

ISSN 0005-2310

А Т ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА



10

2023



АТ АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

10

октябрь

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартыхина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

Тематический выпуск



К 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ВИЦЕ-ПРЕЗИДЕНТА АН СССР БОРИСА НИКОЛАЕВИЧА ПЕТРОВА

DOI: 10.31857/S000523102310001X, EDN: YETOWC

В 2023 г. научная общественность отмечает 110 лет со дня рождения великого ученого в области автоматического управления, теоретика ракетно-космической техники и организатора науки вице-президента Академии наук СССР Бориса Николаевича Петрова.

Б.Н. Петров родился 11 марта 1913 г. в Смоленске. После окончания школы в 1930 г. он уехал в Москву. После обучения в фабрично-заводском училище с октября 1932 г. по сентябрь 1933 г. работал токарем по металлу. В 1933 г. поступил в МЭИ на электромеханический факультет. В 1939 г. Борис Николаевич с отличием закончил МЭИ. Дипломный проект на тему «Автоматическое регулирование котлов с пылеугольной топкой» он писал под руководством своего учителя — академика Виктора Сергеевича Кулебакина. Проект был признан выдающимся. По предложению В.С. Кулебакина в 1939 г. Б.Н. Петров был направлен на работу в Комитет телемеханики и автоматики АН СССР, на базе которого в том же году был создан Инсти-

тут автоматики и телемеханики (ИАТ), ныне Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН). В этом институте Б.Н. Петров проработал всю жизнь, пройдя путь от младшего научного сотрудника до директора Института. В октябре 1940 г. Борис Николаевич поступил в аспирантуру ИАТ, его научным руководителем был Вадим Александрович Трапезников. В годы Великой Отечественной войны ИАТ был эвакуирован в Ульяновск, где Б.Н. Петров активно вел научную работу, занимался проблемой автоматизации отбраковки изделий. В 1945 г. Б.Н. Петров представил к защите кандидатскую диссертацию на тему «Анализ автоматических копировальных систем», за которую ему сразу была присуждена ученая степень доктора технических наук. После защиты диссертации Борис Николаевич вел активную научную и педагогическую деятельность. Он рано приобрел огромный приоритет в среде ведущих ученых, обладал выдающимися организаторскими способностями. Это было замечено руководством АН СССР, и в 1947 г. по представлению бюро Отделения технических наук Б.Н. Петров был назначен исполняющим обязанности директора ИАТ. В 1949 г. он стал заведующим кафедрой «Системы автоматического управления летательными аппаратами» Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе (МАИ), руководил кафедрой до конца жизни и воспитал большое число известных ученых и специалистов авиационной и космической техники.

Основные научные труды Б.Н. Петрова относятся к теории управления динамическими объектами: теории инвариантности систем автоматического управления, теории адаптивных и терминальных систем, нелинейных сервомеханизмов и систем с переменной структурой, системам автоматического управления авиационными и космическими аппаратами, основам построения высокоточных измерительных устройств.

Плодотворная деятельность Б.Н. Петрова получила высокую оценку в нашей стране и за рубежом. Он был удостоен званий Героя Социалистического Труда, Ленинской премии и двух Государственных премий, награжден отечественными и зарубежными наградами. Б.Н. Петров был действительным членом Международной академии астронавтики, членом Чехословацкой, Венгерской, Болгарской и Польской академий наук. Ленинская премия (1966 г.) была присуждена Б.Н. Петрову за участие в создании и изготовлении многоместных пилотируемых кораблей-спутников «Восход-1» и «Восход-2», проведении их запусков и осуществлении первого в мире выхода человека в космическое пространство; за участие в создании и изготовлении автоматических станций «Луна-9» и «Луна-10», их запуске и осуществлении мягкой посадки на поверхность Луны, передачу на Землю фотографий лунной панорамы и выводе на окололунную орбиту первого в мире искусственного спутника Луны.

Б.Н. Петров был одним из активных организаторов международных симпозиумов IFAC по тематике, посвященной управлению в пространстве и мирному использованию космоса: Норвегия (1965), Австрия (1967), Франция (1970), Италия (1973), СССР (1974), ФРГ (1975), Англия (1979). С 1966 по 1980 г. Б.Н. Петров был Председателем Совета по международному сотрудничеству и использованию космического пространства «Интеркосмос». В ка-

честве председателя «Интеркосмоса» при Академии наук СССР академик Б.Н. Петров принял активное участие в организации и реализации совместного экспериментального пилотируемого полета советского корабля «Союз-19» и американского корабля «Аполло». Борис Николаевич был не только крупным ученым, но и выдающимся организатором науки. С 1963 г. он бессменно был академиком-секретарем Отделения механики и процессов управления АН СССР, а в 1979 г. его избрали вице-президентом Академии наук СССР.

Вся научная жизнь Б.Н. Петрова была связана с ИПУ РАН, в котором развиваются основные современные теоретические направления по управлению космическими объектами, летательными аппаратами и динамическими объектами, инициированные академиком Б.Н. Петровым. К ним относится теория терминального и адаптивного управления космическими объектами в штатных и нештатных условиях эксплуатации с различным уровнем априорной и текущей информации. В 70-х годах Б.Н. Петровым была поставлена проблема разработки формальных моделей и методов проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов и их программного обеспечения. На основе единой методологии разработаны методы и средства формализации, алгоритмы и программы проектирования оптимальных модульных систем обработки данных реального времени. Получила дальнейшее развитие теория оптимального управления с использованием векторного критерия при синтезе алгоритмов, обеспечивающих реализацию желаемых траекторий движения динамических объектов. При решении задач подавления влияния внешних возмущений на систему управления, кроме классических методов, используется теория анизотропного управления и фильтрации для линейных дискретных стохастических систем. Для решения задач информационного обеспечения систем управления летательными аппаратами предложен и развивается метод пространственного и углового относительного позиционирования при использовании в качестве измерительной информации параметров градиента индукции магнитного поля.

Настоящий сборник содержит статьи, в которых представлены результаты решения задач, возникающих в рамках указанных выше теоретических направлений.

В.М. Глумов, доктор технических наук

© 2023 г. А.К. ВОЛКОВИЦКИЙ, д-р техн. наук (avolkovitsky@yandex.ru),
Е.В. КАРШАКОВ, д-р техн. наук (karshakov@ipu.ru),
Б.В. ПАВЛОВ, д-р техн. наук (pavlov@ipu.ru),
Е.А. ТРЕТЬЯКОВА (ekaterina_tretikova@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ МАГНИТОГРАДИЕНТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Работа посвящена решению актуальной задачи определения взаимного пространственного расположения объектов и их взаимной ориентации. Поставлена задача: на основе исследования особенностей дифференциальной пространственной структуры магнитного поля локального дипольного источника показать принципиальную возможность пространственного и углового относительного позиционирования при использовании в качестве измерительной информации параметров градиента индукции магнитного поля в тензорной форме и в форме вектора градиента абсолютной величины. Приведено решение задачи, рассмотрены особенности и ограничения для обеих форм представления. Кратко представлены принципы построения магнитоградиентных измерительных систем, рассмотрены ограничения технической реализации, показана целесообразность использования источника переменного магнитного поля. Приведены результаты демонстрационных экспериментов, доказывающих возможность применения предложенного метода позиционирования для различных инженерных задач.

Ключевые слова: относительное позиционирование, индукция магнитного поля, градиент магнитного поля, тензор градиента.

DOI: 10.31857/S0005231023100021, **EDN:** YEUIPM

1. Введение

Решение многих инженерных задач так или иначе связано с необходимостью определения относительного взаимного расположения объектов при их взаимодействии. Так, высокоточный контроль необходим для управления движением при дозаправке топливом в воздухе; швартовке судна к причалу, наливному терминалу или буровой платформе; посадке летательного аппарата на ограниченную площадку, стыковке космических и подводных аппаратов [1–3]. Решение задачи относительного позиционирования предполагает, что в системе координат, связанной с одним из объектов, требуется определить радиус-вектор точки расположения другого объекта, а также их взаимную угловую ориентацию. Сегодня для решения такого рода задач применяются гироинерциальные системы, многоантенные ГНСС-приемники, оптические системы и т.п., однако во многих случаях техническое решение существенно осложняется особенностями условий применения, становясь при этом

избыточно громоздким. Во многих случаях точность позиционирования оказывается недостаточной. Значительные перспективы в развитии методов относительного позиционирования открывает возможность использования магнитоградиентных измерений. Основу идеи составляет тот факт, что направление и абсолютная величина вектора индукции магнитного поля точечного дипольного излучателя в некой точке пространства в полной мере определяются величиной и направлением вектора дипольного магнитного момента источника и положением точки измерения. Характер зависимости напряженности поля позволяет по данным, полученным измерителем поля локального излучателя, определить одновременно их взаимное пространственное и угловое расположение.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую схему. Пусть в начале системы координат располагается локальный дипольный излучатель магнитного поля с произвольным направлением вектора дипольного магнитного момента $\mathbf{M}$, а измерение поля осуществляется в произвольной точке пространства, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$ в этой системе координат (рис. 1).

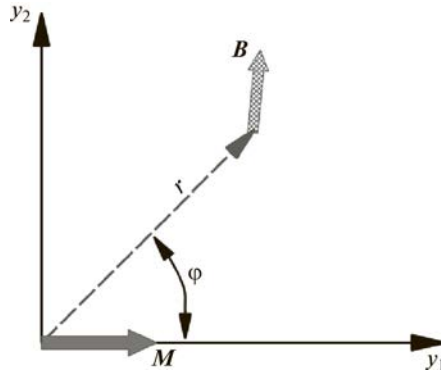


Рис. 1. Вектор дипольного магнитного момента и вектор индукции поля в системе координат, связанной с диполем-излучателем.

Для потенциала магнитного поля U^B локального дипольного излучателя в связанной с ним системе координат справедливо соотношение:

$$(1) \quad U^B = \frac{\mu\mu_0 \mathbf{r}^T \mathbf{M}}{4\pi (\mathbf{r}^T \mathbf{r})^{3/2}}.$$

Здесь μ и μ_0 — магнитная проницаемость среды и магнитная постоянная в международной системе единиц (СИ) соответственно.

Дифференцируя (1), получим значения для вектора индукции поля:

$$(2) \quad \nabla U^B = \frac{\mu\mu_0 |\mathbf{M}|}{4\pi |\mathbf{r}|^5} \begin{pmatrix} 3y_1^2 - |\mathbf{r}|^2 \\ 3y_1 y_2 \\ 3y_1 y_3 \end{pmatrix},$$

а также тензора его градиента:

$$\mathbf{U} = \nabla \nabla^T U^B = \frac{3\mu\mu_0 |\mathbf{M}|}{4\pi |\mathbf{r}|^7} \times$$

$$(3) \quad \times \begin{pmatrix} -2y_1^3 + 3y_1y_2^2 + 3y_1y_3^2 & -4y_1^2y_2 + y_2^3 + y_2y_3^2 & -4y_1^2y_3 + y_2^2y_3 + y_3^3 \\ -4y_1^2y_2 + y_2^3 + y_2y_3^2 & y_1^3 - 4y_1y_2^2 + y_1y_3^2 & -5y_1y_2y_3 \\ -4y_1^2y_3 + y_2^2y_3 + y_3^3 & -5y_1y_2y_3 & y_1^3 + y_1y_2^2 - 4y_1y_3^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть параметры магнитного поля в точке наблюдения определяются тензорным градиентометрическим измерителем, система координат которого ориентирована относительно источника поля произвольно. Определение параметров тензора градиента заключается в измерении значений поля в нескольких точках пространства вблизи точки с радиус-вектором $\mathbf{r}$ [5].

Поставим задачу: зная величину и направление вектора дипольного магнитного момента источника поля в связанной с ним системе координат, а также располагая результатами измерений параметров тензора градиента поля в области расположения точки наблюдения в системе координат измерителя, определить параметры радиус-вектора между источником и измерителем поля, а также направление вектора дипольного магнитного момента излучателя в системе координат измерителя.

3. Позиционирование по измерениям тензора градиента магнитного поля

Важные для решения задачи позиционирования параметры тензора (3) могут быть получены измерением поля в пространственно разнесенных, однако достаточно близких по отношению к расстоянию до источника, точках пространства (чтобы можно было ограничиться линейным приближением зависимости изменения поля от расстояния).

Потенциал магнитного поля — гармоническая функция. Поэтому тензор (3) симметричен, а его след равен нулю. Таким образом, он содержит не девять, а всего пять независимых компонент. Более того, ортогональными преобразованиями система координат измерителя может быть приведена к главным осям тензора. В этой системе отличны от нуля только его диагональные элементы.

Угловое расхождение α систем координат главных осей тензора y' и системы y определяется углом φ между вектором дипольного магнитного момента и радиус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 2). При знании угла φ между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и направлением вектора $\mathbf{M}$ из (3) следует, что значения углов α и φ связаны с соотношениями главных компонент тензора (рис. 3). Также из (3) следует, что при повороте системы координат измерителя вокруг оси y_3 на 180° значение тензора остается неизменным, только поменяются местами и сменят знак его главные компоненты. Рисунок 3 это наглядно показывает.

Тот факт, что значения углов α и φ определяются одними и теми же соотношениями значений главных компонент тензора (угол α при этом определяется с точностью до 180°), дает основания для определения по данным

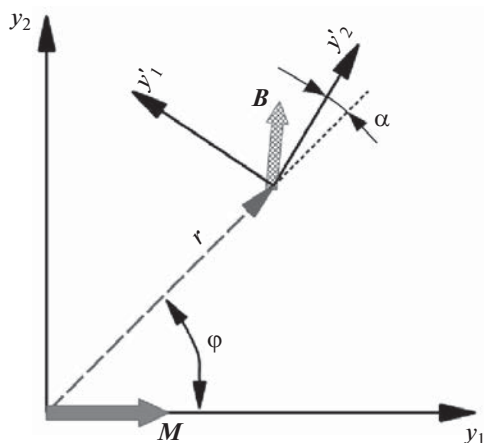


Рис. 2. К параметрам тензора градиента поля точечного диполя: главные оси тензора в точке измерения поля.

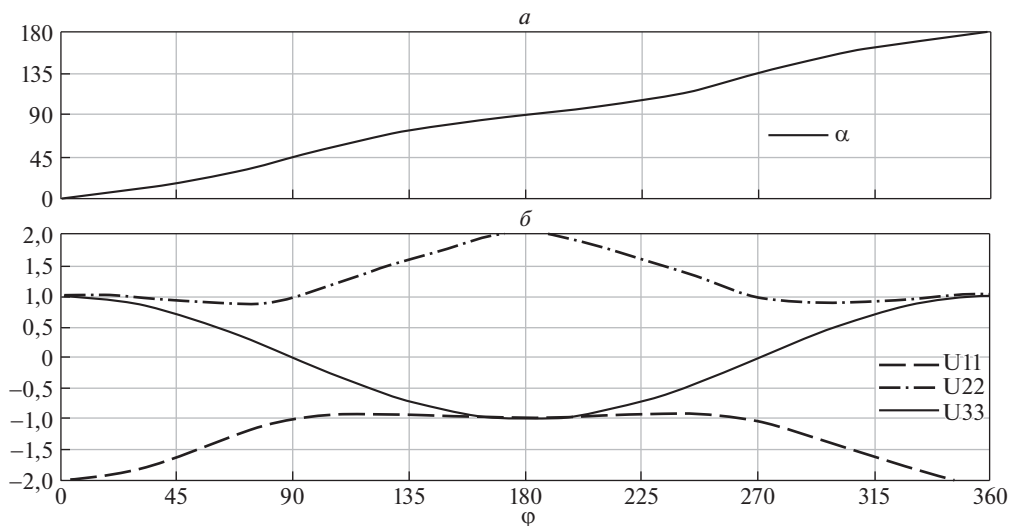


Рис. 3. Зависимость параметров тензора от значения угла φ : *a*) — углового расхождения систем координат (угол α), *б*) — значений главных компонент тензора $\mathbf{U}'$.

магнитоградиентных измерений направлений радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора дипольного момента $\mathbf{M}$. При известном значении абсолютной величины дипольного магнитного момента может быть определено и расстояние между излучателем и измерителем, что и составляет решение задачи относительного позиционирования.

К сожалению, решение задачи позиционирования неоднозначно. Располагая результатами измерений компонент тензора $\mathbf{U}'$ в некой точке пространства, задачу позиционирования диполя-излучателя в системе главных осей тензора можно рассматривать следующим образом:

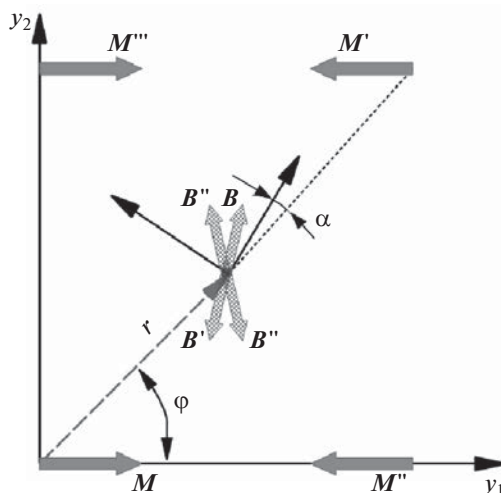


Рис. 4. Неопределенность при определении ДММ по измерениям тензора градиента магнитного поля.

В интервале от 0° до 90° по φ компонента U'_{11} , отвечающая значению второй производной по первой компоненте, максимальна по амплитуде и отрицательна. Задав соответствующим образом направление первой оси, необходимо так выбрать направление третьей, чтобы ей соответствовала минимальная амплитуда градиента. Вторая ось дополняет тройку до правой.

В интервале от 90° до 180° по φ компонента U'_{22} , отвечающая второй производной по второй компоненте, максимальна по амплитуде и положительна. Задав соответствующим образом направление второй оси, необходимо так выбрать направление третьей оси, чтобы ей соответствовала минимальная амплитуда градиента. Направление первой оси должно задавать правую тройку.

В интервале от 360° до 180° по φ компоненты тензора ведут себя так же, как и в интервале от 0° до 180° . Таким образом, угол φ можно определить лишь с точностью до знака. При этом если для φ от 0° до 180° определяется угол α , то для φ от 360° до 180° это угол $-\alpha$.

В силу нечувствительности к повороту на 180° компоненты тензора градиента определяют два возможных направления точки расположения диполей-излучателей, которые могли бы создать измеренный градиент — $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$. Эти возможные излучатели расположены оппозитно относительно точки наблюдения, одинаковы по величине и противоположны по направлению. Кроме того, результатам измерений так же отвечают еще два диполя $\mathbf{M}''$ и $\mathbf{M}'''$ в силу симметрии относительно оси диполя (рис. 4).

Таким образом, задача определения положения дипольного излучателя по измерениям тензора градиента однозначно решается только в случае, если априори известен квадрант его расположения. Из рис. 4 также видно, что дополнительная информация о направляющих косинусах вектора поля $\mathbf{B}$ позволит сразу же отбросить неверные гипотезы, а если считать известной абсолютную величину дипольного магнитного момента излучателя, то со-

гласно (2) и (3) можно определить и расстояние до диполя, т.е. получить необходимую информацию для решения задачи относительного позиционирования.

Заметим, однако, что результат измерений параметров тензора градиента поля точечного излучателя инвариантен к повороту системы координат, связанной с источником поля, вокруг оси, направление которой совпадает с направлением вектора дипольного магнитного момента. Это означает, что для определения взаимной угловой ориентации объектов проведенных измерений недостаточно.

Для решения этой задачи может быть привлечена дополнительная информация, для некоторых условий вполне органичная. Так, при сближении судна с причалом, направления вертикальных осей в системах, связанных с источником поля и измерителем, можно считать совпадающими. Если источник поля размещен на конусе заправочного шланга, а вектор дипольного момента направлен вдоль него, то влияние поворота системы координат вокруг вектора момента ничего не меняет с точки зрения процесса стыковки при дозаправке в воздухе.

Полное же решение задачи позиционирования может быть получено, если расположить на одном из взаимодействующих объектов не один, а несколько дипольных излучателей. Техническая возможность выполнения корректных измерений в этом варианте рассмотрена ниже.

4. Позиционирование с использованием векторного магнитоградиентометра

Важно заметить, что на аппаратном уровне измерение компонент тензора (3) предполагает использование трех пространственно разнесенных векторных датчиков — измерителей индукции поля. Сегодня такого рода приборы характеризуются невысокими показателями точности.

Некоторым образом большей точностью обладают скалярные магниточувствительные датчики, непосредственно измеряющие абсолютное значение индукции поля. Их функционирование основано на квантовых эффектах прецессии атомов в поляризованном свете (квантовый магнитометр с оптической накачкой) или протонов (протонный и оверхаузеровский магнитометры) [6]. В связи с этим интересно рассмотреть возможность определения пространственного расположения и ориентации источника поля по результатам определения вектора градиента абсолютной величины вектора индукции магнитного поля. Компоненты этого вектора могут быть измерены системой, составленной из четырех пространственно разнесенных скалярных датчиков. Значение вектора градиента абсолютной величины индукции поля и тензора градиента связаны соотношением

$$(4) \quad \nabla |\mathbf{B}| = (\nabla \mathbf{B}^T) (\mathbf{B} / |\mathbf{B}|).$$

Это соотношение получается при дифференцировании $|\mathbf{B}| = \sqrt{\mathbf{B}^T \mathbf{B}}$. Получается, что для решения задачи позиционирования по данным векторной градиентометрии при измерениях необходимо определить не только скалярные

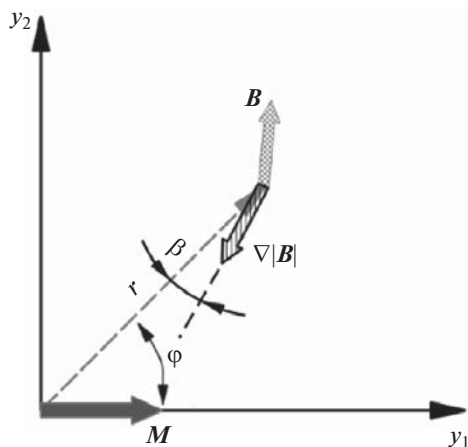


Рис. 5. Измерение поля и вектора градиента абсолютной величины вектора магнитной индукции.

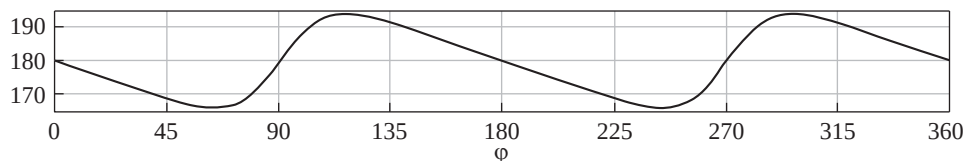


Рис. 6. Расхождение направлений радиус-вектора и вектора градиента.

значения поля в четырех точках, но и направление вектора поля (отношение $\mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ в (4)).

Расчеты показывают, что вектор градиента направлен преимущественно в сторону источника (рис. 5). Величина углового расхождения β между вектором градиента и направлением на излучатель зависит от угла φ между направлениями радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора дипольного момента $\mathbf{M}$. Максимальное значение расхождения составляет порядка 15° .

Зависимость углового расхождения β радиус-вектора и вектора градиента от направления на диполь показана на рис. 6. Хорошо видно, что даже при непосредственных измерениях вектора градиента задача определения направления на диполь-излучатель решается хотя и грубо, однако без неоднозначности, присущей тензорным измерениям.

По данным измерений вектора при известном значении дипольного магнитного момента может быть вычислено расстояние до источника, но для определения радиус-вектора необходима дополнительная информация. Эта дополнительная информация может быть получена по серии измерений при движении объектов друг относительно друга. Также можно использовать показания нескольких разнесенных градиентометров. Поскольку осями симметрии эквивалентных решений являются линии, проведенные через точку измерений параллельно и перпендикулярно оси диполя, то уже для трех не лежащих на одной прямой градиентометров результатом определения положения

источника будет единственная точка. Заметим, что такая схема, хотя и сложна технически, не требует задания величины дипольного момента источника, т.е. позволяет не только избавиться от неоднозначности, но и локализовать источник, определив при этом величину его дипольного момента.

5. Ограничения технической реализации

Выбор формы представления магнитоградиентной информации, а значит, и способа измерений, и структуры магнитоизмерительной установки для решения задачи относительного позиционирования во многом определяется особенностями условий применения. Немалую роль играют особенности функционирования датчиков, динамика движения объектов, наличие помех в зоне применения и многое другое. Однако важно, что кроме поля, обусловленного работой искусственного диполя-излучателя, измеритель неизбежно регистрирует естественное магнитное поле земли, очень большое по величине, обычно имеющее существенный градиент, а также непредсказуемо изменчивое во времени под действием естественных геомагнитных возмущений.

Этот факт, тем не менее, не следует считать существенным препятствием для приведения в действие рассмотренных выше методов и алгоритмов, поскольку в качестве источника поля можно использовать катушку индуктивности (петлевой диполь), питаемую переменным током определенной формы. Такой подход позволяет использовать двух- и трехдипольный излучатель, преодолев тем самым неоднозначность в определении направления на источник в случае применения тензорного измерителя. Задача выделения на приеме вектора поля каждого из излучателей в отдельности существенной сложности не представляет.

Другого рода сложности в применении рассмотренных алгоритмов оказываются связанными с особенностями функционирования магниточувствительных датчиков и, в первую очередь, влиянием магнитных помех в процессе измерений. Использование переменного магнитного поля позволяет применить алгоритмы узкополосной фильтрации, что существенно уменьшает это негативное влияние. Более того, указанный подход позволяет в качестве измерителей использовать индукционные магнитометры, не способные измерить постоянную составляющую поля, однако обладающие существенно более высокой чувствительностью по отношению к датчикам других типов.

Важно также отметить, что рассмотренные алгоритмы являются базовыми и не учитывают принципиально важных аспектов возможной технической реализации. Так, источник поля предполагается локальным, а точнее, точечным дипольным излучателем. Однако технически реализуемый излучатель неизбежно имеет ненулевой размер, а потому его поле отличается от поля идеального диполя. Степень отличия по мере удаления уменьшается, однако при значительном удалении существенно снижается амплитуда измеряемого поля, в полной мере проявляются ограничения чувствительности и точности датчиков, негативное влияние различных внешних помех.

Аналогичные сложности технической реализации характерны и для градиентных измерителей поля. Само определение градиента как второй производ-

ной потенциала предполагает, что приращения вектора индукции поля вдоль выделенных направлений измерены в точке на бесконечно малых приращениях расстояния. В технической реализации даже при небольших расстояниях между точками измерений поля расхождение значений, скажем, производной $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$ и отношения $\frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta x}$ присутствует непременно и вследствие существенно нелинейной зависимости величины поля от расстояния ($|\mathbf{B}| \sim 1/|\mathbf{r}|^3$) неизбежно растет по мере приближения к источнику поля. В этом же контексте отдельного внимания заслуживает рассмотрение возможности использования скалярных датчиков для построения векторного градиентометра. Высокоточные и высокочувствительные скалярные квантовые магнитометры с оптической накачкой могли бы использоваться при малом расстоянии между ними в структуре установки, однако их устройство таково, что приближение датчиков друг к другу ближе 1,5 м радикально искажает показания. Не менее важными факторами, способными разрушить стройную схему базовых алгоритмов, являются и другие несовершенства различных магниточувствительных датчиков и измерительной системы в целом: ориентационные ошибки, различного рода нелинейности, температурный дрейф нулей и масштабных коэффициентов и т.п.

6. Эксперименты по оценке точности определения взаимного положения

Приведенные особенности технической реализации делают не вполне очевидной саму возможность приведения базовых алгоритмов в действие и объясняют стремление к проведению экспериментов, способных пролить свет на реально достижимые возможности в части: требуемых характеристик датчиков и измерительной системы в целом, доступного диапазона расстояний между источником и измерителем поля, степени влияния различного рода помех, потенциально достижимой точности определения геометрических параметров, быстродействия. Для оценки технической реализуемости и подтверждения эффективности рассмотренных алгоритмов была проведена серия экспериментов, задачей которых являлась оценка точности определения расстояний и направлений в реальных условиях с учетом естественных магнитных помех и ограниченной точности магниточувствительных датчиков, а также ограниченной точности контроля дипольного магнитного момента излучателя.

В качестве источника поля использовался петлевой излучатель — плоская катушка индуктивности диаметром 500 мм, 100 витков, питаемая током в форме меандра частотой 4 Гц. Амплитуда дипольного магнитного момента составляла порядка 35 Ам^2 , для упрощения контроля направление вектора было установлено горизонтальным. Магнитоградиентный измеритель тензорного типа был составлен из трех векторных феррозондовых магнитометров НВ0302 [7], обладающих чувствительностью на уровне 1,0–5,0 нТл. Датчики устанавливались на вращающейся платформе в горизонтальной плоскости по вершинам равностороннего треугольника с длиной ребра 1,0 м. Выполнению экспериментов предшествовала серия калибровочных процедур, освещение

теоретических основ и технологии которых выходят за рамки темы данной статьи. Последовательность же измерительных процедур в финальной схеме эксперимента была представлена следующими сериями.

При известном расстоянии от центра треугольника магнитоградиентной системы до источника поля (это расстояние составляло от 5 м) выполнялась серия измерений, в которых магнитоградиентная измерительная установка оставалась неподвижной, а петлевой излучатель, сохраняя свое расположение в пространстве, последовательно изменял направление дипольного момента в азимуте. Затем измерительная установка, оставаясь на месте, изменяла свое положение в азимуте. Эта серия позволяла оценить точность определения направления на источник и направления вектора его дипольного момента. Измерения в этой последовательности были выполнены дважды. Первая часть служила основанием для проведения процедур калибровки, а по данным другой осуществлялся контроль точности.

Вторая серия экспериментов заключалась в контроле точности определения расстояния до источника поля при различных направлениях вектора дипольного магнитного момента. Магнитоизмерительная установка оставалась неподвижной, а петлевой излучатель с шагом 2,0 м отдалялся от измерителя на расстояние от 5 до 13 м. В каждом положении выполнялось четыре измерения при разных направлениях вектора дипольного магнитного момента. В данной серии оценивалась точность определения расстояния до источника на различных дистанциях и при различных направлениях вектора дипольного момента.

В ходе экспериментов получены следующие результаты.

На рис. 7 показаны результаты эксперимента по определению расстояния до источника по данным измерения градиента. По горизонтали отложены заданные значения расстояния между диполем-излучателем и измерительной установкой, по вертикали — счисленные. Кривой показано счисленное значение, горизонтальными отрезками — осредненное для каждого из интервалов времени, соответствующих удалению диполя от точки к точке с шагом 1,0 м.

Из рисунка видно, что расстояние до источника в представленной схеме эксперимента вычисляется в целом достоверно. Небольшое расхождение объясняется несовершенством условий эксперимента: существенным влиянием магнитных помех в зоне измерений, а также погрешностью размещения диполя-излучателя относительно измерительной системы. Результирующая точность в данном эксперименте составила 4–9% в зависимости от величины определяемого расстояния.

На рис. 8 приведены два графика, показывающие возможность определения по данным магнитоградиентных измерений параметров взаимной угловой ориентации приемной системы и излучателя. На графиках показаны результаты изменения во времени определения значений углов азимутальной ориентации вектора дипольного магнитного момента (направление вектора момента) и выделенной оси измерительной установки (ориентация измерителя). Счисленные значения отложены по вертикальной оси. Отрезками прямых на графиках показаны предугадываемые значения. Из рисунка хо-

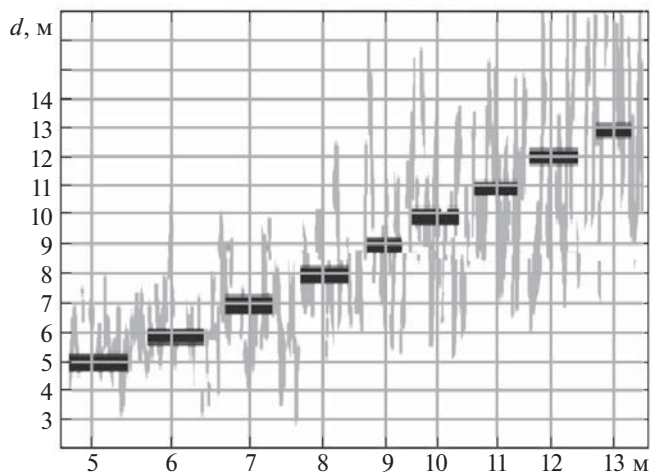


Рис. 7. Вычисление расстояния до источника поля.

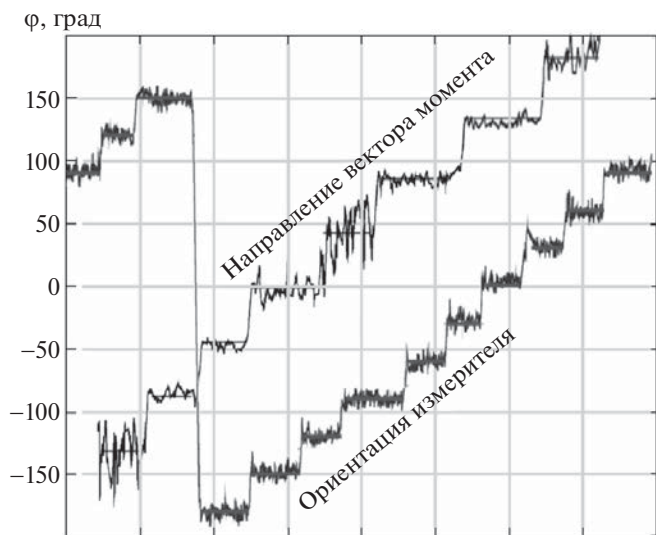


Рис. 8. Вычисление параметров угловой ориентации.

рошо видно, что в данном эксперименте направление на диполь-излучатель определено по результатам магнитоградиентных измерений в целом точнее, чем направление вектора дипольного момента, однако, принимая во внимание простоту схемы измерений, в целом показана достаточная достоверность работы алгоритмов определения обоих направлений.

Результирующая точность определения ориентации измерителя составила $3\text{--}10^\circ$ в зависимости от расстояния. Результирующая точность определения направления вектора дипольного момента зависит не только от расстояния, но и от ориентации измерителя. Она составила $10\text{--}30^\circ$ в зависимости от расстояния.

7. Заключение

Приведенное в работе исследование позволило сформулировать базовые принципы перспективного метода относительного углового и пространственного взаимного позиционирования объектов. Приведенные расчеты показывают принципиальную возможность построения конструктивно и функционально простых высокоточных систем, полезных для решения задач управления движением объектов при их взаимодействии: причаливании, стыковке, дозаправки в воздухе, контроле положения корабля относительно якоря и т.п. Проведенные на практике и кратко представленные в данной работе эксперименты подтвердили техническую возможность построения систем, работающих на принципах рассмотренных в работе алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оболенский Ю.Г., Похваленский В.Л., Чеглаков Д.И. Алгоритм автоматического управления летательным аппаратом при дозаправке топливом в воздухе // Труды МАИ. 2013. Выпуск № 65. С. 1–17.
2. Небылов А.В., Перлюк В.В., Леонтьева Т.С. Исследование технологии взаимной навигации и ориентации малых космических аппаратов в группе // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18. № 1. С. 88–93.
3. Колесников М.П., Мартынова Л.А., Пашкевич И.В., Шелест П.С. Метод позиционирования автономного необитаемого подводного аппарата в процессе приведения к причальному устройству // Изв. Тул. гос. ун-та. Технические науки. 2015. Вып. 11. Ч. 2. С. 38–48.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II (Теория поля). М.: Физматлит, 2022. 512 с.
5. Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В. Магнитоградиентные измерительные системы и комплексы: Монография в двух томах. Принципы измерений и структура магнитоградиентных комплексов. Том I. М.: ИПУ РАН. 2018. 149 с.
6. Померанцев Н.М., Рыжков В.М., Скотский Г.В. Физические основы квантовой магнитометрии. М.: Наука, 1972. 448 с.
7. Магнитные приборы. Преобразователь индукции магнитного поля трехкомпонентный НВ0302 [Электронный ресурс]: — Сайт производителя — Электронные данные. Режим доступа: URL.: <https://www.magnetic.spb.ru/products/31125352>, свободный — (дата обращения 15.07.2023).

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 17.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru),
В.П. ЯХНО, канд. техн. наук (vic_iakhno@mail.ru),
П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru),
Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),
М.Э. БУЗИКОВ (me.buzikov@physics.msu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ПЕРЕХВАТА ПРЯМОЛИНЕЙНО ДВИЖУЩИХСЯ ЦЕЛЕЙ¹

Рассматривается задача комбинаторной оптимизации поиска плана перехвата в простых движениях прямолинейно движущихся целей как модификация динамической задачи коммивояжера. Вводятся новые для такой задачи макрохарактеристики и определения, которые используются для классификации полученных решений. Описаны векторные критерии, составленные из нескольких функционалов, имеющих прикладное значение. Для двух типов критериев доказаны принципы неоптимальности простоя и максимальной скорости. Предложен и реализован интеллектуальный полнопереборный алгоритм с элементами динамического программирования для поиска оптимальных планов по введенным критериям перехвата. Для набора различных начальных обстановок собрана статистика решений разработанного алгоритма, на которой исследованы предложенные макрохарактеристики и сделаны выводы об их применимости в качестве локальных правил для жадного алгоритма поиска субоптимального плана перехвата.

Ключевые слова: динамическая задача коммивояжера, комбинаторная оптимизация, перехват в простых движениях.

DOI: 10.31857/S0005231023100033, EDN: YEYLZE

1. Введение

Непрерывное развитие интеллектуальных технологий в сфере автономных беспилотных аппаратов делает возможным их совместное использование в различных миссиях и сценариях, которые еще в недавнем времени рассматривались как невозможные. Одним из таких сценариев применения служит задача предотвращения проникновения прямолинейно движущихся целей в заданную точку пространства посредством их перехвата. Оказывается, что при формализации и дальнейшем решении задачи перехвата множества целей важную роль играет проблема оптимального выбора порядка их обхода. Строго говоря оптимальный, с точки зрения одного критерия, выбор может оказаться плохим при использовании другого критерия. Например, если под

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

оптимальным выбором порядка обхода движущихся целей наивно понимается такой выбор порядка обхода, что все вражеские цели должны быть перехвачены за наименьшее время на наибольшей от защищаемой точки дистанции, то можно показать внутреннюю противоречивость такого требования. Действительно, если представить ситуацию, в которой один защитник противостоит двум вражеским целям, причем одна из них быстрая, а другая медленная, то при атаке места старта защитника с диаметрально противоположных сторон, быстрее всего по времени будет сначала перехватить медленную цель, дав быстрой подобраться ближе, но если перехватить сначала быструю цель, а потом медленную, то наименьшее расстояние до защищаемой точки будет больше, чем в первом случае.

Известная в литературе под названием “динамическая задача коммивояжера” (ДЗК) [1, 2] или Moving Targets Traveling Salesman Problem (MTTSP) [3, 4] является самой близкой по смыслу к исследуемой в данной работе задаче построения оптимального плана перехвата движущихся целей. ДЗК является обобщением задачи коммивояжера (ЗК). В 1972 г. была показана NP-полнота задачи о гамильтоновом цикле, что подразумевает NP-полноту ДЗК [5]. Одной из первых постановок ДЗК для прямолинейно движущихся целей стала работа [1], в которой было установлено, что аппарат динамического программирования может применяться для построения эффективного алгоритма поиска оптимального плана перехвата.

В ДЗК, как правило, предполагается, что объект управления имеет динамику простых движений (управляемым входом служит вектор скорости). При определенных условиях [1, 4] такое предположение позволяет перейти от дискретно-непрерывной задачи оптимизации к дискретной. Модель простых движений может быть достаточно грубым приближением для построения опорных траекторий реального объекта управления, однако использование более точных моделей, учитывающих, например, маневренность объекта управления, не позволяют перейти от дискретно-непрерывной задачи к дискретной для получения точного решения даже в случае неподвижных целей [6, 7]. При этом, если объект управления достаточно маневренный и дистанции при перемещении между целями велики (в сравнении с минимальным радиусом разворота такого объекта), то учет маневренности в задаче планирования обхода целей не оказывает влияния на структуру оптимального плана.

Методы решения ДЗК можно разделить на следующие категории:

- с дискретизацией времени [3, 8, 9] или без [1, 4, 8, 10, 11];
- дающие оптимальное решение [3, 4, 8] или субоптимальное [9–11];
- детерминированные [1, 3, 4, 8, 9, 12] или случайные [10, 11, 13].

Для задачи предотвращения достижения целями заданной точки с возвращением коммивояжера в нее после каждой встречи с целью на основе понятия опасности цели предложен алгоритм построения гарантированного плана перехвата [4].

В настоящей работе будет рассмотрена задача оптимизации плана перехвата для векторного критерия, формализованы понятия опасности, удоб-

ства и сложности перехвата, предпочтение будет отдано детерминированным методам без дискретизации времени и дающим оптимальное решение (без гарантий быстрого завершения).

Статья состоит из введения, четырех разделов и заключения и имеет следующую структуру. В разделе 2 формализуется новая постановка задачи поиска оптимального плана для перехвата прямолинейно движущихся в одну защищаемую точку целей, вводятся множество допустимых планов, векторные критерии задачи, дается определение гарантированного плана перехвата. В разделе 3 доказываются теоремы о гарантированности перехвата и о принципе неоптимальности простоя, а также вводятся новые понятия опасности обстановки, удобства и сложности плана перехвата. Раздел 4 посвящен интеллектуальному алгоритму полного перебора, значительно сокращающего количество операций вызова функций вычисления перехвата. Далее, в разделе 5 приводятся результаты моделирования на основе предложенного алгоритма и статистически исследуются свойства оптимальных планов. В разделе 6 формируются планы дальнейшей работы.

2. Постановка задачи

2.1. Математическая модель

Полагаем, что защищаемая точка расположена на плоскости в начале координат, а цели появляются на внешней границе круга радиуса R в слое толщиной $2\Delta R$ в секторе с центральным углом α . Цели движутся прямолинейно с известными скоростями, находящимися в заданном диапазоне $[v_{\min}, v_{\max}]$. Коммивояжер в исходный момент времени находится в начале координат и движется в классе простых движений со скоростью $v(t) \in [0, V]$, при этом $V > v_{\max}$. Будем считать, что движущиеся цели нужно обойти и обслужить коммивояжеру как можно дальше от защищаемого объекта, подвергая его как можно меньшей опасности.

Определение 1. Совокупность начальных условий для движущихся целей и коммивояжера с фиксацией всех параметров задачи назовем начальной обстановкой.

Обстановка может изменяться, поскольку меняются и уточняются текущие данные об объектах. Поскольку за начальный момент времени может быть выбран любой момент, в котором известны все параметры задачи, то ситуацию в этот момент будем называть текущей обстановкой.

Будем считать, что таких целей всего m штук и каждая из них в начальный момент времени расположена в точке

$$\mathbf{r}_j^0 = (x_j^0, y_j^0), \quad \text{где } j = 1, \dots, m.$$

Также будем считать, что каждая цель движется с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}_j = (v_{x,j}, v_{y,j}).$$

Таким образом, траектория движения каждой цели представляет собой прямую линию

$$(1) \quad \mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j^0 + \mathbf{v}_j t, \quad j = 1, \dots, m$$

с ограничениями на параметры следующего вида:

$$(2) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{v}_j\| &\in [v_{\min}, v_{\max}], \quad v_{\max} < V, \\ \|\mathbf{r}_j^0\| &\in [R - \Delta R, R + \Delta R], \\ \arctg \frac{y_j^0}{x_j^0} &\in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

После момента времени, когда какая-либо цель достигнет начала координат, обслуживать ее не имеет смысла. Этот момент времени для цели под номером j можно вычислить следующим образом:

$$(3) \quad t_j^0 = \frac{\|\mathbf{r}_j^0\|}{\|\mathbf{v}_j\|}.$$

Динамика коммивояжера описывается системой дифференциальных уравнений следующего вида:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}^I(t) &= v(t) \cos \psi(t), \quad v(t) \in [0, V]; \\ \dot{y}^I(t) &= v(t) \sin \psi(t), \quad \psi(t) \in [0, 2\pi); \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}^I(t) = (x^I(t), y^I(t))$ — положение коммивояжера в момент времени t ; $\psi(t)$ — управление направлением скорости на плоскости. Коммивояжер в начальный момент находится в начале координат, $\mathbf{r}^I(t) = (x^I(0), y^I(0)) = (0, 0)$.

Чтобы привести формальную постановку задачи построения плана как задачи оптимизации, требуется привести формальное описание модели задачи, определить, что подразумевается под решением этой задачи, какие решения являются допустимыми и какой критерий качества используется при поиске решения.

Принципы неоптимальности простоя и движения на максимальной скорости будут доказаны в работе далее. Функция перехвата строится для задачи наискорейшего перехвата цели, движущейся равномерно по прямой, с помощью коммивояжера, имеющего кинематику простых движений, и сводится к поиску наименьшего положительного корня следующего квадратного уравнения относительно времени перехвата τ :

$$(\mathbf{r}_j + \mathbf{v}_j \tau)^2 = V^2 \tau^2.$$

Здесь $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}^I(t)$ — вектор относительного положения коммивояжера и цели с номером j , $\mathbf{r}^I(t)$ — текущее положение коммивояжера, V — максимальная скорость коммивояжера, $\mathbf{v}_j$ — вектор скорости цели. Обозначим наименьший неотрицательный корень этого уравнения через $\tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)$. Можно показать, что в случае $\mathbf{v}_j^2 < V^2$ справедливо выражение

$$(5) \quad \tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j) = \frac{(\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_j) + \sqrt{(\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_j)^2 + \mathbf{r}_j^2(V^2 - \mathbf{v}_j^2)}}{V^2 - \mathbf{v}_j^2}.$$

2.2. Индивидуальный план

Будем говорить, что для коммивояжера задан индивидуальный план π по обслуживанию $k \in \{0, \dots, m\}$ целей, если π является кортежем из k различных чисел из $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$. Порядок следования чисел в кортеже определяет порядок обслуживания целей. Пространство всех индивидуальных планов по обслуживанию $k \in \{0, \dots, m\}$ целей можно описать так:

$$\Pi_k = \left\{ (\pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{M}^k : \forall p, q \in \{1, \dots, k\} \quad p \neq q \rightarrow \pi_p \neq \pi_q \right\}.$$

Рассмотрим пример $m = 2$:

$$\Pi_0 = \{()\},$$

$$\Pi_1 = \{(1,), (2,)\},$$

$$\Pi_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

Здесь $()$ обозначает пустой кортеж (индивидуальный план, предписывающий бездействие). Таким образом, если для коммивояжера задан индивидуальный план $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in \Pi_k$, то в соответствии с этим индивидуальным планом коммивояжер должен обслужить сначала цель с номером π_1 , затем цель с номером π_2 и т.д.

Пространство всех планов для заданного количества целей m представляет собой следующее множество:

$$\Pi = \bigcup_{k=0}^m \Pi_k.$$

Для начала вычислим минимальное время $T(\pi)$, которое требуется коммивояжеру для того, чтобы исполнить индивидуальный план $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$. Используя определение $\tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)$ из (5), можно получить следующее рекурсивное выражение:

$$(6) \quad T(\pi) = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \tau(\mathbf{r}_{\pi_1}^0, \mathbf{v}_{\pi_1}), & k = 1; \\ t + \tau(\mathbf{r}_{\pi_k}(t) - \mathbf{r}^I(t), \mathbf{v}_{\pi_k}), & k > 1, \text{ здесь } t = T((\pi_1, \dots, \pi_{k-1})). \end{cases}$$

Выпишем также ограничение, которое заключается в том, что всякая вошедшая в план цель должна быть обслужена вовремя, т.е. до попадания в начало координат. Пусть каждый индивидуальный план $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$. Тогда справедливо

$$\text{OnTime}(\pi) = (\forall j \in \{1, \dots, k\} : T((\pi_1, \dots, \pi_j)) \leq t_{\pi_j}).$$

Заметим, что последнее ограничение может быть проверено рекуррентно. Пусть для индивидуального плана $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ выполнено соответствующее ограничение и цель j не учтена в индивидуальном плане π . Тогда

для проверки ограничения для индивидуального плана $\pi + j = (\pi_1, \dots, \pi_k, j)$ можно воспользоваться следующим выражением:

$$\text{OnTime}(\pi + j) = \text{OnTime}(\pi) \ \& \ T(\pi + j) \leq t_j.$$

Таким образом, множество допустимых планов представляет собой следующее множество:

$$\Pi_A = \{\pi \in \Pi : \text{OnTime}(\pi)\}.$$

2.3. Критерии и определения

Будем ассоциировать с критерием качества задачи некоторый функционал потерь J . Очевидно, что чем ниже потери, тем лучше решение. Функционал потерь должен быть задан на множестве допустимых планов Π_A , т.е. каждый план, который позволяет вовремя обойти указанные движущиеся цели, поддается оценке понесенных потерь в результате своего исполнения. Оптимальным решением задачи построения плана обхода является наилучший план $\pi^* \in \Pi_A$, который минимизирует значение функционала потерь:

$$(7) \quad \pi^* \in \arg \min_{\pi \in \Pi_A} J[\pi].$$

Так как множество допустимых планов Π_A конечно и содержит хотя бы один элемент (которым является пустой план, заключающийся в абсолютном бездействии коммивояжера), то поставленная задача минимизации всегда имеет решение, быть может, не единственное. Знак равенства в выражении $\pi^* = \arg \min_{\pi \in \Pi_A} J[\pi]$ ставится, если решение единственно.

Перечислим основные функционалы, которые могут быть использованы далее для построения критерия задачи.

- **Количество целей, пропущенных в начало координат.** Если план $\pi \in \Pi_A$, то начала координат достигнут все цели, которые не вошли в индивидуальный план π , т.е. количество пропущенных целей считается так

$$n_0[\pi] = m - \text{card}(\pi),$$

где $\text{card}(\pi)$ – длина плана π .

- **Время выполнения плана.** Вычисляется как время исполнения индивидуального плана

$$T_{\text{sum}}[\pi] = T(\pi).$$

- **Минимальное расстояние приближения целей.** Если план $\pi \in \Pi_A$, то минимальное расстояние полета целей к началу координат вычисляется так

$$D_{\min}[\pi] = \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \|\mathbf{r}_{\pi_j}(T((\pi_1, \dots, \pi_j)))\|.$$

Если план π пустой, то формально будем считать, что $D_{\min}[\pi] = 0$.

Не все из перечисленных функционалов сами по себе годятся на роль критерия задачи. Действительно, если минимизировать время выполнения плана само по себе, то пустой план, состоящий в бездействии, будет оптимальным, так как на его исполнение требуется ноль единиц времени. В целом самостоятельную роль из описанных выше функционалов играет лишь функционал потерь, характеризующий количество целей, долетевших до начала координат.

Определение 2. Назовем план перехвата гарантированным, если $n_0[\pi] = 0$. Множество гарантированных планов обозначим через Π_G .

Чтобы адекватно учитывать перечисленные функционалы в итоговом функционале потерь или критерии задачи, понадобится некоторое обобщение самого понятия сравнения. Большинство из перечисленных функционалов обретают смысл в задаче минимизации, если в качестве критерия выступает некоторая комбинация представленных функционалов. Например, если сравнивать два плана в первую очередь по количеству целей, пропускаемых в начало координат, а во вторую очередь, времени обхода целей, то такой комбинированный функционал потерь адекватно отражает суть задачи защиты региона. Проще говоря, если некоторый план π_1 допускает пропуск одной цели в начало координат, при этом время выполнения плана равно 7, т.е. $n_0[\pi_1] = 1$ и $T_{\text{sum}}[\pi_1] = 7$, а план π_2 допускает пропуск одной цели в начало координат и время выполнения плана равно 8, т.е. $n_0[\pi_2] = 1$ и $T_{\text{sum}}[\pi_2] = 8$, то план π_1 лучше плана π_2 , т.е. формально можно сравнить кортежи $(1, 7) < (1, 8)$. Такое сравнение аналогично позиционному сравнению вещественных чисел, где каждая цифра на соответствующей позиции вещественного числа сравнивается с соответствующей цифрой другого числа до тех пор, пока не найдутся расхождения в значениях слева направо. Формализуем сказанное выше на основе понятия лексикографического порядка.

Определение 3. Кортеж чисел $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ меньше кортежа чисел $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_q)$, если существует такой номер $k \in \{1, \dots, \min(p, q)\}$, что $a_i = b_i$ для $i < k$, и $a_k < b_k$. Если для всех $k \in \{1, \dots, \min(p, q)\}$ выполнено $a_k = b_k$, то при $p < q$ будем считать, что $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. В остальных случаях будем считать, что $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$.

Примеры:

$$(1, 2) < (1, 3), \quad (0, 1) < (1, 2), \quad (1, 2) < (1, 2, 1), \quad () < (1, 2), \quad (1, 2) < (2,).$$

Используя определение сравнения кортежей чисел, сформулируем основные критерии задачи построения плана обхода целей для произвольного допустимого плана $\pi \in \Pi_A$.

- **Пропущенные цели + Время исполнения.** Критерий качества получаемых планов выглядит так

$$(8) \quad J_T[\pi] = (n_0[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]).$$

По смыслу минимизация такого функционала потерь в первую очередь нацелена на минимизацию количества пропущенных в начало координат и во вторую очередь — на быстроедействие при исполнении плана.

- **Пропущенные цели + Наименьшая близость к началу координат.** Критерий качества записывается следующим образом:

$$(9) \quad J_D[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi]).$$

Минимизация такого функционала потерь в первую очередь нацелена на минимизацию количества пропущенных в начало координат целей и во вторую очередь — на максимизацию расстояния самой близкой из приблизившихся к началу координат целей.

- **Пропущенные цели + Наименьшая близость к началу координат + Время исполнения.** Критерий сформирован из трех основных функционалов

$$(10) \quad J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]).$$

Минимизация такого критерия в первую очередь нацелена на наименьшее количество пропущенных в начало координат целей, во вторую очередь — на максимизацию расстояния самой близкой из приблизившихся целей, и последняя сортировка осуществляется по быстрдействию исполнения плана.

Сформулируем задачу оптимизации.

Задача 1. Для t целей, движущихся по траекториям (1) с ограничениями на параметры движения вида (2), требуется найти оптимальный по критерию (8) или (10) план перехвата $\pi \in \Pi_A$ коммивояжером с динамикой (4).

3. Свойства задачи поиска оптимального плана перехвата

Для описания свойств задачи потребуются следующие определения и понятия.

Введем, используя формулу (5), время $\tau_j(t) = \tau(\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j)$ перехвата j -й цели из текущей обстановки и время $t_j(t)$ движения j -й цели до начала координат.

Определение 4. Опасностью K_j , которую составляет j -я цель, назовем величину, обратную времени движения до начала координат, а именно

$$K_j(t) = \frac{1}{t_j(t)}.$$

Опасность — это свойство цели. Чем меньше времени остается цели до проникновения на защищаемый объект, тем она считается опаснее.

Определение 5. Удобством перехвата j -й цели U_j назовем величину, обратную времени перехвата этой цели из текущей обстановки, а именно

$$U_j(t) = \frac{1}{\tau_j(t)}.$$

Удобство — это свойство действия коммивояжера по отношению к цели. Чем меньше времени затрачивается на поимку цели, тем цель удобнее для перехвата.

Определение 6. Сложностью перехвата $C[\pi]$ плана π назовем максимальное время между двумя последовательными перехватами в плане, а именно

$$(11) \quad C[\pi] = \max_{\substack{\{\pi_j\} \in \pi, \\ 1 \leq j \leq m}} \tau_{\pi_j}(T((\pi_1, \dots, \pi_{j-1}))).$$

Сложность — это свойство плана коммивояжера. Чем меньше времени он затрачивает между двумя последовательными обходами целей во время исполнения плана, тем план перехвата менее сложный.

Определение 7. Средней сложностью перехвата $\hat{C}[\pi]$ плана π назовем среднее время между двумя последовательными обходами в плане, а именно

$$(12) \quad \hat{C}[\pi] = \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{\{\pi_j\} \in \pi, \\ 1 \leq j \leq m}} \tau_{\pi_j}(T((\pi_1, \dots, \pi_{j-1}))).$$

Средняя сложность характеризует длительности между последовательными обходами в плане. Если все цели перехватываются по пути, без длительных обходов, то такой план менее сложный в среднем, по сравнению с планом, где есть несколько длительных обходов.

Понятие опасности непосредственно связано с критериями выполнения плана перехвата, а понятия удобства и сложности связывают между собой последовательный выбор следующей цели и качество выполнения плана по критерию быстродействия. Действительно, если удастся найти план обхода целей, при котором последовательные перехваты происходят максимально удобно и не происходит пропуска цели, то полное время выполнения плана часто близко к оптимальному.

Понятия опасность и удобство могут быть обобщены на текущую обстановку.

Определение 8. Опасностью текущей обстановки назовем упорядоченный по уменьшению кортеж из величин опасностей

$$(13) \quad (K_{j_1}(t), \dots, K_{j_m}(t)),$$

составленный для m целей.

Упорядоченность целей в кортеже опасности текущей обстановки не меняется при выполнении всего плана.

Определение 9. Удобством текущей обстановки назовем упорядоченный по уменьшению кортеж из величин удобств

$$(U_{j_1}(t), \dots, U_{j_m}(t)),$$

составленный для m целей.

Удобство текущей обстановки зависит от положения коммивояжера и меняется во времени.

При обслуживании целей длины кортежей уменьшаются. Сравнение обстановок может происходить различными способами, например, по максимальному элементу в каждом из кортежей, или по совокупности элементов

кортежей, попавших в заданные диапазоны значений. В свою очередь сложность плана непосредственно связана с удобством обхода. Оптимальный план сочетает в себе все перечисленные характеристики обстановки.

Теорема 1. Для любой начальной обстановки и любого количества целей в задаче 1 существует план гарантированного перехвата $\pi \in \Pi_G$.

Доказательство. Можно провести доказательство, используя теорему 10 из [4], но тогда особенности рассматриваемой задачи останутся за кадром.

Как и в [4], вычисляется опасность начальной обстановки (13), в соответствии с которой составляется план перехвата. Докажем, что такой план является гарантированным.

Если в начальной обстановке расстояние $\|\mathbf{r}_j^0\|$, где индекс j соответствует самой опасной цели, не является минимальным среди всех $\|\mathbf{r}_k^0\|$, $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, то отложим момент старта движения коммивояжера. Тогда найдется такой радиус R_0 , что цели его пересекут в порядке уменьшения опасности $(K_{j_1}, \dots, K_{j_m})$ по перестановке целей $(j_1, \dots, j_m)$ по отношению к начальной нумерации $(1, \dots, m)$. В момент перехвата самой опасной цели все остальные находятся вне круга радиусом текущего перехвата. Из-за превосходства скорости коммивояжера ни одна цель не достигнет начала координат, что показывается на примере обстановки, когда следующая по опасности цель j_{d+1} расположена диаметрально противоположно текущей, причем $\|\mathbf{r}_{j_d}(t)\| < \|\mathbf{r}_{j_{d+1}}(t)\|$, $t = T((j_1, \dots, j_d))$. В этом случае разница времен, которые требуются цели и коммивояжеру для достижения начала координат, равна

$$\frac{\|\mathbf{r}_{j_{d+1}}(t)\|}{\|\mathbf{v}_{j_{d+1}}\|} - \frac{\|\mathbf{r}_{j_d}(t)\|}{V} = \frac{V \cdot \|\mathbf{r}_{j_{d+1}}(t)\| - \|\mathbf{v}_{j_{d+1}}\| \cdot \|\mathbf{r}_{j_d}(t)\|}{V \cdot \|\mathbf{v}_{j_{d+1}}\|} > 0.$$

Это означает, что в крайнем случае, когда перехват происходит по лучам одной прямой, коммивояжер успеет добраться до начала координат, после чего осуществить перехват следующей цели. В случаях, когда перехват осуществляется по остальным лучам, очевидно, что цели также не достигают начала координат. Это полностью доказывает гарантированность плана перехвата по опасности. Теорема 1 доказана. $\square$

Пример 1. Пусть цели равномерно распределены по окружности R и движутся с одинаковыми скоростями $\|\mathbf{v}\|$. Тогда оптимальный перехват по критериям $J_T[\pi]$ и $J_{DT}[\pi]$ осуществляется по траектории, близкой к логарифмической спирали [14], по плану π , на котором $n_0[\pi] = 0$, как показано на рис. 1. В данном примере опасность и удобство начальной обстановки имеют вид $(K_1, \dots, K_m) = (U_1, \dots, U_m) = (\|\mathbf{v}\|/R, \dots, \|\mathbf{v}\|/R)$ и не позволяют осуществить начальный выбор цели. После перехвата крайней правой или крайней левой в секторе цели, оставшиеся цели будут также одинаково распределены по опасности. Однако кортеж удобства перехвата будет иметь не только упорядоченный вид, но и очередность оставшихся целей в кортеже не будет меняться после каждого перехвата.

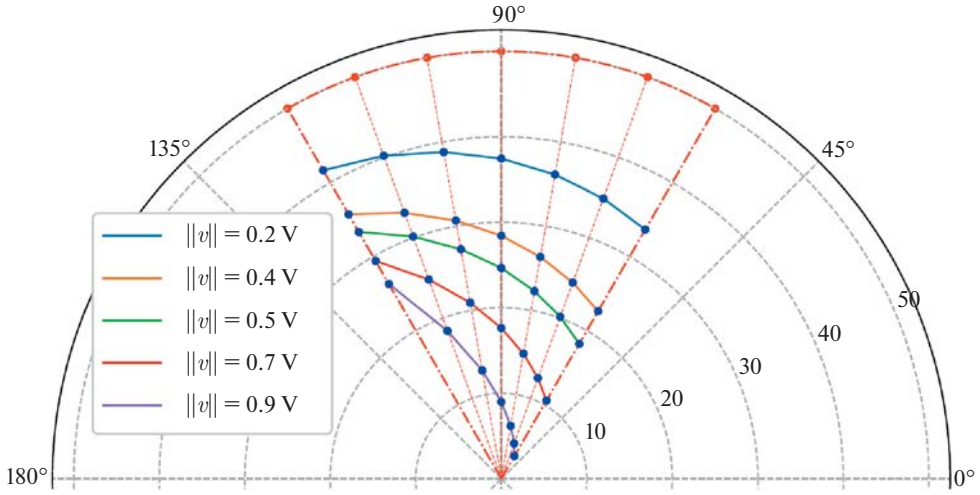


Рис. 1. Перехват целей со скоростями $\|v\| = \{0.2V, 0.4V, 0.5V, 0.7V, 0.9V\}$, расположенных на границе сектора окружности с центральным углом $\alpha = 60^\circ$.

Теорема 2. Для критериев $J_T[\pi]$ и $J_{DT}[\pi]$ в задаче 1 справедливы

- 1) *принцип неоптимальности простоя,*
- 2) *принцип максимальной скорости (на оптимальном плане коммивояжер движется на максимально возможной скорости).*

Доказательство. Гарантированный перехват ($n_0[\pi] = 0$), минимизирующий количество пропущенных целей для критериев $J_T[\pi] = (n_0[\pi], T_{\text{sum}}[\pi])$ и $J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi])$, может быть получен по теореме 1 выбором плана $\pi = (i_1, \dots, i_m)$ по опасности начальной обстановки $(K_{i_1}, \dots, K_{i_m})$.

Дальнейшая оптимизация векторных критериев $J_T[\pi]$ и $J_{DT}[\pi]$ происходит по гарантированным планам, с $n_0[\pi] = 0$, состоящим как минимум из одного плана $\pi = (i_1, \dots, i_m)$.

Справедливость принципов неоптимальности простоя и максимальной скорости при минимизации $T_{\text{sum}}[\pi]$ показывается в лемме 1 [4], что и заканчивает доказательство теоремы для функционала $J_T[\pi]$.

Максимизация функционала $D_{\min}[\pi]$ в критерии J_{DT} по конечному числу гарантированных планов приводит к нахождению плана π^* . Зафиксируем этот план и найдем первый номер цели j в плане, на котором достигается минимум расстояния до начала координат. План $\pi^* = (\pi_{1,j}, \pi_{j,m})$ разбивается на две части: $\pi_{1,j}$ до цели j включительно и $\pi_{j,m}$ после цели j , тогда $D_{\min}[\pi^*] = D_{\min}[\pi_{1,j}]$. Увеличение времени выполнения части плана $\pi_{1,j}$ за счет простоя или движения не на максимальной скорости приводит к уменьшению значения $D_{\min}[\pi_{1,j}]$ аналогично лемме 1 [4]. Далее, по принципу оптимальности Беллмана часть плана $\pi_{j,m}$ оптимальна по быстродействию. За что отвечает часть критерия по функционалу $T_{\text{sum}}[\pi]$ после достижения минимума на функционале $D_{\min}[\pi]$. Поэтому простой и замедление движения коммивояжера невозможно на $\pi_{j,m}$ и соответственно на всем π^* .

Теорема 2 доказана. $\square$

4. Алгоритм поиска оптимальных планов перехвата

Алгоритм построения плана обхода одним коммивояжером многих подвижных целей основан на полном переборе планов с изначальной сортировкой целей по опасности и интеллектуальном правиле отбрасывания заведомо неоптимальных веток перебора в ходе своей работы. Алгоритм гарантированно находит оптимальный план перехвата.

Для введения некоторых важных понятий, необходимых для понимания работы алгоритма, рассмотрим сначала простейший случай полного перебора. Работа алгоритма в этом случае может быть проиллюстрирована матрицами переходов в табл. 1, на которых показана полная последовательность планов, рассмотренная в ходе работы алгоритма. Сама табл. 1 называется таблицей поиска планов.

Таблица 1. Таблица поиска планов, состоящая из матриц переходов для случая полного перебора при $m = 4$

Figure 1 displays 24 Latin squares of order 4, arranged in a 6x4 grid. Each square is labeled with a number (1 to 24) above it. The squares are constructed using the following patterns:

- Squares 1-4:** Standard Latin squares with circled numbers in the first column.
- Squares 5-8:** Latin squares with a multiplier of 2 in the first column and circled numbers in the first column.
- Squares 9-12:** Latin squares with a multiplier of 3 in the first column and circled numbers in the first column.
- Squares 13-16:** Latin squares with a multiplier of 2 in the first column and circled numbers in the first column.
- Squares 17-20:** Latin squares with a multiplier of 3 in the first column and circled numbers in the first column.
- Squares 21-24:** Latin squares with a multiplier of 4 in the first column and circled numbers in the first column.

Критерием задачи в алгоритме выбран критерий (10):

$$J_{DT}[\pi] = (n_0[\pi], -D_{\min}[\pi], T_{\text{sum}}[\pi]).$$

В табл. 1 матрицы переходов пронумерованы от 1 до $m! = 24$. Для каждой матрицы в столбце слева записан вектор индексов, который определяет план перехвата. Полученный план — последовательность отмеченных окружностей в матрице согласно вектору индексов в порядке возрастания номера строки.

Звездочкой отмечен самый верхний индекс в столбце, с которого начинается новый расчет следующего плана. Промежуточное состояние, характеризующее частью уже рассчитанного плана, сохраняется для экономии вычислительных ресурсов.

Утверждение 1. Полное количество вызовов функции единичного перехвата (5) при полном переборе всех вариантов в алгоритме с промежуточным сохранением расчетов описывается рекуррентной формулой

$$(14) \quad f(m) = m(f(m-1) + 1).$$

Таким образом, существенно удастся сократить количество вызовов функции единичного перехвата. Например, для $m = 4$:

$$(15) \quad f(m) = 64,$$

тогда как для случая полного перебора число вызовов этой функции равно $F(m) = m! \cdot m = 96$. Для большего количества целей $m = 10$ соответственно имеем

$$(16) \quad \begin{aligned} f(m) &= 9\,864\,100, \\ F(m) &= 36\,288\,000. \end{aligned}$$

Видно, что только за счет сохранения текущего состояния плана удастся существенно сократить количество вычислений. Однако основной выигрыш в эффективности предлагаемого алгоритма обусловлен его проблемной ориентацией под специфику задачи и возможностью отбрасывания неоптимальных цепочек планов, значения функционалов в критерии для которых будут хуже этих значений в текущем сохраненном плане. Алгоритм состоит в следующей последовательности действий.

Алгоритм 1. Нахождение плана обхода.

1. Цели сортируются по опасности K_i .
2. Заполняется вспомогательная матрица поиска (матрица с индексом 1 в табл. 1), на основе которой будет формироваться последовательность планов.
3. На каждом новом шаге алгоритма переход по состояниям полной таблицы поиска планов $1 \dots m!$ (табл. 1) осуществляется согласно критерию (10).
4. Первый вариант: еще не найден план перехвата всех целей. В этом случае:

- а. Переход в таблице поиска планов осуществляется согласно параметру количества перехваченных целей.
 - б. Если очередной план нереализуем (очередная цель перехватывается за границей красной зоны), и в новом рассматриваемом плане количество перехваченных целей совпадает, то проверяются критерии дистанции и времени и сохраняется в память лучший план.
 - в. При этом ветка может быть отброшена, если количество пропущенных в начало координат целей ухудшилось относительно сохраненного плана.
5. Второй вариант: если найден план, перехватывающий все цели. Тогда:
- а. Любая пропущенная в начало координат цель в новом плане приводит к прекращению рассмотрения текущей цепочки планов.
 - б. Если в новом рассматриваемом плане перехватываются все цели, проверяются критерии дистанции и времени и сохраняется в память лучший из двух планов.
6. Последний сохраненный план является оптимальным.

Предложенная начальная сортировка целей по опасности служит для отбрасывания неоптимальных цепочек плана на ранних этапах работы алгоритма 1.

5. Моделирование и обсуждение результатов

Алгоритм перехвата 1 был реализован в среде Matlab с использованием функций (5) и (6). Моделирование показало, что время работы алгоритма является приемлемым для приложений реального времени и сильно сокращается относительно алгоритма полного перебора. Так, для 1000 экспериментов время работы составило 200 с, что дает среднее время отработки одной начальной обстановки в 0,2 с.

Рассматриваются 1000 различных начальных обстановок, для которых выбраны следующие основные параметры:

- Количество целей $m = 15$.
- Центральный угол сектора, где находятся цели $\alpha = 60^\circ$.
- Значения $\|\mathbf{r}_j\|$, $j = 1, \dots, m$ распределены равномерно на отрезке $[800, 1000]$.
- Скорости целей распределены равномерно на отрезке $[0,5V, 0,7V]$.

Для каждой обстановки находятся ее опасность и удобство, а также по алгоритму 1 оптимальные планы обхода по критериям $J_T[\pi]$ и $J_{DT}[\pi]$, после чего в табл. 2 и 3 приводится статистика, как часто первые несколько целей оптимального плана оказываются самыми опасными/удобными.

Таблицы 2 и 3 показывают, что статистика выбора первой цели в плане отличается от статистики на следующих шагах, поскольку начальная обстановка значительно отличается от обстановок, возникающих после каждого перехвата. Полученные статистики указывают на то, что в более чем 70% случаев первая цель оптимального плана совпадает с самой опасной или с самой удобной целью, что может быть использовано для построения жадных алгоритмов на основе локальных правил по опасности или удобству вместо полнопереборных алгоритмов.

Таблица 2. Процент совпадений первых четырех целей $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$ оптимального по критерию $J_T[\pi]$ плана π^* с соответствующими опасными и удобными целями для 1000 различных начальных обстановок

Номера целей плана π^*	Количество совпадений i -й цели плана π^* с i -й по			
	опасности ($K_{\pi_i^*} = K_{j_i}$), %	удобству ($U_{\pi_i^*} = U_{j_i}$), %	опасности и удобству, %	опасности или удобству, %
Первая цель $\pi_1^* (i = 1)$	65,0	65,9	56,8	74,1
Вторая цель $\pi_2^* (i = 2)$	32,1	57,6	13,9	75,8
Третья цель $\pi_3^* (i = 3)$	19,4	58,5	7,1	70,8
Четвертая цель $\pi_4^* (i = 4)$	16,3	57,0	3,8	69,5

Таблица 3. Процент совпадений первых четырех целей $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$ оптимального по критерию $J_{DT}[\pi]$ плана π^* с соответствующими опасными и удобными целями для 1000 различных начальных обстановок

Номера целей плана π^*	Количество совпадений i -й цели плана π^* с i -й по			
	опасности ($K_{\pi_i^*} = K_{j_i}$), %	удобству ($U_{\pi_i^*} = U_{j_i}$), %	опасности и удобству, %	опасности или удобству, %
Первая цель $\pi_1^* (i = 1)$	61,2	63,0	52,8	71,4
Вторая цель $\pi_2^* (i = 2)$	36,6	52,9	13,2	76,3
Третья цель $\pi_3^* (i = 3)$	27,5	49,2	7,7	69,0
Четвертая цель $\pi_4^* (i = 4)$	24,6	45,7	6,2	64,1

Для 1000 начальных обстановок было установлено, что в 24,6% случаев оптимальный план π^* по критерию $J_{DT}[\pi^*]$ совпадает с оптимальным планом по критерию $J_T[\pi^*]$.

Дальнейшее моделирование посвящено исследованию планов для одной начальной обстановки. На рис. 2 представлены зависимости $T_{\text{sum}}[\pi], D_{\text{min}}[\pi]$ от $C[\pi], \hat{C}[\pi]$ для допустимых планов π , минимальное расстояние приближения целей которых $D_{\text{min}}[\pi] > 0,6D_{\text{min}}[\pi^*]$, где π^* – оптимальный по критерию $J_{DT}[\pi]$ план. Значения $T_{\text{sum}}[\pi^*], D_{\text{min}}[\pi^*]$ дополнительно обведены окружностями красного цвета, причем все соответствующие допустимым планам $\{\pi : \pi_1 = \pi_1^*\}$ точки также выделены красным цветом.

Как видно из графика, времена исполнения всех допустимых планов выстраиваются в линейные зависимости от $\hat{C}[\pi]$, что дает возможность конструирования оптимального полиномиального алгоритма построения плана перехвата в рассматриваемой задаче. Зелеными окружностями на всех графиках отмечен оптимальный по критерию J_T план, время исполнения кото-

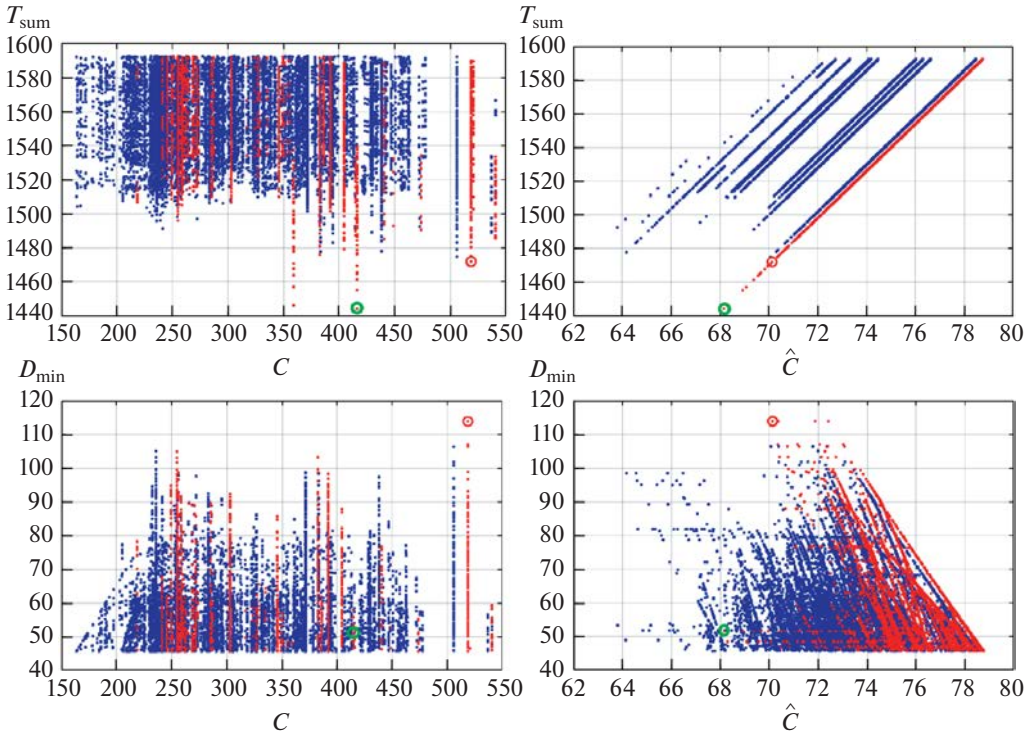


Рис. 2. Времена исполнения плана и минимальные значения расстояний приближения целей к началу координат для допустимых планов одной начальной обстановки в зависимости от сложности и средней сложности плана.

рого меньше $T_{\text{sum}}[\pi^*]$ на 2%, но по минимальному расстоянию приближения целей к началу координат такой план хуже π^* на 54%.

Проанализируем четыре допустимых плана $\pi^*, \pi^1, \pi^2, \pi^3$ с одинаковым значением $D_{\min} = 113,8$, которые на рис. 2 слева обозначены одной точкой, а справа они разнесены по значениям средней сложности. В табл. 4 указаны рассматриваемые планы обхода целей в явном виде, где выделена их общая часть.

Из табл. 4 видно, что максимальное время между перехватами C и значение $D_{\min}$ в этих планах были достигнуты на участке общего плана. При этом различающиеся последовательности целей, завершающих планы, привели к изменению средней сложности каждого из них.

Таблица 4. Допустимые планы со значением $D_{\min}[\pi] = 113,8$

i	π^i		$T_{\text{sum}}[\pi]$	$D_{\min}[\pi]$	$C[\pi]$	$\widehat{C}[\pi]$
π^*		$\{8, 11, 9, 4, 14, 7\}$	1472	113, 8	518, 8	70, 1
1	$\{10, 1, 6, 12, 2, 13, 3, 5, 15,$	$\{8, 11, 4, 9, 14, 7\}$	1496	113, 8	518, 8	71, 9
2		$\{11, 8, 4, 9, 14, 7\}$	1504	113, 8	518, 8	72, 4
3		$\{11, 8, 9, 4, 14, 7\}$	1475	113, 8	518, 8	70, 4

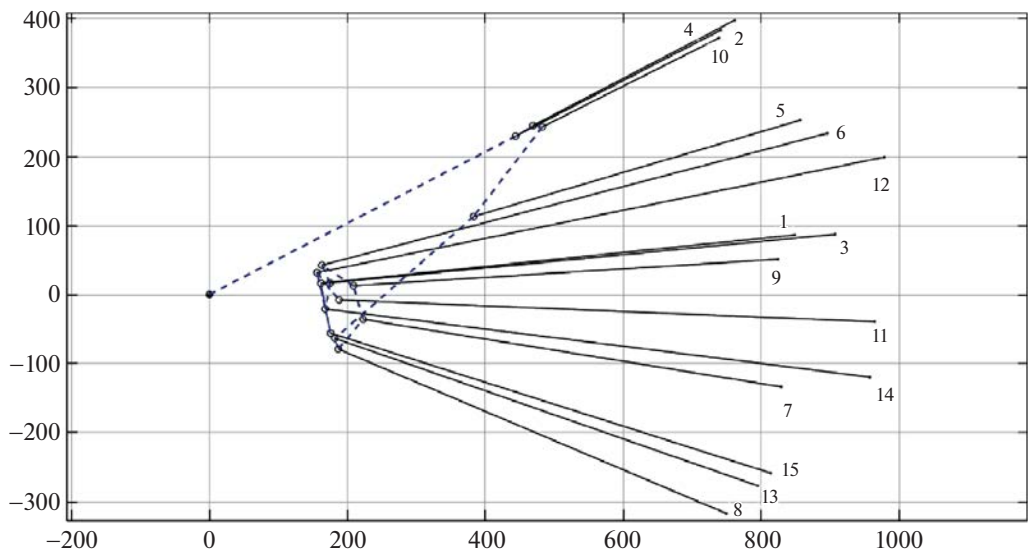


Рис. 3. План оптимального перехвата 15 целей коммивояжером по критерию $J_{DT}[\pi]$: $\pi^* = (2, 4, 10, 5, 13, 8, 7, 9, 6, 3, 14, 1, 15, 12, 11)$, $T_{\text{sum}}[\pi^*] = 1471,049$, $D_{\text{min}}[\pi^*] = 159,168$.

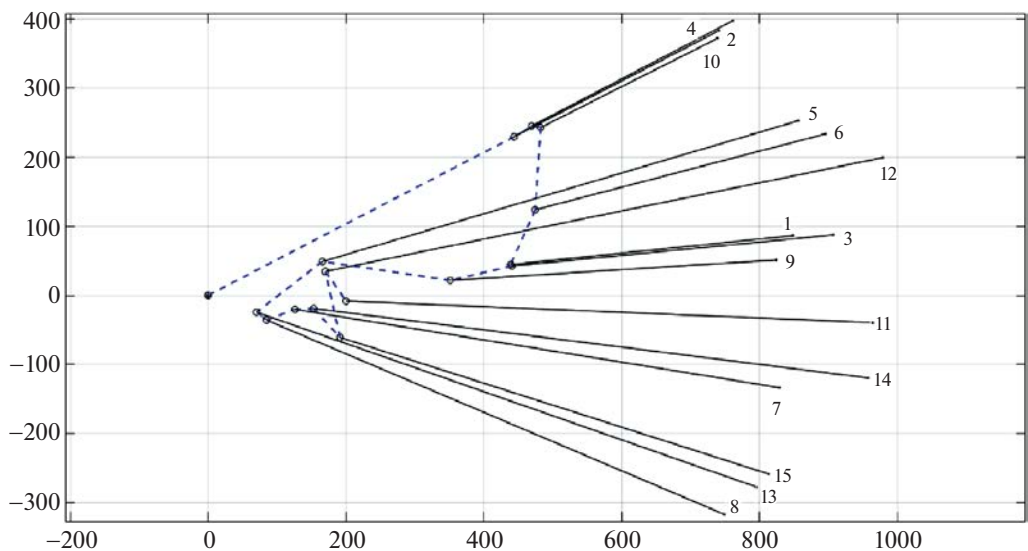


Рис. 4. План оптимального перехвата 15 целей коммивояжером по критерию $J_T[\pi]$: $\pi^* = (2, 4, 10, 6, 1, 3, 9, 5, 13, 8, 7, 14, 15, 12, 11)$, $T_{\text{sum}}[\pi^*] = 1448,051$, $D_{\text{min}}[\pi^*] = 74,183$.

Раздел моделирования завершает пример построения двух оптимальных планов перехвата по критериям $J_{DT}[\pi]$ и $J_T[\pi]$ на рис. 3 и 4 для одной начальной обстановки, где траектория коммивояжера на графиках выделена синей пунктирной линией.

Оптимизация по критерию $J_T[\pi]$ приводит к незначительному улучшению времени исполнения плана по сравнению с оптимальным по $J_{DT}[\pi]$ планом, но при этом более чем в два раза уменьшается значение $D_{\min}[\pi]$.

6. Заключение

В работе была рассмотрена задача перехвата одним перехватчиком множества прямолинейно движущихся целей. Были предложены новые макрохарактеристики задачи и статистически исследовано их влияние на построение оптимального плана перехвата для различных начальных обстановок. Для сбора статистики за адекватное время был предложен алгоритм поиска оптимального плана, основанный на интеллектуальном полном переборе и идеях динамического программирования. На набранной статистике показано влияние новых величин на успешность выполнения миссии и сделаны выводы об их применимости для создания быстрых жадных алгоритмов перехвата.

В будущем планируется исследовать различные локальные правила, учитывающие информационные и геометрические характеристики распределения целей, создать субоптимальные алгоритмы перехвата на их основе и сравнить их с полнопереборными оптимальными алгоритмами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сихарулидзе Г.Г. Об одном обобщении задачи коммивояжера. I // А и Т. 1971. No. 8. P. 116–123.
2. Сихарулидзе Г.Г. Об одном обобщении задачи коммивояжера. II // А и Т. 1971. No. 10. P. 142–147.
3. Picard J.C., Queyranne M. The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // Oper. Res. 1978. V. 26. No. 1. P. 86–110. <https://doi.org/10.1287/opre.26.1.86>
4. Helwig C.S., Robins G., Zelikovsky A. The moving-target traveling salesman problem // J. Algorithm. Comput. Technol. 2003. V. 49. No. 1. P. 153–174. [https://doi.org/10.1016/S0196-6774\(03\)00075-0](https://doi.org/10.1016/S0196-6774(03)00075-0)
5. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco, Calif.: W.H. Freeman & Co., 1979.
6. Ny J., Feron E., Frazzoli E. On the Dubins traveling salesman problem // IEEE Trans. Automat. Contr. 2012. V. 57. No. 1. P. 265–270. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2166311>
7. Isaiah P., Shima T. Motion planning algorithms for the Dubins travelling salesperson problem // Automatica. 2015. V. 53. P. 247–255. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.12.041>
8. Stieber A. The multiple traveling salesperson problem with moving targets. Brandenburg University of Technology Cottbus-Senftenberg, 2022.
9. Ahrens B. The tour construction framework for the dynamic Travelling Salesman Problem // SoutheastCon, IEEE. 2015. P. 1–8. <https://doi.org/10.1109/SECON.2015.7132999>
10. Choubey N.S. Moving target travelling salesman problem using genetic algorithm // Int. J. Comput. Appl. 2013. V. 70. No. 1. P. 30–34. <https://doi.org/10.5120/11937-7726>

11. *Smith C.D.* Assessment of genetic algorithm based assignment strategies for unmanned systems using the multiple traveling salesman problem with moving targets // Thesis (M.S.), Department of Civil and Mechanical Engineering. University of Missouri, Kansas City, 2021.
12. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. 2022. V. 135. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109968>
13. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y.* Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // Mathematics. 2021. V. 9. No. 19. <https://doi.org/10.3390/math9192386>
14. *Galyaev A.A., Dobrovidov A.V., Lysenko P.V., Shaikin M.E. et.al.* Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // Sensors. 2020. V. 20. No. 7. <https://doi.org/10.3390/s20072076>

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 18.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. В.П. ИВАНОВ, д-р техн. наук (vladguc@ipu.ru),
В.К. ЗАВАДСКИЙ, канд. техн. наук (vladguc@ipu.ru),
А.А. МУРАНОВ, канд. техн. наук (vladguc@ipu.ru),
А.И. ЧАДАЕВ, канд. техн. наук (vladguc@ipu.ru),
Е.Б. КАБЛОВА (vladguc@ipu.ru),
Л.Г. КЛЕНОВАЯ (vladguc@ipu.ru),
Е.И. ТРОПОВА (vladguc@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС И РАСХОДОВАНИЕМ ТОПЛИВА ЖИДКОСТНЫХ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Работа посвящена памяти академика Б.Н. Петрова и развивает сформулированные им принципы терминального управления движением ракет-носителей. Применительно к ракетам-носителям нового поколения реализуется принцип взаимосвязанного, согласованного терминального управления движением центра масс и расходом топлива. Постановка задачи синтеза такого управления и основных принципов его реализации рассматривается в данной статье.

Ключевые слова: терминальное управление, прогнозирующая модель.

DOI: 10.31857/S0005231023100045, **EDN:** TBICLA

1. Введение

Начало творческой деятельности Б.Н. Петрова пришлось на время, когда наша изнуренная войной страна совершила гигантский прорыв, открыв человечеству дорогу в космос. В этом прорыве значительную роль сыграла советская наука. В проблемах, связанных с созданием ракет-носителей, весомую долю занимали задачи теории автоматического управления подвижными объектами. Глубокие знания в этой области и высокая эрудированность Б.Н. Петрова позволили ему активно включиться в разработку новых, уникальных для того времени задач автоматического управления, участвовать в разработке и обсуждении космических программ нашей страны наряду с ведущими деятелями ракетно-космической науки и техники.

Он по праву вошел в состав основоположников отечественной космонавтики, работая в течение многих лет в тесном контакте с С.П. Королевым, В.П. Глушко, М.К. Янгелем, В.Н. Челомеем, В.Ф. Уткиным, Н.А. Пилюгиным.

Результаты работ Б.Н. Петрова и возглавляемого им коллектива Института по исследованию динамики, разработке методов моделирования и регулирования жидкостного ракетного двигателя изменением тяги и коэффициента соотношения компонентов топлива используются во многих бортовых терминальных системах. Эти системы существенно повышают энергетику ракет путем резкого сокращения гарантийных запасов топлива. Значимость этих работ отмечается в книге Б.Е. Чертока «Ракеты и люди» [1].

Понимание специфики по назначению бортовых терминальных систем и особенности способа организации процессов управления позволили Б.Н. Петрову и его ученикам выделить эти системы в самостоятельный класс среди других систем автоматического управления. Принципы построения и элементы теории этого класса систем развиты в монографии «Бортовые терминальные системы управления» [2].

Идеи Б.Н. Петрова получили дальнейшее развитие и применение в современных разработках Института в области ракетно-космической техники и воплотились в создание терминальных систем управления нового поколения ракет-носителей и разгонных блоков космического и оборонного назначения (модернизированных РН «Союз-2», семейства РН «Ангара», РН «Сармат», разрабатываемых РН «Союз-5», РН «Амур» и РБ КВТК).

Применительно к ракетам-носителям нового поколения реализуется принцип взаимосвязанного, согласованного терминального управления движением центра масс и расходом топлива. Постановка задачи синтеза такого управления и основных принципов его реализации рассматривается в данной статье.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управление движением центра масс ракеты-носителя на безатмосферном участке полета.

В целях упрощения вводятся следующие предположения:

- аэродинамические силы отсутствуют,
- поле земного притяжения является плоскопараллельным, ускорение силы притяжения постоянно для всех высот $\vec{g} = \text{const}$,
- вращение Земли отсутствует.

Движение центра масс ступени ракеты-носителя в продольной плоскости (плоскости выведения) на безатмосферном участке полета описывается следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{V}_x = \frac{P}{m_\kappa + m} \cos(\vartheta), & \dot{V}_y = \frac{P}{m_\kappa + m} \sin(\vartheta) - g, & P = wr, \\ \dot{x} = V_x, & \dot{y} = V_y, & \dot{m} = -r, \\ \dot{\vartheta} = \omega, \\ \dot{\omega} = \varphi(\vartheta, \omega, \vartheta_{\text{тр}}), \end{cases}$$

где x, y — горизонтальная и вертикальная координаты, m — масса топлива, m_κ — масса сухой ступени, r — секундный расход топлива, w — характеристическая скорость истечения, P — тяга двигателя, g — ускорение силы притяжения, ϑ — угол тангажа, $\vartheta_{\text{тр}}$ — управляющее воздействие (требуемое значение ϑ) по изменению угла тангажа, V_x, V_y — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости.

В (1) уравнение для ϑ угла тангажа и ω угловой скорости упрощенно описывает работу системы стабилизации.

Координаты x, y, m, ϑ и их производные являются функциями времени t , $t \in [t_0, t_k]$, t_k — терминальный момент времени.

Отметим, что переходные процессы изменения угла тангажа ϑ до значения $\vartheta_{\text{тр}}(t)$ зачисляются за время, существенно меньшее момента времени t_k .

Для конечной ступени требуется достижение заданной высоты при нулевой вертикальной скорости:

$$(2) \quad \begin{cases} y(t_k) = y_k, \\ V_y(t_k) = 0. \end{cases}$$

На горизонтальную составляющую скорости конечного условия не задается. При решении задачи предполагается максимизация горизонтальной составляющей.

Для нижних ступеней ракеты ставится задача попадания в заданные районы паления отработанной ступени. В этом случае граничные условия можно определить для отклонения дальности полета L отработанной ступени из-за отклонений координат движения в конце полета от заданных значений:

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta L = \zeta_x(x(t_k) - x_k) + \zeta_y(y(t_k) - y_k) + \\ + \zeta_{V_x}(V_x(t_k) - V_{xk}) + \zeta_{V_y}(V_y(t_k) - V_{yk}) = 0, \end{aligned}$$

где $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{V_x}, \zeta_{V_y}$ — частные производные δL по координатам движения, δ — отклонение дальности полета от заданного значения.

Уравнения, определяющие изменение кажущейся скорости и процессы расходования компонентов топлива через двигатель, могут быть записаны в следующем виде:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{W} = \frac{rg}{m_\kappa + m} P_{y\partial}, \quad P_{y\partial} = \frac{w}{g}, \quad m = m_o + m_z, \quad r = r_o + r_z, \\ \dot{m}_o = -r_o, \quad \dot{m}_z = -r_z, \quad K_m = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_z}, \quad P_{y\partial} = \varphi(K_m), \\ \dot{r}_o = f_o(r_o, \alpha_{K_m}, \alpha_R), \quad \dot{r}_z = f_z(r_z, \alpha_{K_m}, \alpha_R), \end{aligned}$$

с начальными условиями, определяемыми с учетом погрешностей заправки и разброса достартовых расходов компонентов топлива, на момент времени, соответствующий включению системы управления расходованием топлива (СУРТ) в работу $m_o(t_0)$, $m_z(t_0)$, определяемыми с учетом погрешностей заправки и разброса достартовых расходов компонентов топлива.

Здесь m_o, m_z — массы окислителя и горючего, $P_{y\partial}$ — удельная тяга двигательной установки, r_o, r_z — секундные расходы компонентов топлива, определяемые уравнениями двигателя, α_{K_m}, α_R — положения регулирующих органов двигателя, определяемые заданными значениями коэффициента соотношения расходов компонентов через двигатель K_m и режима работы двигателя по тяге R .

Все координаты W, m_o, m_z, r_o, r_z и их производные являются функциями времени, рассматриваются на ограниченном интервале $t, t \in [t_0, t_k]$, t_k — терминальный момент времени.

Положения регулирующих органов двигателя, при которых реализуются требуемые для цели управления значения коэффициента $K_m(t)$ соотношения расходов компонентов топлива и режима $R(t)$ работы двигателя по тяге, определяются статическими нелинейными уравнениями двигателя:

$$\alpha_{K_m}(t) = f_{K_m}(K_m(t), R(t)), \quad \alpha_R(t) = f_R(K_m(t), R(t)), \quad R(t) = \frac{P(t)}{P_{\text{ном}}}(t).$$

Здесь предполагается, что $K_m(t)$ вычисляется в алгоритме терминальной системы для управления объектом (3), а $R(t)$ определяется заданной программой изменения тяги двигателя.

Отметим, что переходные процессы изменения расходов компонентов топлива r_o , r_z при изменении положения регулирующих органов двигателя $\alpha_{K_m}(t)$, $\alpha_R(t)$ заканчиваются за время, существенно меньшее момента времени t_k .

На величину коэффициента соотношения расходов компонентов топлива, которая может изменяться в процессе управления, накладываются ограничения. Граничные значения задаются исходя из условий устойчивой работы двигателя и существенным образом зависят от режима его работы по тяге: $K_{m\min}(R, t) \leq K_m(t) \leq K_{m\max}(R, t)$.

В данном случае конечные терминальные условия накладываются на остатки компонентов топлива в момент выключения двигателя и определяются требованиями безаварийности выключения двигателя. Конечные условия задаются в виде неравенств, означающих необходимость положительности остатков компонентов топлива в момент выключения двигателя, формируемый системой управления, относительно уровня топлива, гарантирующего безаварийный режим останова двигателя:

$$(5) \quad m_o(t_k) - m_{o\min} > 0, \quad m_z(t_k) - m_{z\min} > 0.$$

Здесь $m_{o\min}$, $m_{z\min}$ — остатки запасов компонентов топлива, не вырабатываемые из баков из-за конструктивных особенностей заборного устройства и учитывающие погрешности работы системы управления.

Величины $m_{o\min}$, $m_{z\min}$ будем включать в m_κ , а под $m(t)$, $m_o(t)$, $m_z(t)$ будем понимать текущие значения масс компонентов топлива за вычетом $m_{o\min}$, $m_{z\min}$.

Определим вектор невязок заданных граничных условий (2), (3), (5) решения терминальной задачи и вектор управляющих воздействий:

$$\begin{aligned} z_0 &= (y(t_k) - y_k, V_y(t_k), m_o(t_k), m_z(t_k)) \text{ — для конечной ступени ракеты,} \\ (6) \quad z_0 &= (\delta L, m_o(t_k), m_z(t_k)) \text{ — для нижних ступеней ракеты,} \\ u &= (\vartheta_{\text{тр}}, K_m, t_k). \end{aligned}$$

Отметим, что величина R , определяющая режим изменения тяги двигателя, является заданной функцией времени и не входит в состав вектора управляющих воздействий u . Терминальный момент времени t_k может варьироваться и использоваться в качестве управляющего параметра для решения терминальной задачи.

Основная задача терминального управления заключается в минимизации невязок граничных (краевых) условий. Кроме выполнения граничных условий, к терминальным системам предъявляются также и другие требования, физическое содержание которых могут составлять затраты энергетического ресурса, времени, потери на управление. В данной работе задача критерияльного синтеза ограничивается краевыми условиями, выполнение которых является приоритетным.

Объект управления рассматриваемой терминальной системы в части переходных процессов в заданное конечное состояние весьма инерционен (представляет собой интегрирующие звенья).

Управление этими процессами производится путем воздействия на другие координаты объекта ϑ, r_o, r_z с быстро затухающей динамикой переходных процессов. Суть такого управления состоит в задании требуемых установившихся значений этих координат.

Управление координатами ϑ, r_o, r_z (путем изменением положением исполнительных органов, приводов, рулей и т.д.) заключается в стабилизации этих координат объекта относительно заданных значений, определяемых вектором $u(t)$. Работа контура стабилизации в замкнутом виде упрощенно описывается системой уравнений для ϑ, r_o, r_z .

В данном случае работа контура стабилизации рассматривается только в части переходных процессов реакции на изменение управляющего воздействия. Предполагается, что переходный процесс завершается на интервале, существенно меньшем, чем интервал терминального управления.

3. Синтез алгоритмов управления в классе кусочно-постоянных функций прогнозируемых невязок конечных условий

Задачу синтеза терминального управления объектом (1), (4) будем рассматривать в классе систем с прогнозирующей моделью.

Проинтегрируем (1) на интервале прогнозирования $\tau \in [t, t_{\text{кпр}}]$, где $t_{\text{кпр}}$ — прогнозируемое значение терминального момента времени. Текущие начальные значения координат движения центра масс ракеты x, y, V_x, V_y в момент времени t определяются в инерциальной системе навигации. Вместо уравнения для массы топлива $m(t)$ в (1) принимается уравнение для $m_{\text{мод}}(t)$, которое формируется в алгоритме управления расходом топлива:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{m}_{\text{мод}}(t) &= r_{\text{мод}}(t), \\ r_{\text{мод}}(t) &= r_{\text{цикл}}(t)(1 + \lambda(t)), \end{aligned}$$

где $r_{\text{цикл}}$ — суммарный расход топлива, соответствующий заданной циклограмме режима работы двигателя по тяге, $\lambda(t)$ — управляемый параметр модели (физическим аналогом $\lambda(t)$ является относительное отклонение суммарного расхода от номинального значения), корректирующий $r_{\text{цикл}}(t)$ в модели расходования топлива.

Отметим, что величина суммарного расхода топлива, соответствующего заданной циклограмме режима работы двигателя по тяге ($r_{\text{цикл}}(t)$), может определяться на основе измерений кажущегося ускорения и уравнения для $\dot{W}$, приведенного в (4).

При интегрировании (1), (7) на интервале $\tau \in [t, t_{\text{кпр}}]$, где $t_{\text{кпр}}$ будем полагать, что $\vartheta(\tau) = \vartheta(t)$, $r(\tau) = r_{\text{цикл}}(\tau)(1 + \lambda(t))$, $m(\tau) = m_{\text{мод}}(\tau)$.

Величину $t_{\text{кпр}}$ определим из условия $m_{\text{мод}}(t) - \int_t^{t_{\text{кпр}}} r_{\text{мод}}(\tau) d\tau = 0$.

Определим значения прогнозируемых невязок $y(t_{\text{кпр}}) - y_k$, $V_y(t_{\text{кпр}})$, $\delta L(t_{\text{кпр}})$.

При интегрировании (1) можно воспользоваться выражениями для интегралов, приведенных в [3].

В качестве терминального момента времени t_k (выключения двигательной установки) примем значение момента времени t , при котором $m_{\text{мод}}(t) = 0$.

В части управления расходом компонентов топлива модель прогнозирования включает уравнение (7) и уравнения процессов изменения масс компонентов топлива (4). Принимая во внимание взаимосвязанность (7) с (4), определим уравнения для отклонений текущих значений масс окислителя и горючего от модельных аналогов, образующихся из модельного значения массы суммарного топлива в соответствии с номинальным значением коэффициента соотношения K_m :

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta m_o(t) &= m_o(t) - m_{\text{мод}}(t) \frac{K_{m \text{ ном}}}{K_{m \text{ ном}} + 1}, \\ \Delta m_r(t) &= m_r(t) - m_{\text{мод}}(t) \frac{1}{K_{m \text{ ном}} + 1}, \end{aligned}$$

где $m_o(t)$, $m_r(t)$ определяются по измерениям дискретных датчиков уровня в баках.

Для отклонений (8) могут быть получены уравнения следующего вида:

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta \dot{m}_o(t) &= r_o(t) - r_{\text{мод}}(t) \frac{K_{m \text{ ном}}}{K_{m \text{ ном}} + 1}, \\ \Delta \dot{m}_r(t) &= r_r(t) - r_{\text{мод}}(t) \frac{1}{K_{m \text{ ном}} + 1}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнения (9) на интервале $\tau \in [t, t_{\text{кпр}}]$ при условии $r_o(\tau) = r_o(t)$, $r_r(\tau) = r_r(t)$, $r_{\text{мод}}(\tau) = r_{\text{цикл}}(\tau)(1 + \lambda(t))$ и начальных условиях $\Delta m_o(t)$, $\Delta m_r(t)$.

Определим значения прогнозируемых невязок $\Delta m_o(t_{\text{кпр}})$, $\Delta m_r(t_{\text{кпр}})$.

В силу прогнозирующей модели объекта (1), (4) вектор прогнозируемых невязок граничных условий (6) определим в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} z(t) &= (y_{pr}(t_{\text{кпр}}) - y_k, V_{ypr}(t_{\text{кпр}}), \Delta m_o(t_{\text{кпр}}), \Delta m_z(t_{\text{кпр}})) \text{ — для конечной} \\ &\hspace{15em} \text{ступени ракеты,} \\ z(t) &= (\delta L, \Delta m_o(t_{\text{кпр}}), m_z(t_{\text{кпр}})) \text{ — для нижней ступени ракеты,} \end{aligned}$$

а вектор управляющих воздействий в виде $u = (\vartheta_{\text{тр}}, K_m, \lambda)$.

При $t \rightarrow t_k$, $t_{\text{кпр}} \rightarrow t_k$, $z(t) \rightarrow z_0$.

Будем решать задачу терминального управления объектом (1), (4) путем формирования управления с обратной связью как функции прогнозируемых невязок краевых условий (10).

Обозначим через $x_T(t) = (x(t), y(t), V_x(t), V_y(t), \Delta m_o(t), \Delta m_z(t), m_{\text{мод}}(t))$ вектор координат прогнозируемой модели объекта (1), (7), (9), дополненной уравнениями для $\dot{m}_o, \dot{m}_z, \dot{r}_o, \dot{r}_z$, по которым формируются невязки краевых условий, а через $x_u(t) = (\vartheta(t), r_o(t), r_z(t), \lambda(t))$ — вектор координат, на которые непосредственно воздействуют управляющие воздействия.

Как показано в [4, 5], для вектора прогнозируемых невязок граничных условий дифференцированием $z(t)$ как сложной функции определяются производная по времени и дифференциальное уравнение:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial z(t)}{\partial x_T(t_{\text{кпр}})} \left[\frac{\partial x_T(t_{\text{кпр}})}{\partial x_u(t)} \frac{dx_u(t)}{d(t)} + \frac{dt_{\text{кпр}}}{dt} \frac{dx_T(t_{\text{кпр}})}{d(t)} \right].$$

Управляющие воздействия $\vartheta_{\text{тр}}(t)$, $K_m(t)$, $\lambda(t)$ будем выбирать в классе кусочно-постоянных функций времени. Управляющее воздействие по углу тангажа $\vartheta_{\text{тр}}$ изменяется дискретно в моменты времени обновления информации, поступающей от инерциальной системы навигации. Управляющие воздействия $K_m(t)$, $\lambda(t)$ на процессы расходования компонентов топлива изменяются в дискретные моменты времени измерений уровней компонентов в баках. В эти же моменты возникают переходные процессы по $r_o(t)$, $r_z(t)$ и скачкообразно изменяются величины $r_{\text{мод}}(t)$, $t_{\text{кпр}}(t)$.

Для кусочно-постоянного управления из дифференциальных уравнений могут быть получены разностные уравнения для $z(t)$. Введем обозначения для компонент вектора невязок:

$$\begin{aligned} z_y(t) &= y_{pr}(t_{\text{кпр}}) - y_k, \quad z_V(t) = V_{ypr}(t_{\text{кпр}}), \\ z_{m_o}(t) &= \Delta m_o(t_{\text{кпр}}), \quad z_{m_z}(t) = \Delta m_z(t_{\text{кпр}}), \quad z_\delta(t) = \delta(t_{\text{кпр}}). \end{aligned}$$

Разностные уравнения для компонент вектора $z(t)$ могут быть записаны в следующем виде. В части управления движением центра масс разностные уравнения определяются для дискретных моментов времени t_i обновления навигационной информации, $i = 0, 1, 2, \dots, I$, $t_{I+1} = t_k$ (при условии $\lambda(t) = \text{const}$, $t_{\text{кпр}}(t) = \text{const}$):

$$\begin{aligned} (11) \quad z_y(t_{i+1}) &= z_y(t_i) + \frac{\partial z_y}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i, \\ z_{V_y}(t_{i+1}) &= z_{V_y}(t_i) + \frac{\partial z_{V_y}}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i, \\ z_\delta(t_{i+1}) &= z_\delta(t_i) + \frac{\partial z_\delta}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta \vartheta_i = \int_{t_i}^{t_i + \delta t} \dot{\vartheta}(\tau) d\tau,$$

где δt — интервал времени переходного процесса в объекте (1) по координате ϑ при скачкообразном изменении управляющего воздействия $\vartheta_{\text{тр}}$ в момент времени t_i .

Кроме того, в моменты времени t_j дискретных измерений количества топлива в баках указанные выше невязки изменяются из-за изменения $\lambda(t)$, $t_{\text{кпр}}(t)$.

Будем считать, что дискретные измерения датчиков уровней производятся в один из дискретных моментов времени обновления навигационной информации $t_j = t_i$. Дополним (11) слагаемыми, учитывающими скачкообразные

изменения $\lambda(t)$ и $t_{\text{кпр}}(t)$:

$$\begin{aligned}
 z_y(t_{i+1}) &= z_y(t_i) + \frac{\partial z_y}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i + \frac{\partial z_y}{\partial r_{\text{мод}}}(t_i) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + \Delta t_{\text{кпр}j} \dot{y}(t_{\text{кпр}}), \\
 z_{V_y}(t_{i+1}) &= z_{V_y}(t_i) + \frac{\partial z_{V_y}}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i + \frac{\partial z_{V_y}}{\partial r_{\text{мод}}}(t_i) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 (12) \quad &\quad + \Delta t_{\text{кпр}j} \dot{V}_y(t_{\text{кпр}}), \\
 z_\delta(t_{i+1}) &= z_\delta(t_i) + \frac{\partial z_\delta}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i + \frac{\partial z_\delta}{\partial r_{\text{мод}}}(t_i) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + \Delta t_{\text{кпр}j} (\zeta_x \dot{x}(t_{\text{кпр}}) + \zeta_y \dot{y}(t_{\text{кпр}}) + \zeta_{V_x} \dot{V}_x(t_{\text{кпр}}) + \zeta_{V_y} \dot{V}_y(t_{\text{кпр}})).
 \end{aligned}$$

Здесь $\Delta t_{\text{кпр}j}$ — разность значений $t_{\text{кпр}j}$, определяемых из уравнения (7) в момент t_j , при $\lambda = \lambda(t_j)$ и $\lambda = \lambda(t_j) + \Delta \lambda_j$. Величина этой разности может быть определена следующим приближенным выражением: $\Delta t_{\text{кпр}j} = \zeta_{tk}(t_j) \Delta \lambda_j$.

В части управления расходом топлива разностные уравнения определяются для дискретных моментов времени t_j обновления информации датчиков уровней:

$$\begin{aligned}
 z_{m_o}(t_{j+1}) &= z_{m_o}(t_j) + \frac{\partial z_{m_o}}{\partial r_o}(t_j) \Delta r_{oj} + \frac{\partial z_{m_o}}{\partial r_{\text{мод}}}(t_j) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + (r_o(t_j) - r_{\text{мод}}(t_j)) \frac{K_{m \text{ ном}}}{K_{m \text{ ном}} + 1} \zeta_{tk}(t_j) \Delta \lambda_j, \\
 (13) \quad z_{m_z}(t_{j+1}) &= z_{m_z}(t_j) + \frac{\partial z_{m_z}}{\partial r_z}(t_j) \Delta r_{zj} + \frac{\partial z_{m_z}}{\partial r_{\text{мод}}}(t_j) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + (r_z(t_j) - r_{\text{мод}}(t_j)) \frac{1}{K_{m \text{ ном}} + 1} \zeta_{tk}(t_j) \Delta \lambda_j,
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta r_{oj} = \int_{t_j}^{t_j + \delta t} f_o(r_o, \alpha_{K_m}, \alpha_R) d\tau, \quad \Delta r_{zj} = \int_{t_j}^{t_j + \delta t} f_z(r_z, \alpha_{K_m}, \alpha_R) d\tau,$$

где δt — интервал времени переходного процесса в объекте (4) по координатам r_o, r_z при скачкообразном изменении α_{K_m} при реализации управляющего воздействия $K_m(t)$ в момент времени t_i .

Для линеаризованных уравнений двигателя при неизменном режиме по тяге величины приращений расходов компонентов топлива из-за изменения коэффициента соотношения K_m можно определить следующим выражением [5]:

$$\Delta r_{oj} = \frac{\delta r_o(t_j)}{\delta K_m} \Delta K_{mj}, \quad \Delta r_{zj} = \frac{\delta r_z(t_j)}{\delta K_m} \Delta K_{mj}.$$

Переформулируем исходную задачу терминального управления. Вместо нахождения управления $u(t)$ в классе кусочно-постоянных функций будем искать дискретную последовательность приращений координат $\vartheta(t), K_m(t), \lambda(t)$ в моменты времени t_i, t_j .

На основе разностных уравнений (11)–(13) определяются алгоритмы формирования вектора управляющих воздействий $\Delta u = (\Delta\vartheta_i, \Delta K_{mj}, \Delta\lambda_j)$ как функции прогнозируемых невязок краевых условий.

Основным возмущением в рассмотренной терминальной задаче являются заранее неизвестные начальные условия по координатам уравнений объекта (1), (4). Возможность парирования этих возмущений при управлении районами падения нижних ступеней определяется тем, что размерность вектора управления равна размерности вектора невязок. При управлении конечной ступенью размерность вектора краевых условий увеличивается. В этом случае для решения терминальной задачи необходимо выбирать значения управляющих воздействий для двух дискретных моментов времени. При этом число независимых управляющих воздействий оказывается больше размерности вектора невязок. В результате анализа возможных вариантов формирования управляющих воздействий для двух дискретных моментов времени был принят следующий, наиболее очевидный алгоритм управления. Рассмотрим дискретный момент времени t_j .

Из разностных уравнений (13) для невязок краевых условий в части управления расходом топлива определим значения управляющих воздействий $K_m(t_j), \Delta\lambda(t_j)$. Алгоритм управления углом тангажа с обратной связью по прогнозируемым значениям невязок $y_{pr}(t_{кпр}) - y_k, V_{ypr}(t_{кпр})$, обеспечивающий решение терминальной задачи к заданным краевым условиям по координатам $y(t_k), V_y(t_k) = 0$, определим из уравнений (11), (12) для двух дискретных моментов времени t_{i+1}, t_{i-p+1} . Отметим, что на интервале $[t_i, t_{i-p+1}]$ невязки $y_{pr}(t_{кпр}) - y_k, V_{ypr}(t_{кпр})$ сохраняют свои значения неизменными.

Алгоритм управления углом тангажа с обратной связью по прогнозируемым значениям невязок $y_{pr}(t_{кпр}) - y_k, V_{ypr}(t_{кпр})$ в дискретные моменты времени t_i, t_{i-p} определяется на основе уравнения (12) с учетом величины $\Delta\lambda(t_i)$, вычисленной в алгоритме управления расходом топлива. Процедура формирования этого алгоритма изложена в [4]. При этом угол тангажа в момент времени t_{i-p} получает приращение $\Delta\vartheta_1$, а в момент времени t_i изменяется на величину $\Delta\vartheta_2$.

Погрешности терминального управления определяются наличием параметрических возмущений. Эти возмущения парируются путем применения итеративной процедуры формирования вектора управления $\Delta u = (\Delta\vartheta_i, \Delta K_{mj}, \Delta\lambda_j)$ с обратной связью по вектору прогнозируемых невязок краевых условий $z(t)$.

Основным результатом решения рассмотренной задачи совместно согласованного управления движением центра масс и расходом топлива является наиболее полное использование располагаемых запасов топлива [6]. Суть такого согласованного управления заключается в следующем. Информация о текущей массе топлива, формируемая в соответствии с (7), где $\lambda(t)$ опре-

деляется с учетом измерений датчиков уровней, учитывается при прогнозировании невязок координат траектории центра масс, соответствующих цели выведения. В этом случае в уравнениях (12) для $z_y(t_{j+1})$, $z_v(t_{j+1})$, $z_\delta(t_{j+1})$ появляется возмущающее воздействие $\Delta\lambda_j$. За счет дополнительного сжигания топлива увеличивается конечное значение кажущейся скорости $W(t_{\text{кпр}})$. Возникающая при этом ошибка по району падения устраняется вариацией скорости в нейтральном направлении путем дополнительного управления по углу тангажа. Отметим, что эффективность такого управления сохраняется, пока угол тангажа не приблизится к значению, при котором обеспечивается максимальная дальность полета отработанной ступени.

Без учета фактического текущего значения массы топлива при управлении движением центра масс терминальный момент времени $t_{\text{кпр}}$ определяется равенством нулю невязок по координатам траектории движения. В этом случае возмущающие факторы типа отклонений начальной массы, расхода топлива и др., воздействие которых на траекторию движения парируется путем управления вектором тяги к моменту $t_{\text{кпр}}$, приведут к возникновению значительных неиспользуемых остатков топлива. Величина этих остатков может достигать 1% от начальной массы топлива.

В контуре управления расходом топлива при измерении уровней компонентов топлива в баках имеют место значительные ошибки измерения случайного характера. Вследствие этого, даже с учетом фильтрации ошибок измерения, возникают случайные погрешности управления в виде остатков компонентов топлива в момент t_k . Для парирования этих погрешностей вводятся гарантийные запасы компонентов топлива, снижающие эффективность управления. Тем не менее при реализации согласованного терминального управления применительно к современным ракетам-носителям РН «Ангара», РН «Союз-5» неиспользуемые запасы топлива сокращаются в 3 раза.

Принцип согласованного управления движением центра масс и расходом компонентов топлива реализован в алгоритмах управления РН «Протон-М» и семейства РН «Ангара».

В зарубежных аналогах терминальное управление движением центра масс путем воздействия на вектор тяги и итеративной процедуры формирования управления с обратной связью по прогнозируемым невязкам развивалось почти в одно и то же время (в конце прошлого столетия), как и в СССР и впоследствии в РФ. Вместе с тем потребность согласованного управления движением центра масс и расходом топлива не возникала. По-видимому, это связано с тем, что на районы падения отработанных ступеней РН не накладывается жестких ограничений.

4. Заключение

1. Рассмотрена задача синтеза терминального управления движением центра масс и расходом топлива жидкостных ракет-носителей. Задача синтеза управления ограничивается заданными краевыми условиями, выполнение которых является приоритетной задачей.

При решении задачи предполагается возможность декомпозиции системы на взаимосвязанные процессы управления конечным состоянием и стаби-

лизации объекта. Декомпозиция позволяет раскрыть содержание процессов управления в терминальной системе. Терминальное управление производится путем задания значений координат объекта, поддерживаемых контуром стабилизации. Стабилизация объекта относительно заданных значений характеризуется быстрым затуханием динамики переходных процессов. Производная невязок в декомпозированной системе в явном виде зависит от терминального управления.

2. Задача синтеза решается в классе систем с прогнозированием невязок краевых условий — вектор-функции текущих значений координат объекта и времени. Для вариаций управления в классе кусочно-постоянных функций проведена дискретизация задачи синтеза. Получены разностные уравнения для вектора прогнозируемых невязок. На основе полученных разностных уравнений определяются алгоритмы формирования вектора управляющих воздействий по изменению угла тангажа, коэффициента соотношения расхода компонентов и управляемого параметра модели объекта как функции прогнозируемых невязок краевых условий.

3. Решением рассмотренной терминальной задачи является совместно согласованное управление движением центра масс и расходом топлива, обеспечивающее наиболее полное использование располагаемых запасов топлива. Принцип согласованного управления движением центра масс и расходом компонентов топлива реализован в алгоритмах управления РН «Протон-М» и семейства РН «Ангара».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чертюк Б.Е.* Ракеты и люди. I. М.: Машиностроение, 1994.
2. *Петров Б.Н., Портнов-Соколов Ю.П., Андриенко А.Я., Иванов В.П.* Бортовые терминальные системы управления. М.: Машиностроение, 1983.
3. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011.
4. *Иванов В.П., Табалин Д.Д.* Об одном методе детерминированного терминального управления с предиктивным прогнозированием невязок краевых условий // *АиТ*. 2022. № 1. С. 77–94. <https://doi.org/10.31857/S0005231022010056>
5. *Иванов В.П., Стаменкович Н.Н., Каблова Е.Б., Кленовая Л.Г.* Детерминированный синтез алгоритмов управления расходом топлива из баков жидкостной ракеты-носителя с учетом условий устойчивой работы двигателя // *Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления*. 2020. № 3 (53). С. 31–41.
6. *Иванов В.П., Завадский В.К., Гуськов А.Д., Дишель В.Д., Васягина И.В., Кислик В.Д.* Терминальное управление наведением ракеты-носителя и расходом топлива в режиме его полной выработки // *Междунар. науч.-техн. конф. «Системы и комплексы автоматического управления летательными аппаратами», посв. 100-летию со дня рождения академика РАН Николая Алексеевича Пилюгина*. Ч. II. М.: ООО «Научно-издательский центр «Инженер». 2008. С. 56–65.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 14.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. В.В. КУЛЬБА, д-р техн. наук (kulba@ipu.ru),
Е.А. МИКРИН, академик РАН,
В.В. ПАВЛОВ, д-р техн. наук (pavlov@ipu.ru),
С.К. СОМОВ, канд. техн. наук (ssomov2016@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ТЕХНОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ОТРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ БОРТОВЫХ СИСТЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В работе представлены основные положения концепции комплексной отработки программного обеспечения бортового комплекса управления космическими аппаратами. Выполнена постановка и предложен метод решения задачи выбора оптимальной стратегии комплексной отработки бортового комплекса программ. Предложены методы отработки программного обеспечения по показателям функциональной корректности.

Ключевые слова: космический аппарат, программное обеспечение, бортовой комплекс управления, комплексная отработка программного обеспечения.

DOI: 10.31857/S0005231023100057, EDN: YEDKZJ

1. Введение

Широкое разнообразие задач, решаемых при эксплуатации КА, экстремальные условия их функционирования, а также различные технологии и протоколы информационного взаимодействия между элементами бортовой аппаратуры и программным обеспечением, включая различные датчики и индикаторы определяют необходимость создания новых подходов, методов и технологий поддержки научных и технологических разработок в области перспективной космической техники. Проблемам разработки и внедрения методов моделирования в аэрокосмической отрасли посвящены работы [1–5]. В этих работах важное место занимают вопросы цифрового моделирования — актуального метода проведения исследований различных аспектов работы бортовых комплексов управления космическими аппаратами (БКУ КА), включая проектирование, создание и отработку их программного обеспечения (ПО БКУ КА) [6, 7]. Анализ опыта применения современных организационных, методических и технических решений, используемых для отработки ПО БКУ КА, выявил необходимость разработки основных положений методологии комплексной отработки ПО БКУ КА [6]. Решение данной задачи остро необходимо для эффективной разработки и отработки ПО БКУ КА за счет использования прототипов ПО, а также ранней функциональной интеграции и итеративной проверки выполнения требований к ПО. Данная методология отработки ПО БКУ КА используется для оптимизации процесса комплексной отработки ПО с использованием стоимостных и временных критериев с учетом разнообразных технологических ограничений.

2. Выбор оптимальной стратегии комплексной обработки

В формальных постановках задач выбора оптимальной стратегии комплексной обработки программного обеспечения БКУ КА обычно используются два критерия оптимальности. Первый критерий — минимум времени, второй — минимум стоимости проведения обработки. Цель общей задачи выбора оптимальной стратегии комплексной обработки заключается в определении: 1) оптимального разбиения структуры КП на отдельные части, 2) множества необходимых подпрограмм — «заглушек» и подпрограмм — «драйверов», 3) сценария обработки выделенных ранее отдельных частей КП. При постановке задачи используются ограничения, которые определяют допустимые варианты разбиения и объединения специального графа Γ , вершины которого соответствуют программным модулям ПО, а дуги — это связи по управлению между вершинами. При разработке тестов и при локализации ошибок используются графовые модели, которые детализируют граф Γ . Данные графовые модели применяются для формализации детальных блок-схем КП. Кроме того, данные графовые модели применяются и для формализации детальных блок-схем отдельных программных модулей (ПМ).

Множество различных стратегий комплексной обработки ПО БКУ определяется следующим образом. На начальном этапе необходимо определить множество всех допустимых способов разбиения графа Γ на подграфы. Для каждого полученного подграфа проводится автономное тестирование. Далее для полученных подграфов определяется множество всех допустимых вариантов их объединения. Эти варианты объединения подграфов используются для связного тестирования ПО. Каждая из множества стратегий комплексной обработки определяется следующим образом. Во-первых, это множество подграфов $p^m = \{p_1, \dots, p_i, \dots, p_M\}$, полученных при разбиении графа Γ . Во-вторых, очередностью объединения данных подграфов. Объединение подграфов в соответствии с данной очередностью позволяет получить исходную графовую структуру $\tilde{p}^{mn} = \{\tilde{p}_1^{mn}, \dots, \tilde{p}_k^{mn}, \dots, \tilde{p}_N^{mn}\}$. Здесь $\tilde{p}_N^{mn}$ совпадает с графом Γ .

Цель решения задачи выбора оптимальной стратегии комплексной обработки заключается в поиске такого разбиения p^{m*} графа Γ и такой последовательности объединения подграфов $\tilde{p}^{mn*}$, которые при совместном использовании позволяют получить такой сценарий комплексной обработки, который обеспечит получение оптимальных значений временных и стоимостных характеристик стратегий обработки.

В случае, если процесс обработки использует mn -стратегию, то затраты времени и стоимости на комплексную отладку будут состоять из двух следующих компонент: $\bar{T}_{mn}^p(\bar{C}_{mn}^p), \bar{T}_{mn}^o(\bar{C}_{mn}^o)$. Первая компонента $\bar{T}_{mn}^p(\bar{C}_{mn}^p)$ — это время $\bar{T}_{mn}^p$ и (стоимость $\bar{C}_{mn}^p$) автономной обработки подграфов графа Γ , полученных при разбиении графа для mn -стратегии. Вторая компонента $\bar{T}_{mn}^o(\bar{C}_{mn}^o)$ — время $\bar{T}_{mn}^o$ и (стоимость $\bar{C}_{mn}^o$) реализации этапов объединения подграфов и последующей связной обработкой подграфов для mn -стратегии. Величина стоимостных затрат и времени автономной обработки подграфов, полученных при разбиении графа Γ , рассчитывается при помощи

следующих двух выражений:

$$\bar{T}_{mn}^p = \sum_{\nu} t_{\nu mn}; \quad \bar{C}_{mn}^p = \sum_{\nu} C_{\nu mn},$$

где $t_{\nu mn}$ и $C_{\nu mn}$ — время и стоимость автономной отработки ν -го подграфа разбиения графа Γ .

При объединении подграфов связная отработка будет иметь характеристики времени и стоимости, значения которых определяются выражениями:

$$\bar{T}_{mn}^o = \sum_k b_{kmn}; \quad \bar{C}_{mn}^o = \sum_k S_{kmn}.$$

Здесь b_{kmn} и S_{kmn} — время и стоимость связной отработки на k -м этапе объединения подграфов.

Задача определения оптимальной стратегии с использованием временного критерия в общем виде имеет следующую формулировку: необходимо найти минимум выражения:

$$\sum_{mn} (\bar{T}_{mn}^p + \bar{T}_{mn}^o) x_{mn}.$$

С учетом ограничения на стоимость отработки

$$\sum_{mn} (\bar{C}_{mn}^p + \bar{C}_{mn}^o) x_{mn} \leq C.$$

В данном ограничении используется переменная x_{mn} :

$$x_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если выбрана } mn\text{-стратегия комплексной отработки;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В ограничении также используется константа C , определяющая максимально допустимые затраты на проведение КП.

В процессе решения данной задачи поиск вариантов разбиения на подграфы графа Γ состоит в выборе состава V групп программных модулей КП, где V — число программных модулей в составе КП БКУ. При решении задачи требуется соблюдать ограничения на допустимые комбинации программных модулей для каждой из V групп.

В ходе выбора варианта объединения подграфов из множества подграфов $p^m = \{p_1, \dots, p_m, \dots, p_M\}$ до исходной структуры графа Γ требуется определить перечень этапов объединения V^* непустых подграфов в исходную структуру графа Γ . Максимальное число таких этапов должно быть равно числу непустых подграфов V^* .

Однако если количество программных модулей в КПО (компонент программного обеспечения) велико, то тогда и множество возможных вариантов стратегий системной отработки становится слишком большим. Из-за чего оценка значений временных и стоимостных характеристик стратегий становится чрезвычайно ресурсоемкой задачей, требующей много времени. Для

решения данной проблемы предлагается решать более частные задачи поиска оптимальной стратегии системной обработки ПО, так как на практике именно такие задачи возникают чаще всего.

Определим множество $\overline{P}^p$ вариантов разбиения графа Γ на подграфы таким образом:

$$\overline{P}^p = \{P^m\}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Здесь $P^m = \{p_1^m, \dots, p_\nu^m, \dots, p_{D_m}^m\}$ — m -й вариант разбиения, p_ν^m — ν -й подграф, D_m — это количество подграфов при m -м варианте разбиения.

Множество $\overline{P}^o = \{\tilde{P}^{mn}\}$, ($n = \overline{1, N_m}$, $m = \overline{1, M}$) задает варианты объединения графа Γ . Элемент $\tilde{P}^{mn} = \{\tilde{p}_1^{mn}, \dots, \tilde{p}_k^{mn}, \dots, \tilde{p}_{F_{mn}}^{mn}\}$ множества $\overline{P}^o$ — это n -й вариант объединения при m -м варианте разбиения графа Γ . Величины N_m и F_{mn} — это число полученных вариантов объединения подграфов и число этапов объединения для m -го варианта разбиения графа Γ .

Для n -го варианта объединения элемент $\tilde{p}_k^{mn}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{p}_k^{mn} = \bigcup_{v \in R1_k^{mn}} p_v^m \bigcup_{i \in R2_k^{mn}} p_i^m.$$

Здесь $R1_k^{mn}$ — множество индексов подграфов из P^m , а $R2_k^{mn}$ — множество индексов подграфов из $\tilde{P}^{mn}$, включенных в k -й этап связной обработки для m -го варианта разбиения при n -м варианте объединения графа Γ .

Стратегия комплексной обработки, с одной стороны, определяется вариантом разбиения графа Γ на подграфы $P^m \in \overline{P}^p$, а с другой стороны — вариантом объединения полученных подграфов $\tilde{P}^{mn} \in \overline{P}^o$ в исходную графовую структуру.

Время t_ν и стоимость C_ν автономной обработки каждого ν -го подграфа разбиения состоят из трех компонент: времени и стоимости (t_ν^n, C_ν^n) подготовки данных для тестирования, времени и стоимости (t_ν^p, C_ν^p) процесса тестирования и времени и стоимости (t_ν^l, C_ν^l) локализации ошибок, обнаруженных при тестировании подграфа:

$$t_\nu = t_\nu^n + t_\nu^p + t_\nu^l, \quad C_\nu = C_\nu^n + C_\nu^p + C_\nu^l,$$

где

$$t_\nu^n = t_\nu^\Gamma + t_\nu^3 + t_\nu^d, \quad C_\nu^n = C_\nu^\Gamma + C_\nu^3 + C_\nu^d.$$

В приведенных выше формулах использованы следующие обозначения: t_ν^Γ — время, а C_ν^Γ — стоимость генерации тестовых данных для ν -го подграфа; t_ν^3 — время и C_ν^3 — стоимость создания подпрограмм «заглушек», требуемых для организации обработки ν -го подграфа; t_ν^d — время и C_ν^d — стоимость создания подпрограмм «драйвера», необходимых для обработки ν -го подграфа; t_ν^p — время, а C_ν^p — стоимость выполнения тестов для ν -го подграфа; t_ν^l — время, а C_ν^l — стоимость локализации ошибок, обнаруженных при тестировании ν -го подграфа.

Задача поиска оптимальной стратегии системной обработки может быть сведена к двум шагам. На первом шаге производится выбор варианта разбиения графа Γ на подграфы $P^m \in \overline{P}^p$ для их автономной обработки. На

втором шаге выполняется выбор варианта объединения этих подграфов из множества $\overline{P}^o$ для связной отработки. Эти два шага обеспечивают выполнение комплексной отработки при минимальных затратах времени и стоимости при ограничениях на стоимость и время отработки.

Определим переменную y_{mn} для ее использования в постановке задачи выбора оптимальной стратегии отработки следующим образом:

$$y_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если для } m\text{-го варианта разбиения графа } \Gamma \\ & \text{выбирается } n\text{-й вариант объединения;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При решении данной задачи используются следующие исходные данные:

- 1) Множества $\overline{P}^p = \{P^m\}$, $m = \overline{1, M}$, $\overline{P}^o = \{\tilde{P}^{mn}\}$, $n = \overline{1, N_m}$, $m = \overline{1, M}$.
- 2) Временные и стоимостные характеристики автономной, а также и связной отработки.

При этом время и стоимость для комплексной отработки задаются следующими выражениями:

$$\overline{T}^k = \overline{T}_m^p + \overline{T}_{mn}^o, \quad \overline{C}^k = \overline{C}_m^p + \overline{C}_{mn}^o,$$

где $\overline{T}_m^p$ – время, а $\overline{C}_m^p$ – стоимость автономной отработки в случае m -го варианта разбиения графа Γ ; $\overline{T}_{mn}^o$ – время, а $\overline{C}_{mn}^o$ – стоимость этапов связной отработки в случае m -го варианта разбиения графа Γ и n -го варианта объединения графа Γ .

Время $\overline{T}_m^p$ автономной отработки и ее стоимость $\overline{C}_m^p$ определяются с использованием следующих формул:

$$\begin{aligned} \overline{T}_m^p &= \sum_{\nu} (t_{\nu m}^r + t_{\nu m}^3 + t_{\nu m}^d + t_{\nu m}^l), \\ \overline{C}_m^p &= \sum_{\nu} (c_{\nu m}^r + c_{\nu m}^3 + c_{\nu m}^d + c_{\nu m}^l). \end{aligned}$$

Если для подграфов $p_{\nu}^m \in P^m$ определены наборы тестов, используемые при их отладке, а также для них известны временные и стоимостные характеристики, то вычисление временных и стоимостных характеристик автономной отработки выполняется с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} t_{\nu m}^r &= \sum_{j=1}^{J_{\nu m}} t_{j\nu} m^r, & c_{\nu m}^r &= \sum_{j=1}^{J_{\nu m}} \hat{c}_{j\nu} m^r, \\ t_{\nu m}^{p,l} &= \sum_{j=1}^{J_{\nu m}} t_{j\nu} m^{p,l}, & c_{\nu m}^{p,l} &= \sum_{j=1}^{J_{\nu m}} \hat{c}_{j\nu} m^{p,l}, \\ t_{\nu m}^l &= \sum_{j=1}^{J_{\nu m}} t_{j\nu} m^l \rho, & c_{\nu m}^l &= \sum_{j=1}^{J_{\nu m}} \hat{c}_{j\nu} m^l \rho. \end{aligned}$$

В данных соотношениях используется величина $J_{\nu m}$, которая обозначает множество тестов, требуемых для проверки подграфа p_{ν}^m .

Переменные $t_{\nu m}^3$, $c_{\nu m}^3$ задают соответственно время и стоимость создания всех подпрограмм «заглушек», необходимых для проверки подграфа p_ν^m , т.е.

$$t_{\nu m}^3 = \sum_{i=1}^{I_{\nu m}} \hat{t}_{i\nu}^3; \quad c_{\nu m}^3 = \sum_{i=1}^{I_{\nu m}} \hat{c}_{i\nu}^3.$$

В данных выражениях величина $I_{\nu m}$ определяет количество подпрограмм «заглушек», которые требуются при отладке подграфа p_ν^m .

Затраты времени $\bar{T}^o$ и стоимости $\bar{C}^o$ выполнения этапов связной отработки для m -го варианта разбиения и n -го варианта объединения графа Γ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{T}^o &= \sum_{k=1}^{F_{mn}} (b_{kmn}^n + b_{kmn}^{p\pi} + b_{kmn}^{\pi}); \\ \bar{C}^o &= \sum_{k=1}^{F_{mn}} (S_{kmn}^n + S_{kmn}^{p\pi} + S_{kmn}^{\pi}). \end{aligned}$$

Предположим, что для проверки подграфов $\tilde{p}_k^{mn} \in \tilde{P}^{mn}$ заданы множества тестов, для которых определены их характеристики времени и стоимости. Тогда для определения величины затрат времени и стоимости на выполнение k -го этапа связной отработки для m -го варианта разбиения и n -го варианта объединения графа Γ используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} b_{kmn}^n &= \sum_{j=1}^{J_{kmn}} \hat{b}_{jkmn}^n; & b_{kmn}^{p\pi} &= \sum_{j=1}^{J_{kmn}} \hat{b}_{jkmn}^{p\pi}; & b_{kmn}^{\pi} &= \sum_{j=1}^{J_{kmn}} b_{jkmn}^{\pi} \rho, \\ S_{kmn}^n &= \sum_{j=1}^{J_{kmn}} \hat{S}_{jkmn}^n; & S_{kmn}^{p\pi} &= \sum_{j=1}^{J_{kmn}} \hat{S}_{jkmn}^{p\pi}; & S_{kmn}^{\pi} &= \sum_{j=1}^{J_{kmn}} S_{jkmn}^{\pi} \rho. \end{aligned}$$

Используя приведенные выше выражения для определения значений временных и стоимостных характеристик процесса отработки ПО, можно дать формальную постановку оптимизационной задачи поиска оптимальной стратегии реализации сценария комплексной отработки при использовании минимума общего времени отработки в качестве критерия оптимизации:

$$\sum_m \left(\sum_m \bar{T}_m^p \sum_{n=1}^{N_m} y_{mn} + \sum_{n=1}^{N_m} \bar{T}_m^o y_{mn} \right) \rightarrow \min.$$

При решении задачи используются следующие ограничения:

— ограничение на стоимость реализации отработки,

$$\sum_m \left(\bar{C}_m^p \sum_m y_{mn} + \sum_{n=1}^{N_m} \bar{C}_m^o y_{mn} \right) \leq C,$$

— множество M следующих ограничений на переменные y_{mn} :

$$\sum_{n=1}^{N_m} y_{mn} = 1; \quad m = \overline{1, M}.$$

Аналогично формулируется задача поиска оптимальной стратегии комплексной обработки с использованием стоимостного критерия оптимизации:

$$\sum_m \left(\bar{C}_m^p \sum_n y_{mn} + \sum_{n=1}^{N_m} \bar{C}_m^o y_{mn} \right) \rightarrow \min$$

при использовании ограничения на время, затраченное на проведение отладочных работ:

$$\sum_m \left(\sum_n \bar{T}_m^p \sum_{n=1}^{N_m} y_{mn} + \sum_{n=1}^{N_m} \bar{T}_m^o y_{mn} \right) \leq T$$

с учетом множества M ограничений на переменные y_{mn} .

Сформулированные выше задачи относятся к классу широко используемых задач линейного математического программирования.

3. Методы обработки ПО БКУ КА с использованием показателей функциональной корректности

На стадии ранней функциональной интеграции компонент БКУ КА используются показатели функциональной корректности для оценки правильности реализации функций комплекса программ БКУ КА. Каждый функционал КП БКУ КА реализуется на использовании некоторого множества маршрутов обработки данных. При следовании по данным маршрутам входная область определения функции преобразуется в один выходной результат данной функции или во множество выходных результатов. С целью полной проверки корректности работы любой функции необходимо проверить все множество маршрутов обработки данных, используемых данной функцией, при заданном множестве входных параметров функции. Для подтверждения корректности работы функций необходимо, чтобы выходные результаты этих функций полностью совпадали с эталонными результатами, определенными в спецификациях комплекса программ. Проверка корректности работы функций на полном множестве всех входных данных и на всех маршрутах их обработки — это задача очень большой сложности. Поэтому возникает необходимость выбора ограниченного подмножества маршрутов обработки данных для их проверки. Это подмножество маршрутов должно позволить проверить реализацию основных функций КП.

На данный момент для проверки корректности функционирования ПО используются два подхода: функциональный или структурный. Функциональный подход использует представление программного обеспечения в виде “черного ящика”. Структурный подход основан на проверке правильности выполнения маршрутов обработки данных и при подготовке тестов учитывает особенности структуры отдельных модулей КП и особенности межмодульного взаимодействия в рамках комплекса программ. Как функциональный, так и структурный подходы имеют существенные недостатки с позиции эффективности реализации проверки программного обеспечения [2].

С учетом данного обстоятельства предлагается метод, который использует положительные свойства обоих подходов. Данный метод предполагает

выбор такого множества тестов показателей функциональной корректности комплекса программ, которое необходимо для проверки корректности работы комплекса. Оценка качества работы КП делается на основе результатов выполнения множества отобранных тестов.

Метод подразумевает отбор из множества F комплекса программ, реализующих все основные и вспомогательные функции, такого подмножества $\overline{F} < F$ функций, подлежащих проверке, в результате корректной работы которых будут получены требуемые значения показателей функциональной корректности КП.

Для комплекса программ задана область $\overline{E}$ входных данных. Для каждой функции $F_j \in \overline{F}$ определено соответствующее подмножество $E_j \in \overline{E}$ области входных данных КП. Каждая из таких функций выполняет определенное преобразование данных из входной области $E_j \in \overline{E}$ в соответствующие данные выходной области $y_j \in \overline{Y}$. Здесь множество y_j содержит все возможные значения выходных данных для функции F_j ($j = \overline{1, J}$).

Выходные результаты $y_{kj} \in Y$ комплекса программ получаются в ходе реализации множеств маршрутов M_{jk} ($j = \overline{1, J}; k = \overline{1, K}$), при прохождении которых происходит обработка данных. Следовательно, можно сделать вывод о том, что для проверки множества функций $\overline{F}$ комплекса программ необходимо проверить корректность работы множества маршрутов обработки данных. В результате реализации этих маршрутов должны быть получены необходимые выходные результаты y_{kj} соответственно для каждой функции F_j из множества $\overline{F}$ с использованием подмножеств входных данных $E_j \in \overline{E}$.

Функция F_j комплекса программ будет считаться проверенной, если для всех выходных результатов $y_{kj} \in Y_j$ этой функции успешно проверена корректность прохождения множества M_{jk} ($j = \overline{1, J}; k = \overline{1, K}$) для всех тех маршрутов обработки данных, прохождение которых обеспечило получение выходных результатов для функции F_j . Множества $M_{jk} \in \overline{M_j}$, $k = \overline{1, K}$ таких маршрутов будут считаться множествами $\overline{M_j}$ магистральных путей для функции F_j . Показатель N_{kj} будет использоваться для определения корректности получения результата j -й функции. Его значение равно отношению:

$$N_{kj} = \frac{n_{kj}^{\text{np}}}{n_{kj}^{\text{общ}}}.$$

В данном отношении n_{kj}^{np} – это количество проверенных магистральных путей, а $n_{kj}^{\text{общ}}$ – общее количество магистральных путей, формирующих результаты $y_{kj} \in Y_j$. Значение общего количества магистральных путей равно мощности множества M_{kj} .

Будем использовать магистральный путь в качестве основной проверяемой единицы при оценке показателя функциональной корректности ПО и графовую модель $\Gamma(V, C)$ укрупненной блок-схемы КП при выполнении сценария отработки и определения магистральных путей для функций множества $\overline{F}$.

В графовой модели V – множество вершин графа Γ , которое соответствует множеству блоков укрупненной блок-схемы КП, а C – множество дуг графа.

Дуги C отображают передачу управления между блоками блок-схемы КП. Блоки блок-схемы – отдельные процедуры или их совокупности либо программные модули КП. Дуга между блоками i и j означает переход управления от блока i к блоку j . В рассматриваемой модели вершине $v_i \in V$ графа $\Gamma(V, C)$ соответствуют как множества ее аргументов $A_i = \{a_{in}\}$, так и множества ее результатов $R_i = \{r_{ij}\}$.

Маршрут обработки информации m на графе $\Gamma(V, C)$ – это последовательность вершин и дуг $(v_0, c_0, v_1, c_1, \dots, c_{I-1}, v_I)$. В данной последовательности v_i ($0 \leq i \leq I$) это вершина графа $\Gamma(V, C)$, а c_i ($1 \leq i \leq I - 1$) это дуга связи от вершины v_i к вершине v_{i+1} . Последовательность $(v_0, \dots, v_I)$ вершин, в свою очередь, соответствует тем преобразованиям, которые реализуются по мере следования маршрута m обработки данных. Такая последовательность называется преобразователем маршрута m , а последовательность $(c_0, \dots, c_{I-1})$ дуг соответствует условиям, которые при прохождении маршрута m должны быть выполнены, и называется условием маршрута m .

Такая последовательность называется преобразователем маршрута m , а последовательность $(c_0, \dots, c_{I-1})$ дуг соответствует условиям, которые при прохождении маршрута m должны быть выполнены, и называется условием маршрута m .

Магистральным путем m_{jk} для результата $y_{jk} \in Y_j$ функции $F_j \in \bar{F}$ будем считать такой маршрут, преобразователь маршрута $(v_0, \dots, v_i)$ которого включает в себя как минимум одну из возможных последовательностей внешних и внутренних информационных связей. При этом данные внешние и внутренние связи должны начинаться в вершине v_0 и заканчиваться в вершине v_i получения результата y_{jk} .

4. Организация отработки программного обеспечения БКУ РС МКС

В данной главе представлен пример использования изложенной выше концепции для отработки элементов конфигурации программного обеспечения (ЭКПО) российского сегмента МКС (БКУ РС МКС) [3].

В ходе отработки ЭКПО поэтапно выполнено:

- 1) автономное тестирование КПО;
- 2) комплексная отработка ЭКПО на стенде наземного комплекса отработки (НКО);
- 3) отработка ПО совместно с американской системой C&C MDM (мультиплексор-демультиплексор бортовой центральной вычислительной машины (БЦВС) американского сегмента и МКС в целом);
- 4) квалификационные формальные тесты ЭКПО.

Перечисленные этапы отработки ЭКПО решают задачи по обнаружению, локализации и устранению ошибок, возникающих в процессе отработки ПО, задачи по подтверждению работоспособности ПО и по оценке соответствия функционирования ПО техническому заданию.

Автономное тестирование программного обеспечения производится на базе автономного рабочего места (АРМ) персонального компьютера и на ком-

плексе “SDDF” (средства разработки проекта программного обеспечения). Тестирование выполняется в соответствии с методикой, в которой используются: описание процедуры проверки, начальные условия тестирования, а также контрольные примеры проверок. После того, как тестирование ПО закончено, оно передается группе конфигурационного контроля, которая интегрирует протестированное ПО в состав ЭКПО БЦВМ.

Комплексная отработка ЭКПО выполняется по специально разработанному сценарию и решает следующие задачи:

- 1) проверка качества работы операционной системы;
- 2) сборка ПО БКУ и комплексная отработка ПО в соответствии с планом полета и режимами работы российского сегмента и служебного модуля одновременно с контролем обеспечения безопасности полета (т.е. проверка корректности реализации подграфов графа Γ , так и самого графа Γ в целом);
- 3) выборочные проверки тех магистральных путей, которые соответствуют наиболее вероятным нештатным ситуациям, а также локализация нештатных ситуаций и их устранение;
- 4) проверка соответствия функционирования ПО БКУ документам (ICD SSP 50 097);
- 5) контроль процесса распределения таких ресурсов, как память, процессорное время, работа каналов ввода/вывода.

Совместные тесты с американской системой C&C MDM выполнялись на стендах “SITE-C”, “EGSE” и “SVF” по специальным сценариям реализации тестов. В процессе испытаний использовались бортовое ПО БКУ АС и ПО БКУ РС, модельное ПО БС Американского сегмента и модельное ПО БС Российского сегмента.

Формальные квалификационные тесты или приемо-сдаточные испытания (ПСИ) и стыковочные испытания — это процесс, в ходе которого проверяется соответствие ЭКПО ЦВМ требованиям, указанным в ТЗ и ICD.

Из множества тестов, которые реализуются на наземном комплексе НКО, выбирается определенное подмножество тестов, которые используются для проверки корректности реализации выбранного множества магистральных путей. По завершении формального квалификационного тестирования оформляется и подписывается «Заказчиком» заключение о том, что ЭКПО ЦВМ готов к проведению стыковочных испытаний.

Стыковочные испытания проводились в соответствии с методикой, разработанной для таких испытаний. Аппаратно-программные средства БЦВС (АПС БЦВС) проходят стыковочные испытания с реальными аппаратными средствами или с ее аналогами на базе наземного комплекса отработки НКО-2. Стыковочные испытания АПС БЦВС с АПС БЦВС Американского сегмента проводились на базе наземного комплекса отработки НКО-1. Эти испытания проводились в соответствии с планом совместной отработки NASA-RSA Phase 2-3 Bilateral Integration and Verification Plan – SSP50101. Испытания аппаратно-программных средств БЦВС в составе служебного мо-

дуля «Звезда» (индекс изделия 17КСМ) проводились на комплексном стенде № 24008 и на контрольно-испытательной станции в необходимом объеме.

5. Заключение

В данной работе представлен существующий опыт, организационные, методические и технические решения по отработке программного обеспечения БКУ для космических аппаратов различного назначения. Приведены основные положения технологии комплексной отработки ПО БКУ КА, которая обеспечивает эффективную разработку ПО, его отладку на основе использования прототипов ПО, итеративную верификацию требований и раннюю функциональную интеграцию. Предложенная технология реализована в рамках автоматизированной системы разработки и отработки ПО БКУ КА, что позволило существенно снизить общее число ошибок в процессе разработки и отработки программного обеспечения российского сегмента МКС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микрин Е.А., Кульба В.В., Павлов Б.В. Разработка моделей и методов проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов // *АиТ*. 2013. № 3. С. 38–50.
2. Микрин Е.А., Кульба В.В., Косяченко С.А., Сомов Д.С., Гладков Ю.М. Комплексная отработка программного обеспечения бортового комплекса управления космическими аппаратами и имитационные модели функционирования бортовых систем и внешней среды. Препринт. М.: ИПУ РАН, 2011.
3. Кульба В.В., Микрин Е.А., Павлов Б.В., Платонов В.Н. Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов. М.: Наука, 2006.
4. Куренков В.И., Кучеров А.С. Методы исследования эффективности ракетно-космических систем. Проблемно-ориентированные системы автоматизированного проектирования. Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012.
5. Зеленцов В.А., Ковалев А.П., Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Методология создания и применения интеллектуальных информационных технологий наземно-космического мониторинга сложных объектов / *Труды СПИИРАН*. 2013. Вып. 5(28).
6. Микрин Е.А. Бортовые комплексы управления космическими аппаратами и проектирование их программного обеспечения М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 336 с.
7. Микрин Е.А. Принципы построения бортовых комплексов управления автоматических космических аппаратов / Е.А. Микрин, Н.А. Суханов, В.Н. Платонов и др. // *Проблемы управления*. 2004. № 3. С. 62–66.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 18.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. А.Ю. КУСТОВ, канд. физ.-мат. наук (arkadiykustov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В работе получено параметрическое описание множества оптимальных анизотропийных регуляторов для линейных дискретных стационарных систем. Искомые регуляторы ограничены нестрогим неупреждающей динамической обратной связью по измеряемому выходу. Решение зависит от нескольких настраиваемых параметров, обуславливающих конкретный вид регулятора, и имеет вид системы уравнений Риккати, соответствующих $\mathcal{H}_2$ -оптимальному регулятору для системы, образованной последовательным соединением исходной системы и наихудшего формирующего фильтра, соответствующего предельному уровню средней анизотропии внешнего возмущения.

Ключевые слова: линейные дискретные системы, анизотропийная теория, оптимальное управление, параметризация.

DOI: 10.31857/S0005231023100069, **EDN:** YDASXM

1. Введение

Развивающаяся с середины 90-х гг. анизотропийная теория (более точно — теория анизотропийного управления и фильтрации для линейных дискретных стохастических систем) появилась в ответ на попытки выработать подходы к решению задач синтеза для линейных систем регуляторов и фильтров, обобщающие хорошо известные решения соответствующих $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -задач [4, 12, 13].

В ней явно прослеживаются и черты задач ТАУ, и теории информации, и различных, уже ставших классическими методов подавления влияния внешних возмущений [5]. Однако в отличие от многих других подходов, в которых предлагалось использовать заданные в определенном смысле искусственно функционалы смешанного типа, при создании анизотропийной теории основное внимание было уделено способу описания внешнего возмущения, действующего на систему. Было показано, что использование теоретико-информационных функционалов позволяет не только описать очень богатый класс статистически не полностью определенных случайных возмущений, но и естественным образом обобщить понятия $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -норм, сделав их предельными случаями анизотропийной нормы.

В настоящей работе поставлена и решена задача параметрического описания множества оптимальных анизотропийных регуляторов. Решение задачи базируется на результате, связанном с параметризацией $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов, и уравнениях для наихудшего формирующего фильтра, производящего сигнал с пороговым уровнем средней анизотропии.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даются основные сведения из анизотропийной теории. Также в нем идет решение стандартной задачи $\mathcal{H}_2$ -оптимального управления, где приводится все множество соответствующих решений. В разделе 3 ставится и решается задача параметризации оптимальных анизотропийных регуляторов. Результаты продемонстрированы на численном примере.

2. Предварительные сведения

2.1. Сокращения и обозначения

$\mathcal{H}_2^{m \times n}$ — пространство Харди аналитичных в открытом единичном диске $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ дробно-рациональных передаточных функций $P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k z^k \in \mathbb{C}^{m \times n}$ с конечной $\mathcal{H}_2$ -нормой

$$\|P\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\hat{P}(\omega) \hat{P}^T(-\omega)) d\omega \right)^{1/2},$$

где $\hat{P}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} P(re^{i\omega})$; $\mathcal{RH}_2^{m \times n}$ — множество строго правильных устойчивых дробно-рациональных передаточных функций размера $m \times n$; $\|P\|_\infty = \sup_{\omega \in [-2\pi; \pi]} \sigma_{\max}(\hat{P}(\omega))$ — $\mathcal{H}_\infty$ -норма передаточной функции $P(z)$, где $\sigma_{\max}(X) = \max_k \sigma_k(X)$ — максимальное сингулярное число матрицы X , а $\sigma_k(X) = \lambda_k(X^T X)$.

2.2. Основные определения анизотропийной теории

Центральным объектом исследования в анизотропийной теории является устойчивая линейная дискретная стационарная система вида

$$(1) \quad P_{zw} \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ z_k = Cx_k + Dw_k, \end{cases}$$

с известными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ и, как правило, нулевыми начальными условиями ($x_0 = 0$), описывающая развитие во времени динамических процессов $\{x_k\}_{k \geq 0}$ и $\{z_k\}_{k \geq 0}$, подверженных действию случайного внешнего возмущения $\{w_k\}_{k \geq 0}$. Далее будем отождествлять системы вида (1) с их передаточной функцией $P_{zw}(z) = D + C(zI_{n_x} - A)^{-1}B$, а также задавать их упорядоченной четверкой матриц

$$(2) \quad P_{zw} \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] : \quad w \xrightarrow{x} z,$$

уточняя, где необходимо, что является состоянием, входом и выходом, и каким пространствам принадлежат соответствующие матрицы. В задачах управления под системой (1) понимается замкнутая система.

Следующие определения дают базовое представление об объектах исследования анизотропийной теории. Для больших деталей смотри, например, [4, 12, 13].

Определение 1. Анизотропией интегрируемого с квадратом случайного вектора $w \in \mathbb{L}_2^{n_w}$ называют число, определяемое формулой

$$(3) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{n_w, \lambda}),$$

где $\mathbf{D}(f \| g)$ — информационное уклонение Кульбака–Лейблера f относительно g ; $f(x)$ — плотность распределения случайного вектора w ; $p_{n_w, \lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-n_w/2} \exp(-\frac{|x|^2}{2\lambda})$ — плотность нормального распределения с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_{n_w} .

Определение 2. Средней анизотропией стационарного эргодического случайного процесса $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$ называют число, определяемое формулой

$$(4) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{s:t} = (w_s^T, \dots, w_t^T)^T$ — вектор-фрагмент последовательности $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$ при $k = s, s+1, \dots, t-1, t$.

Предполагается, что на систему (1) действует возмущение с ограниченной числом $a \geq 0$ средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Данное ограничение определяет возможности природы к генерации наиболее неблагоприятного (с точки зрения значения среднеквадратичного коэффициента усиления) внешнего возмущения, с чем работает $\mathcal{H}_\infty$ -теория, но при этом позволяет ему иметь и пространственную, и временную корреляции, что не охватывается $\mathcal{H}_2$ -теорией.

Определение 3. Анизотропийной нормой системы (1) при наложенном на внешнее возмущение ограничении $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ называют число

$$(5) \quad \|P_{zw}\|_a = \sup \left\{ \frac{\|P_{zw}G\|_2}{\|G\|_2} : G \in \mathcal{H}_2^{n_w \times n_w} \wedge W = GV \wedge \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a \right\},$$

где $V = \{v_k\}_{k \geq 0}$ — стандартный гауссовский белый шум, пропускаемый через линейную систему с $(n_w \times n_w)$ -мерной передаточной функцией $G(z)$ с конечной $\mathcal{H}_2$ -нормой.

Количественно анизотропийная норма отражает способность системы к усилению в среднеквадратичном смысле поступающего на ее вход сигнала при наложении на него теоретико-информационного ограничения $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. В случае наиболее жесткого ограничения, т.е. когда $\overline{\mathbf{A}}(W) = 0$, имеем, что $W = V$ и $\|P_{zw}\|_0 = \|P_{zw}\|_2 / \sqrt{n_w}$. В случае, когда ограничение на среднюю анизотропию снято, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) < +\infty$, можно показать, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|P_{zw}\|_a = \|P_{zw}\|_\infty$. Таким образом, анизотропийной теории удастся не только описать в теоретико-информационных терминах широкий класс внешних возмущений, но и естественным образом обобщить подходы к синтезу управления, разработанные в рамках $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -теорий.

2.3. Параметризация $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов

Исследованию всевозможных аспектов поведения линейных систем, замкнутых $\mathcal{H}_2$ -оптимальными оценивающими регуляторами, посвящено огромное множество работ. В ряде из них, в частности, описываются методы параметризации всего множества $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов. Процедура решения этой задачи, а также сопровождающие ее сложности подробно описаны в работах [2, 6, 9, 11] и многих других. Основная идея, на которой основано решение, состоит в том, что $\mathcal{H}_2$ -оптимальные регуляторы напрямую связаны с регуляторами, обеспечивающими инвариантность выхода некоторой вспомогательной системы относительно возмущений, и проводя параметризацию последних, осуществляется параметрическое описание и искомых $\mathcal{H}_2$ -регуляторов. Постановка задачи параметризации $\mathcal{H}_2$ -регуляторов и ее решение могут быть даны в следующей форме.

Рассмотрим систему

$$(6) \quad F \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_y & 0 & D_{yw} \\ C_z & D_{zu} & 0 \end{array} \right] : \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{x} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

с матрицами $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D_{yw} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$, $C_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, $D_{zu} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$, где u — управление, w — внешнее возмущение, y — измеряемый выход, z — регулируемый выход. Также рассмотрим нестрогий неупреждающий динамический стабилизирующий регулятор в форме обратной связи по выходу

$$(7) \quad K \sim \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] : \quad y \xrightarrow{h} u,$$

где $h_k \in \mathbb{R}^{n_h}$, а A_c , B_c , C_c , D_c — матрицы, подлежащие определению. Система (6), замкнутая регулятором (7), будет иметь (A, B, C, D) -представление

$$(8) \quad F_{cl}(K) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zu} D_c D_{yw} \end{array} \right] : \quad \begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix} \xrightarrow{w} z.$$

Задача $\mathcal{H}_2$ -оптимального управления состоит в нахождении таких матриц регулятора (7), что $\mathcal{H}_2$ -норма замкнутой системы (8) принимает минимальное значение, т.е. $\|F_{cl}(K)\|_2 \rightarrow \min_K$.

Уже было отмечено, что задача синтеза $\mathcal{H}_2$ -оптимального регулятора связана с задачей обеспечения вход-выходной инвариантности (т.е. равенства нулю передаточной функции) некоторой вспомогательной системы [2, 3, 6, 9, 10]. Для решения последней задачи вводят несколько дополнительных определений, тесно связанных с понятиями управляемого и наблюдаемого инвариантов [1, 7]. А именно, для системы $F : w \xrightarrow{x} z$, заданной четверкой матриц (A, B, C, D) , где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, определим два множества: $\mathcal{W}(F)$ и $\mathcal{S}(F)$ (см., например, [8]).

Определение 4. Стабилизируемое слабо ненаблюдаемое множество $\mathcal{W}(F)$ есть наибольшее подпространство $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, для которого существует матрица Π подходящей размерности, такая, что $\mathcal{W} \subseteq \ker(C + D\Pi)$, $(A + B\Pi)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ и $\rho(A + B\Pi) < 1$.

Определение 5. Детектируемое сильно управляемое множество $\mathcal{S}(F)$ есть наименьшее подпространство $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, для которого существует матрица Λ подходящей размерности, такая, что $\text{im}(B + \Lambda D) \subseteq \mathcal{S}$, $(A + \Lambda C)\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ и $\rho(A + \Lambda C) < 1$.

Также введем две вспомогательные, связанные с системой (6) матрицы P и Q как наибольшие в смысле отношения матричного порядка ($X \succ Y \Leftrightarrow X - Y \succ 0$) матрицы, являющиеся решениями неравенств

$$(9a) \quad M_1(P) = \begin{bmatrix} A^T P A - P + C_z^T C_z & C_z^T D_{zu} + A^T P B_u \\ D_{zu}^T C_z + B_u^T P A & D_{zu}^T D_{zu} + B_u^T P B_u \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$(9b) \quad M_2(Q) = \begin{bmatrix} A Q A^T - Q + B_w B_w^T & B_w D_{yw}^T + A Q C_y^T \\ D_{yw} B_w^T + C_y Q A^T & D_{yw} D_{yw}^T + C_y Q C_y^T \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Для пары решений (P, Q) определим дополнительно матрицы C_P , D_P , B_Q и D_Q в соответствии с разложениями

$$(10) \quad \begin{bmatrix} C_P^T \\ D_P^T \end{bmatrix} [C_P \quad D_P] = M_1(P), \quad \begin{bmatrix} B_Q \\ D_Q \end{bmatrix} [B_Q^T \quad D_Q^T] = M_2(Q)$$

и при условии, что $[C_P \quad D_P]$ и $[B_Q^T \quad D_Q^T]$ — матрицы полного ранга.

Решение задачи параметризации $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов приведено в виде следующей теоремы.

Теорема 1 [2, 10]. Для системы (6) существует $\mathcal{H}_2$ -оптимальный регулятор вида (7) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) пара (A, B_u) — стабилизируемая,
- (ii) пара (C_y, A) — детектируемая,
- (iii) $\text{im}(B_Q - B_u D_P^+ R) \subseteq \mathcal{W}(F_{P_u})$,
- (iv) $\mathcal{S}(F_{Q_y}) \subseteq \ker(C_P - R D_Q^+ C_y)$,
- (v) $\mathcal{S}(F_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(F_{P_u})$,
- (vi) $(A - B_u D_P^+ R D_Q^+ C_y) \mathcal{S}(F_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(F_{P_u})$,

где

$$(11) \quad R = (D_P^T)^+ (D_{zu}^T C_z Q C_y^T + B_u^T P A Q C_y^T + B_u^T P B_w D_{yw}^T) (D_Q^T)^+,$$

а системы F_{P_u} и F_{Q_y} заданы соответственно (A, B, C, D) -представлениями

$$(12) \quad F_{P_u} \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_P & D_P \end{array} \right], \quad F_{Q_y} \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_Q \\ \hline C_y & D_Q \end{array} \right].$$

При выполнении условий теоремы множество всех динамических $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов вида (7) задается выражением

$$(13) \quad K \sim \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u \Pi + \Lambda C_y - B_u \tilde{D} C_y & B_u \tilde{C} & B_u \tilde{D} - \Lambda \\ -\tilde{B} C_y & \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \Pi - \tilde{D} C_y & \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right],$$

в котором выбор матриц $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ ограничен лишь условием принадлежности передаточной функции

$$(14) \quad \tilde{F}(z) = \tilde{D} + \tilde{C}(zI_{n_x} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

следующей алгебраической сумме пространств: $\tilde{F}(z) \in N_F + M_F$, где

$$(15a) \quad N_F = \{N \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y} : D_P N D_Q = -R\},$$

$$(15b) \quad M_F = \{M(z) \in \mathcal{RH}_2^{n_u \times n_y} : F_1(z)M(z)F_2(z) = 0\}$$

с обозначениями

$$(16a) \quad F_1(z) = D_P + (C_P + D_P \Pi)(zI_{n_x} - A - B_u \Pi)^{-1}B_u,$$

$$(16b) \quad F_2(z) = D_Q + C_y(zI_{n_x} - A - \Lambda C_y)^{-1}(B_Q + \Lambda D_Q).$$

СOLIDНЫЙ анализ положений теоремы проделан в [11]. Также могут быть сформулированы варианты теоремы 1 для невырожденных случаев, связанных с отсутствием инвариантных нулей у обратимых слева/справа систем [2]. При этом в аналогичное утверждение дополнительно будет включено условие единственности $\mathcal{H}_2$ -оптимального регулятора в случае его существования.

3. Параметризация анизотропийных регуляторов

3.1. Постановка и решение задачи

Решение задачи оптимального анизотропийного управления для линейных дискретных стационарных систем было получено в [13]. Условия, при которых производился синтез регулятора, обеспечивали существование и единственность решения, а сам регулятор был задан в строго неупреждающей форме. В данном разделе приводится решение похожей задачи, состоящей в параметризации всех оптимальных анизотропийных регуляторов нестрого неупреждающего вида.

Задача 1. Для системы (6), на которую действует внешнее возмущение с ограничением $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$, требуется описать параметрически множество оптимальных анизотропийных регуляторов вида (7), стабилизирующих замкнутую систему и доставляющих минимум ее анизотропийной нормы.

Известно, что при решении задач анизотропийного анализа систем и синтеза для них оптимальных анизотропийных регуляторов возникает необходимость рассмотреть дополнительную математическую конструкцию — наихудший формирующий фильтр. Его задачей является генерация наиболее неблагоприятного для замкнутой системы внешнего возмущения. В соответствии с полученными в [12, 13] результатами, для систем вида (2) он имеет вид

$$(17) \quad G \sim \left[\frac{A + BL}{L} \middle| \frac{B\Sigma^{1/2}}{\Sigma^{1/2}} \right] : \quad v \xrightarrow{x} w,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n_w \times n_x}$ и $\Sigma \succ 0$ — матрицы, подобранные с целью максимизировать среднеквадратичный коэффициент усиления $\|P_{zw}G\|_2/\|G\|_2$ при ограничении $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Здесь и далее $V = \{v_k\}_{k \geq 0}$ — стандартный гауссовский белый шум.

Основная идея решения задачи 1 заключается в переходе к рассмотрению системы, образованной последовательным соединением наихудшего формирующего фильтра и исходной системы F , и дальнейшей параметризации для нее $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов. Прежде всего отметим, что система (6) с учетом формирующего фильтра (17) эквивалентна с точки зрения соответствующих динамических процессов системе

$$(18) \quad \begin{aligned} \overline{F} &\sim \left[\begin{array}{c|cc} \overline{A} & \overline{B}_u & \overline{B}_w \\ \hline \overline{C}_y & 0 & \overline{D}_{yw} \\ \hline \overline{C}_z & \overline{D}_{zu} & 0 \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} A' + B'_w L & B'_u & B'_w \Sigma^{1/2} \\ \hline C'_y + D'_{yw} L & 0 & D'_{yw} \Sigma^{1/2} \\ \hline C'_z & D'_{zu} & 0 \end{array} \right] : \quad \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \overline{y} \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где новые переменные определены формулами $\overline{u}_k = (u_k^T \ h_{k+1}^T)^T$ и $\overline{y}_k = (y_k^T \ h_k^T)^T$; матрицы, использованные в представлении (18), имеют следующую структуру:

$$(19a) \quad A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_h \times n_h} \end{bmatrix}, \quad B'_u = \begin{bmatrix} B_u & 0 \\ 0 & I_{n_h} \end{bmatrix}, \quad B'_w = \begin{bmatrix} B_w \\ 0_{n_h \times n_w} \end{bmatrix},$$

$$(19b) \quad C'_y = \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I_{n_h} \end{bmatrix}, \quad D'_{yw} = \begin{bmatrix} D_{yw} \\ 0_{n_h \times n_w} \end{bmatrix},$$

$$(19c) \quad C'_z = [C_z \quad 0_{n_z \times n_h}], \quad D'_{zu} = [D_{zu} \quad 0_{n_z \times n_h}];$$

матрицы L и Σ соответствуют формирующему фильтру G , являющемуся наихудшим для системы (18), замкнутой некоторым регулятором, и производящему окрашенный сигнал со средней анизотропией не выше заданного порога $a \geq 0$ из стандартного гауссовского белого шума $V = \{v_k\}_{k \geq 0}$.

Теорема 2. Для системы (6) с внешним возмущением, удовлетворяющим ограничению $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$, существует оптимальный анизотропийный

регулятор вида (7) тогда и только тогда, когда выполнены условия (i)–(vi) теоремы 1. При выполнении этих условий множество всех оптимальных анизотропийных регуляторов вида (7) для системы (6) определяется в соответствии с формулой $\bar{u}_k = (u_k^T \ h_{k+1}^T)^T$, где управление $\bar{u}_k$ задается следующим множеством оптимальных анизотропийных регуляторов для системы (18):

$$(20) \quad \bar{K} \sim \left[\begin{array}{cc|c} \bar{A} + \bar{B}_u \bar{\Pi} + \bar{\Lambda} \bar{C}_y - \bar{B}_u \tilde{D} \bar{C}_y & \bar{B}_u \tilde{C} & \bar{B}_u \tilde{D} - \bar{\Lambda} \\ -\tilde{B} \bar{C}_y & \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \bar{\Pi} - \tilde{D} \bar{C}_y & \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right].$$

Матрицы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ образуют передаточную функцию

$$(21) \quad \tilde{F}(z) = \tilde{D} + \tilde{C}(zI_{n_x+n_h} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B},$$

принадлежащую алгебраической сумме пространств $\tilde{F}(z) \in N_{\bar{F}} + M_{\bar{F}}$, где

$$(22a) \quad N_{\bar{F}} = \{\bar{N} \in \mathbb{R}^{(n_u+n_h) \times (n_y+n_h)} : \bar{D}_P \bar{N} \bar{D}_Q = -\bar{R}\},$$

$$(22b) \quad M_{\bar{F}} = \{\bar{M}(z) \in \mathcal{RH}_2^{(n_u+n_h) \times (n_y+n_h)} : \bar{F}_1(z)\bar{M}(z)\bar{F}_2(z) = 0\},$$

где в свою очередь

$$(23a) \quad \bar{F}_1(z) = \bar{D}_P + (\bar{C}_P + \bar{D}_P \bar{\Pi})(zI_{n_x+n_h} - \bar{A} - \bar{B}_u \bar{\Pi})^{-1}\bar{B}_u,$$

$$(23b) \quad \bar{F}_2(z) = \bar{D}_Q + \bar{C}_y(zI_{n_x+n_h} - \bar{A} - \bar{\Lambda} \bar{C}_y)^{-1}(\bar{B}_Q + \bar{\Lambda} \bar{D}_Q)$$

и

$$(24) \quad \bar{R} = (\bar{D}_P^T)^+ (\bar{D}_{zu}^T \bar{C}_z \bar{Q} \bar{C}_y^T + \bar{B}_u^T \bar{P} \bar{A} \bar{Q} \bar{C}_y^T + \bar{B}_u^T \bar{P} \bar{B}_w \bar{D}_{yw}^T) (\bar{D}_Q^T)^+.$$

Матрицы $\bar{C}_P$, $\bar{D}_P$, $\bar{B}_Q$ и $\bar{D}_Q$ введены согласно разложениям (10) для матриц $M_1(\bar{P})$ и $M_2(\bar{Q})$, связанных с системой (18), а матрицы $\bar{\Pi}$ и $\bar{\Lambda}$ — согласно множествам $\mathcal{W}(\bar{F}_{P_u})$ и $\mathcal{S}(\bar{F}_{Q_y})$, введенным соответственно определениям 4 и 5.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Следствие 1. Если в рамках теоремы 2 вместе с условиями (i)–(vi) верно также, что передаточная функция

$$(25) \quad F_{yw}^{ol}(z) = D_{yw} + C_y(zI_{n_x} - A)^{-1}B_w$$

является обратимой справа, а передаточная функция

$$(26) \quad F_{zu}^{ol}(z) = D_{zu} + C_z(zI_{n_x} - A)^{-1}B_u$$

— обратимой слева, то оптимальный анизотропийный регулятор существует и является единственным.

3.2. Численный пример

В качестве академического примера рассмотрим систему вида (6) с матрицами

$$(27a) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(27b) \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что внешнее возмущение имеет среднюю анизотропию, ограниченную некоторым числом $a \geq 0$. Поставим в качестве цели исследования решение задачи параметризации оптимальных анизотропийных регуляторов порядка не выше порядка исходной системы, и для простоты потребуем, чтобы число дополнительных фиктивных переменных было минимально, т.е., согласно (21), $\tilde{F}(z) = \tilde{D}$.

Проделав требуемые вычисления, можно убедиться, что система (18) имеет вид

$$(28) \quad \bar{F} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} A + B_w L_1 & B_w L_2 & B_u & 0_{2 \times 2} & B_w \sqrt{\sigma} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & I_2 & 0_{2 \times 1} \\ \hline I_2 & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 2} & I_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \\ \hline C_z & 0_{2 \times 2} & D_{zu} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \end{array} \right],$$

а соответствующие ей матрицы $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, определяемые формулами (9), будут иметь следующую структуру:

$$(29) \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{11} = B_w B_w^T \sqrt{\sigma},$$

где $\bar{P}_{11}$ — решение уравнения Риккати

$$(30a) \quad \bar{P}_{11} = (A + B_w L_1)^T \bar{P}_{11} (A + B_w L_1) + C_z^T C_z$$

$$(30b) \quad - (A + B_w L_1)^T \bar{P}_{11} B_u (D_{zu}^T D_{zu} + B_u^T \bar{P}_{11} B_u)^{-1} B_u^T \bar{P}_{11} (A + B_w L_1),$$

причем для упрощения изложения *сразу будем считать*, что $L_2 = 0$ (можно действительно показать справедливость этого утверждения). После этого вычисляются матрицы $\bar{D}_P$, $\bar{C}_P$, $\bar{D}_Q$ и $\bar{B}_Q$:

$$(31a) \quad \bar{D}_P = \begin{bmatrix} (\bar{D}_P)_{11} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_{zu}^T D_{zu} + B_u^T \bar{P}_{11} B_u)^{1/2} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

$$(31b) \quad \bar{C}_P = \begin{bmatrix} (\bar{C}_P)_{11} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{D}_P)_{11}^{-1} B_u^T \bar{P}_{11} (A + B_w L_1) & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

$$(31c) \quad \bar{D}_Q = \begin{bmatrix} (\bar{D}_Q)_{11} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_w B_w^T)^{1/2} \sqrt{\sigma} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

$$(31d) \quad \bar{B}_Q = \begin{bmatrix} (\bar{B}_Q)_{11} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B_w L_1) (\bar{D}_Q)_{11} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

Также сразу вычислим матрицу R , воспользовавшись (11):

$$(32) \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} (\bar{C}_P)_{11}(\bar{D}_Q)_{11} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

Перейдем к проверке условий теоремы 2. Очевидно, что пара $(\bar{A}, \bar{B}_u)$ — стабилизируемая, а пара $(\bar{C}_y, \bar{A})$ — детектируемая. Далее понадобится ввести в рассмотрение множества $\mathcal{W}(\bar{F}_P)$ и $\mathcal{S}(\bar{F}_Q)$. Согласно определениям (4) и (5), матрицы $\bar{\Pi}$ и $\bar{\Lambda}$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворять следующим условиям:

$$(33a) \quad \bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \bar{\Pi}_{12} \\ \bar{\Pi}_{21} & \bar{\Pi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\bar{D}_P)_{11}^{-1}(\bar{C}_P)_{11} & 0_{1 \times 2} \\ \bar{\Pi}_{21} & \bar{\Pi}_{22} \end{bmatrix}, \quad \rho(\bar{\Pi}_{22}) < 1,$$

$$(33b) \quad \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & \bar{\Lambda}_{12} \\ \bar{\Lambda}_{21} & \bar{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\bar{B}_Q)_{11}(\bar{D}_Q)_{11}^{-1} & \bar{\Lambda}_{12} \\ 0_{2 \times 2} & \bar{\Lambda}_{22} \end{bmatrix}, \quad \rho(\bar{\Lambda}_{22}) < 1.$$

Далее для упрощения вычислений выберем $\bar{\Pi}_{21} = \bar{\Pi}_{22} = 0_{2 \times 2}$ и $\bar{\Lambda}_{12} = \bar{\Lambda}_{22} = 0_{2 \times 2}$. Естественно, нужно иметь в виду, что такого рода выбор в общем случае приведет к сужению множества искомых оптимальных анизотропийных регуляторов. Сделанный выбор приводит к тому, что $\mathcal{W}(\bar{F}_P) = \mathbb{R}^4$ и $\mathcal{S}(\bar{F}_Q) = \{0\}^4$, после чего справедливость условий (iii)–(vi) теоремы 2 проверяется тривиально.

В рамках данного примера регулятор с представлением (20) при условии $\tilde{F}(z) = \tilde{D}$ полностью определяется матрицей $\tilde{D}$, удовлетворяющей требованию $\bar{D}_P \tilde{D} \bar{D}_Q = -\bar{R}$. Подставляя в последнее равенство найденные ранее матрицы, получим, что $\tilde{D}$ будет иметь вид

$$(34) \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{D}_{11} = \bar{\Pi}_{11}$, что заканчивает процедуру описания всех оптимальных анизотропийных регуляторов (20), связанных с аналогичными для исходной системы соотношением $\bar{u}_k = (u_k^T \ h_{k+1}^T)^T$.

Сделаем несколько важных замечаний.

Во-первых, для того, чтобы получить окончательный ответ на поставленную задачу, полученную систему уравнений необходимо дополнить системой уравнений для определения наилучшего формирующего фильтра, таким образом находя переменные $L_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ и $\sigma > 0$ (см., например, [12]).

Во-вторых, поскольку в рамках разобранного примера состояние наблюдалось (измерялось) точно, то естественным представляется выбор регулятора в форме статической обратной связи по состоянию $u_k = Kx_k$. В данном случае оптимальным выбором матрицы K является $K = \tilde{D}_{11}$.

В заключение приведем также решение данной задачи для $a = 0$ (данный случай выбран из простоты, так как отсутствует необходимость решать вспомогательную задачу, связанную с формирующим фильтром). Можно показать, что все регуляторы с представлением

$$(35) \quad K \sim \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\kappa - 1,4773 & -\kappa - 1,4773 & \kappa + 1 & \kappa + 2,1823 \\ \hline -\kappa - 1,4773 & -\kappa - 1,4773 & \kappa & \kappa + 2,1823 \end{array} \right]$$

являются оптимальными, и имеют общую замкнутую систему, не зависящую от конкретного выбора κ (единственным вполне естественным ограничением будет $\kappa \in (-2,4773; -0,4773)$, при котором спектральный радиус матрицы A_c меньше единицы):

$$(36a) \quad x_{k+1} \approx \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -0,4773 & 0,7051 \end{array} \right] x_k + \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] w_k,$$

$$(36b) \quad z_k \approx \left[\begin{array}{cc} -1,4773 & 0,7051 \\ 0 & 1 \end{array} \right] x_k.$$

Заметим, что выбору $\kappa \approx -1,4773$ в (35) как раз соответствует статический регулятор по состоянию $u_k = D_c x_k$.

4. Заключение

В статье получено параметрическое описание множества оптимальных анизотропийных регуляторов для линейных дискретных стационарных систем. Полученные результаты могут найти применение при решении практических задач навигации и управления, в частности, в случаях, когда на управление наложены несколько ограничений или задано требование минимизации нескольких критериев качества. Естественным продолжением работы является решение задачи параметризации множества субоптимальных анизотропийных регуляторов и оценщиков.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Сначала покажем, что условия (i)–(vi), объявленные в формулировке теоремы 2, эквивалентны условиям

(a) пара $(\bar{A}, \bar{B}_u)$ — стабилизируемая,

(б) пара $(\bar{C}_y, \bar{A})$ — детектируемая,

(в) $\text{im}(\bar{B}_Q - \bar{B}_u \bar{D}_P^+ \bar{R}) \subseteq \mathcal{W}(\bar{F}_{P_u})$,

(г) $S(\bar{F}_{Q_y}) \subseteq \ker(\bar{C}_P - \bar{R} \bar{D}_Q^+ \bar{C}_y)$,

(д) $S(\bar{F}_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(\bar{F}_{P_u})$,

(е) $(\bar{A} - \bar{B}_u \bar{D}_P^+ \bar{R} \bar{D}_Q^+ \bar{C}_y) S(\bar{F}_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(\bar{F}_{P_u})$,

где матрицы $\bar{C}_P$, $\bar{D}_P$, $\bar{B}_Q$, $\bar{D}_Q$ и $\bar{R}$, а также системы $\bar{F}_{P_u}$ и $\bar{F}_{Q_y}$ по аналогии задаются в соответствии с изложенным в разделе 2.3 материала применительно к системе (18). Заметим, что условия (a)–(е) представляют собой прямой аналог условий (i)–(vi) теоремы 1 для системы (18).

Эквивалентность условий $(i) \Leftrightarrow (a)$ и $(ii) \Leftrightarrow (b)$ очевидна в силу обозначений (19). Для дальнейшего доказательства установим связь множеств $\mathcal{W}(F_{P_u})$ и $\mathcal{S}(F_{Q_y})$ из теоремы 1 с множествами $\mathcal{W}(\overline{F}_{P_u})$ и $\mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y})$, соответственно. Закрепив в качестве объекта исследования систему $\overline{F}$, путем непосредственного использования определений 4 и 5 проверяется, что всегда найдутся такие матрицы $\overline{\Pi}$ и $\overline{\Lambda}$, что

$$(II.1a) \quad \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u}) = \mathcal{W}(F_{P_u}) \times \mathbb{R}^{n_h}, \quad \mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}) = \mathcal{S}(F_{Q_y}) \times \{0\}^{n_h},$$

$$(II.1b) \quad (\overline{A} + \overline{B}_u \overline{\Pi}) \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u}) \subseteq \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u}), \quad (\overline{A} + \overline{\Lambda} \overline{C}_y) \mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}) \subseteq \mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}),$$

$$(II.1c) \quad \rho(\overline{A} + \overline{B}_u \overline{\Pi}) < 1, \quad \rho(\overline{A} + \overline{\Lambda} \overline{C}_y) < 1.$$

После этого можно заключить, что эквивалентность условий $(iii) \Leftrightarrow (c)$ и $(iv) \Leftrightarrow (e)$ справедлива ввиду того, что

$$(II.2a) \quad \ker(\overline{C}_P - \overline{R} \overline{D}_Q^+ \overline{C}_y) = \ker(C_P - R D_Q^+ C_y) \times \mathbb{R}^{n_h},$$

$$(II.2b) \quad \text{im}(\overline{B}_Q - \overline{B}_u \overline{D}_P^+ \overline{R}) = \text{im}(B_Q - B_u D_P^+ R) \times \{0\}^{n_h}.$$

Наконец, в силу (II.1) доказывается эквивалентность условий $(v) \Leftrightarrow (d)$ и $(vi) \Leftrightarrow (e)$.

Вид регулятора (20) полностью обусловлен содержанием теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Автор статьи выражает благодарность Игорю Геннадьевичу Владимирову и Александру Викторовичу Юрченкову, принимавшим участие в обсуждении части материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basile G., Marro G. Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory // J. Optim. Theory Appl. 1969. Vol. 3. P. 306–315. <https://doi.org/10.1007/BF00931370>
2. Chen B.M., Saberi A., Shamash Y. Necessary and sufficient conditions under which a discrete time H_2 -optimal control problem has a unique solution // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. Vol. 1. P. 805–810. <https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325038>
3. Chen B.M., Saberi A., Shamash Y., Sannuti P. Construction and parameterisation of all static and dynamic H_2 -optimal state feedback solutions for discrete time systems // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. Vol. 1. P. 126–131. <https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325177>
4. Diamond P., Kloeden P., Vladimirov I. Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norms of linear translation-invariant operators on multidimensional integer lattices // J. Appl. Math. Stochast. Anal. 2003. Vol. 16:3. P. 209–231. <https://doi.org/10.1155/S1048953303000169>
5. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34. P. 831–847. <https://doi.org/10.1109/9.29425>

6. *Saberi A., Sannuti P., Stoorvogel A.A.* H_2 optimal controllers with measurement feedback for continuous-time systems: flexibility in closed-loop pole placement // Automatica. 1997. Vol. 33. No. 3. P. 289–304.
[https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(96\)00195-1](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00195-1)
7. *Schumacher J.M.* Dynamic feedback in finite- and infinite-dimensional linear systems. Mathematisch Centrum. 1981. ISBN: 9061962293.
8. *Stoorvogel A.A.* The H_∞ control problem: a state space approach. Phd Thesis, Mathematics and Computer Science. Technische Universiteit Eindhoven. 1981. 229 P.
<https://doi.org/10.6100/IR338287>
9. *Stoorvogel A.A.* The singular H_2 control problem // Automatica. 1992. Vol. 28. No. 3. P. 627–631. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(92\)90189-M](https://doi.org/10.1016/0005-1098(92)90189-M)
10. *Trentelman H.L., Stoorvogel A.A.* Sampled-data and discrete-time H_2 optimal control // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. Vol. 1. P. 331–336.
<https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325136>
11. *Trentelman H.L., Stoorvogel A.A.* Sampled-data and discrete-time H_2 optimal control // SIAM J. Control and Optimization. 1995. Vol. 33. No. 3. P. 834–862.
<https://doi.org/10.1137/S0363012992241995>
12. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29. Is. 1. P. 3057–3062. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)58144-6](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58144-6)
13. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞ -optimization problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29. Is. 1. P. 3816–3821.

Статъя представена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 18.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. Б.А. ЛАГОВСКИЙ, д-р техн. наук (robertlag@yandex.ru)
(Российский технологический университет, Москва),
Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р техн. наук (rubinvch@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОВЫШЕНИЕ УГЛОВОГО РАЗРЕШЕНИЯ И ДАЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫЕ СИГНАЛЫ¹

Рассмотрена задача получения трехмерных радиоизображений объектов с повышенным разрешением на основе применения сверхширокополосных импульсных сигналов и новых методов их цифровой обработки. Численно решена обратная задача восстановления изображения источника сигналов с разрешением, превышающим критерий Рэлея. Математически задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода численными методами, основанными на представлении решения в виде разложения по системам ортогональных функций. Обоснован метод выбора систем используемых функций, повышающий устойчивость решений. Решены вариационные задачи оптимизации формы и длительности сверхширокополосных импульсов, обеспечивающие максимально возможное отношение сигнал/шум при локационных исследованиях объектов с полностью или частично известными характеристиками отражения сигналов. Предлагаемые процедуры позволяют увеличить дальность действия измерительных систем, а также дают возможность повысить устойчивость решений обратных задач. Показано, что привлечение развиваемых методов достижения сверхразрешения к обработке сверхширокополосных сигналов резко улучшает качество 3D-изображений объектов в радиодиапазоне.

Ключевые слова: критерий Рэлея, угловое сверхразрешение, устойчивость решений обратных задач.

DOI: 10.31857/S0005231023100070, **EDN:** XVLKSX

1. Введение

Увеличение эффективной угловой разрешающей способности систем радио- и гидролокации, радионавигации, дистанционного зондирования и доведение ее до сверхразрешения дают возможность детализировать изображения исследуемых объектов, решать задачи их распознавания и идентификации, отдельно наблюдать единичные цели в составе групповых целей. Решение этих задач позволяет повысить качество существующих и перспективных систем управления наземными, надводными, подводными и аэрокосмическими объектами. В настоящее время известно немало методов цифровой обработки и анализа сигналов, позволяющих повысить эффективное

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00448).

разрешение. Это, в частности, методы обратной свертки сигналов, фазовых взвешивающих коэффициентов, углового взвешивания и т.п. Популярными в настоящее время являются такие методы, как: MUSIC (Multiple Signal Classification) [1], ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques) [2], метод деконволюции [3, 4], метод максимальной энтропии [5], метод максимального правдоподобия [6], методы, использующие нейросети [7], а также нелинейные методы [8].

Перечисленные методы оказываются эффективными далеко не во всех случаях. Большинство из них, в том числе MUSIC и ESPRIT, оказываются неэффективными при использовании активными измерительными системами сложных сигналов, в частности UWB (Ultra Wide Band) сигналов длительностью в единицы наносекунд. Использование таких сверхширокополосных сигналов потенциально позволяет получить очень высокое разрешение по дальности — около 1 м. В итоге сочетание применения UWB сигналов и достижение углового сверхразрешения за счет цифровой обработки сигналов позволяют получать качественные трехмерные радиоизображения объектов. Такие системы являются всепогодными и могут работать в любое время суток.

2. Постановка задачи достижения сверхразрешения

Принятый угломерной системой при сканировании двумерного сектора обзора сигнал $U(\varphi, \theta)$ может быть выражен в виде линейного интегрального преобразования [9]

$$(1) \quad U(\varphi, \theta) = \int_{\Omega} f(\varphi - \phi, \theta - \vartheta) I(\phi, \vartheta) d\phi d\vartheta,$$

где $\Omega = \Omega(\varphi, \theta)$ — угловая область расположения источника сигнала; $I(\varphi, \theta)$ — угловое распределение амплитуды отраженного (или излучаемого) объектом наблюдения сигнала, равное нулю вне Ω ; $f(\varphi, \theta)$ — диаграмма направленности (ДН) измерительной системы. Для удобства здесь и далее используется декартова система координат, где углы отсчитываются от нормали к плоскости антенны.

Известно, что достигаемая при проведении прямых измерений в соответствии с (1) угловая разрешающая способность, т.е. способность различать два близко расположенных объекта, измеряется минимальными углами $\delta\varphi$ и $\delta\theta$, при которых два точечных источника сигналов еще различаются раздельно. Эти углы определяются на основе критерия Рэлея

$$(2) \quad \delta\varphi \cong \lambda/D_x, \quad \delta\theta \cong \lambda/D_y,$$

где D_x и D_y — линейные размеры антенны в соответствующих углам φ и θ направлениях, λ — длина волны.

Углы $\delta\varphi$ и $\delta\theta$ оказываются равны ширине ДН, определяемой по снижению излучаемой мощности в два раза и обозначаются как $\varphi_{0,5}$ и $\theta_{0,5}$.

Ставится задача получения изображения источника сигналов $I(\varphi, \theta)$ с угловым разрешением, превышающим критерий Рэлея в возможно большей

степени, на основе интеллектуального анализа принятого сигнала $U(\varphi, \theta)$ и известной ДН $f(\varphi, \theta)$ системы. Математически задача сводится к приближенному решению интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода типа свертки (1) относительно неизвестной функции $I(\varphi, \theta)$ с максимально достижимой точностью.

В общем случае попытки увеличить разрешение, превосходящее (2), путем решения ИУ приводят к появлению неустойчивых решений, поскольку поставленная задача относится к классу обратных и не удовлетворяет второму и третьему требованиям корректности по Адамару (второе — однозначность решений и третье — их устойчивость).

Перспективными представляются развиваемые авторами методы цифровой обработки сигналов, названные алгебраическими [9–15], позволяющие получить устойчивое приближенное решение ИУ (1).

3. Алгебраические методы решения

Алгебраические методы заключаются в параметризации задачи посредством представления приближенных решений в виде разложений по выбранным последовательностям функций. Выбор систем функций проводится на основе априорной информации о решении.

Рассмотрим практически важные задачи, когда сканирование проводится по одной из угловых координат. Идеология двумерного сканирования аналогична.

Итак, искомое распределение $I(\varphi)$ всегда можно представить в виде разложения по какой-либо полной системе ортонормированных в области Ω функций $g_m(\varphi)$ с неизвестными коэффициентами b_m

$$(3) \quad I(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m g_m(\varphi) \cong \sum_{m=1}^M b_m g_m(\varphi).$$

Тогда принятый сигнал $U(\varphi)$ выражается в виде суперпозиции функций $G_m(\varphi)$, являющихся образами $g_m(\varphi)$ при преобразовании:

$$(4) \quad G_m(\varphi) = \int_{\Omega} f(\varphi - \phi) g_m(\phi) d\phi,$$

$$(5) \quad U(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_m(\varphi) \cong \sum_{m=1}^M b_m g_m(\varphi),$$

где M – выбранное число членов разложения.

Таким образом, обратная задача оказывается параметризованной, и ее решение сводится к поиску коэффициентов b_m [10–12], которые обычно находятся при минимизации среднеквадратического отклонения функции $U(\varphi)$ из (5) от исследуемого сигнала (1) в секторе углов $\Phi > \Omega$, где Φ – сектор, в котором полезный сигнал превышает шумы и может быть измерен с достаточно высокой точностью. На практике границы сектора Φ часто определяются

по снижению амплитуды полезного сигнала в два раза по отношению к ее максимальному значению.

Система функций $G_m(\varphi)$ из (4), вообще говоря, неортогональна и упомянутая выше минимизация сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}\mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ – вектор-столбец коэффициентов b_m , а компоненты вектора $\mathbf{V}$ и матрицы $\mathbf{S}$ равны соответственно

$$V_j = \int_{\Phi} U(\varphi) G_j(\varphi) d\varphi, \quad S_{jm} = \int_{\Phi} G_j(\varphi) G_m(\varphi) d\varphi,$$

здесь

$$(6) \quad \int_{\Phi} U(\varphi) G_j(\varphi) d\varphi = \sum_{m=1}^M b_m \int_{\Phi} G_j(\varphi) G_m(\varphi) d\varphi, \quad j = 1, \dots, M.$$

Принципиальной особенностью СЛАУ (6) является их плохая обусловленность, что является следствием попытки решения некорректной обратной задачи. Повышение устойчивости решений может быть достигнуто, если функции $G_m(\varphi)$ оказываются ортогональными в области Φ . В этом случае в матрице $\mathbf{S}$ отличны от нуля только элементы на главной диагонали и коэффициенты b_m легко находятся:

$$\int_{\Phi} U(\varphi) G_m(\varphi) d\varphi = b_m \sum_{j=1}^M G_j^2(\varphi) d\varphi, \quad m = 1, \dots, M.$$

Таким образом, возникает задача выбора такой ортонормированной в области Φ системы функций $\tilde{g}_m(\varphi)$, образы $\tilde{G}_m(\varphi)$ которых являются ортогональными в Φ .

4. Одновременная ортогонализация систем используемых функций

В роли ортогональных функций $g_m(\varphi)$ и $G_m(\varphi)$ могут быть использованы собственные функции ИУ (1). Однако численный поиск каждой из них сводится к решению неустойчивых задач и, следовательно, к появлению значительных ошибок в решении всей задачи. Даже в наиболее простом случае поиска собственных функций, когда ядро ИУ вырождено, т.е. ДН $f(\varphi)$ измерительной системы представляет собой ДН одномерной антенной решетки (АР)

$$(7) \quad f(\varphi) = \sum_{n=-K}^{n=K} j_n \exp(-ikdn \sin \varphi),$$

получаемые для поиска собственных функций СЛАУ оказываются плохо обусловленными. В (7) обозначено: j_n – величина тока на n -м излучателе, d – расстояние между соседними излучателями, $2K + 1$ – число элементов АР,

константа $k = 2\pi/\lambda$, где длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, c – скорость света, ω – частота излучения. Существенно, что числа обусловленности соответствующих матриц экспоненциально возрастают с ростом количества определяемых собственных функций, т.е. с попытками повысить эффективное угловое разрешение.

Заметим, что построение ортогональной системы функций $\tilde{G}_m(\varphi)$ в области Φ может быть осуществлено также на основе процесса ортогонализации Грама–Шмидта. В этом случае, однако, полученные функции оказываются образами неортогональных в области Φ функций. Источник при этом также оказывается представлен в виде суперпозиции неортогональных функций, что значительно снижает качество приближенного решения.

Актуальную задачу одновременной ортогонализации систем функций g_m и G_m предлагается решать на основе следующей теоремы, доказательство которой приводится в Приложении.

Теорема 1. Пусть заданы система из N ортонормированных на отрезке L_g функций $g_m(x)$ (здесь и далее $m = 1, \dots, N$) и произвольный линейный оператор $\mathbf{A}$, порождающий систему из N функций $G = \mathbf{A}g$, на отрезке L_G . Здесь G и g – N -мерные вектор-столбцы с компонентами G_m и g_m . Тогда существует линейное преобразование, представимое в виде матрицы $\mathbf{T}$ такое, что системы функций

$$(8) \quad \tilde{G}_m(\varphi) = \sum_{j=1}^N T_{jm} G_j(\varphi), \quad \tilde{g}_m(\varphi) = \sum_{j=1}^N T_{mj} g_j(\varphi)$$

на отрезках L_G и L_g соответственно оказываются ортогональными при сохранении условия $\tilde{G} = \mathbf{A}\tilde{g}$.

Результаты теоремы позволяют одновременно представить искомое решение $I(\varphi)$ рассматриваемой обратной задачи и исследуемый сигнал $U(\varphi)$ в виде разложений по системам ортогональных функций, что упрощает анализ задачи, повышает устойчивость численных решений и в конечном счете позволяет повысить достигаемую степень сверхразрешения.

Используя (П.1)–(П.5) (см. Приложение), получим

$$(9) \quad \tilde{G}_m(\varphi) = \int_{\Omega} f(\varphi - \phi) \tilde{g}_m(\phi) d\phi, \quad \tilde{g}_m(\varphi) = \sum_{j=1}^N T_{mj} g_j(\varphi).$$

Далее выражая принятый сигнал в виде разложения

$$U(\varphi) \cong \sum_{m=1}^N C_m \tilde{G}_m(\varphi),$$

находим в силу ортогональности функций коэффициенты C_m :

$$(10) \quad C_m = \frac{1}{P_m} \int_{\Phi} U(\varphi) \tilde{G}_m(\varphi) d\varphi, \quad \text{где} \quad P_m = \int_{\Phi} \tilde{G}_m^2(\varphi) d\varphi.$$

С учетом введенных обозначений принятый сигнал (1) можно представить следующим образом:

$$(11) \quad \begin{aligned} U(\varphi) &= \int_{\Omega} f(\varphi - \phi) I(\phi) d\phi \cong \sum_{m=1}^N C_m \tilde{G}_m(\varphi) = \\ &= \int_{\Omega} f(\varphi - \phi) \left(\sum_{m=1}^N C_m \tilde{g}_m(\phi) \right) d\phi. \end{aligned}$$

Приравнивая подынтегральные выражения в (11), получаем решение рассматриваемой обратной задачи в виде разложений как по введенной системе функций (П.5), так и по исходной системе N функций (3)

$$(12) \quad I(\varphi) \cong \sum_{m=1}^N C_m \tilde{g}_m(\varphi), \quad I(\varphi) = \sum_{j=1}^N b_j g_j(\varphi), \quad b_j = \sum_{m=1}^N C_m T_{mj}.$$

Далее алгоритм использует итерационный процесс увеличения N для повышения степени достигаемого сверхразрешения до тех пор, пока удастся получать устойчивые решения.

Поскольку рассматривается обратная задача, решение которой после проведения параметризации сведена к решению СЛАУ, все негативные свойства обратных задач при этом сохраняются и переносятся в итоге на решения СЛАУ. В рассматриваемых задачах нарушается второй и третий признак корректности задачи по Адамару, а именно: однозначность решений и их устойчивость. Матрицы $\mathbf{S}$ в (6) оказываются плохо обусловлены. При попытках повысить разрешение размерность матриц $\mathbf{S}$ увеличивается, числа обусловленности при этом возрастают экспоненциально и достигают огромных значений: 10^{10} – 10^{13} , так что даже ничтожные ошибки округления приводят к неадекватным решениям. Наличие шумов и ошибок измерений еще более ухудшает ситуацию. Прямое решение СЛАУ известными численными методами линейной алгебры не приводит к удовлетворительному результату. В то же время значения чисел обусловленности матриц типа $\mathbf{T}$ из (8), (9) многократно — на порядки — меньше, чем у матриц $\mathbf{S}$. Это обстоятельство является показателем большей устойчивости решений, получаемых на основе теоремы 1, в сравнении с прямым решением СЛАУ (5), (6). Таким образом, предложенный подход к решению ИУ (1) предоставляет возможность использовать большее количество функций в представлении решения (12) по сравнению с (3)–(6), что повышает угловое разрешение. В альтернативной формулировке — развиваемый подход позволяет достичь того же уровня превышения критерия Рэлея, что и другие методы, но при значительно более высоком уровне шумов и помех.

5. Примеры решений задач

Вначале для представления решения в области $\Omega = [-\theta_0, \theta_0]$, где $2\theta_0 = \theta_{0,5}$, были выбраны одноступенчатые функции и поиск решения осуществлялся на основе кратко описанного выше алгебраического метода (3)–(5). Затем

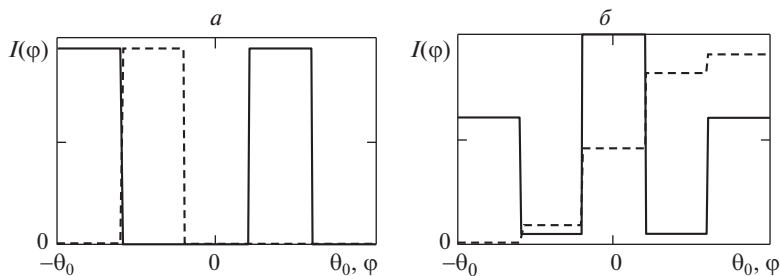


Рис. 1. *a*) — Исходные ступенчатые функции; *б*) — модифицированные функции.

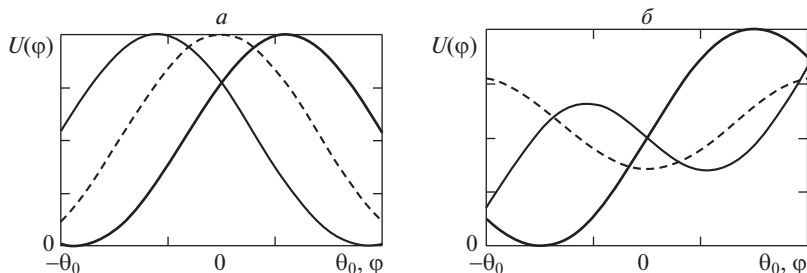


Рис. 2. *a*) — Образы G_m исходных функций; *б*) — образы $\tilde{G}_m$ модифицированных функций.

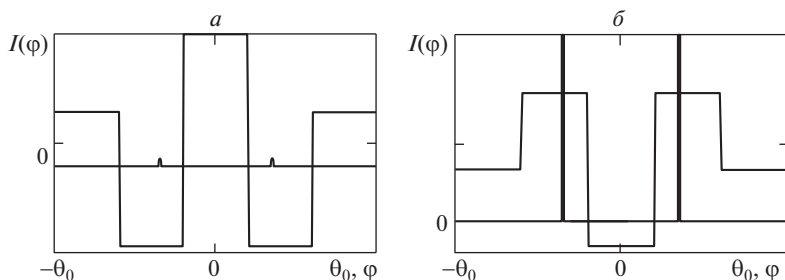


Рис. 3. *a*) — Решение на основе исходных функций; *б*) — решение на основе функций модифицированных функций.

поиск решений проводился на основе теоремы 1 и соотношений (8)–(12) и полученные решения сравнивались.

На рис. 1, *a* из пяти исходных функций $g_m(\varphi)$, $m = 1, \dots, 5$, показаны три — $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$ и $g_4(\varphi)$. На рис. 1, *б* приведены для иллюстрации преобразованные модификации исходных функций $g_1(\varphi)$ и $g_4(\varphi)$, т.е. $\tilde{g}_1(\varphi)$ и $\tilde{g}_4(\varphi)$. На рис. 2, *a* представлены образы $G_m(\varphi)$ исходных функций $g_m(\varphi)$ при $m=1,3,5$, а на рис. 2, *б* — образы $\tilde{G}_m(\varphi)$ функций $\tilde{g}_m(\varphi)$ в области Φ .

В качестве классических объектов для исследования разрешающей способности были выбраны две точечные цели с одинаковой амплитудой излучаемого сигнала. Расстояние между объектами последовательно уменьшалось до тех пор, пока удавалось получать достаточно устойчивые, адекватные исходным объектам решения. При сближении объектов в решении начинают

появляться ложные источники. Их интенсивность резко возрастает при дальнейшем сближении. На рис. 3,б показан предельный случай, когда ими еще можно пренебречь.

На рис. 3 представлены полученные решения в соответствии с (3)–(6), т.е. без ортогонализации функций и их образов, а также решения после проведения процедуры одновременной ортогонализации $g_m(\varphi)$ и $G_m(\varphi)$. Угловое положение точечных объектов показано в виде жирной вертикальной линии, решение — в виде ломаной.

Результаты численных экспериментов показали, что путем одновременной ортогонализации удастся превысить критерий Рэлея в четыре раза (рис. 3,б). Попытка получить устойчивое решение той же задачи в соответствии с (3)–(6) не приводит к удовлетворительному результату. Полученное неадекватное решение, показанное на рис. 3,а, характеризуется осциллирующим характером с очень большой амплитудой колебаний. На фоне этого решения истинные объекты, изображенные в том же масштабе, что и на рис. 3,б, почти незаметны. Вид решения характерен для случаев, когда найти адекватное решение не удастся. Числа обусловленности матриц, используемых при решении и характеризующих устойчивость задач, различаются в представленных примерах на два порядка.

Следует отметить, что при изменении числа M используемых функций исходной системы в представлении решения (3) изменяются и сами системы функций $g_m(\varphi)$ и $G_m(\varphi)$ (9). Эта особенность мало сказывается на времени работы программы, поскольку основные расчеты выполняются с помощью стандартных быстросействующих и хорошо отработанных алгоритмов.

Выбор исходной системы функций $g_m(\varphi)$ проводится на основе априорной информации о решении [16] и формы принимаемого при сканировании сигнала (1). Такой информацией могут быть, в частности, размер и расположение области локализации источника сигналов, монотонность, гладкость области непрерывности углового распределения амплитуды излучаемого сигнала, наличие областей с дискретным распределением, динамический диапазон изменения интенсивности, ограничения на градиент и другие характеристики [11, 13, 16].

На рис. 4 показано решение рассматриваемой обратной задачи при использовании такого рода априорной информации. Было известно, что в задаче дистанционного зондирования отражающая поверхность описывается гладкой функцией с плавным изменением амплитуды отражаемого сигнала при возможном наличии малоразмерного участка с высоким отражением. На основе этих сведений для представления решения была выбрана система функций на основе DOG-вейвлетов.

При прямом наблюдении без предлагаемой цифровой обработки представленный участок имеет некоторую усредненную амплитуду — верхняя точечная кривая. Обработка сигнала алгебраическим методом позволила выявить детали амплитудного распределения $I(\varphi)$. В виде сплошной тонкой кривой на рис. 4 показано истинное распределение отраженного сигнала, штрихами — решение, найденное алгебраическим методом (3)–(6), сплошная жирная

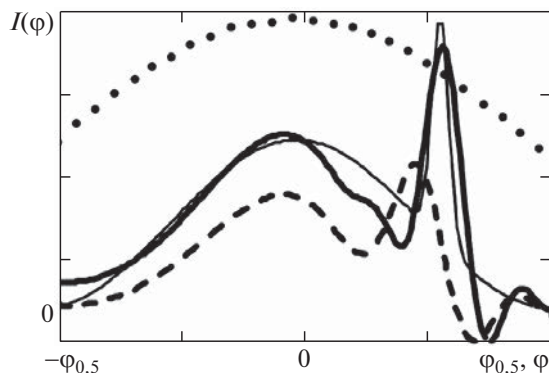


Рис. 4. Решение на основе DOG-вейвлетов.

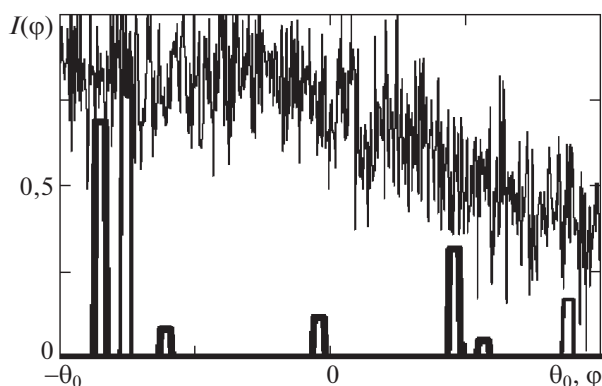


Рис. 5. Решение на основе дельта-функций.

кривая — решение, полученное при использовании рассматриваемого метода двойной ортогонализации.

Цифровая обработка на основе двойной ортогонализации повысила качество решения, особенно в области участка с высоким градиентом коэффициента отражения.

Ортогонализация систем функций позволяет не только повысить угловое разрешение, но за счет хорошей устойчивости получить адекватные решения при высоких уровнях случайных составляющих.

На рис. 5 в виде жирной ломаной линии показано решение задачи при высоком уровне шума. Источник сигнала представлял собой два малоразмерных объекта, показанных на рисунке тонкой ломаной линией. Амплитуды сигналов, отраженных от объектов, различались в пять раз. Объекты не разрешались при прямом наблюдении. Для иллюстрации на рисунке показан принимаемый при сканировании в секторе Ω сигнал — верхняя кривая.

Для представления решений в качестве системы $g_m(\varphi)$ была выбрана система дельта-функций, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. В процессе поиска решения эти расстояния можно было изменять.

В ходе численных экспериментов искалось минимальное значение отношения сигнал/шум (ОСШ), при котором еще можно было получить удовлетворительное решение. Большая разница в амплитудах отраженных сигналов значительно осложняла решение задачи. Появились ложные объекты, хотя и с небольшой амплитудой, величина которой позволяла пренебречь ими при представлении окончательного решения. В итоге вполне удовлетворительное устойчивое решение было получено при ОСШ, равном 1/3 или 10,5 дБ. Многие известные методы, в том числе [1–8], позволяют успешно решать подобные задачи только при ОСШ не менее 20 дБ.

Применение метода одновременной ортогонализации систем функций позволило детализировать изображения объектов с угловым разрешением, превосходящим критерий Рэлея при значительном уровне случайных составляющих в исследуемом сигнале. Таким образом, разработан новый эффективный метод решения обратных задач достижения сверхразрешения в условиях воздействия шумов и помех.

6. Повышение ОСШ для UWB систем

Дальнейшее повышение достигаемой степени сверхразрешения возможно при снижении уровня случайных составляющих — шумов в исследуемых сигналах.

Существующие в настоящее время системы генерации UWB сигналов не обладают достаточной энергетикой для проведения измерений на значительных расстояниях [17–19]. В этих условиях важной задачей является повышение дальности действия систем за счет оптимизации цифровой обработки принимаемых UWB импульсов. Оптимизация состоит в разработке алгоритмов повышения ОСШ в принимаемых сигналах, что в конечном счете увеличивает дальность действия систем, а также позволяет повысить качество изображений объектов с угловым сверхразрешением. Повышение ОСШ повышает устойчивость решений рассмотренных выше обратных задач, которые существенно больше, чем прямые, чувствительны к наличию и уровню случайных составляющих в исследуемых сигналах. Любые линейные алгоритмы обработки UWB-сигналов, повышающие ОСШ, одновременно обеспечивают повышение эффективного углового разрешения.

Известные методы расчетов характеристик и их оптимизации мало пригодны для решения задач оптимизации характеристик UWB радаров [20–28]. При излучении, приеме и при отражении от объектов сверхширокополосных импульсов необходимо учитывать дисперсионные зависимости характеристик отражения исследуемых объектов, а также антенных систем. В результате дисперсии форма и спектр принимаемого импульса значительно отличаются от излучаемого, что делает практически невозможным применение традиционных методов когерентной обработки сигналов.

Еще одна особенность решения задач анализа и оптимизации UWB импульсов — сложность использования в расчетах хорошо разработанных методов спектрального анализа, так как для их успешного применения необходимо с высокой точностью задавать амплитудный и фазовый спектры импуль-

сов. UWB сигнал, однако, имеет сверхширокую полосу частот и, следовательно, спектральная плотность импульса оказывается невелика (зачастую близка к величине ошибок при расчетах и измерениях). В частности, при приеме сигнала его спектральная плотность часто оказывается ниже спектральной плотности шума. В этих условиях необходимая для оптимизации точность измерений амплитудно-фазового спектра не может быть достигнута.

Для преодоления подобных сложностей предлагается применить к расчетам, связанным с описанием процессов излучения, приема, отражения и обработки UWB импульсов, метод анализа во временной области, основанный на представлении антенных систем, систем приема, генерации и т.п. как линейных систем, описываемых импульсными характеристиками.

Предлагаемый нетрадиционный подход оказывается более удобным и точным, поскольку при его использовании необходимо знать не спектр, а только временную зависимость генерируемого сигнала $U(t)$, которая может быть определена экспериментально с достаточно высокой точностью.

7. Оптимизация импульсной характеристики приемной системы

Поставим задачу поиска импульсной характеристики $h_r(t)$ приемной системы, обеспечивающей получение максимально возможного ОСШ по мощности — q^2 . Заданными считаются форма генерируемого UWB импульса $U(t)$, ДН передающей и приемной антенных систем на каждой из используемых частот — $f_e(\varphi, \omega)$ и $f_p(\varphi, \omega)$, а также комплексная частотная характеристика отражения объекта — $R(\omega)$. Заданные дисперсионные зависимости позволяют с помощью преобразования Фурье $\mathbf{F}[\cdot]$ определить импульсные характеристики излучения, приема и отражения сигнала:

$$(13) \quad h_e(\varphi, t) = \mathbf{F}[f_e(\varphi, \omega)], \quad h_p(\varphi, t) = \mathbf{F}[f_p(\varphi, \omega)], \quad h_R(t) = \mathbf{F}[R(\omega)].$$

Кроме приведенных характеристик для современных систем на основе антенных решеток (АР) необходимо дополнительно учитывать взаимное влияние излучателей друг на друга. Взаимовлияние принято описывать с помощью взаимных комплексных сопротивлений, т.е. собственное сопротивление излучателя изменяется на величину некоего вносимого сопротивления. Это сопротивление, называемое взаимным, зависит от расстояния между излучателями, измеряемого отношением физического расстояния к длине волны — электрическое расстояние. Без учета взаимовлияния для узкополосных АР ошибка в расчетах их характеристик составляет 3–6% и ею часто можно пренебречь. При использовании UWB импульсов для низкочастотных составляющих электрические расстояния между излучателями в несколько раз уменьшаются и величина сопротивления заметно возрастает. Во избежание значительных ошибок — вплоть до 40–50% — при построении импульсных характеристик UWB радаров взаимовлияние необходимо учитывать.

Для двух отдельных излучателей АР под номерами m и n , расположенными на расстоянии $d_{m,n}$ друг от друга с сонаправленными ДН, их взаимное комплексное сопротивление

$$z(kd_{m,n}) = r(kd_{m,n}) + ix(kd_{m,n})$$

выражается в виде [29]

$$(14) \quad r(kd_{m,n}) = \frac{1}{B} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi_m(\varphi, \theta) \phi_n^*(\varphi, \theta) \cos(kd_{m,n} \sin \theta) \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$$(15) \quad x(kd_{m,n}) = \frac{4}{kd_{m,n}} \int_0^\pi \phi_m(\theta) \phi_n^*(\theta) d\theta - \\ - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi_m(\varphi, \theta) \phi_n^*(\varphi, \theta) \sin(kd_{m,n} \sin \theta |\sin \varphi|) \sin \theta d\varphi d\theta,$$

где B — нормирующий множитель, $\phi_m(\varphi, \theta)$ — ДН отдельного излучателя, $*$ — символ комплексного сопряжения.

Обычно слабонаправленные ДН отдельных излучателей АР одинаковы и часто, особенно для плоских и линейных АР, не зависят от азимутального угла φ . Тогда с высокой точностью они могут быть описаны в виде функций $\phi(\varphi, \theta) = \cos^\nu \theta$ или суперпозиции подобных функций, где параметр ν описывает направленность излучателя. В этом случае интегралы в (14), (15) берутся в явном виде [29], и взаимное действительное сопротивление двух соседних излучателей (14) оказывается равным

$$(16) \quad r(kd_{m,n}) = \Gamma(\nu + 3/2) \frac{J_{\nu+1/2}(kd_{m,n})}{(kd_{m,n}/2)^{\nu+1/2}},$$

где $\Gamma(\nu)$ — Гамма-функция, J_ν — функция Бесселя порядка ν . Взаимная реактивная часть сопротивления, нормированная на собственное сопротивление, приводится к виду

$$(17) \quad x(kd_{m,n}) = \frac{2\Gamma(\nu + 3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1)kd_{m,n}} - \frac{\Gamma(\nu + 3/2)H_{\nu+1/2}(kd_{m,n})2^{\nu+1/2}}{(kd_{m,n})^{\nu+1/2}},$$

где H_ν — функция Струве порядка ν [30].

Для больших АР можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что все излучатели находятся в одинаковых условиях. Тогда сопротивления всех излучателей оказываются одинаковыми, и учет взаимовлияния излучателей приводит к необходимости вместо $h_{e,p}(\varphi, t)$ из (13) использовать

$$(18) \quad h_{e,p}(\varphi, t) = \mathbf{F} \left[\frac{f_{e,p}(\varphi, \omega)}{z(\varphi, \omega)} \right],$$

где $z(\varphi, \omega)$ — сопротивление излучателя на частоте ω , учитывающее влияние всех остальных излучателей АР.

Найдем частотную зависимость сопротивления излучателя $z(\varphi, \omega)$. С этой целью рассмотрим вначале линейную АР. Для больших АР числом излучателей $2N + 1$, сфокусированных в направлении φ к оси АР (7), активное сопротивление $r(\varphi, \omega)$ каждого элемента представляет собой следующую сумму,

которую практически без ошибки можно распространить до бесконечности:

$$(19) \quad r(\varphi, \omega) = \sum_{n=-N}^N r(kdn) \cos(kdn \sin \varphi) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(kdn) \cos(kdn \sin \varphi).$$

Сумма ряда (19) может быть представлена в виде замкнутого выражения. Для этого предварительно необходимо найти сумму следующего ряда

$$(20) \quad W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\nu}(kdn)}{(kdn/2)^{\nu}} \cos(kdn \sin \varphi),$$

который называется обобщенным рядом Шлемильха (Schlömlich) [30]. Заметим, что значения суммы (20) приведены в справочниках только для нескольких частных случаев. В общем случае сумма ряда найдена в [22]. Показано, что при условии $kd < 2\pi/(1 + \sin \varphi)$, которое выполняется для АР, сумма обобщенного ряда Шлемильха равна

$$(21) \quad W = -\frac{1}{2\Gamma(\nu + 1)} + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + 1/2)kd} \cos^{2\nu-1} \varphi.$$

В итоге

$$(22) \quad r(\varphi, \omega) = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 3/2)}{\Gamma(\nu + 1)kd} \cos^{2\nu} \varphi.$$

Мнимая часть сопротивления каждого элемента большой линейной АР имеет представление

$$(23) \quad X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(kdn) \cos(kdn \sin \varphi) \cong \sum_{n=-N}^N x(kdn) \cos(kdn \sin \varphi).$$

Численные оценки (23) для различных ν и kd из (17) показывают, что значение X для больших линейных АР оказывается близко к нулю. Таким образом, сопротивление каждого элемента в составе большой линейной АР $z(kd)$ с хорошей точностью принимает значение (22), что позволяет найти импульсную характеристику (18).

Сопротивления излучателя в большой плоской АР получим, дважды используя сумму (22):

$$(24) \quad r(\varphi, \omega) = \frac{4\pi(\nu + 1/2)}{(kd)^2} \cos^{2\nu-1} \varphi.$$

Теперь, используя найденные значения сопротивлений, находим импульсные характеристики излучения и приема АР в виде (18).

Обычно ОСШ для импульсных сигналов определяется как отношение квадрата максимального значения полезного сигнала к среднеквадратическому значению $\overline{U_n^2}$ шума

$$(25) \quad q^2 = \frac{U_M^2}{\overline{U_n^2}}.$$

Тогда для узкополосных сигналов, когда полоса частот много меньше основной частоты $\Delta\omega \ll \omega_0$, для угла наблюдения $\varphi = 0$ получим

$$(26) \quad q^2 = \frac{f^4(0, \omega_0) |R(\omega_0)|^2}{N_0(\omega_0)},$$

где N_0 – спектральная плотность шума на частоте ω_0 . Для UWB сигналов, считая шум стационарным случайным процессом, (25) принимает вид

$$(27) \quad q^2 = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h_r(t) U_r(t_0 - t) dt \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_r(t) h_r(T) K(t - T) dt dT},$$

где $U_r(t)$ – принимаемый сигнал, t_0 – момент времени, когда полезный сигнал достигает максимального значения U_M , $K(t)$ – автокорреляционная функция шума на входе приемника. Часто в практически значимых задачах, когда шум может быть описан как белый, функция $K(t)$ представляет собой дельта-функцию. Тогда решая вариационную задачу поиска $h_r(t)$ из (27), обеспечивающую максимально возможное ОСШ q^2 с точностью до константы, получим

$$(28) \quad h_r(t) = U_0(t_0 - t), \quad U_r(t) = h_e(0) \star h_R(t) \star h_e(0) \star U_g(t),$$

где $U_g(t)$ – генерируемый сигнал, а символ $\star$ обозначает свертку функций. Заметим, что первые две свертки образованы заданными функциями и могут быть заменены одной зависимостью

$$(29) \quad H_r(t) = h_e(0) \star h_R(t) \star h_e(0), \quad U_r(t) = H_r(t) \star U_g(t),$$

что и определяет $h_r(t)$ из (28), которую можно назвать импульсной характеристикой оптимального фильтра (ОФ).

Чаще всего в задачах связи, радиолокации, дистанционного зондирования шум считается белым. Однако в сверхширокой полосе частот спектральная плотность шума может заметно отличаться от константы, и тогда ее форма должна учитываться при синтезе ОФ. В этом случае вместо (29) из (27) с точностью до константы следует

$$(30) \quad U_r(t_0 - t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\tau) K(t - \tau) d\tau,$$

и теперь для определения $h_r(t)$ ОФ необходимо численно решить полученное интегральное уравнение (30).

8. Результаты численных экспериментов

Рассматривалась задача оптимального приема UWB импульсов при отражении от объекта с плавным возрастанием значения модуля коэффициента отражения от частоты $R(\omega)$ и быстропеременной фазовой характеристикой. В качестве спектральной плотности шума $N_0(\omega)$ было выбрано распределение атмосферных шумов в диапазоне длин волн 1 м–3 см. ДН антенной системы на каждой из используемых частот соответствовала ДН антенной решетки с шириной луча $2\theta_0 = 3^\circ$ на средней частоте используемого диапазона.

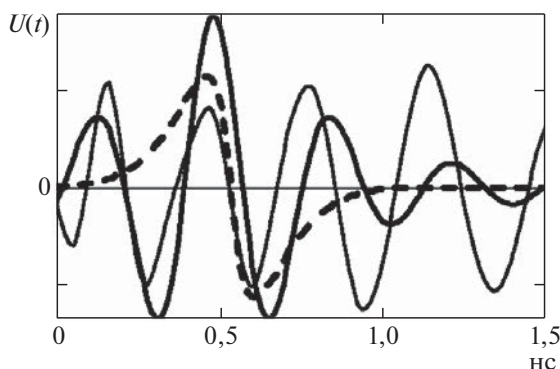


Рис. 6. Формы генерируемого и принимаемых UWB импульсов.

Результаты решения задачи представлены на рис. 6. Показаны: исходный UWB импульс — штриховая кривая; принятый UWB импульс без применения ОФ — тонкая сплошная кривая; принятый UWB импульс после оптимальной обработки в приемнике (28), (29) — жирная кривая. В принимаемом сигнале за счет дисперсии происходят заметные изменения: значительно увеличивается длительность импульса, исчезают ярко выраженные в исходном импульсе максимальные по модулю значения отраженного сигнала, форма принятого импульса, а значит и форма его спектра, становятся мало похожими на генерируемый сигнал.

Использование оптимального приемника для UWB сигналов оказывается высокоэффективным, так как применяется в сверхширокой полосе частот. В приведенном примере оптимизации приема с направления $\varphi = 0$ ОСШ увеличилось более чем в 150 раз, что соответствует повышению дальности действия системы в 3,7 раза.

При приеме сигнала с направления, отличного от $\varphi = 0$, характеристика фильтра $h_r(t)$ в соответствии с (28)–(30) уже не является оптимальной и повышает пиковое значение сигнала в меньшей степени, чем с направления $\varphi = 0$. В приведенном примере выигрыш от оптимизации для $\varphi = 0$ снизился в 5 раз на границе передающего луча $\varphi = \theta_0$. Выявленная закономерность при оптимальной фильтрации UWB импульсов показывает, что эффективная ширина приемной ДН для рассматриваемого сигнала становится существенно меньше θ_0 . Этот эффект может быть использован для повышения точности и углового разрешения UWB систем при поиске и слежении за объектами с известными характеристиками отражения.

На практике трудно ожидать, что комплексный коэффициент отражения исследуемого объекта, особенно его фазовая характеристика, точно известны. Однако, как показали численные эксперименты, учет даже частичной информации об отражающих свойствах объекта позволяет существенно повысить ОСШ — до 0,2–0,5 от значения оптимального q^2 . В приведенном примере фазовая характеристика отражения задавалась в виде очень приближенной оценки. Тем не менее удалось значительно повысить ОСШ — примерно в 50 раз.

Результаты численных экспериментов на различных математических моделях объектов при полностью или частично известной информации об их дисперсионных характеристиках отражения показывают, что предлагаемая оптимизация приема UWB импульсов повышает ОСШ от 10 до 250 раз. Полученный результат позволяет в 2–4 раза увеличить дальность действия систем. Кроме того, повышается вероятность правильного обнаружения и идентификации исследуемых объектов.

9. Заключение

1. Предложенный новый метод численного решения обратных задач, позволяющий угломерным системам превысить критерий Рэлея в несколько раз.

2. Алгоритмы на основе предложенного метода двойной ортогонализации дают возможность получать удовлетворительные решения при отношении сигнал–шум 15–20 дБ, а иногда и при 11–12 дБ, т.е. при значительно больших значениях случайных составляющих, чем известные, описанные в отечественной и зарубежной литературе методы.

3. Показано, что априорная информация об источниках сигналов дает возможность проводить целенаправленный отбор систем функций для представления решений и тем самым повышать адекватность и устойчивость получаемых решений.

4. Относительная простота алгоритмов восстановления изображений объектов обеспечивает возможность их использования в режиме реального времени.

5. Решена вариационная задача оптимизации импульсных характеристик приемника зондирующих UWB импульсов. Показана эффективность использования предложенных алгоритмов обработки UWB сигналов, которая позволяет в 2–4 раза повысить дальность действия UWB-систем и улучшить качество радиоизображений.

6. Показано, что оптимизация формы принимаемых UWB импульсов позволяет для известных заранее типов объектов одновременно повысить дальность действия систем, улучшить их угловые характеристики и характеристики обнаружения и идентификации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Система функций $G_m(x)$ в общем случае неортогональна на L_G . Составим на ее основе матрицу Грама, т.е. матрицу $\mathbf{P}$ скалярных произведений с элементами P_{mn} :

$$(П.1) \quad P_{mn} = (G_m, G_n) = \int_{\Phi} G_m(\phi) G_n(\phi) d\phi.$$

Поскольку матрица $\mathbf{P}$ – симметрична и положительно определена, существует преобразование $\mathbf{T}$, приводящее ее к диагональному виду

$$(П.2) \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^* \mathbf{P} \mathbf{T}.$$

Используя найденную матрицу $\mathbf{T}$, вводим новую систему функций $\tilde{G}_m(x)$ в виде (9). Полученная система оказывается ортогональной на отрезке L_G , что легко проверяется при непосредственном вычислении скалярных произведений:

$$(\tilde{G}_m, \tilde{G}_n) = \sum_{j,i=1}^N T_{jm} T_{in} \int_{\Phi} G_j(\phi) G_i(\phi) d\phi = \sum_{j,i=1}^N T_{jm} T_{in} P_{ji} = \tilde{P}_{mn},$$

где $\tilde{P}_{mn}$ – элементы диагональной матрицы (П.2).

Найдем теперь систему функций $\tilde{g}_m(x)$, которая порождает полученную ортогональную в области L_G систему $\tilde{G}_m(x)$, т.е.

$$(П.3) \quad \tilde{G}_m = \mathbf{A} \tilde{g}_m.$$

Из требуемого представления (9) следует

$$(П.4) \quad \tilde{G}_m = \sum_{j=1}^N T_{mj} \mathbf{A} g_j = \mathbf{A} \left(\sum_{j=1}^N T_{mj} g_j \right).$$

Сравнивая (П.3) и (П.4), получаем

$$(П.5) \quad \tilde{g}_m(x) = \sum_{j=1}^N T_{mj} g_j(x).$$

Найденная система (П.5) оказывается ортогональной на отрезке L_g . Действительно, в силу ортогональности функций $g_m(x)$ и ортогональности собственных векторов матрицы $\mathbf{P}$, образующих матрицу $\mathbf{T}$, имеем

$$(\tilde{g}_m(x), \tilde{g}_n(x)) = \sum_{j=1}^N T_{mj} T_{nj} (g_j, g_i) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \lambda_m, & m = n, \end{cases} \quad \lambda_m = \sum_{j=1}^N T_{mj}^2.$$

Отметим, что найденная система ортогональных функций $\tilde{g}_m(x)$ определяется тем же линейным преобразованием $\mathbf{T}$, что и система функций $\tilde{G}_m(x)$.

В итоге на основе заданной системы из N ортогональных на отрезке L_g функций $g_m(x)$ построена новая ортогональная на том же отрезке система функций, порождающая в области L_g ортогональную систему функций $\tilde{g}_m(x)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Odendaal W., Barnard E., Pistorius C.W.I.* Two Dimensional Superresolution Radar Imaging Using the MUSIC Algorithm // IEEE Trans. 1994. Vol. AP-42. No. 10. P. 1386–1391. <https://doi.org/10.1109/8.320744>
2. *Waweru N.P., Konditi D.B.O., Langat P.K.* Performance Analysis of MUSIC Root-MUSIC and ESPRIT DOA Estimation Algorithm // Int. J. Electrical Computer Energetic Electronic and Communication Engineering. 2014. Vol. 08. No. 01. P. 209–216.
3. *Yuebo Zha, Yulin Huang, Jianyu Yang.* An Iterative Shrinkage Deconvolution for Angular Super-Resolution Imaging in Forward-Looking Scanning Radar // Progress

In Electromagnetics Research B., 2016. V. 65. P. 35–48.

<https://doi.org/10.2528/PIERB15100501>

4. Almeida M.S., Figueiredo M.A. Deconvolving images with unknown boundaries using the alternating direction method of multipliers // IEEE Trans. Image Process. 2013. Vol. 22. No. 8. P. 3074–3086.
5. Dudik M., Phillips S.J., Schapire R.E. Maximum entropy density estimation with generalized regularization and an application to species distribution modeling // J. Machine Learning Research. 2007. Vol. 8. P. 1217–1260.
6. Stoica P., Sharman K.C. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation // IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1990. No. 38(7). P. 1132–1143.
7. Geiss A., Hardin J.C. Radar super resolution using a deep convolutional neural network // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. 2020. Vol. 37. No. 12. P. 2197–2207.
8. Ramani S., Liu Z., Rosen J., Nielsen J., Fessler J.A. Regularization parameter for nonlinear iterative image restoration and MRI selection reconstruction using GCV and SURE- based methods // IEEE Trans. on Image Processing. 2012. V. 21. No. 8. P. 3659–3672.
9. Morse P., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill Science/Engineering/Math. 1953.
10. Lagovsky B.A., Rubinovich E.Y. Algebraic methods for achieving super-resolution by digital antenna arrays // Mathematics. 2023. V. 11. No. 4. P. 1–9.
<https://doi.org/10.3390/math11041056>
11. Lagovsky B.A., Samokhin A.B., Shestopalov Y.V. Angular Superresolution Based on A Priori Information. Radio Science. 2021. V. 56. No. 1. 2021. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1029/2020RS007100>
12. Лаговский Б.А. Угловое сверхразрешение в двумерных задачах радиолокации // Радиотехника и электроника. 2021. Т. 66. № 9. С. 853–858.
<https://doi.org/10.31857/S0033849421090102>
13. Лаговский Б.А., Рубинович Е.Я. Алгоритмы цифровой обработки данных измерений, обеспечивающие угловое сверхразрешение // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22. № 7. С. 349–356.
<https://doi.org/10.17587/mau.22.349-356>
14. Калинин В.И., Чапурский В.В., Черепенин В.А. Сверхразрешение в системах радиолокации и радиолографии на основе ММО антенных решеток с рециркуляцией сигналов // Радиотехника и электроника. 2021. Т. 66. № 6. С. 614–624.
<https://doi.org/10.31857/s0033849421060139>
15. Щукин А.А., Павлов А.Е. Параметризация пользовательских функций в цифровой обработке сигналов для получения углового сверхразрешения // Russian Technological Journal. 2022. № 10(4). С. 38–43.
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>
16. Lagovsky B.A., Samokhin A.B. Superresolution in signal processing using a priori information // IEEE Conf. Publications International Conference Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA). Italy. 2017. P. 779–783.
<https://doi.org/10.1109/ICEAA.2017.8065365>
17. Dong J., Li Y., Guo Q., Liang X. Through-wall moving target tracking algorithm in multipath using UWB radar // IEEE Geosci. Remote Sens. Lett. 2021. P. 1–5.
<https://doi.org/10.1109/lgrs.2021.3050501>

18. *Khan H.A., Edwards D.J., Malik W.Q.* Ultra wideband MIMO radar // Proc. IEEE Intl. Radar Conf. Arlington, VA, USA, 2005. 9 May 2005.
19. *Zhou Yuan, Law Choi Look, Xia Jingjing.* Ultra low-power UWB-RFID system for precise location-aware applications // 2012 IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Workshops (WCNCW). 2012. P. 154–158.
20. *Taylor J.D.* Ultra-wideband Radar Technology. CRC Press Boca Raton, London, New York, Washington. 2000.
21. *Holami G., Mehrpourbernety H., Zakeri B.* UWB Phased Array Antennas for High Resolution Radars // Proc. of the 2013 International Symp. on Electromagnetic Theory, 2013. P. 532–535.
22. *Lagovsky B.A., Samokhin A.B., Shestopalov Y.V.* Pulse Characteristics of Antenna Array Radiating UWB Signals // Proceedings of the 10th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2016). Davos, Switzerland. 2016. P. 2479–2482. <https://doi.org/10.1109/EuCAP.2016.7481624>
23. *Lagovsky B.A., Samokhin A.B., Shestopalov Y.V.* Increasing accuracy of angular measurements using UWB signals. 2017 11th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP) // IEEE Conf. Publications. Paris. 2017. P. 1083–1086. <https://doi.org/10.23919/EuCAP.2017.7928204>
24. *Anis R., Tielert M.* Design of UWB pulse radio transceiver using statistical correlation technique in frequency domain // Advances in Radio Science. 2007. V. 5. P. 297–304. <https://doi.org/10.5194/ars-5-297-2007>
25. *Niemela V., Haapola J., Hamalainen M., Inatti J.* An ultra wideband survey: Global regulations and impulse radio research based on standards // IEEE Communications Surveys and Tutorials. 2016. V. 19. No. 2. P. 874–890. <https://doi.org/10.1109/COMST.2016.2634593>
26. *Barrett T.* History of UWB Radar and Communications: Pioneers and Innovators // Progress in Electromagnetics Symposium (PIERS) 2000. Microwave Journ, January 2001.
27. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Кузьмин Л.В.* Генерация последовательности хаотических импульсов при воздействии периодического сигнала на динамическую систему // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 22. С. 29. <https://doi.org/10.1134/S1064226906050093>
28. *Yang D., Zhu Z., Liang B.* Vital sign signal extraction method based on permutation entropy and EEMD algorithm for ultra-wideband radar // IEEE Access. 2019. V. 7. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2958600>
29. *Вендик О.Г.* Антенны с немеханическим движением луча. М.: Советское Радио, 1965.
30. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций / пер. со 2-го англ. изд. / М.: ИЛ, 1947.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 29.09.2022

После доработки 23.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. **В.Ю. РУТКОВСКИЙ**, д-р техн. наук (vglum@ipu.ru),
В.М. ГЛУМОВ, д-р техн. наук (vglum@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УПРАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯТОРОМ СВОБОДНО ЛЕТАЮЩЕГО КОСМИЧЕСКОГО РОБОТА С ПОЛЕЗНЫМ ГРУЗОМ

Рассматриваются режимы управления свободно летающим космическим манипуляционным роботом при транспортировке и установке элемента на большую космическую конструкцию. Предлагается решение задачи экономии рабочего тела газо-реактивных двигателей корпуса робота при движении по траектории за счет использования подвижности манипулятора с электромеханическими приводами для угловой стабилизации механической системы, состоящей из робота и транспортируемого элемента. Получены условия обеспечения устойчивости движения манипулятора в рабочей зоне при установке элемента на собираемую конструкцию. Определяется область устойчивости, которая позволяет выбирать начальную конфигурацию манипулятора перед установкой элемента и допустимое ее изменение в процессе установки. Синтез алгоритмов управления основан на принципе построения динамических систем с обратной связью.

Ключевые слова: свободно летающий космический манипуляционный робот, рабочая зона, техническая управляемость, алгоритм управления, устойчивость движения.

DOI: 10.31857/S0005231023100082, **EDN:** YBULNK

1. Введение

В космической технологии для обслуживания и сборки на орбите космических аппаратов (КА) различного назначения предполагается использовать космические роботы с манипуляторами (КРМ), которые имеют возможность свободно перемещаться в космическом пространстве благодаря собственной системе передвижения независимо от КА, доставившего робот в заданную точку пространства [1]. Целесообразность разработки именно этого типа устройств космической робототехники была заявлена в 1974 г. на шестом Симпозиуме ИФАК по управлению в пространстве, который проходил под руководством академика Б.Н. Петрова [2]. В настоящее время известны [3] два способа соединения в космосе кораблей и модулей: прямая стыковка и причаливание с помощью манипулятора. Последний термин используется при определении целого ряда операций, например при мягкой стыковке, при укладке полезного груза в приемный отсек грузового корабля и т.п. К этому же типу операции относится рассматриваемая в данной работе задача присоединения строительного элемента к собираемой на орбите большой космической конструкции (БКК) с помощью КРМ. Как и в [3], предполагается, что масса элемента БКК может заметно превышать массу манипулятора, хват которого с удерживаемым грузом может находиться на значительном удалении от

центра масс корпуса КМР и механической системы в целом. Используемый для управления манипулятором кинематический алгоритм, преобразующий сигналы управления в требуемые скорости вращения приводов, учитывает геометрические и кинематические ограничения, определяемые текущей конфигурацией манипулятора.

Конструктивно свободно перемещающийся КРМ выполняется в виде платформы с присоединенным к ней манипулятором (или несколькими манипуляторами). Платформа оснащается устройствами управления и совокупностью исполнительных органов, обеспечивающих требуемую ориентацию и желаемую траекторию движения платформы в космическом пространстве. Подобные КРМ получили в зарубежной литературе название *Free-flying robot* [4, 5]. В одной из первых отечественных публикаций предложена методика анализа динамики манипулятора на подвижном основании и приведены результаты решения задачи захвата в инерциальном пространстве полезного груза с помощью свободно летающего космического манипуляционного робота (СКМР) для случаев его стабилизируемого и неустойчиво стабилизируемого корпуса [6].

При выполнении в космосе сборочной операции существует два этапа. На первом этапе решается задача сближения СКМР с зоной установки строительного элемента, завершающаяся зависанием робота в окрестности точки стыковки элемента с БКК. Граница рабочей зоны определяется с одной стороны условиями безопасности (отсутствием возможных контактов СКМР с БКК при выполнении операции установки элемента из состояния «зависания») и условиями достижимости цели (установка элемента с заданной ориентацией в требуемой точке БКК) [7, 8]. Последнее определяет содержание второго этапа сборочной операции. Первый этап сборочной операции реализуется с помощью системы управления поступательным и угловым движениями СКМР за счет реактивных сил и моментов, прикладываемых со стороны исполнительных органов к корпусу робота. Манипулятор с транспортируемым элементом на данном этапе является неподвижным, а его конфигурация по возможности должна быть максимально близка к оптимальной [7].

Перечень задач, возникающих при синтезе системы управления СКМР, можно найти в [1]. Из указанного перечня в настоящей работе рассматриваются задачи, возникающие при управлении манипулятором во время движения СКМР к рабочей зоне и внутри нее. При управлении манипулятором СКМР в его рабочей зоне в режиме свободного дрейфа робота (*free-floating mode*), когда отключена система управления угловым положением его корпуса, возникают сложности, к которым относятся сужение рабочей зоны [4, 9] и наличие динамических сингулярностей [10, 11]. Динамика и кинематика механической структуры СКМР в таком режиме существенно усложняются из-за возмущающего влияния движений манипулятора на положение корпуса [12, 13]. Поэтому в данной работе рассматривается вариант управления манипулятором на основе принципа обратной связи с использованием информации об угловом положении корпуса робота и оценок отклонения концевой точки манипулятора от точки цели [14, 15].

В предлагаемой статье предлагаются решения двух задач. Первая задача возникает при необходимости экономии рабочего тела газо-реактивных

двигателей СКМР во время движения по траектории. Для решения задачи предлагается использовать подвижность манипулятора. Вторая задача связана с обеспечением устойчивости движения манипулятора СКМР в рабочей зоне при установке транспортируемого элемента на БКК.

2. Особенности механической структуры СКМР

Механическая структура СКМР представляет собой совокупность соединенных с помощью шарниров элементов. Основной элемент — корпус, оснащенный системой управления и реактивными двигателями. К корпусу присоединяются многозвенные манипуляторы. На концевом звене каждого манипулятора жестко закрепляется схват — устройство для захвата и удержания груза во время манипуляционных операций СКМР. Данная механическая структура характеризуется большим числом степеней свободы и взаимным влиянием движений ее элементов. Корпус СКМР реагирует на динамические силы реакции, возникающие при движениях звеньев манипуляторов. При управлении конфигурацией и угловыми движениями в такой механической системе необходимо учитывать динамическую связь между корпусом и манипуляторами [15].

Для иллюстрации характерных особенностей механической структуры СКМР рассматривается вариант ее плоского движения с одним трехзвенным манипулятором [16]. В качестве обобщенных координат, определяющих положение корпуса СКМР в инерциальной системе координат (СК) CXY , оси которой связаны с БКК, приняты X_0, Y_0 — координаты центра масс корпуса, ϑ — угол поворота корпуса, которые являются элементами вектора $q_K = (X_0, Y_0, \vartheta)^T$. Вектор обобщенных координат $q_\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ межзвенных углов, определяющих конфигурацию манипулятора. Вектор $\rho_{BA} = (X_\varepsilon, Y_\varepsilon)^T$ регулируемых координат, содержащий отклонения концевой точки переносимого груза $B = (X_B, Y_B)$ от точки цели $A = (X_A, Y_A)$, определенных в инерциальной СК, $X_\varepsilon = X_A - X_B, Y_\varepsilon = Y_A - Y_B$.

Плоское движение рассматриваемого варианта механической структуры СКМР описывается следующим уравнением относительно вектора $q = (q_K, q_\alpha)^T$ [15, 16]:

$$(1) \quad A(q)\ddot{q} = M(q, u) + F(q, \dot{q}),$$

где $A(q) \in R^{6 \times 6}$ — матрица, содержащая блоки симметричных матриц массово-инерционных параметров корпуса $A_{11}(q) \in R^{3 \times 3}$ и манипулятора $A_{22}(q) \in R^{3 \times 3}$, а также коэффициентов динамического взаимодействия корпуса $A_{12}(q) \in R^{3 \times 3}$ и звеньев манипулятора $A_{21}(q) \in R^{3 \times 3}$, при этом $A_{12}(q) = A_{21}(q)$; $M(q, u) = (M_K, M_\alpha)^T$, $M_K \in R^3$ — вектор управляющих воздействий, прикладываемых к корпусу робота, $M_\alpha \in R^3$ — вектор управляющих воздействий приводов на звенья манипулятора, возникающих при подаче на входы приводов управляющих напряжений $u(t)$; $F(q, \dot{q}) = (f_K(q, \dot{q}), f_\alpha(q, \dot{q}))^T$ — вектор нелинейных функций возмущений от Кориолисовых и центробежных сил. Выражения для вычисления элементов матриц и векторов приведены в [16].

В данной работе предполагается использование в приводах звеньев манипулятора электрических двигателей постоянного тока с независимым возбуждением [16]. Динамика каждого j -го привода ($j = \overline{1, 3}$) в первом приближении, когда не учитываются постоянная времени двигателя и механические нелинейности, описывается уравнениями вида [16, 17]

$$(2) \quad J_j i_{pj} \ddot{\alpha}_j = (k_{bj} k_{aj})^{-1} u_j(t) - k_{aj}^{-1} i_{pj} \dot{\alpha}_j - M_{Rj}(t), \quad j = \overline{1, 3},$$

где $\alpha_j \in q_\alpha$, J_j — приведенный к валу двигателя момент инерции j -го привода, i_{pj} — передаточное число редуктора, M_{Rj} — момент динамической нагрузки на валу двигателя, действующего со стороны манипулятора, k_{bj}, k_{aj} — постоянные коэффициенты.

Для снижения энергетических затрат при управлении манипулятором СКМР часто используются в приводах звеньев самотормозящиеся механические передачи [15, 16]. Свойство самоторможения обеспечивается наложением импульсной связи на перемещающееся звено манипулятора, в результате чего имеем $\dot{\alpha}_j = 0$ и $u_j = 0$. Следствием самоторможения является исчезновение в (1) уравнения по координате α_j , что математически выражается в понижении (или повышении) порядка системы (1) на $2 \times r$ единицы, где r — число одновременно заторможенных (или расторможенных) звеньев манипулятора. Модель СКМР (1), (2) используется для синтеза алгоритмов управления движением робота на режимах функционирования манипулятора [15].

При синтезе алгоритмов управления угловым движением СКМР необходимо учитывать наличие свойства технической управляемости, которое является необходимым условием работоспособности робота [18]. Для СКМР свойство технической управляемости заключается в том, что угловое движение корпуса робота и движения звеньев манипулятора должны быть управляемыми. Это означает, что при подаче сигналов управления на изменение их положения эти изменения осуществлялись бы в требуемом направлении и с заданной скоростью. Анализ свойства управляемости объектов типа СКМР целесообразно проводить на основе упрощенной модели углового движения механической системы робота при следующих предположениях [18]: для каждого q_i существует M_i с ограничением $|M_i| \leq M_i^{\max} > 0$, $i = \overline{1, 6}$; желаемой реакцией на $M_i^{\max} > 0$, при $M_j = 0$, $i, j = \overline{1, 6}$, $j \neq i$, в момент времени $t = t_0$ при $q_i(t) = 0$, $\dot{q}_i(t) = 0$, $\ddot{q}_i(t) = 0$ ($t < t^*$) является $q_i(t) \geq 0$ при $t > t^*$; $\dot{q}$ достаточно малые, чтобы считать равными нулю члены полной модели движения, которые зависят от произведений скоростей $\dot{q}$; допускается линеаризация уравнений модели движения относительно положения $q = q^*$, где $q_i^* = \text{const}$, $i = \overline{1, 6}$.

Линеаризованная в положении q^* модель углового движения имеет вид

$$(3) \quad A(q^*) \Delta \ddot{q} = P(q^*) M(q),$$

где $\Delta q = q - q^*$, $A(q^*)$ — положительно определенная матрица, $P(q^*)$ — матрица связи обобщенных сил с вектором управляющих сил и моментов [18].

СКМР с моделью (3) является управляемым по Δq_i $i = \overline{1, 6}$ в положении $q = q^*$, если при нулевых начальных условиях $\Delta q_i(t) = 0$, $\Delta \dot{q}_i(t) = 0$,

$\Delta \ddot{q}_i(t) = 0 \ \forall t < t_0$ и при подаче в момент времени t_0 максимального по модулю управления $|M_i(t)| = M_i^{\max} \ \forall t \geq t_0$ возникает ускорение $\Delta \ddot{q}_i(t) \geq \eta_i \neq 0$ одного знака с $M_i(t)$, причем это происходит независимо от присутствия или отсутствия других управляющих воздействий $M_j(t)$ ($j = \overline{1,6}; j \neq i$), η_i — характерные для механической системы известные величины. В [18] доказана теорема, в соответствии с которой управляемость СКМР в окрестности точки $q = q^*$ определяется только конструктивными параметрами механической системы робота, а не вектором ограничений на управление $M^{\max}$.

3. Управление траекторным движением СКМР

Рассмотрим часть траектории движения СКМР, которая начинается с момента выключения маршевого двигателя и заканчивается в момент достижения границы рабочей области манипулятора. На этом участке траектории система управления движением СКМР должна решать задачу устранения остаточной боковой скорости и бокового отклонения робота от линии визирования, а также стабилизацию углового положения его корпуса. Если в качестве исполнительных органов используются газовые реактивные двигатели, то возникает задача сокращения расхода находящегося на борту СКМР рабочего тела двигателей. Указанную задачу при формировании управления предлагается решать методом совместного использования газовых реактивных сопел и моментных приводов манипулятора. В дальнейшем такое управление для краткости будем называть экономичным управлением.

При движении СКМР с переносимым элементом БКК по траектории его манипуляторы должны быть зафиксированы в положении, обеспечивающем совмещение центра масс механической системы робота с центром приложения управляющих сил [7]. Манипулятор с переносимым элементом является неподвижным, и задачи управления траекторным и угловым движением СКМР решаются с помощью базовых алгоритмов, формирующих управляющие воздействия M_{θ} , прикладываемые к корпусу робота со стороны газовых реактивных сопел. При экономичном управлении на рассматриваемом участке траектории предлагается обеспечить ограниченную подвижность манипулятора. В этом случае требуемая угловая стабилизация корпуса осуществляется за счет реализации обмена движениями между корпусом робота и звеньями манипулятора путем приложения управляющих моментов со стороны электромеханических приводов манипулятора, электрическая энергия которых может восстанавливаться. Наличие ограничений на допустимые перемещения звеньев манипулятора при управлении с их помощью угловым положением корпуса СКМР может привести к состоянию, при котором углы поворотов звеньев достигают предельных значений, и дальнейшее управление указанным электромеханическим способом становится невозможным. В процессе восстановления исходной конфигурации манипулятора требуемая угловая ориентация корпуса обеспечивается с помощью газовых реактивных сопел. Для краткости этот процесс восстановления назовем режимом «разгрузки» манипулятора.

При формировании алгоритмов экономичного управления необходимо учитывать следующие особенности: существуют ограниченные области изме-

нения координат звеньев манипулятора ($|\alpha_i(t)| \leq \alpha_{i\max}$, $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \dot{\alpha}_{i\max}$); отклонение звеньев манипулятора от исходного положения приводит к смещению центра масс СКМР относительно центра приложения сил и, следовательно, является параметрическим возмущением в системе ориентации робота; газовые реактивные исполнительные органы — релейные, моменты электро-механических приводов ограничены; во всей области изменения координат системы (1) выполнены условия технической управляемости по отношению к вектору q_α .

Пусть $u_\vartheta(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$ — базовые алгоритмы управления ориентацией СКМР и $u_\alpha(\alpha, t)$ — алгоритмы управления конфигурацией манипулятора. При экономичном управлении, предполагая первоначально использовать только управляющее воздействие $M_{\alpha 1}$ от привода плечевого звена манипулятора, уравнения движения СКМР представим в виде

$$(4) \quad A_1(q)\ddot{q}_1 = F_q + F_q^d,$$

где $q_1 = (\vartheta, \alpha_1, X_0, Y_0)^T$, $F_q = (0, M_{\alpha 1}, 0, F_y)^T$ — вектор используемых управлений, $F_q^d = (M_\vartheta^d, 0, 0, 0)^T$ — вектор учитываемых возмущений, $A_1(q) = [a_{ij}(\alpha_1, \lambda)]$ — симметричная матрица, λ — вектор параметров СКМР и элемента БКК.

Изменение координаты ϑ определяется решением уравнения (4) в виде

$$(5) \quad \ddot{\vartheta} = k_0(k_\alpha M_{\alpha 1} + k_d M_\vartheta^d + k_y F_y),$$

где $k_0 = (\det[A_1(q)])^{-1}$; $k_\alpha(\alpha_1, \lambda) = -D_{21}q$ — коэффициент эффективности воздействия $M_{\alpha 1}$ на ϑ , является алгебраическим дополнением элемента $a_{21}(q)$ для $\det[A_1(q)]$; $k_d(\alpha_1, \lambda) = D_{11}(q)$ — коэффициент влияния внешнего возмущения M_ϑ^d на ϑ является алгебраическим дополнением элемента $a_{11}(q)$ для $\det[A_1(q)]$; $k_y(\alpha_1, \lambda) = -D_{41}(q)$ — коэффициент влияния канала управления F_y является алгебраическим дополнением $a_{41}(q)$ для $\det[A_1(q)]$.

Управление $M_{\alpha 1}$, стабилизирующее координату ϑ , предлагается формировать в виде

$$(6) \quad M_{\alpha 1}[u_{\alpha 1}(t)] = -\tilde{k}_0 k_A(\vartheta + k_{\dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}),$$

где $k_A = (k_m k_b)^{-1}$ — статический коэффициент усиления привода; $\tilde{k}_0$ — перестраиваемый (при необходимости) параметр алгоритма управления $u_{\alpha 1}(t)$, $k_{\dot{\vartheta}}$ — постоянный коэффициент.

Если управление (6) реализуемо, то задача синтеза линейной части базового алгоритма сводится к обеспечению устойчивости и желаемого качества движения (5). Учитывая (6), перепишем (5) в виде

$$(7) \quad \ddot{\vartheta} + k_A k_{\dot{\vartheta}} \tilde{k}_0 \bar{k}_\alpha(\alpha_1, \lambda) \dot{\vartheta} + k_A \tilde{k}_0 \bar{k}_\alpha(\alpha_1, \lambda) \vartheta = \bar{M}_\Sigma^d(\alpha_1, \lambda, t),$$

где $\bar{k}_\alpha(\alpha_1, \lambda) = k_0 k_\alpha(\alpha_1, \lambda)$ — приведенный коэффициент эффективности управления $M_{\alpha 1}$, который, в соответствии с теоремой о технической управляемости и [18], удовлетворяет условию $\bar{k}_\alpha(\alpha_1, \lambda) > 0 \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in (0, \pm\pi)$; $\bar{M}_\Sigma^d(\alpha_1, \lambda, t) = \bar{k}_d(\alpha_1, \lambda) M_\vartheta^d + \bar{k}_y(\alpha_1, \lambda) F_y$ — результирующий приведенный возмущающий момент; $\bar{k}_y(\alpha_1, \lambda) = k_0 k_y(\alpha_1, \lambda)$, $\bar{k}_d(\alpha_1, \lambda) = k_0 k_d(\alpha_1, \lambda)$.

Если известны параметры λ и $\alpha_1(t)$ измеряется, то предлагается в (6) формировать алгоритм изменения $k_0(t)$ из условия постоянства соотношения

$$(8) \quad \tilde{k}_0(t)\bar{k}_\alpha(\alpha_1, \lambda) = K,$$

где K — постоянная величина, удовлетворяющая желаемому качеству движения ϑ .

При реализации (8) коэффициенты в (7) являются постоянными, что гарантирует устойчивость движения по ϑ . Достижение требуемой статической точности ориентации СКМР $|\vartheta(t)| \leq \vartheta_{\min}$, где $\vartheta_{\min}$ — заданное значение, при движении (7) с (8) обеспечивается выполнением условия $k_A \geq (K\vartheta_{\min})^{-1} \times [M_\Sigma^d(\alpha_1, \lambda, t)]_{\max}$.

Управление (5) реализуется при алгоритме изменения напряжения $u_{\alpha 1}(t)$, подаваемого на вход электропривода (2) плечевого звена манипулятора, в виде [16]

$$(9) \quad u_{\alpha 1}(t) = -\frac{\tilde{k}_0}{i_g} \left[\left(1 + \frac{k_{\dot{\vartheta}}}{k_m J_m} \right) \vartheta + (k_m J_m)^{-1} \int \vartheta dt + k_{\dot{\vartheta}} \dot{\vartheta} + \frac{k_b J_L}{\tilde{k}_0 J_m} \dot{\alpha}_1 \right],$$

где $M_L \approx -J_L \ddot{\alpha}_1$, J_L — момент инерции нагрузки, приведенный к плечевому шарниру.

Алгоритм (9) используется до момента достижения ϑ области $|\vartheta(t)| < \vartheta_{\min}$. Затем система переключается на нелинейный алгоритм, который содержит нелинейности типа зоны нечувствительности и гистерезиса, что позволяет организовать внутри указанной координатой области высокoeкономичные, односторонние автоколебания.

В общем случае остаточные ненулевые начальные условия $\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0$ и вынужденные движения, порождаемые внешними возмущениями, гасятся в соответствии с алгоритмом вида (9) изменением координат $\alpha_i(t)$. Процесс гашения завершается либо установившимися малыми колебаниями в области $|\vartheta(t)| \leq \vartheta_{\min}$, либо выходом $\alpha_i(t)$ на ограничения. В последнем случае возникает необходимость возвращения манипулятора в исходное положение (режим “разгрузки” манипулятора), чтобы иметь возможность опять использовать подвижность манипулятора для реализации принятого способа управления ориентацией СКМР. В режиме “разгрузки” манипулятора под действием собственного управления $M_\alpha(u_\alpha)$ его звенья переводятся в исходное состояние $\alpha_i(t) \rightarrow \alpha_i^*$ с одновременным удержанием ϑ в области $|\vartheta(t)| \leq \vartheta_{\min}$. Угловая стабилизация корпуса осуществляется с помощью момента $M_\vartheta(u_\vartheta) \leq M_\vartheta^{\max}$, где $M_\vartheta^{\max}$ — существующее ограничение. Задача управления роботом в таком режиме представляет собой задачу многосвязного регулирования в существенно нелинейной системе с ограничениями на управляющие воздействия.

При описании режима «разгрузки» в (4) необходимо принять

$$F_q = (M_\vartheta, M_{\alpha 1}, 0, F_y)^T.$$

Тогда поведение координаты ϑ описывается уравнением

$$(10) \quad \ddot{\vartheta} = \bar{k}_{M\vartheta}(\alpha_1, \lambda) M_\vartheta(u_\vartheta) + f_p(\alpha_1, \lambda),$$

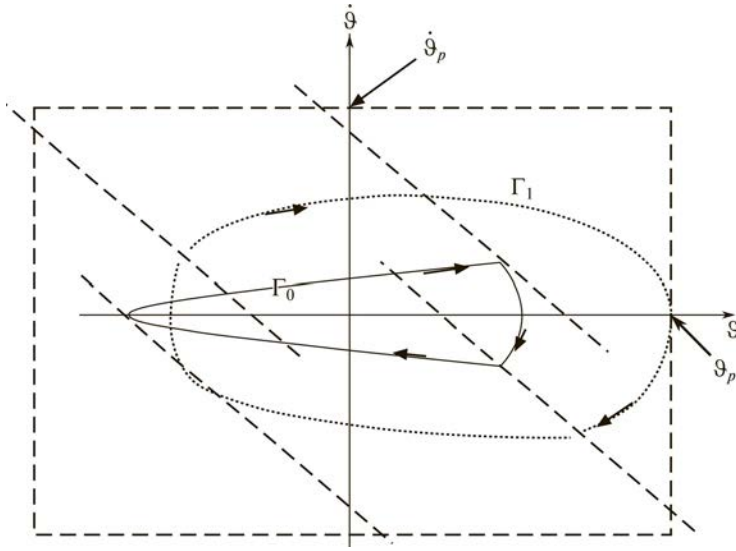


Рис. 1. Предельные циклы в режиме разгрузки манипулятора.

где $\bar{k}_{M\vartheta}(\alpha_1, \lambda)$ — коэффициент эффективности воздействия $M_{\vartheta}(u_{\vartheta})$, вычисляемый аналогично для (5); $f_p(\alpha_1, \lambda) = \bar{M}_{\Sigma}^d(\alpha_1, \lambda, t) + \bar{k}_{\alpha}(\alpha_1, \lambda)M_{\alpha 1}$ — возмущения при $|\vartheta(t)| \leq \vartheta_{\min}$.

При синтезе алгоритмов управления координатами ϑ и α необходимо учитывать противоречивость требований к работе каждой из подсистем. Минимизация времени перекладки вышедшего на ограничение звена манипулятора предполагает использование максимально достижимых (с учетом существующих ограничений) скоростей $\dot{\alpha}_{1\max}$ выходного вала привода. Однако возникающие при этом в подсистеме регулирования ϑ возмущения $f_p(\alpha_1, \lambda)$ при ограничении $M_{\vartheta}^{\max}$ могут привести к нарушению требований точности ориентации. В этом случае скорость перекладки звена манипулятора должна быть ограничена величиной, меньшей $\dot{\alpha}_{1\max}$. Для определения оптимальных значений параметров регулятора, обеспечивающих желаемую динамику режима «разгрузки» целесообразно использовать метод фазовой плоскости на основе (10).

Пусть базовый нелинейный алгоритм стабилизации углового положения СКРМ $u_{\vartheta}(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)$ формирует односторонние автоколебания, отображаемые на фазовой плоскости $(\vartheta, \dot{\vartheta})$ в виде предельного цикла Γ_0 , показанный на рис. 1. В режиме «разгрузки» манипулятора под влиянием $f_p(\alpha_1, \lambda)$ невозмущенный цикл Γ_0 трансформируется в другой устойчивый цикл Γ_1 . Цикл Γ_1 формируется таким образом, чтобы при максимально возможном значении $f_{p,\max}(\alpha_1, \lambda)$, его фазовая траектория не пересекала бы границ допустимых отклонений регулируемых координат ($|\vartheta| = \vartheta_p, |\dot{\vartheta}| = \dot{\vartheta}_p$), отмеченных на рис. 1 пунктирным прямоугольником. После завершения «разгрузки» восстанавливается исходный цикл ($\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$) и следует возврат к управлению $M_{\alpha}(u_{\alpha})$.

Одновременно с управлением ориентацией СКРМ продолжает функционировать система коррекции поперечных смещений корпуса, которая при превышении уровня отклонения $Y_0 = Y_{0\min}$ формирует управляющее воздействие F_y в (4). Поскольку при этом конфигурация механической структуры СКРМ не является сбалансированной, то в канале управления ориентацией появляется возмущающий момент $M_{F_y}^d = F_y x_c$, компенсация которого воздействием $M_\alpha(u_\alpha)$ может оказаться недостаточной. Поэтому при действии F_y в системе управления ориентацией необходимо обеспечить автоматический переход на эффективное нелинейное управление $M_\beta(u_\beta)$.

4. Управление манипулятором при установке элемента на объект

При управлении манипулятором СКРМ в режиме мягкой установки элемента на БКК в рабочей зоне движение корпуса робота при использовании самотормозящихся приводов манипулятора не вызывает изменения q_α . Управляемое движение каждого звена не должно изменять величины других межзвенных углов. Это характерное для рассматриваемого класса механических систем свойство обеспечивается, если в процессе проектирования выполнены условия технической управляемости, позволяющие не учитывать взаимовлияние шарниров и, как следствие, считать матрицу A_{22} диагональной. Движение координат механической системы СКРМ с переносимым элементом БКК в рабочей зоне при $t \geq t_0$, где t_0 — момент времени входа в рабочую зону, происходит с достаточно малыми скоростями, что позволяет использовать для синтеза алгоритмов линейные математические модели [15]. При наличии указанных особенностей движение (1) в первом приближении, пренебрегая влиянием на динамику СКРМ функций $f_K(q, \dot{q})$ и $f_\alpha(q, \dot{q})$, слагаемые которых содержат произведения малых величин $(\dot{q}_i \dot{q}_j)$, $i, j = \overline{1, 6}$, описывается в виде

$$(11) \quad A_r(q) \ddot{q} = M(q, u),$$

где матрица $A_r(q)$ содержит блоки, $A_{r,11} = A_{11}$, $A_{r,12} = A_{12}$, $A_{r,21} = 0$, $\dot{q}(t_0) = 0$.

При выборе в качестве регулируемых координат $X_\varepsilon, Y_\varepsilon$ управление манипулятором по координатам q_α является разомкнутым и существует возможность достижения области $|X_\varepsilon| \leq X_{\varepsilon, \min}$ и $|Y_\varepsilon| \leq Y_{\varepsilon, \min}$ за счет целенаправленного изменения $q_\alpha(t)$, где $X_{\varepsilon, \min}, Y_{\varepsilon, \min}$ — заданные значения. Использование только вращающихся степеней свободы механической системы СКРМ позволяет пренебречь смещением центра масс корпуса и считать q_1, q_2 постоянными. Если в режиме мягкой установки элемента формируются управления по α_1, α_2 и концевое звено манипулятора зафиксировано (α_3 — постоянная величина), то движение по X_ε и Y_ε на основе (11) описывается в виде

$$(12) \quad \begin{aligned} \ddot{X}_\varepsilon &= d_{11}(q)M_{\alpha 1} + d_{12}(q)M_{\alpha 2}, \\ \ddot{Y}_\varepsilon &= d_{21}(q)M_{\alpha 1} + d_{22}(q)M_{\alpha 2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{11}(q) &= b_{\Delta} a_{44}^{-1} [(b_m - a_{23}^2)(a_{14}a_{33} - a_{13}a_{34}) + b_3(a_{24}a_{33} - a_{23}a_{34})], \\
d_{12}(q) &= b_{\Delta} a_{55}^{-1} [(b_m - a_{23}^2)(a_{15}a_{33} - a_{13}a_{35}) + b_3(a_{25}a_{33} - a_{23}a_{35})], \\
d_{21}(q) &= b_{\Delta} a_{44}^{-1} [(b_m - a_{13}^2)(a_{24}a_{33} - a_{23}a_{34}) + b_3(a_{14}a_{33} - a_{13}a_{34})], \\
d_{22}(q) &= b_{\Delta} a_{55}^{-1} [(b_m - a_{13}^2)(a_{25}a_{33} - a_{23}a_{35}) + b_3(a_{15}a_{33} - a_{13}a_{35})], \\
b_{\Delta} &= [a_{33}m_S(b_m - a_{13}^2 - a_{23}^2)]^{-1}, \quad b_m = a_{33}m_S^2, \quad b_3 = a_{13}a_{23}, \quad m_S - \text{масса СКМР}.
\end{aligned}$$

Изменение коэффициентов $d_{ij}(q)$ $i, j = \overline{1, 2}$ обусловлено их зависимостью от углового положения корпуса СКМР через ϑ и от шарнирных углов α_1, α_2 . В процессе управления манипулятором в рабочей зоне могут возникнуть положения его звеньев, при которых коэффициенты $d_{ij}(q) < 0$, что вызовет неустойчивость по $X_{\varepsilon}, Y_{\varepsilon}$. Если доступна информация о $X_{\varepsilon}, Y_{\varepsilon}$ и $\dot{X}_{\varepsilon}, \dot{Y}_{\varepsilon}$, то устойчивое управление по $X_{\varepsilon}, Y_{\varepsilon}$ обеспечивается ПД-алгоритмами вида

$$\begin{aligned}
(13) \quad M_{\alpha 1} &= k_{0x}(k_{1x}X_{\varepsilon} + k_{2x}\dot{X}_{\varepsilon}), \\
M_{\alpha 2} &= k_{0y}(k_{1y}Y_{\varepsilon} + k_{2y}\dot{Y}_{\varepsilon}),
\end{aligned}$$

в которых коэффициенты k_{jx}, k_{jy} ($j = \overline{0, 2}$) должны выбираться с учетом выполнения требований к устойчивости нулевого решения системы (12), (13). Эти требования определяются при анализе характеристического уравнения вида

$$\sum_{j=0}^4 c_j \lambda^j = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
c_0 &= \Delta d k_{1x} k_{1y}; \quad c_1 = \Delta d (k_{1y} k_{2x} + k_{1x} k_{2y}); \\
c_2 &= \Delta d k_{2x} k_{2y} - (k_{1x} k_{0x} d_{11} + k_{2x} k_{0y} d_{22}); \\
c_3 &= -(k_{1y} k_{0x} d_{11} + k_{2y} k_{0y} d_{22}); \quad c_4 = 1; \\
\Delta d &= k_{0x} k_{0y} (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}).
\end{aligned}$$

Необходимое условие устойчивости $c_j > 0 \forall j = \overline{0, 4}$ соблюдается при $\Delta d > 0$ и $\text{sign} d_{11} \neq \text{sign} k_{0x}$, $\text{sign} d_{22} \neq \text{sign} k_{0y}$. Выполнение условия $\Delta d > 0$ не зависит от значений k_{jx}, k_{jy} , $j = \overline{0, 2}$ и определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
(14) \quad &(\text{sign} d_{11} \neq \text{sign} d_{22} \wedge \text{sign} d_{12} = \text{sign} d_{21}) \vee \\
&\vee (\text{sign} d_{11} = \text{sign} d_{22} \wedge \text{sign} d_{12} \neq \text{sign} d_{21}); \\
&(\text{sign} d_{11} = \text{sign} d_{22} \wedge \text{sign} d_{12} = \text{sign} d_{21} \wedge |d_{11} d_{22}| > |d_{12} d_{21}|) \vee \\
&\vee (\text{sign} d_{11} \neq \text{sign} d_{22} \wedge \text{sign} d_{12} \neq \text{sign} d_{21} \wedge |d_{11} d_{22}| < |d_{12} d_{21}|).
\end{aligned}$$

Если изменения $d_{ij}(q)$ не нарушают условия $\Delta d > 0$, то выполнение условий устойчивости обеспечивается изменением значений коэффициентов (13). Если при управлении манипулятором СКМР α_1 и α_2 являются измеряемыми, то $d_{ij}(q)$ могут вычисляться, что позволяет контролировать условия устойчивости и в соответствующие моменты времени перестраивать коэффициенты в (13).

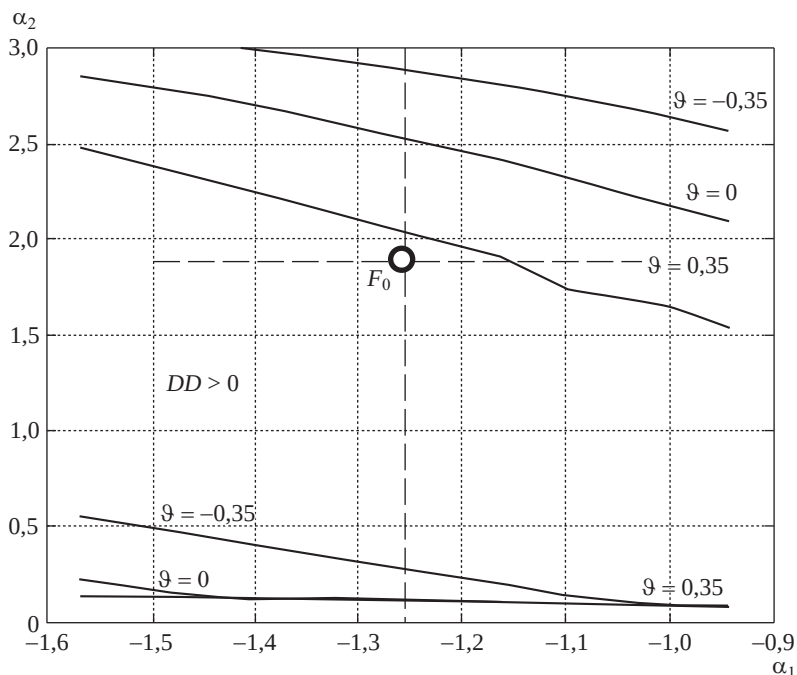


Рис. 2. Влияние угла ϑ на границы области устойчивости.

На основе (14) целесообразно сформировать область устойчивости в координатах α_1, α_2 , информация о которой позволяет выбирать начальную конфигурацию манипулятора перед установкой элемента и допустимое изменение α_1 и α_2 в процессе его установки. На топологию области устойчивости влияют значения ϑ и α_3 , которые определяют взаимное положение корпуса и устанавливаемого элемента. На рис. 2 показана, в качестве примера по данным из [15], часть области устойчивости при $\alpha_3 = -0,2\pi$ и трех начальных положениях корпуса СКМР ($\vartheta = [-0,35; 0; 0,35]$). Точкой F_0 на рис. 2 обозначено начальное положение звеньев $\alpha_1(t_0) = -1,26$; $\alpha_2(t_0) = 1,58$. Из рис. 2 видно, что увеличение положительной величины угла ϑ уменьшает область устойчивости, где $\Delta d > 0$ (на рис. 2 область устойчивости обозначена $DD > 0$), что сокращает диапазон изменения углов α_1 и α_2 при установке элемента манипулятором.

Следует отметить, что изменение угла α_3 , который определяет положение схвата, в меньшей степени влияет на изменение границ области устойчивости, чем изменение углового положения корпуса СКМР.

5. Заключение

На основе проведенного анализа особенностей механической структуры СКМР предложено решение задачи сокращения расхода находящегося на борту СКМР рабочего тела газовых реактивных двигателей при транспортировке элемента БКК при сборке ее на орбите. Решение задачи основано на

использовании подвижности манипулятора, что позволяет обеспечить стабилизацию углового положения корпуса СКМР. Формирование управления на отдельных участках траектории движения СКМР реализуется путем совместного использования двух типов исполнительных органов: газовых реактивных сопел и моментных электромеханических приводов манипулятора. Используемые в работе математические модели движения СКМР являются удобными для синтеза алгоритмов управления на основе принципа обратной связи и исследования процессов манипуляционного функционирования СКМР. Алгоритмы управления СКМР, которые удовлетворяют условиям технической управляемости, поддерживают требуемую конфигурацию механической структуры робота при транспортировке элемента БКК и его установке. При достаточно малых шарнирных скоростях манипулятора приведенные в работе алгоритмы обеспечивают в рабочей зоне мягкую установку элемента в заданную точку БКК. Предлагается предварительно определить область устойчивости в пространстве шарнирных углов манипулятора, которая позволит выбрать начальную конфигурацию механической системы робота перед манипуляционной операцией и диапазон изменения шарнирных углов при выполнении операции, обеспечивающий устойчивость движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Papadopoulos E., Aghili F., Ma O., Lampariello R.* Manipulation and capture in space: A survey // *Front. Robot. AI*. 2021. No. 8. P. 1–36.
2. *Hung J., Irwin J., Moore F.* Free-flying teleoperator for space missions // *Pros. of 6th IFAC Symposium on Control in Space*. 1976. V. 2. Moscow. Nauka. P. 173–180.
3. *Яскевич А.В.* Математическая модель космического манипулятора для полунатурной отработки операций причаливания полезного груза // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2004. № 4. С. 157–176.
4. *Dubowsky S., Papadopoulos E.* The Kinematics, Dynamics and Control of Free-Flying and Free-floating Space Robotic Systems // *IEEE Transact. Robot. Automat.* 1993. V. 9. No. 5. P. 531–543.
5. *Moosavian S., Ali A., Papadopoulos E.* Free-flying robots in space: an overview of dynamics modeling, planning and control // *Robotica*. 2007. V. 25. No. 5. P. 537–547.
6. *Popov T.P., Medvedev V.S., Yuschenko A.S.* Free-flying manipulation robot computer control // *Pros. of the 8-th IFAC Symposium on automatic control in space*. 1979. Oxford. UK. Preprints. Pergamon Press. P. 295–301.
7. *Богомолов В.П., Рутковский В.Ю., Суханов В.М.* Проектирование оптимальной механической структуры свободнолетающего космического робототехнического модуля как объекта управления. Ч. I // *АиТ*. 1998. № 5. С. 27–40.
Bogomolov V.P., Rutkovskii V.Yu., Sukhanov V.M. Design of an Optimal Mechanical Structure of a Free-flying Space Robotic Module as a Control Object. I // *Autom. Remote Control*. 1998. V. 59. No. 5. Part 1. P. 632–642.
8. *Суханов В.М., Рутковский В.Ю., Глумов В.М.* Определение рабочей зоны и требуемого начального положения свободнолетающего космического робота при захвате цели // *АиТ*. 2014. № 11. С. 150–159.
Sukhanov V.M., Rutkovskii V.Yu., Glumov V.M. Determination of Workspace and Required Initial Position of Free-Flying Space Manipulator at Target Capture // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 11. P. 953–963.

9. *Vafa Z., Dubowsky S.* On the Dynamics of Manipulators in Space Using the Virtual Manipulator Approach // Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat. 1985. P. 579–585.
10. *Yoshida K., Umetani Y.* Control of Space Free-Flying Robot // Proc. 29 IEEE Conf. Decision Control. 1990. P. 97–102.
11. *Papadopoulos E., Dubowsky S.* Dynamic Singularities in the Control of Free-floating Space Manipulators // ASME J. Dyn. Syst. Meas., Contr. 1993. V. 115. No. 1. P. 44–52.
12. *Rubus T., Seweryn K., Sasiadek J.Z.* Control system for free-floating space manipulator on nonlinear model predictive control (MMPC) // Intell Robot. Syst. 2017. No. 85. P. 491–509.
13. *Somov Y., Butyrin S., Somova T., Somov S.* Control of a free-flying robot at preparation for capturing a passive space vehicle // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 30. P. 72–76.
14. *Рутковский В.Ю., Суханов В.М., Глумов В.М.* Некоторые вопросы управления свободнолетающим космическим манипуляционным роботом // АиТ. 2013. № 11. С. 62–83.
Rutkovskii V.Yu., Sukhanov V.M., Glumov V.M. Some Issues of Controlling the Free-flying Manipulative Space Robot // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 11. P. 1820–1837.
15. *Суханов В.М., Силаев А.В., Глумов В.М.* Уравнения динамики свободнолетающего космического робота для задач управления на основе обратных связей // АиТ. 2015. № 8. С. 153–164.
Sukhanov V.M., Silaev A.V., Glumov V.M. Dynamic Equations of Free-flying Space Robot for Feedback Control Tasks // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 8. P. 1446–1454.
16. *Рутковский В.Ю., Суханов В.М., Глумов В.М.* Уравнения движения и управление свободнолетающим космическим манипуляционным роботом в режиме реконфигурации // АиТ. 2010. № 1. С. 80–98.
Rutkovskii V.Yu., Sukhanov V.M., Glumov V.M. Motion Equations and Control of the Free-flying Space Manipulator in the Reconfiguration Mode // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 1. P. 70–86.
17. *Крутько П.Д.* Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука. 1991.
18. *Глумов В.М., Земляков С.Д., Рутковский В.Ю., Суханов В.М.* Техническая управляемость автоматизированного космического модуля // АиТ. 2001. № 3. С. 31–44.
Glumov V.M., Zemlyakov S.D., Rutkovskii V.Yu., Sukhanov V.M. Technical Controllability of the Free-flying Automated Space Module // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 3. P. 370–382.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 14.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОДАВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Предложен новый подход к задаче синтеза статического регулятора по состоянию или по выходу, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной дискретной системе управления. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где одной из переменных является матрица обратной связи. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность предложенной итерационной процедуры.

Ключевые слова: линейная дискретная система, внешние возмущения, обратная связь по выходу, обратная связь по состоянию, оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023100094, EDN: YBXHZN

1. Введение

Рассмотрим линейную дискретную систему управления

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ y_k &= Cx_k, \\ z_k &= C_1x_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с начальным состоянием x_0 , состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$, регулируемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w_k| \leq 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Задача о подавлении ограниченных внешних возмущений состоит в нахождении стабилизирующей обратной связи, минимизирующей величину $\max_k |z_k|$. В настоящей работе будем искать статическую линейную обратную связь по состоянию $u_k = Kx_k$ или по выходу $u_k = Ky_k$ (если она существует).

Точное решение этой задачи затруднительно; следуя подходу, предложенному в [1–3], будем искать субоптимальное решение этой задачи в терминах инвариантных эллипсоидов. При этом исходную задачу будем рассматривать

как задачу оптимизации, где одной из переменных является матрица обратной связи, а минимизируемая функция определяет критерий качества — величину эллипсоида, содержащего регулируемый выход системы. Такой подход восходит к работам [4, 5], посвященным проблеме линейно-квадратичного регулирования.

Настоящая работа является естественным продолжением статьи [6], в которой с тех же позиций рассматривается и решается задача подавления ограниченных внешних возмущений для линейной системы управления в непрерывном времени.

Структура статьи следующая. В разделе 2 обсуждается алгоритм решения задачи анализа (нахождения минимального ограничивающего эллипсоида для замкнутой системы). В разделе 3 задача синтеза регулятора записывается как задача невыпуклой матричной оптимизации, даются формулировка и обоснование итеративного алгоритма ее решения, а раздел 4 содержит демонстрационный пример.

2. Задача анализа

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$(3) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с устойчивой (шуровской) матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, начальным состоянием x_0 , состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, выходом $z_k \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2).

Напомним, что эллипсоид вида

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется инвариантным для системы (3), если из условия $x_0 \in \mathcal{E}_x$ следует $x_k \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $k = 1, 2, \dots$. При этом, если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид с матрицей P , то выход z_k системы (3) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит так называемому ограничивающему эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l: \quad z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

а при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ будет стремиться к нему.

Задача анализа состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В рамках предлагаемого подхода будем интересоваться минимальными эллипсоидами, содержащими выход системы; в качестве критерия минимальности эллипсоида обычно принимается величина $\text{tr } CPC^T$, равная сумме квадратов его полуосей. Имеет место следующий результат.

Теорема 1 [1, 3]. Пусть матрица A шуровская, $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $\rho^2 < \alpha < 1$, удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (3) сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$$

на интервале $\rho^2 < \alpha < 1$, и если α^* — точка минимума и x_0 удовлетворяет условию $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$, то гарантируется оценка

$$|z_k| \leq \sqrt{f(\alpha^*)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В статье [7] было предложено применять метод Ньютона для решения оптимизационной задачи, сформулированной в теореме 1. А именно, зададим начальным приближением $\rho^2(A) < \alpha_0 < 1$, например $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A))/2$, и применим итерационный процесс

$$(4) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \operatorname{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right),$$

а P , Y и X — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^T = 0, \quad \frac{1}{\alpha} A^T Y A - Y + C^T C = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha} AXA^T - X + \frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T = 0.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма; ее справедливость устанавливается аналогично сходному результату в [6].

Теорема 2. В методе (4) справедливы оценки

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ — некоторая константа.

3. Задача синтеза

Вернемся к системе (1) и будем далее предполагать, что матрицы D и C_1 — квадратные невырожденные.¹ Задача состоит в нахождении статической линейной обратной связи по выходу

$$u_k = Ky_k$$

¹ Это техническое предположение безусловно можно ослабить, но цель сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

(а в случае $C = I$ — обратную связь по состоянию), которая стабилизирует замкнутую систему (1) и подавляет воздействие внешних возмущений (2), минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для регулируемого выхода z_k . В качестве критерия оптимальности примем величину

$$\text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2,$$

первая компонента которой определяет размер ограничивающего эллипсоида, а вторая представляет собой штраф, позволяющий избежать появления больших значений матрицы регулятора (коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность).

С учетом теоремы 1 исходная задача сводится к матричной оптимизационной задаче

$$\min f(K, \alpha), \quad f(K, \alpha) = \text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2,$$

при ограничении

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC)P(A + BKC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Как было показано в разделе 2, минимизацию по параметру α можно проводить достаточно эффективно (нужно лишь матрицу A заменить на $A + BKC$), поэтому займемся минимизацией функции

$$f(K) = \min_{\alpha} f(K, \alpha).$$

Сделаем следующее предположение.

Предположение. Известен стабилизирующий регулятор K_0 , т.е. такой, что матрица $A + BK_0C$ шуровская.

Отметим, что функция $f(K)$ определена и положительна на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов. Множество $\mathcal{S}$ ее определения может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими; здесь ситуация полностью аналогична непрерывному случаю (см. [6]).

Лемма 1. Функция $f(K)$ коэрцитивна на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем

$$(6) \quad f(K) \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A + BKC)} \frac{\lambda_{\min}(CC^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BKC)} \|D\|_F^2,$$

$$f(K) \geq \rho \|K\|^2.$$

Следствие 1. Множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{K \in \mathcal{S}: f(K) \leq f(K_0)\}$$

ограничено для любого регулятора $K_0 \in \mathcal{S}$.

С другой стороны, у функции $f(K)$ на множестве $\mathcal{S}_0$ существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество $\mathcal{S}_0$ не имеет общих точек с границей $\mathcal{S}$ в силу (6). Далее будет показано, что $f(K)$ дифференцируема на $\mathcal{S}_0$, следовательно, справедлив следующий результат.

Следствие 2. Существует точка минимума K_ на множестве $\mathcal{S}$, и в ней градиент обращается в нуль.*

Свойства градиента и гессиана функции $f(K, \alpha)$ устанавливаются следующими двумя леммами.

Лемма 2. Функция $f(K, \alpha)$ определена и дифференцируема на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов K и для $\rho^2(A + BKC) < \alpha < 1$. При этом

$$(7) \quad \frac{1}{2} \nabla_K f(K, \alpha) = \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T,$$

$$\nabla_\alpha f(K, \alpha) = \text{tr } Y \left(\frac{1}{(1 - \alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} (A + BKC) P (A + BKC)^T \right),$$

где матрицы P и Y — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC) P (A + BKC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

и

$$(9) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC)^T Y (A + BKC) - Y + C_1^T C_1 = 0.$$

Минимум функции $f(K, \alpha)$ достигается во внутренней точке множества $\mathcal{S} \times (\rho^2(A + BKC), 1)$ и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, \alpha) = \nabla_\alpha f(K, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на интервале $\rho^2(A + BKC) < \alpha < 1$ и достигает минимума в его внутренней точке.

Лемма 3. Функция $f(K, \alpha)$ дважды дифференцируема по K , причем действие гессиана функции на произвольную матрицу² $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$ дается выражением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \\ & = \rho \langle E, E \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle B^T Y B E C P C^T, E \rangle + \frac{2}{\alpha} \langle B^T Y (A + BKC) P' C^T, E \rangle, \end{aligned}$$

где P' — решение дискретного уравнения Ляпунова

$$(10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + BKC) P' (A + BKC)^T - P' + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC) P (B E C)^T + B E C P (A + BKC)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

² Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

Градиент функции $f(K, \alpha)$ как функция от K не является липшицевым на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что — как и в непрерывном случае — он обладает этим свойством на его подмножестве $\mathcal{S}_0$.

Полученные свойства минимизируемой функции позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость. А именно, предлагается итеративный подход к решению этой задачи, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной K и метода Ньютона по переменной α .

Приведем принципиальную схему алгоритма.

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением K_0 . Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \frac{1 + \rho^2(A + BK_0C)}{2}.$$

2. На j -й итерации заданы K_j и α_j . Вычисляем $A_j = A + BK_jC$, решаем уравнения (8), (9) и находим матрицы P , Y ; вычисляем градиент

$$H_j = \nabla_K f(K_j, \alpha_j)$$

из соотношения (7).

Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то регулятор K_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

- а. K_{j+1} — стабилизирующий регулятор: матрица $(A + BK_{j+1}C)/\sqrt{(\alpha_j)}$ шуровская;
 - б. $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau\gamma_j\|H_j\|^2$.
4. Для полученного K_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, \alpha)$ по α и находим α_{j+1} .

Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

Теорема 3. На каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений γ_j , функция $f(K_j)$ монотонно убывает и градиент стремится к нулю

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|H_j\| = 0$$

со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство полностью аналогично непрерывному случаю и использует обычную схему анализа градиентного метода для безусловной минимизации функций с липшицевым градиентом [8].

4. Пример

Рассмотрим систему вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0050 \\ 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0998 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

представляющую собой слегка видоизмененный пример 4.3.2 из монографии [3].

Положим $\rho = 0,1$ и возьмем в качестве начального некоторый стабилизирующий регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} -2,9823 \\ -3,9608 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс завершается на 25-м шаге и предоставляет регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} -0,6519 \\ -1,8166 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по регулируемому выходу системы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 19,2309 & -3,4643 \\ -3,4643 & 10,3506 \end{pmatrix}.$$

Динамика итерационного процесса показана на рис. 1.

Взяв в качестве начального приближения стабилизирующий регулятор

$$K'_0 = \begin{pmatrix} -0,3675 \\ -0,7106 \end{pmatrix},$$

на 24-м шагу получаем регулятор

$$K'_* = \begin{pmatrix} -0,6527 \\ -1,8166 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$\begin{pmatrix} 19,2293 & -3,4638 \\ -3,4638 & 10,3543 \end{pmatrix}.$$

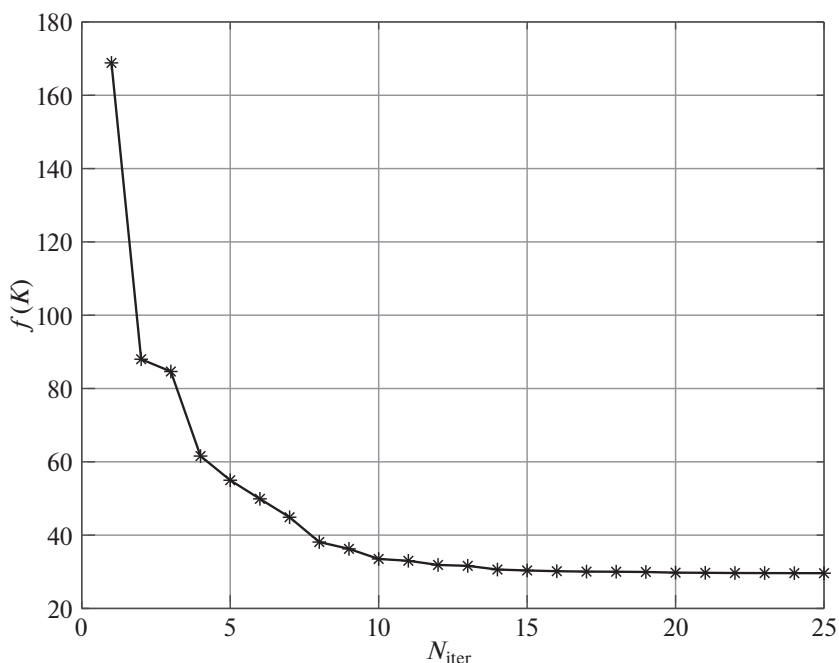


Рис. 1. Оптимизационная процедура.

Обратим внимание, что регуляторы K_* и K'_* отличаются по норме на доли процента, так же, как и найденные ограничивающие эллипсы (по критерию следа).

Для сравнения решим эту же задачу, построив обратную связь в виде динамического регулятора

$$u_k = K \hat{x}_k$$

при помощи наблюдателя

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0.$$

Следуя подходу [3], основанному на использовании техники линейных матричных неравенств, получаем матрицу обратной связи

$$K = \begin{pmatrix} -39,0055 & -46,7193 & -8,5074 & -98,0176 \end{pmatrix},$$

матрицу наблюдателя

$$L = \begin{pmatrix} 0,5655 & 0,0759 \\ -6,7183 & 1,8722 \\ -2,2061 & 1,0573 \\ -2,8715 & 0,7224 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\begin{pmatrix} 32,2165 & -14,9238 \\ -14,9238 & 36,3654 \end{pmatrix}$$

эллипса, содержащего регулируемый выход.

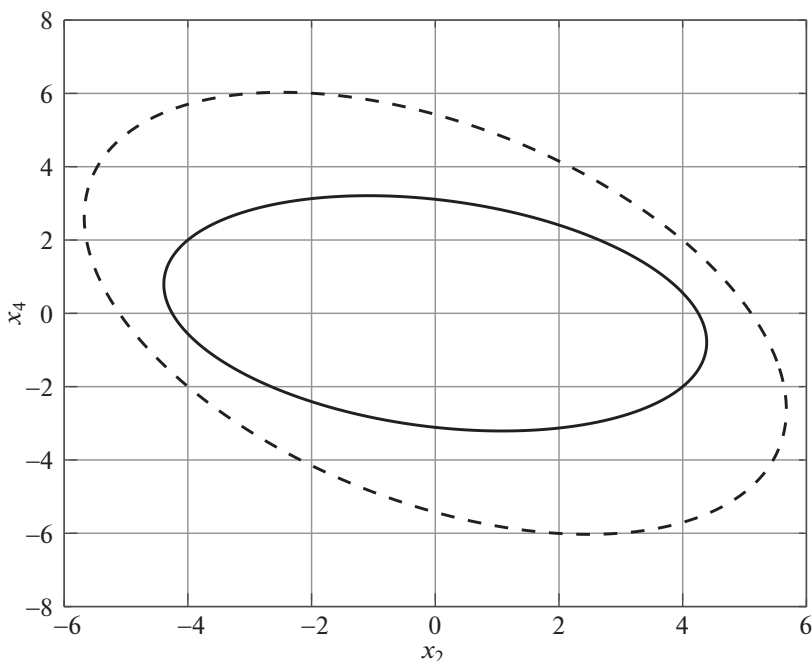


Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

Небольшое техническое различие между постановками этих задач состоит в том, что в последнем случае вместо регуляризующей добавки $\rho \|K\|_F^2$ в минимизируемой функции с теми же целями в регулируемый выход системы вводится дополнительный член с управлением: $z_k = C_1 x_k + B_1 u_k$.

На рис. 2 сплошной линией показан ограничивающий эллипс, найденный в соответствии с предлагаемой итерационной процедурой, а пунктиром — эллипс, предоставляемый динамическим регулятором. Довольно большая разница в размерах эллипсов объясняется тем, что при построении динамической обратной связи приходится производить ряд закруглений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства, что и приводит к излишнему консерватизму.

5. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной дискретной системе. Он основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица обратной связи. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность предложенной процедуры.

В работе рассмотрена проблема подавления внешних возмущений при достаточно жестких ограничениях: в частности, предполагается, что размерность возмущений и регулируемых выходов совпадает с числом состояний.

Однако метод работает и достаточно эффективен и при отсутствии таких ограничений; его обоснование представляет собой важную задачу.

Поскольку область определения $f(K)$ может быть даже несвязной, трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму. Однако для задачи управления по состоянию, как и в непрерывном случае, по-видимому, можно ожидать, что минимизируемая функция удовлетворяет *условию градиентного доминирования* и ожидать глобальную сходимость к единственной точке минимума.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Рассмотрим последовательность допустимых регуляторов $\{K_j\} \in \mathcal{S}$ такую, что $K_j \rightarrow K \in \partial\mathcal{S}$, т.е. $\rho(A + BKC) = 1$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\rho(A + BK_jC) - \rho(A + BKC)| = 1 - \rho(A - BK_jC) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения (5), ассоциированного с регулятором K_j :

$$\frac{1}{\alpha_j}(A + BK_jC)P_j(A + BK_jC)^T - P_j + \frac{1}{1 - \alpha_j}DD^T = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j}(A + BK_jC)^TY_j(A + BK_jC) - Y_j + C_1C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом [6, леммы П.1, П.2] и [7, лемма П.1.2] имеем:

$$\begin{aligned} f(L_j) &= \text{tr } C_1P_jC_1^T + \rho\|K_j\|_F^2 \geq \text{tr } P_jC_1C_1^T = \text{tr} \left(Y_j \frac{1}{1 - \alpha_j} DD^T \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D\|_F^2 \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{1 - \rho^2(A + BK_jC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \rho(A + BK_jC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку $\rho^2(A + BK_jC) < \alpha_j < 1$.

С другой стороны,

$$f(K_j) = \operatorname{tr} C_1 P_j C_1^T + \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Дифференцирование по α производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 2, с заменой A на $A + BKC$.

Придадим в уравнении (5) величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + B(K + \Delta K)C)(P + \Delta P)(A + B(K + \Delta K)C)^T - \\ & - (P + \Delta P) + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)P(A + BKC)^T + B\Delta KCP(A + BKC)^T + \right. \\ & \left. + (A + BKC)P(B\Delta KC)^T + (A + BKC)\Delta P(A + BKC)^T \right) - \\ & - (P + \Delta P) + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (5) из этого уравнения имеем

$$\begin{aligned} \text{(П.1)} \quad & \frac{1}{\alpha} (A + BKC)\Delta P(A + BKC)^T - \Delta P + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)P(B\Delta KC)^T + B\Delta KCP(A + BKC)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала $f(K)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta f(K) &= f(K) - f(K + \Delta K) = \\ &= \operatorname{tr} C_1 (P + \Delta P) C_1^T + \rho \|K + \Delta K\|_F^2 - (\operatorname{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2) = \\ &= \operatorname{tr} C_1 \Delta P C_1^T + \rho \operatorname{tr} K^T \Delta K + \rho \operatorname{tr} (\Delta K)^T K = \operatorname{tr} \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \operatorname{tr} K^T \Delta K. \end{aligned}$$

По лемме [6, лемма П.1] из двойственных уравнений (П.1) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(K) &= 2 \operatorname{tr} Y \frac{1}{\alpha} B \Delta K C P (A + BKC)^T + 2\rho \operatorname{tr} K^T \Delta K = \\ &= 2 \operatorname{tr} \left(\rho K^T + \frac{1}{\alpha} C P (A + BKC)^T Y B \right) \Delta K = \\ &= 2 \left\langle \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T, \Delta K \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (7). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Вычислим величину

$$\nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \langle \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E], E \rangle,$$

взяв производную от $\nabla_K f(K, \alpha)[E] = \langle \nabla_K f(K, \alpha), E \rangle$ по направлению $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$.

Линеаризуя соответствующие величины, вычислим приращение функционала $\nabla_K f(K, \alpha)[E]$ по направлению E :

$$\begin{aligned} \Delta \nabla_K f(K, \alpha)[E] &= \\ &= 2 \left(\rho(K + \delta E) + \frac{1}{\alpha} B^T(Y + \Delta Y)(A + B(K + \delta E)C)(P + \Delta P)C^T \right) - \\ &\quad - 2 \left(\rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y(A + BKC)PC^T \right) = \\ &= 2\delta \left(\rho E + \frac{1}{\alpha} B^T(YBEC P + Y'(K)[E](A + BKC)P + \right. \\ &\quad \left. + Y(A + BKC)P'(K)[E])C^T \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(K + \delta E) - P(K) = \delta P'(K)[E], \\ \Delta Y &= Y(K + \delta E) - Y(K) = \delta Y'(K)[E]. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначая $P' = P'(K)[E]$ и $Y' = Y'(K)[E]$, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \\ &= \left\langle \rho E + \frac{1}{\alpha} B^T(YBEC P + Y'(A + BKC)P + Y(A + BKC)P')C^T, E \right\rangle. \end{aligned}$$

Далее, $P = P(K)$ есть решение дискретного уравнения Ляпунова (5); запишем его в приращениях по направлению E :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} (A + B(K + \delta E)C)(P + \delta P')(A + B(K + \delta E)C)^T - \\ &\quad - (P + \delta P') + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)P(A + BKC)^T + (A + BKC)\delta P'(A + BKC)^T + \right. \\ &\quad \left. + (A + BKC)P(B\delta EC)^T + B\delta EC P(A + BKC)^T \right) - \\ &\quad - (P + \delta P') + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом (5) приходим к уравнению (10).

Далее, $Y = Y(K)$ есть решение дискретного уравнения Ляпунова (9); запишем его в приращениях по направлению E :

$$\frac{1}{\alpha}(A + B(K + \delta E)C)^T(Y + \delta Y')(A + B(K + \delta E)C) - (Y + \delta Y') + C_1^T C_1 = 0$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)^T Y (A + BKC) + (A + BKC)^T \delta Y' (A + BKC) + \right. \\ & \left. + (A + BKC)^T Y B \delta EC + (B \delta EC)^T Y (A + BKC) \right) - (Y + \delta Y') + C_1^T C_1 = 0. \end{aligned}$$

С учетом (9) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha}(A + BKC)^T Y' (A + BKC) - Y' + \\ (П.2) \quad & + \frac{1}{\alpha} \left((A + BKC)^T Y B E C + (B E C)^T Y (A + BKC) \right) = 0. \end{aligned}$$

Из (10) и (П.2) имеем соотношение

$$\text{tr } P'(A + BKC)^T Y B E C = \text{tr } Y' B E C P (A + BKC)^T,$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha) [E, E] &= \rho \langle E, E \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle B^T Y B E C P C^T, E \rangle + \\ &+ \frac{2}{\alpha} \langle B^T Y (A + BKC) P' C^T, E \rangle. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
4. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
5. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.

6. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ*. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
7. Хлебников М.В. Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // *АиТ*. 2023. № 4. С. 64–95.
Khlebnikov M.V. A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
8. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 24.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. А.М. ШЕВЧЕНКО, канд. техн. наук (shev-chik@yandex.ru),
Б.В. ПАВЛОВ, д-р техн. наук (pavlov@ipu.ru),
Г.Н. НАЧИНКИНА (nach_gala@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИНФОРМАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА ЭКИПАЖА ВОЗДУШНОГО СУДНА НА ВЗЛЕТНО-ПОСАДОЧНЫХ РЕЖИМАХ

С целью снижения стрессовых нагрузок на экипаж разработаны методы оценивания текущего состояния и прогнозирования критических событий. Методы основаны на энергетическом подходе к управлению полетом. Получены алгоритмы прогнозирования возможности безопасного взлета при наличии высотных препятствий на траектории. Введены алгоритмы коррекции прогноза. На режимах посадки или экстренного торможения на взлете найдены алгоритмы вычисления длины тормозного пути в зависимости от состояния взлетно-посадочной полосы. Предложены способы коррекции результатов прогнозирования, учитывающие последовательность и время работы всех средств торможения. Выполнены модельные испытания алгоритмов во всей области эксплуатационных условий.

Ключевые слова: взлет, посадка, методы прогнозирования, информационная поддержка, энергетический подход.

DOI: 10.31857/S0005231023100100, EDN: YCCEMI

1. Введение

Вопросы организации пассажирских перевозок в последнее время становятся все более острыми и актуальными. Основными направлениями совершенствования перевозок являются интенсификация трафика и расширение уровня разрешенных погодных условий для полетов воздушных судов (ВС). Поэтому безопасность авиационной техники выдвигается на первый план.

Технический и коммуникационный прогресс во всех сферах деятельности человека имеет тенденцию к ускорению. Проявления этого прогресса наблюдаются как в увеличении трафика перевозок, так и в расширении пределов допустимых уровней атмосферных или климатических условий.

По статистическим данным ФГБУ «Авиаметтелеком Росгидромета» [1] за первые три месяца 2023 г. имели место 9 авиационных происшествий (АП), в том числе

- катастроф – 3, в воздушном пространстве (ВП) класса «G» – 3 всего погибло – 5;
- аварий – 1, в том числе в ВП класса «G» – 1;
- авиационных инцидентов всего – 2 (посадка ВС ниже эксплуатационного минимума – 1, поражение ВС атмосферным электричеством – 1);
- производственных происшествий всего – 2 (чрезвычайные происшествия);

— аварийных ситуаций (АС) без расследования всего – 1 (поражение ВС атмосферным электричеством).

Фирма Boeing в статистических исследованиях АП на пассажирских рейсах во всей мировой авиации показала, что более половины всех аварий происходит на этапах взлета и посадки [2]. Управление полетом на этих этапах осуществляется при непосредственном участии пилота, который находится в сильном психологическом напряжении, и поэтому «человеческий фактор» становится решающим. Статистика АП по материалам последних зарубежных и отечественных исследований [3–5] показывает, что доля АП, обусловленных участием человека в процессе выполнения полетного задания, варьируется в зависимости от методов оценки от 50 до 70%.

Одним из направлений повышения безопасности является оборудование самолетов бортовыми системами, обеспечивающими приборный контроль критических координат движения на этапах пробеге после посадки по взлетно-посадочной полосе (ВПП), а также на этапах разбега на взлете. Стали необходимыми информационная поддержка экипажа и создание дружественной среды взаимодействия пилота с оборудованием кабины. Для этого в [6–8] были разработаны методы прогнозирования и новые алгоритмы расчета перемещения ВС на наземных участках траектории.

В частности, было принято решение включить в состав бортового оборудования информационно-измерительную систему (ИИС) контроля разбега [6], осуществляющую наблюдение одновременно продольного ускорения, скорости и дальности до достижения заданной скорости. Прогноз дальности до контрольной точки принятия решения помогает пилоту принять своевременное решение. Но если прогнозная дальность отличается от нормативной на недопустимую величину, ИИС формирует сигнал оповещения экипажа и командный сигнал запрещения взлета. В [7, 8] разработаны варианты выполнения безопасного прогнозного взлета и экстренного торможения в неблагоприятных климатических условиях и географических координатах. Концептуальной базой разработок принят энергетический подход к управлению пространственным движением летательного аппарата (ЛА), впервые изложенный в [9].

В настоящей работе получили дальнейшее развитие методы оценки ситуации и прогноза движения ВС по ВПП как на режимах торможения после посадки или прерванного взлета, так и на этапе разбега перед взлетом, а также разработаны методы повышения ситуационной осведомленности для исключения стрессовых нагрузок и снижения рисков ошибочных действий экипажа ВС.

2. Уравнение баланса энергий движения ЛА

Исторически сложившимися основными управляемыми координатами самолета являются высота, скорость и направление полета. Они являются естественными для управления полетом как в режиме визуальной ориентации, так и в полете по приборам. Теория и практика автоматического управления развивались в том же направлении. И в авиации утвердилась концеп-

ция управления полетом в продольном канале воздушного судна посредством двух контуров — траекторного и скоростного. В системах автоматического управления полетом функции регуляторов выполняют независимые устройства — автомат тяги и автопилот. В задачах синтеза регуляторов классическими методами не учитывается нелинейная взаимосвязь двух основных переменных (скорости и высоты полета), обеспечиваемая фундаментальным законом сохранения энергии тела, движущегося в потенциальном поле сил.

В отличие от традиционного описания пространственного движения ЛА в форме уравнений Коши в [10] предложена концепция управления, в которой управляемой величиной является полная энергия движения E :

$$E = mgh + \frac{mV^2}{2},$$

где m — масса ЛА, h — высота полета, V — скорость в инерциальной системе координат (СК).

В дальнейшем будем рассматривать движение в терминах нормированной по весу удельной энергии движения H_E , которая называется также «псевдо-энергией» или энергетической высотой:

$$H_E = \frac{E}{mg} = h + \frac{V^2}{2g}.$$

Из совместного решения динамических уравнений переносного движения в возмущенной атмосфере и уравнения полной энергии объекта образуется **уравнение баланса энергий**, которое имеет вид

$$\Delta H_E = \Delta H_E^{db} + \Delta H_E^D + \Delta H_E^{shass} + \Delta H_E^w.$$

Это уравнение описывает количественные соотношения между источником энергии и всеми ее потребителями в системе объектов «летательный аппарат — силовая установка — внешняя среда». Уравнение записано в форме приращений и содержит члены: ΔH_E — приращение энергетической высоты ЛА, ΔH_E^{db} — удельная работа двигателя, ΔH_E^D — затраты энергии на преодоление сопротивления аэродинамических сил, ΔH_E^{shass} — затраты энергии на преодоление сопротивления шасси, ΔH_E^w — работа ветра. Для каждого члена в [8, 9] найдены выражения: $\Delta H_E = \int_{t_1}^{t_2} V_B(\theta + \frac{\dot{V}_B}{g})dt$ где V_B — воздушная скорость, θ — угол наклона траектории в инерциальной СК; $\Delta H_E^{dv} = \int_{t_1}^{t_2} V_B P_H \cos(\alpha_B + \phi_{dv})dt$, где $P_H = \frac{P}{mg}$ — нормированная сила тяги, α_B — угол атаки, ϕ_{dv} — угол установки двигателя; $\Delta H_E^D = \int_{t_1}^{t_2} V_B D_H dt$, где $D_H = \frac{D}{mg}$ — нормированное лобовое сопротивление; $\Delta H_E^w = \int_{t_1}^{t_2} V_B f_w dt$ множитель $f_w \approx \frac{\dot{w}_x}{g} - \frac{\dot{w}_y}{V_B}$, называется фактором ветра или индексом опасности, w_x и w_y — проекции скорости ветра на оси инерциальной СК; $\Delta H_E^{shass} = \int_{t_1}^{t_2} V k_{torm} f_w dt$, где k_{torm} — обобщенный нормированный коэффициент торможения, равный отношению суммарной силы сопротивления со стороны шасси к весу самолета.

3. Базовые алгоритмы энергетической системы управления

Энергетическая высота H_E имеет две компоненты, одна из которых характеризует потенциальную энергию, а другая — кинетическую. При движении в пространстве изменение каждой из компонент не является независимым, а подчинено закону сохранения полной энергии. Поэтому задача синтеза алгоритмов управления полетом ставится в естественной форме как задача многокритериального управления. Первым критерием является минимизация отклонения энергетической высоты $\Delta H \rightarrow \min$, вторым — рассогласование между ее составляющими, кинетической и потенциальной:

$$\Delta H_E^{kin} - \Delta H_E^{pot} \rightarrow \min.$$

Единственной управляющей переменной в энергетической системе управления (ЭнСУ), влияющей на полную энергию ЛА, является тяга P , а отклонение руля высоты δ_B вызывает перераспределение потенциальной и кинетической составляющих.

Уравнение сил в проекциях на оси воздушной СК имеет вид

$$m\dot{V}_B = P \cos(\alpha_B + \phi_{dv}) - D - mg \sin \theta_B - m(\dot{W}_{xg} \cos \theta_B + \dot{W}_{yg} \sin \theta_B),$$

где V_B — воздушная скорость, α_B — угол атаки в воздушной СК, D — лобовое сопротивление, θ_B — угол наклона траектории в воздушной СК, W_{xg}, W_{yg} — проекции скорости ветра на оси земной СК. Разрешив это уравнение относительно P в предположении малости углов и переходя к нормированным переменным, получим

$$P_H = \theta + \frac{\dot{V}_B}{g} + f_w + D_H.$$

В режиме установившегося полета при отсутствии ветра упрощенный закон управления тягой двигателя в ЭнСУ в приращениях относительно заданных значений получен в виде

$$\Delta P_H^{EnSU} = \Delta \theta + \frac{\Delta \dot{V}_B}{g}.$$

Для минимизации рассогласования между потенциальной и кинетической составляющими используется управление рулем высоты, что не влияет на выполнение первого критерия:

$$\Delta \delta_H^{EnSU} = \Delta \theta - \frac{\Delta \dot{V}_B}{g}.$$

Для обеспечения астатизма по управляемым координатам к пропорциональным членам добавляются интегральные.

Управление полетом с ЭнСУ естественным образом учитывает взаимное влияние между скоростным и траекторным каналами и не требует введения корректирующих цепей для учета этих связей.

4. Энергетический метод прогнозирования взлета и безопасного пролета над препятствием

Целью пилотирования на этапе взлета является пролет над верхней точкой высотного препятствия со скоростью не ниже скорости устойчивого горизонтального полета. В осложненных условиях пилоту требуется априори оценить способность самолета осуществить разбег до взлетной скорости в пределах ВПП и набрать достаточную высоту для пролета над высотными препятствиями по курсу взлета. Схема взлета показана на рис. 1. На рисунке обозначено: $x(t)$ – текущая координата самолета; H_{prep} и L_{prep} – высота препятствия и дальность до него от обреза ВПП; V_2 – минимальная скорость устойчивого горизонтального полета; S – дистанция накопления энергии; L_{VPP} – длина взлетно-посадочной полосы; D_{TBV} – дальность до точки возможности взлета (ТВВ), D_{TPR} – дальность до точки принятия решения (ТПР); x_{TPR} – координата точки принятия решения; L_{res} – резерв разбега от ТПР до обреза ВПП.

Согласно Руководству по летной эксплуатации (РЛЭ) взлет разрешается при последовательном достижении регламентной минимальной скорости горизонтального полета V_1 и скорости подъема носового колеса V_r безотносительно к положению самолета на ВПП. Однако указанная процедура взлета не гарантирует безопасного пролета над препятствием, так как скорость V_r может быть достигнута в точке, расположенной в недопустимой близости к обрезу ВПП или за его пределом.

Найдем способ информирования пилота о возможности безопасного взлета с опережением, используя прогнозирование энергетического состояния самолета, соответствующего требуемым обобщенным координатам в точке пролета.

Для безопасного пролета над препятствием самолет должен иметь скорость не менее скорости устойчивого горизонтального полета V_2 для данного самолета. Тогда полная энергия самолета в момент преодоления препятствия $E_{H_{prep}}$ должна содержать необходимый минимум кинетической составляющей и запас потенциальной составляющей, которая и сообщает ВС

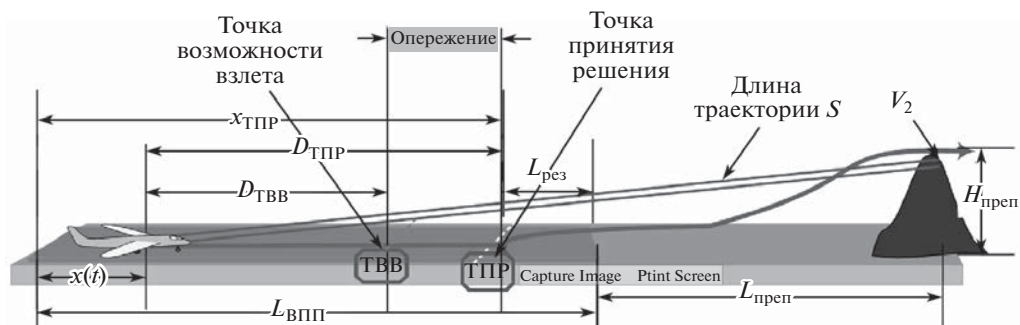


Рис. 1. Координаты характерных точек на траектории взлета.

необходимую высоту H_{prep} пролета над препятствием:

$$(1) \quad E_{H_{prep}} = m \frac{V_2^2}{2} + mgH_{prep}.$$

Величина полной накопленной энергии ЛА складывается из текущих кинетической и потенциальной составляющих и работы всех внешних сил F_i на траектории длиной S . Тогда спрогнозированная накопленная энергия равна

$$(2) \quad E(t)_{prog} = m \frac{V(t)^2}{2} + mgh(t) + S \sum_i F_i(t),$$

где $\sum_i F_i(t)$ – равнодействующая всех внешних сил: тяги двигателя, аэродинамического сопротивления, силы ветра и силы торможения шасси. Уравнение (2) в явном виде связывает энергетическое состояние объекта управления и длину траектории для достижения этого состояния.

Величина результирующей силы естественным образом вычисляется через продольную перегрузку:

$$(3) \quad \sum_i F_i(t) = mgn_x(t).$$

Из условий равенства необходимой (1) и прогнозной (2) энергий с учетом измерений всех сил (3) в процессе разбега находим длину впередилежащего участка траектории до ТПР, необходимого для накопления недостающей полной энергии:

$$D_{TPR} = \frac{(g(H_{prep} - h(t)) + 0,5(V_2^2 - V(t)^2))}{gn_x(t)} - L_{prep}.$$

Заметим, что это выражение инвариантно относительно массы. Точка траектории, где прогнозируемая длина этого участка обнуляется, и является ТПР о безопасном взлете: $X_{TPR} = x(t)|_{D=0}$. Координата этой точки вычисляется просто:

$$X_{TPR}(t) = x(t) + D_{TPR}(t).$$

Метод прогнозирования полной энергии указывает на возможность взлета не в момент достижения скорости принятия решения, а раньше и в координатах дальности, привязанных к ВПП.

Метод прогнозирования на базе энергетического подхода позволил получить прогнозную оценку еще одной характерной точки на траектории разбега. Для каждого типа ВС известна минимальная скорость на разбеге V_r , при которой разрешен подъем передней стойки шасси. В нештатных ситуациях пилот должен оценивать не только возможность продолжения разбега, но и положение самолета на полосе, в котором можно начинать подъем передней стойки. Длина дистанции от текущего положения самолета до достижения скорости подъема вычисляется по формуле

$$D_{V_r}(t) = \frac{V_r^2 - V(t)^2}{2gn(t)}.$$

При достижении нулевой величины этой прогнозной дальности возникает возможность подъема передней стойки шасси для разворота самолета на

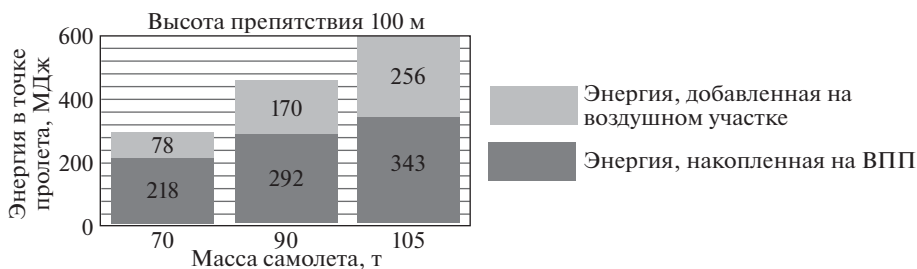


Рис. 2. Накопление энергий на наземном и воздушном сегментах траектории.

взлетный угол атаки. В процессе разбега предложено выдавать сообщение пилоту на дисплее о дальности до точки подъема передней опоры шасси. Инструментальная оценка этой дальности в отличие от интуитивной улучшает ситуативную осведомленность пилота и снижает предпосылки для ошибочных действий. В процессе разбега предлагается выдавать пилоту на приборной панели или на дисплее сообщение о дальности до точки подъема передней стойки.

Для повышения ситуативной осведомленности и снижения психологической напряженности служит также прогноз резерва дальности до обреза ВПП в ТПР:

$$L_{res}(t) = L_{VPP} - x(t) - D_{TPR}(t).$$

Весьма полезной особенностью энергетического метода прогнозирования является учет в текущем прогнозе полной энергии, приобретаемой самолетом на впередилежащем воздушном сегменте за пределами наземного участка, что и позволяет вычислять прогнозные значения с опережением относительно текущих событий. Соотношение энергий на наземном и воздушном сегментах для самолетов с тремя взлетными массами представлено на рис. 2. Итак, энергетический метод прогнозирования дает возможность рассчитать дальности до всех регламентных событий на траектории осложненного взлета с опережением. Информация о наступлении этих событий может быть представлена пилоту на кабинном индикаторе в текстовой, звуковой или графической формах. Осведомленность пилота о текущей и прогнозируемой ситуации снижает психологические нагрузки и уменьшает вероятность ошибочных или несвоевременных реакций пилота.

5. Моделирование взлета при наличии препятствий

Апробация метода прогнозирования параметров полета в точке пролета над препятствием была проведена на компьютерном стенде. В состав стенда входила полная сертифицированная модель самолета ТУ-204, включая модель двигателя и модель шасси.

Пульт оператора позволял устанавливать массу и центровку самолета, климатические условия, высотность аэродрома и составлять сценарий взлета в соответствии с действующими РЛЭ. Управление на разбеге и взлете в этом варианте стенда осуществлялось автоматической ЭнСУ.

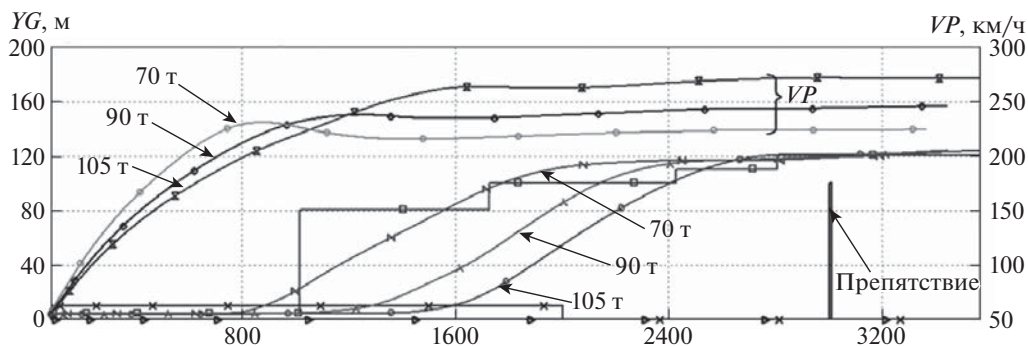


Рис. 3. Переходные процессы с энергетической системой управления.

Энергетическая система экономно и рационально расходует ресурсы органов управления — сектора газа и ручки высотного канала — при выполнении пространственных маневров. Поэтому сценарий взлета содержал только задания на требуемые значения по скорости и высоте.

На рис. 3 показаны переходные процессы по высоте YG и скорости VP на взлете при наличии препятствия высотой 100 м на дальности 1000 м от торца ВПП для самолета с тремя различными взлетными массами.

Целью моделирования было сравнение положения прогнозных точек принятия решения на взлет с рекомендациями РЛЭ для самолета с разной массой (от минимальной до максимальной) и расположением препятствий высотой от 50 до 150 м на удалении от обреза ВПП от 500 до 3000 м. В процессе взлета фиксировалось положение самолета на ВПП (координата X_{TPR}), в котором текущее энергетическое состояние с учетом прогноза движения было достаточным для безопасного взлета.

В табл. 1 приведены координаты точек принятия решения, рассчитанные по прогнозу $X_{V_1}^{progn}$, и координаты точек, в которых фактически достигается регламентная скорость V_1 принятия решения на взлет $X_{V_1}^{fact}$ для самолета с взлетной массой 70, 90 и 105 т, а также координаты X_{V_r} точек достижения скорости подъема носовой опоры.

Сравнение координат показывает, что прогноз достижимости пролета над препятствием, а также прогноз скорости подъема носового колеса осуществляется намного раньше, чем самолет приобретает скорости принятия решения V_1 и V_r , предписываемые РЛЭ.

Для стендовой отработки режимов взлета при информационной поддержке пилота был реализован прототип индикатора движения самолета в реаль-

Таблица 1. Сравнение прогнозных и реальных координат

Масса, т	V_1 , км/ч	$X_{V_1}^{fact}$, м	$X_{V_1}^{progn}$, м	V_r , км/ч	X_{V_r} , м
70	204	515	153	210	547
90	220	764	508	228	825
106	238	1095	837	245	1203

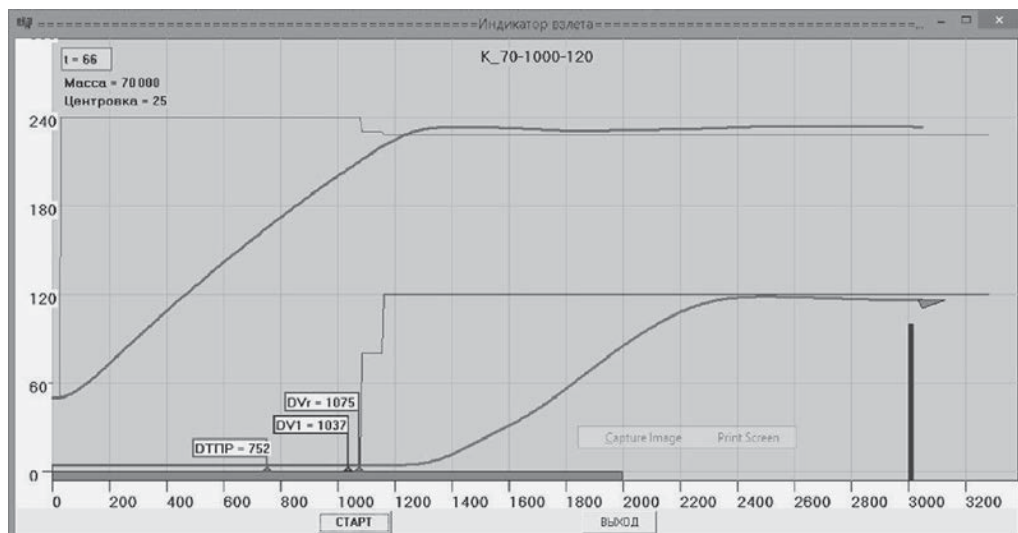


Рис. 4. Окно прототипа индикатора взлета в кабине пилота.

ном времени по ВПП и на воздушном участке. Окно индикатора на момент пролета над препятствием показано на рис. 4.

В окне индикатора демонстрируются истории заданных и реальных значений основных параметров полета — высоты и скорости. На высотной траектории изображен символ самолета в его текущем положении. Условно изображены ВПП и препятствие. На прототипе индикатора в реальном времени последовательно возникают прогнозные отметки дальностей до точки возможности принятия решения на взлет (D_{TPR}), до точки достижения регламентной скорости принятия решения (DV_1) и до точки отрыва носового колеса (DV_r) с указанием их численных значений.

6. Метод прогнозирования дистанции безопасного торможения

Схема посадки показана на рис. 5, где обозначено: $x(t)$ — текущее положение самолета на ВПП, $D_{\text{торм}}$ — длина тормозного пути, $X_{\text{торм}}$ — координата конечной точки, $L_{\text{рез}}$ — резерв пробега до обреза ВПП.

В пределах наземного участка траектории, на этапах пробежки после приземления или перед прерванным взлетом, могут возникать ситуации, когда

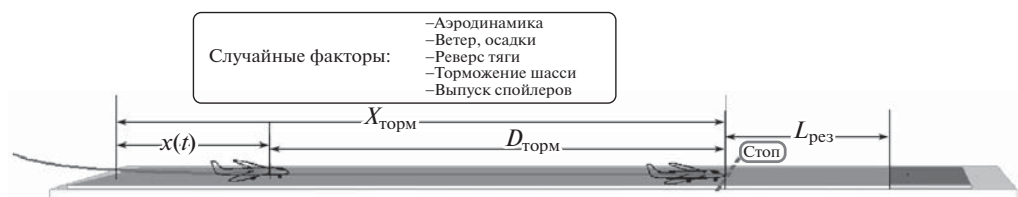


Рис. 5. Схема процесса торможения.

существует опасность выкатывания за пределы ВПП. В условиях дефицита времени необходимо оценить возможность или экстренного торможения и останова в пределах ВПП, или ухода на второй круг. Длину тормозного пути определим как расстояние, на котором скорость движения будет погашена от текущей до некоторой малой величины ϵ или скорости руления.

При выбранном критерии останова $V(t) \leq \epsilon$ прогнозная длина тормозного пути будет

$$(4) \quad D_{torm} = \frac{0,5(V^2(t) - \epsilon^2)}{gn_x(t)}.$$

По вычисленной оценке предельной дальности останова самолета в поле зрения пилота может быть представлен резерв дистанции безопасного торможения:

$$L_{res} = L_{VPP} - x(t) - D_{torm}.$$

Такое сообщение будет помогать пилоту принять решение об аварийном торможении, а в случае его невозможности — об уходе на второй круг.

В процессе торможения все силы и условия меняются, и поэтому рассчитываемые априори оценки движения самолета по ВПП не совпадают с реальными и всегда содержат погрешность. Более того, прогноз по текущей ситуации всегда оказывается оптимистичным, так как основные силы торможения (реверсная тяга и аэродинамическое сопротивление) уменьшаются по мере снижения скорости движения.

Для повышения достоверности прогноза предлагается коррекция результатов прогнозирования, найденных по формуле (4), путем введения коэффициента коррекции Q_{cor} и вычисления скорректированной длины тормозного пути:

$$(5) \quad D_{tormcor} = Q_{cor} D_{torm}.$$

Поскольку наибольшие погрешности прогноза возникают на участках с максимальным реверсом и с выпущенными интерцепторами, то коэффициенты коррекции выбираются отдельно для каждой конфигурации средств торможения. Эти участки всегда идентифицируются, и переключение вида коррекции не вызывает затруднений.

В начале тормозного пути (на реверсном участке) наибольшее влияние на ошибки прогнозирования имеют коэффициент сцепления k_{sc} , который и сообщается на борт для расчета посадки, и скорость качения V , ограниченная скоростью реверса $V \geq V_{rev}$.

Коэффициент коррекции на участке реверса Q_{rev} в явном виде учитывал именно эти факторы:

$$Q_{rev} = k_{rev}(k_{sc})k_{rev}(V).$$

Для $k_{rev}(k_{sc})$ были найдены варианты аналитической аппроксимации в виде полиномов второй, третьей и четвертой степеней. Вариант полинома третьей степени имеет вид

$$k_{rev}(k_{sc}) = 16,14(k_{sc})^3 - 22,55(k_{sc})^2 + 8,25k_{sc} + 0,716.$$

Несмотря на различия аппроксимирующих полиномов, итоговые погрешности отличались не более чем на 10%.

Эмпирическая зависимость коэффициента коррекции от скорости найдена в виде

$$k_{rev}(V) = k_1(k_0 + (1 - k_0))V/V_H,$$

где V_H – начальная скорость торможения, k_1 – коэффициент, определяющий общую интенсивность коррекции, k_0 – коэффициент, меняющий степень и знак коррекции по мере движения самолета по ВПП. Настраиваемые коэффициенты k_0 и k_1 определялись поиском по критерию минимума средней погрешности прогноза на реверсном участке.

На участке пробега с выпущенными интерцепторами коррекция достигалась простым масштабированием коэффициентов по нормированной средней посадочной массе $m_{norm}=m/90$:

$$Q_{int} = k_i m_{norm}.$$

Значения k_i были найдены поиском для всех условий торможения по критерию минимума ошибки за весь полет. После уборки интерцепторов коэффициент коррекции менял масштаб $Q_{int} = 0,8K_i m_{norm}$.

Поскольку состояния устройств торможения и действия внешних факторов меняются с высокой скоростью, то для сглаживания возможных высокочастотных всплесков все вычисленные прогнозные значения проходят через демпфирующий фильтр в форме апериодического звена, у которого имеется возможность выбирать постоянную времени $T_{f_{progn}}$.

7. Исследования алгоритма прогнозирования дистанции торможения

Для исследования алгоритмов прогнозирования был разработан специальный моделирующий стенд. Стенд имеет набор режимов, позволяющих провести анализ алгоритмов прогнозирования, их коррекцию и исследования, а также развитые сервисные средства для задания условий эксперимента, обработки и регистрации результатов.

В первую очередь стенд используется для определения коэффициентов коррекции по выбранным критериям оптимальности, в качестве которых могут быть заданы ошибки прогноза на любом отрезке траектории. Программный модуль алгоритмов прогнозирования содержит базу настроек коэффициентов алгоритма (5) на дискретном множестве условий торможения. Чтобы сделать покрытие области настроек непрерывным, в составе программного обеспечения имеется модуль интерполяции коэффициентов коррекции в функции трех аргументов $[k_0, k_1, k_i] = INTERPOL[m, k_{sc}, V_{pos}]$.

В состав сервисного программного обеспечения исследовательского стенда включен модуль для анализа результатов статистических испытаний разрабатываемых алгоритмов прогнозирования. Модуль статистических испытаний настроен на анализ погрешностей прогнозирования точки останова в процессе торможения самолета на ВПП. Случайными возмущениями являются

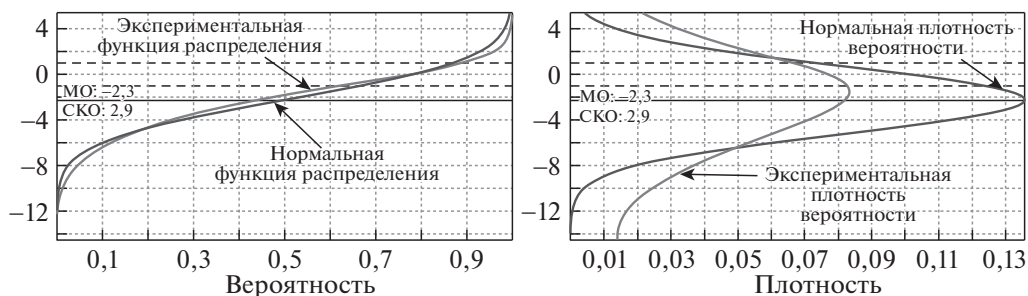


Рис. 6. Функции распределения и плотности вероятности ошибок прогнозирования дистанции торможения самолета.

разброс веса самолета и коэффициента сцепления. Закон распределения может быть назначен нормальным или равномерным. При построении графиков на экране изображается экспериментальная функция распределения вместе с аналитической нормальной с теми же моментами.

На рис. 6 приведены экспериментальные функции распределения и соответствующие им плотности вероятности ошибок прогнозирования дистанции торможения ($\Delta D_{\text{торм}}$) самолета массой 90 т от начальной скорости 220 км/ч. На каждом графике нанесена аналитическая аппроксимация функции распределения нормальным законом. Там же отмечены уровень математического ожидания (МО) и ширина 5%-го допуска на ошибки.

Как видно из графиков, случайные ошибки прогнозирования имеют распределения, близкие к нормальному. Малые значения среднего арифметического и дисперсии ошибок свидетельствуют о высокой точности прогноза, которая достигается эффективной коррекцией алгоритмов прогнозирования.

Наиболее сильное влияние на динамику процесса торможения оказывает реверс тяги двигателя. Повышение достоверности прогноза на участке реверсирования имеет большое значение, потому что на этом участке скорость движения наиболее высока, что приводит пилота в состояние повышенного психологического напряжения. Исследованы и сопоставлены ошибки прогнозирования в течение всего этапа торможения (Ош.полн) и ошибки только на режиме с включенным реверсом (Ош.рев). При этом коэффициенты коррекции были найдены методом поиска по двум различным критериям — по критерию минимума ошибок на участке реверса тяги $\min(\text{Ош.рев})$ и по критерию минимума ошибок на всей траектории торможения $\min(\text{Ош.полн})$.

В табл. 2 приведены средние значения ошибок прогнозирования на участке реверсирования и на полной траектории торможения самолета с посадочной

Таблица 2. Ошибки прогноза на реверсном участке и полной траектории торможения

Коэфф. сцеп.	0,3	0,3	0,5	0,5	0,75	0,75
Крит. опт.	Ош.рев.	Ош.полн.	Ош.рев.	Ош.полн.	Ош.рев.	Ош.полн.
$\min(\text{Ош.рев})$	−8,97	−8,94	−0,48	10,27	−0,23	6,03
$\min(\text{Ош.полн})$	−21,35	−3,81	−3,54	−2,0	1,55	0,55

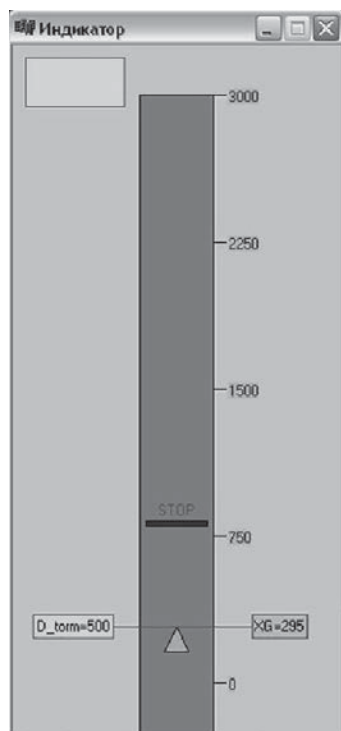


Рис. 7. Индикатор торможения.

массой 90 т, начальной скоростью 220 км/ч и коэффициентами сцепления с ВПП 0,3, 0,5 и 0,75.

Эти данные подтверждают, что реверсный участок вносит основную погрешность в прогноз, и оптимизация по критерию минимума ошибки на реверсном участке также значительно снижает полную ошибку за весь пробег.

Прототип индикатора при движении самолета в реальном времени по ВПП для информационной поддержки пилота показан на рис. 7. Имеются метки текущего положения самолета и прогнозной точки окончания торможения. Показываются также численное значение координаты самолета на ВПП и расчетная дальность до точки останова.

Если прогнозная точка останова смещается за обрест ВВП, то это является сигналом к уходу на второй круг.

8. Заключение

Для повышения ситуационной информированности экипажа воздушного судна и снижения психологической напряженности в статье разработаны алгоритмы прогнозирования терминальных состояний во время выполнения взлетно-посадочных операций. Алгоритмы основаны на энергетическом подходе к управлению движением воздушного судна, который дает возможность делать оценки ситуации не только в текущий момент времени, но и на предстоящем участке траектории, включая воздушный участок подлета к вы-

сотному препятствию. Предложено сообщать результаты прогноза непосредственно экипажу в форме текстовых, графических или звуковых оповещений. На разбеге перед взлетом определена дальность до точки принятия решения о возможности безопасного взлета и пролета над высотным препятствием. На режиме торможения найдены алгоритмы прогнозирования дальности до точки останова или до скорости рулежки. На каждом из этих режимов прогноз возможности безопасного достижения критических точек маневра осуществляется с опережением относительно их фактического достижения на траектории движения. Это придает уверенности в выполнении полетного задания в нестандартных или отягощенных условиях на ВПП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авиационные происшествия и инциденты в 1-м квартале 2023 г. <http://old.aviamettelecom.ru>.
2. Accidents statistics. <http://www.planecrashinfo.com/cause>
3. *Borodkin S., Volynchuk A., Ganiev Sh., et al.* Modern methods of preventing aircraft overrunning the runway // Научный Вестник МГТУ ГА. 2022. Т. 25. № 02. С. 1–12.
4. *Grebenkin A., Burdun I.* Landing under extreme conditions: early safety screening by means of the «pilot–automaton–air–craft–operating environment» system dynamics model // SAE 2019 Aviation Technology Forum. 2019.
5. *Гребенкин А.В., Лушников А.А.* Учет человеческого фактора в задачах интеграции ручного и автоматического управления в сложных многофакторных условиях посадки магистрального самолета // Сб. науч. ст. по материалам II Всероссийского форума с международным участием «Академические Жуковские чтения», Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2022. С. 224–231.
6. *Никифоров С.П.* Бортовая система контроля разбега — эффективное средство повышения безопасности взлетов транспортных самолетов // ТВФ № 3–4. 2002. С. 47–54.
7. *Shevchenko A.* Some Means for Informational Support of Airliner Pilot // 5th Int. Scientific Conf. on Physics and Control (Physcon 2011). Leon, Spain. 2011. P. 1–5.
8. *Kuznetsov A., Shevchenko A., Solonnikov Ju.* The Methods of Forecasting Some Events During the Aircraft Takeoff and Landing // 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (ACA2013). Germany. 2013. P. 183–187.
9. *Kurdjukov A., Nachinkina G., Shevtchenko A.* Energy approach to flight control // AIAA Conf. Navigation, Guidance and Control. AIAA Paper 98-4211. Boston. 1998.
10. *Lambregts A.* Vertical Flight Path and Speed Control Autopilot Design Using Total Energy Principles // AIAA Paper 83-2239CP. 1983. P. 559–569.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 28.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

© 2023 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАМИАНОВ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТРИК НЕПРЕРЫВНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ¹

Рассматриваются детерминированные непрерывные конечномерные стационарные линейные динамические системы управления с многими входами и многими выходами. Предполагается, что матрица динамики может быть как устойчивая, так и неустойчивая, но ее собственные числа различны, не принадлежат мнимой оси и не являются зеркальным отображением друг друга относительно нуля плоскости собственных чисел. В рамках единой постановки рассмотрены задачи построения спектральных решений уравнений состояния и матриц грамианов управляемости этих систем, а также связанных с ними энергетических функционалов степени устойчивости и достижимости с целью оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов многосвязных систем управления и сложных сетей. Для решения перечисленных задач в статье использованы различные модели системы в пространстве состояний: общее представление, а также представление в различных канонических формах. Для вычисления спектральных разложений грамианов управляемости использованы псевдоганкелевые матрицы (матрицы Сяо). Предложены новые методы и разработаны алгоритмы вычисления грамианов управляемости и энергетических метрик линейных систем. Результаты исследований могут найти применение для оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов многосвязных систем управления, управления с минимальной энергией в сложных сетях различной природы.

Ключевые слова: спектральные разложения грамианов, энергетические функционалы, обратная матрица грамиана, устойчивость с учетом взаимодействия мод, уравнение Ляпунова, неустойчивые системы управления.

DOI: 10.31857/S0005231023100112, EDN: YCDMIQ

1. Введение

Мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний являются важными направлениями исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника). Новые технологии моделирования требуют развития инструментов аппроксимации математических моделей сложных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

систем различной природы. При решении этих задач важную роль играют методы вычислений матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследование структурных свойств решений этих уравнений [1–4]. Фундаментальными свойствами линейных динамических систем, связанных с решениями этих уравнений, являются управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Важные результаты в этой области были получены для методов вычисления грамианов систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Хорошо известны применение грамианов для построения упрощенных моделей динамических систем высокой размерности, для вычисления норм передаточных функций линейных и билинейных динамических систем [1, 2, 5–8]. Важную роль играют грамианы управляемости в вычислении отклонений выхода, вызванных гауссовыми случайными возмущениями. В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости и наблюдаемости этих систем. Такие показатели для линейных устойчивых систем и неустойчивых линейных систем были предложены в [1, 8–11]. Упрощенные модели для больших сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющие вычислять энергетические показатели, были предложены в [12]. Метод сбалансированного отсечения на основе грамианов устойчивых и антиустойчивых систем был предложен в [13]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, и оценок степени управляемости была исследована в [14–18]. Важно отметить, что во всех этих работах использовался спектр матрицы динамики систем.

Б.Н. Петровым и его учениками на основе прямого метода Ляпунова были разработаны методы синтеза алгоритмов адаптации, гарантирующих устойчивость движения самонастраивающейся системы относительно движения ее эталонной модели [19, 20]. Им был разработан принцип координатно-параметрического управления, реализующий двукратную инвариантность в беспоисковых самонастраивающихся системах (БСНС). В теории БСНС использовалось понятие об обобщенном настраиваемом объекте, которое было основано на выделении структур специально сформированного основного контура и контура настраиваемого регулятора. Линеаризованные математические модели контуров включали координатные, параметрические и координатно-параметрические модели, в том числе параметрические обратные связи в контурах настройки регулятора. Эти модели сегодня названы билинейными динамическими моделями, которые используются в оптимизации, теории идентификации и адаптивного управления. Для вычисления грамианов этих систем были разработаны обобщенные уравнения Ляпунова и предложены спектральные методы их решения [2, 10, 11]. Несомненный вклад внесла школа Б.Н. Петрова в формирование теории управления, основанной на использовании структурных свойств эталонной модели, и в других областях теории управления, в частности в теории инвариантных систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим непрерывную стационарную линейную динамическую систему МИМО LTI с простым спектром со многими входами и многими выходами

$$(2.1) \quad \Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^m$.

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную систему можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

$$\begin{aligned} x_d &= Tx, & \dot{x}_d &= A_d x_d + B_d u, & y_d &= C_d x_d, \\ A_d &= T^{-1}AT, & B_d &= T^{-1}B, & C_d &= CT, & Q_d &= T^{-1}BB^T(T^{-1})^T, \end{aligned}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T^{-1} составлена из правых собственных векторов u_i , а матрица T — из левых собственных векторов ν_i^* , соответствующих собственному числу s_i .

Определение [21]. Квадратную матрицу $Y = [y_{j\eta}]$ назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) такого вида:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix},$$

ее элементы задаются с помощью элементов таблицы Рауса [21]

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k=1, \dots, n; \\ y_n = \frac{1}{2R_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \frac{-\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i R_{n-l,i+1} y_{n-l+i}}{R_{n-l,1}}, \\ \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

где $R_{i,j}$ — элемент таблицы Рауса для системы, находящийся на пересечении i строки и j столбца. В [11] было получено спектральное разложение

грамиана управляемости непрерывной линейной системы со многими входами и многими выходами на основе метода вычисления грамиана, предложенного в [21, 22].

Теорема 1 [11, 21]. Рассмотрим непрерывную линейную систему МИМО ЛТИ вида (2.1). Предположим, что система устойчива и все корни ее характеристического уравнения различны. Тогда матрицы ее грамиана управляемости являются матрицами Сяо, диагональные элементы которых определяются в виде

$$\begin{aligned} p_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2s_k \prod_{\rho=1, \rho \neq k}^n (s_k^2 - s_\rho^2)}, \\ p_{22} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^1 (s_k)^2}{2s_k \prod_{\rho=1, \rho \neq k}^n (s_k^2 - s_\rho^2)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ p_{nn} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1} (s_k)^{2(n-1)}}{2s_k \prod_{\rho=1, \rho \neq k}^n (s_k^2 - s_\rho^2)}. \end{aligned}$$

Элементы побочных диагоналей матриц грамианов определяются в виде

$$p_{j\eta} = (-1)^{\frac{j-\eta}{2}} p_{ll}, \quad j + \eta = 2l, \quad l = \overline{1, n}.$$

Остальные элементы матрицы грамиана равны нулю.

Следствие 1. Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную линейную динамическую систему МИМО ЛТИ с простым спектром со многими входами и многими выходами вида (2.1). Тогда ее грамиан управляемости является матрицей вида [11]

$$(2.2) \quad P_c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} P_{cj, \eta}, \quad P_{cj, \eta} = \omega(n, s_k, j, \eta) A_j B B^T A_\eta^T,$$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{2s_k \prod_{\rho=1, \rho \neq k}^n (s_k^2 - s_\rho^2)}, & \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Спектральные разложения (2.2) назовем разложениями грамиана в форме матриц Сяо. В разложении (2.2) появляется скалярная функция мультипликатора $\omega(n, s_k, j, \eta)$, которая определяет структуру матриц Адамара [21].

Преобразуем систему (2.1) в верхнюю блочно-диагональную форму Шура с унитарной матрицей преобразования U [23, 24].

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x &= U x_{Sch}, \quad \dot{x}_{Sch} = A_{Sch} x_{Sch} + B_{Sch} u, \quad y_{Sch} = C_{Sch} x_{Sch}, \\ A_{Sch} &= U^T A U, \quad B_{Sch} = U^T B, \quad C_{Sch} = C U, \\ A_{Sch} &= \begin{bmatrix} A_{Sch11} & A_{Sch12} \\ 0 & A_{Sch22} \end{bmatrix}, \quad B_{Sch} = \begin{bmatrix} B_{Sch1} \\ B_{Sch2} \end{bmatrix}, \quad C_{Sch} = \begin{bmatrix} C_{Sch1} & C_{Sch2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить блочно-диагональное представление, необходимо преобразовать уравнения (2.3) таким образом, чтобы на месте блока A_{Sch12} оказалась нулевая матрица. Для этого необходимо выполнить второе преобразование

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x_{Sch} &= W_{bl} x_{bl}, \quad \dot{x}_{bl} = A_{bl} x_{bl} + B_{bl} u, \quad y_{bl} = C_{bl} x_{bl}, \\ A_{bl} &= W_{bl}^{-1} A_{Sch} W_{bl}, \quad B_{bl} = W_{bl}^{-1} B_{Sch}, \quad C_{bl} = C_{Sch} W_{bl}, \\ A_{bl} &= \begin{bmatrix} A_{Sch11} & 0 \\ 0 & A_{Sch22} \end{bmatrix}, \quad B_{bl} = \begin{bmatrix} B_{bl1} \\ B_{bl2} \end{bmatrix}, \quad C_{bl} = \begin{bmatrix} C_{bl1} & C_{bl2} \end{bmatrix}, \\ W_{bl} &= \begin{bmatrix} I_r & S \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad W_{bl}^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & -S \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для того чтобы на месте блока A_{Sch12} оказалась нулевая матрица, матрица S должна удовлетворять уравнению Сильвестра

$$(2.5) \quad -A_{Sch11}S + SA_{Sch22} + A_{Sch12} = 0.$$

Необходимым условием существования решения этого уравнения является следующее спектральное условие:

$$\lambda_s + \lambda_u \neq 0, \quad \forall s : s = \overline{1, r}, \forall u : u = \overline{r+1, n}.$$

Для того чтобы преобразовать систему (2.4) с блочно-диагональной матрицей в систему с диагональной матрицей, необходимо выполнить третье преобразование

$$x_{bl} = W_d x_d,$$

где W_d — матрица преобразования системы в блочно-диагональной форме, у которой диагональные блоки имеют верхне-треугольную форму

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_d &= A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d &= W_d^{-1} A_{bl} W_d, \quad B_d = W_d^{-1} B_{bl}, \quad C_d = C_{bl} W_d, \\ A_d &= \begin{bmatrix} \Lambda_- & 0 \\ 0 & \Lambda_+ \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} B_{d1} \\ B_{d2} \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} C_{d1} & C_{d2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где Λ_- и Λ_+ — диагональные матрицы, состоящие из отрицательных и положительных собственных чисел соответственно.

После первого преобразования имеем соотношение

$$(2.7) \quad P = U P_{Sch} U^T.$$

После второго преобразования получим

$$P_{Sch} = T P_{bl} T^T,$$

или

$$(2.8) \quad P = T_2 P_{bl} T_2^T, \quad T_2 = U T.$$

После третьего преобразования с использованием (2.7), (2.8) получим

$$P = UT_3 P_d T_3^T, \quad T_3 = UTW_d.$$

Структурированное уравнение Ляпунова после второго преобразования имеет вид

$$(2.9) \quad A_{Sch11} P_1 + P_1 A_{Sch11}^T = -B_1 B_1^T,$$

$$(2.10) \quad A_{Sch22} P_2 + P_2 A_{Sch22}^T = B_2 B_2^T,$$

$$(2.11) \quad P_{cm} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} T_2.$$

Матрица P_{cm} называется смешанным грамианом управляемости [13–17, 25]. Цель статьи — разработать метод и алгоритм вычисления спектральных разложений грамианов управляемости неустойчивых линейных систем на основе описанного выше метода вычисления указанных грамианов с использованием преобразования исходной системы в блочно-диагональную форму [13].

Многие приложения спектральных разложений грамианов связаны с энергетическими показателями структурных свойств управляемости, наблюдаемости и устойчивости. Рассмотрим задачу выбора и оптимизации мест размещения датчиков и исполнительных механизмов в сложных автоматических системах и сложных сетях [18, 26–28]. При решении этой задачи используются входная и выходная энергия системы, следы матриц грамиана управляемости и наблюдаемости и следы их обратных матриц, минимальные и максимальные собственные числа матриц грамианов. Другая задача состоит в оценивании меры управляемости динамической системы с использованием грамианов управляемости [25]. Эта мера определяется как минимальная входная энергия, требуемая для перемещения системы из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние.

Другая цель статьи — разработка метода и алгоритмов вычисления спектральных разложений энергетических метрик, относящихся к указанным выше задачам. Требуется найти спектральные разложения следующих энергетических метрик по простому (или парному) спектру матрицы динамики системы и матриц грамианов управляемости и наблюдаемости:

- метрика входной минимальной энергии системы [2, 18]

$$J_1 = E_{\min}(P_c),$$

- метрика выходной энергии системы [2, 3]

$$J_2 = E_{out},$$

- метрика следа матрицы грамиана [26, 27]

$$J_3 = \text{tr}(P_c),$$

- метрика следа обратных матриц грамианов управляемости [2, 12, 18]

$$J_4 = \text{tr} (P_c)^{-1},$$

- метрика степени достижимости

$$J_5 = \text{tr} (P_{cm}),$$

где P_{cm} — смешанный грамиан управляемости [18, 25].

2.1. Основные результаты

Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида (2.1). Предположим, что спектр матрицы динамики содержит r устойчивых собственных чисел $\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-$ и $n-r$ неустойчивых собственных чисел $\lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+$. Будем предполагать, что спектр не содержит собственных чисел, принадлежащих мнимой оси, а также выполнено общее условие

$$\lambda_{i-} + \lambda_{j+} \neq 0, \forall i : i = \overline{1, r}, \forall j : j = \overline{r+1, n}.$$

Последнее условие означает, что спектр не содержит собственных чисел, являющихся зеркальным отображением друг друга относительно нуля. Наиболее простым способом вычисления спектральных разложений грамианов в случае простого спектра матрицы динамики является приведение ее к диагональному виду [1, 11]. Если в спектре появляются неустойчивые собственные числа, это требует проведения нескольких структурных преобразований уравнений (2.1). Введем обозначения

$$B_{d11} B_{d11}^T = [\beta_{d-\nu\eta}]_{[r \times r]},$$

$$B_{d22} B_{d22}^T = [\beta_{d+\nu\eta}]_{[(n-r) \times (n-r)]}.$$

Теорема 2 [8]. Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида (2.1), приведенную к диагональному виду (2.6). Предположим, что система имеет простой спектр, система неустойчива, а собственные числа ее матрицы динамики A не находятся на мнимой оси, но могут находиться в левой и/или правой полуплоскостях $\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-$, $i = r$; $\lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+$, $i = n-r$.

Кроме того, предположим, что выполнено условие

$$\lambda_i \neq -\lambda_j, \forall i, j : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$

Определим смешанный грамиан управляемости в виде

$$(2.12) \quad P_{cm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (Ij\omega - A)^{-1} B B^T (-Ij\omega - A^T)^{-1} d\omega.$$

Следующие утверждения справедливы и эквивалентны.

- Справедливы следующие сепарабельные спектральные разложения матриц решений уравнения (2.9), (2.10), соответствующих устойчивой и анти-устойчивой подсистемам.

$$\begin{aligned} p_{c-}^{(\mu\nu)} &= e_{\mu}^T P_{c-} e_{\nu}, \quad \forall \mu, \nu = \overline{1, r}, \\ p_{c-}^{(\mu\nu)} &= \frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-} + \lambda_{\nu-}}, \\ p_{c+}^{(\mu\nu)} &= e_{\mu}^T P_{c+} e_{\nu}, \quad \forall \mu, \nu = \overline{r+1, n}, \\ p_{c+}^{(\mu\nu)} &= \frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+} + \lambda_{\nu+}}; \end{aligned}$$

- Справедливы следующие сепарабельные спектральные разложения смешанного грамиана управляемости по парному и простому спектрам матрицы A

$$(2.13) \quad P_{cm} = T_3^{-1} [P_- \oplus P_+] T_3.$$

По парному спектру:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} P_- &= \sum_{\nu=1}^r \sum_{\mu=1}^r p_{c-}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}, \\ P_+ &= \sum_{\nu=r+1}^n \sum_{\mu=r+1}^n p_{c+}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

По простому спектру:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} P_- &= \sum_{\nu=1}^r p_{c-}^{(\nu)}, \quad p_{c-}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^r p_{c-}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}, \\ P_+ &= \sum_{\nu=r+1}^n p_{c+}^{(\nu)}, \quad p_{c+}^{(\nu)} = \sum_{\mu=r+1}^n p_{c+}^{(\nu\mu)} \mathbb{1}_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы. Уравнения Ляпунова для диагонализированной системы в данном случае имеют вид

$$\Lambda P_{cm} + P_{cm} \Lambda^* = -Q_d = [-B_- B_-^T \oplus B_+ B_+^T].$$

Для диагонализированной системы это уравнение распадается на два уравнения для устойчивой и антиустойчивой подсистем

$$\begin{aligned} \Lambda_- P_{c-} + P_{c-} \Lambda_-^* &= Q_{d-} = -B_- B_-^T, \\ \Lambda_+ P_{c+} + P_{c+} \Lambda_+^* &= Q_{d+} = B_+ B_+^T. \end{aligned}$$

Интегральные формулы решений уравнений Ляпунова [8]:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} P_{cm} &= [P_{c-} \oplus P_{c+}], \\ P_{c-} &= \int_0^{\infty} e^{\Lambda_- \tau} B_- B_-^T e^{\Lambda_-^* \tau} d\tau, \quad P_{c+} = \int_{-\infty}^0 e^{\Lambda_+ \tau} B_+ B_+^T e^{\Lambda_+^* \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Преобразуем второй интеграл в формуле (2.16), используя замену переменных $\tau = -t$:

$$\int_{-\infty}^0 e^{\Lambda+\tau} Q_{d+} e^{\Lambda+\tau} d\tau = - \int_0^{\infty} e^{-\Lambda+t} Q_{d+} e^{-\Lambda_+^* t} dt.$$

При такой замене переменных неустойчивые собственные числа антиустойчивой подсистемы становятся устойчивыми собственными числами устойчивой подсистемы и вычисление вторых интегралов сводится к схеме вычисления первых интегралов (2.16). Отсюда следует

$$(-\Lambda_+)P_{c+} + P_{c+}(-\Lambda_+^*) = -B_+B_+^T.$$

Матрица $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$ является гурвицевой. Спектральные разложения грамианов устойчивой подсистемы были ранее получены в [9]. Вначале получим спектральные разложения грамианов в (2.16), а затем получим спектральное разложение грамиана исходной системы согласно формуле преобразования грамиана управляемости для невырожденного преобразования состояний с матрицей T

$$(2.17) \quad P_{cm} = T[P_- \oplus P_+]T^T.$$

Первый шаг спектральных разложений основан на преобразовании уравнений состояния устойчивой подсистемы в диагональную каноническую форму. В этом случае уравнения Ляпунова приобретают простой вид и элементы $p_{c-}^{(\mu\nu)}$ матрицы решения P_{c-} можно вычислить по формулам [9]

$$(2.18) \quad p_{c-}^{(\mu\nu)} = e_\mu^T P_{c-} e_\nu, \quad \forall \mu, \nu = \overline{1, r},$$

где e_μ^T, e_ν — единичные векторы,

$$(2.19) \quad \begin{aligned} e_\mu^T Q_{d-} e_\nu &= \beta_{\mu\nu-}, \quad \forall \mu, \nu = \overline{1, r}, \\ p_{c-}^{(\mu\nu)} &= \frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-} + \lambda_{\nu-}}. \end{aligned}$$

Поскольку с учетом замены переменных вычисление спектральных разложений матрицы решения P_{c+} сводится к рассмотрению подхода, предложенного для вычисления матрицы решения P_{c-} , представим конечные формулы вычисления спектральных разложений для этого случая.

Этот подход основан на преобразовании уравнений состояния антиустойчивой подсистемы в диагональную каноническую форму. В этом случае элементы $p_{c+}^{(\mu\nu)}$ матрицы решения P_{c+} вычисляются по формулам

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = e_\mu^T P_{c+} e_\nu, \quad \forall \mu, \nu = \overline{r+1, n},$$

где e_μ^T, e_ν — единичные векторы,

$$(2.20) \quad \begin{aligned} e_\mu^T Q_{d+} e_\nu &= \beta_{\mu\nu+}, \\ p_{c+}^{(\mu\nu)} &= \frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+} + \lambda_{\nu+}}, \quad \forall \mu, \nu = \overline{r+1, n}. \end{aligned}$$

Доказательство справедливости спектральных разложений для антиустойчивой подсистемы полностью повторяет доказательство для устойчивой подсистемы. Доказательство справедливости спектральных разложений (2.13)–(2.15) следует из справедливости формулы (2.19) и преобразования анти-устойчивой подсистемы к виду устойчивой подсистемы, собственные числа которой являются зеркальным отображением собственных чисел первой подсистемы относительно мнимой оси. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы смешанный грамиан положительно определен, поскольку матрица $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$ является гурвицевой. При этом след смешанного грамиана управляемости равен

$$(2.21) \quad J = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_{d-ii}}{-2\operatorname{Re} \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^n \frac{\beta_{d+ii}}{2\operatorname{Re} \lambda_i}.$$

Коэффициенты $\beta_{d-ii}, \beta_{d+ii}$ всегда положительны в силу формирования матриц правых частей уравнений Ляпунова. Отсюда следует, что диагональные члены матрицы смешанного грамиана положительны. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max_i \beta_{d-ii}, \beta_{d+ii} &= \beta_{ii} \max, \\ J &\leq \frac{\beta_{ii} \max}{2 \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i|} n = \frac{\beta_{ii} \max}{\left(\frac{2 \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i|}{n} \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, след смешанного грамиана прямо пропорционален максимальному значению диагонального элемента матрицы $[B_- B_-^T \oplus B_+ B_+^T]$ и обратно пропорционален удвоенному среднему значению модуля собственного числа спектра матрицы $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$, что подтверждает результаты исследований работы [28].

Иллюстративный пример. Рассмотрим задачу управления динамическим объектом с четырьмя входами и четырьмя выходами. Модель объекта управления можно описать уравнениями состояния вида

$$\Sigma_1: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,33 & -2,67 & -4 & 1,33 \\ 21,17 & -23,33 & -30,2 & 1,5 \\ -14,67 & 14 & 17,83 & -1,17 \\ 2 & -1,33 & -1,83 & -2,17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем систему в верхнюю блочно-диагональную форму Шура. В таком случае унитарная матрица преобразования выразится следующим образом:

$$U = \begin{bmatrix} 0,125 & 0,943 & -0,169 & -0,258 \\ 0,814 & -0,26 & -0,056 & -0,516 \\ -0,564 & -0,178 & -0,225 & -0,775 \\ 0,063 & -0,109 & -0,958 & 0,258 \end{bmatrix}.$$

Система же примет вид

$$A_{Sch} = \begin{bmatrix} 1 & 37,64 & 3,255 & 35,17 \\ 0 & -4 & -0,97 & -0,212 \\ 0 & 0 & -2 & 0,436 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_{Sch} = \begin{bmatrix} -1,25 \\ -0,137 \\ 1,465 \\ -5,939 \end{bmatrix}.$$

Следующее преобразование происходит таким образом, чтобы матрица A_{Sch12} стала нулевой. Подбираем матрицу преобразования W_{bl} так, чтобы матрица A_{bl} разделилась на два блока, устойчивую и неустойчивую подсистемы.

$$W_{bl} = \begin{bmatrix} 1 & -7,53 & 1,35 & -8,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{bl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -0,97 & -0,21 \\ 0 & 0 & -2 & 0,436 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$B_{bl} = \begin{bmatrix} -53,2 \\ -0,14 \\ 1,47 \\ -5,94 \end{bmatrix}.$$

Проверим выполнение уравнения Сильвестра (2.5). Для удобства отображения транспонируем все составляющие уравнения

$$\begin{bmatrix} -7,529 \\ 1,35 \\ -8,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -0,97 & -2 & 0 \\ -0,212 & 0,436 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7,529 \\ -1,35 \\ 8,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37,64 \\ 3,255 \\ 35,167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для системы в этом случае смешанный грамиан задается уравнением (2.11)

$$P_{cm} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} T_2.$$

$$P_{cm} = \begin{bmatrix} 5,32 & -5,32 & -7,98 & 2,66 \\ 0,94 & -0,26 & -0,18 & -0,11 \\ -0,17 & -0,056 & -0,23 & -0,96 \\ -0,26 & -0,52 & -0,78 & 0,26 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0067 & -0,057 & 0,18 \\ 0 & -0,057 & 0,52 & -1,72 \\ 0 & 0,18 & -1,72 & 5,88 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,13 & 0 & 0 & -1,29 \\ 0,81 & -6,39 & 1,04 & -7,23 \\ -0,56 & 4,07 & -0,99 & 3,87 \\ 0,063 & -0,58 & -0,87 & -0,26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -203 & -132,5 & 11,3 \\ -203 & 1290 & -844 & 73 \\ -132,5 & -844 & -349 & -50,5 \\ 11,3 & 73 & -50,5 & 5,57 \end{bmatrix}.$$

Проверим корректность вычисления грамиана. Матрица третьего преобразования и сама система примет вид

$$W_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,44 & 0,19 \\ 0 & 0 & 0,9 & -0,39 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -53,2 \\ 0,57 \\ -1,25 \\ -6,6 \end{bmatrix}.$$

Тогда грамиан для диагонализированной системы станет равным

$$[P_- \oplus P_+] = \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & -0,12 & -0,54 \\ 0 & -0,12 & 0,39 & 1,65 \\ 0 & -0,54 & 1,65 & 7,26 \end{bmatrix}.$$

Общее выражение смешанного грамиана после третьего преобразования запишется следующим образом:

$$P_{cm} = \begin{bmatrix} 5,32 & -5,32 & -7,98 & 2,66 \\ 0,86 & -0,29 & -0,29 & -0,57 \\ -0,31 & -0,31 & -0,63 & -0,94 \\ -0,29 & -0,57 & -0,86 & 0,29 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,041 & -0,12 & -0,54 \\ 0 & -0,12 & 0,39 & 1,65 \\ 0 & -0,54 & 1,65 & 7,26 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,125 & 0 & 0 & -1,16 \\ 0,81 & -6,39 & 3,73 & -8,13 \\ -0,56 & 4,07 & -2,66 & 4,65 \\ 0,063 & -0,58 & -0,53 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -203 & -132,5 & 11,3 \\ -203 & 1290 & -844 & 73 \\ -132,5 & -844 & -349 & -50,5 \\ 11,3 & 73 & -50,5 & 5,57 \end{bmatrix}.$$

Смешанные грамианы совпали. Проверим, выполняется ли критерий Сильвестра для грамиана устойчивой и антиустойчивой систем. Для этого надо, чтобы матрицы P_1 и P_2 были положительно определены. Для компактности запишем их в одну матрицу.

$$[P_1 \oplus P_2] = \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0067 & -0,057 & 0,18 \\ 0 & -0,057 & 0,52 & -1,72 \\ 0 & 0,18 & -1,72 & 5,88 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{P_1} = 1417, \quad \lambda_{P_2} = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,018 \\ 6,39 \end{bmatrix}.$$

Все собственные числа больше нуля. Критерий выполнен. Вычислим след по формуле (2.21)

$$J = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_{d-ii}}{-2\operatorname{Re} \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^n \frac{\beta_{d+ii}}{2\operatorname{Re} \lambda_i} = 0,0067 + 0,52 + 5,88 + 1417 \approx 1423.$$

Сравним значение следа спектра с оценкой

$$J = 1423 \leq \frac{2834}{\frac{2*1}{4}} = 5668.$$

Обратная величина среднего значения модулей собственных чисел матрицы динамики оценивает степень разброса действительных частей собственных чисел относительно мнимой оси. Чем меньше эта величина, тем выше ее влияние на след смешанного грамиана управляемости. Формула спектрального разложения следа позволяет при необходимости выполнить более тонкий анализ влияния распределения собственных чисел на энергетическую метрику степени достижимости [25, 27].

3. Спектральные разложения энергетических метрик грамианов управляемости и наблюдаемости

Рассмотрим применение полученных результатов для решения некоторых задач оценивания состояния и управления. Получим спектральные разложения энергетических метрик.

Теорема 3 [8]. Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида (2.1), приведенную к диагональному виду (2.6). Предположим, что система имеет простой спектр, система полностью управляема и неустойчива, а собственные числа ее матрицы динамики A не находятся на мнимой оси, но могут находиться в левой и/или правой полуплоскостях

$$\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-, \quad i = r; \quad \lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+, \quad i = n - r.$$

Кроме того, предположим, что выполнено условие

$$\lambda_i \neq -\lambda_j, \quad \forall i, j : i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов [18]:

$$\begin{aligned} J_1 &= E_{\min}(\infty) = \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^T (P_{cm})^{-1} \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^T \left[\sum_{i=1}^n V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c \right] \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$J_3 \text{ (для SISO LTI устойчивых систем)} = \operatorname{tr} \sum_{k=1}^n P_{c,k} = \sum_{k=1}^n \operatorname{tr} P_{c,k} =$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^n s_k^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right), \end{aligned}$$

$$J_4 = \operatorname{tr} \sum_{i=1}^n (P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} (P_c)_i^{-1} = \left[\sum_{i=1}^n \operatorname{tr} \left[V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c \right] \right],$$

где $N(s)$ — характеристический полином системы (2.1).

Доказательство теоремы. Вернемся к устойчивым непрерывным ММО LTI системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [1]

$$P_c = V_c \Lambda V_c^*,$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P_c , а матрица Λ является диагональной матрицей вида

$$\Lambda = \operatorname{diag} \{ |\sigma_1| |\sigma_2| \dots |\sigma_n| \}.$$

Определим матрицы S и U в виде

$$S = \text{diag} \{ \text{sgn } \sigma_1 \text{ sgn } \sigma_2 \dots \text{sgn } \sigma_n \}, \quad U_c = V_c S,$$

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \geq 0 \\ -1, & \text{если } \sigma < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$(3.1) \quad P_c = U_c \Lambda V_c^*,$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P_c . Поскольку Λ, U_c, V_c являются несингулярными матрицами, то

$$(3.2) \quad (P_c)^{-1} = (U_c)^{-1} \Lambda^{-1} (V_c^*)^{-1} = V_c^* \Lambda^{-1} U_c.$$

Так как матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде

$$(3.3) \quad \Lambda^{-1} = \left[|\sigma_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\sigma_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\sigma_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right].$$

Подставив (3.3) в (3.1), (3.2), получим следующие спектральные разложения обратных грамианов управляемости по простому спектру:

$$(P_c)^{-1} = (P_c)_1^{-1} + (P_c)_2^{-1} + \dots + (P_c)_n^{-1},$$

$$(P_c)_1^{-1} = V_c^* |\sigma_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} U_c, \quad (P_c)_2^{-1} = V_c^* |\sigma_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} U_c, \dots, \quad (P_c)_n^{-1} = V_c^* |\sigma_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} U_c.$$

Отсюда следуют следующие спектральные разложения энергетических функционалов [11]:

$$J_1 = E_{\min}(\infty) = \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^T (P_c)^{-1} \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^T \left[\sum_{i=1}^n V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c \right] \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \text{tr} \sum_{i=1}^n (P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \text{tr} (P_c)_i^{-1} = \left[\sum_{i=1}^n \text{tr} [V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c] \right],$$

$$J_3 \text{ (для SISO LTI систем)} = \text{tr} \sum_{k=1}^n P_{c,k} = \sum_{k=1}^n \text{tr} P_{c,k} =$$

$$\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^n s_k^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sum_{k=1}^n s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right),$$

$$J_5 = \text{tr} (P_{cm}).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 [2]. Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами общего вида (2.1). Предположим, что система имеет простой спектр, полностью управляема и устойчива. Тогда справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов входной и выходной энергии $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ по простому спектру грамиана управляемости:

$$(3.4) \quad \hat{J}_1 = \sum_{i=1}^n x_0^T \left[V_c^* |\sigma_i|^{-1} 1_{ii} U_c \right] x_0,$$

или простому спектру матрицы динамики A :

$$(3.5) \quad \hat{J}_2 = \sum_{i=1}^n x_0^T \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\lambda_i^j (-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}(\lambda_i) N(-\lambda_i)} A_j^T C^T C A_\eta \right] x_0.$$

Доказательство теоремы. В [2] доказано, что энергетические функционалы входной и выходной энергии $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ равны

$$\hat{J}_1 = \inf_{u,x} \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt, \quad \hat{J}_2 = \int_0^\infty \|y(t), 0, x_0\|^2 dt.$$

В условиях теоремы они могут быть представлены в виде квадратичных форм

$$(3.6) \quad \hat{J}_1 = E_c(x_0) = x_0^T P_c^\# x_0,$$

$$(3.7) \quad \hat{J}_2 = E_o(x_0) = x_0^T P_o x_0,$$

где $P_c^\#$ — псевдоинверсия по Муру–Пенроузу матрицы грамиана управляемости, а P_o — матрица грамиана наблюдаемости. В условиях теоремы матрица грамиана управляемости является невырожденной матрицей, поэтому справедливо равенство

$$P_c^\# = P_c^{-1}.$$

Подставим спектральное разложение матрицы обратного грамиана в формулу (3.6), получим искомое спектральное разложение функционала входной энергии. В [11] было получено спектральное разложение грамиана наблюдаемости систем в форме псевдоганкелевых матриц Сяо [11, 22, 23]

$$P_o = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\lambda_i^j (-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}(\lambda_i) N(-\lambda_i)} A_j^T C^T C A_\eta.$$

Подставим спектральное разложение матрицы грамиана P_o (3.7), получим искомое спектральное разложение функционала выходной энергии. Теорема 4 доказана.

Функционалы $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ использовались в [10] для анализа степени устойчивости линейной системы на основе анализа аномалий квадрата H_2 -нормы передаточной функции системы, обусловленных влиянием следующих слабо-устойчивых мод:

- мод, близких началу координат,
- мод, близких мнимой оси,
- близких друг другу нескольких апериодических и колебательных мод.

В качестве основного инструмента анализа аномалий было предложено использовать асимптотические модели спектральных разложений функционалов J_1 и J_2 по простому и/или парному спектру матрицы динамики системы. Аналогичный подход можно распространить на анализ аномалий спектральных разложений метрик следов грамианов J_3 и J_4 , а также на анализ степени достижимости линейной системы на основе аномалий спектральных разложений метрики смешанного грамиана J_5 . Заметим, что спектральные разложения метрик зависят от собственных чисел матрицы динамики, которые привязаны к определенному узлу графа системы, что позволяет связать задачу оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств с определенными узлами на графе системы.

4. Заключение

Статья обобщает известные результаты декомпозиции грамианов для неустойчивых непрерывных линейных систем для вычисления их спектральных разложений наиболее простого случая разложений по парному спектру матрицы динамики. Большинство энергетических метрик, связанных с использованием грамианов, основано на вычислении спектра матриц динамики и мер минимальной энергии, требуемой для перехода системы из начальной в конечную точку. В работе показано, что спектральные разложения грамианов управляемости и их обратных грамианов позволяют в рамках единого подхода вычислить составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, которые определяют основной вклад в величину метрики достижимости и энергетической метрики устойчивости. Эти спектральные разложения представлены в виде формул, позволяющих анализировать влияние различных узлов графа системы на формирование энергетических метрик достижимости и устойчивости. Полученные результаты могут найти применение в задачах локализации и оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов на графе сложной многосвязной системы управления или в задачах размещения управляющих узлов на графе сложной социальной, транспортной, энергетической или биологической сети [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadelphia, 2005.
2. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.

3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Теория автоматического управления. Учеб. Пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
4. Kailath T. Linear Systems Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1980. 672 pp.
5. Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
6. Параев Ю.И., Перепелкин Е.А. Линейные матричные уравнения в задачах анализа многосвязных динамических систем. Барнаул: Изд-во Алтайского ГТУ, 2000.
7. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
8. Godunov S.K. Modern Aspects of Linear Algebra / Trans. of Math. Monographs. V. 175. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1998.
9. Yadykin I.B., Galyaev A.A. On the methods for calculation of grammians and their use in analysis of linear dynamic systems Automation and Remote Control // Pleiades Publishing Ltd. V. 74. No. 2. P. 207–224.
10. Ядыкин И.Б., Исаков А.Б. Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // А и Т. 2016. № 12. С. 37–58.
11. Yadykin I.B. Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. 2339.
12. Casadei G., Wit C., Zampieri S. Model Reduction Based Approximation of the Output Controllability Gramian in Large-Scale Networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2020 V. 7. No. 4. P. 1778–1788.
<https://doi.org/10.1109/TCNS.2020.3000694>
13. Zhou K., Salomon G., Wu E. Balanced realization and model reduction for unstable systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1999. Vol. 9. No. 3. P. 183–198.
14. Lee H., Park Y. Degree of controllability for linear unstable systems // Journal of Vibration and Control. 2016. V. 22. No. 7. P. 1928–1934.
<https://doi.org/10.1177/1077546314545101>
15. Shaker H., Tahavori M. Optimal sensor and actuator location for unstable systems // Journal of Vibration and Control. 2013. V. 19. No. 12. P. 1915–1920.
<https://doi.org/10.1177/1077546312451302>
16. Wal M., Jager B. A review of methods for input/output selection // Automatica. 2001. V. 37. No. 4. P. 487–510. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(00\)00181-3](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(00)00181-3)
17. Birk W., Medvedev A. A note on gramian-based interaction measures // 2003 European Control Conference (ECC). Cambridge, UK, 2003. P. 2625–2630.
<https://doi.org/10.23919/ECC.2003.7086437>
18. Mehr F. A Determination of Design of Optimal Actuator Location Based on Control Energy. London/Publisher: City, University of London, 2018.
19. Петров Б.Н. Избранные труды Т. 1. Теория автоматического управления. М: Наука, 1983. С. 432 (163–178, 223–227 (двукратная), 294–323).
20. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М: Наука, 1980. 243 с.
21. Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M. On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038>

22. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351.
<https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09>
23. *Hsu C., Hou D.* Reducing Unstable Linear Control Systems via Real Schur Transformation // Electronics Letters. 1991. V. 27. No. 11.
<https://doi.org/10.1049/el:19910614>
24. *Safonov M., Chiang G.* A schur method for balanced-truncation model reduction // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 7. P. 729–733.
<https://doi.org/10.1109/9.29399>
25. *Lindmark G., Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Scientific Reports. 2018. V. 8. No. 3188. P. 1–14. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-21398-7>
26. *Dilip A.* The Controllability Gramian, the Hadamard Product, and the Optimal Actuator/Leader and Sensor Selection Problem // Nature Physics. 2019. V. 3. No. 4. P. 883–888. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278>
27. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2014. V. 1. No. 1. P. 40–52. <https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858621>
28. *Нас А., Liu L.* Sensor and actuator location in motion control of flexible structures // Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 167. No. 2. P. 239–261.
29. *Faddeev D.K., Faddeeva V.N.* Computational Methods of Linear Algebra. Freeman: San-Francisco, CA, USA, 2016.
30. *Hanson B., Peeters R.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra and its Applications. 1996. V. 241–243. P. 401–430.
31. *Nagar S., Singh S.* An algorithmic approach for system decomposition and balanced realized model reduction // Journal of the Franklin Institute. 2004. V. 341. No. 7. P. 615–630. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2004.07.005>
32. Robust Control Tool Box, Mathworks, Version 2. 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 15.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.А. БЕЛОВ, д-р физ.-мат. наук (a.a.belov@inbox.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РОБАСТНОГО КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛИТОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОТНОШЕНИЮ К СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ¹

Рассматриваются дискретные линейные политопические системы, находящиеся под влиянием случайных коррелированных стационарных возмущений. Предложены новые численные методы оценки анизотропной нормы политопической системы с помощью линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: политопические неопределенности, ЛМН, средняя анизотропия, случайные процессы, анализ.

DOI: 10.31857/S0005231023100124, EDN: YCLFCQ

1. Введение

Математические модели объектов управления строятся на основе известных физических законов, а также измеряемых характеристик объекта управления. Технологические допуски и ошибки измерения в объекте управления могут привести к несоответствию математической модели и реального объекта управления. В некоторых случаях это несоответствие является важным и может привести как к потере качества процессов в системе управления, так и к потере устойчивости замкнутой системы. Таким образом, возникают задачи анализа и управления системами с учетом неточных знаний о параметрах их математических моделей, называемые задачами робастного анализа и управления.

В зависимости от исходных предположений на вид неопределенностей системы управления в литературе существуют различные подходы к анализу ее робастных свойств. Одной из популярных форм описания неопределенностей в линейных системах является политопическая неопределенность. Эта неопределенность характеризуется тем, что неизвестные параметры системы лежат на заданном симплексе. Если система с политопической неопределенностью является стационарной, то в литературе ее называют политопической системой. Для дискретных линейных систем известно множество методов проверки робастной устойчивости системы [1–4]. Работы [1–3] посвящены исследованию устойчивости систем с политопическими стационарными и нестационарными неопределенностями с использованием параметрических

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00306, <https://rscf.ru/project/23-21-00306/>).

функций Ляпунова. В [4] приводятся результаты робастного анализа политопических систем с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Результаты приведены в форме непараметрических матричных неравенств.

Наряду с вопросами исследования робастной устойчивости систем с неопределенностями одним из важных аспектов анализа систем управления является способность подавлять внешние возмущения. Так, в литературе известны методы анализа качества подавления внешних возмущений в терминах $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -норм [5]. Если предположить, что на вход системы поступают коррелированные случайные возмущения, то для анализа качества его подавления системой можно применить анизотропийный подход [6–8]. Особенностью анизотропийного подхода является исследование качества работы системы при воздействии на нее коррелированных стационарных случайных возмущений с известным уровнем средней анизотропии. Методы анизотропийного анализа и синтеза в политопических системах изучались в [9–11]. В [9] была представлена параметрическая версия анизотропийной частотной теоремы, в [10] был получен один из результатов непараметрического численного анализа анизотропийного качества, а [11] посвящена решению задачи синтеза анизотропийного регулятора по состоянию с заданным расположением полюсов замкнутой системы.

В настоящей работе предложены численные методы решения задачи анизотропийного анализа для политопических систем на основе линейных матричных неравенств. Все эти методы получены на основе использования параметрической анизотропийной частотной теоремы. Проводится анализ степени консерватизма полученных условий, а также даны оценки на их вычислительную сложность.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с реализацией в пространстве состояний в виде

$$(1) \quad x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_w(\Theta)w(k),$$

$$(2) \quad y(k) = C(\Theta)x(k) + D_w(\Theta)w(k),$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение с нулевым средним и ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ($a \geq 0$), $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы.

Матрицы $A(\Theta)$, $B_w(\Theta)$, $C(\Theta)$, $D_w(\Theta)$ определяются из выражений

$$(3) \quad \begin{aligned} A(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i A_i, & B_w(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i B_{wi}, \\ C(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i C_i, & D_w(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i D_{wi}, \end{aligned}$$

где матрицы A_i , B_{wi} , C_i , D_{wi} являются известными постоянными матрицами соответствующих размерностей, а вектор неопределенных параметров Θ

удовлетворяет соотношениям

$$(4) \quad \sum_{i=1}^r \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1, r}.$$

Средняя анизотропия характеризует меру отличия гауссовской случайной последовательности от гауссовского белого шума с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей (будем называть его стандартным) в терминах относительной энтропии и может быть вычислена по формуле

$$(5) \quad \overline{A}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \frac{m S_w(\omega)}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Trace } S_w(\lambda) d\lambda} d\omega,$$

где $S_w(\omega)$ — спектральная плотность последовательности $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Таким образом, параметр $a \geq 0$ определяет множество всех гауссовских сигналов, чья мера отличия от стандартного гауссовского белого шума, определяемого выражением (5), не превышает величины a . Следует отметить, что функционал средней анизотропии является неотрицательным и обращается в ноль, если W является стандартным гауссовским белым шумом [8].

Обозначим множество всех параметров Θ , удовлетворяющих (3) и (4), через Ω и рассмотрим отображение $Y = F_{\Theta}W$, определяемое выражениями (1)–(2).

Определение 1. Анизотропийной нормой политопической системы (1)–(4) будем называть норму оператора F_{Θ} , определяемую выражением

$$(6) \quad \|F_{\Theta}\|_a = \sup_{\Theta \in \Omega} \sup_{W: A(W) \leq a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

$$\|W\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \mathbf{E}|w(k)|^2} \text{ — мощностная норма сигнала } W.$$

Одним из наиболее важных свойств анизотропийной нормы является то, что она лежит между масштабированной $\mathcal{H}_2$ -нормой и $\mathcal{H}_{\infty}$ -нормой, т.е. [8]

$$\frac{\|F_{\Theta}\|_2^2}{m} \leq \|F_{\Theta}\|_a^2 \leq \|F_{\Theta}\|_{\infty}^2.$$

Это значит, что варьируя величину средней анизотропии a от 0 до ∞ , можно сужать или расширять множество случайных сигналов, подбирая тем самым наиболее благоприятную полосу пропускания и запасы устойчивости системы в диапазоне между $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_{\infty}$ -нормами.

В задаче робастного анизотропийного анализа политопических систем необходимо получить условия для проверки робастной устойчивости и ограниченности анизотропийной нормы разомкнутой системы (1)–(2) для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и заданного числа $\gamma > 0$. То есть задачу анализа можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. Для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного случайного возмущения $w(k)$ и заданного числа $\gamma > 0$ проверить:

- 1) является ли система робастно устойчивой;*
- 2) выполняется ли условие*

$$\|F_{\Theta}\|_a < \gamma.$$

Ниже приведем известные результаты, которые необходимы для дальнейшего изложения. Рассмотрим систему с точно заданными параметрами, в которой размерности всех векторов и матриц совпадают с размерностями в системе (1)–(2):

$$(7) \quad x(k+1) = Ax(k) + B_w w(k),$$

$$(8) \quad y(k) = Cx(k) + D_w w(k).$$

Приведем формулировку анизотропийной частотной теоремы в терминах ЛМН [13].

Лемма 1. Система (7)–(8) является устойчивой и ее анизотропийная норма для заданного уровня средней анизотропии входного случайного сигнала $a \geq 0$ ограничена сверху числом $\gamma > 0$, если найдутся такие матрицы $X > 0$, $Y > 0$, $\Phi > 0$ и число $\mu > \gamma^2$, для которых справедливы соотношения:

$$(9) \quad \mu - (e^{-2a} \det \Phi)^{1/q} < \gamma^2,$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} \Phi - \mu I_m & \star & \star \\ B_w & -Y & \star \\ D_w & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(11) \quad \begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star \\ 0 & -\mu I_m & \star & \star \\ A & B_w & -Y & \star \\ C & D_w & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(12) \quad XY = I_n.$$

3. Решение задачи

3.1. Параметрическая анизотропийная частотная теорема

Сформулируем параметрические условия для анизотропийного анализа полиномической системы (1)–(2), на основе которых будут получены основные результаты данной статьи.

Теорема 1. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$, если существуют такие матрицы

$P(\Theta) > 0$, $\Psi(\Theta) > 0$, невырожденные матрицы $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:

$$(13) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi(\Theta))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & L_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(15) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & L_2(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$ и $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^T(\Theta) + P(\Theta)$, для любого значения $\Theta \in \Omega$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Условия теоремы 1 зависят явно от параметра Θ . Существование каких-либо параметрических матриц $\Psi(\Theta)$, $P(\Theta)$, $G_1(\Theta)$ и $G_2(\Theta)$, которые удовлетворяют всем условиям теоремы 1, позволит проверить робастную устойчивость системы, а также установить факт ограниченности ее анизотропийной нормы числом γ для известного уровня средней анизотропии $a > 0$ входного возмущения W . В настоящее время не существует какого-либо формального метода для определения точного вида матрицы $P(\Theta)$ как функции от вектора параметров Θ . Такая функция $P(\Theta)$ в научной литературе носит название параметрической матрицы Ляпунова [1, 2, 4]. Подобное утверждение справедливо и для остальных параметрических матриц. К сожалению, такая параметрическая зависимость может существенным образом усложнить методику анализа исходной системы. Уменьшить вычислительную сложность алгоритма можно, вводя дополнительные ограничения, например используя различные аппроксимации для матриц $\Psi(\Theta)$, $P(\Theta)$, $G_1(\Theta)$ и $G_2(\Theta)$. Такой подход, с одной стороны, позволяет избавиться от явного вхождения вектора параметров Θ в матричные неравенства, но, с другой стороны, вносит некоторый консерватизм. Ниже представим несколько методов непараметрического анизотропийного анализа политопической системы (1)–(2) в зависимости от различных аппроксимаций.

3.2. Непараметрические вариации частотной теоремы

Пусть $\Psi(\Theta) = \Psi$, $G_1(\Theta) = G_1$, $G_2(\Theta) = G_2$, $P(\Theta) = P$. Тогда в выражениях (14)–(15) параметры θ_i можно явно вынести за скобки. Откуда напрямую следует следующий результат.

Теорема 2. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$, если существуют такие матрицы

$P > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_1 , G_2 и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:

$$(16) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(17) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_1 B_{wi} & L_1 & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} -P & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2 A_i & G_2 B_{wi} & L_2 & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $L_1 = -G_1 - G_1^T + P$, $L_2 = -G_2 - G_2^T + P$ и $i = \overline{1, r}$.

Доказательство теоремы является тривиальным и не приводится в статье. Теорема 2 представляет собой наиболее простое и консервативное решение задачи 1.

Воспользуемся линейной аппроксимацией для параметрической матрицы Ляпунова и некоторых вспомогательных переменных. Справедлива следующая

Теорема 3. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих (3)–(4), если существуют такие матрицы $P_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_{1i} , G_{2i} и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$(19) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(20) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wi} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(21) \quad \begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i} A_i & G_{2i} B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j} B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^T + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(23) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_j & G_{2i}B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -P_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2j}A_i & G_{2j}B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^T + P_j & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Полученные в теореме 3 условия не зависят от вектора параметров Θ и позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы с помощью проверки выполнения $2r + r(r - 1) + 1$ неравенства. Число неравенств, а также переменных можно снизить, повысив консерватизм оценки с учетом того факта, что $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$. Сформулируем теорему.

Теорема 4. Система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих (3)–(4), если существуют такие матрицы $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_i и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$(24) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(25) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(26) \quad \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$(27) \quad \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Таблица 1. Оценка вычислительной сложности методов анализа

Метод	Число неравенств	Число переменных	Число неизвестных параметров
Теорема 2	$2r + 2$	6	$1 + \frac{m^2 + m}{2} + \frac{5n^2 + n}{2}$
Теорема 3	$2r + r(r - 1) + 2$	$2 + 3r$	$1 + \frac{m^2 + m}{2} + r \frac{5n^2 + n}{2}$
Теорема 4	$2r + \frac{r(r - 1)}{2} + 2$	$2 + 2r$	$1 + \frac{m^2 + m}{2} + r \frac{3n^2 + n}{2}$

Полученные в теореме 4 условия позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы, проверив выполнение $2r + \frac{r(r-1)}{2} + 2$ неравенств. Данные о вычислительной сложности использования каждой из сформулированных выше теорем приводятся в табл. 1.

Для оценки анизотропийной нормы системы (1)–(2) можно решить задачу минимизации переменной γ на множестве выпуклых ограничений, задаваемых рассмотренными выше теоремами.

К сожалению, аналитические методы не позволяют оценить степень консерватизма полученных в теоремах 3 и 4. Оценить степень консерватизма условий можно только для конкретных примеров численными методами. Эти методы можно разработать на основе теоремы 1. Рассмотрим сеточный метод анализа политопических систем с использованием теоремы 1. Алгоритм может быть представлен в следующем виде.

Алгоритм 1 (Сеточный метод)

Шаг 1. Задаем уровень средней анизотропии $a \geq 0$ и шаг сетки h . Задаем множество Ω , лежащее внутри единичного куба из $\mathbb{R}^{r-1}$ и состоящее из множества точек — узлов сетки. Фиксируем параметр Θ , назначая первые $(r - 1)$ компонент координатами точки из множества Ω , а последнюю вычисляем по формуле

$$\theta_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i = 1.$$

Шаг 2. Задаем $k = 1$.

Шаг 3. Пока $k \leq N$, выбираем элемент множества Ω_k , фиксируем матрицы системы $A_k = \sum_{i=1}^r \theta_i A_i$, $B_k = \sum_{i=1}^r \theta_i B_{wi}$, $C_k = \sum_{i=1}^r \theta_i C_{zi}$, $D_k = \sum_{i=1}^r \theta_i D_{zwi}$.

Шаг 4. Для фиксированных значений A_k , B_k , C_k , D_k решается оптимизационная задача:

$$\gamma_k^2 = \min \gamma^2$$

на множестве переменных $\{\eta, \gamma^2, P, \Psi, G_1, G_2\}$, удовлетворяющих неравенствам (9)–(11).

Шаг 5. Если система матричных неравенств неразрешима на шаге 4, то система является неустойчивой при данных значениях параметров, а алгоритм останавливается. Если решение найдено, то вычисляется значение $\gamma_* = \max\{\gamma_k, \gamma_{k-1}\}$, Если $k < N$, то $k = k + 1$, возвращаемся на шаг 4. Если $k = N$, то переходим на шаг 6.

Шаг 6. Верхняя граница анизотропийной нормы определяется как γ_* .

К одному из недостатков такого метода следует отнести то, что достаточно крупный шаг сетки не позволит с удовлетворительной точностью оценить анизотропийную норму и дать ответ об устойчивости системы. Поэтому рекомендуется сначала проверить систему на робастную устойчивость одним из существующих методов.

4. Численный пример

В следующем примере оценим степень консерватизма методов оценки анизотропийной нормы политопической системы, сформулированных в теоремах 2–4.

Пример 1. Пусть система задается следующими матрицами:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,7 \\ 0,5 & -0,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,5 & -0,7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_{w3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad D_{w1} = 0, \quad D_{w2} = 0,1, \quad D_{w3} = -0,1.$$

Заметим, что данная система является устойчивой при всех возможных значениях параметров Θ . Для оценки степени консерватизма методов, предложенных в теоремах 2–4, воспользуемся сеточным методом анализа системы с шагом сетки $h = 0,01$. На рис. 1–3 представлены результаты минимизации величины γ в различных узлах сетки. При вычислении нормы использовалась теорема 1 для выбранных числовых значений вектора параметров Θ в различных узлах сетки.

Как видно из графиков, двойной супремум (6) для различных уровней средней анизотропии a достигается в точках Θ , не совпадающих друг с другом. Изменение нормы происходит плавно и без скачков. Проверка условий устойчивости и попытка оценить анизотропийную норму с помощью теоремы 2 приводит к неразрешимой задаче, поэтому численные результаты приведены только для теорем 3 и 4. Результаты численных экспериментов по вычислению анизотропийной нормы приведены в табл. 2.

Условия теоремы 2 являются самыми консервативными, что привело к неразрешимой задаче. Теоремы 3 и 4 позволяют численно оценить анизотропийную норму заданной системы с помощью линейных матричных неравенств. Как видно из табл. 2, условия теоремы 4 дают более консервативные результаты. Несмотря на это, асимптотика анизотропийной нормы для приведенных численно реализуемых методов сохраняется при существенно меньшей вычислительной сложности. Таким образом, данные методы можно использовать для оценки анизотропийного качества политопических систем.

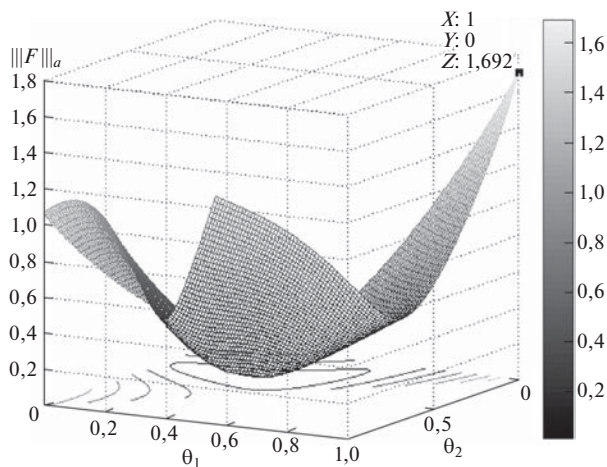


Рис. 1. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 0$.

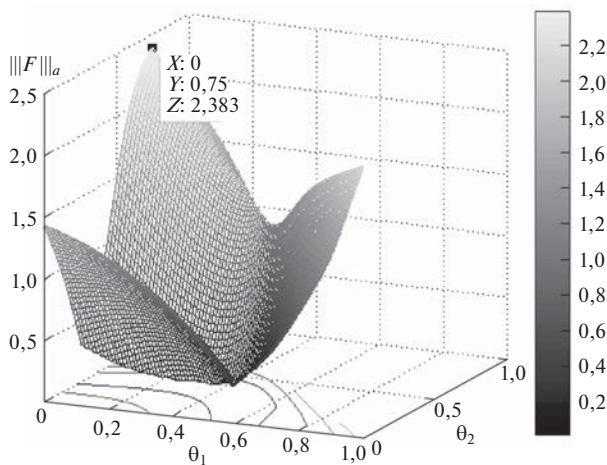


Рис. 2. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 0,5$.

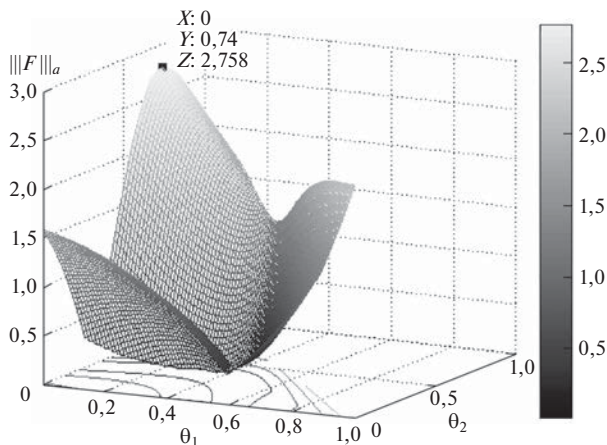


Рис. 3. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 1,5$.

Таблица 2. Результаты вычисления анизотропийной нормы в примере 1

Средняя анизотропия a	0	0,1	0,5	1	1,5	100
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 1	1,6921	1,9258	2,3825	2,6616	2,7564	2,8100
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 3	4,6495	6,2913	7,9585	8,6163	8,8423	8,9707
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 4	6,7304	8,1552	9,0582	9,3701	9,4742	9,5327

Таблица 3. Результаты вычисления анизотропийной нормы в примере 2

Средняя анизотропия a	0	0,1	0,3	0,7	1,5	10
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 2	0,0771	1,1699	1,9277	2,6854	3,3354	3,7838
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 3	0,0728	0,3581	0,5827	0,8088	1,0032	1,1375
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 4	0,0727	0,3579	0,5820	0,8083	1,0028	1,1366

Пример 2. Рассмотрим теперь математическую модель затухающих колебаний пружинного маятника:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t), \\ y(t) &= x_1(t) + D_w w(t).\end{aligned}$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix},$$

где ω — собственная частота системы, ξ — коэффициент затухания, $x_1(t)$ — координата центра масс маятника, а $x_2(t)$ — скорость центра масс.

Возмущение $w(t) \in \mathbb{R}^2$ состоит из внешнего возмущающего воздействия, действующего на координату $x_1(t)$, и шума измерения. Тогда

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = [0 \quad 0, 1].$$

Пусть также параметры системы имеют вид $\xi = 0,1$, $\omega \in [4,5; 5,2]$.

Исходная система непрерывного времени дискретизируется с помощью экстраполятора нулевого порядка как

$$(28) \quad A^d = e^{A^f h}, \quad B_w^d = \int_0^h e^{A^f(h-\tau)} B^w d\tau,$$

где h — шаг дискретизации.

Исходная непрерывная модель была дискретизована с шагом $h = 10^{-3}$ с. В результате были получены следующие параметры:

$$\begin{aligned}A_1^d &= \begin{bmatrix} 1 & 0,0010 \\ -0,0202 & 0,9991 \end{bmatrix}, \quad A_2^d = \begin{bmatrix} 1 & 0,0010 \\ -0,0270 & 0,9989 \end{bmatrix}, \\ B_{w1}^d &= 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,0101 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{w2}^d = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,0135 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= C_2 = [1 \quad 0], \quad D_{w1} = D_{w2} = [0 \quad 0,1].\end{aligned}$$

Отметим, что исходная система является устойчивой. Результаты вычисления анизотропийной нормы для пружинного маятника сведены в табл. 3.

5. Заключение

В работе получены условия ограниченности α -анизотропийной нормы линейной политопической системы в терминах линейных матричных неравенств. Были рассмотрены различные варианты непараметрической оценки анизотропийной нормы, а также проведен анализ точности оценивания и вычислительной сложности данных методов. Условия являются выпуклыми и сформулированы в форме матричных неравенств, количество которых зависит от числа вершин политопа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части будут получены условия, при которых политопическая система (1)–(2) является робастно устойчивой, а ее $\mathcal{H}_\infty$ -норма ограничена некоторым числом $\sqrt{\eta}$, т.е. $F_\Theta \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$. Во второй части доказательства получим условия ограниченности анизотропийной нормы для робастно устойчивой системы $F_\Theta \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$.

Рассмотрим параметрическую функцию в качестве кандидата на роль функции Ляпунова в виде

$$(П.1) \quad V(k) = x^T(k)P(\Theta)x(k), \quad P(\Theta) > 0.$$

Так как сначала требуется доказать устойчивость системы и ограниченность ее $\mathcal{H}_\infty$ -нормы, то для упрощения выкладок и без снижения общности предположим, что $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_2$. Разница между приращениями $V(k+1)$ и $V(k)$ определяется по формуле

$$(П.2) \quad V(k+1) - V(k) = x^T(k+1)P(\Theta)x(k+1) - x^T(k)P(\Theta)x(k).$$

Рассмотрим теперь выражение:

$$\begin{aligned} (П.3) \quad & V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \eta w^T(k)w(k) = \\ & = \{ \text{подставим } x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_w(\Theta)w(k) \\ & \quad \text{и } z(k) = C(\Theta)x(k) + D_w(\Theta)w(k) \} = \\ & = [x^T(k) \quad w^T(k)] \left([A(\Theta) \quad B_w(\Theta)]^T P(\Theta) \times \right. \\ & \quad \times [A(\Theta) \quad B_w(\Theta)] + [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)]^T [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)] - \\ & \quad \left. - \begin{bmatrix} P(\Theta) & 0 \\ 0 & \eta I_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$(П.4) \quad V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \eta w^T(k)w(k) < 0$$

справедливо для всех $x(k)$ и $w(k)$, если

$$\begin{aligned} (П.5) \quad & [A(\Theta) \quad B_w(\Theta)]^T P(\Theta) [A(\Theta) \quad B_w(\Theta)] + \\ & + [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)]^T [C(\Theta) \quad D_w(\Theta)] - \begin{bmatrix} P(\Theta) & 0 \\ 0 & \eta I_m \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Преобразуем неравенство (П.5) к виду

$$(П.6) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -\eta I_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix}^T \times \\ \times \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0,$$

где матрица $\begin{bmatrix} -P^{-1}(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}$ является отрицательно определенной. Применяя к неравенству (П.6) лемму о дополнении Шура, имеем

$$(П.7) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A(\Theta) & B_w(\Theta) & -P^{-1}(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Выполнение неравенства (П.6) для ненулевого входного сигнала делает справедливым неравенства вида (П.4) для любого $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ и позволяет выполнить их суммирование от $k = 0$ до $k = \infty$. Откуда следует выполнение неравенства

$$(П.8) \quad V(\infty) - V(0) + \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k) - \eta \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) < 0.$$

Для нулевых начальных условий ($x(0) = 0$) $V(0) = 0$, предполагая, что $V(\infty) = 0$, неравенство (П.8) преобразуется к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k) < \eta \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k).$$

Таким образом,

$$(П.9) \quad \sup_{\Theta \in \Omega} \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)} < \eta.$$

Выполнение неравенства (П.7) гарантирует устойчивость разомкнутой системы (1)–(2) и ограниченность ее $\mathcal{H}_\infty$ -нормы сверху числом $\sqrt{\eta}$.

На втором этапе необходимо найти условия, которые гарантируют ограниченность анизотропийной нормы для уровня средней анизотропии входных возмущений $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Тогда условия ограниченности анизотропийной нормы могут быть определены анизотропийной частотной теоремы [12] в следующей форме:

$$(П.10) \quad -(\det(\Sigma(\Theta)))^{1/m} < -(1 - q\gamma^2)e^{2a/m},$$

$$(П.11) \quad \begin{bmatrix} A(\Theta)R(\Theta)A(\Theta) - R(\Theta) & A^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) \\ B_w^T(\Theta)R(\Theta)A(\Theta) & B_w^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) - I_m \end{bmatrix} + \\ + q \begin{bmatrix} C^T(\Theta) \\ D_w^T(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0,$$

где $q \in (0, \min(\gamma^{-2}, \|F_\Theta\|_\infty^{-2}))$, а $\Sigma(\Theta)$ определяется из выражения

$$(II.12) \quad \Sigma(\Theta) = (I_m - B_w^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) - qD_w^T(\Theta)D_w(\Theta)).$$

Неравенство (II.11) совпадает с неравенством (II.5) с учетом замены переменных $P(\Theta) = \eta R(\Theta)$ и $\eta = q^{-1}$. Таким образом, анизотропийная норма системы ограничена, если выполняются неравенства (II.7) и (II.11).

Рассмотрим подробнее неравенство (II.10). С учетом введенных обозначений оно может быть переписано в виде

$$(II.13) \quad \eta - (e^{-2a} \det(\eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta)))^{1/m} < \gamma^2.$$

Вводя новую переменную

$$\Psi(\Theta) < \eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta),$$

где $\Psi(\Theta) = \Psi(\Theta)^T > 0$ [13], убеждаемся, что неравенство (II.13) выполнено, если справедливы два следующих неравенства:

$$(II.14) \quad \eta - (e^{-2a} \det(\Psi(\Theta)))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$(II.15) \quad \Psi(\Theta) < \eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta).$$

Перепишем (II.15) как

$$(II.16) \quad \Psi(\Theta) - \eta I_m - \begin{bmatrix} B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w(\Theta) \\ D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0.$$

Применяя лемму о дополнении Шура к (II.16), получаем

$$(II.17) \quad \begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \\ B_w(\Theta) & -P^{-1}(\Theta) & 0 \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Умножим неравенство (II.17) слева и справа на матрицу $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & G_1(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ и ее транспонированную, получим

$$(II.18) \quad \begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & \Lambda_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $\Lambda_1(\Theta) = -G_1(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_1^T(\Theta)$.

Отметим, что для $P(\Theta) > 0$ из неравенства

$$-(G_1(\Theta) - P(\Theta))^T P^{-1}(\Theta)(G_1(\Theta) - P(\Theta)) \leq 0$$

следует, что

$$-G_1(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_1^T(\Theta) \leq -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta).$$

Вводя обозначение $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$ и заменяя $\Lambda_1(\Theta)$ на $L_1(\Theta)$ в неравенстве (П.18), получаем неравенство (14).

Избавимся от обращения матрицы $P(\Theta)$ в неравенстве (П.7). Для этого введем новую невырожденную матрицу $G_2(\Theta)$. Умножая слева и справа неравенство (П.7) на невырожденную матрицу

$$(П.19) \quad \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

и ее транспонированную соответственно, получим:

$$(П.20) \quad \begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & \Lambda_2(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где

$$(П.21) \quad \Lambda_2(\Theta) = -G_2(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_2^T(\Theta).$$

Аналогично предыдущему случаю заменяем $\Lambda_2(\Theta)$ на выражение $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^T(\Theta) + P(\Theta)$. В результате чего получим выражение (15).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Зададим матрицы $\Psi(\Theta)$, $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и $P(\Theta)$ в форме $\Psi(\Theta) = \Psi$, $G_1(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i G_{1i}$, $G_2(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i G_{2i}$, $P(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i P_i$. Перепишем неравенства (14) и (15) с учетом введенных допущений.

Следует заметить, что неравенства (14) и (15) содержат блоки из постоянных матриц, параметрических матриц и произведений двух параметрических матриц. С учетом введенной структуры параметрических переменных, а также принимая во внимание тот факт, что $(\sum_{i=1}^s \theta_i)^2 = 1$, постоянные матрицы могут быть записаны в форме

$$I_p = \left(\sum_{i=1}^s \theta_i \right)^2 I_p.$$

Параметрические матрицы могут быть переписаны в форме

$$\sum_{i=1}^r \theta_i A_i = \sum_{i=1}^r \theta_i \left(\sum_{j=1}^r \theta_j \right) A_i$$

в силу тождества $\sum_{j=1}^r \theta_j = 1$.

Выражения вида $G_1(\Theta)B_w(\Theta)$ записываются следующим образом:

$$G_1(\Theta)B_w(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i^2 (G_{1i}B_i) + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j (G_{1i}B_{wj} + G_{1j}B_{wi}).$$

Применим приведенные выше преобразования ко всем элементам неравенств (14) и (15), получим :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i}B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j}B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^T + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0, \\ & \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_i & G_{2i}B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_j & G_{2i}B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} -P_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2j}A_i & G_{2j}B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^T + P_j & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0. \end{aligned}$$

Так как $\theta_i \geq 0$, $i = \overline{1, r}$, то очевидно, что неравенства (13)–(15) выполняются, когда выполняются неравенства (19)–(23).

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим неравенства (П.7) и (П.17), полученные при доказательстве теоремы 1. Введем переменную $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$, а также зафиксируем параметр η и матрицу Ψ . Тогда неравенства (П.7) и (П.17) перепишутся в следующем виде:

$$(П.22) \quad \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \\ B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & 0 \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0$$

и

$$(П.23) \quad \begin{bmatrix} -\Phi^{-1}(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_m & \star & \star \\ A(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Последнее неравенство содержит матрицу $\Phi^{-1}(\Theta)$. Чтобы избавиться от нее, умножим неравенство (П.23) слева и справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} G^T(\Theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}$$

и ее транспонированную соответственно. В результате получаем:

$$(П.24) \quad \begin{bmatrix} \Lambda(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A(\Theta)G(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ C(\Theta)G(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $\Lambda(\Theta) = -G^T(\Theta)\Phi^{-1}(\Theta)G(\Theta)$.

Заметим, что $\Phi(\Theta) > 0$, поэтому из выполнения неравенства

$$-(G(\Theta) - \Phi(\Theta))^T \Phi^{-1}(\Theta) (G(\Theta) - \Phi(\Theta)) \leq 0$$

следует, что $-G^T(\Theta)\Phi^{-1}(\Theta)G(\Theta) \leq -G(\Theta) - G^T(\Theta) + \Phi(\Theta)$. Из последнего следует, что неравенство (П.24) справедливо, если справедливо неравенство (П.23).

Принимая во внимание выражения для параметрических неопределенностей (3)–(4), рассмотрим матрицу $\Phi(\Theta)$ в форме $\Phi(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i \Phi_i$. Тогда неравенства (П.22) и (П.24) запишутся в следующем виде:

$$(П.25) \quad \sum_{i=1}^r \theta_i \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\
(П.26) \quad & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0.
\end{aligned}$$

Следует заметить, что неравенство (П.26) можно получить, используя свойство (4) и учитывая, что $(\sum_{i=1}^r \theta_i)^2 = 1$. Очевидно, что из выполнения неравенств (25)–(27) автоматически следует выполнение неравенств (П.25) и (П.26), что завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gahinet P., Apkarian P., Chilali M.* Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 436–442.
2. *Daafouz J., Bernussou J.* Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties // Systems & Control Letters. 2001. V. 43. No. 5. P. 355–359.
3. *Peaucelle D., Arzelier D.* Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions // IEEE Trans. Automat. Control. 2001. V. 46. P. 624–630.
4. *de Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A new discrete-time robust stability condition // Systems & Control Letters. 1999. V. 37. No. 4. P. 261–265.
5. *Oliveira R.C.L.F., Peres P.L.D.* A convex optimization procedure to compute $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms for uncertain linear systems in polytopic domains // Optim. Control Appl. Meth. 2008. V. 29. P. 295–312.
6. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of signals and the entropy of linear stationary systems // Doklady Math. 1995. V. 51. No. 3. P. 388–390.
7. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13th IFAC World Congress (San-Francisco, USA). 1996. P. 179–184.
8. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time-invariant control systems // Int. J. of Control. 2001. V. 74. No. 1. P. 28–42.
9. *Andrianova O.G., Belov A.A.* On Robust Performance Analysis of Linear Systems with Polytopic Uncertainties Affected by Random Disturbances // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). 2019. P. 1–6.

10. *Belov A.A.* Random Disturbance Attenuation in Discrete-time Polytopic Systems: Performance Analysis and State-Feedback Control // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). 2020. P. 633–637.
11. *Belov A.A.* Robust pole placement and random disturbance rejection for linear polytopic systems with application to grid-connected converters // European Journal of Control. 2022. V. 63. P. 116–125.
12. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Matrix Inequalities // Doklady Math. 2011. V. 48. No. 3. P. 895–898.
13. *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации. . . // Дисс. . . д-ра техн. наук. М.: 2012.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 16.05.2023

После доработки 19.07.2023

Принята к публикации 31.08.2023

СОДЕРЖАНИЕ

Тематический выпуск

К 110-летию со дня рождения вице-президента АН СССР Бориса Николаевича Петрова	3
Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В., Третьякова Е.А. Определение взаимного расположения объектов на основе магнитоградиентных измерений.....	6
Галяев А.А., Яхно В.П., Лысенко П.В., Берлин Л.М., Бузиков М.Э. Оптимизация плана перехвата прямолинейно движущихся целей.....	18
Иванов В.П., Завадский В.К., Муранов А.А., Чадаев А.И., Каблова Е.Б., Кленовая Л.Г., Тропова Е.И. Терминальное управление движением центра масс и расходом топлива жидкостных ракет-носителей	37
Кульба В.В., Микрин Е.А., Павлов Б.В., Сомов С.К. Технология комплексной отработки программного обеспечения бортовых систем космических аппаратов	48
Кустов А.Ю. Параметризация оптимальных анизотропийных регуляторов.....	59
Лаговский Б.А., Рубинович Е.Я. Повышение углового разрешения и дальности действия измерительных систем, использующих сверхширокополосные сигналы.....	72
Рутковский В.Ю. , Глумов В.М. Управление манипулятором свободно летающего космического робота с полезным грузом.....	91
Хлебников М.В. Подавление внешних возмущений в дискретной системе управления как задача оптимизации	104
Шевченко А.М., Павлов Б.В., Начинкина Г.Н. Информационная поддержка экипажа воздушного судна на взлетно-посадочных режимах	118
Ядыкин И.Б., Галяев И.А. Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления	132

Робастное, адаптивное и сетевое управление

Белов А.А. Численные методы анализа робастного качества дискретных линейных политопических систем по отношению к случайным возмущениям.....	150
---	-----

CONTENTS

Topical issue

To the 110th Anniversary of the Birth of Vice-President of the USSR Academy of Sciences Boris Nikolaevich Petrov	3
Volkovitsky A.K., Karshakov E.V., Pavlov B.V., Tretyakova E.A. Determination of the Relative Positioning based on Magnetogradient Measurements	6
Galyaev A.A., Yakhno V.P., Lysenko P.V., Berlin L.M., Buzikov M.E. Optimization of Interception Plan for Rectilinearly Moving Targets.....	18
Ivanov V.P., Zavadsky V.K., Muranov A.A., Chadaev A.I., Kablova E.B., Klenovaya L.G., Tropova E.I. Terminal Control of the Mass Motion and Fuel Consumption of Liquid-Propellant Launch Vehicles.....	37
Kul'ba V.V., Mikrin E.A., Pavlov B.V., Somov S.K. Technology for Integrated Testing of Software for On-Board Systems of Spacecraft	48
Kustov A.Yu. Parametrization of Optimal Anisotropic Controllers.....	59
Lagovsky B.A., Rubinovich E.Ya. Increasing the Angular Resolution and Ranges of Measuring Systems, Using Ultra-Wideband Signals	72
Rutkovsky V.Yu., Glumov V.M. Manipulator Control of a Free-Flying Space Robot with a Payload	91
Khlebnikov M.V. Rejection of Exogenous Disturbances in Discrete-Time Control Systems as an Optimization Problem	104
Shevchenko A.M., Pavlov B.V., Nachinkina G.N. Information Support Aircraft Crew on Runway Modes	118
Yadykin I.B., Galyaev I.A. Spectral Decompositions of Gramians and Energy Metrics of Continuous Unstable Control Systems.....	132

Robust, Adaptive and Network Control

Belov A.A. Numerical Methods for Robust Performance Analysis of Linear Discrete-Time Polytopic Systems with Respect to Random Disturbanc.....	150
--	-----