

© 2024 г. Ба Хю НГУЕН (leningrat206@gmail.com)
(ИПМаш РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ВЫХОДУ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛУРЬЕ В ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ¹

Рассмотрена задача стабилизации выходных переменных нелинейной системы типа Лурье в заданном множестве в любой момент времени. Для решения задачи использовалось специальное преобразование выхода, позволяющее свести исходную задачу с ограничениям по выходу к задаче без ограничений по вспомогательной переменной. Для новой системы получены нелинейные законы управления с использованием техники линейных матричных неравенств (ЛМН). Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода и подтверждающие теоретические выводы.

Ключевые слова: нелинейная система типа Лурье, стабилизация, нелинейное управление, замена координат, устойчивость, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024010034

1. Введение

Гарантия желаемого качества переходных процессов в исследуемых системах представляет собой один из ключевых критериев при синтезе систем автоматического управления. Применение классических методов управления, таких как метод модального управления [1], адаптивно-робастного управления [2, 3] и т.д., позволяет обеспечить качество регулирования только в установившемся режиме. Переходной же режим остается неконтролируемым.

В [4–6] изложены проблемы управления линейными объектами с гарантией нахождения регулируемых сигналов в заданных множествах в любой момент времени, т.е. обеспечивается качество регулирования не только в установившемся режиме, но и в переходном. Такие задачи часто встречаются на практике, например при управлении электроэнергетическими системами для поддержания частоты и напряжения электрогенераторов в заданных диапазонах [7, 8], при управлении процессом стабилизации пластового давления добычи нефти, где давление в устье скважины должно строго принадлежать заданной полосе [9] и т.д. Для решения таких задач в [4, 5] предложен метод

¹ Исследование выполнено в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № 121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР).

на основе специального преобразования выхода, позволяющий свести исходную задачу управления с ограничениями по выходу к новой задаче управления без ограничений по вспомогательной переменной. Проблемы управления для класса линейных объектов были хорошо изучены и решены в [4], однако для нелинейных систем типа Лурье они остаются еще открытыми.

В статье рассматриваются системы в форме Лурье и ставится задача стабилизации в заданном множестве выходных переменных таких систем с неустойчивой линейной частью и при наличии неизвестных ограниченных возмущений. Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована задача стабилизации регулируемых переменных нелинейных систем типа Лурье в заданных множествах. В разделе 3 предложены методы синтеза управления. В разделе 4 рассмотрены численные примеры в Matlab, иллюстрирующие теоретические результаты.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ — множество всех $n \times m$ вещественных матриц с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \succ 0$ ($A \prec 0$) означает, что A — положительно определенная матрица (отрицательно определенная матрица); $A \succeq 0$ ($A \preceq 0$) означает, что A — неотрицательно определенная матрица (неположительно определенная матрица); $I, 0, \text{diag}\{\cdot\}$ — единичная, нулевая и диагональная матрица (соответствующей размерности); $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^m$ — вектор, все m элементов которого равны 1; $\text{col}\{\cdot\} \in \mathbb{R}^m$ — вектор-столбец в $\mathbb{R}^m$; символ “ $\star$ ” обозначает симметричный блок в симметричной матрице.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную динамическую систему типа Лурье

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + G\phi(z(t)) + Df(t), \\ y(t) &= Lx(t), \quad z(t) = Cx(t), \end{aligned}$$

где $t \geq 0$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор измеряемых состояний; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — сигнал управления; $y(t) = \text{col}\{y_1(t), \dots, y_m(t)\} \in \mathbb{R}^m$ — регулируемый выходной сигнал; $f(t) \in \mathbb{R}^l$ — неизвестное возмущение такое, что $|f(t)| \leq \bar{f}$; $z(t) \in \mathbb{R}^q$ — аргумент нелинейности ϕ ; матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ известны. Пара матриц (A, B) управляема, а (A, L) — наблюдаема. Система (1) имеет относительную степень, равную $\mathbf{1}_m$ (т.е. $\det(LB) \neq 0$ [10, 11]). Неизвестная нелинейность $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ удовлетворяет секторным ограничениям, т.е. для всех z , $\phi(z) = \text{col}\{\phi_1(z_1), \dots, \phi_q(z_q)\} \in \mathbb{R}^q$ выполнены условия

$$(2) \quad k_{1i} \leq \frac{\phi_i(z_i)}{z_i} \leq k_{2i}, \quad \forall z_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, q,$$

где k_{1i}, k_{2i} — некоторые известные константы.

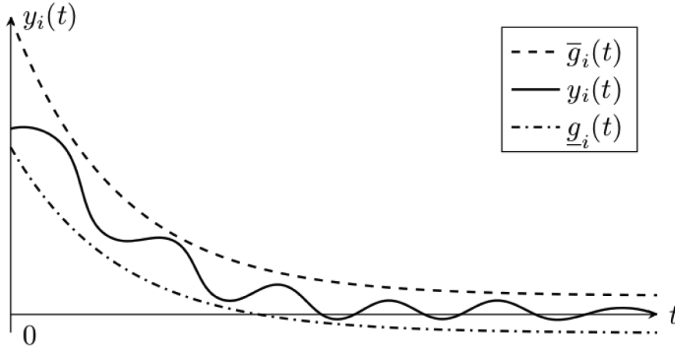


Рис. 1. Частная иллюстрация цели управления.

Цель работы — синтез закона управления, стабилизирующего выходной сигнал $y(t)$ объекта (1) в следующем заданном множестве в любой момент времени:

$$(3) \quad \mathcal{Y} = \left\{ y(t) \in \mathbb{R}^m : \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \bar{g}_i(t), \quad i = 1, \dots, m \right\}, \quad \forall t \geq 0,$$

где $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ — ограниченные дифференцируемые функции вместе с ограниченными первыми производными. Данные функции могут выбираться разработчиками по требованиям к работе системы. Для иллюстрации цели поставленной задачи на рис. 1 показана трубка, в которой выходной сигнал должен находиться в любой момент времени.

3. Метод решения

Согласно [4, 5] введем преобразование выхода с помощью функции

$$(4) \quad \varepsilon(t) = \Phi(y(t), t),$$

где $\varepsilon(t) = \text{col}\{\varepsilon_i(t), i = 1, \dots, m\} \in \mathbb{R}^m$; функция $\Phi : \mathcal{Y} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемая функция по всем аргументам, заданная в диагональной форме и удовлетворяющая следующим условиям:

(а) существует обратное отображение

$$(5) \quad y = \Phi^{-1}(\varepsilon, t), \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0;$$

(б) $\Phi^{-1}(\varepsilon, t)$ — дифференцируемая функция по ε и t , $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \succ 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^m$ и $t \geq 0$;

(в) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i^{-1}(\varepsilon_i, t) < \bar{g}_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall \varepsilon_i \in \mathbb{R} \text{ и } t \geq 0$;

(г) $\left| \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| < \gamma$ для ε и $t \geq 0$, где $\gamma > 0$ — некоторая константа, определенная преобразованием (4).

В данной работе рассмотрены функции $\Phi_i^{-1}(\varepsilon_i, t)$, зависящие от $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ и t , поэтому матрица $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}$ имеет диагональную форму. Чтобы сформулировать закон управления, требуется знание о динамике переменной $\varepsilon(t)$. Для этого берем полную производную по времени функции $y(t)$ с учетом (5)

$$(6) \quad \dot{y} = \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t}.$$

Принимая во внимание (1) с учетом $\det \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$, перепишем (6) в виде

$$(7) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[LAx + LBu + LG\phi + LDf - \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

В выражении (7) $LDf(t)$ и $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t}$ являются ограниченными величинами, поэтому сделаем замену $\psi(t) = LDf(t) - \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t}$. Тогда $|\psi(t)| \leq \kappa$, где $\kappa = \|LD\|\bar{f} + \gamma$. С учетом последней замены перепишем выражение (7) в виде

$$(8) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[LAx + LBu + LG\phi + \psi \right].$$

Напомним основной результат из [4] для решения поставленной задачи.

Теорема 1. Пусть условия (а)–(г) выполнены для преобразования (4). Если существует такой закон управления $u(t)$, что решения (8) и (1) ограничены, то $y(t) \in \mathcal{Y}$.

Замечание 1. Условия (а)–(г) — это лишь условия на выбор вида функции преобразования (4). При выполнении только данных условий не гарантируется выполнение условия (3). Так, если траектории $\varepsilon(t)$ уходят на бесконечность за конечное время, то из этого следует, что $y(t)$ стремится к одной из границ трубки, заданной в условии (3). Поэтому после выбора функции преобразования выхода согласно условиям (а)–(г) требуется получить закон управления, который бы гарантировал ограниченность траекторий $\varepsilon(t)$. Теорема 1 позволяет свести задачу управления (1) с ограничениями (3) по выходу $y(t)$ к задаче управления без ограничения по переменной $\varepsilon(t)$.

Найдем управление $u(t)$, обеспечивающее ограниченность $\varepsilon(t)$. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^T \varepsilon$. Согласно (8) получим

$$(9) \quad \dot{V} = \varepsilon^T \dot{\varepsilon} = \varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[LAx + LBu + LG\phi + \psi \right].$$

Введем множество Ω как открытый Евклидовский шар в $\mathbb{R}^m$, т.е.

$$(10) \quad \Omega = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^m : |\varepsilon| < \sqrt{2c}, \ c > 0 \right\},$$

где c — некоторое заданное положительное число. Во множестве Ω планируется стабилизировать траекторию $\varepsilon(t)$. Тогда для того, чтобы $\varepsilon(t)$ осталось в Ω , достаточно обеспечить отрицательность производной функции Ляпунова для всех ε , не принадлежащих множеству Ω , т.е. $\dot{V} < 0$, $\forall \varepsilon \notin \Omega$ (см. устойчивость по вход-состоянию [12]). Производная функции Ляпунова в (9) содержит матрицу $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}$, которая является положительно определенной. В частности, если объект управления (1) является одномерным, то $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}$ является положительной скалярной величиной, не влияющей на знак выражения $\dot{V} < 0$. При этом закон управления возможно синтезировать с помощью техники ЛМН, приведенной в [6]. Ниже будут приведены процедуры синтеза управления для данного частного случая и затем расширены на общий случай для многомерных систем.

Замечание 2. Условие секторной нелинейности (2) можно переписать в форме ограничения по норме, т.е. $|\frac{\phi_i(z_i)}{z_i}| \leq \bar{k}_i = \max\{|k_{1i}|, |k_{2i}|\}$. Отсюда следует, что $|\phi(z)| \leq \mu|z|$, где $\mu = \sqrt{q} \max_i\{\bar{k}_i\}$, $i = 1, \dots, q$. При переходе от исходного сектора нелинейности к новому сектору нелинейности будет расширен диапазон нелинейности ($[k_{1i}, k_{2i}] \subset [-\mu, \mu]$). Далее будет синтезирован регулятор при любой нелинейности в новом секторе, значит, данный регулятор может справиться с нелинейностью в исходном секторе, т.е. регулятор более “робастный” к нелинейности.

3.1. Одномерные системы

Зададим кусочно-непрерывный закон управления в виде

$$(11) \quad u = -(LB)^{-1}[K\varepsilon + LAx + \mu \text{sign}(\varepsilon) \|LG\| \|C\| \|x\|],$$

где $K \in \mathbb{R}$ — искомый коэффициент усиления в управлении, функция $\text{sign}(\varepsilon)$ определяется как

$$\text{sign}(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geq 0, \\ -1, & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Сформулируем следующую теорему для одномерной системы.

Теорема 2. Пусть для преобразования (4) выполнены условия (а)–(г), $\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$. Пусть для заданных чисел c , $\alpha > 0$ существуют положительное число K и положительные коэффициенты τ_i , $i = 1, 2$ такие, что выполнены неравенства

$$(12) \quad \begin{bmatrix} -K + \alpha + 0,5\tau_1 & 0,5 \\ \star & -\tau_2 \end{bmatrix} \leq 0, \\ -c\tau_1 + \kappa^2\tau_2 \leq 0.$$

Тогда закон управления (11) обеспечивает целевое условие (3).

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

3.2. Многомерные системы

Утверждение 1. Пусть заданы блок-матрицы

$$M = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ \star & Q \end{bmatrix} \succ 0, \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ \star & N_{22} \end{bmatrix} \prec 0,$$

где $Q, N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — диагональные матрицы. Тогда матрица

$$MN = \begin{bmatrix} QN_{11} & QN_{12} \\ \star & QN_{22} \end{bmatrix}$$

является отрицательно определенной.

Утверждение 1 применяется для доказательства основного результата данного подраздела, который будет сформулирован далее. Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Зададим кусочно-непрерывный закон управления в виде

$$(13) \quad u = -(LB)^{-1} \left[K\varepsilon + LAx + \bar{\sigma}\mu \text{Sign}(\varepsilon) \left\| \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\| \|LG\| \|C\| |x| \right],$$

где $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — матрица коэффициентов управления; $\bar{\sigma}$ — константа, определенная преобразованием (4). Функция $\text{Sign}(\varepsilon)$ определяется как $\text{Sign}(\varepsilon) = \text{col}\{\text{sign}(\varepsilon_i), i = 1, \dots, m\}$.

Подставив управление (13) в (8), получим замкнутую систему

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-K\varepsilon - \bar{\sigma}\mu \text{Sign}(\varepsilon) \left\| \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\| \times \right. \\ & \left. \times \|LG\| \|C\| |x| + LG\phi + \psi \right]. \end{aligned}$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть для преобразования (4) выполнены условия (а)–(г), $0 \prec \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \preceq \bar{\sigma}I$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ и $t \geq 0$. Пусть для заданного числа $c > 0$ существуют диагональная матрица $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и положительные коэффициенты τ_i , $i = 1, 2$ такие, что при любых $\sigma \in (0, \bar{\sigma}]$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$ разрешимы следующие линейные неравенства:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} -K + [(0,5\tau_1 - \alpha)\sigma + \beta]I & 0,5I \\ \star & -\tau_2\sigma I \end{bmatrix} \preceq 0, \\ -c\tau_1 + \kappa^2\tau_2 \leq 0.$$

Тогда закон управления (13) обеспечивает целевое условие (3).

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Замечание 3. Техника ЛМН и S-процедура позволяют анализировать устойчивость по вход-состоянию замкнутой системы при воздействии неизвестных ограниченных возмущений. Более того, задача нахождения коэффициента управления по ε в (11), (13) может быть сведена к задаче нахождения допустимого решения (12), (15), что легко решается с помощью популярных решателей для полуопределенного программирования (как SEDUMI [14], SDPT3 [15], CSDP [16] и др.)

Замечание 4. Видно, что параметр c в (12), (15) связан с радиусом открытых шаров Ω , в которых притягиваются траектории системы $\varepsilon(t)$ (радиус шара равен $\sqrt{2c}$). Если уменьшим значение c , то уменьшится радиус шара и, в свою очередь, предельное значение $\varepsilon(t)$. Поэтому при уменьшении предельного значения $\varepsilon(t)$ колебание переменной $y(t)$ во множестве $\mathcal{Y}$, вызванное влиянием внешнего возмущения $f(t)$, также уменьшается.

4. Численные примеры

4.1. Пример 1. Одномерная система

Рассмотрим неустойчивый объект (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = 0,1 + \sin(3t) + 0,5\text{sat}(d(t)), \quad \phi(z) = \sin(z).$$

где $\text{sat}\{\cdot\}$ — функция насыщения, $d(t)$ — белый шум с мощностью шума и времени выборки 0,1. Тогда $\bar{f} = 1,6$ и $\mu = 1$.

Зададим функцию $\varepsilon(t)$ в виде

$$\varepsilon(t) = \ln \left(\frac{y(t) - \underline{g}(t)}{\bar{g}(t) - y(t)} \right).$$

Откуда выразим обратную функцию $\Phi^{-1}(\varepsilon(t), t)$ как

$$\Phi^{-1}(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + \underline{g}(t)}{e^\varepsilon + 1}.$$

Для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = \frac{e^\varepsilon (\bar{g}(t) - \underline{g}(t))}{(e^\varepsilon + 1)^2} > 0$$

и

$$(16) \quad \left| \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| = \left| \frac{\dot{\bar{g}}(t)e^\varepsilon + \dot{\underline{g}}(t)}{e^\varepsilon + 1} \right| \leq \max \left\{ \sup_{t \geq 0} |\dot{\bar{g}}(t)|, \sup_{t \geq 0} |\dot{\underline{g}}(t)| \right\} = \gamma.$$

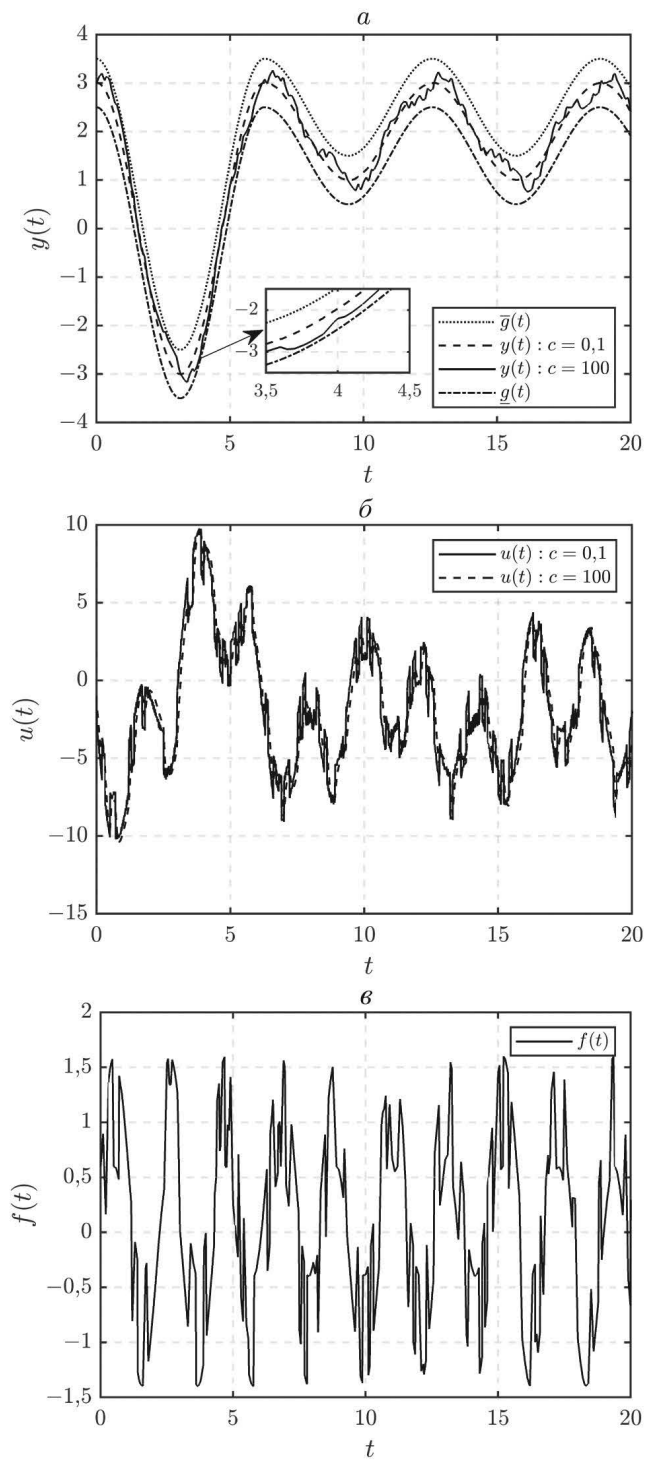


Рис. 2. Переходные процессы выхода $y(t)$ (*a*), управления $u(t)$ (*б*), возмущения $f(t)$ (*в*) в замкнутой системе при $c = 0,1$ и $c = 100$.

Функции $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ зададим как

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} -3 \cos(t) + 0,2, & t < 2\pi, \\ \cos(t) + 2,2, & t \geq 2\pi, \end{cases}$$

$$\underline{g}(t) = \begin{cases} 3 \cos(t) - 0,2, & t < 2\pi, \\ \cos(t) + 1,8, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Запишем закон управления (11) в виде

$$u = -(LB)^{-1} \left[K \ln \left(\frac{y - \underline{g}}{\bar{g} - y} \right) + LAx + \mu \operatorname{sign} \left(\ln \left(\frac{y - \underline{g}}{\bar{g} - y} \right) \right) \|LG\| \|C\| |x| \right].$$

Принимая во внимание (16), найдем $\gamma = 3$ и $\kappa = 8,6$. С помощью пакета YALMIP [17] и решателя SEDUMI найдем решение неравенства (12). Для $c = 100$, $\alpha = 2$ найдены $\tau_1 = 3,10$, $\tau_2 = 4,14$, $K = 6,54$. Для $c = 0,1$, $\alpha = 2$ найдены $\tau_1 = 45,47$, $\tau_2 = 0,04$, $K = 35,36$.

Переходные процессы в $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$ при $x(0) = \operatorname{col}\{1, 1\}$ показаны на рис. 2. Из рис. 2,а видно, что выходной сигнал $y(t)$ никогда не достигает границ заданного множества. Заметим также из графика, что чем меньше значение параметра c , тем лучше подавляется влияние возмущений. На рис. 2,б колебания управляющего сигнала объясняются наличием возмущения $f(t)$ в системе.

4.2. Пример 2. Многомерная система

Продемонстрируем качество управления на неустойчивом объекте с двумя входами и двумя выходами со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\phi(z) = \operatorname{col}\{z_1 + \sin(z_1), \sin(z_2)\},$$

где $f(t)$ определено, как в примере 1. Тогда $\bar{f} = 1,6$ и $\mu = 2$.

Пусть $\Phi(y(t), t) = \operatorname{diag}\{\Phi_1(y_1(t), t), \Phi_2(y_2(t), t)\}$, где Φ_i определены, как в примере 1, т.е. $\Phi(y_i(t), t) = \ln \left(\frac{y_i(t) - \underline{g}_i(t)}{\bar{g}_i(t) - y_i(t)} \right)$, $i = 1, 2$, следовательно, $\Phi^{-1}(\varepsilon_i, t) = \frac{\bar{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} + \underline{g}_i(t)}{e^{\varepsilon_i} + 1}$. Легко видеть, что для $\varepsilon \notin \Omega$ имеем $0 \prec \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \preceq \bar{\sigma}I$, где $\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \max_i \left[\sup_{t \geq 0} (\bar{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)) \right]$, $i = 1, 2$.

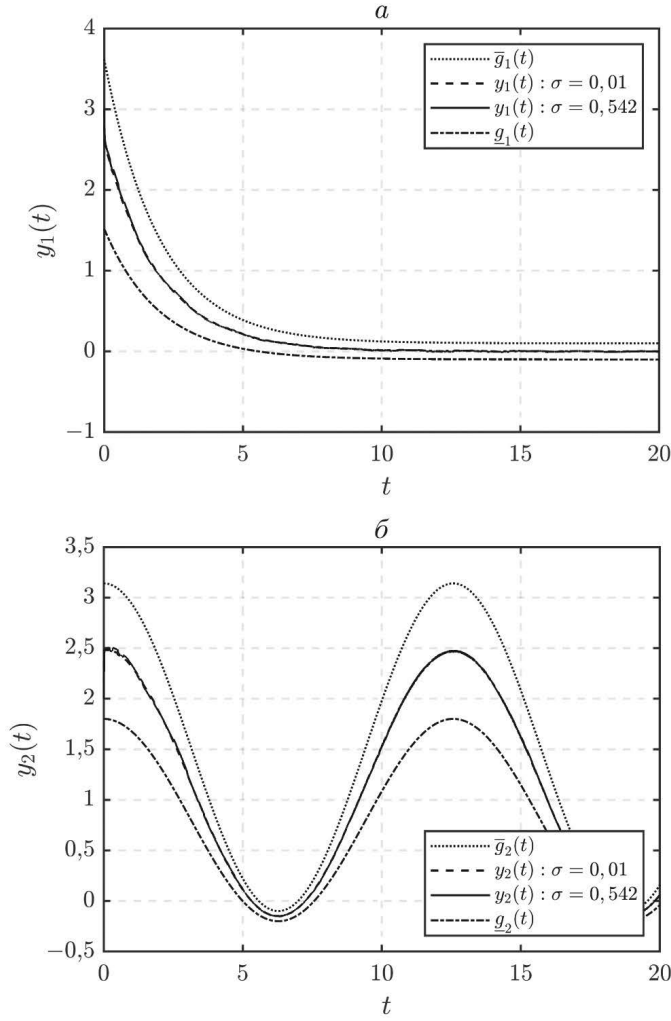


Рис. 3. Сигналы управления $u_1(t)$ (а), $u_2(t)$ (б) в замкнутой системе $c = 0,1$ при $\sigma = 0,01$ и $\sigma = 0,542$.

Зададим параметры функций ограничения $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ в виде

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(t) &= 3,52e^{-0,5t} + 0,1, \\ \underline{g}_1(t) &= 1,62e^{-0,5t} - 0,1, \\ \bar{g}_2(t) &= 1,62 \cos(0,5t) + 1,52, \\ \underline{g}_2(t) &= \cos(0,5t) + 0,8.\end{aligned}$$

Тогда найдем

$$\gamma = \sqrt{2} \max_i \left\{ \sup_{t \geq 0} |\dot{\bar{g}}_i(t)|, \sup_{t \geq 0} |\dot{\underline{g}}_i(t)| \right\} = 2,49, \quad i = 1, 2$$

и

$$\kappa = 11,54, \quad \bar{\sigma} = 0,542.$$

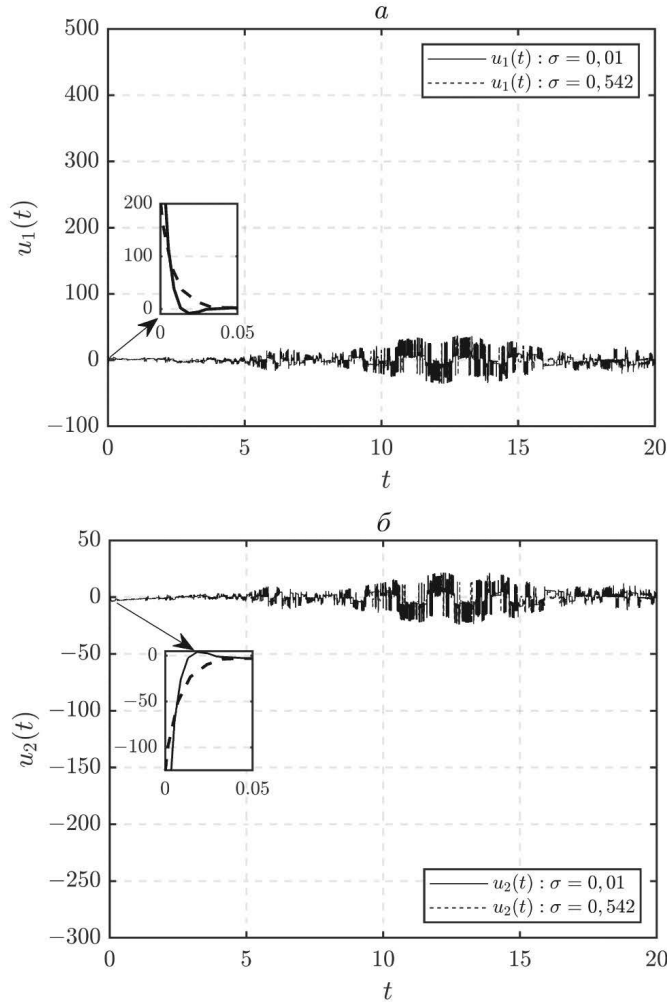


Рис. 4. Сигналы управления $u_1(t)$ (а), $u_2(t)$ (б) в замкнутой системе $c = 0,1$ при $\sigma = 0,01$ и $\sigma = 0,542$.

Зададим $c = 0,1$, найдем решения неравенства (15) при некоторых значениях $\sigma \in (0, 0,542]$:

$$\tau_1 = 527,72, \tau_2 = 0,3, K = \text{diag}\{108,42, 108,42\} \text{ (для } \sigma = 0,01 \text{) и}$$

$$\tau_1 = 92,33, \tau_2 = 0,05, K = \text{diag}\{39,26, 39,26\} \text{ (для } \sigma = 0,542 \text{)}.$$

На рис. 3 показаны переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при $x(0) = \text{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$. На рис. 4 показаны сигналы управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Как показано на рис. 3, выходные сигналы всегда поддерживаются в заданных трубах.

Замечание 5. В приведенных выше примерах предполагалось, что начальные значения выходных сигналов принадлежат заданному множеству. Однако если выходные сигналы начинаются вне заданного множества, то раз-

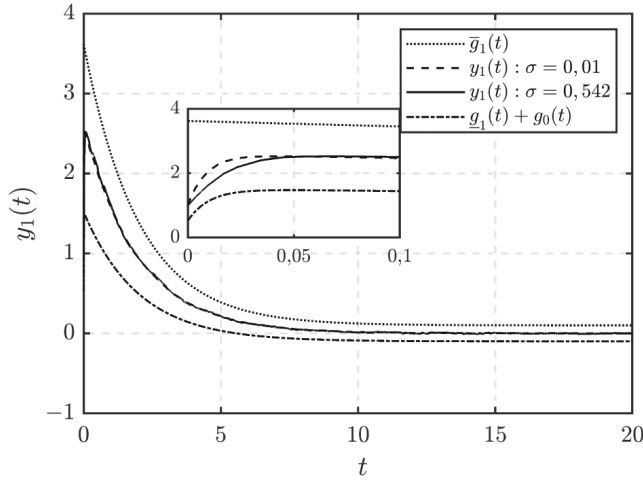


Рис. 5. Переходной процесс $y_1(t)$ при $x(0) = \text{col}\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

работанный метод не работает, так как согласно преобразованию (3) выходные сигналы должны определяться внутри множества. Этот недостаток может быть устранен добавлением к предельным функциям аддитивной быстрой экспоненциально затухающей функции, поэтому новые пределы перекрывают начальные условия. На рис. 5 показаны переходные процессы в $y_1(t)$ при $x(0) = \text{col}\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, т.е. $y_1(0) = 1$ не принадлежит исходному множеству $\mathcal{Y}$. К функции $\underline{g}_1(t)$ добавлена функция $g_0(t) = -e^{-100t}$ так, чтобы начальное условие $y_1(0)$ было ограничено снизу новой функцией ограничения.

5. Заключение

В статье предложен новый метод стабилизации выходных переменных нелинейных систем типа Лурье в заданных множествах в любое время. Метод базируется на основе специального преобразования выхода и техники ЛМН. Использование данного преобразования позволяет перевести исходную задачу с ограничением по выходным переменным на задачу без ограничения по вспомогательной переменной. При этом закон управления для новой возмущающей замкнутой системы синтезируется с использованием метода функции Ляпунова на основе техники ЛМН. Результаты моделирования в Matlab/Simulink проиллюстрировали эффективность метода и подтвердили теоретические выводы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Подставив (11) в (8), получим замкнутую систему

$$(П.1) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-K\varepsilon - \mu \text{sign}(\varepsilon) \|LG\| \|C\| |x| + LG\phi + \psi \right].$$

Выберем функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Найдем от нее полную производную по времени вдоль решений (П.1):

$$(П.2) \quad \dot{V} = \varepsilon \dot{\varepsilon} = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-K\varepsilon - \mu \operatorname{sign}(\varepsilon) \|LG\| \|C\| |x| + LG\phi + \psi \right].$$

Потребуем при $V \geq c$ выполнение условия $\dot{V} \leq -2\alpha V$, α — любое известное положительное число, т.е. $\dot{V} < 0$, $\forall \varepsilon \notin \Omega$. Так как $LG\phi \leq |LG\phi| \leq \mu \|LG\| \|C\| |x|$ и принимая во внимание ограничения $|\psi| \leq \kappa$, перепишем вышеназванные условия как

$$(П.3) \quad \begin{aligned} (-K + \alpha)\varepsilon^2 + \varepsilon\psi &\leq 0 \quad \forall (\varepsilon, \psi) : \\ 0,5\varepsilon^2 &\geq c, \quad \psi^2 \leq \kappa^2. \end{aligned}$$

Обозначив $z = \operatorname{col}\{\varepsilon, \psi\}$, перепишем (П.3) в матричном виде:

$$(П.4) \quad \begin{aligned} z^T \begin{bmatrix} -K + \alpha & 0,5 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z &\leq 0, \\ z^T \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z &\leq -c, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \star & 1 \end{bmatrix} z &\leq \kappa^2. \end{aligned}$$

Согласно S-процедуре [13] неравенства (П.4) будут выполнены, если будут выполнены условия (12). Значит система (П.1) устойчива по вход-состоянию и сигнал $\varepsilon(t)$ ограничен. Благодаря преобразованию (4), выход $y(t)$ тоже ограничен и соответственно ограничен вектор состояний $x(t)$ системы (1). Следовательно, будет ограничен сигнал управления $u(t)$ в (11). По теореме 1 целевое условие (3) будет выполнено.

Теорема 2 доказана.

Доказательство утверждения 1. Легко видеть, что матрица MN симметрична. Пусть λ_i, x_i , $i = 1, \dots, 2n$ — собственные числа и собственные векторы матрицы MN соответственно. Тогда имеем следующее соотношение:

$$x_i^T N M N x_i = \lambda_i x_i^T N x_i.$$

Откуда можем выразить λ_i как

$$\lambda_i = \frac{x_i^T N M N x_i}{x_i^T N x_i}.$$

Поскольку $M \succ 0$ и $N = N^T \prec 0$, то $N M N \succ 0$, т.е. $x^T N M N x > 0 \quad \forall x \neq 0$. С учетом $x^T N x < 0 \quad \forall x \neq 0$ получим, что $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, 2n$. Все собственные числа симметричной матрицы MN отрицательны, значит, матрица MN является отрицательно определенной.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство теоремы 3. Выберем функцию Ляпунова вида $V = \frac{1}{2}\varepsilon^T \varepsilon$. Найдем полную производную по времени от функции Ляпунова вдоль решений (14) как

$$(II.5) \quad \dot{V} = \varepsilon^T \dot{\varepsilon} = \varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-K\varepsilon - \bar{\sigma}\mu \text{Sign}(\varepsilon) \left\| \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\| \|LG\| \|C\| |x| + LG\phi + \psi \right].$$

Перепишем (II.5) в виде

$$(II.6) \quad \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} K\varepsilon + \varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \psi, \\ \dot{V}_2 &= -\varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \text{Sign}(\varepsilon) \bar{\sigma}\mu \left\| \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\| \|LG\| \|C\| |x| + \\ &\quad + \varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} LG\phi. \end{aligned}$$

Принимая во внимание $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \leq \bar{\sigma}I$, можем оценить $\dot{V}_2$ как

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq - \left(\sum_{i=1}^v |\varepsilon_i| \right) \bar{\sigma}^{-1} \bar{\sigma}\mu \left\| \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\| \|LG\| \|C\| |x| + \\ &\quad + \mu |\varepsilon| \left\| \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \right\| \|LG\| \|C\| |x| \leq 0. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что условие $\dot{V} \leq 0$ эквивалентно $\dot{V}_1 \leq 0$. В данном случае $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1}$ — матрица и ею нельзя пренебречь при анализе знакоопределенности $\dot{V}$, как в предыдущем разделе. Потребуем при $V \geq c$ выполнение условия $\dot{V} \leq -2\alpha V$, α — любое известное положительное число. Принимая во внимание ограничения $|\psi| \leq \kappa$, перепишем вышеназванные условия как

$$(II.7) \quad \begin{aligned} &-\varepsilon^T \left[\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} K + \alpha I \right] \varepsilon + \varepsilon^T \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \psi \leq 0 \\ &\forall (\varepsilon, \psi) : 0,5\varepsilon^T \varepsilon \geq c, \psi^T \psi \leq \kappa^2. \end{aligned}$$

Обозначив $z = \text{col}\{\varepsilon, \psi\}$, $z \in \mathbb{R}^{2m}$, перепишем (П.7) в матричном виде:

$$(П.8) \quad z^T \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} K - \alpha I & 0,5 \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leq 0,$$

$$z^T \begin{bmatrix} -0,5I & 0 \\ \star & 0 \end{bmatrix} z \leq -c, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \star & I \end{bmatrix} z \leq \kappa^2.$$

Согласно S-процедуре неравенства (П.8) будут выполнены, если будут выполнены следующие неравенства:

$$(П.9) \quad \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} K - \alpha I + 0,5\tau_1 I & 0,5 \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \\ \star & -\tau_2 I \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$-c\tau_1 + \kappa^2\tau_2 \leq 0.$$

Первое неравенство из (П.9) эквивалентно как

$$(П.10) \quad \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} & 0 \\ \star & \left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -K + (0,5\tau_1 - \alpha) \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} & 0,5I \\ \star & -\tau_2 \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \prec 0.$$

Так как $\left(\frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \succ 0$ то в силу утверждения 1 последнее неравенство выполняется, если будет выполнено следующее неравенство при любом значении $\beta > 0$:

$$(П.11) \quad \begin{bmatrix} -K + (0,5\tau_1 - \alpha) \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} & 0,5I \\ \star & -\tau_2 \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \preceq -\beta I \prec 0.$$

По условию (П.7) необходимо обеспечить $\dot{V} < 0$ при ε из множества $\{\varepsilon \in \mathbb{R}^m : |\varepsilon| \geq \sqrt{2c}, c > 0\}$. Кроме того, для всех ε из данного множества имеем неопределенность интервального типа в (П.11) с $0 \prec \frac{\partial \Phi^{-1}(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \preceq \bar{\sigma} I$. Тогда условия (П.7) будут выполнены, если (15) будут разрешимы для любых $\sigma \in (0, \bar{\sigma}]$. Более того, не трудно заметить, что всегда найдется такая матрица K и $\tau_1, \tau_2 > 0$, что (15) разрешимы. Действительно, с помощью леммы

Шура [13] можем переписать (15) в виде

$$\begin{aligned}
 & -\tau_2\sigma + \beta < 0, \\
 & -K + [(0,5\tau_1 - \alpha)\sigma + \beta]I + \frac{1}{\tau_2\sigma - \beta}I \preceq 0, \\
 & -c\tau_1 + \kappa^2\tau_2 \leq 0, \\
 & \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \\
 & \alpha > 0, \beta > 0, 0 < \sigma \leq \bar{\sigma}.
 \end{aligned}
 \tag{П.12}$$

Для заданного числа $c > 0$ и при фиксированных значениях σ, α, β неравенства (П.12) всегда имеют конечные решения (K, τ_1, τ_2) . Таким образом, согласно теореме 1 закон управления (13) со значением K , удовлетворяющим (15), обеспечивает выполнение целевого условия (3).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев В.В., Журавлева Н.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А. Синтез систем методом модального управления. СПб.: СПб ГУ ИТМО, 2007.
2. Ioannou P.A., Sun J. Robust Adaptive Control. Courier Corporation, 2012.
3. Narendra K.S., Annaswamy A.M. Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
4. Фуртат И.Б., Гуцин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // АиТ. 2021. № 4. С. 121–139.
5. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // Int. J. Control. 2022. V. 95. No. 6. P. 1533–1542.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
6. Нгуен Б.Х., Фуртат И.Б., Нгуен К.К. Управление линейными объектами на базе наблюдателей с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве // Дифференц. уравн. и процессы управления. 2022. № 4. С. 95–104.
7. Furtat I., Nekhoroshikh A., Gushchin P. Synchronization of multimachine power systems under disturbances and measurement errors // Int. J. Adaptiv. Control Signal Proc. 2022. in press. <https://doi.org/10.1002/acs.3372>
8. Павлов Г.М., Меркурьев Г.В. Автоматика энергосистем / Центр подготовки кадров РАО “ЕЭС России”. СПб.: Папирус, 2001.
9. Веревкин А.П., Кирюшин О.В. Управление системой поддержания пластового давления с использованием моделей конечно-автоматного вида // Территория Нефтегаз. 2008. № 10. С. 14–19.
10. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами СПб.: Наука, 2000.
11. Isidori A. Nonlinear Control Systems. Springer, 1995.
12. Khalil H.K. Nonlinear Systems. 3rd edition. Pearson. 2001.

13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств М.: Ленанд, 2014.
14. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // Optim. Method. Softwar. 1999. V. 11. No. 1. P. 625–653. <https://doi.org/10.1080/10556789908805766>
15. *Toh K.C., Todd M.J., Tutuncu R.H.* SDPT3-a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. // Optim. Method. Softwar. 1999. V. 11. P. 545–581. <https://doi.org/10.1080/10556789908805762>
16. *Borchers B.* A C library for semidefinite programming // Optim. Method. Softwar. 1999. V. 11. P. 613–623.
17. *Lofberg J.* YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No. 04CH37508). 2004. P. 284–289. <https://doi.org/10.1109/CACSD.2004.1393890>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 18.03.2023

После доработки 10.10.2023

Принята к публикации 21.12.2023