

© 2024 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук (va.alexandrov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ПРИ СИНТЕЗЕ РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ¹

Рассматривается задача поиска размещения полюсов замкнутой системы управления, которое обеспечивает минимизацию целевой функции. Критерием оптимальности системы выбрано значение H_∞ нормы частотной передаточной функции относительно возмущения при соблюдении ограничений на размещение полюсов системы и значения H_∞ норм функции чувствительности и передаточной функции от помехи измерения к управлению. Сформулирована задача оптимизации, в которой вектор варьируемых переменных – это корни характеристического полинома замкнутой системы, допустимые значения которых ограничены заданной областью размещения полюсов, а целевая функция, кроме критерия оптимальности, включает штрафные элементы, сформированные для остальных ограничений. Предложено использовать логарифмический масштаб для модулей корней характеристического полинома как элементов вектора варьируемых переменных. Проблема многоэкстремальности целевой функции решается применением процедуры множественного старта. Для поиска используется модификация покоординатного спуска, в которой варьируется одновременно пара координат.

Ключевые слова: синтез регулятора, передаточная функция, размещение полюсов, оптимизация, робастная система.

DOI: 10.31857/S0005231024050012, **EDN:** YQHOSU

1. Введение

Подавление действия неизмеряемого возмущения – одна из основных задач синтеза регулятора [1]. С другой стороны, учитывая, что используемая при синтезе регулятора модель объекта неточна, полученная система должна удовлетворять условиям робастности. Для линейных систем в первую очередь должны выполняться требования к запасам устойчивости [2]. Эти требования могут быть выражены как задание минимально допустимого радиуса запасов устойчивости [3] или ограничение значения функции чувствительности [4, 5]. Мерой робастности к немоделируемой динамике может служить H_∞ норма функции чувствительности к помехе измерения [5, 6].

Многие методы синтеза регулятора сводятся к задаче оптимизации. Так, методы H_∞ -оптимизации [7] и инвариантных эллипсоидов [1] сводятся к оптимизационной процедуре решения системы линейных матричных неравенств.

¹ Исследования, представленные в разделах 2 и 3, выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00588, <https://rscf.ru/project/23-29-00588/>).

Задача оптимизации может стать невыпуклой и многоэкстремальной при задании структуры регулятора, когда варьируемые переменные – это коэффициенты регулятора [8, 9]. Успешные результаты решения таких задач позволили развивать подобные подходы для настройки широко применяемых на практике ПИД-регуляторов [10, 11].

В [12] рассмотрена линейная система с одним входом и одним выходом и предложена идея оптимизации размещения полюсов замкнутой системы, когда коэффициенты регулятора находятся с помощью стандартной процедуры размещения полюсов, а корни желаемого характеристического полинома замкнутой системы ищутся при помощи процедуры оптимизации, исходя из заданных критериев качества и ограничений. При этом была использована стандартная процедура глобальной оптимизации из пакета MATLAB Global Optimization Toolbox [13]. Критерием качества было выбрано значение H_∞ нормы передаточной функции относительно возмущения при заданных ограничениях на значения H_∞ норм функции чувствительности и передаточной функции от помехи измерения к управлению. Кроме того, должны выполняться ограничения на размещение полюсов системы. Настоящая статья посвящена разработке процедуры оптимизации специально для решения задачи выбора размещения полюсов замкнутой системы, минимизирующего заданную целевую функцию при соблюдении заданных ограничений, и с учетом особенностей корней характеристического полинома в качестве варьируемых переменных.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная система с одним входом управления и одним регулируемым выходом, структура которой представлена на рис. 1. Пусть объект описывается передаточной функцией:

$$(1) \quad P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

где s – переменная преобразования Лапласа, значения коэффициентов a_i, b_i ($i = 0, \dots, n-1$) $\in \mathbb{R}$ известны, причем хотя бы один из коэффициентов b_i не равен 0 и полиномы $a(s), b(s)$ взаимно просты. При $s = j\omega$, где $\omega \in [0, \infty)$,

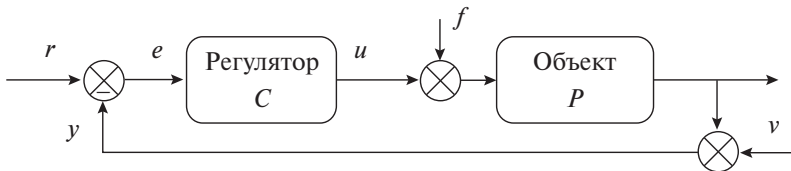


Рис. 1. Замкнутая система: y – измеряемый выход, ν – помеха измерения, r – сигнал задания, e – ошибка управления, u – управление, f – внешнее возмущение.

получим частотную передаточную функцию. Следует отметить, что использование частотных передаточных функций подразумевает, что сигналы в системе, в том числе и неизмеряемое внешнее возмущение, интегрируемы и удовлетворяют ограничениям для применения преобразования Фурье [2]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Полагаем, что передаточная функция регулятора имеет вид

$$(2) \quad C(s) = \frac{d(s)}{c(s)} = \frac{d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0}{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0},$$

где порядок регулятора $n - 1$ обусловлен порядком модели объекта (1). Регулятор большего порядка, который может получаться, например, при добавлении в регулятор интегральной составляющей, здесь не рассматривается, а регулятор меньшего порядка не может быть получен методом размещения полюсов, что будет пояснено ниже.

Метод размещения полюсов [14, 15] заключается в том, что полиномы $c(s)$, $d(s)$ регулятора (2) могут быть получены путем решения уравнения

$$(3) \quad a(s)c(s) + b(s)d(s) = \delta(s),$$

где левая часть – это характеристический полином системы (1), (2), в котором $a(s), b(s)$ – известные полиномы передаточной функции объекта, а $\delta(s)$ – заданный желаемый характеристический полином. Известно [14], что существует единственное решение этого уравнения для условия $\deg d(s) < \deg a(s)$ или $\deg c(s) < \deg b(s)$. Кроме того, при условии $\deg \delta(s) \geq 2 \deg a(s) - 1$ соблюдается причинность управления: $\deg d(s) \leq \deg c(s)$. Тогда, выбирая желаемый полином $\delta(s)$ степени $\deg \delta(s) = 2 \deg a(s) - 1$, очевидно получим решение вида (2), для которого выполняются условия $\deg d(s) \leq \deg c(s)$ и $\deg d(s) < \deg a(s)$. В этом случае уравнение (3) можно решить, составив систему $2n$ линейных алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными, приравняв коэффициенты левой и правой частей уравнения (3) при равных степенях s :

$$(4) \quad \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ \dots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ \dots \\ d_0 \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{2n-1} \\ \dots \\ \delta_0 \end{bmatrix},$$

где $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ – матрица, полученная из значений коэффициентов a_i, b_i ($i = 0, \dots, n - 1$).

Таким образом, для любого объекта вида (1) можно найти регулятор вида (2), обеспечивающий любой заданный характеристический полином замкнутой системы $\delta(s)$ степени $2n - 1$. Следует заметить, что для неустойчивого объекта порядка n может не существовать регулятора порядка, меньшего чем $n - 1$, обеспечивающего хотя бы устойчивость системы. Поэтому предлагается рассматривать регулятор порядка $n - 1$, что позволит обеспечить не только устойчивость, но и другие свойства системы, выбирая соответствующий желаемый характеристический полином.

Характеристический полином можно представить в виде

$$(5) \quad \delta(s) = \prod_{i=1}^{n_r} (s + \lambda_i) \prod_{k=1}^{n_c} (s^2 + 2\zeta_k \check{\omega}_k s + \check{\omega}_k^2),$$

где $n_r = 2n - 2n_c - 1$ – число вещественных корней полинома $\delta(s)$, n_c – число комплексно-сопряженных пар корней, значения $\lambda_i, \check{\omega}_k \in \mathbb{R}$, $\zeta_k \in [0, 1]$ определяют размещение полюсов замкнутой системы и коэффициенты $\delta_0, \dots, \delta_{2n-2}$ в (4) при том, что $\delta_{2n-1} = 1$. Собственные частоты системы обозначаем как $\check{\omega}_k$, так как обозначение ω использовано для частоты в передаточных функциях.

Кроме стандартных ограничений $\lambda_i > 0$, $\check{\omega}_k > 0$, $0 < \zeta_k \leq 1$, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы, можно задать дополнительные:

$$(6) \quad 0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}, \quad 0 < \check{\omega}_{\min} \leq \check{\omega}_k \leq \check{\omega}_{\max}, \quad 0 < \zeta_{\min} \leq \zeta_k \leq 1$$

для получения желаемого быстродействия и демпфирования системы и ограничения высокочастотных составляющих.

Так же как в [12], критерием качества системы будем считать значение H_∞ нормы частотной передаточной функции относительно возмущения

$$(7) \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{b(j\omega)c(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right|.$$

При этом должны выполняться следующие ограничения:

– для H_∞ нормы функции чувствительности

$$(8) \quad \|S(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{a(j\omega)c(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right| \leq S_{\max},$$

чтобы обеспечить необходимые запасы устойчивости,

– для H_∞ нормы передаточной функции относительно помехи

$$(9) \quad \|G_{uv}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{a(j\omega)d(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right| \leq N_{\max},$$

чтобы обеспечить робастность системы при наличии немоделируемой динамики [5, 6], ограничивая коэффициент усиления регулятора.

Итак, задача состоит в том, чтобы для объекта (1) при заданных значениях a_i, b_i ($i = 0, \dots, n-1$), $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \check{\omega}_{\min}, \check{\omega}_{\max}, \zeta_{\min}, S_{\max}, N_{\max}$ найти регулятор (2), минимизирующий действие внешнего возмущения в смысле нормы (7) при соблюдении ограничений (6), (8) и (9). Ее можно сформулировать как задачу оптимизации.

Задача 1. Найти

$$\min_{x \in Q} \|G_{yf}(j\omega, x)\|_{\infty}$$

при ограничениях

$$(10) \quad \begin{aligned} \|S(j\omega, x)\|_{\infty} &\leq S_{\max}, \\ \|G_{uv}(j\omega, x)\|_{\infty} &\leq N_{\max}, \end{aligned}$$

где $S_{\max}, N_{\max}$ – заданные значения. Вектор варьируемых переменных $x \in \mathbb{R}^{2n-1}$ имеет вид

$$(11) \quad x = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n_r}, \check{\omega}_1, \dots, \check{\omega}_{n_c}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}],$$

где n_r, n_c – заданные числа: $0 \leq n_c \leq n-1$, $n_r = 2n - 2n_c - 1$, n – заданный порядок объекта (1). Область допустимых значений Q определяется неравенствами (6) с заданными параметрами $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \check{\omega}_{\min}, \check{\omega}_{\max}, \zeta_{\min}$. Частотные передаточные функции $G_{yf}(j\omega, x)$, $S(j\omega, x)$, $G_{uv}(j\omega, x)$ формируются в соответствии с (7)–(9) из заданных полиномов объекта (1) $a(j\omega)$, $b(j\omega)$, полинома $\delta(j\omega)$, определяемого для вектора (11) по формуле (5), и полиномов регулятора $c(j\omega)$, $d(j\omega)$, коэффициенты которых находятся путем решения системы (4).

Следует заметить, что может существовать выбор ограничений (6), (8) и (9), которые не могут быть выполнены одновременно, т.е. множество допустимых значений будет пусто. Вопрос согласования ограничений в этой работе не рассматривается, и предполагается, что ограничения совместны. На практике для конкретной задачи может проводиться итерационный процесс поиска приемлемых значений ограничений, для которых может быть найдено приемлемое значение минимизируемой функции.

3. Поиск оптимальных корней характеристического полинома

3.1. Целевая функция со штрафами

Предлагается для учета ограничений (10) использовать метод штрафных функций, где штрафная функция $\tilde{G}(x)$ для значения $\|G(j\omega, x)\|_{\infty}$ формируется следующим образом:

$$(12) \quad \tilde{G}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \|G(j\omega, x)\|_{\infty} \leq G_{\max}, \\ \ln \frac{\|G(j\omega, x)\|_{\infty}}{G_{\max}}, & \text{если } \|G(j\omega, x)\|_{\infty} > G_{\max}. \end{cases}$$

Целевая функция в этом случае принимает вид

$$(13) \quad f(x) = \|G_{yf}(j\omega, x)\|_\infty + \mu_1 \tilde{S}(x) + \mu_2 \tilde{G}_{uv}(x),$$

где $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ – весовые коэффициенты, $\tilde{S}(x)$, $\tilde{G}_{uv}(x)$ – штрафные функции, полученные по (12) для ограничений (10). Следует заметить, что в соответствии с (12) в точках, где $\|S(j\omega, x)\|_\infty = S_{\max}$ или $\|G_{uv}(j\omega, x)\|_\infty = N_{\max}$, целевая функция (13) недифференцируема. Кроме того, функции (7)–(9) могут быть невыпуклыми и многоэкстремальными и градиент для них не выписывается в явном виде.

3.2. Масштабирование варьируемых переменных

При анализе динамических систем в частотной области часто используется логарифмический масштаб [2]. Заметим, что элементы вектора варьируемых переменных (11) λ_i , $\tilde{\omega}_k$ являются собственными частотами системы. Предлагается перевести их в логарифмический масштаб, таким образом придавая больший вес изменению корней с модулем, близким к нулю, описывающим медленную динамику системы, по сравнению с изменением корней с большим модулем, относящимся к быстрой динамике:

$$(14) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= [\lg \lambda_1, \dots, \lg \lambda_{n_r}, \lg \tilde{\omega}_1, \dots, \lg \tilde{\omega}_{n_c}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}] = \\ &= [\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n_r}, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{n_c}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}], \end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}_i$, $\tilde{\omega}_i$ – десятичные логарифмы переменных λ_i и $\tilde{\omega}_i$. При этом ограничения (6) принимают вид

$$(15) \quad 0 < \lg \lambda_{\min} \leq \tilde{\lambda}_i \leq \lg \lambda_{\max}, \quad 0 < \lg \tilde{\omega}_{\min} \leq \tilde{\omega}_k \leq \lg \tilde{\omega}_{\max}, \quad 0 < \zeta_{\min} \leq \zeta_k \leq 1.$$

Для вычисления целевой функции нужно обратно привести значения варьируемых переменных к виду (11) возведением в степень: $\lambda_i = 10^{\tilde{\lambda}_i}$, $i = 1, \dots, n_r$, $\tilde{\omega}_i = 10^{\tilde{\omega}_i}$, $i = 1, \dots, n_c$. Обозначения без индекса $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\omega}$, ζ будем использовать для соответствующих групп в векторе варьируемых переменных (14):

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= [\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n_r}], \\ \tilde{\omega} &= [\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{n_c}], \\ \zeta &= [\zeta_1, \dots, \zeta_{n_c}], \end{aligned}$$

и вектор (14) представлять как $\tilde{x} = [\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}, \zeta]$.

При проектировании систем обычно пренебрегают динамикой с частотами, которые многократно выше минимальной собственной частоты объекта управления. Поэтому разница для десятичных логарифмов допустимых значений модулей корней характеристического полинома обычно не превышает 5. Так, при рассмотрении системы с медленной динамикой, где, например,

$\lambda_{\min} = 0,001$ и $\lambda_{\max} = 1$, получим $\lg \lambda_{\min} = -3$, $\lg \lambda_{\max} = 0$, а для системы с быстрой динамикой могут быть значения $\lg \lambda_{\min} = 2$, $\lg \lambda_{\max} = 6$ при таких же или близких значениях для $\lg \tilde{\omega}_{\min}$ и $\lg \tilde{\omega}_{\max}$. Тогда очевиден выбор минимального шага для групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$. При таких масштабах из практических соображений следует, что шаг в диапазоне от 0,0001 до 0,01 будет достаточно малым. Для группы ζ , элементы которой находятся в диапазоне $[\zeta_{\min}, 1]$, такой размер шага также является разумным.

3.3. Множественный старт

Один из стандартных подходов к решению проблемы многоэкстремальности целевой функции (13) – это множественный старт, когда процедура поиска запускается из разных начальных точек. Для рассматриваемой задачи можно использовать, например, такое правило выбора начальных значений:

– выбрать количество вариантов n_1, n_2, n_3 для каждой из групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}, \zeta$;

– для групп $\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}$ сформировать варианты, где первые элементы групп равномерно распределяются в разрешенном диапазоне, а остальные элементы равномерно распределяются в диапазоне $[\tilde{\lambda}_1, \lg \lambda_{\max}]$ или $[\tilde{\omega}_1, \lg \tilde{\omega}_{\max}]$ соответственно:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda}_1^{(\ell)} &= \lg \lambda_{\min} + \ell \frac{\lg \lambda_{\max} - \lg \lambda_{\min}}{n_1 + 1}, \quad \ell = 1, \dots, n_1, \\
 \tilde{\lambda}_i^{(\ell)} &= \tilde{\lambda}_1^{(\ell)} + (i - 1) \frac{\lg \lambda_{\max} - \tilde{\lambda}_1^{(\ell)}}{n_r}, \quad i = 2, \dots, n_r, \\
 \tilde{\omega}_1^{(\ell)} &= \lg \tilde{\omega}_{\min} + \ell \frac{\lg \tilde{\omega}_{\max} - \lg \tilde{\omega}_{\min}}{n_2 + 1}, \quad \ell = 1, \dots, n_2, \\
 \tilde{\omega}_i^{(\ell)} &= \tilde{\omega}_1^{(\ell)} + (i - 1) \frac{\lg \tilde{\omega}_{\max} - \tilde{\omega}_1^{(\ell)}}{n_c}, \quad i = 2, \dots, n_c;
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

– для группы ζ можно использовать одинаковые значения для всех элементов группы:

$$\zeta_i^{(\ell)} = \begin{cases} \frac{1 - \zeta_{\min}}{2}, & \text{если } n_3 = 1, \\ \zeta_{\min} + (\ell - 1) \frac{1 - \zeta_{\min}}{n_3 - 1}, & \text{если } n_3 > 1, \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n_c, \quad \ell = 1, \dots, n_3;$$

– сформировать множество $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ начальных точек, комбинируя все варианты для каждой из групп.

Тогда, например, при $n_1 = 4, n_2 = 4, n_3 = 2$ получим 32 точки старта.

Если составлять другую сетку начальных значений, то нужно учитывать, что перестановка элементов внутри групп $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ не имеет значения, так как независимо от порядка элементов в группе полином $\delta(s)$ получится одинаковый в соответствии с (5).

3.4. Метод поиска

Целевая функция (13) в общем случае невыпуклая, многоэкстремальная и в некоторых точках недифференцируемая, поэтому стандартные методы поиска не гарантируют нахождение глобального минимума. Для рассматриваемой задачи предлагается использовать комбинированный метод, в котором для группы варьируемых переменных ζ применяется покоординатный спуск, а группы $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ объединяются в одну, где поиск осуществляется по парам координат. Размерность вектора $[\tilde{\lambda}, \tilde{\omega}]$ равна $n_a = n_r + n_c$. Из элементов этого вектора можно составить $n_a!/(2(n_a - 2)!)^2$ пар. При $n_a = 10$ получим 45 пар, что вычислительно реализуемо. Для большинства практических одномерных задач такое ограничение будет выполняться, а для задач большей размерности надо использовать не все пары. Например, можно объединять в пары только соседние элементы, и тогда получим $n_a - 1$ пар, или формировать пары отдельно для групп $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$.

Предлагается выбирать следующую точку $k + 1$ после варьирования пары элементов i, j ($i = 1, \dots, n_a - 1$, $j = i + 1, \dots, n_a$):

$$(18) \quad \tilde{x}_{k+1} = \arg \min_{\alpha, \beta} f(\tilde{x}_k + \alpha e_i + \beta e_j),$$

где e_i, e_j – векторы с 1 на i и j местах соответственно и нулевыми остальными элементами, α, β – значения из некоторого множества вариаций, например:

$$(19) \quad \alpha, \beta \in \{0, 0,001, -0,001, 0,01, -0,01\}.$$

Если в результате (18) получено $\alpha = \beta = 0$, то новая точка не найдена. Если же получено новое рекордное значение целевой функции, то для найденных значений α, β можно выполнить одномерный поиск:

$$(20) \quad \tilde{x}_{k+1} = \arg \min_{\gamma} f(\tilde{x}_k + \gamma \alpha e_i + \gamma \beta e_j),$$

где, например, $\gamma \in \{0, 10\}$.

Применение фиксированных значений шага обусловлено тем, что целевая функция невыпуклая, и поэтому поиск оптимальной длины шага в заданном направлении может оказаться вычислительно сложной задачей.

При варьировании элементов групп $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ предлагается учитывать, что целевая функция не зависит от перестановки элементов. Тогда можно зафиксировать порядок элементов как $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_{n_r}$, $\tilde{\omega}_1 \leq \tilde{\omega}_2 \leq \dots \leq \tilde{\omega}_{n_c}$ и, кроме границ (15), использовать соседние элементы также в качестве границ. Например, для $\tilde{\lambda}$ при $n_r > 2$:

$$(21) \quad \begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &\in [\lg \lambda_{\min}, \tilde{\lambda}_2], \\ \tilde{\lambda}_i &\in [\tilde{\lambda}_{i-1}, \tilde{\lambda}_{i+1}], \quad 1 < i < n_r, \\ \tilde{\lambda}_{n_r} &\in [\tilde{\lambda}_{n_r-1}, \lg \lambda_{\max}]. \end{aligned}$$

После проведения поиска (18) для всех пар $(i = 1, \dots, n_a - 1, j = i + 1, \dots, n_a)$ проводится покоординатный спуск для группы ζ :

$$(22) \quad \tilde{x}_{k+1} = \arg \min_{\eta} f(\tilde{x}_k + \eta e_i), \quad i = 1, \dots, n_c,$$

где η – набор фиксированных значений шага, e_i – вектор со значением 1 на $(i + n_r + n_c)$ -м месте и нулевыми остальными элементами. Множество значений шага может быть, например, таким:

$$(23) \quad \eta \in \{0,001, -0,001, 0,01, -0,01, 0,05, -0,05\}.$$

Варьирование элементов группы ζ проводится в пределах заданных границ $\zeta_i \in [\zeta_{\min}, 1]$.

Итак, для решения задачи 1 получен следующий алгоритм для $n_a > 1$.

Алгоритм 1.

1. Выбрать весовые коэффициенты μ_1, μ_2 штрафов для целевой функции (13) и задать пороговое значение поиска ε .

2. Сформировать сетку начальных точек как описано в разделе 3.3 и выбрать первую начальную точку.

3. Вычислить в начальной точке значение целевой функции $f_{\min}^{(\ell)}$.

4. Выбрать пару элементов групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$.

5. Выполнить (18) перебором по множеству (19).

6. Если найдено новое рекордное значение целевой функции, то выполнить (20) по полученному направлению и перейти к новой точке.

7. Выбрать следующую пару элементов групп варьируемых переменных $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\omega}$ и перейти к шагу 5. Если перебор пар закончен, то перейти к следующему шагу 8.

8. Если $n_c > 0$, то выбрать элемент группы ζ . Иначе перейти к шагу 11.

9. Выполнить (22) перебором по множеству (23).

10. Выбрать следующий элемент группы ζ и перейти к шагу 9. Если перебор элементов группы ζ закончен, то перейти к следующему шагу 11.

11. Если полученное в результате шагов 4–10 рекордное значение целевой функции $\hat{f}$ меньше чем $f_{\min}^{(\ell)} - \varepsilon$, то заменить значение $f_{\min}^{(\ell)}$ полученным $\hat{f}$ и с найденной новой точкой перейти к шагу 4. Иначе запомнить значение целевой функции $\min(f_{\min}^{(\ell)}, \hat{f})$ и соответствующую точку $\tilde{x}$, выбрать очередную начальную точку и перейти к шагу 3. Если поиск по всем начальным точкам, полученным на шаге 2, завершен, то перейти к следующему шагу 12.

12. Найти минимальное значение целевой функции из полученных для всех начальных точек и соответствующую точку $\tilde{x}$ и завершить процедуру поиска.

В этот алгоритм можно добавить дополнительные этапы поиска, когда на шаге 11 не уменьшается значение целевой функции: 1) увеличить значения весовых коэффициентов μ_1, μ_2 и продолжить поиск от полученной точки, 2) продолжить поиск с меньшими значениями множества вариаций (19) для α и β .

4. Примеры

4.1. Регулятор позиции подводного аппарата

В [16] идентифицированы передаточные функции для позиции в локальной системе координат. Здесь рассмотрим синтез регулятора для координаты z с идентифицированной передаточной функцией

$$(24) \quad P_z(s) = \frac{0,018}{s(0,98s + 1)}.$$

ПИД-регулятор с двумя степенями свободы, построенный в [16], позволяет задавать желаемую передаточную функцию замкнутой системы. Для рассматриваемого примера выбрана следующая желаемая передаточная функция:

$$(25) \quad P_m(s) = \frac{1}{(0,98s + 1)(0,5s + 1)}.$$

При синтезе регулятора с двумя степенями свободы знаменатель передаточной функции (25) должен включаться в желаемый характеристический полином замкнутой системы. Тогда для варьирования остается только два корня. Если принять, что это комплексно-сопряженная пара корней характеристического полинома, то коэффициенты регулятора

$$(26) \quad C(s) = \frac{d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{s(c_1 s + c_0)}$$

находятся из уравнения

$$\begin{aligned} s^2(0,98s + 1)(c_1 s + c_0) + 0,018(d_2 s^2 + d_1 s + d_0) = \\ = (0,98s + 1)(0,5s + 1)(s^2 + 2\zeta\dot{\omega} + \dot{\omega}^2). \end{aligned}$$

Такой пример позволит построить графики процедуры поиска для варьируемых переменных ζ и $\dot{\omega}$. Так как в этом примере $n_a = 1$, то вместо алгоритма 1 будет использоваться покоординатный спуск.

Заданы следующие ограничения:

$$(27) \quad \dot{\omega}_{\min} = 0,6, \quad \dot{\omega}_{\max} = 20, \quad \zeta_{\min} = 0,8, \quad S_{\max} = 1,7, \quad N_{\max} = 150.$$

Для целевой функции (13) необходимо задать весовые коэффициенты для штрафных функций. Выбор этих коэффициентов определяется тем, что ограничения должны иметь приоритет по сравнению с минимизацией воздействия возмущения. Следует заметить, что штрафные функции входят в (13) как отношение H_∞ нормы к ее допустимому максимальному значению, а H_∞ норма по возмущению используется в абсолютных единицах. Поэтому для выбора весовых коэффициентов нужна оценка возможного значения

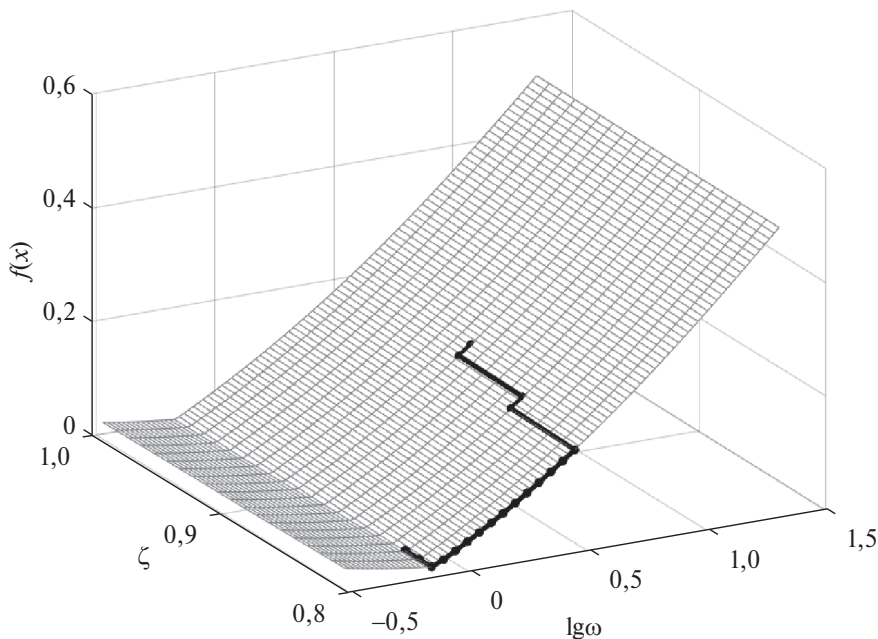


Рис. 2. Покоординатный спуск: $\tilde{x} = [\tilde{\omega}, \zeta]$.

$\|G_{yf}(j\omega)\|_{\infty}$. Например, для минимальных значений из допустимой области $\tilde{\omega} = 0,6$, $\zeta = 0,8$ получаем $\|G_{yf}(j\omega)\|_{\infty} = 0,0239$. Тогда можно выбрать $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 0,1$. Множество значений шага (23) использовано для обеих варьируемых переменных.

На рис. 2 приведена поверхность целевой функции, построенная по сетке с шагом 0,02 для $\tilde{\omega}$ и 0,01 для ζ в пределах заданных ограничений, и представлен график значений целевой функции на каждом шаге процедуры покоординатного спуска с начальной точкой

$$\tilde{x}_0 = \left[\frac{\lg \tilde{\omega}_{\max} + \lg \tilde{\omega}_{\min}}{2}, \frac{1 + \zeta_{\min}}{2} \right] = [0,5396, 0,9].$$

Найдена точка минимума $\tilde{\omega} = 0,6928$, $\zeta = 0,821$, в которой

$$\|S(j\omega)\|_{\infty} = 1,27, \quad \|G_{uv}(j\omega)\|_{\infty} = 149,97, \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_{\infty} = 0,0206.$$

4.2. Регулятор для двухмассовой системы

Рассмотрим предложенный в [17] тестовый пример управления двумя тележками, соединенными пружиной. В [12] для этого примера был построен регулятор методом оптимизации размещения полюсов, удовлетворяющий требованиям быстродействия и робастности системы, но для поиска оптимальных корней характеристического полинома использовалась стандартная процедура глобальной оптимизации из пакета MATLAB Global Optimization

Toolbox [13]. Здесь для решения той же задачи будет использован разработанный алгоритм 1.

Дана передаточная функция относительно управления:

$$(28) \quad P(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

В этом объекте управление и возмущение приложены в разных точках, и известна передаточная функция относительно возмущения:

$$(29) \quad P_f(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

В этом случае H_∞ норма частотной передаточной функции относительно возмущения отличается от (7) и вычисляется как

$$(30) \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \left| \frac{b_f(j\omega)c(j\omega)}{\delta(j\omega)} \right|,$$

где $b_f(j\omega)$ – полином числителя передаточной функции (29).

Так же как в [12], будем искать регулятор вида (2), где $n = 4$, при следующих ограничениях:

$$(31) \quad \begin{aligned} \lambda_{\min} &= \check{\omega}_{\min} = 0,1, \quad \lambda_{\max} = \check{\omega}_{\max} = 100, \\ \zeta_{\min} &= 0,7, \quad S_{\max} = 1,665, \quad N_{\max} = 100. \end{aligned}$$

Выбираем структуру характеристического полинома (5) $n_r = 1$, $n_c = 3$ и весовые коэффициенты для штрафных функций в (13) $\mu_1 = \mu_2 = 100$. Пороговое значение изменения целевой функции выбираем $\varepsilon = 10^{-6}$. Формируем 24 начальные точки для множественного старта, выбрав $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, используя (16) для групп $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\omega}$, и варианты для группы ζ : 1) все элементы равны $\zeta_{\min}$ и 2) все элементы равны 1.

В результате найдена точка минимума целевой функции (13)

$$(32) \quad x_{\min} = [0,3417, 1,4138, 1,4145, 3,6593, 0,701, 0,700, 0,700],$$

для которой

$$\|S(j\omega)\|_\infty = 1,665, \quad \|G_{uv}(j\omega)\|_\infty = 99,96, \quad \|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = 5,296.$$

Минимум найден за 20 итераций от начальной точки. График рекордных значений целевой функции приведен на рис. 3. Еще шесть начальных точек множественного старта привели к результату $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty < 6$ при выполнении ограничений. Остальные начальные точки привели к локальным минимумам, где не выполнено ограничение $\|S(j\omega)\|_\infty \leq S_{\max}$ или получено большее значение $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$. Только две из двадцати четырех начальных точек

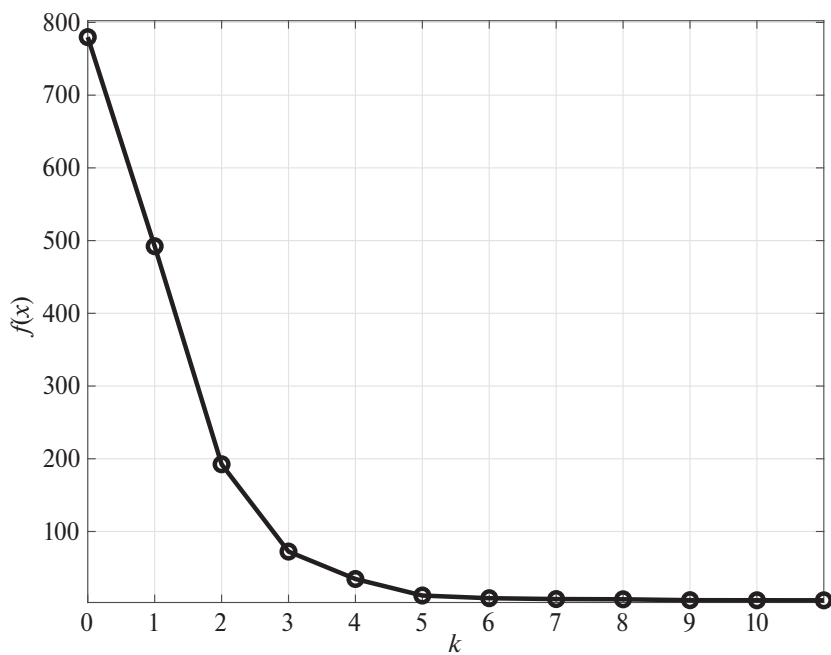


Рис. 3. Значения целевой функции $f(x)$ на каждой итерации алгоритма поиска.

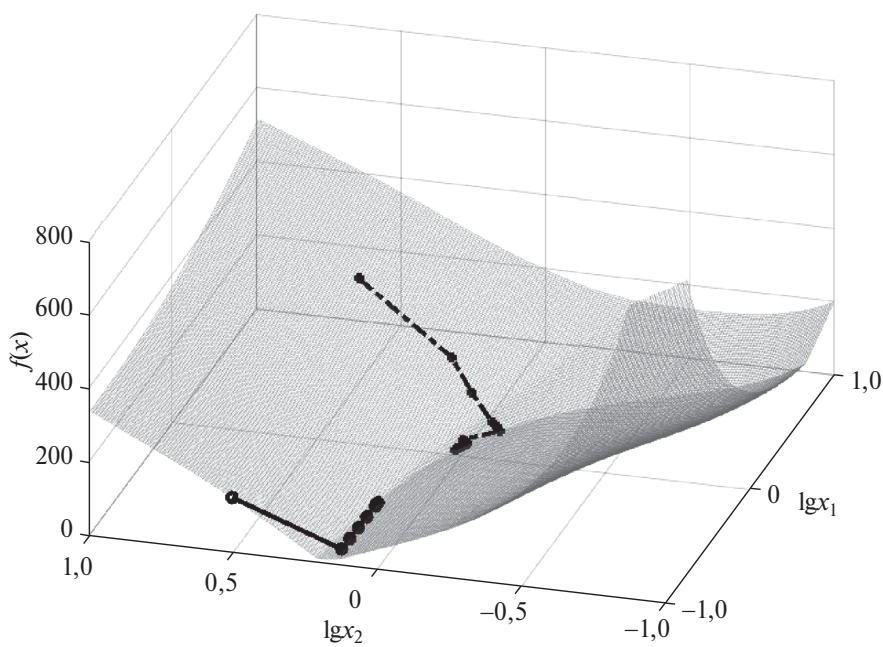


Рис. 4. Значения целевой функции $f(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\omega}_1)$.

множественного старта привели к одному и тому же локальному минимуму, остальные привели к разным точкам останова.

На рис. 4 показана поверхность, полученная для вектора $\tilde{x}$, в котором варьируются только первые два элемента (а остальные равны найденным значениям (32)), и варианты поиска по этим двум элементам из начальных точек $[0,5, 0,5]$ и $[-1, 0,5]$. Видно, что поиск сходится к разным локальным минимумам. При этом получены значения целевой функции, равные 19,8 и 5,3 соответственно. То есть даже в упрощенном варианте с двумя варьируемыми переменными целевая функция для этого примера имеет непростой овражный рельеф.

Этот же пример с такими же ограничениями решался несколькими методами в [12]. При помощи процедуры `systune` настройки системы управления с фиксированной структурой [18] из пакета MATLAB Robust Control Toolbox получен регулятор, обеспечивающий выполнение всех заданных ограничений и практически такой же результат: $\|G_{yf}(j\omega)\|_{\infty} = 5,301$. Решение методом оптимизации размещения полюсов в [12] было реализовано при помощи стандартной процедуры глобальной оптимизации, и найден регулятор, который подавляет возмущение немного хуже: $\|G_{yf}(j\omega)\|_{\infty} = 6,64$.

Таким образом, предложенный в настоящей статье алгоритм поиска нашел решение лучше, чем стандартная процедура глобальной оптимизации. То, что решение, полученное процедурой `systune`, практически не улучшено, позволяет предположить, что найден глобальный минимум.

5. Заключение

Для задачи синтеза регулятора методом размещения полюсов разработан алгоритм поиска значений желаемых полюсов исходя из заданных критерия качества системы и ограничений. В статье рассматривается задача, в которой критерием качества системы выступает значение H_{∞} нормы частотной передаточной функции относительно возмущения, а в качестве ограничений задаются максимально допустимые значения H_{∞} норм функции чувствительности и частотной передаточной функции относительно помехи. Полученный алгоритм поиска можно использовать и для других критериев и ограничений. Возможным изменением будет только формирование штрафных составляющих (12) в целевой функции (13). Следует заметить, что в примере раздела 4.1 структура регулятора отличается от (2), так как в регулятор добавлена интегральная составляющая. То есть область применения разработанного подхода не ограничивается системами с регулятором вида (2), а охватывает все структуры регулятора, которые могут быть получены методом размещения полюсов. Также для простоты изложения рассматривается структура системы, где внешнее возмущение приложено вместе с управлением. Это обусловлено тем, что часто реальная передаточная функция относительно возмущения неизвестна, и в этом случае такое упрощение структуры системы позволяет, тем не менее, рассматривать действие возмущения в системе.

Если же передаточная функция объекта относительно возмущения известна, как в примере раздела 4.2, то она должна использоваться при формировании передаточной функции замкнутой системы относительно возмущения.

Преимущества предлагаемого метода поиска получены благодаря учету свойств корней характеристического полинома. Использование логарифмического масштаба для модулей корней характеристического полинома позволяет, во-первых, обоснованно выбрать величину приращения варьируемых переменных в процедуре поиска и, во-вторых, формировать ограниченный набор начальных точек для процедуры множественного старта. Алгоритм поиска с одновременным варьированием пары элементов дает возможность находить минимум для целевой функции со сложным рельефом. Таким образом, использование известных для рассматриваемой задачи особенностей вектора варьируемых переменных позволило разработать эффективный алгоритм условной минимизации невыпуклой многоэкстремальной целевой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966.
3. Александров А.Г. Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления // АиТ. 2007. № 8. С. 4–17.
Aleksandrov A.G. Stability margins of the systems of optimal and modal control // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 8. P. 1296–1308.
4. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Synthesis of controllers for multivariate systems with a given radius of stability margin by the H-infinity-optimization method // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
5. *Astrom K.J., Murray R.M. Feedback Systems: an Introduction for Scientists and Engineers. New Jersey: Princeton University Press, 2008.*
6. *Alexandrov V.A., Chestnov V.N., Shatov D.V. Stability Margins for Minimum-Phase SISO Plants: A Case Study // Proc. Eur. Control Conf. 2020. P. 2068–2073.*
7. *Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ -control // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1994. Vol. 4. No. 4. P. 421–448.*
8. *Apkarian P., Noll D. Nonsmooth H_∞ Synthesis // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 1. P. 71–86.*
9. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.

10. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
11. Шатов Д.В. Синтез параметров пропорционально-интегрирующих и пропорционально-интегрально-дифференцирующих регуляторов для стационарных линейных объектов с ненулевыми начальными условиями // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2023. № 1. С. 18–27.
12. Александров В.А. Оптимизация размещения полюсов в одномерной системе управления // *АиТ*. 2021. № 6. С. 102–123.
Alexandrov V.A. Pole Placement Optimization for SISO Control System // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 6. P. 1013–1029.
13. Ugray Z., Lasdon L., Plummer J., Glover F., Kelly J., Marti R. Scatter Search and Local NLP Solvers: A Multistart Framework for Global Optimization // *INFORMS J. Computing*. 2007. V. 19. No. 3. P. 328–340.
14. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
15. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012.
16. Alexandrov V., Shatov D., Abramenkov A., Abdulov A. Position control of maneuverable underwater vehicle based on model identification // *Proc. of the 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. Lipetsk, Russian Federation: IEEE Xplore digital library, 2023. P. 76–81.
17. Wie B., Bernstein D.S. A Benchmark Problem for Robust Control Design // *Proc. Amer. Control Conf.* San Diego, CA, USA. 1990. P. 961–962.
18. Apkarian P., Gahinet P., Buhr C. Multi-Model, Multi-Objective Tuning of Fixed-Structure Controllers // *Proc. Eur. Control Conf.* 2014. P. 856–861.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024