. Заключение

Материал, рассмотренный в статье, позволяет сделать следующие выводы.

На основе требований к способам оптимизации методов наведения на ВСЛА [26], включая необходимость формирования нестационарных законов управления в заданной области условий применения в рамках действующих ограничений и выполнения условий реализуемости и на основе предварительных исследований была проведена оценка возможностей различных способов оптимизации по синтезу законов управления перехватчиком.

В частности была проведена оценка возможностей:

- классической теории оптимального управления в постановке Летова–Калмана;
- вариантов локальной оптимизации, в том числе и с учетом реальных и виртуальных возмущений;
- локальной оптимизации по квадратично-биквадратным функционалам качества;
- концепции обратных задач динамики;
- вариантов информационного обеспечения синтезируемых методов наведения.

Сравнительный анализ показал, что по совокупности требований наилучшими возможностями обладают метод локальной оптимизации по минимуму квадратично-биквадратных функционалов качества и метод на основе концепции обратных задач динамики.

В последующих статьях будет проведена оценка возможностей градиентного способа оптимизации и вариантов так называемого интеллектуального управления.

Кроме того, будут рассмотрены примеры синтеза конкретных методов наведения, проведенного в рамках наиболее приемлемых способов оптимизации.

В заключение необходимо отметить, что при использовании нескольких вариантов оптимизации возникает задача квалифицированного выбора наилучшего результата. В простейшем случае этот выбор осуществляется по результатам сравнения показателей эффективности и живучести. Более обоснованный выбор можно осуществить, используя так называемую форсайт-концепцию [29], которая позволяет автоматизировать задачу выбора альтернативы по существенному числу разнородных тактических, экономических и технологических признаков.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верба В.С., Меркулов В.И., Капустян С.Г., Харьков В.П. Оптимизация радиоэлектронных систем управления. Методы и алгоритмы синтеза оптимального управления. Части 1–3 // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2012. № 2; 2013. № 3; 2013. № 11.

2. Авиационные системы радиоуправления. Учебник для военных и гражданских ВУЗов / Под ред. В.И. Меркулова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008. 422 с.
3. Меркулов В.И., Верба В.С. Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Книга 1. М.: Радиотехника, 2023. 404 с.
4. Меркулов В.И., Верба В.С. Синтез и анализ авиационных радиоэлектронных систем управления. Книга 2. М.: Радиотехника, 2023. 364 с.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1992.
6. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С., III. Оптимальное управление системами. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.
7. Черноусько Ф.А., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
8. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998. 574 с.
9. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
10. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y. Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // Mathematics. 2021. No. 9. P. 2386.
11. An Ji-Yeon. A Collision Geometry-Based Guidance Law for Course-Correction-Projectile / Ji-Yeon An, Chang-Hun Lee, Min-Jea Tahk // Int. J. Aeronaut. Spac. Sci. 2019. V. 20. No. 2. P. 442–458.
12. Su Wenshan. Coverage-based cooperative guidance strategy against highly maneuvering target / Wenshan Su, Kebo Li, Lei Chen // Aerospace Science and Technology. 2017. V. 71. P. 147–155.
13. Крутъко П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987.
14. Крутъко П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988.
15. Петров Б.Н., Крутъко П.Д., Попов Е.П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1078–1081.
16. Харьков В.П. Структурно-параметрический синтез управления динамическими системами // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1991. № 2.
17. Харьков В.П. Адаптивное управление динамическими системами на основе обратных задач динамики // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1994. № 4.
18. Меркулов В.И., Харьков В.П. Синтез закона управления системы перехвата высокоскоростных высокоманевренных целей // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2017. № 10. С. 3–8.
19. Углеродные двухпозиционные пассивные системы радиомониторинга воздушного базирования / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника, 2022. 232 с.
20. Меркулов В.И., Верба В.С., Ильчук А.Р. Автоматическое сопровождение целей в РЛС интегрированных авиационных комплексов. Том 1. / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника, 2018. 360 с.

21. An Improved Kalman Filter Based on Long Short-Memory Recurrent Neural Network for Nonlinear Radar Target Tracking / F. Song, Y. Li, W. Cheng et al. // Wireless Communications and Mobile Computing. 2022. No. 7. P. 1–10.
22. Prokhorov, M.B. The Kalman-Bucy method of optimal filtering and its generalizations / M.B. Prokhorov, V.K. Saul'ev // Journal of Soviet Mathematics. 1979. V. 12. No. 3. P. 354–380.
23. Кузовков Н.Т., Карабанов С.В., Салычев О.С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
24. Федунов Б.Е. Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов. М.: ДеЛибри, 2018. 246 с.
25. Васильев В.И., Ильясов Б.Г. Интеллектуальные системы управления. Теория и практика: учебное пособие. М.: Радиотехника, 2009. 392 с.
26. Верба В.С., Меркулов В.И. Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Часть 1 // АиТ. 2024. № 11. С. 73–80.
27. Меркулов В.И. Нестационарные методы самонаведения // Вестник ВКО. 2020. № 1. С. 25–39.
28. Автоматическое сопровождение целей в РЛС интегрированных авиационных комплексов. Том 2 / Под ред. В.С. Вербы. М.: Радиотехника, 2018. 486 с.
29. Анцев Г.В., Гаенко В.П., Сарычев В.А. Форсайт как методология концептуального предисследовательского прогнозирования и оценки направлений (вариантов) развития технически сложных объектов // Успехи современной радиоэлектроники. 2022. Т. 76. № 11. С. 25–39.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.*

Поступила в редакцию 20.03.2024

После доработки 08.07.2024

Принята к публикации 02.09.2024

# Управление в технических системах

© 2025 г. А.Е. КОНЬКОВ (konkov@ipu.ru),  
В.И. КРУЖКОВ (kruzhkov@ipu.ru),

Е.А. ПАВЛОВА, канд. физ.-мат. наук (pavlova@physics.msu.ru),  
П.С. КОРЕНЕВ (pkorenov@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
Б.Ж. ЧЕКТЫБАЕВ, PhD (chektybaev@nnc.kz),

С.В. КОТОВ (ksvldondon@mail.ru),  
Д.Б. ЗАРВА, канд. техн. наук (zarva@nnc.kz),

А.А. ЖАКСЫБАЕВА (zhaksybaeva@nnc.kz)

(Институт атомной энергии НЯЦ РК, Курчатов)

## ПОЛУНАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ КТМ<sup>1</sup>

Статья посвящена разработке цифровой системы управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ. Синтезирован регулятор с постоянными параметрами на массиве моделей объекта, при этом один регулятор обеспечивает заданное качество управления и запасы робастной устойчивости одновременно для двух моделей объекта с переменными параметрами. Проведен анализ робастной устойчивости. Работоспособность системы проверена проведением полунатурного моделирования с использованием полной нелинейной модели инвертора напряжения, с учетом ограничений на его максимальный ток и напряжение.

**Ключевые слова:** токамак, КТМ, полунатурное моделирование, робастный регулятор, LMI.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010044, **EDN:** JQKONJ

### 1. Введение

Системы управления вертикальным положением плазмы критически важны для функционирования современных D-образных токамаков, в которых плазма вытянута по вертикалам в полоидальном сечении [1–4]. Вертикальное положение плазмы в таких токамаках неустойчиво, поэтому для обеспечения плазменных разрядов применяется система управления с обратной связью. Воздействие на вертикальное положение плазмы осуществляется посредством магнитного поля, создаваемого током в обмотке горизонтального

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РНФ (№ 21-79-20180), а также научно-технической программы ИРН № BR23891779 «Научно-техническое обеспечение экспериментальных исследований на казахстанском материаловедческом токамаке КТМ» программно-целевого финансирования Министерства энергетики Республики Казахстан.

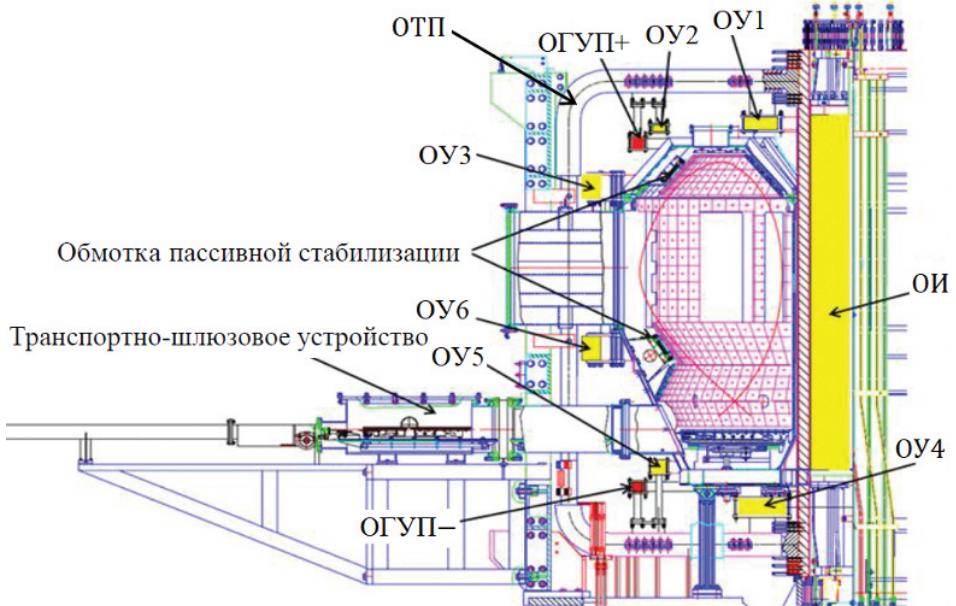


Рис. 1. Сечение токамака КТМ.

управляющего поля (ОГУП) [5]. Система управления вертикальным положением плазмы должна обеспечивать устойчивость вертикального положения плазмы и выполнение заданного сценария по вертикальному положению плазмы в течение разряда.

Токамак КТМ (Казахстанский Токамак Материаловедческий) [6, 7] расположен в г. Курчатов (Казахстан). Помимо ОГУП на токамаке используются шесть обмоток управления (ОУ) формой плазмы, обмотка индуктора (ОИ), наводящего плазменный ток, обмотка тороидального магнитного поля (ОТП) и обмотка пассивной стабилизации положения плазмы. Расположение обмоток токамака показано на рис. 1.

Плазма в токамаке является нестационарным объектом управления, в частности динамика вертикального положения плазмы может значительно меняться в течение разряда, кроме того, она может существенно отличаться в разрядах с различным сценарием. Ранее в [8] были рассчитаны модели вертикального движения плазмы для нескольких разрядов, синтезирована система управления током в ОГУП и получены оценки области управляемости вертикального положения плазмы. На токамаке КТМ планируется ввод в эксплуатацию нового источника питания ОГУП в виде инвертора напряжения в режиме широтно-импульсной модуляции (ШИМ). Целью данной работы является разработка и полунатурное моделирование цифровой системы управления вертикальным положением плазмы с новым источником питания. При этом синтезируется стационарный регулятор, который обеспечивает приемлемое качество управления и необходимые запасы рабочей устойчивости замкнутой системы управления одновременно для двух различных сценариев.

ев плазменного разряда. Полунатурное моделирование (Hardware-in-the-loop simulation) [9] является важным этапом перед внедрением разработанной системы управления в практику экспериментов. При таком способе моделирования регулятор работает на реальном оборудовании, функционально идентичном тому, которое будет использоваться на практике. При достаточной точности модели объекта управления полунатурное моделирование позволяет гарантировать работоспособность разрабатываемой системы управления и сократить затраты на внедрение. В данной работе предлагается методика проведения полунатурного моделирования каскадной системы управления вертикальным положением плазмы и приведены его результаты в различных режимах работы.

Далее в разделе 2 приводится постановка задачи, структурная схема синтезируемой системы управления и описание используемых моделей плазмы. В разделе 3 описан синтез каскадной системы управления вертикальным положением плазмы. В разделе 4 проводится анализ запасов рабочей устойчивости синтезированной системы по амплитуде и запаздыванию. В разделе 5 приведены результаты полунатурного моделирования синтезированной системы управления в рабочих и экстремальных режимах, что дает возможность проверить результаты, полученные в разделах 3 и 4. В Заключении приводятся основные итоги работы. В Приложении проводится сравнение цифровой системы управления, синтезированной непосредственно на дискретной модели объекта, и дискретизированной системы, настроенной на непрерывной модели, при условии, что метод настройки регулятора одинаковый, это является обоснованием выбора метода синтеза системы управления.

## 2. Постановка задачи

Структурная схема цифровой каскадной системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ приведена на рис. 2, где  $Z_{ref}$  – задающее воздействие на вертикальное положение плазмы,  $Z$  – вертикальное положение плазмы,  $e_Z = Z_{ref} - Z$  – ошибка по вертикальному положению плазмы,  $I_{HFC\ ref}$  – задающее воздействие на ток в ОГУП,  $I_{HFC}$  – ток в ОГУП,  $e_{I_{HFC}} = I_{HFC\ ref} - I_{HFC}$  – ошибка по току в ОГУП,  $U_{HFC}$  – напряжение на ОГУП,  $u_{PWM}$  – управляющий сигнал.

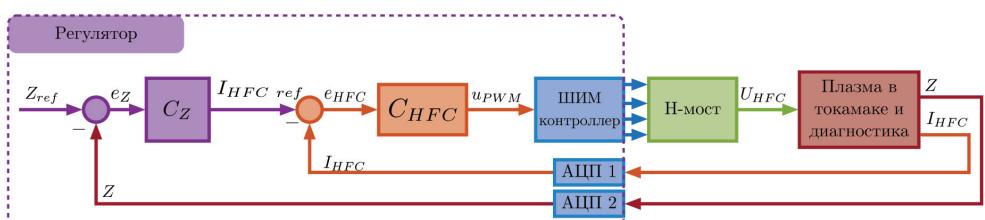


Рис. 2. Структурная схема цифровой каскадной системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ с инвертором напряжения в режиме ШИМ.

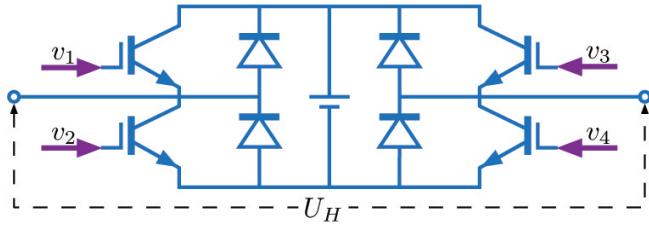


Рис. 3. Принципиальная схема Н-моста с источником постоянного напряжения.

Исполнительным устройством в системе управления является источник питания ОГУП в виде инвертора напряжения в режиме ШИМ с параметрами: три уровня напряжения:  $[-1 \ 0 \ 1]$  кВ; мощность 2 МВт, соответствующая максимальному току  $\pm 2$  кА; частота ШИМ 1 кГц. Инвертор напряжения состоит из Н-моста и ШИМ-контроллера, который преобразует управляющий сигнал  $upWM$  в последовательности импульсов  $v_1-v_4$ , управляющих затворами транзисторов Н-моста (рис. 3). Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) в системе управления отсутствует, его роль выполняет ШИМ-контроллер, когда он является частью цифрового управляющего устройства и цифровые выходы  $v_1-v_4$  подаются на затворы транзисторов через оптические развязки.

ОГУП состоит из двух секций, соединенных последовательно-встречно. Напряжение и ток в ОГУП связаны соотношением

$$L\dot{I}_{HFC}(t) + RI_{HFC}(t) = U_{HFC}(t),$$

где  $R = 212$  мОм – активное сопротивление ОГУП, а  $L = 17$  мГн – индуктивность ОГУП. Дискретная передаточная функция ОГУП имеет вид

$$(1) \quad P_{HFC}(z) = \frac{R^{-1} \left(1 - \exp(-T_s R/L)\right)}{z - \exp(-T_s R/L)}, \quad I_{HFC}(z) = P_{HFC}(z)U_{HFC}(z),$$

где  $z$  – переменная Z-преобразования,  $T_s = 1$  мс – шаг дискретизации.

Модели вертикального движения плазмы в КТМ [8] получены по экспериментальным данным двух наиболее типичных в прошедшей экспериментальной кампании на токамаке КТМ плазменных разрядов с током плазмы 500 кА [10]: разряд № 5121 с вытянутостью (отношением вертикального и горизонтального диаметров плазмы) 1,4 и нормальной длительностью, разряд № 5126 с вытянутостью 1,6 и малой продолжительностью удержания плазмы, а затем представлены в виде линейных моделей в пространстве состояний с переменными параметрами в дискретном времени:

$$\begin{cases} x(T_sk + T_s) = A(T_sk)x(T_sk) + B(T_sk)u(T_sk), \\ y(T_sk) = C(T_sk)x(T_sk), \end{cases}$$

где  $x = [I_{PF}^T \ I_{VV}^T \ I_P]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1}$  – вектор состояния,  $I_{PF} \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$  – вектор токов в обмотках полоидального поля (включая  $I_{HFC}$ ),  $I_{VV} \in \mathbb{R}^{15 \times 1}$  – токи на вакуумной камере и пассивных структурах,  $I_P$  – ток плазмы,  $u = U_{HFC}$  – вход,  $y = [Z \ I_{HFC}]^T$  – вектор выхода.

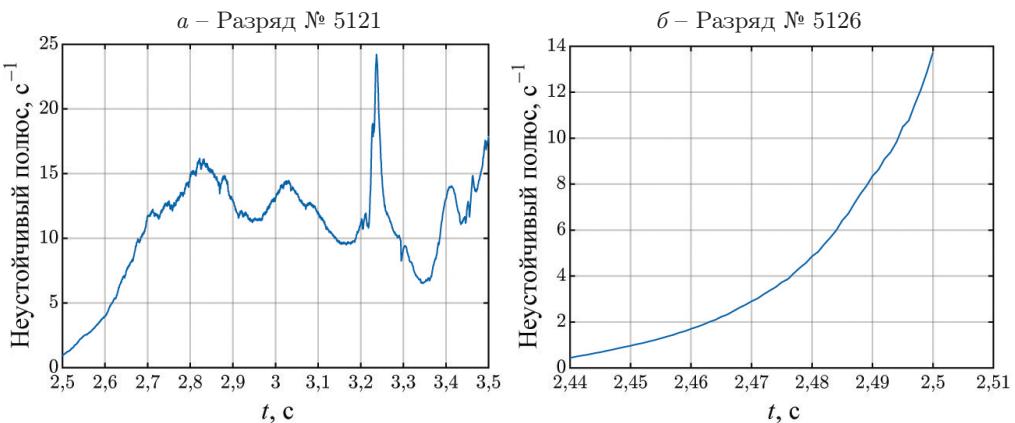


Рис. 4. Изменение величины единственного неустойчивого полюса моделей вертикального движения плазмы в течение разряда.

Набор  $\{A, B, C\}$  матриц для каждой модели вертикального движения плазмы рассчитан с шагом  $T_s = 1$  мс:

- 1) модель разряда № 5121 – для 1001 временной точки от 2,50 до 3,50 с;
- 2) модель разряда № 5126 – для 61 временной точки от 2,44 до 2,50 с.

Обе модели имеют один неустойчивый полюс, который значительно меняется в течение разряда, что показано на рис. 4. Для синтеза регулятора был вычислен массив дискретных передаточных функций

$$(2) \quad P_n(z) = C_n(zI - A_n)^{-1}B_n,$$

где индекс  $n$  обозначает номер временной точки разряда, для которой была рассчитана матрицы модели:  $A_n = A(T_sn)$ ,  $B_n = B(T_sn)$  и  $C_n = C(T_sn)$ .

Необходимо синтезировать регулятор, с которым система управления будет иметь необходимый запас робастной устойчивости для обеспечения приемлемого качества управления одновременно для двух моделей вертикального движения плазмы с переменными параметрами. Система управления должна также иметь достаточный запас робастной устойчивости по фазе, чтобы сохранять устойчивость при введении в контур обратной связи по вертикальному положению плазмы транспортного запаздывания величиной до 10 мс (10 тактов с шагом 1 мс), которая является верхней оценкой всех возможных запаздываний в системе сбора, обработки и передачи данных токамака КТМ. Запаздывание моделируется введением в контур обратной связи дискретной передаточной функции  $z^{-10}$ .

### 3. Синтез каскадной системы управления

Регуляторы в обоих каскадах управления синтезированы методом [11], который позволяет синтезировать дискретный регулятор на массиве дискретных моделей объекта и осуществлять размещение АЧХ передаточной функции

ции разомкнутой системы (Loop Shaping). Синтез проводится техникой линейных матричных неравенств через выпукло-вогнутую процедуру. В Приложении рассматривается альтернативный подход, когда регулятор синтезируется на модели объекта в непрерывном времени, а затем проводится дискретизация регулятора.

Сначала синтезируется внутренний каскад управления током в ОГУП на модели (1), линейная модель инвертора напряжения получена методом идентификации последовательного соединения ОГУП и инвертора напряжения с использованием подхода [12]. В результате был синтезирован ПИ-регулятор с дискретной передаточной функцией

$$(3) \quad C_{HFC}(z) = K_{P_{HFC}} + K_{I_{HFC}} \frac{T_s z}{z - 1}, \quad u_{PWM}(z) = C_Z(z) e_{HFC}(z),$$

где  $K_{P_{HFC}} = 0,004$  В/А,  $K_{I_{HFC}} = 0,15$  В/(А × с). Сигнал на выходе регулятора  $u_{PWM}$  ограничен диапазоном  $\pm 1$  В, который определяется параметрами ШИМ-контроллера. Синтезированная система управления током в ОГУП обеспечивает максимально возможное быстродействие с учетом ограничений источника питания, обеспечивающего скорость нарастания тока в ОГУП до  $U_{max}/L = 58,8$  кА/с. Эта система управления использовалась в [8] для оценки области управляемости вертикального положения плазмы.

Синтез внешнего каскада проводился на массиве дискретных передаточных функций внутреннего каскада:  $Z(z) = G_n(z) I_{HFC\ ref}(z)$ ,

$$(4) \quad G_n(z) = P_n(z) A(z) C_{HFC}(z) \left( I + P_n(z) A(z) C_{HFC}(z) \right)^{-1},$$

где  $A(z) = U_{max} z^{-T_{PWM}/T_s}$  – линейная модель инвертора напряжения,  $U_{max} = 1$  кВ,  $T_{PWM}/T_s = 1$ ,  $n$  – индекс из (2). Таким образом, один регулятор будет удовлетворять заданным критериям качества и запасам рабочей устойчивости одновременно для двух моделей с переменными параметрами. В результате был синтезирован ПИД-регулятор с дискретной передаточной функцией

$$(5) \quad C_Z(z) = K_{P_Z} + K_{I_Z} \frac{T_s z}{z - 1} + K_{D_Z} \frac{z - 1}{T_s z}, \quad I_{HFC\ ref}(z) = C_{I_{HFC}}(z) e_Z(z),$$

где  $K_{P_Z} = 245,3276$  А/м,  $K_{I_Z} = 3,831$  кА/(м × с),  $K_{D_Z} = 0,366$  (А × с)/м. Сигнал на выходе регулятора  $I_{HFC\ ref}$  ограничен диапазоном  $\pm 2$  кА.

При синтезе регулятора реализован подход Anti-Windup [13] для предотвращения насыщения сигнала на выходе регулятора и появления вследствие этого внутренней неустойчивости в системе управления. В обоих регуляторах используется механизм клямпинга (clamping), при котором интегрирование прекращается, когда сигнал на выходе регулятора выходит за пределы установленного диапазона, а выход и вход интегратора имеют одинаковый знак.

На рис. 5 приведены результаты синтеза регулятора методом [11], показаны заданные функции формы и сингулярные числа дискретных переда-

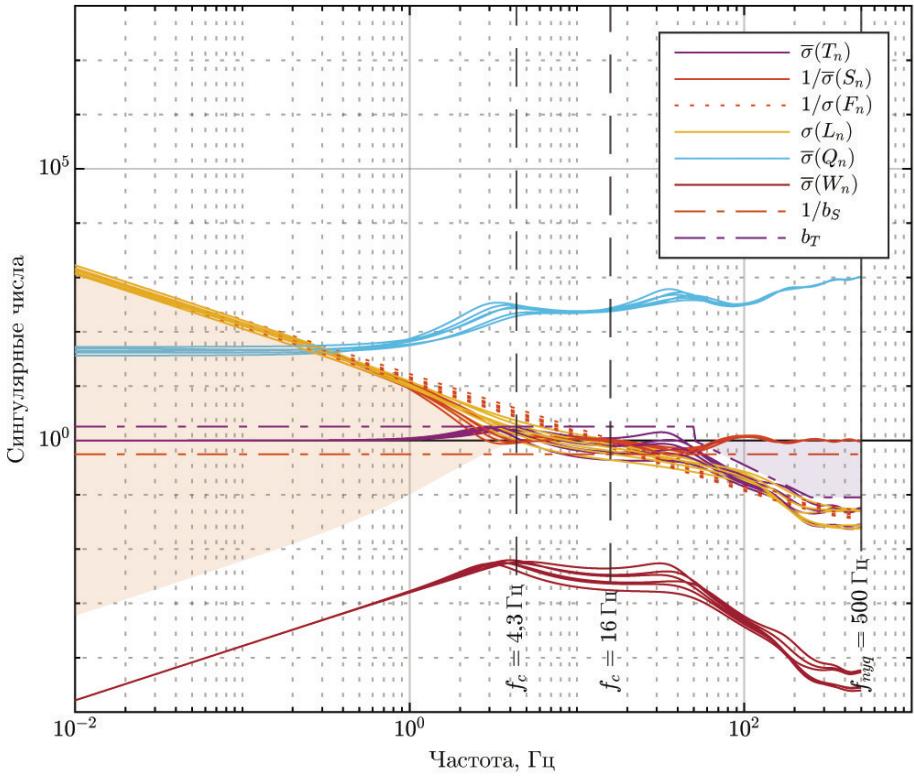


Рис. 5. АЧХ передаточных функций системы управления вертикальным положением плазмы.

точных функций синтезированной системы с моделями для временных токов [3,229; 3,299; 3,449] с модели разряда № 5121 и [2,479; 2,489; 2,5] с модели разряда № 5126.

Приведены АЧХ массива передаточных функций разомкнутой системы

$$(6) \quad L_n(z) = G_n(z)C_Z(z), \quad Z(z) = L_n(z)e_Z(z),$$

где  $G_n(z)$  – массив передаточных функций внутреннего каскада (4), а  $C_Z(z)$  – передаточная функция регулятора (5), массива функций чувствительности

$$S_n(z) = (I + L_n(z))^{-1}, \quad e_Z(z) = S_n(z)Z_{ref}(z),$$

массива дополнительных функций чувствительности

$$T_n(z) = L_n(z)S_n(z), \quad Z(z) = S_n(z)Z_{ref}(z),$$

массива функций статической и низкочастотной чувствительности

$$F_n(z) = (G_n(1)K_{IZ}T_s)^{-1}(z - 1), \text{ для малых } \omega, z = \exp(j\omega T_s),$$

массива Q-параметров

$$Q_n(z) = C_Z(z)S_n(z), \quad I_{HFC \ ref}(z) = Q_n(z)Z_{ref}(z)$$

и массива передаточных функций от внешнего входного возмущения до  $e_Z(z)$

$$W_n(z) = -S_n(z)G_n(z).$$

Заданные функции формы  $b_S$  и  $b_T$  ограничивают массивы передаточных функций  $S_n(z)$  и  $T_n(z)$  на всем частотном диапазоне, обеспечивая требуемую область робастности и качества управления замкнутой системы.

#### 4. Анализ робастной устойчивости каскада управления положением плазмы

Для вычисления запасов робастной устойчивости замкнутой системы использовался массив передаточных функций разомкнутой системы (6). На рис. 6 приведены запасы робастной устойчивости по амплитуде, а на рис. 7 – по запаздыванию.

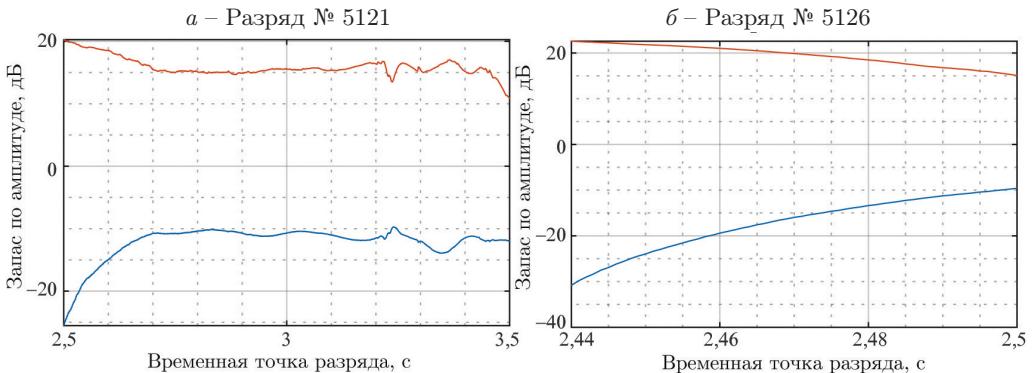


Рис. 6. Запас робастной устойчивости по амплитуде линейной модели замкнутой системы управления.

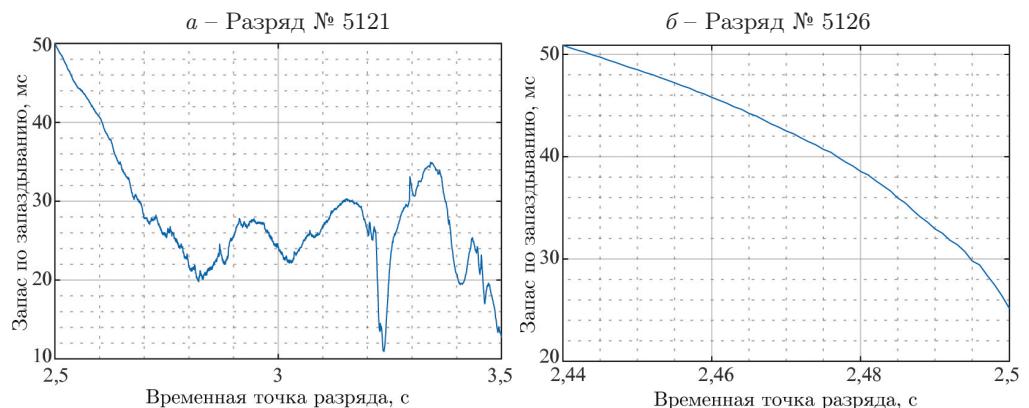


Рис. 7. Запас робастной устойчивости по запаздыванию линейной модели замкнутой системы управления.

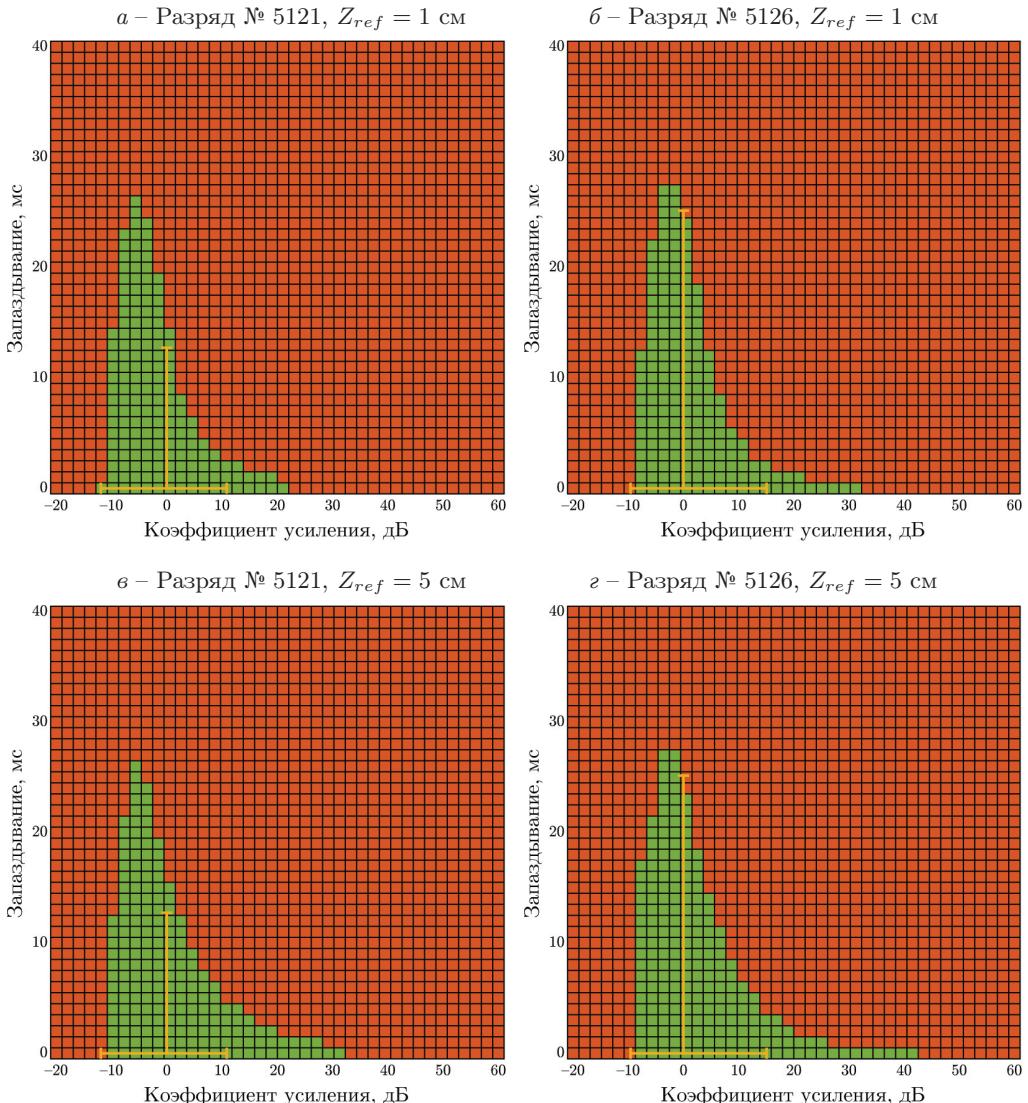


Рис. 8. Диаграмма устойчивости нелинейной системы управления.

Запас робастной устойчивости по запаздыванию (delay margin) вычислен по формуле [14]:

$$T_M = \frac{\phi_M}{\omega_c} \frac{\pi}{180^\circ},$$

где  $\phi_M$  – запас робастной устойчивости по фазе,  $\omega_c$  – частота среза АЧХ (частота, при которой АЧХ передаточной функции разомкнутой системы первый раз пересекает уровень 1). В наихудшем случае, который приходится на конец обоих разрядов, синтезированная система управления имеет удовлетворительный запас робастной устойчивости по амплитуде, составляющий  $\pm 10$  дБ

(рис. 6). Запас робастной устойчивости по запаздыванию (рис. 7) также превышает необходимые 10 мс на всем протяжении обоих разрядов.

На рис. 8 показаны диаграммы устойчивости нелинейной системы управления с полной моделью инвертора напряжения и моделью вертикального движения плазмы с переменными параметрами.

Варьировались запаздывание и коэффициент усиления в контуре обратной связи по вертикальному положению плазмы. Нелинейная система имеет ограниченную область управляемости, поэтому чем больше величина задающего воздействия  $Z_{ref}$ , тем меньше ее запасы робастной устойчивости. Зеленый цвет обозначает ситуации, когда система асимптотически устойчива, красный – когда не является. Желтым показаны запасы робастной устойчивости линейной модели в наихудшем случае (рис. 6 и 7).

## 5. Полунатурное моделирование

Полунатурное моделирование цифровой системы управления проводилось на стенде реального времени [15] в ИПУ РАН на двух целевых машинах реального времени (ЦМРВ). Структурная схема системы управления для полунатурного моделирования приведена на рис. 9.

Цифровое управляющее устройство реализовано на ЦМРВ «Регулятор», где, помимо регуляторов обоих каскадов управления, находится ШИМ-контроллер. Такой подход позволяет отказаться от использования ЦАП, что повышает надежность и быстродействие системы, управляющий сигнал  $u_{PWM}$  не преобразуется в аналоговый: не нужно тратить время на преобразование сигнала в ЦАП, не нужно обеспечивать помехозащищенность линии передачи аналогового сигнала  $u_{PWM}$ , сокращаются затраты на реализацию ШИМ-контроллера в аналоговом виде.

На ЦМРВ «Модель объекта» находятся модель вертикального движения плазмы и модель Н-моста с источником постоянного напряжения, которая реализована в Simscape Electrical. Шаг дискретизации регуляторов равен 1 мс, а шаг дискретизации ШИМ-контроллера, Н-моста и модели вертикального движения плазмы – 100 мкс. Шаги дискретизации отличаются в 10 раз для того, чтобы обеспечить изменение коэффициента заполнения ШИМ с шагом 10%. Если при внедрении системы управления будет необхо-

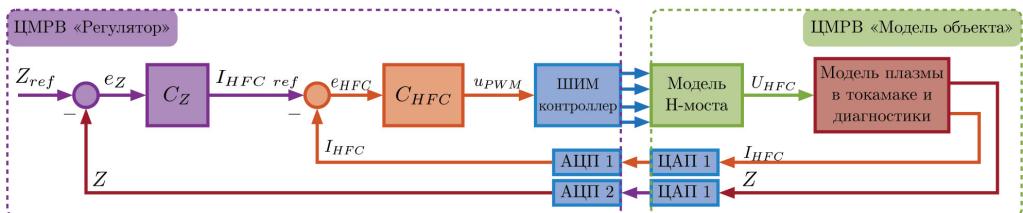


Рис. 9. Структурная схема цифровой каскадной системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ при проведении полунатурного моделирования.

димость обеспечить еще меньший шаг коэффициента заполнения ШИМ, то ШИМ-контроллер может быть реализован на ПЛИС.

Концепция полунатурного моделирования систем управления предполагает, что часть системы является реальной, тогда как другая часть представлена моделью. В данном случае все компоненты управляющего устройства реализованы на ЦМРВ «Регулятор». Для того чтобы данное управляющее устройство было функционально аналогичным тому, которое будет использоваться в реальной системе управления (рис. 2), на выходе ЦМРВ «Модель объекта» находятся два ЦАП.

### 5.1. Моделирование системы управления в рабочем режиме

Результаты полунатурного моделирования синтезированной системы в рабочем режиме с задающим воздействием на вертикальное положение плазмы в 5 см приведены на рис. 10. Помимо переходного процесса по вертикальному положению плазмы и электрических сигналов источника питания (напряжение, ток и мощность) приведено изменение неустойчивого полюса модели для каждого разряда. Синтезированный регулятор обеспечивает приемлемое ка-

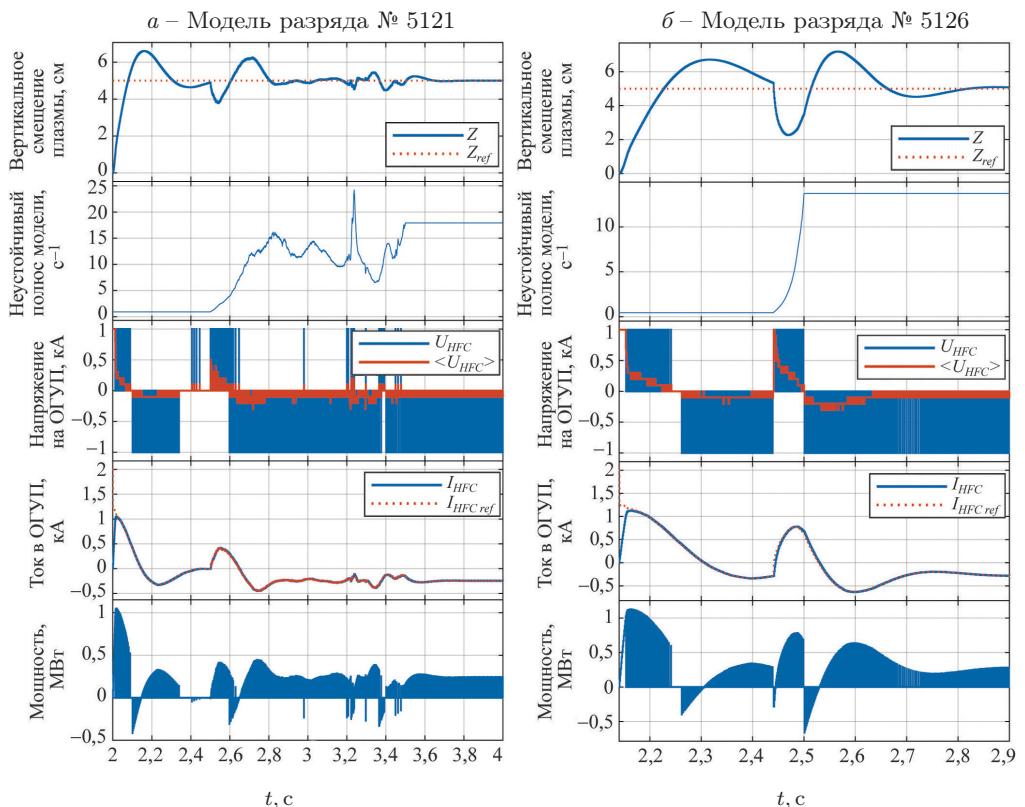


Рис. 10. Моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ. Задающее воздействие по вертикальному смещению плазмы  $Z_{ref} = 5$  см.

чество управления одновременно для двух моделей вертикального движения плазмы. Требуемая мощность инвертора напряжения не превышает 1,2 МВт при максимально возможной мощности 2 МВт.

## 5.2. Моделирование системы управления в экстремальных режимах

На рис. 11 приведены результаты полунатурного моделирования с максимальным вертикальным смещением плазмы, при котором замкнутая система сохраняет устойчивость и приемлемое качество управления, а на рис. 12 – с максимально возможным запаздыванием в контуре обратной связи по вертикальному положению плазмы. Смещение плазмы в токамаке КТМ более чем на 10 см по вертикали на практике не требуется, так как при этом произойдет столкновение сепараторы плазмы с лимитером токамака, следовательно, синтезированная система управления позволяет осуществлять управление вертикальным положением плазмы в КТМ во всем возможном

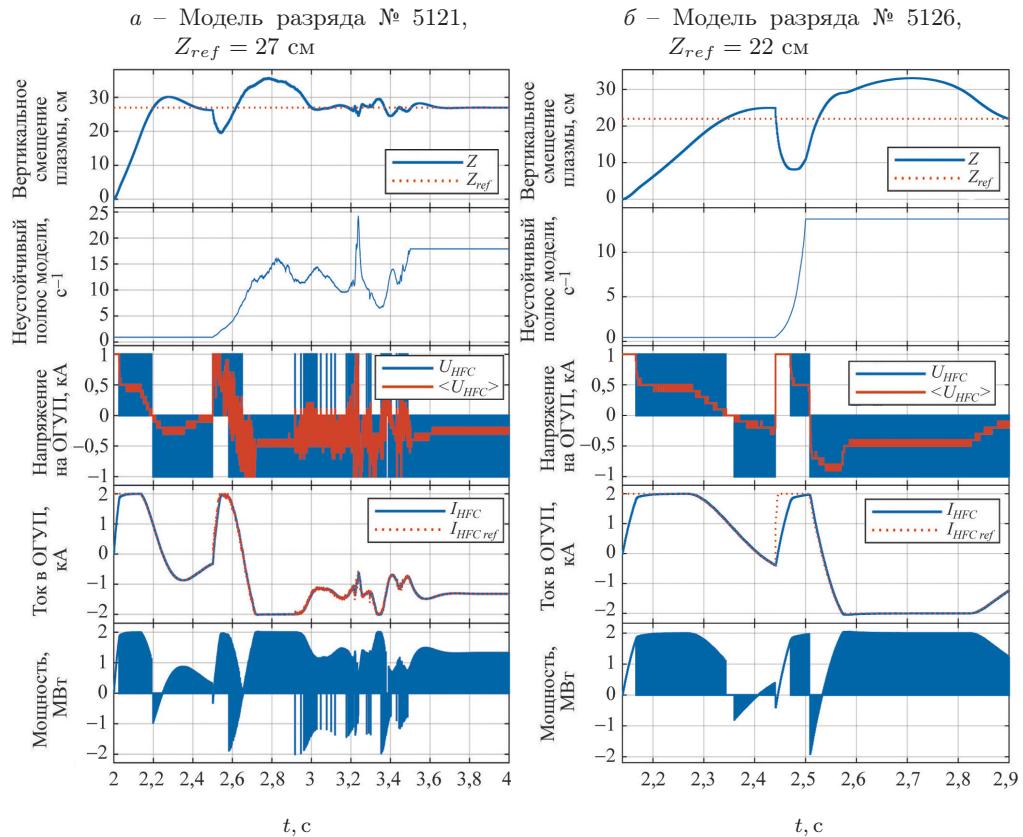
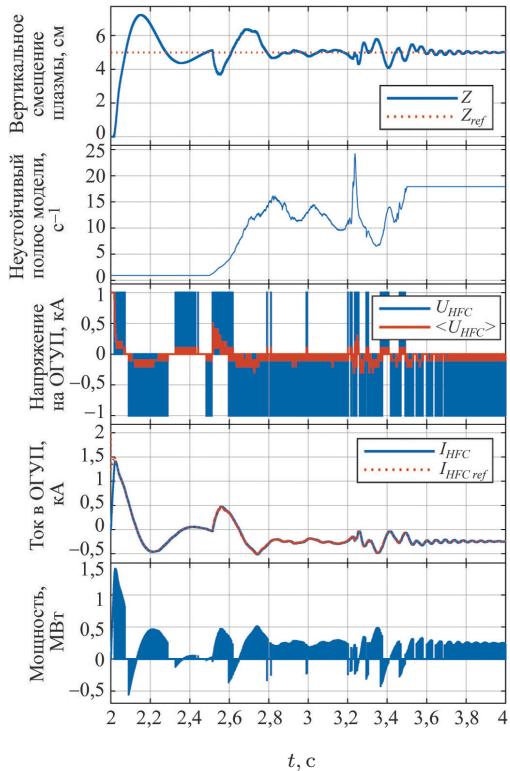


Рис. 11. Моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ с максимально возможным задающим воздействием на вертикальное положение плазмы.

*a* – Модель разряда № 5121,  
запаздывание 14 мс



*b* – Модель разряда № 5126,  
запаздывание 23 мс

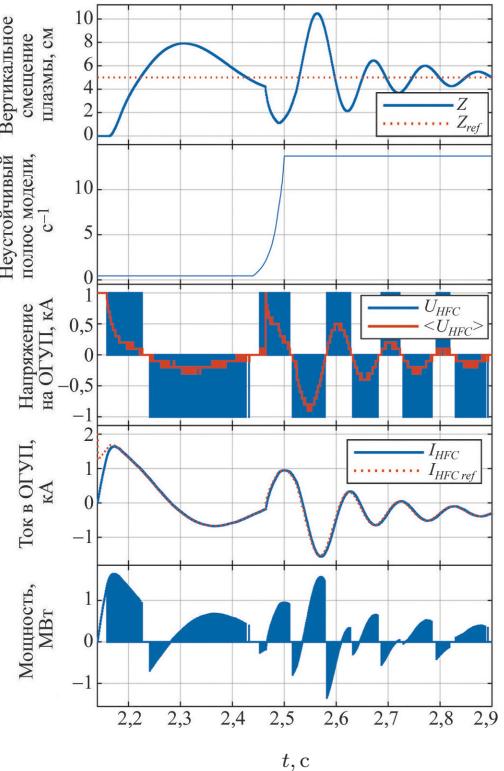


Рис. 12. Моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ с максимально возможным запаздыванием в контуре обратной связи.

диапазоне. В обоих случаях величина временного запаздывания превышает необходимую величину в 10 мс.

В [8] была рассчитана верхняя оценка области управляемости вертикального положения плазмы, для разряда № 5121 она составляет 23 см, а для разряда № 5126 – 26 см. Фактическая область управляемости для разряда № 5121 на 4 см больше полученной ранее оценки, это объясняется тем, что в [8] для оценки использовалась модель для одной временной точки разряда с наибольшим значением неустойчивого полюса, которая не находится в конце разряда, и возможная неустойчивость не успевает развиться. Этим же объясняется тот факт, что полученное максимальное запаздывание в 14 мс (рис. 12, *a*) превышает минимальный запас робастной устойчивости по запаздыванию (рис. 7, *a*).

## 6. Заключение

Работоспособность системы управления продемонстрирована полунатурным моделированием на двух моделях вертикального движения плазмы, рассчитанных по экспериментальным данным разрядов с различным сценарием.

При моделировании использовалась полная модель инвертора напряжения в режиме ШИМ, учитывая ограничение по мощности. При достаточной верификации используемых моделей, полунаатурное моделирование позволяет гарантировать работоспособность системы управления при внедрении в практику экспериментов.

Максимально возможное вертикальное смещение плазмы в синтезированной системе с инвертором напряжения в режиме ШИМ составляет 27 см на модели разряда № 5121 и 22 см на модели разряда № 5126, что превышает реально необходимый диапазон в 10 см. Максимально возможное транспортное запаздывание в контуре обратной связи по вертикальному положению плазмы, при котором сохраняется устойчивость и приемлемое качество управления, составляет 14 мс на модели разряда № 5121 и 23 мс на модели разряда № 5126, что также больше необходимой величины в 10 мс.

В данной работе был использован робастный подход, когда синтезируется один регулятор, удовлетворяющий критериям качества управления и запасам робастной устойчивости одновременно для нескольких моделей вертикального движения плазмы. Возможен и другой, адаптивный подход, когда регулятор настраивается для конкретного сценария или когда его параметры меняются в течение разряда. Адаптивный подход позволяет получить лучшее качество управления, так как в случае робастного подхода качество управления ограничено моделью объекта в «наихудшем случае». В данной задаче робастный подход предпочтительнее адаптивному, поскольку не требует перенастройки регулятора при изменении сценария плазменного разряда.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Сравнение цифровой системы управления с дискретизированной аналоговой

Метод синтеза [11] позволяет синтезировать как дискретные, так и непрерывные системы управления. Распространен подход, когда в цифровой системе управления применяется дискретизированный регулятор. К примеру, в [16–19] для управления плазмой в токамаке были синтезированы непрерывные регуляторы. Для демонстрации недостатков такого подхода проведено следующее сравнение.

На рис. 13,а приведен результат синтеза непрерывного регулятора на модели объекта в непрерывном времени с теми же функциями формы, которые использовались для синтеза дискретного регулятора в разделе 3. Функции формы в методе синтеза [11] задают качество управления и запасы робастной устойчивости замкнутой системы, поэтому синтезированная аналоговая система управления имеет примерно одинаковые с цифровой системой, полученной ранее в разделе 3, качество управления и запасы робастной устойчивости.

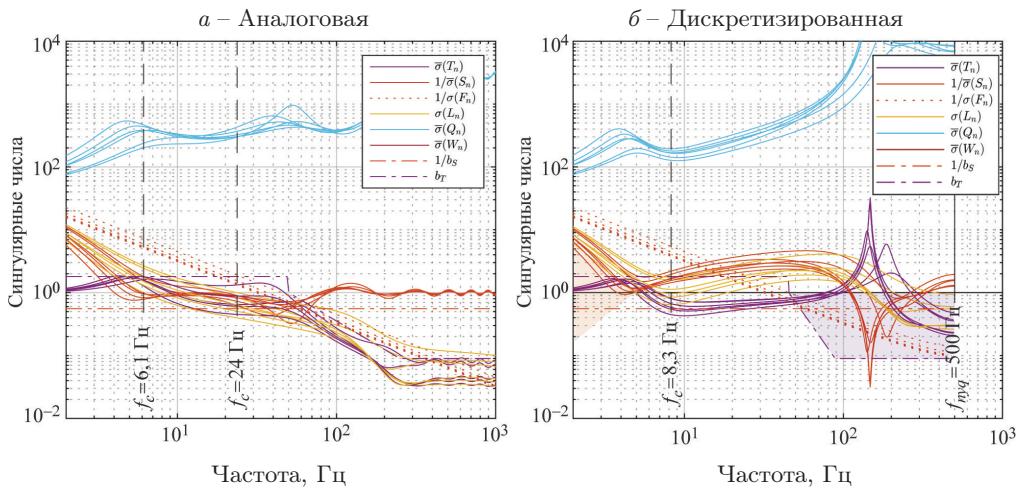


Рис. 13. АЧХ передаточных функций аналоговой и дискретизированной систем управления вертикальным положением плазмы.

Синтезированный аналоговый ПИД-регулятор задан передаточной функцией

$$\hat{C}_Z(s) = \hat{K}_{P_Z} + \hat{K}_{I_Z} \frac{1}{s} + \hat{K}_{D_Z} \frac{s}{\tau s + 1},$$

где  $\hat{K}_{P_Z} = 266,9$  А/м,  $\hat{K}_{I_Z} = 10,3$  кА/(м × с),  $\hat{K}_{D_Z} = 0,53$  (А × с)/м,  $\tau = 100$  мкс,  $s$  – переменная преобразования Лапласа. После дискретизации этого регулятора методом ЗОН были вычислены АЧХ передаточных функций дискретизированной системы (рис. 13, б). Дискретизированная система управления является неустойчивой.

В [20] показано, что дискретизация может несущественно влиять на деградацию качества управления и запасов робастной устойчивости системы при условии, если полоса пропускания замкнутой системы меньше частоты дискретизации хотя бы в 30 раз. Полоса пропускания замкнутой системы управления меняется в зависимости от временной точки разряда от 10 до 79 Гц, из чего следует, что шаг дискретизации  $T_s = 1$  мс почти в 2,5 раза больше, чем необходимо для сохранения качества управления при дискретизации. Кроме того, модель объекта управления не является минимально-фазовой, поскольку она содержит звенья запаздывания, что также вносит вклад в потерю устойчивости системы управления при дискретизации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mitrishkin Y.V., Korenev P.S., Prokhorov A.A., et al. Plasma Control in Tokamaks. Part 1. Controlled thermonuclear fusion problem. Tokamaks. Components of control systems // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2018. V. 18. No. 2. P. 26–52.
2. Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M., Pavlova E.A., et al. Plasma Control in Tokamaks. Part 2. Magnetic plasma control systems // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2018. V. 18. No. 3. C. 39–78.

3. *Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M., Konkov A.E., et al.* Plasma Control in Tokamaks. Part 3.1. Plasma Magnetic Control Systems in ITER // *Advanc. Syst. Sci. Appl.* 2020. V. 20. No. 2. P. 82–97.
4. *Mitrishkin Y.V., Kartsev N.M., Konkov A.E., et al.* Plasma Control in Tokamaks. Part 3.2. Simulation and Realization of Plasma Control Systems in ITER and Constructions of DEMO // *Advanc. Syst. Sci. Appl.* 2020. V. 20. No. 3. P. 136–152.
5. *Ariola M., Pironti A.* Magnetic Control of Tokamak Plasmas. Springer International Publishing, 2016.
6. *Korotkov V.A., Azizov E.A., Cherepnin Yu.S., et al.* Kazakhstan tokamak for material testing conceptual design and basic parameters // *Fusion Engineering and Design*. 2001. V. 56. P. 831–835.
7. *Зарва Д.Б., Дериглазов А.А., Батырбеков Э.Г. и др.* Электротехнический комплекс системы импульсного электропитания токамака КТМ // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2018. Т. 41. № 2. С. 59–70.
8. *Коренев П.С., Коньков А.Е., Чектыбаев Б.Ж. и др.* Оценка области управляемости вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ с катушкой НFC // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2024. Т. 47. № 3.
9. *Mihalic F., Trantic M., Hren A.* Hardware-in-the-Loop Simulations: A Historical Overview of Engineering Challenges. *Electronics*. 2022. V. 11. P. 2462.
10. *Батырбеков Э.Г., Таңжисибаева И.Л., Бакланов В.В., и др.* Исследования в области управляемого термоядерного синтеза в Республике Казахстан // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2024. Т. 47. № 2. С. 15–22.
11. *Konkov A.E., Mitrishkin Y.V.* Synthesis Methodology for Discrete MIMO PID Controller with Loop Shaping on LTV Plant Model via Iterated LMI Restrictions // *Mathematics*, MDPI Publ. 2024. V. 12. No. 6. P. 810.
12. *Konkov A.E., Mitrishkin Y.V.* Comparison Study of Power Supplies in Real-Time Robust Control Systems of Vertical Plasma Position in Tokamak // *IFAC-PapersOnLine*. 2022. V. 55. No. 9. P. 327–332.
13. *Grimm G., Hatfield J., Postlethwaite I., et al.* Antiwindup for stable linear systems with input saturation: An LMI-based synthesis // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2003. V. 48. No. 9. P. 1509–1525.
14. *Astrom K., Hagglund T.* Advanced PID control. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
15. *Митришкін Ю.Б., Коньков А.Е., Коренев П.С.* Цифровой моделирующий стенд реального времени для управления плазмой в токамаках // Материалы XVI Международной конференции Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого), 2022. С. 286–289.
16. *Mitrishkin Y.V., Pavlova E.A., Kuznetsov E.A., Gaydamaka K.I.* Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // *Fusion Engineering and Design*. 2016. V. 108. P. 35–47.
17. *Mitrishkin Y.V., Prokhorov A.A., Korenev P.S., Patrov M.I.* Hierarchical robust switching control method with the Improved Moving Filaments equilibrium reconstruction code in the feedback for tokamak plasma shape // *Fusion Engineering and Design*. 2019. V. 138. P. 138–150.

18. Круэжков В.И. Настройка системы управления положением плазмы и полоидальными токами токамака Глобус-М2 и реализация на стенде реального времени // Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва). Москва–Звенигород: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2021. С. 704–710.
19. Mitrishkin Y.V., Korenev P.S., Konkov A.E., Kartsev N.M., Smirnov I.S. New horizontal and vertical field coils with optimised location for robust decentralized plasma position control in the IGNITOR tokamak // Fusion Engineering and Design. 2022. Vol. 174. P. 112993.
20. Franklin G., Powell J.D., Workman M.L. Digital Control of Dynamic Systems. Ellis-Kagle Press, 1997.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.*

Поступила в редакцию 11.07.2024

После доработки 13.09.2024

Принята к публикации 20.09.2024

# *Интеллектуальные системы управления, анализ данных*

© 2025 г. И.А. ЧИСТЯКОВ ([chistyakov.ivan@yahoo.com](mailto:chistyakov.ivan@yahoo.com))  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

## **О ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ<sup>1</sup>**

Рассматривается задача целевого управления объектом, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений специального вида, где присутствуют нелинейные члены, зависящие от фазовых переменных. На примере алгоритма Proximal Policy Optimization (PPO) показано, что с помощью обучения с подкреплением можно получить позиционную стратегию управления, решающую задачу приближенно. Эта стратегия далее аппроксимируется кусочно-аффинным управлением, для которого на основе метода динамического программирования строится гарантированная априорная оценка попадания траектории в целевое множество. Для этого осуществляется переход к вспомогательной задаче для кусочно-аффинной системы с помехой и вычисляется кусочно-квадратичная оценка функции цены как приближенное решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, динамическое программирование, принцип сравнения, линеаризация, кусочно-квадратичная функция цены, обучение с подкреплением, алгоритм PPO, множество разрешимости.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010057, **EDN:** JQKKTQ

### **1. Введение**

Рассматривается задача целевого управления на фиксированном конечном интервале времени для нелинейной системы дифференциальных уравнений. Такая задача тесно связана с построением множества разрешимости, содержащего все стартовые позиции, из которых можно решить задачу синтеза управлений. Для аппроксимации этого множества применяются различные методы на основе анализа соответствующего дифференциального включения [1–3] или на основе уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) [4–7]. Указанные подходы применимы для широкого класса нелинейных систем, но

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

требуют больших вычислительных затрат. В последнее время активно разрабатываются алгоритмы на основе машинного обучения, которые позволяют как приблизить решение уравнения ГЯБ [8, 9], так и осуществить поиск управления напрямую [10]. Последние, однако, не дают возможность получить какие-либо гарантированные оценки.

В данной работе предлагается понизить вычислительную сложность решения уравнения ГЯБ за счет поиска приближенного решения в классе кусочно-квадратичных функций. Развиваются идеи, изложенные в [11–13]: используется метод, основанный на кусочной линеаризации правых частей дифференциальных уравнений на совокупности симплексов и переходе к задаче управления для системы с кусочно-линейной динамикой и ограниченной помехой (погрешностью линеаризации). Применение принципа сравнения [14, 15] позволяет вывести уравнения на коэффициенты искомой функции цены, нулевое множество уровня которой является внутренней оценкой множества разрешимости исходной нелинейной системы.

Приближенное решение уравнения ГЯБ упомянутым способом сопровождается построением субоптимальной управляющей стратегии. Ранее было предложено искать управление в виде непрерывной кусочно-аффинной функции [13], определяемой значениями в вершинах симплексов разбиения. При этом значения в вершинах следует выбирать таким образом, чтобы минимизировать производную функции цены вдоль траектории движения. Однако с учетом отсутствия гладкости построенной функции цены приходится применять дополнительные эвристики, увеличивающие погрешность метода. В настоящей работе поставлена цель продемонстрировать, что в качестве управлений в вершинах также могут быть использованы результаты других алгоритмов, в частности предлагается применять обучение с подкреплением [16, 17]. Показано, что если выбирать значения управлений на основе нейросетевой модели, то полученная оценка функции цены способна принимать меньшие значения в начальный момент времени, что априорно гарантирует попадание в меньшую окрестность целевого множества.

Отметим, что алгоритмы обучения с подкреплением также подразумевают построение функции цены, которая является оценкой результирующей выгоды из каждой возможной позиции (в данном случае речь идет о расстоянии до целевого множества в конечный момент времени), или ее аналогов. Но даже при удачно подобранном управлении такая оценка не является гарантированной и может быть неточной. В то же время подход, указанный в настоящей работе, позволяет приблизить любую наперед заданную стратегию кусочно-аффинным управлением, для которого полученная оценка будет гарантированной. Это может быть особенно полезно в случае наличия дополнительной помехи, когда вычисления траекторий из различных начальных точек оказывается недостаточно, чтобы оценить все возможные варианты поведения системы.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \dot{x} = \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1], x \in \Omega,$$

где  $\Omega$  – компактное множество в пространстве  $\mathbb{R}^{n_x}$ , достаточно большое, чтобы все рассматриваемые траектории системы (1) оставались в  $\Omega$  при  $t \in [t_0, t_1]$ ; будем полагать, что границей  $\Omega$  является многогранник. Нелинейные вектор-функция  $\mathbf{f}(t, x)$  и матричная функция  $\mathbf{g}(t, x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  непрерывны по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемы по  $x$ . Начальный и конечный моменты времени  $t_0, t_1$  фиксированы. В каждый момент времени вектор управления  $u$  должен принадлежать компактному выпуклому множеству  $\mathcal{P}$ :

$$(2) \quad u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}.$$

Требуется построить непрерывную управляющую стратегию в позиционной форме  $u = u(t, x)$ , которая переводит систему (1) из заданной точки  $x_0$  в момент времени  $t_0$  в как можно меньшую окрестность компактного целевого множества  $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$  в момент времени  $t_1$ . Далее через  $u(\cdot)$  будем обозначать позиционные управление. Таким образом, должно выполняться

$$x(t_1; t_0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1 + B_\varepsilon(0),$$

где  $x(t_1; t_0, x_0)|_{u(\cdot)}$  – точка траектории системы в момент времени  $t_1$ , выпущенной в момент  $t_0$  из точки  $x_0$  при замыкании этой системы управлением  $u(\cdot)$ ;  $B_\varepsilon(0)$  – шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в нуле, а значение  $\varepsilon \geq 0$  необходимо минимизировать. Будем также считать, что целевое множество представимо в виде  $\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq 0\}$ , где  $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Кроме того, необходимо построить множество разрешимости  $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$  [15], т.е. совокупность всех векторов  $x \in \Omega$ , для каждого из которых существует управление  $u(\cdot)$ , удовлетворяющее ограничению (2) и переводящее систему из позиции  $\{t, x\}$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ) в целевое множество:  $x(t_1; t, x)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1$ . Однако поскольку задача построения точного множества разрешимости является сложной, далее ограничимся поиском внутренних оценок этого множества.

## 3. Система с кусочно-аффинной динамикой

*Симплексом* [18] размерности  $n$  с вершинами  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$  при условии, что векторы  $x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_1$  являются линейно независимыми, называется множество

$$S^n = \left\{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

При этом вектор барицентрических координат  $\alpha(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})^T$  однозначно определяет положение любой точки  $x$  внутри симплекса. Кроме того,

существует матрица  $\tilde{H}$  [11] такая, что барицентрические координаты  $\alpha(x)$  линейно выражаются через  $x$ :  $\alpha = \tilde{H}(x^T, 1)^T$ .

Пусть задано разбиение множества  $\Omega$  на  $N$  симплексов  $\Omega^{(i)}$ . При этом будем считать, что любые два симплекса либо не пересекаются, либо пересекаются только по какой-либо их общей грани размерности меньшей  $n_x$ . В практических задачах, имея произвольный набор вершин, конкретное разбиение можно реализовать, например, с помощью триангуляции Делоне [19, 20], которая эффективно вычисляется за счет построения выпуклой оболочки точек в  $(n_x + 1)$ -мерном пространстве [21].

Далее верхним индексом  $(i)$  будем обозначать соответствие вектора, матрицы или функции симплексу  $\Omega^{(i)}$ . В частности, обозначим вершины симплексов как  $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , где  $i = \overline{1, N}$ . Отметим, однако, что каждая такая вершина может являться вершиной сразу нескольких симплексов.

В работах [11–13] был предложен способ построения непрерывной кусочно-аффинной аппроксимации правой части системы (1), существенно использующий разбиение множества  $\Omega$  на симплексы. Было показано, как выбрать матрицы  $A^{(i)}, B^{(i)}$  и векторы  $f^{(i)}$  так, что сразу для всех  $u \in \mathcal{P}$  будет справедливо представление

$$(3) \quad \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + f^{(i)}(t) + v^{(i)}(t, x, u), \quad x \in \Omega^{(i)},$$

где  $v^{(i)}$  – погрешность локальной линеаризации. Эта погрешность является ограниченной, и для нее существует оценка на основе разложения компонент вектор-функций  $\mathbf{f}(t, x)$  и  $\mathbf{g}(t, x)$  по формуле Тейлора, не зависящая от конкретного значения  $x$  во множестве  $\Omega^{(i)}$  и управления. Таким образом, все возможные значения  $v^{(i)}$  можно ограничить некоторым эллипсоидом  $\mathcal{Q}^{(i)}(t)$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}^{(i)}(t) &= \mathcal{E}(0, Q^{(i)}(t)) = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \langle x, (Q^{(i)})^{-1}x \rangle \leqslant 1\}, \\ Q^{(i)} &= (Q^{(i)})^T > 0. \end{aligned}$$

*Замечание 1.* Если в системе (1) будет дополнительно присутствовать аддитивный член в виде неизвестной ограниченной функции (помехи), то он также может быть учтен при линеаризации системы за счет увеличения эллипсоидов  $\mathcal{Q}^{(i)}(t)$  и смещения их центров.

Удобно перейти к расширенному пространству переменных, где вектор  $\tilde{x}$  получается добавлением вспомогательной координаты с фиксированным значением, равным единице:  $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$ . Тогда на основе (3) в расширенном пространстве переменных можно записать следующую кусочно-линейную систему дифференциальных уравнений с автономными переключениями [22, с. 5–9]:

$$(5) \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}(t)u + \tilde{C}v^{(i)}, \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$\tilde{A}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} A^{(i)}(t) & f^{(i)}(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} B^{(i)}(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_x \times n_x} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} \end{bmatrix},$$

где величина  $v^{(i)}$  интерпретируется как помеха. Будем называть помеху допустимой, если она является измеримой функцией от времени и, кроме того, в каждый момент времени удовлетворяет ограничению  $v^{(i)}(t) \in \mathcal{Q}^{(i)}(t)$ . Индекс  $i = i(x(t))$  в (5) является функцией состояния системы в момент времени  $t$ , однако для краткости записи аргументы этой функции будем опускать.

## 4. Функция цены

### 4.1. Общие сведения

Рассмотрим вспомогательную функцию цены:

$$(6) \quad \bar{V}(t, x) = \min_{u(\cdot)} \{\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) : x(t) = x\},$$

где  $x(\cdot)$  – траектория нелинейной системы (1), выпущенная в прямом времени из начальной позиции  $\{t, x\}$ ,  $x \in \Omega$ , при фиксированном позиционном управлении  $u(\cdot)$ . С помощью функции цены можно построить внутреннюю оценку множества разрешимости [15]:

$$(7) \quad \mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : \bar{V}(t, x) \leq 0\}.$$

Наряду с (7) будем рассматривать оценку окрестности множества разрешимости:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon(t, t_1, \mathcal{X}_1) &= \{x \in \Omega : \bar{V}(t, x) \leq \varepsilon\}, \\ \mathcal{W}_\varepsilon(t, t_1, \mathcal{X}_1) &= \{x \in \Omega \mid \exists u(\cdot) : \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1; t, x)|_{u(\cdot)}) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Также известно, что в точке дифференцируемости  $(t, x)$ , где  $t < t_1$ ,  $x \in \Omega$ , функция  $\bar{V}(t, x)$  удовлетворяет попутному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана следующего вида:

$$(8) \quad \min_{u \in \mathcal{P}} \bar{V}' \left( t, x; \left( 1, (\mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u)^T \right)^T \right) = 0,$$

где  $\bar{V}'(t, x; \ell)$  – производная функции  $\bar{V}(t, x)$  в точке  $(t, x)$  по направлению  $\ell \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ . В конечный момент времени справедливо соотношение  $\bar{V}(t_1, x) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ . Функция  $\bar{V}(t, x)$  может не быть непрерывно дифференцируемой, а решение уравнения (8) следует понимать в обобщенном смысле [23]. Однако можно заменить решение  $\bar{V}(t, x)$  такой кусочно-квадратичной функцией, что уравнение (8) будет выполняться приближенно. Эта функция будет найдена далее на основе рассмотрения кусочно-линейной системы (5).

### 4.2. Кусочно-квадратичная функция

В каждой вершине  $g_l^{(i)}$  каждого симплекса  $\Omega^{(i)}$  определим аффинную по  $x$  функцию  $\langle k_l^{(i)}(t), \tilde{x} \rangle$ , где при любом фиксированном  $t \in [t_0, t_1]$  вектор  $k_l^{(i)} \in$

$\in \mathbb{R}^{n_x+1}$  – это вектор неизвестных параметров. Тогда для каждого симплекса  $\Omega^{(i)}$  можно определить матрицу параметров, структура которой соответствует набору вершин  $g_1^{(i)}, \dots, g_{n_x+1}^{(i)}$ :

$$K^{(i)}(t) = \left[ k_1^{(i)}(t), \dots, k_{n_x+1}^{(i)}(t) \right] \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}.$$

Определим кусочно-квадратичную функцию следующим образом:

$$(9) \quad V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle, \quad \tilde{x} = (x^T, 1)^T, \quad x \in \Omega^{(i)}.$$

Формула (9) соответствует интерполяции рассмотренных аффинных функций в вершинах симплексов:

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle = \langle (K^{(i)}(t))^T \tilde{x}, \alpha^{(i)}(x) \rangle = \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle k_l^{(i)}(t), \tilde{x} \rangle.$$

Отметим, поскольку функция (9) определена для расширенного пространства переменных  $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$ , в таком виде может быть представлена произвольная кусочно-квадратичная функция, заданная на множестве симплексов  $\Omega^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Будем использовать кусочно-аффинные управления вида

$$(10) \quad u(t, x) = Y^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) y_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_u},$$

где матрица  $Y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+1)}$  составлена из столбцов  $y_k^{(i)}(t) \in \mathcal{P}$  – значений управлений в вершинах симплекса  $\Omega^{(i)}$ . Эти значения будут выбраны далее. При этом величины  $y_k^{(i)}(t)$ , соответствующие одной и той же вершине в различных симплексах, будут совпадать, т.е. управление  $u(t, x)$  непрерывно по  $x$ . Заметим, что в силу выпуклости множества  $\mathcal{P}$  достигается условие  $u(t, x) \in \mathcal{P}$ .

Запишем производную функции  $V^{(i)}(t, \tilde{x})$  по направлению  $\ell = (\ell_t, \ell_x) \in \mathbb{R}^{n_x+2}$ :

$$(11) \quad \frac{dV^{(i)}}{d\ell} = \ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \ell_x, [K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (\tilde{H}^{(i)})^T (K^{(i)})^T] \tilde{x} \rangle,$$

В [13] было показано, что при  $\ell = (\ell_t, \ell_x)^T$ , где  $\ell_t = 1$ ,  $\ell_x = \tilde{A}^{(i)} \tilde{x} + \tilde{B}^{(i)} u + \tilde{C} v^{(i)}$ , справедлива оценка

$$(12) \quad \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle,$$

где матрица  $Z^{(i)}$  известна и выражается через коэффициенты  $K^{(i)}(t)$ , коэффициенты  $\tilde{A}^{(i)}(t)$ ,  $\tilde{B}^{(i)}(t)$ ,  $\tilde{C}$  кусочно-линейной системы (5), а также матрицы  $Y^{(i)}(t)$ , задающие управление в вершинах разбиения. Полученная оценка справедлива для любых допустимых помех  $v^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}(t)$ .

Приравнивая выражения  $\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}$  к нулевой матрице, получим систему матричных дифференциальных уравнений, которая и задает изменение функции  $V^{(i)}(t, \tilde{x})$  с течением времени:

$$(13) \quad \dot{K}^{(i)}(t) + Z^{(i)}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда из (12)–(13) следует, что вдоль любой траектории системы (5) в каждом симплексе  $\Omega^{(i)}$  производная функции будет не возрастать. Далее будет показано, как модифицировать уравнения (13), чтобы полученная функция  $V^{(i)}(t, \tilde{x})$  была непрерывной и, таким образом, невозрастание производной было бы обеспечено и при переходе через границу симплекса. Это может быть использовано для построения гарантированной априорной оценки отклонения конечной точки траектории от целевого множества.

#### 4.3. Границные условия

Для решения системы (13) необходимо задать граничные условия в конечный момент времени  $t = t_1$ . Для этого необходимо построить кусочно-квадратичную оценку сверху функции  $\phi_{\mathcal{X}_1}$ , представив которую в виде (9), можно определить  $K^{(i)}(t_1)$ . В частности, если границей множества  $\mathcal{X}_1$  является гиперповерхность второго порядка, то справедливо представление  $\phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K} \tilde{x} \rangle$  при некоторой матрице  $\hat{K} = \hat{K}^T$ . Следовательно, в конечный момент времени в каждом симплексе можно выбрать значения параметров функции  $V^{(i)}(t_1, \tilde{x})$ , равные

$$(14) \quad K^{(i)}(t_1) = \hat{K}(\tilde{H}^{(i)})^{-1}.$$

В общем случае для любой дважды дифференцируемой функции  $\phi_{\mathcal{X}_1}$  можно сконструировать кусочно-аффинную оценку сверху [12], которая является частным случаем кусочно-квадратичной и приводит к условиям типа (14). При этом функция  $V^{(i)}(t, \tilde{x})$  в конечный момент времени  $t = t_1$  будет непрерывной по  $\tilde{x}$  на всем множестве  $\Omega \times \{1\}$ .

#### 4.4. Сглаживание функции

Отметим, что при решении задачи Коши (13)–(14) функция  $V^{(i)}(t, x)$ , определяемая выражением (9), будет иметь разрывы на границах симплексов. Это связано с тем, что каждый столбец матрицы  $K^{(i)}(t)$  определяет коэффициенты кусочно-аффинной функции  $\langle k_l^{(i)}(t), \tilde{x} \rangle$  в некоторой вершине разбиения  $g_l$ , но каждая такая точка, вообще говоря, является вершиной сразу нескольких симплексов. Поскольку матрицы  $Z^{(i)}$  в оценке (11) для каждого симплекса строятся независимо друг от друга, то значения производных  $\dot{k}_l^{(i)}(t)$  определяются сразу несколькими несовместными условиями.

Таким образом, требуется модифицировать оценку (11), чтобы полученная функция  $V^{(i)}(t, x)$  была непрерывна. Предложим альтернативный способ оценки матриц  $Z^{(i)}$ , нежели в [13].

Представим (13) в векторной форме, т.е. запишем дифференциальное уравнение для каждого столбца матрицы  $K^{(i)}$ :

$$(15) \quad \dot{k}_l^{(i)}(t) + z_l^{(i)}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, n_x + 1},$$

где  $z_l^{(i)}$  – соответствующий столбец матрицы  $Z^{(i)}$ . Это позволяет переписать оценку (12) в следующем виде:

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) &\leq \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, Z^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle \leq \\ &\leq \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, Z^{(i)} \alpha^{(i)}(x) \rangle = \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, z_l^{(i)} \rangle. \end{aligned}$$

При каждом фиксированном  $t \in [t_0, t_1]$  определим в каждой вершине  $g_l^{(i)}$  следующую вспомогательную задачу линейного программирования относительно нового неизвестного вектора  $\hat{z}_l^{(i)}$ :

$$(17) \quad \begin{cases} \langle \hat{z}_l^{(i)}, \tilde{g}_l^{(i)} \rangle \rightarrow \min, \\ \langle \hat{z}_l^{(i)}, \tilde{g}_k^{(j)} \rangle \geq \langle z_{\nu(i,l,j)}^{(j)}, \tilde{g}_k^{(j)} \rangle \quad \forall j : g_l^{(i)} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}, k = \overline{1, n_x + 1}, \end{cases}$$

где  $\nu(i, l, j)$  – локальный номер вершины  $g_l^{(i)} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$  в симплексе  $\Omega^{(j)}$ .

Из решений  $\hat{z}_l^{(i)}$  аналогичным образом составим матрицы  $\hat{Z}^{(i)}$ . Учитывая ограничения задачи (17) и линейность рассматриваемых функций, можем продолжить неравенство (16):

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) &\leq \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle \leq \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, z_l^{(i)} \rangle \leq \\ &\leq \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, \hat{z}_l^{(i)} \rangle = \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что решения задач (17), соответствующие одной и той же вершине в различных симплексах  $\Omega^{(i)}$ , будут совпадать (в случае, если задача линейного программирования допускает неединственное решение, их можно выбрать одинаковыми). Следовательно, кусочно-заданная функция цены (9), полученная при решении задачи Коши

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)} = 0, & i = \overline{1, N}, \quad t \in [t_0, t_1], \\ K^{(i)}(t_1) = \hat{K}(\tilde{H}^{(i)})^{-1}, & i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

будет непрерывной по  $(t, \tilde{x})$  во всей рассматриваемой области. При этом функционал в задаче (17) соответствует значениям  $V^{(i)}(t, \tilde{x})$  в вершинах симплексов и, таким образом, способствует уменьшению значений функции в этих точках.

## 5. Алгоритм выбора управления

Прежде чем приступить к решению задачи (18), необходимо определить управления  $y_k^{(i)}$  из (10) в вершинах симплексов, чтобы на основе этих значений построить матрицы  $\hat{Z}^{(i)}$ . В [11–13] они выбирались так, чтобы в каждом симплексе  $\Omega^{(i)}$  минимизировать производную (11) функции  $V^{(i)}(t, \tilde{x})$  вдоль траектории движения, но с учетом кусочно-заданного характера этой функции возникала неоднозначность при выборе значений  $y_k^{(i)}$ . Для ее устранения приходилось дополнительно корректировать управления, что негативно сказывалось на полученном решении.

В данной работе на примере обучения с подкреплением демонстрируется, что метод допускает использование управлений, полученных на основе альтернативных подходов, в результате чего построенная аппроксимация функции цены (6) может оказаться более точной.

*Обучение с подкреплением* [16] – это раздел машинного обучения, в котором поведение агента корректируется при многократном взаимодействии с окружающей средой в зависимости от получаемых от нее вознаграждений при каждом совершенном действии. Применительно к рассматриваемой задаче агент реализует управляющую стратегию  $u = u(t, x)$ , а в качестве функции мгновенного вознаграждения выберем

$$(19) \quad \mathcal{L}(t, x) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -d^2(x, \mathcal{X}_1), & t = t_1, \end{cases}$$

где  $d(x, \mathcal{X}_1)$  обозначает расстояние от точки  $x$  до множества  $\mathcal{X}_1$ .

*Proximal Policy Optimization (PPO)* – это один из методов обучения с подкреплением, где стратегия управления представлена с помощью нейронной сети, веса которой обновляются методом градиентного спуска при оптимизации некоторого функционала качества. Функционал качества основан на максимизации кумулятивного вознаграждения по окончании эксперимента, однако представляет собой более сложное выражение [17], чтобы обеспечить стабильный процесс обучения.

Преимуществом алгоритма РРО является возможность его применения к непрерывным системам, в том числе к системам вида (1). Этим свойством обладают и некоторые другие алгоритмы, например DDPG [24] и SAC [25]. Они также могут быть использованы в предложенном подходе, однако в рассмотренных далее примерах показали меньшую точность при переводе системы (1) в окрестность целевого множества.

Пусть множество  $\mathcal{P}$  допускает конечномерную параметризацию, в таком случае вектор  $u \in \mathcal{P}$  определяется набором параметров  $\theta \in \mathbb{R}^r$ , где  $\theta_i \in [\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}]$ ,  $i = \overline{1, r}$ , и цель заключается в определении этого набора для каждой фиксированной позиции  $(t, x)$ . Но поскольку алгоритм РРО рассчитан на стохастические стратегии, обычно предполагается, что  $\theta$  – это случайный вектор, имеющий многомерное нормальное распределение  $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

с диагональной матрицей ковариации. При использовании алгоритма сперва обучается нейронная сеть, которая предсказывает параметры этого распределения, а затем, во время расчета значений  $u(t, x)$ , генерируются реализации соответствующего случайного вектора. Имея обученную нейронную сеть, легко получить детерминированное управление: для этого вместо генерации случайного вектора достаточно взять соответствующие математические ожидания:  $\theta = \mu$ .

Отметим, что на значения параметров  $\theta_i$  наложены интервальные ограничения, в то время как носителем нормального случайного вектора является все пространство  $\mathbb{R}^r$ . Чтобы удовлетворять требованиям, на практике значения параметров “обрезаются” [26] и новые значения получаются по формуле  $\tilde{\theta}_i = \min\{\theta_i^{\max}, \max\{\theta_i, \theta_i^{\min}\}\}$ , хотя допускается использование других преобразований. Кроме того, для указанных случайных величин можно использовать распределения с ограниченным носителем [27].

Такие детерминированные управления на основе нейросетевой модели, удовлетворяющие ограничению (2), будем обозначать как  $\hat{u}(t, x)$ . Результирующее кусочно-аффинное управление, используемое в данной работе, определяется по формуле (10):

$$(20) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \hat{u}(t, g_k^{(i)}), \quad x \in \Omega^{(i)}.$$

Заметим, что в силу устройства нейросети функция  $\hat{u}(t, x)$  будет непрерывной по  $(t, x)$ . Отсюда следует, что при стремлении диаметра разбиения множества  $\Omega$  на симплексы к нулю итоговое управление (20) будет поточечно сходиться к  $\hat{u}(t, x)$ .

## 6. Основной результат

Введение вышеописанных конструкций позволяет доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть матричные функции  $K^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$  являются решением задачи Коши (18). Пусть  $V(t, \tilde{x})$  – непрерывная кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве  $[t_0, t_1] \times \Omega \times \{1\}$ , которая в каждом симплексе  $\Omega^{(i)}$  задается равенством  $V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle$ . Тогда множество  $\mathcal{W}_\varepsilon^{\text{int}}(t_0) = \left\{ x \in \Omega \mid V(t_0, \tilde{x}) \leq \varepsilon \right\}$  (в предположении его непустоты) является внутренней оценкой множества разрешимости исходной нелинейной системы (1):

$$\mathcal{W}_\varepsilon^{\text{int}}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\varepsilon(t_0, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Доказательство теоремы основано на анализе траекторий нелинейной системы (1), замкнутой управлением вида (10), однако не зависит от способа нахождения векторов  $y_k^{(i)}(t) \in \mathcal{P}$  в вершинах симплексов и проходит по схеме, приведенной в [13].

## 7. Примеры работы алгоритма

### 7.1. Нелинейная система

Рассмотрим движение маятника на тележке с учетом силы трения [28], которое описывается системой уравнений

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -w^2 \sin(x_1) - 2\gamma x_2 - w^2 \cos(x_1)u, \end{cases}$$

где  $\omega$  и  $\gamma$  являются параметрами,  $x_1$  и  $x_2$  – угол отклонения маятника и угловая скорость соответственно, управление  $u$  соответствует ускорению тележки. Пусть  $\omega = 1$ ,  $\gamma = 0,1$  и требуется перевести систему из начального положения  $(-0,3, 0,6)^T$  при  $t_0 = 0$  в малую окрестность начала координат в момент времени  $t_1 = 1$ . На управление наложено ограничение  $u \in [-1, 1]$ .

В качестве простейшей модели нейронных сетей, используемых в алгоритме PPO, предлагается выбрать двухслойный перцептрон [29] с функцией активации  $\tanh(x)$ . При обучении было сгенерировано 10 000 пробных траекторий системы (21), стартующих из различных случайных точек  $x^0 \in \Omega$  в момент времени  $t_0$ , и стратегия управления  $\hat{u}(t, x)$  обновлялась на основе штрафов (19). На рис. 1 представлена траектория, полученная при использовании алгоритма PPO без дополнительных модификаций. Расстояние между конечной точкой траектории и началом координат составляет 0,027.

Для расчета кусочно-квадратичной функции (9) сперва были зафиксированы вершины  $g_k \in \mathbb{R}^2$ , расположенные на прямоугольной сетке со сторонами длины  $\Delta = 0,1$ , которые затем были использованы для разбиения множества  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  на  $N = 800$  равных симплексов. На рис. 2 представле-

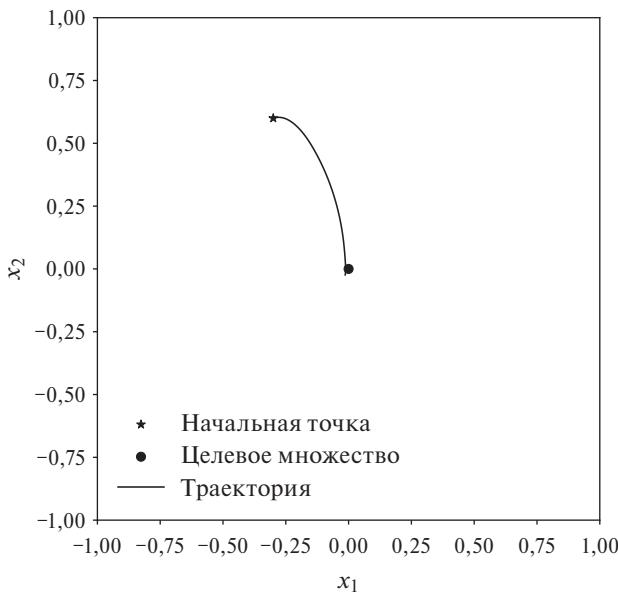


Рис. 1. Траектория на основе нейросетевого управления  $\hat{u}(t, x)$ .

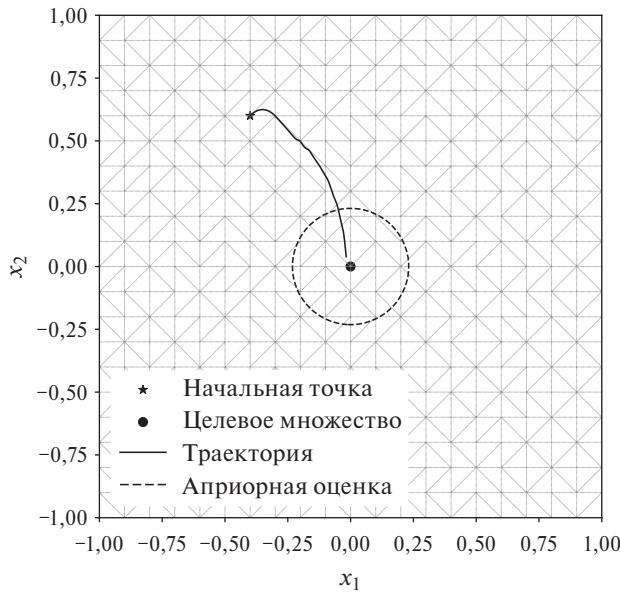


Рис. 2. Траектория на основе управления из [13].

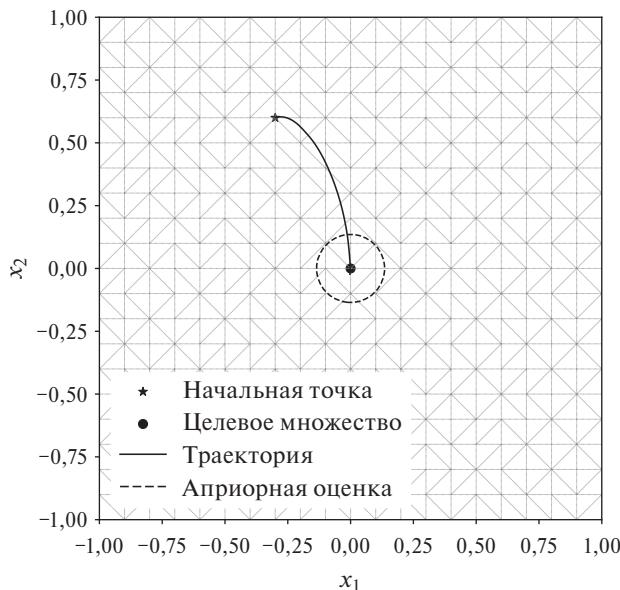


Рис. 3. Траектория на основе аппроксимации (20) нейросетевого управления  $\hat{u}(t, x)$ .

ны результаты, полученные с помощью алгоритма выбора управлений (10) из [13]: пунктирная линия обозначает границу множества, куда априорно гарантировается попадание траектории системы; расстояние между  $x(t_1)$  и целевым множеством составляет 0,043.

На рис. 3 представлена траектория, полученная описанной в текущей работе комбинацией методов при том же разбиении на симплексы. Расстояние

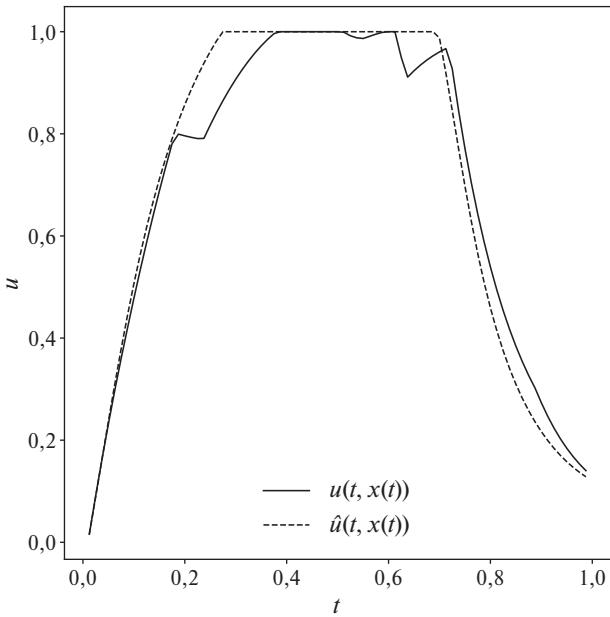


Рис. 4. Нейросетевое управление  $\hat{u}(t, x(t))$  и результирующее управление  $u(t, x(t))$ .

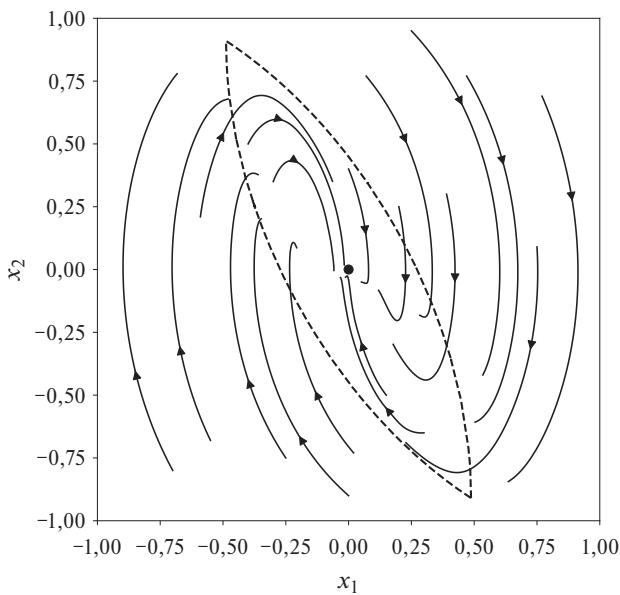


Рис. 5. Граница множества разрешимости при  $t = t_0$  и траектории системы (21) при замыкании результирующим управлением  $u(t, x)$ .

до начала координат в этом случае равно 0,023, при этом изменение ошибки объясняется разницей между исходным нейросетевым управлением  $\hat{u}(t, x)$  и его аппроксимацией (20). На рис. 4 приведены управления, соответствующие траекториям, изображенным на рис. 1 и рис. 3. Видно, что априорная

погрешность представленного метода меньше, чем в алгоритме [13]. Приведенный пример подтверждает, что в каждом из случаев априорная оценка, полученная из функции цены (9), является гарантированной.

На рис. 5 непрерывными линиями обозначены траектории, полученные предложенным методом при старте из различных начальных точек; стрелками обозначено направление движения вдоль траекторий. Кроме того, пунктирной линией обозначена граница множества разрешимости в классе кусочно-непрерывных программных управлений, вычисленная на основе принципа максимума Л.С. Понtryгина [30, с. 336–344].

## 7.2. Линейная система

Чтобы получить более полное представление о точности предложенного подхода, рассмотрим линейную систему

$$(22) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

на отрезке  $t \in [0, 1]$ . В данном случае не требуется применять описанный ранее механизм кусочной линеаризации, однако такая система хорошо изучена в литературе (например, в [30]). Пусть управление удовлетворяет ограничению  $u \in [-2, 2]$  и требуется перевести систему в начало координат в момент времени  $t = 1$ . Тогда может быть получено, что точка  $x^0 = (0,5, 0)^T$  лежит на границе множества разрешимости в момент  $t = 0$  и достигается на кусочно-постоянном управлении  $u^*(t) = 2\text{sign}(t - 0,5)$ .

Для численных экспериментов была выбрана нейросетевая модель той же структуры, что и в предыдущем примере. Модель обучалась на персональном компьютере в течение одного часа, после чего при зафиксированных весах нейросети при различных диаметрах разбиения на симплексы  $\Omega^{(i)}$  были построены кусочно-квадратичные функции вида (9). Рассматривалось множество  $\Omega = [-1,5, 1,5] \times [-1,5, 1,5]$ .

На рис. 6 обозначены априорная оценка попадания в начало координат из точки  $x^0$  при шаге прямоугольной сетки  $\Delta = 0,25$  (что соответствует разбиению на 288 представленных на рисунке симплексов) и полученная траектория, а на рис. 7 приведено соответствующее управление  $u(t, x(t))$  вида (20). На рис. 8 изображено множество разрешимости, вычисленное на основе принципа максимума Л.С. Понtryгина, а также траектории, полученные предложенным методом при старте из различных начальных точек.

На рис. 9 для той же начальной точки  $x^0 = (0,5, 0)^T$  приведены зависимости априорной и апостериорной погрешностей от числа симплексов разбиения  $\Omega^{(i)}$  множества  $\Omega$ . При уменьшении диаметра сетки апостериорное значение погрешности сходится к 0,104, что соответствует точности при исходном нейросетевом управлении  $\hat{u}(t, x)$ . Отметим, что эта точность может быть повышена за счет рассмотрения других нейросетевых моделей, возможно, с большим числом параметров. Кроме того, из рис. 9 следует, что априорная погрешность снижается, однако с некоторого момента вновь начинает возрастать. Такое увеличение погрешности объясняется несовершенством вспомо-

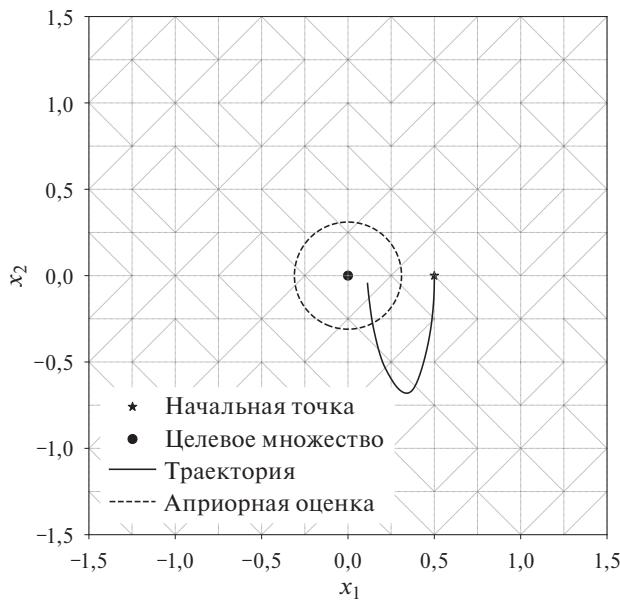


Рис. 6. Траектория системы (22) и априорная оценка попадания в целевую точку.

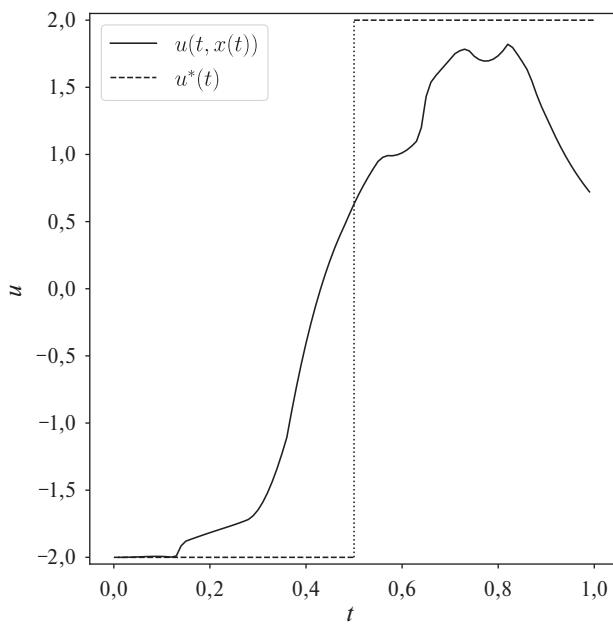


Рис. 7. Результатирующее управление  $u(t, x(t))$  для системы (22), а также оптимальное управление  $u^*(t)$ .

гательных задач оптимизации (17): их решения в соседних вершинах могут значительно отличаться друг от друга, что влияет на устойчивость метода при мелком диаметре разбиения. Эта проблема может быть устранена за

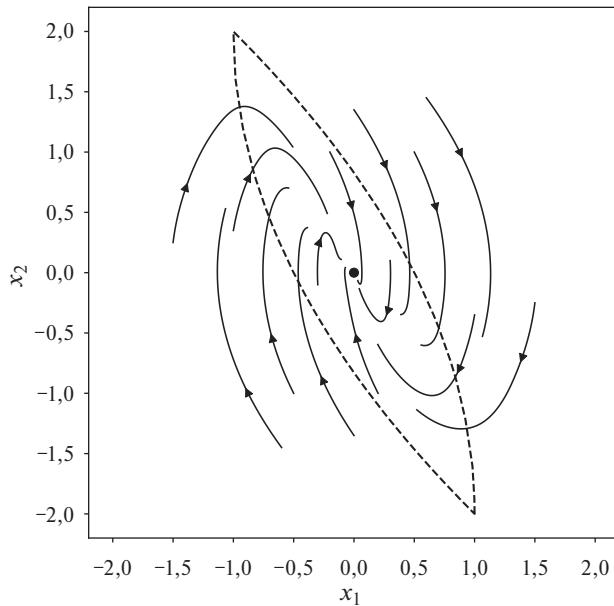


Рис. 8. Граница множества разрешимости при  $t = t_0$  и траектории системы (22) при замыкании результирующим управлением  $u(t, x)$ .

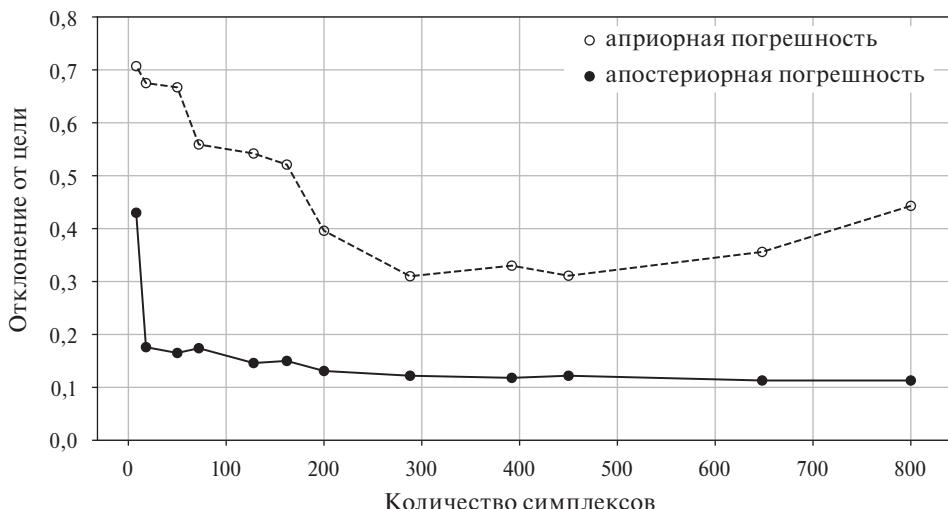


Рис. 9. Отклонение от целевой точки  $x^1 = (0, 0)^T$  в зависимости от количества симплексов разбиения.

счет замены функционала в (17) или же за счет введения дополнительных “регуляризующих” слагаемых в систему (18), использование которых было предложено в [11].

На рис. 10 указано время вычисления функции цены в зависимости от числа симплексов при фиксированной нейросетевой стратегии  $\hat{u}(t, x)$ . Можно заметить, что временные затраты линейно растут с увеличением количества

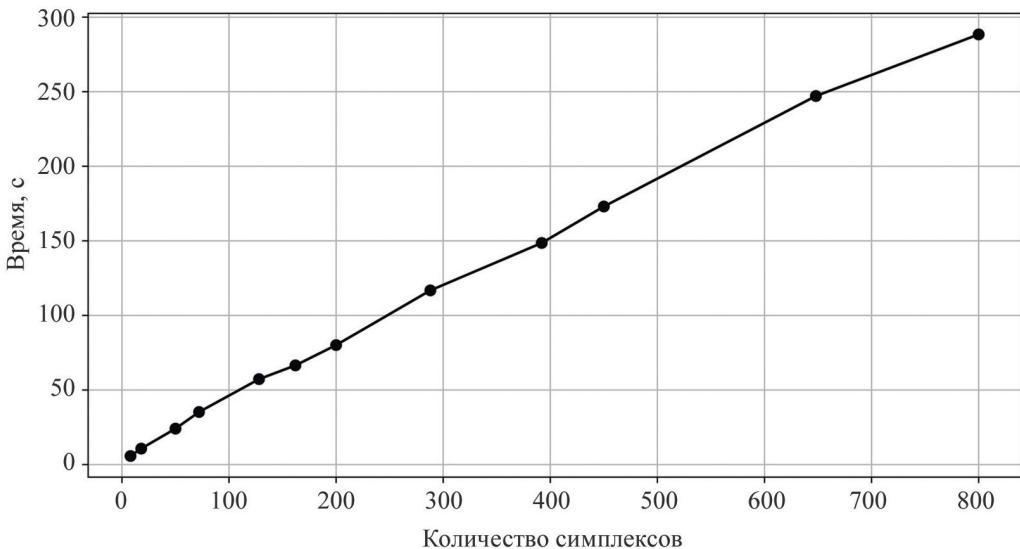


Рис. 10. Время вычисления функции цены при фиксированной функции  $\hat{u}(t, x)$ .

симплексов, и при не слишком мелком диаметре разбиения время вычислений мало в сравнении со временем обучения нейронной сети.

## 8. Заключение

Приведенные в данной работе формулы позволяют получить позиционную стратегию управления, решающую задачу приближенно, и кусочно-аффинную аппроксимацию этой стратегии на множестве симплексов. Последняя используется для построения непрерывной кусочно-квадратичной функции, задающей внутреннюю оценку множества разрешимости в задаче целевого управления. Для полученного кусочно-аффинного управления справедлива гарантированная априорная оценка погрешности попадания траектории в целевое множество. Предложенный подход может быть использован при решении задач управления нелинейными системами с небольшой размерностью фазового пространства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2001. Т. 41. № 6. С. 895–908.
2. Goubault E., Putot S. Inner and Outer Reachability for the Verification of Control Systems // Proceedings of the 22nd ACM International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control. 2019. P. 11–22.  
<https://doi.org/10.1145/3302504.3311794>
3. Shafa T., Ornik M. Reachability of Nonlinear Systems with Unknown Dynamics. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.11045>

4. Garrido S., Moreno L.E., Blanco D., Jurewicz P.P. Optimal control using the Fast Marching Method // 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics. 2009. P. 1669–1674. <https://doi.org/10.1109/IECON.2009.5414750>
5. Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2010. Т. 271. С. 259–277.
6. Xue B., Fränzle M., Zhan N. Inner-Approximating Reachable Sets for Polynomial Systems with Time-Varying Uncertainties // IEEE Transact. Autom. Control. 2019. V. 65. No. 4. P. 1468–1483. <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2923049>.
7. Lee D., Tomlin C.J. Efficient Computation of State-Constrained Reachability Problems Using Hopf–Lax Formulae // IEEE Transact. Autom. Control. 2023. P. 1–15. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3241180>
8. Cheng T., Lewis F.L., Abu-Khalaf M. Fixed-Final-Time-Constrained Optimal Control of Nonlinear Systems Using Neural Network HJB Approach // IEEE Transactions on Neural Networks. 2007. V. 18. No. 6. P. 1725–1737. <https://doi.org/10.1109/TNN.2007.905848>
9. Onken D., Nurbekyan L., Li X., et al. A Neural Network Approach for High-Dimensional Optimal Control Applied to Multiagent Path Finding // IEEE Transact. Control Syst. Techn. 2023. V. 31. No. 1. P. 235–251. <https://doi.org/10.1109/TCST.2022.3172872>
10. Sánchez-Sánchez C., Izzo D., Hennes D. Learning the optimal state-feedback using deep networks // 2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. 2016. P. 1–8. <https://doi.org/10.1109/SSCI.2016.7850105>
11. Tochilin P.A. Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. No. 2. P. 6127–6132. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1691>
12. Точилин П.А. О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Тр. ин-та мат. и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 223–238. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-223-238>
13. Чистяков И.А., Точилин П.А. Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближенного решения нелинейной задачи целевого управления // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1545–1554. <https://doi.org/10.1134/S0374064120110126>
14. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Тр. ин-та мат. и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.
15. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Birkhäuser, 2014. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>
16. Самсон Р.С., Барто Э.Г. Обучение с подкреплением. М.: ДМК пресс, 2020.
17. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., et al. Proximal policy optimization algorithms. 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347>
18. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
19. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006.

20. *Rajan V.T.* Optimality of the Delaunay triangulation in  $\mathbb{R}^d$  // Discrete & Computational Geometry. 1994. V. 12. No. 2. P. 189–202.  
<https://doi.org/10.1007/BF02574375>
21. *Brown K.Q.* Voronoi diagrams from convex hulls // Inform. Proc. Lett. 1979. V. 9. No. 5. P. 223–228. [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(79\)90074-7](https://doi.org/10.1016/0020-0190(79)90074-7)
22. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Birkhauser, 2003.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0017-8>
23. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Ser. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4755-1>
24. *Lillicrap T.P., Hunt J.J., Pritzel A., et al.* Continuous control with deep reinforcement learning. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.02971>
25. *Haarnoja T., Zhou A., Abbeel P., Levine S.* Soft Actor-Critic: Off-Policy Maximum Entropy Deep Reinforcement Learning with a Stochastic Actor. 2018.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.01290>
26. *Raffin A., Hill A., Gleave A., et al.*, Stable-Baselines3: Reliable Reinforcement Learning Implementations // J. Machin. Lear. Res. 2021. V. 22. No. 268. P. 1–8.
27. *Petrazzini I.G.B., Antonelo E.A.* Proximal Policy Optimization with Continuous Bounded Action Space via the Beta Distribution // 2021 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI). 2022. P. 1–8.  
<https://doi.org/10.1109/SSCI50451.2021.9660123>
28. *Reissig G.* Computing Abstractions of Nonlinear Systems // IEEE Transact. Autom. Control. 2011. V. 56. No. 11. P. 2583–2598.  
<https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2118950>
29. Голубев Ю.Ф. Нейронные сети в мехатронике // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Т. 11. № 8. С. 81–103.
30. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.*

Поступила в редакцию 29.08.2023

После доработки 14.10.2024

Принята к публикации 29.10.2024

# *Оптимизация, системный анализ и исследование операций*

© 2025 г. Ю.С. ЗАЙЦЕВА, канд. техн. наук (zyus@ipme.ru)

(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ»),

А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (alf@ipme.ru)

(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;

Санкт-Петербургский государственный университет)

## **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ «МОСТ–ПЕШЕХОДЫ» НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ ЦЫПКИНА<sup>1</sup>**

Построена новая кибернетическая модель динамики движения системы «мост–пешеходы» в поперечном направлении с учетом функционального состояния пешехода. Получено аналитическое выражение для критического количества пешеходов, способных раскачать мост, и рассчитана область устойчивости системы с помощью частотного критерия Я.З. Цыпкина для параметров лондонского моста Миллениум. Результаты работы показывают, что раскачивание моста может быть связано с малым нервно-мышечным запаздыванием пешеходов, а не с синхронизацией их шагов, как считается в ряде существующих публикаций. Полученные результаты могут иметь применение и к другим классам колебательных человеко-машинных систем.

*Ключевые слова:* устойчивость, надежность конструкций, раскачивание моста, танцующий мост, лондонский мост Миллениум.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010068, **EDN:** JQHZXD

### **1. Введение**

За последние два столетия произошло несколько десятков инцидентов, связанных с пешеходными мостами, включая случай качания лондонского моста Миллениум [1]. Этот мост был возведен в честь наступления третьего тысячелетия, что отразилось в архитектуре его легкой подвесной конструкции, где тросы находятся ниже уровня палубы. Мост Миллениум является одним из немногих объектов, о котором собрано много ценных наблюдений. Например, известно, что поперечные колебания нарастили с ростом количества пешеходов и затухали, если людей становилось меньше или они полностью останавливались. Инцидент с мостом Миллениум вызвал целую волну публикаций известных ученых в престижных научных журналах [2–5].

<sup>1</sup> Работа поддержана Минобрнауки РФ (проект госзадания 124041500008-1).

В первых публикациях делался вывод, что большую амплитуду колебаний вызывает синхронный шаг пешеходов. Это не только соответствовало распространенному общественному мнению, но и хорошо укладывалось в теорию синхронизации связанных осцилляторов [6]. Однако позже появились данные наблюдений, которые невозможно объяснить только синхронизацией, например появление колебаний, не связанных со средней частотой шагов, наличие определенного критического количества пешеходов, способных раскачать мост [1, 7]. На основании этого ряд ученых выдвинули предположение, что синхронизация является следствием, а не причиной раскачки моста [4, 5, 8–10].

В данной работе предлагается новая модель динамики системы «мост–пешеходы» в поперечном направлении, учитывающая функциональное состояние пешехода при помощи звена запаздывания. На основе новой модели предложен новый подход к анализу устойчивости системы.

Известны подходы к анализу системы «мост–пешеходы», в которых модель системы описывается в терминах механики и действия динамических сил во временной и частотной областях [11, 12]. Наиболее часто встречающаяся в литературе динамическая модель моста описывается следующим уравнением [8, 12, 13]:

$$(1) \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t),$$

где  $M$ ,  $C$ ,  $K$  – матрицы массы, демпфирования и жесткости,  $x(t)$  – вектор перемещения,  $F(t)$  – вектор внешних сил, который определяется как [14]:

$$(2) \quad F(t) = G_p + \sum_{i=1}^n G_p \alpha_i \sin(2\pi i f t - \phi_i),$$

где  $G_p$  – вес человека,  $\alpha_i$  – коэффициент Фурье  $i$ -й гармоники,  $f(t)$  – частота,  $\phi_i$  – фазовый сдвиг  $i$ -й гармоники,  $i$  – порядковый номер гармоники,  $n$  – общее число гармоник.

По аналогии с (1) динамику пешеходов описывают как осциллятор со своей массой, жесткостью и коэффициентом демпфирования. Такой подход продемонстрирован для анализа вертикальных колебаний в [15, 16], где система «мост–пешеходы» имеет вид

$$(3) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_c(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_c & -c_c \\ -c_c & c_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_s + k_c & -k_c \\ -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ x_c(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s(t) \\ f_c(t) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

В (3)  $m$ ,  $c$  и  $k$  – масса, коэффициент демпфирования и жесткость соответственно, индекс  $s$  соответствует мосту,  $c$  – пешеходу.

Модель перевернутого маятника с жесткой опорой и ограниченная фронтальной плоскостью хорошо отражает основные особенности поведения пешеходов на горизонтально колеблющейся поверхности, включая кинематику

и кинетику [9, 17]. Одно из допущений такой модели состоит в том, что колебания поверхности земли не влияют на время шагов пешеходов, что, как показано в [18], не всегда имеет место в реальности. В этой работе предложен закон управления постановкой ног с учетом запаздывания при контакте стопы с землей.

Последние достижения в решении проблемы устойчивости пешеходных мостов изложены в работах [8–10], результаты которых получены на основе предположения о синхронизации шагов как следствии раскачки моста. Это условие позволяет составить соотношение баланса амплитуды и фазы между пешеходами и мостом, откуда можно получить критическое количество пешеходов, удовлетворяющее этому соотношению. Динамика пешехода в [8–10] описана с помощью осциллятора Ван дер Поля:

$$(4) \quad f(x, \dot{x}) = \lambda(\dot{x}^2 + x^2 a^2)\dot{x} + \omega^2 x,$$

где  $x$  – координата центра масс пешехода,  $\lambda$  – демпфирование,  $a$  – амплитуда предельного цикла,  $\omega$  – частота шагов. В последующей работе авторов [8] сила  $F(t)$ , действующая на мост со стороны пешеходов, выражается через средний коэффициент демпфирования пешехода  $\bar{\sigma}(\bar{\omega}_i, \Omega)$ , который, в свою очередь, в большей степени зависит от отношения частоты колебаний моста  $\Omega$  к частоте шагов  $\bar{\omega}_i$ . Было выяснено, что существует большой диапазон частот шагов пешеходов и колебаний моста, при котором  $\bar{\sigma}(\bar{\omega}_i, \Omega) < 0$ . Это означает, что при некотором критическом числе пешеходов общее модальное демпфирование моста становится отрицательным. В результате авторами предложена простая формула вычисления критического числа пешеходов:

$$(5) \quad N_{cr} = -c_0/\bar{\sigma},$$

где  $c_0$  – коэффициент пассивного демпфирования моста.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дается постановка задачи. Раздел 3 содержит описание модели системы «мост–пешеходы». В разделе 4 представлен анализ устойчивости системы «мост–пешеходы» и аналитические выражения для критического количества пешеходов. Результаты и возможности их применения описаны в разделе 5.

## 2. Постановка задачи

В существующей литературе используется подход к моделированию пешеходов, сосредоточенный на понимании механизмов шагания, которые появляются в результате управления его центральной нервной системы. Однако высокая чувствительность человека к колебаниям поверхности вызывает у него ответную реакцию и последующие мышечные действия, что показывает необходимость учитывать человека как звено замкнутой системы с его физическими и психофизиологическими свойствами. Такой подход известен

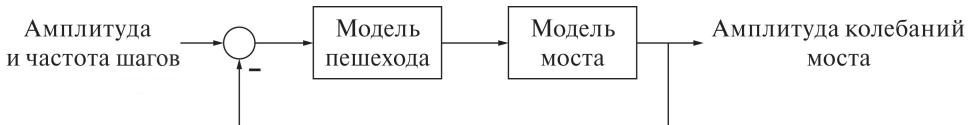


Рис. 1. Общая структурная схема системы «мост–пешеходы».

в области человеко-машинных систем и основан на описании функционального состояния человека [19], но до сих пор не использовался для описания динамики походки.

Не касаясь причин раскачивания моста, будем считать, что люди идут по нему со средней частотой шагов, действуя на поверхность силой своего веса и одновременно пытаясь сохранить равновесие, ориентируясь на зрительную и вестибулярную информацию от центральной нервной системы. Соответствующая такой системе блок-схема показана на рис. 1. В связи с этим в данной работе предлагается разработка кибернетической модели системы «мост–пешеходы» и исследование ее на предмет возможности использования для проектирования и анализа колебаний конструкции моста методами теории автоматического управления. Для этого необходимо описать динамику движения каждого компонента системы «мост–пешеходы» с помощью динамических звеньев.

### 3. Модель системы «мост–пешеходы»

Человек естественным образом демонстрирует разнообразные виды движения, из-за своей хаотичности трудно поддающиеся описанию. Так, известны работы, где отдельно рассматривается влияние на конструкцию группы идущих [15], бегущих [20] и подпрыгивающих людей [21]. Обозначение конкретных задач и разделение движений, выполняемых человеком, позволяет ввести приближенное математическое описание его действий, отражающее основные свойства локомоции. Их применение – область проектирования двухногих роботов и человеко-машинных систем. Касательно последних, широко известны результаты кибернетической модели управляющих действий пилота в задаче слежения за ошибкой и скоростью отклонения тангажа, что помогло понять причины явления колебаний, вызванных летчиком [22, 23]. Результаты исследований взаимодействия человека–пилота и летательного аппарата выявили стремление человека управлять оптимальной системой, что проявляется как свойство адаптации его нервно-мышечной динамики к изменяющейся динамике системы [19, 22–25].

Оптимальность движений человека часто упоминается в контексте энергетических затрат, необходимых для реализации того или иного движения. Такая характеристика может быть использована для периодических и повторяющихся движений, к которым относится ходьба на большом интервале времени. При передвижении по неподвижной поверхности первоочередной задачей является сохранение равновесия, что человек решает рефлекторно,

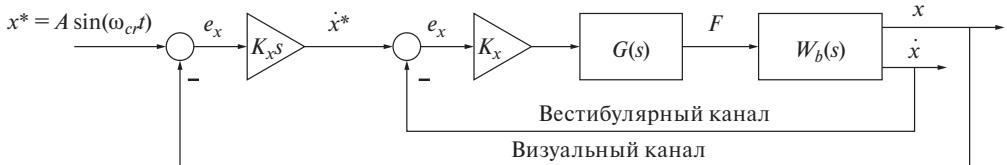


Рис. 2. Контур системы «мост–пешеходы».

не задумываясь. При передвижении по неустойчивой поверхности человеку приходится прикладывать усилия, или управление, чтобы сохранить равновесие, для чего, по-видимому, необходимо время на переработку информации центральной нервной системой и принятие решений, что в свою очередь вносит некоторую величину запаздывания.

Наглядный пример взаимодействия человека и конструкции известен из повседневной жизни, когда при движении по довольно легкому длинному подвесному мосту на двухколесном транспортном средстве (велосипеде) мост начинает ощутимо раскачиваться. При этом чем активнее пытается балансировать человек, тем сильнее раскачивается мост. Во всех случаях смягчить колебания помогает осознанное снижение усилий человека по сохранению равновесия, или снижение пропорционального коэффициента усиления «в голове».

Кибернетическая модель человека в частотной области имеет вид структуры, каждый блок которой описывает процесс восприятия, выработку стратегии и отработку управляющих действий [25, 26]. Выделяют три основных стимула восприятия информации: зрительный, вестибулярный и проприоцептивный. В рамках структурного подхода считается, что процессы переработки информации и выработки стратегии действий, происходящие в центральной нервной системе, для каждого стимула восприятия схожи. Каждый выполняемый процесс требует определенного времени, что достаточно хорошо описывается звеном запаздывания, величина которого возрастает по мере усложнения процесса управления. Упомянутое выше свойство адаптации человека отражается с помощью блоков коррекции для каждого воспринимаемого стимула, суммарная реакция которых затем поступает в моторную систему. Эта структура определяет передаточную функцию управляющих действий человека [25, 27–29].

Наиболее изученной является модель коррекции, вырабатываемой человеком на основе визуального восприятия командного стимула. Многие исследования показали, что человек способен производить усиление, дифференцирование и сглаживание воспринимаемого сигнала [27–29]. Модель пешехода, использующего для хождения визуальный и вестибулярный каналы восприятия информации, показана на рис. 2. Согласно этой модели пешеход пытается компенсировать рассогласование по углу и угловой скорости крена для удержания равновесия при ходьбе. Таким образом, пешеход находится в замкнутом контуре, и его поведение зависит от динамики моста.

Передаточную функцию модели пешехода от ошибки отклонения угла к углу крена можно записать в виде [24, 30, 31]

$$(6) \quad W_p(s) = NK_x s K_{\dot{x}} G(s),$$

$$(7) \quad G(s) = \frac{T^2 e^{-\tau s}}{s^2 + 2\xi Ts + T^2},$$

где  $N$  – количество пешеходов,  $K_x$  и  $K_{\dot{x}}$  – коэффициенты усиления,  $G(s)$  – передаточная функция нервно-мышечной динамики пешехода,  $\xi$  и  $T$  – коэффициент демпфирования и частота,  $\tau$  – время нервно-мышечного запаздывания. Заметим, как показано в [31],  $K_{\dot{x}}$  имеет отрицательное значение.

Таким образом, с учетом модели моста (1) и (6) передаточная функция разомкнутой системы «мост–пешеходы» от смещения в поперечном направлении моста  $x$  к ошибке отклонения  $e_x$  имеет вид

$$(8) \quad W(s) = W_p(s)W_b(s) = \frac{NK_p T^2 s e^{-\tau s}}{(s^2 + 2\xi Ts + T^2)(Ms^2 + Cs + K)},$$

где  $K_p = K_x K_{\dot{x}}$ .

#### 4. Анализ устойчивости системы «мост–пешеходы»

Переменными параметрами системы (8) являются количество пешеходов  $N$  и величина нервно-мышечного запаздывания  $\tau$ . Поперечная составляющая силы реакции опоры, выражаемая через коэффициент  $K_p$ , также может меняться в зависимости от частоты шагов в большую или меньшую сторону, но в данной работе рассматривается только случай средней частоты, равной 5,4 рад/с. Экспериментально было получено, что при средней частоте шагов пешеход действует на поверхность в поперечном направлении с силой около 38 Н [32]. Чтобы получить такую силу, согласно структуре на рис. 2 произведение коэффициентов  $K_x K_{\dot{x}}$  должно быть равно 48.

Остальные параметры системы принимаются постоянными. Известны следующие параметры лондонского моста Миллениум: масса  $M = 81\,000$  кг, жесткость  $K = 3\,390\,733$  кг/с<sup>2</sup>,  $C = 7681$  кг/с, собственная частота  $\Omega = \sqrt{K/M} = 6,5$  рад/с [8, 33]. Параметры нервно-мышечной динамики пешехода  $T = 30$ ,  $\xi = 0,7$  [31].

Комфортное время, необходимое на переработку информации в центральной нервной системе и передачу сигнала по нервно-мышечному волокну для летчиков в режиме ручного управления составляет около 0,2 с [25, 27]. Из-за движения поверхности моста изменяется угол ориентации пешехода, что является для него нестандартной ситуацией и запускает процесс адаптации к новым условиям, который отражается в настройке параметров (6), в том числе времени запаздывания. В зависимости от внешних обстоятельств человек может как уменьшать, так и увеличивать время нейро-мышечного запаздывания. Так, падение запаздывания до 0,08 с «... связано с возрастающим нейромускульным напряжением» [22].

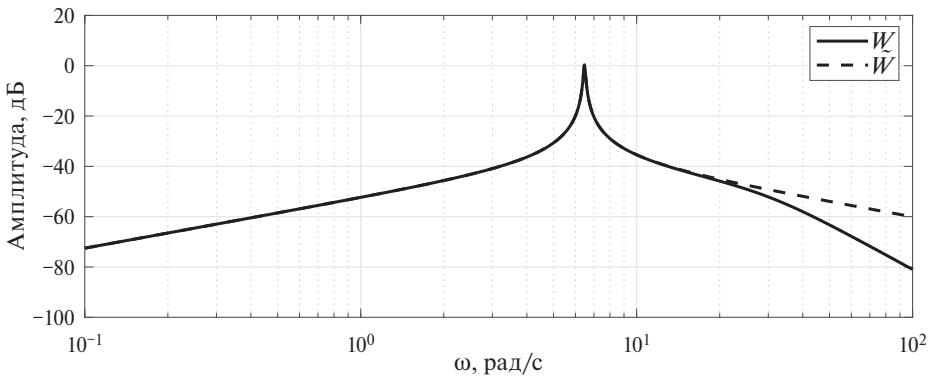


Рис. 3. Амплитудная частотная характеристика системы «мост–пешеходы» с учетом звена нервно-мышечной динамики и без него.

Для оценки величины времени запаздывания и соответствующей ему частоты, влияющих на устойчивость системы, удобно использовать частотный критерий Я.З. Щипкина [34, 35]. Критическая частота  $\omega_{0i}$  определяется из уравнения

$$(9) \quad |W(\omega_{0i}, N)| - 1 = 0,$$

где  $|W|$  – амплитудная характеристика разомкнутой системы без запаздывания (8), после чего полученное  $\omega_{0i}$  подставляется в выражение для соотношения фаз, которое в общем случае имеет вид

$$(10) \quad \tau_{0i}(n) = \frac{\theta(\omega_{0i})}{\omega_{0i}} + \frac{2\pi n}{\omega_{0i}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\theta(\omega_{0i}) = \arctg(W(\omega_{0i}))$ . Это критическое время запаздывания  $\tau_{0i}$  определяет переход корней через мнимую ось и, следовательно, границу устойчивости системы. Исследуемая система будет устойчива, когда (9) не имеет решения относительно  $\omega_{0i}$ , т.е., когда годограф системы лежит внутри единичной окружности.

Применим критерий (9), (10) к (8). Заметим, что амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) (8) совпадает с АЧХ без учета звена нервно-мышечной динамики в широком диапазоне частот 1–10 рад/с (рис. 3). Это позволяет сделать предположение, что для оценки устойчивости системы можно пренебречь звеном нервно-мышечной динамики в данном диапазоне частот, и тогда (8) можно записать как

$$(11) \quad \tilde{W}(s) = \frac{NK_p s e^{-\tau s}}{(Ms^2 + Cs + K)}.$$

Перейдем в (8) от  $s$  к  $j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части без учета звена запаздывания:

$$(12) \quad \tilde{W}(j\omega) = K_p N \left[ \frac{j\omega(K - M\omega^2)}{(K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2} + \frac{C\omega^2}{(K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2} \right].$$

Затем (9) можно записать как

$$(13) \quad \frac{K_p^2 N^2 \left[ (C\omega^2)^2 - \omega^2(K - M\omega^2)^2 \right]}{\left[ (K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2 \right]^2} - 1 = 0,$$

раскрыв скобки, получим уравнение восьмого порядка:

$$(14) \quad A_8\omega^8 + A_6\omega^6 + A_4\omega^4 + A_2\omega^2 + A_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_8 &= -M^4, \quad A_6 = 4KM^3 - K_p^2 M^2 N^2 - 2C^2 M^2, \\ A_4 &= 2KK_p^2 MN^2 - 6K^2 M^2 + C^2 K_p^2 N^2 + 4C^2 KM, \\ A_2 &= 4K^3 M - K^2 K_p^2 N^2 - 2C^2 K^2, \quad A_0 = -K^4. \end{aligned}$$

Выполним замену переменной в (14)  $\omega^2 = t$ . Как будет показано ниже, это необходимо для анализа полученного решения. Решение (14) относительно  $\omega$ , полученное в символьном виде с помощью MATLAB, представляет собой следующее выражение:

$$(15) \quad t^2 = \left[ \frac{2}{4M^2} \sqrt{C^4 + \frac{\sigma_7}{2} + 4KM^3\sigma_3 + 3C^2K_p^2N^2 - 2C^2M^2\sigma_3 - \sigma_2 - K_p^2M^2N^2\sigma_3 - \sigma_1 - 2C^2 + 2M^2 \sqrt{\frac{\sigma_4^2}{4M^8} + \frac{\sigma_6 - 8MK^3 + \sigma_5}{\sigma_4} + \frac{-C^4 + \sigma_2 + C^2K_p^2N^2 - 6K^2M^2 + \sigma_1}{M^4}} - K_p^2N^2 + 4KM} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2KK_p^2 MN^2, \quad \sigma_2 = 4C^2 KM, \\ \sigma_3 &= \sqrt{\frac{\sigma_7}{4M^4} - \frac{2K^2}{M^2} - \frac{8K^3M}{\sigma_4} + \frac{\sigma_6}{\sigma_4} + \frac{2C^2K_p^2N^2}{M^4} + \frac{\sigma_5}{\sigma_4}}, \\ \sigma_4 &= 2C^2 M^2 + K_p^2 M^2 N^2 - 4KM^3, \quad \sigma_5 = 2K^2 K_p^2 N^2, \\ \sigma_6 &= 4C^2 K^2, \quad \sigma_7 = K_p^4 N^4. \end{aligned}$$

Выражение (15) стоит под знаком квадратного корня и зависит от переменного параметра количества пешеходов  $N$ . Это означает, что численно (15) может принимать любые значения, в том числе комплексные. Физический смысл решаемой задачи подразумевает только действительные величины, поэтому необходимо ввести условие существования действительного неотрицательного решения. Одним из условий является неотрицательность подкоренного выражения (15), исходя из чего в символьном виде с помощью MATLAB

получены все условия действительного решения:

$$\begin{aligned}
 & N \in \mathbb{R} \wedge 2M^2 \sqrt{\frac{\sigma_5^2}{4M^8} + \frac{\sigma_7 - 8MK^3 + \sigma_6}{\sigma_5} + \frac{-C^4 + \sigma_3 + C^2Kp^2N^2 - 6K^2M^2 + \sigma_1}{M^4}} + \\
 & + 2\sqrt{C^4 + \frac{\sigma_8}{2} + 4KM^3\sigma_4 - 2C^2M^2\sigma_4 + 3C^2Kp^2N^2 - \sigma_3 - Kp^2M^2N^2\sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_2} = \\
 (16) \quad & = 2C^2 - 4KM \wedge 2C^2 + \sigma_2 \neq 4KM \wedge 0 < N,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2KKp^2MN^2, \quad \sigma_2 = Kp^2N^2, \quad \sigma_3 = 4C^2KM, \\
 \sigma_4 &= \sqrt{\frac{\sigma_8}{4M^4} - \frac{2K^2}{M^2} - \frac{8K^3M}{\sigma_5} + \frac{\sigma_7}{\sigma_5} + \frac{2C^2Kp^2N^2}{M^4} + \frac{\sigma_6}{\sigma_5}}, \\
 \sigma_5 &= 2C^2M^2 + Kp^2M^2N^2 - 4KM^3, \quad \sigma_6 = 2K^2Kp^2N^2, \\
 \sigma_7 &= 4C^2K^2, \quad \sigma_8 = Kp^4N^4.
 \end{aligned}$$

Проанализировав все вышеописанные ограничения численно и аналитически в MATLAB, получим, что наименьшее  $N$ , при котором существует действительное решение, вытекает из следующего условия:

$$(17) \quad K_p^4N^4 + (4MKK_p^2 - 2C^2K_p^2)N^2 + C^4 - 4MKC^2 \geq 0.$$

Приравняв левую часть (17) к нулю и сделав замену  $N^2 = t_2$ , получим выражение для дискриминанта:

$$(18) \quad D_2 = (4MKK_p^2 - 2C^2K_p^2)^2 - 4K_p^4(C^4 - 4MKC^2) = 16K_p^4M^2K^2,$$

$$(19) \quad \sqrt{D_2} = \pm 4K_p^2MK,$$

тогда корни (17) можно найти из выражения

$$(20) \quad t_2^1 = \frac{-4MKK_p^2 + 2C^2K_p^2 + 4K_p^2MK}{2K_p^4},$$

$$(21) \quad t_2^2 = \frac{-4MKK_p^2 + 2C^2K_p^2 - 4K_p^2MK}{2K_p^4}.$$

Подставив численные параметры в (20) и (17), получим, что  $t_2^1 > 0$  и  $t_2^2 < 0$ . Далее потребуется выполнить обратную замену  $t_2$  на  $N^2$  и извлечь корень из  $t_2$ , поэтому сразу отбросим  $t_2^2 < 0$ , тогда

$$(22) \quad N^2 = \frac{-4MKK_p^2 + 2C^2K_p^2 + 4K_p^2MK}{2K_p^4},$$

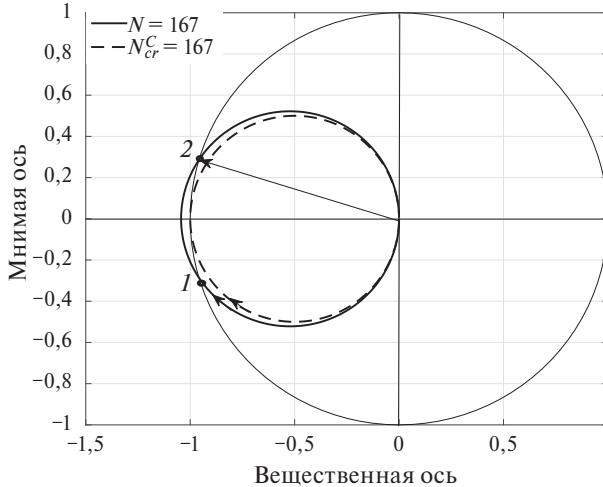


Рис. 4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при различном количестве пешеходов.

откуда, оставив только положительный корень, получим:

$$(23) \quad N = \frac{C}{K_p}.$$

Подставив в (23) параметры системы, получим  $N = 160,0208$ , т.е. критическое количество пешеходов, полученное на основе критерия Я.З. Цыпкина  $N_{cr}^C = 160$ . Таким образом, это — максимально возможное значение, не зависящее от запаздывания, при котором сохраняется устойчивость системы. Графическое решение (9) показано на рис. 4, численный результат которого совпадает с (23). Дальнейшее увеличение  $N$  приводит к пересечению годографа с единичной окружностью в двух точках. Так, например, при  $N = 167$  получаем два решения  $\omega_{01} = 6,45$  рад/с и  $\omega_{02} = 6,48$  рад/с, соответствующие точки которых обозначены на рис. 4. Поскольку  $\omega_{02} > \omega_{01}$ , то  $\tau_{02} < \tau_{01}$  и  $\tau_{02}$  является критическим временем запаздывания, которое для данного годографа можно найти из выражения

$$(24) \quad \tau_{02} = \frac{\pi - \theta(\omega_{02})}{\omega_{02}}.$$

Подставив численные значения в (24), получим  $\tau_{02} = 0,086$  с. Таким образом, для  $N = 167$  критическим для устойчивости запаздыванием является  $\tau_{02} = 0,086$  с, что соответствует избыточному нервно-мышечному напряжению человека [22].

Дальнейшее увеличение количества пешеходов приводит к росту критического запаздывания. Иллюстрация зависимости количества пешеходов от нервно-мышечного запаздывания  $N(\tau_0)$ , полученная из решения (9) и (24), показана на рис. 5. Из рисунка видно, что область устойчивости ограничена

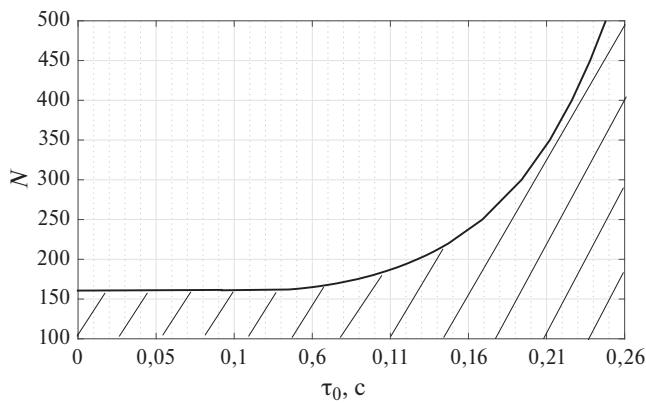


Рис. 5. Зависимость количества пешеходов от критического нервно-мышечного запаздывания. Штриховкой обозначена область устойчивости.

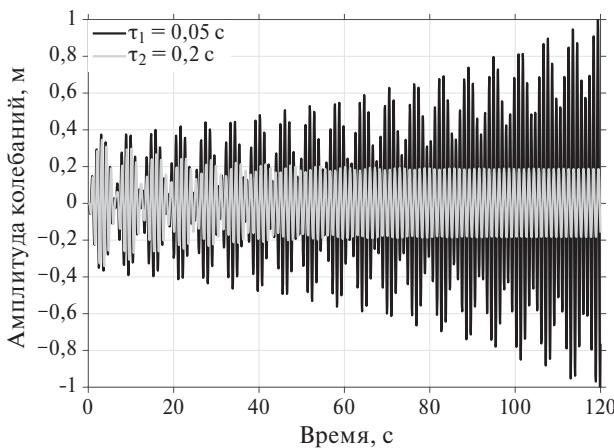


Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний моста от времени для 250 пешеходов, шагающих с частотой 5,4 рад/с.

количеством пешеходов при малых запаздываниях и резко увеличивается в области нормальных для человека значений запаздывания.

Зависимость амплитуды колебаний моста от времени при воздействии 250 пешеходов, идущих со средней частотой 5,4 рад/с и имеющих различное запаздывание, изображена на рис. 6. При нормальном  $\tau_2 = 0,2$  с мост демонстрирует устойчивые колебания с амплитудой около 20 см, тогда как нервно-мышечное напряжение, характерное для меньшего  $\tau_1 = 0,05$  с, приводит к постепенному нарастанию амплитуды колебаний.

На рис. 7 показана амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) системы «мост–пешеходы» при различной величине нервно-мышечного запаздывания (0,02 и 0,2 с), которое вносит соответствующий фазовый сдвиг между входом и выходом системы.

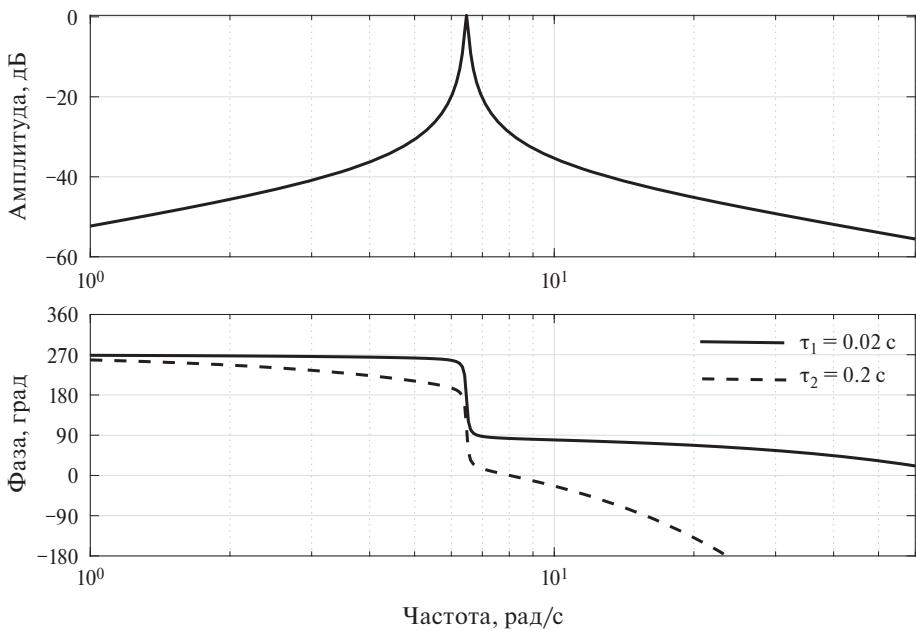


Рис. 7. АФЧХ системы «мост–пешеходы» при различной величине нервно–мышечного запаздывания.

Таким образом, на устойчивость системы влияет не только количество пешеходов, но и величина запаздывания, которую они могут вносить в силу особенности работы нервно–мышечной системы, что ранее не принималось во внимание при анализе системы «мост–пешеходы».

## 5. Заключение

В работе предложен новый подход к исследованию устойчивости человеко-машинных систем с колебательной динамикой, таких как система «мост–пешеходы». Рассмотрена линейная модель замкнутой системы «мост–пешеходы», в которой учтена не только динамика мышц пешеходов, но и процессы, протекающие в центральной нервной системе. Такой подход позволяет описать замкнутую систему в виде передаточной функции, включающей звено запаздывания, и оценить устойчивость системы методами теории автоматического управления.

Применение предложенного подхода продемонстрировано на примере раскачки лондонского моста Миллениум при движении по нему пешеходов в день его открытия. При помощи частотного критерия Я.З. Цыпкина для различных величин запаздывания получены условия на число пешеходов, при которых не нарушается устойчивость замкнутой системы. Численные результаты показывают, что значительное раскачивание моста можно объяснить уменьшением нервно–мышечного запаздывания пешеходов. Другими словами, из-за высокой чувствительности пешеходов к незначительным колебаниям поверх-

ности им требуется некоторое время для адаптации к новым условиям, что проявляется как излишнее нервно-мышечное напряжение. Быстрая реакция пешехода вносит небольшой фазовый сдвиг между входом и выходом системы «мост–пешеходы», приводящий к раскачиванию моста и потере устойчивости, тогда как замедленная реакция вносит фазовый сдвиг около 90 град, способствующий стабилизации.

Предложенный подход позволяет более детально подойти к анализу и проектированию конструкций, используемых людьми и обладающих колебательной динамикой. Дальнейшие исследования могут быть направлены на уточнение параметров модели нервно-мышечной динамики, учет нелинейностей модели моста и влияния внешних возмущений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dallard P., Fitzpatrick A., Flint A., Le Bourva S., Low A., Ridsdill Smith R.M., Willford M.* The London Millennium footbridge // Structural Engineers. 2001. V. 79. No. 22. P. 17–33.
2. *Strogatz S., Abrams D., McRobie F., Eckhardt B., Ott E.* Crowd synchrony on the Millennium Bridge // Nature. 2005. V. 438. P. 43–44. <https://doi.org/10.1038/43843a>
3. *Eckhardt B., Ott E., Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A.* Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 021110. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.021110>
4. *Josephson B.* Out of step on the bridge // Letter to the Editor. The Guardian. UK. 2000.
5. *Barker C.* Some observations on the nature of the mechanism that drives the self-excited lateral response of footbridges // International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges. Paris, 2002.
6. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics / Ed. by H. Araki. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975. P. 420–422.
7. *Macdonald J.* Pedestrian-induced vibrations of the Clifton Suspension Bridge, UK // Proceedings of The Ice-Bridge Engineering. 2008. V. 161. No. 2. P. 69–77. <https://doi.org/10.1680/bren.2008.161.2.69>
8. *Belykh I., Bocian M., Champneys A., Daley K., Jeter R., Macdonald J.H.G., McRobie A.* Emergence of the London Millennium Bridge instability without synchronization // Nature Communications. 2021. V. 12. No. 1. P. 7223. <https://doi.org/10.1038/s41467-021-27568-y>
9. *Belykh I., Jeter R., Belykh V.* Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // Science Advances. 2017. V. 3. No. 11. P. e1701512. <https://doi.org/10.1126/sciadv.1701512>
10. *Belykh I.V., Daley K.M., Belykh V.N.* Pedestrian-induced bridge instability: the role of frequency ratios // Radiophys. Quant. Electron. 2022. V. 64. No. 10. P. 700–708. <https://doi.org/10.1007/s11141-022-10172-5>
11. *Živanović S., Pavic A., Reynolds P.* Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review // J. Sound Vibrat. 2005. V. 279. No. 1–2. P. 1–74. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.019>

12. Chopra A. Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering / Ed. by A. K. Chopra. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1995. 763 p.
13. Clough R., Penzien J. Dynamics of Structures. N.Y.: McGraw-Hill, 1993.
14. Bachmann H., Pretlove A., Rainer H. Dynamic forces from rhythmical human body motions, in: Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines. Birkhauser, Basel, 1995. Appendix G.
15. Shahabpoor E., Pavic A., Racic V., Zivanovic S. Effect of group walking traffic on dynamic properties of pedestrian structures // J. Sound Vibrat. 2017. V. 387. P. 207–225. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.10.017>
16. Van Nimmen K., Pavic A., Van den Broeck P. A simplified method to account for vertical human-structure interaction // Structures. 2021. V. 32. P. 2004–2019. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.03.090>
17. Macdonald J. Lateral excitation of bridges by balancing pedestrians // Proc. R. Soc. Lond. 2009. V. 465. P. 1055–1073. <https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0367>
18. Czaplewski B., Bocian M., Macdonald J.H.G. Calibration of inverted pendulum pedestrian model for laterally oscillating bridges based on stepping behaviour // J. Sound Vibrat. 2024. V. 572. No. 22. P. 118141. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.118141>
19. Буков В.Н. Оптимизация человеко-машинных систем на основе прогнозирования функционального состояния оператора // АиТ. 1995. Т. 12. С. 124–137.
20. Racic V., Morin J. B. Data-driven modelling of vertical dynamic excitation of bridges induced by people running // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. V. 43. No. 1. P. 153–170. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.10.006>
21. Yao S., Wright J., Pavic A., Reynolds P. Forces generated when bouncing or jumping on a flexible Structure // International Conference on Noise and Vibration. Leuven, Belgium, 2002. P. 563–572.
22. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Аэродинамика самолета. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. 352 с.
23. McRuer D. Pilot-Induced Oscillations and Human Dynamic Behavior: Tech. Rep. 4683: NASA, 1995.
24. Курочкин И.В., Мальцев А.А. О статической оптимизации взаимодействия компонент человеко-машинных систем // АиТ. 1981. Т. 8. С 35–45.
25. Ефремов А.В., Оглоблин А.В., Предтеченский А.Н., Родченко В.В. Летчик как динамическая система. М.: Машиностроение, 1992. 336 с.
26. Hess R. A Model for the Human Use of Motion Cues in Vehicular Control // Guidance, Control, Dynam. 1990. V. 13. No. 3. P. 476–482.
27. McRuer D., Graham D., Krendel E., Reisener W. Human Pilot Dynamics in Compensatory Systems: Theory, Models and Experiments with Controlled-Element and Forcing Function Variations. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Ltd., 1965. AFFDL-TR-65-15.
28. Hess R.A. A Model-Based Theory for Analyzing Human Control Behavior // Advances in Man-Machine Systems Research. 1985. V. 2. P. 129–175.
29. Liang H., Xie W., Wei P., Dehao A., Zhiqiang Z. Identification of Dynamic Parameters of Pedestrian Walking Model Based on a Coupled Pedestrian-Structure System // Appl. Sci. 2021. V. 11. No. 14. P. 1–23. <https://doi.org/10.3390/app11146407>

30. *Magdaleno R., McRuer D.* Experimental Validation and Analytical Elaboration for Models of the Pilot's Neuromuscular Subsystem in Tracking Tasks: Tech. Rep. CR-1757: NASA, 1971.
31. *Hess R., Moore J.K., Hubbard M.* Modeling the Manually Controlled Bicycle // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans. 2012. V. 42. No. 3. P. 545–557. <https://doi.org/10.1109/TSMCA.2011.2164244>
32. *Andriacchi T., Ogle J., Galante J.* Walking speed as a basis for normal and abnormal gait measurements // J. Biomech. 1977. V. 10. No. 4. P. 261–268.
33. *Han H., Zhou D., Ji T., Zhang J.* Modelling of lateral forces generated by pedestrians walking across footbridges // Appl. Math. Modell. 2021. Vol. 89. P. 1775–1791. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.081>
34. Цыпкин Я.З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // АиТ. 1946. Т. 7. № 2–3. С. 107–129.
35. Никольский А.А. Обобщенные критерии устойчивости особых линейных систем автоматического управления с запаздыванием // Электричество. 2020. Т. 1. С. 38–46. <https://doi.org/10.24160/0013-5380-2020-11-38-46>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 27.06.2024

После доработки 20.11.2024

Принята к публикации 28.11.2024

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. В.В. МЕНЬШИХ, д-р физ.-мат. наук ([menshikh@list.ru](mailto:menshikh@list.ru)),  
В.А. НИКИТЕНКО ([vitalijnikitenko82043@gmail.com](mailto:vitalijnikitenko82043@gmail.com))  
(Воронежский институт МВД России)

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ГРАФИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АВТОМАТОВ

Рассматриваются вопросы моделирования объектов и систем на основе графического представления автоматов с использованием алгебраических методов. Решается задача синтеза автоматов на основе построения алгебры их графоидов. С этой целью существующие операции над автоматами переносятся на их графоиды. С учетом дополнительных требований, которые могут возникать при анализе предметной области, вводятся новые операции. Тем самым определяется алгебра графоидов автоматов, позволяющая осуществлять синтез графоидов автоматных моделей с помощью предложенного авторами алгоритма. Доказываются утверждения, подтверждающие корректность этого алгоритма. Рассматривается численный пример синтеза графоида автоматной модели совместного действия функциональных групп в зоне чрезвычайной ситуации.

*Ключевые слова:* графоиды автоматов, операции над графоидами, алгебра графоидов, параллельная синхронная смена состояний автоматов, параллельная асинхронная смена состояний автоматов, недопустимые состояния, недопустимые вершины, синтез графоидов.

**DOI:** 10.31857/S0005231025010073, **EDN:** JQFVER

### 1. Введение

Эффективным аппаратом моделирования динамики функционирования объектов и систем в различных предметных областях являются конечные автоматы [1]. Однако с возрастанием сложности моделируемых объектов и систем значительно увеличивается мощность входного и выходного алфавитов и алфавита состояний автомата, что существенно затрудняет процесс моделирования, делает модели весьма громоздкими и затрудняет возможность интерпретации результатов моделирования.

В этом случае эффективным является использование системного подхода, в соответствии с которым первоначально осуществляется декомпозиция объекта или системы на составляющие, разработка автоматных моделей отдельных составляющих и синтез общей модели [2, 3].

Реализация каждого из перечисленных выше этапов существенно зависит от специфики предметной области моделируемых объектов или систем.

Наиболее сложным является этап синтеза общей модели, поскольку он в наибольшей степени влияет на ее адекватность. Например, в [4, 5] использовались методы теории автоматов для моделирования поведения цифровых двойников производства на основе алгебры автоматов, которая включала не только известные, но и введенные авторами операции над автоматами, учитывающие особенности моделируемого объекта. Другие примеры введения предметноориентированных операций над автоматами и использования алгебры автоматов приведены в [6–8].

Другая проблема, возникающая при синтезе автоматных моделей, заключается в том, что могут существовать значительные ограничения на выбор возможных составляющих общей модели. Если модели составляющих должны соответствовать заданным объектам или системам, то могут накладываться особые требования к процессу синтеза общей модели, заключающиеся в необходимости исключения недопустимых комбинаций состояний составляющих общей модели. Примером может служить задача моделирования совместного действия нескольких функциональных групп, участвующих в ликвидации чрезвычайной ситуации [9, 10]. Ограничения могут быть вызваны, например, требованиями исключения конфликтов между функциональными группами или учетом синергетических эффектов при их совместных действиях [11]. Автоматы, моделирующие функционирование этих групп, выступают в качестве составляющих общей модели процесса ликвидации чрезвычайной ситуации.

Следует заметить, что часто набор состояний составляющих общей модели бывает полностью известен. В этом случае известно представление автомата помеченным графом (графоидом), вершины которого соответствуют состояниям, дуги – переходам между состояниями, а веса дуг описывают реакции автомата на появление различных входных символов. Указанное обстоятельство позволяет осуществлять нахождение графоида общей модели в результате синтеза графоидов автоматных моделей ее составляющих.

Решение указанной задачи может быть получено на основе использования алгебраических методов. В [12, 13] использовалось понятие алгебры конечных детерминированных автоматов на основе введения ряда операций их композиции, которые применимы и для графоидов автоматов. В частности, устанавливались необходимые и достаточные условия декомпозиции автомата в сеть составляющих автоматов на основе вводимых операций и решения автоматных уравнений с помощью специально введенного языка парных алгебр. Использованные подходы естественным образом применимы и для графоидов автоматов, представление которых только дополняется описанием соответствующих автоматов. Однако не во всех предметных областях решение, полученное с использованием описанного в этих работах подхода, может давать содержательный результат, потому что не учитываются возможные ограничения на совместное функционирование составляющих.

В связи с этим актуальной является задача разработки универсального подхода к синтезу графоида общей модели, в котором учитывалось бы наличие ограничений на совместное функционирование моделируемых объектов или систем. В настоящей работе данная задача решается на основе использования алгебраических методов, а также осуществляется обоснование корректности предлагаемого подхода.

## 2. Алгебра графоидов автоматов

Под алгеброй  $\mathcal{A} = \langle \mathcal{N}, \mathcal{S} \rangle$  в соответствии с [14] будем понимать совокупность множества  $\mathcal{N}$  с заданными в нем операциями

$$\mathcal{S} = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n_1}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n_2}, \dots, f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mn_m}\},$$

где  $\mathcal{N}$  – носитель,  $\mathcal{S}$  – сигнатура алгебры ( $f_{kl}$  –  $l$ -я  $k$ -местная операция).

Графоидом  $G$  конечного детерминированного неинициального абстрактного автомата Мили  $A$  является четверка [15]  $(Q, F, X, Y)$ , где  $Q$  – множество занумерованных вершин, соответствующих состояниям автомата  $A$ ;  $F$  – оператор, описывающий взвешенные дуги, т.е. переходы между состояниями и соответствующие им выходные символы в зависимости от поступающих входных символов;  $X$  – входной алфавит автомата  $A$ ;  $Y$  – выходной алфавит автомата  $A$ .

Обозначение  $A\langle G$  будем использовать в том случае, если автомату  $A$  соответствует графоид  $G$ .

Приведем удобные для дальнейшего использования описания оператора  $F$ .

Выражение

$$F^{x/y} q^i = q^{i_s}(x/y)$$

означает, что если автомат находится в состоянии, соответствующем вершине графоида  $q^i$  и на вход автомата поступает символ  $x \in X$ , то автомат перейдет в состояние, соответствующее вершине графоида  $q^{i_s}$  и будет сгенерирован выходной символ  $y \in Y$ .

Обозначим

$$Fq^i = \bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \left\{ F^{x/y} q^i \right\}.$$

В этих обозначениях результат выполнения оператора  $F$  может быть описан как

$$\left\{ Fq^i = \left\{ q^{i_1}(x^{j_1}/y^{k_1}), \dots, q^{i_l}(x^{j_l}/y^{k_l}), \dots, q^{i_{n_i}}(x^{j_{n_i}}/y^{k_{n_i}}) \right\}, i = \overline{1, |Q|} \right\}.$$

Предполагается, что в общем случае  $\{x^{j_1}, \dots, x^{j_{n_i}}\} \subseteq X$ , т.е. автомат может являться частичным.

Оператор  $F$  может быть представлен в виде символьной матрицы, элементами которой являются пары  $x/y$ . Описанная в [3] алгебра таких матриц

упрощает процесс разработки численных методов оперирования с графоидами. Однако при этом необходимо обоснование корректности использования операций.

Введение понятия алгебры графоидов автоматов, в которой в качестве носителя  $\mathcal{N}$  выступает некоторое множество графоидов  $\mathcal{G}_0$ , позволяет формализовать процедуру синтеза графоида общей модели объектов или систем, автоматные модели которых описываются графоидами, содержащимися во множестве  $\mathcal{G}_0$  с использованием различных операций.

Обратимся к описанию и обоснованию корректности этих операций.

### 3. Операции алгебры графоидов автоматов

Определим операцию  $\times$  над конечными непустыми попарно непересекающимися множествами  $M_1 = \{m_1^1, \dots, m_{|M_1|}^1\}, \dots, M_n = \{m_1^n, \dots, m_{|M_n|}^n\}$ :

$$M_1 \times \dots \times M_n = \left\{ \{m_{i_1}^1, \dots, m_{i_n}^n\} \mid i_1 = \overline{1, |M_1|}, \dots, i_n = \overline{1, |M_n|} \right\}.$$

В данном случае  $\times$  не является декартовым произведением, так как результат не зависит от порядка выполнения операции. Это позволит обеспечить коммутативность операций над графоидами автоматов.

Пусть  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_0$  – графоиды

$$(1) \quad G_1 = (Q_{G_1}, F_{G_1}, X_{G_1}, Y_{G_1}); \\ (2) \quad G_2 = (Q_{G_2}, F_{G_2}, X_{G_2}, Y_{G_2}).$$

Если графоиды (1) и (2) удовлетворяют условиям

$$(3) \quad Y_{G_1} \cap X_{G_2} = \emptyset; \\ (4) \quad Y_{G_2} \cap X_{G_1} = \emptyset,$$

то произведением  $\times$  графоидов (1) и (2) называется графоид

$$\Pi = G_1 \times G_2 = (Q_\Pi, F_\Pi, X_\Pi, Y_\Pi),$$

где  $q_\Pi \in Q_\Pi$  определяется как  $q_\Pi = \{q_{G_1}, q_{G_2}\}$ , а  $Q_\Pi, F_\Pi, X_\Pi, Y_\Pi$  задаются формулами:

$$\begin{aligned} Q_\Pi &= Q_{G_1} \times Q_{G_2}; \\ F_\Pi q_\Pi &= F_{G_1} q_{G_1} \times F_{G_2} q_{G_2}; \\ X_\Pi &= X_{G_1} \times X_{G_2}; \\ Y_\Pi &= Y_{G_1} \times Y_{G_2}. \end{aligned}$$

Графоид  $\Pi$  соответствует параллельному функционированию автоматов, описываемых графоидами  $G_1$  и  $G_2$ , с синхронной сменой состояний.

Если графоиды (1) и (2) удовлетворяют условию

$$(5) \quad X_{G_1} \cap X_{G_2} = \emptyset,$$

то суммой + графоидов (1) и (2) называется графоид

$$\Sigma = G_1 + G_2 = (Q_\Sigma, F_\Sigma, X_\Sigma, Y_\Sigma),$$

где  $q_\Sigma \in Q_\Sigma$  определяется как  $q_\Sigma = \{q_{G_1}, q_{G_2}\}$ , а  $Q_\Sigma, F_\Sigma, X_\Sigma, Y_\Sigma$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= Q_{G_1} \times Q_{G_2}; \\ F_\Sigma q_\Sigma &= (F_{G_1} q_{G_1} \times \{q_{G_2}\}) \cup (\{q_{G_1}\} \times F_{G_2} q_{G_2}); \\ X_\Sigma &= X_{G_1} \cup X_{G_2}; \\ Y_\Sigma &= Y_{G_1} \cup Y_{G_2}. \end{aligned}$$

Графоид  $\Sigma$  соответствует параллельному функционированию автоматов, описываемых графоидами  $G_1$  и  $G_2$ , с асинхронной сменой состояний.

Условие (5) позволяет исключить возникновение неопределенности при переходе между состояниями после выполнения операции +, т.е. исключить возможность появления недерминированного автомата.

Заметим, что из определения операций  $\times$  и + для графоидов (1) и (2) следует

$$(6) \quad Q_{G_1 \times G_2} = Q_{G_1 + G_2}.$$

Таким образом, описана алгебра  $\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{G}_1, \mathcal{S}_1 \rangle$  где  $\mathcal{S}_1 = \{\times, +\}$ , обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (G_1 \times G_2) \times G_3 &= G_1 \times (G_2 \times G_3); \\ G_1 \times G_2 &= G_2 \times G_1; \\ (G_1 + G_2) + G_3 &= G_1 + (G_2 + G_3); \\ G_1 + G_2 &= G_2 + G_1. \end{aligned}$$

Тем самым алгебра  $\mathcal{A}_1$  является коммутативной полугруппой по каждой из операций сигнатуры  $\mathcal{S}_1$ .

#### 4. Композиция графоидов

При моделировании реальных систем требуется учет особенностей предметной области, которые приводят к появлению дополнительных требований к осуществлению синтеза автоматных моделей, что, в свою очередь, накладывает некоторые ограничения на операции над их графоидами. К наиболее распространенным требованиям относятся следующие:

- 1) смена состояний одного объекта или системы может инициировать смену состояний другого объекта или системы;
- 2) объект или система, полученные в результате выполнения операций, могут содержать недопустимые состояния.

В связи с этим возникает необходимость расширения сигнатуры  $\mathcal{S}_1$  алгебры  $\mathcal{A}_1$  на основе введения операций, позволяющих учитывать описанные особенности.

Учет первой особенности осуществляется с помощью введения понятия «состояние-триггер», которое предполагает, что переход одного автомата в это состояние инициирует переход другого автомата в некоторое заданное состояние в зависимости от его текущего состояния, т.е. не выполняется хотя бы одно из условий (3) или (4). Рассмотрим процесс функционирования автоматов, которые описываются графоидами (1) и (2), в этом случае.

Если вершина  $q_{G_1}^i$  соответствует состоянию-триггер автомата  $A_1(G_1)$ , инициирующего смену состояний в автомата  $A_2(G_2)$ , то для удобства дальнейшего описания будем обозначать данную вершину как  $T_{G_2} q_{G_1}^i$ .

Пусть в автомата  $A_1(G_1)$  есть состояние-триггер, соответствующее вершине  $T_{G_2} q_{G_1}^i$ , и в этом автомата данному состоянию соответствует выходной символ  $y_{G_1}^k$ . Этот символ одновременно является входным символом автомата  $A_2(G_2)$  и инициирует в нем смену состояния следующим образом: если  $A_2(G_2)$  находился в некотором состоянии, соответствующем вершине  $q_{G_2}^s$ , и множество его входных символов, при появлении которых осуществляется смена состояния, включает  $y_{G_1}^k$ , то  $A_2(G_2)$  переходит из состояния, соответствующего вершине  $q_{G_2}^s$ , в состояние по входному символу  $y_{G_1}^k$ .

Также возможно, что и автомат  $A_2(G_2)$  инициирует смену состояний автомата  $A_1(G_1)$ , т.е. в автомата  $A_2(G_2)$  есть состояние-триггер, соответствующее вершине  $T_{G_1} q_{G_2}^i$ .

Таким образом, возникает необходимость описания графоида, отображающего совместное функционирование двух автоматов, хотя бы один из которых содержит состояние-триггер, влияющее на функционирование другого.

Если для графоидов (1) и (2) не выполняется хотя бы одно из условий (3) или (4), то композицией  $\circ$  графоидов называется графоид

$$K = G_1 \circ G_2 = (Q_K, F_K, X_K, Y_K),$$

если  $Q_K, F_K, X_K, Y_K$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} Q_K &= Q_{G_1} \times Q_{G_2}; \\ F_K q_K &= \bigcup_{\substack{t \in Y_{G_2} \\ l \in Y_{G_1}}} F_{G_1}^{t/l} q_{G_1} \times F_{G_2}^{l/t} q_{G_2}; \\ X_K &= X_{G_1} \times X_{G_2}; \\ Y_K &= Y_{G_1} \times Y_{G_2}, \end{aligned}$$

где  $F_{G_1}^{t/l} q_{G_1}$  – отображение перехода автомата из состояния, соответствующего вершине  $q_{G_1}$  графоида  $G_1$ , при появлении его входного символа  $t \in X_{G_1} \cap Y_{G_2}$ , при котором на выходе появляется символ  $l \in Y_{G_1}$ ,

$F_{G_2}^{l/t} q_{G_2}$  – отображение перехода автомата из состояния, соответствующего вершине  $q_{G_2}$  графоида  $G_2$ , при появлении его входного символа  $l \in X_{G_2} \cap Y_{G_1}$ , при котором на выходе появляется символ  $t \in Y_{G_2}$ .

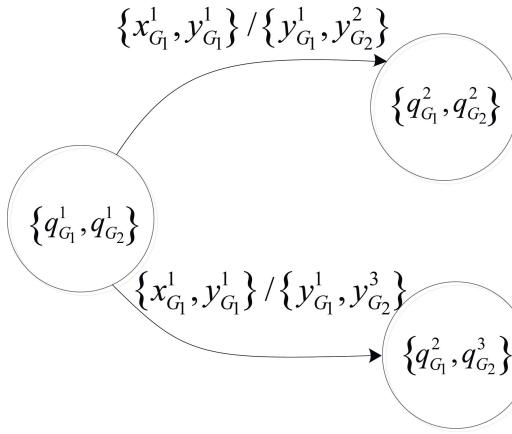


Рис. 1. Графоид подавтомат автомата  $A_{1,2}\langle K \rangle$ .

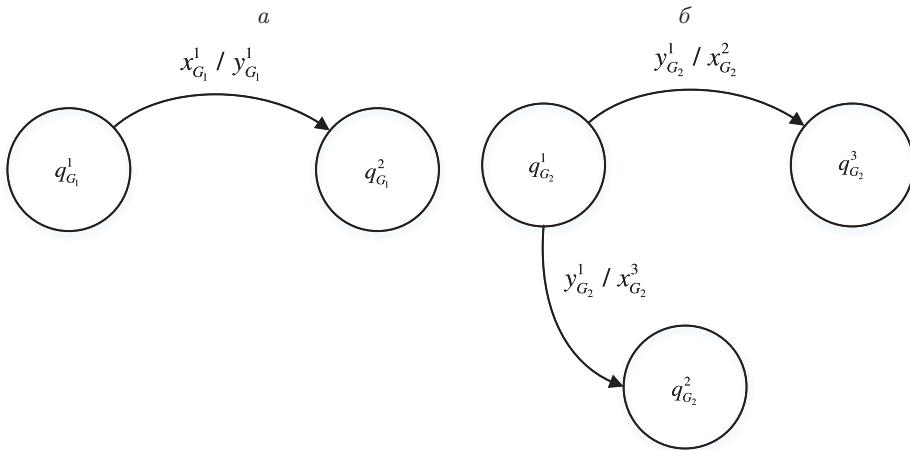


Рис. 2.  $a$  – Графоид подавтомата  $A_1$ ,  $\delta$  – графоид подавтомата  $A_2$ .

Заметим, что из определения операций  $\circ$ ,  $\times$  и  $+$  для графоидов (1) и (2) следует

$$(7) \quad Q_{G_1 \circ G_2} = Q_{G_1 \times G_2} = Q_{G_1 + G_2}.$$

**Теорема 1.** Пусть графоиды (1), (2) соответствуют детерминированным автоматам  $A_1$ ,  $A_2$  и не удовлетворяют хотя бы одному из условий (3) или (4). Тогда  $K = G_1 \circ G_2$  является графоидом детерминированного автомата.

**Доказательство.** Если автомат  $A_{1,2}\langle K \rangle$  является недетерминированным, то без ограничения общности можно считать, что он содержит подавтомат, графоид которого изображен на рис. 1, при этом  $y_{G_1}^1 = x_{G_2}^1$ .

Тогда в автоматах  $A_1$  и  $A_2$  найдутся подавтоматы, графоиды которых изображены на рис. 2.

Следовательно, в этом случае автомат  $A_2$  является недетерминированным, что противоречит условию теоремы.

Заметим, что вследствие ассоциативности и коммутативности операций  $\times, \cup$  операция композиции  $\circ$  также обладает этими свойствами:

$$(G_1 \circ G_2) \circ G_3 = G_1 \circ (G_2 \circ G_3); \\ G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1.$$

Очевидно, что если выполняются условия (3) и (4), то  $G_1 \circ G_2 = G_1 \times G_2$ .

Определим новую алгебру  $\mathcal{A}_2 = \langle \mathcal{G}_2, \mathcal{S}_2 \rangle$  с сигнатурой  $\mathcal{S}_2 = \{\circ, \times, +\}$ , которая, как и алгебра  $\mathcal{A}_1$ , образует коммутативную полугруппу по каждой операции.

## 5. Операция фильтрации графоида

После выполнения бинарных операций сигнатуры  $\mathcal{S}_2$  появляется новый графоид алгебры  $\mathcal{A}_2$ . Автомат, соответствующий данному графоиду, может не удовлетворять ограничениям на совместное функционирование составляющих общей модели потому, что полученный автомат может содержать недопустимые комбинации их состояний с учетом особенностей предметной области, т.е. в полученном автомате возникают конфликтные ситуации (предполагается, что множество конфликтных ситуаций определяет лицо, принимающее решение). Вследствие этого возникает необходимость введения операции фильтрации  $\nabla$ , позволяющей исключать вершины графоида, которые соответствуют недопустимым состояниям автомата. Такие вершины также будем называть недопустимыми.

Заметим, что в [12, 13] изучались только вопросы поиска и удаления недостижимых состояний автоматов, что способствует снижению размерности задачи, но может не удовлетворять требованиям предметной области.

Обозначим через  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  образующие алгебры  $\mathcal{A}_2$ , т.е. графоиды, из которых с помощью операций сигнатуры  $\mathcal{S}_2$  могут быть получены все остальные графоиды носителя  $\mathcal{G}_2$ .

Определим множество  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots, \Psi_r\}$  недопустимых вершин некоторого графоида. Каждая вершина  $\Psi_k$  соответствует множеству  $\left\{q_{\Omega_{k_1}}^{l_{k_1}}, \dots, q_{\Omega_{k_{|\Psi_k|}}}^{l_{|\Psi_k|}}\right\}$  вершин, образующих алгебры  $\mathcal{A}_2$ .

Пусть графоид  $H = (Q_H, F_H, X_H, Y_H)$  получен путем преобразований графоидов  $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}_2$  с помощью операций сигнатуры  $\mathcal{S}_2$ . Тогда множество всех вершин графоида  $H$  имеет следующий вид:

$$Q_H = \left\{ Q_{G_1}, \dots, Q_{G_m}, \{Q_{G_{ij}} | Q_{G_{ij}} = Q_{G_i} \times Q_{G_j}, \forall i, j \in \{1, m\}, i \neq j\}, \dots, \right.$$

$$\left. \{Q_{G_{i_1, \dots, i_n}} | Q_{G_{i_1, \dots, i_n}} = Q_{G_{i_1}} \times \dots \times Q_{G_{i_n}}, \forall i_1, \dots, i_n \in \{1, m\}, i_1 \neq \dots \neq i_n\} \right\}.$$

Определим функцию

$$\pi(q_H, \Psi_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi_k \subseteq q_H, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Тогда вершина  $q_H \in Q_H$  недопустима, если

$$\sum_{k=1}^r \pi(q_H, \Psi_k) \neq 0.$$

Обозначим как

$$\Xi_H = \left\{ q_H \in Q_H \mid \sum_{k=1}^r \pi(q_H, \Psi_k) \neq 0 \right\}$$

множество всех недопустимых вершин.

Для исключения недопустимых состояний введем унарную операцию фильтрации  $\nabla$ . Графоид  $\nabla_{\Xi_H} H$  называется фильтрацией графоида  $H$  по множеству  $\Xi_H$ , если он является подграфом графоида  $H$  с множеством вершин  $Q_{\nabla_{\Xi_H} H} = Q_H \setminus \Xi_H$ .

Таким образом, получена алгебра  $\mathcal{A}_3 = \langle \mathcal{G}_3, \mathcal{S}_3 \rangle$  с сигнатурой  $\mathcal{S}_3 = \{\nabla, \circ, \times, +\}$ .

## 6. Алгоритм синтеза графоидов автоматной модели

Для разработки данного алгоритма первоначально определим алгебру графоидов, сигнатура которой содержит только те операции, которые необходимы для решения задачи синтеза графоидов автоматных моделей с учетом описанных выше особенностей.

Рассмотрим одновременно функционирующие автоматы, которые описываются графоидами (1) и (2). Смена их состояний может происходить как одновременно, так и в различные моменты времени. Следовательно, функционирование автоматов может быть:

- либо синхронизировано, что в процессе синтеза описывается
  - операцией  $\times$ , если они не содержат триггеры, влияющие на функционирование друг друга;
  - операцией  $\circ$ , если они содержат триггеры, влияющие на функционирование друг друга;
- либо быть асинхронным, что описывается операцией  $+$ .

В процессе синтеза должны быть учтены обе возможности функционирования автоматов. Исходя из этого необходимо объединить операции  $\circ$ ,  $\times$  и  $+$ . Для этого введем операцию объединения  $\cup$  графоидов.

Пусть для графоидов (1) и (2) выполняется условие (5) и  $Q_{G_1} = Q_{G_2}$ , тогда объединением  $\cup$  графоидов называется графоид

$$C = G_1 \cup G_2 = (Q_C, F_C, X_C, Y_C),$$

где  $Q_C, F_C, X_C, Y_C$  задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} Q_C &= Q_{G_1} = Q_{G_2}; \\ F_C q_C &= F_{G_1} q_{G_1} \cup F_{G_2} q_{G_2}; \\ X_C &= X_{G_1} \cup X_{G_2}; \\ Y_C &= Y_{G_1} \cup Y_{G_2}. \end{aligned}$$

Данная операция обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (G_1 \cup G_2) \cup G_3 &= G_1 \cup (G_2 \cup G_3); \\ G_1 \cup G_2 &= G_2 \cup G_1. \end{aligned}$$

Учитывая свойства (6) и (7) введенных выше операций  $\circ$ ,  $\times$  и  $+$ , процесс синтеза графоидов автоматных моделей может быть выполнен с помощью следующих комбинаций этих операций:

$$\begin{aligned} G_1 \otimes G_2 &= (G_1 \times G_2) \cup (G_1 + G_2); \\ G_1 \odot G_2 &= (G_1 \circ G_2) \cup (G_1 + G_2). \end{aligned}$$

Полученные после выполнения операций  $\otimes$  и  $\odot$  синтезируемые графоиды могут соответствовать автоматам, которые содержат недопустимые состояния. Для их исключения необходимо использовать операцию фильтрации  $\nabla$ .

Сказанное выше позволяет сделать вывод, что для синтеза графоидов автоматных моделей может быть использована алгебра  $\mathcal{A} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{S} \rangle$ , где  $\mathcal{S} = \{\nabla, \otimes, \odot\}$ .

Рассмотрим алгебраические свойства операций сигнатуры  $\mathcal{S}$ .

Из коммутативности и ассоциативности операций  $\circ$ ,  $\times$ ,  $+$ ,  $\cup$  следует коммутативность и ассоциативность операций  $\otimes$  и  $\odot$ . Поэтому порядок осуществления синтеза общей модели с их использованием не важен.

Обозначим через  $\bullet$  одну из операций множества  $\{\otimes, \odot\}$ . Пусть графоиды  $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots, G_{i_s}$  получены путем преобразований графоидов  $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}$  с помощью операций сигнатуры  $\mathcal{S}$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

*Теорема 2.*

$$\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s}) = \nabla\left(\nabla\left(\dots\left(\nabla((\nabla G_{i_1}) \bullet G_{i_2}) \bullet G_{i_3}\right) \bullet \dots\right) \bullet G_{i_s}\right).$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом математической индукции.

Пусть  $\Xi_{G_{i_t}}$  – множество недопустимых вершин графоида  $G_{i_t}$ , а множество  $\Xi$  содержит все возможные недопустимые вершины комбинаций графоидов  $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots, G_{i_s}$ .

1) Если  $s = 2$ , докажем, что  $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2}) = \nabla((\nabla G_{i_1}) \bullet G_{i_2})$ .

Множество вершин  $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2})$  имеет вид  $Q_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} = \widehat{Q}_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} \setminus \Xi$ , а множество вершин  $\nabla((\nabla G_{i_1}) \bullet G_{i_2})$  имеет вид  $Q_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} = ((\widehat{Q}_{G_{i_1}} \setminus \Xi_{G_{i_1}}) \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \setminus \Xi$ .

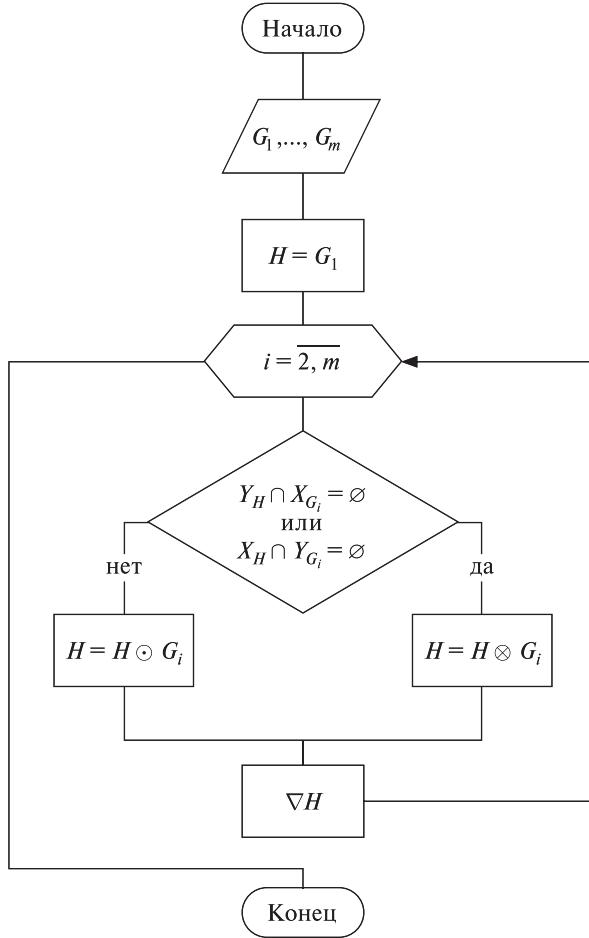


Рис. 3. Алгоритм синтеза графоидов автоматных моделей.

Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad Q_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} &= \left( (\widehat{Q}_{G_{i_1}} \setminus \Xi_{G_{i_1}}) \times \widehat{Q}_{G_{i_2}} \right) \setminus \Xi = \\
 &= \left( (\widehat{Q}_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \setminus (\Xi_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \right) \setminus \Xi.
 \end{aligned}$$

Во множестве  $\Xi_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}$  все вершины являются недопустимыми, следовательно,  $\Xi_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}} \subseteq \Xi$ , и выражение (6) можно переписать в следующем виде:  $(\widehat{Q}_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \setminus \Xi$ , что соответствует  $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2})$ .

- 2) Предположим, что для  $s = k$  утверждение верно, докажем, что оно верно для  $s = k + 1$ .

Имеем

$$\begin{aligned}
 &\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s} \bullet G_{i_{s+1}}) = \\
 &= \nabla \left( \nabla \left( \nabla \left( \dots \left( \nabla(\nabla(G_{i_1}) \bullet G_{i_2}) \bullet G_{i_3} \right) \bullet \dots \right) \bullet G_{i_s} \right) \bullet G_{i_{s+1}} \right),
 \end{aligned}$$

так как графоиды  $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots, G_{i_s}$  получены путем преобразований с помощью операций сигнатуры  $\mathcal{S}$ , то выражение  $G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s}$  можно заменить на эквивалентный графоид  $H = G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s}$ . Тогда получаем, что выражение  $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s} \bullet G_{i_{s+1}})$  имеет вид  $\nabla(H \bullet G_{i_{s+1}})$ . Следовательно, необходимо показать справедливость равенства  $\nabla(H \bullet G_{i_{s+1}}) = \nabla((\nabla H) \bullet G_{i_{s+1}})$ , что было сделано в пункте 1).

Таким образом, алгоритм синтеза графоидов из  $\mathcal{G}$  имеет вид, приведенный на рис. 3. Его корректность вытекает из описанных выше алгебраических свойств операций сигнатуры  $\mathcal{S}$  и доказанной выше теоремы.

## 7. Численный пример

В качестве примера рассмотрим процесс контроля доступа в зону чрезвычайной ситуации, организации поиска пострадавших и эвакуации людей и материальных ценностей из этой зоны [10], что предполагает использование следующих штатных функциональных групп:

- 1) организации доступа в зону чрезвычайной ситуации, действия которой моделируются автоматом  $A_1 \langle (G_1 = (Q_{G_1}, F_{G_1}, X_{G_1}, Y_{G_1})) \rangle$ ;
- 2) организации поиска людей и материальных ценностей, подлежащих эвакуации, действия которой моделируются автоматом  $A_2 \langle (G_2 = (Q_{G_2}, F_{G_2}, X_{G_2}, Y_{G_2})) \rangle$ ;
- 3) организации эвакуации в безопасный район, действия которой моделируются автоматом  $A_3 \langle (G_3 = (Q_{G_3}, F_{G_3}, X_{G_3}, Y_{G_3})) \rangle$ .

В процессе развития чрезвычайной ситуации перечисленные функциональные группы могут находиться в состояниях, которые соответствуют указанным в таблице вершинам.

Описание вершин графоидов, соответствующих состояниям автоматов  $A_1 \langle G_1 \rangle, A_2 \langle G_2 \rangle, A_3 \langle G_3 \rangle$ , моделирующих действия функциональных групп

$q_{G_1}^1$	Полный контроль периметра зоны чрезвычайной ситуации
$q_{G_1}^2$	Осуществление пропускного режима
$q_{G_2}^1$	Ожидание в исходном районе
$q_{G_2}^2$	Выдвижение в район поиска
$q_{G_2}^3$	Поиск подлежащих эвакуации людей и материальных ценностей
$q_{G_2}^4$	Сопровождение подлежащих эвакуации людей и материальных ценностей на сборный эвакуационный пункт
$q_{G_3}^1$	Ожидание формирования колонны для эвакуации
$q_{G_3}^2$	Учет пострадавших и формирование колонны для эвакуации
$q_{G_3}^3$	Движение в безопасную зону

Графоиды  $G_1, G_2, G_3$  автоматов  $A_1, A_2, A_3$  приведены на рис. 4–6.

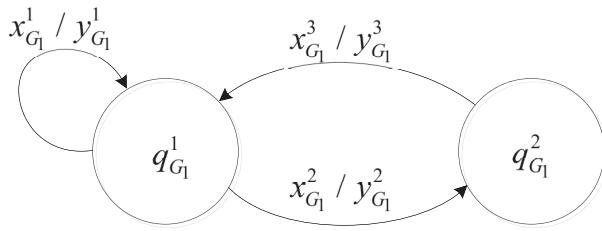


Рис. 4. Графоид  $G_1$ .

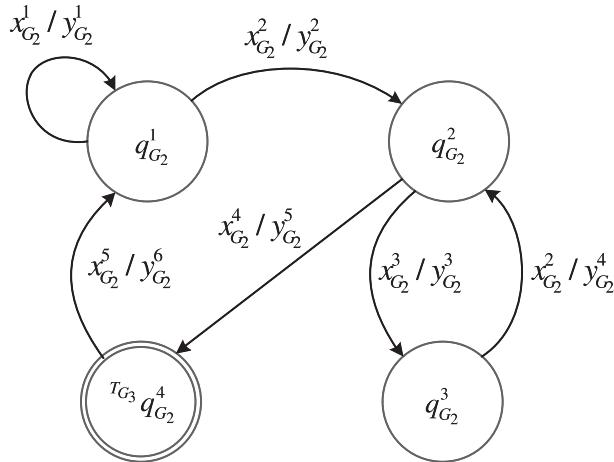


Рис. 5. Графоид  $G_2$ .

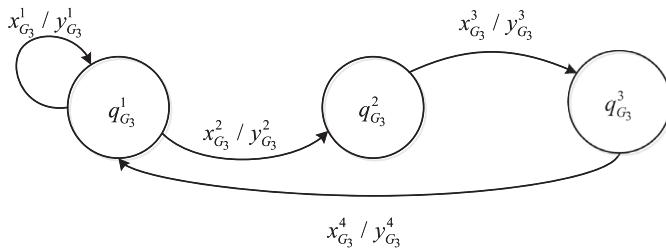


Рис. 6. Графоид  $G_3$ .

Необходимо синтезировать с использованием разработанной алгебры  $\mathcal{A}$  графоид  $H$ , определяющий совместную деятельность функциональных групп. Анализ поставленной задачи позволил выявить:

– потенциальные конфликтные ситуации и определить множество недопустимых вершин

$$\Xi = \left\{ \{q_{G_1}^1, q_{G_2}^2\}, \{q_{G_1}^2, q_{G_2}^1\}, \{q_{G_1}^2, q_{G_2}^3\}, \{q_{G_1}^2, q_{G_2}^4\}, \right.$$

$$\left. \{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^1\}, \{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^3\} \right\};$$

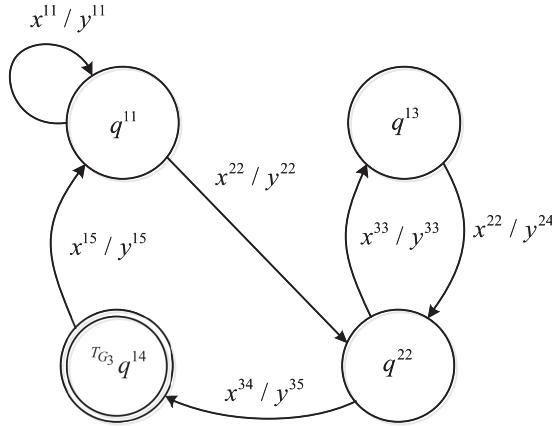


Рис. 7. Графоид  $H = \nabla(G_1 \otimes G_2)$ .

– необходимость инициирования действия автомата  $A_3$  автоматом  $A_2$ : если выходной символ автомата  $A_2$  есть  $y_{G_2}^5$ , то входной символ автомата  $A_3$  есть  $x_{G_3}^2$ .

Например, состояние, соответствующее вершине  $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^3\}$ , является конфликтным из-за того, что функциональная группа, описываемая автоматом  $A_1$ , осуществляет выдвижение в район поиска в тот момент, когда функциональная группа, описываемая автоматом  $A_2$ , осуществляет контроль территории.

Опишем процесс синтеза графоида  $H$  в соответствии с приведенным на рис. 1 алгоритмом.

На первой итерации осуществляется синтез графоидов  $H$  и  $G_2$ :

принимается, что  $H = G_1$  и  $Y_H = Y_{G_1}$ ;

в связи с отсутствием состояний-триггеров, так как  $Y_H \cap X_{G_2} = \emptyset$ , выполняется действие  $H = H \otimes G_2$ ;

исключаются недопустимые состояния, определяемые вершинами  $\{q_{G_1}^1, q_{G_2}^2\}$ ,  $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^1\}$ ,  $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^3\}$ ,  $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^4\}$  графоида  $H$ , т.е. выполняется действие  $H = \nabla H$ , данный графоид представлен на рис. 7, где вершины  $q^{ij} = \{q_{G_1}^i, q_{G_2}^j\}$ , входные символы  $x^{ij} = \{x_{G_1}^i, x_{G_2}^j\}$  и выходные символы  $y^{ij} = \{y_{G_1}^i, y_{G_2}^j\}$ .

На следующей итерации осуществляется синтез графоидов  $H$  и  $G_3$ :

так как  $Y_H \cap X_{G_3} \neq \emptyset$  выполняется действие  $H = H \odot G_3$ ;

исключаются недопустимые вершины  $\{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^1\}$ ,  $\{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^3\}$  графоида  $H$ , т.е. выполняется действие  $H = \nabla H$ , полученный графоид изображен на рис. 8, вершины  $q^{ijk} = \{q_{G_1}^i, q_{G_2}^j, q_{G_3}^k\}$ .

Таким образом, графоид  $H$  соответствует автомату, который описывает параллельное синхронное, асинхронное функционирование автоматов  $A_1, A_2$ , а также инициализацию переходов состояний автомата  $A_3$ .

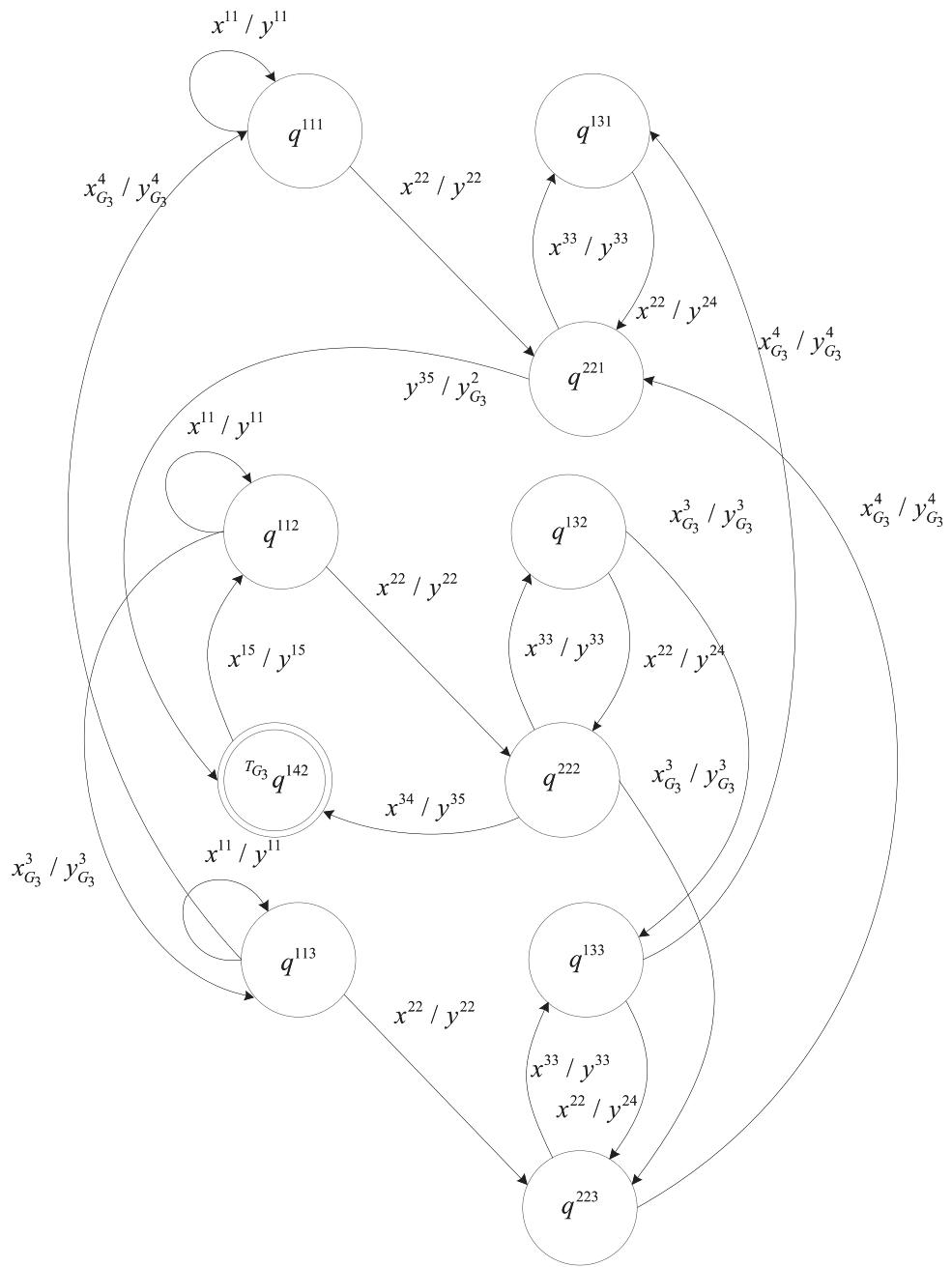


Рис. 8. Графоид  $= \nabla(\nabla(G_1 \otimes G_2) \odot G_3)$ .

В полученном графоиде  $H$  учитываются все взаимосвязанные действия трех штатных функциональных групп, деятельность которых направлена на процесс контроля доступа в зону чрезвычайной ситуации, организации поиска пострадавших и эвакуации людей и материальных ценностей из этой зоны.

## 8. Заключение

В статье построена алгебра графоидов автоматов, позволяющая синтезировать графоид общей модели функционирования автоматов. При построении алгебры частично осуществлялся перенос операций над автоматами на графоиды этих автоматов, а также вводились операции с учетом дополнительных требований предметной области. Разработан алгоритм синтеза графоидов автоматов на основе этой алгебры, который позволяет построить обобщенную модель функционирования объектов независимо от последовательности их соединения в силу коммутативности операций.

Приведен численный пример синтеза графоида автомата, который описывает взаимосвязанные действия трех функциональных групп, используемых при возникновении чрезвычайной ситуации. Данные функциональные группы осуществляют контроль доступа в зону чрезвычайной ситуации, организацию поиска пострадавших и эвакуации людей и материальных ценностей из этой зоны.

В результате получен математический аппарат, позволяющий моделировать совместные действия функциональных групп, участвующих в ликвидации чрезвычайной ситуации. Данный математический аппарат в дальнейшем, за счет наполнения содержанием входных и выходных символов автоматов, может быть использован в моделях оценки эффективности действий функциональных групп и оптимизации выбора состава и тактики их использования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р.Э., Фалб П.Л., Арбид М.А. Очерки по математической теории систем. Пер. с англ. Наппельбаума Э.Л. Под ред. Цыпкина Я.З. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
2. Сысоев В.В., Меньших В.В., Солодуха Р.А., Забияко С.В. Исследование взаимодействий в сети конечных детерминированных автоматов // Радиотехника. 2000. № 9. С. 65–67.
3. Меньших В.В., Никитенко В.А. Численный метод агрегирования автоматных моделей с использованием алгебраических операций над автоматами // Проблемы управления. 2023. № 6. С. 66–75.
4. Гапанович Д.А., Сухомлин В.А. Алгебра конечных автоматов как математическая модель цифрового двойника умного производства // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18. № 2. С. 353–366.
5. Гапанович Д.А., Сухомлин В.А. Моделирование функционирования шахты средствами алгебры конечных автоматов DTA // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18. № 3. С. 634–643.
6. Volkova K.M. Conducting a synthesis of a digital automaton for an automated firefighting system // Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics. 2021. Vol. 21. No. 1. P. 49–58.

7. Широкова Е.В., Евтушенко Н.В. Синтез безопасных компонентов веб-сервисов на основе решения автоматных уравнений // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер.: Естеств. и техн. науки. 2023. № 8. С. 143–150.
8. Соловьев В.В. Синтез быстрых конечных автоматов на программируемых логических интегральных схемах путем расщепления внутренних состояний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 3. С. 69–80.
9. Меньших В.В., Корчагин А.В. Структурные модели взаимодействия подразделений силовых ведомств при возникновении чрезвычайных ситуаций техногенного характера // Тр. Академии управления МВД России. 2015. № 2(34). С. 54–58.
10. Меньших В.В., Самороковский А.Ф., Середа Е.Н., Горлов В.В. Моделирование коллективных действий сотрудников органов внутренних дел. Воронеж: Воронеж. ин-т МВД РФ, 2017. 236 с.
11. Меньших В.В., Горлов В.В., Никитенко В.А. Учет синергетических эффектов при композиции автоматных моделей действий подразделений силовых ведомств, участвующих в ликвидации чрезвычайных обстоятельств // Вестн. Воронеж. ин-та МВД России. 2023. № 2. С. 60–68.
12. Harmanis J., Stearns R. Algebraic structure theory of sequential machines. N.-Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. 211 p.
13. Villa T., Yevtushenko N., Brayton R.K., Mishchenko A., Petrenko A., Sangiovanni Vincentelli A.L. The unknown component problem: theory and applications. Springer, 2012. 311 p.
14. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М.: Наука. Физматлит, 2000. 544 с.
15. Мелихов А.Н. Ориентированные графы и конечные автоматы. М.: Наука, 1971. 416 с.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваевом.*

Поступила в редакцию 10.04.2024

После доработки 24.07.2024

Принята к публикации 02.09.2024

---

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

### Линейные системы

Хартовский В.Е., Урбан О.И. Финитная стабилизация по неполным измерениям систем нейтрального типа в классе регуляторов с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями . . . . .	3
---	---

### Нелинейные системы

Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С. Уравнение Лурье и эквивалентные гамильтоновы системы . . . . .	27
---	----

### Управление в технических системах

Верба В.С., Меркулов В.И., Харьков В.П. Подходы к оптимизации методов наведения на высокоскоростные интенсивно маневрирующие цели. Ч. 2 . . . . .	44
Коньков А.Е., Кружков В.И., Павлова Е.А., Коренев П.С., Чектыбаев Б.Ж., Котов С.В., Зарва Д.Б., Жаксыбаева А.А. Полунатурное моделирование цифровой системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ . . . . .	63

### Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Чистяков И.А. О гарантированной оценке отклонения от целевого множества в задаче управления при обучении с подкреплением . . . . .	80
--	----

### Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Зайцева Ю.С., Фрадков А.Л. Анализ устойчивости системы «мост–пешеходы» на основе критерия Цыпкина . . . . .	99
Меньших В.В., Никитенко В.А. Алгебраические методы синтеза моделей на основе графического представления автоматов . . . . .	114

## C O N T E N T S

### Linear Systems

- Khartovskii V.E., Urban O.I.** Incomplete Measurements-Based Finite Stabilization of Neutral Systems by Controllers with Lumped Commensurate Delays ..... 3

### Nonlinear Systems

- Yumagulov M.G., Ibragimova L.S.** Lur'e Equation and Equivalent Hamiltonian Systems ..... 27

### Control in Technical Systems

- Verba V.S., Merkulov V.I., Kharkov V.P.** Approaches to Optimization of Guidance Methods for High-Speed Intensely Maneuvering Targets. Part 2. Analysis of the Possibilities of Various Optimization Methods ..... 44
- Konkov A.E., Kruzhkov V.I., Pavlova E.A., Korenev P.S., Chektybaev B.Zh., Kotov S.V., Zarva D.B., Zhaksybayeva A.A.** Hardware-in-the-loop simulation of control system for vertical plasma position in KTM tokamak ..... 63

### Intellectual Control Systems, Data Analysis

- Chistiakov I.A.** On Guaranteed Estimate of Deviations from the Target Set in a Control Problem under Reinforcement Learning ..... 80

### Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Zaytseva Y.S., Fradkov A.L.** Analysis of the “Bridge–Pedestrians” System Stability Based on the Tsyplkin Criterion ..... 99
- Menshikh V.V., Nikitenko V.A.** Algebraic Methods of Model Synthesis Based on the Graphical Representation of Automata ..... 114