

© 2024 г. И.С. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (iliagri@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова),
А.И. ПРОСКУРЯКОВ (ap_91@mail.ru)
(Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
в г. Баку)

**ЗАДАЧА ВЫВЕДЕНИЯ НА ЦЕЛЕВУЮ ОРБИТУ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МАКСИМАЛЬНОЙ МАССЫ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВИГАТЕЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГИ
И СБРОСОМ ОТДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТЕЙ СРЕДСТВ ВЫВЕДЕНИЯ
В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ**

Проблема космического мусора является одной из актуальных проблем современности. Рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавшего дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли. Решается задача оптимизации траектории перелета космического аппарата с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту. Выведение осуществляется с помощью РБ с двигателем установкой большой ограниченной тяги и ДТБ. При решении задачи учитывается вторая зональная гармоника гравитационного поля Земли. Решение задачи оптимального управления производится на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Громоздкие производные вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования. Полученные в работе экстремали Понтрягина являются очередным этапом методики лестницы задач.

Ключевые слова: космический аппарат, космический мусор, дополнительный топливный бак, разгонный блок, задача с ограниченной тягой, оптимизация траектории, сброс в атмосферу, численно-аналитическое дифференцирование.

DOI: 10.31857/S0005231024010025

1. Введение

Проблема космического мусора является одной из актуальных проблем современности. Пути решения этой проблемы можно разделить на две большие группы: профилактика и уборка. Подробный обзор литературы по соответствующей теме представлен в [1]. Дополнительно отметим работы [2, 3], освещающие вопросы, связанные с мониторингом техногенного засорения космического пространства, и [4–7], представляющие обзор средств захвата и увода крупногабаритного космического мусора.

В данной работе рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства (относящаяся к группе “профилактика”) за счет сброса отработавших частей средств выведения космического аппарата (КА) на орбитах, касающихся условной границы атмосферы Земли, на этапе его выведения на целевую орбиту. Решается задача оптимизации траектории перелета КА с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли заданного радиуса и наклона на целевую орбиту с помощью разгонного блока (РБ) с двигательной установкой большой ограниченной тяги и дополнительным топливным баком (ДТБ), со сбросом ДТБ и центрального блока (ЦБ) РБ в атмосферу Земли. Довыведение с целевой орбиты на геостационарную орбиту (ГСО) учитывается по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки и осуществляется двигательной установкой КА.

Представленная работа является очередным шагом реализации методики “лестница задач”, заключающейся в последовательной формализации и решении серии задач, где каждое ранее полученное решение используется в качестве начального приближения на последующем шаге. Первоначально была решена простейшая задача в апсидальной импульсной постановке [8]: в результате проведенного исследования было установлено, что для оптимальной траектории с “разделением” первого импульса и при ограничении на характеристическую скорость маневра $1,5 \text{ км/с}$ накладные расходы на сброс отработавших частей (ступеней) ЦБ оказались малы. Если же характеристическая скорость маневра довыведения меньше $1,47 \dots \text{ км/с}$, то меняется структура траектории и накладные расходы на сброс ДТБ и ЦБ в атмосферу становятся значительными. На следующем шаге [9, 10] решалась задача без предположения об апсидальности импульсных воздействий. Было установлено, что в задаче с фазовым ограничением на максимально возможное удаление КА от Земли и при не ограниченном заранее времени перелета решение является апсидальным и совпадает с решением, полученным на предыдущем шаге. Необходимость решения задачи в модифицированной импульсной постановке (с учетом сброса ДТБ и ЦБ) [1], являющейся третьим шагом методики “лестница задач”, была вызвана сложностью непосредственного перехода к задаче с большой ограниченной тягой, поскольку модифицированный метод Ньютона не сходиллся при использовании в качестве начального приближения решения задачи второго шага.

Таким образом, целью работы является построение экстремалей Понтрягина в задаче с большой ограниченной тягой. Структура этой экстремали (последовательность и примерное расположение на траектории активных участков) известна из предыдущих исследований, проведенных в импульсной постановке. Первая серия маневров выведения КА на целевую орбиту осуществляется за счет топлива из ДТБ. После отработки этого топлива КА оказывается на орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). На участке пассивного полета, продолжительностью 120 с , осуществляется сброс ДТБ. За счет дополнительного включения двигателя КА возвращается на “безопасную орбиту” (с высотой перигея 200 км). Это

и последующие включения двигателя КА происходят за счет топлива из основного бака ЦБ.

После выполнения второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите, такой, что характеристическая скорость маневров довыведения с нее на ГСО ограничена заданной величиной. Из проведенных ранее исследований [1, 8–10] следует, что накладные расходы на сброс малы при биеллиптической схеме довыведения. На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. За счет последнего включения двигателя на остатках топлива из основного бака в окрестности апогея целевой орбиты ЦБ переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, а спутник за счет собственных двигателей переводится на ГСО.

В работе рассматриваются две разные, но близкие постановки задачи. В первом случае предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров, сухая масса ДТБ и масса основного бака ЦБ пропорциональны массе вмещающегося в них топлива с коэффициентом α , а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β [11]. Во втором случае предполагается, что заданы массовые характеристики РБ: сухие массы ДТБ и основного бака ЦБ, а также ограничения на массы топлива в ДТБ и в основном баке ЦБ.

Функционалом в рассматриваемых задачах является полезная масса, т.е. масса КА, оставшаяся на целевой орбите после отстыковки ЦБ.

Рассматриваемые задачи формализуются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем. На основе соответствующего принципа максимума Л.С. Понтрягина [12] их решение сводится к решению многоточечных краевых задач. Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы [13, 14]. На основе предыдущих исследований выбираются вычислительные схемы метода стрельбы и хорошие начальные приближения искомых параметров пристрелки. Задача Коши решается методом Дормана–Принса 8(7) с автоматическим выбором шага [15], система нелинейных уравнений — методом Ньютона в модификации Исаева–Сонина [16] с использованием в условиях сходимости нормировки Федоренко [17], входящая в него система линейных уравнений — методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу и повторным пересчетом [18], учет громоздких производных в условиях трансверсальности происходит посредством технологии численно-аналитического дифференцирования [19].

2. Формализация постановки задачи

Перелет рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром Земли. Ось z этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось x лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось y дополняет систему координат до правой.

Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= v_x(t), \quad \dot{y}(t) = v_y(t), \quad \dot{z}(t) = v_z(t), \\
 \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{P_x(t)}{m(t)}, \quad \dot{v}_y(t) = -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\
 \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{P_z(t)}{m(t)}, \quad \dot{m}(t) = -\frac{P(t)}{c},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – координаты центра масс КА в момент времени t ; $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ – расстояние от КА до центра Земли в момент времени t ; $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ – компоненты вектора скорости центра масс КА в момент времени t ; $M(0)$ – масса КА в начальный момент времени; $M(t)$ – масса КА в момент времени t ; $m(t) = M(t)/M(0)$ – безразмерная (используемая при расчетах) масса КА; $\vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ – вектор реактивной тяги в момент t ; $F(t) = |\vec{F}(t)| = \sqrt{F_x^2(t) + F_y^2(t) + F_z^2(t)}$ – величина вектора реактивной тяги; $\vec{P}(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t)) = (F_x(t)/M(0), F_y(t)/M(0), F_z(t)/M(0))$ – вектор безразмерной реактивной тяги; $n = F_{\max}/(M(0)g_3)$ – начальная тяговооруженность; $P(t) = \sqrt{P_x^2(t) + P_y^2(t) + P_z^2(t)}$ – величина вектора безразмерной реактивной тяги в момент времени t ; $\mu = 398\,601,19 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Земли; $c = P_{\text{уд}}g_3$ – скорость истечения реактивной струи; $P_{\text{уд}}$ – удельная тяга; $g_3 = 9,80665 \text{ м/с}^2$ – гравитационное ускорение у поверхности Земли.

Кроме центрального ньютоновского гравитационного поля рассматривается движение центра масс КА в гравитационном поле с учетом второй зональной гармоники:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= v_x(t), \quad \dot{y}(t) = v_y(t), \quad \dot{z}(t) = v_z(t), \\
 \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{R_0^2}{r^5(t)}\left(\frac{5x(t)z^2(t)}{r^2(t)} - x(t)\right) + \frac{P_x(t)}{m(t)}, \\
 \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{R_0^2}{r^5(t)}\left(\frac{5y(t)z^2(t)}{r^2(t)} - y(t)\right) + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\
 \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2}J_2\mu\frac{R_0^2}{r^5(t)}\left(\frac{5z^3(t)}{r^2(t)} - 3z(t)\right) + \frac{P_z(t)}{m(t)}, \\
 \dot{m}(t) &= -\frac{P(t)}{c},
 \end{aligned}$$

где $J_2 = 1082,636023 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент второй зональной гармоники.

Управления в задаче считаются кусочно-непрерывными функциями:

$$P(t) = \sqrt{(P_x(t))^2 + (P_y(t))^2 + (P_z(t))^2} \leq P_{\max},$$

где $P_{\max} = g_3 n m_0$ – ограничение величины вектора управляющей тяги, n – начальная тяговооруженность КА, где m_0 – начальная масса КА.

В начальный момент времени ($t = 0$) КА находится на опорной круговой орбите радиуса R_0 . В силу выбора системы координат долота восходящего узла $\Omega_0 = 0$, и потому в качестве формализации условий нахождения КА на начальной круговой орбите могут быть выбраны соотношения:

$$(2) \quad \begin{aligned} x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 &= R_0^2, & x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z} &= 0, \\ v_x(0) + \frac{v_0}{R_0}(y(0)\cos i_0 + z(0)\sin i_0) &= 0, & v_y(0) - \frac{v_0}{R_0}x(0)\cos i_0 &= 0, \\ v_z(0) - \frac{v_0}{R_0}x(0)\sin i_0 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{0x} &= 0, & C_{0y} &= -C_0 \sin i_0, & C_{0z} &= C_0 \cos i_0, & C_0 &= \sqrt{\mu R_0}, \\ v_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}, & R_0 &= R_3 + h_0. \end{aligned}$$

Здесь C_{0x} , C_{0y} , C_{0z} – компоненты вектора кинетического момента орбитального движения КА относительно центра Земли, C_0 – значение модуля этого вектора, v_0 – величина вектора скорости на опорной орбите, R_0 – радиус опорной орбиты, $R_3 = 6378,25$ км – радиус Земли, $h_0 = 200$ км – высота над поверхностью Земли.

Масса КА считается безразмерной и потому в начальный момент равна 1:

$$(3) \quad m(0) = m_0 = 1.$$

Радиус перигея $r_{\Pi}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ мгновенной эллиптической орбиты является функцией координат и скоростей КА и вычисляется по формулам [20]:

$$(4) \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & V &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \\ \cos \varphi &= \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{rV}, & V_{\text{кр}}^2 &= \frac{\mu}{r}, \\ e &= \sqrt{\left[\left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{r}{a} \left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2 \cos^2 \varphi}, \\ a &= \frac{r}{2 - \left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2}, & r_{\Pi} &= a(1 - e), \end{aligned}$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет, $V_{кр}$ — круговая скорость на расстоянии r от центра Земли, φ — угол между радиусом-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$ и вектором скорости $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$.

Далее используется следующее обозначение для радиуса перигея орбиты:

$$r_{п}(\tau) := r_{п}(x(\tau), y(\tau), z(\tau), v_x(\tau), v_y(\tau), v_z(\tau)),$$

где τ — произвольный момент времени.

После выполнения первой серии маневров в момент $\tau_{сб1}^{ДТБ}$ КА должен оказаться на мгновенной кеплеровской орбите, касающейся условной границы атмосферы (на самом деле условия касания атмосферы мгновенной кеплеровской орбиты не гарантируют касания атмосферы орбиты в реальном поле Земли; в работе предполагается, что для быстрого устранения космического мусора этого достаточно). Понижение высоты перигея орбиты до 100 км (условная граница атмосферы) происходит за счет включения двигателя ЦБ на остатках топлива из ДТБ. В момент времени $\tau_{сб1}^{ДТБ}$ выполняются условия:

$$(5) \quad \begin{aligned} r_{п}(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) &= R_З + 100 \text{ км}, \\ x(\tau_{сб1+}^{ДТБ}) - x(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) &= 0, \quad y(\tau_{сб1+}^{ДТБ}) - y(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) = 0, \\ z(\tau_{сб1+}^{ДТБ}) - z(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) &= 0, \quad v_x(\tau_{сб1+}^{ДТБ}) - v_x(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) = 0, \\ v_y(\tau_{сб1+}^{ДТБ}) - v_y(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) &= 0, \quad v_z(\tau_{сб1+}^{ДТБ}) - v_z(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) = 0, \\ \tau_{сб1+}^{ДТБ} - \tau_{сб1-}^{ДТБ} &= 0. \end{aligned}$$

После выхода КА на орбиту сброса ДТБ начинается пассивный участок сброса ДТБ $[\tau_{сб1}^{ДТБ}, \tau_{сб2}^{ДТБ}]$. На этом участке масса в системе дифференциальных уравнений не рассматривается. Предполагается, что отстыковка ДТБ занимает заданное время:

$$\tau_{сб2+}^{ДТБ} - \tau_{сб1-}^{ДТБ} = 120 \text{ с}.$$

Рассматриваются две различные, но близкие постановки задачи. В первой постановке предполагается, что сухая масса бака пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α , в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения маневра, масса двигателя и дополнительных конструкций ЦБ пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β . Во второй постановке предполагается, что заданы все массовые характеристики РБ.

Масса КА после сброса ДТБ в первой постановке задачи определяется соотношением:

$$(6) \quad m(\tau_{сб2+}^{ДТБ}) = m(\tau_{сб1-}^{ДТБ}) - \alpha(m_0 - m(\tau_{сб1-}^{ДТБ})),$$

во второй постановке:

$$(7) \quad m(\tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}) = m(\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}) - m^{\text{ДТБ}},$$

где $m^{\text{ДТБ}}$ — заданная сухая обезразмеренная масса ДТБ (можно считать, что в эту величину включена также масса неснижаемого остатка топлива).

Ограничение на массу топлива в ДТБ во второй постановке задачи имеет вид

$$(8) \quad m_0 - m(\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}) \leq m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}}.$$

После сброса ДТБ КА совершает маневр перехода на “безопасную” орбиту. Этот маневр заканчивается в момент времени $\tau_{без}$. На совершение маневра расходуется топливо из основного бака. Как и ранее, функция радиус перигентра $r_{\Pi}(\cdot)$ является функцией координат и компонент вектора скорости КА (4). В момент времени $\tau_{без}$ выполняются условия:

$$(9) \quad \begin{aligned} r_{\Pi}(\tau_{без-}) &= R_3 + 200 \text{ км}, \\ x(\tau_{без+}) - x(\tau_{без-}) &= 0, \quad y(\tau_{без+}) - y(\tau_{без-}) = 0, \quad z(\tau_{без+}) - z(\tau_{без-}) = 0, \\ v_x(\tau_{без+}) - v_x(\tau_{без-}) &= 0, \quad v_y(\tau_{без+}) - v_y(\tau_{без-}) = 0, \quad v_z(\tau_{без+}) - v_z(\tau_{без-}) = 0, \\ \tau_{без+} - \tau_{без-} &= 0. \end{aligned}$$

После выхода на “безопасную” орбиту начинается вторая серия маневров, после завершения которой КА переходит на целевую орбиту. На целевой орбите спутник отстыковывается от ЦБ. Масса спутника, оставшаяся на целевой орбите, считается полезной и максимизируется:

$$m_{\Pi} = m(\tau_{\Pi-}) - m(\tau_{\Pi+}) \rightarrow \max,$$

где $m(\tau_{\Pi-})$ — масса КА на целевой орбите до отстыковки спутника, $m(\tau_{\Pi+})$ — масса ЦБ на целевой орбите после отстыковки спутника. Спутник за счет собственных двигателей переходит на геостационарную орбиту. Предполагается, что характеристическая скорость маневра довыведения с целевой орбиты на геостационарную ограничена заданной величиной Δv^* и линия апсид целевой орбиты лежит в плоскости экватора, т.е. z-компонента вектора Лапласа равна нулю. В момент времени τ_{Π} выполняются условия:

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\Pi-}) &:= \Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{\Pi-}), y(\tau_{\Pi-}), z(\tau_{\Pi-}), v_x(\tau_{\Pi-}), v_y(\tau_{\Pi-}), v_z(\tau_{\Pi-})) \leq \Delta v^*, \\ \mathcal{A}(\tau_{\Pi-}) &:= C_y(\tau_{\Pi-}) v_x(\tau_{\Pi-}) - C_x(\tau_{\Pi-}) v_y(\tau_{\Pi-}) - \frac{\mu z(\tau_{\Pi-})}{r(\tau_{\Pi-})} = 0, \\ x(\tau_{\Pi+}) - x(\tau_{\Pi-}) &= 0, \quad y(\tau_{\Pi+}) - y(\tau_{\Pi-}) = 0, \quad z(\tau_{\Pi+}) - z(\tau_{\Pi-}) = 0, \\ v_x(\tau_{\Pi+}) - v_x(\tau_{\Pi-}) &= 0, \quad v_y(\tau_{\Pi+}) - v_y(\tau_{\Pi-}) = 0, \quad v_z(\tau_{\Pi+}) - v_z(\tau_{\Pi-}) = 0, \\ \tau_{\Pi+} - \tau_{\Pi-} &= 0, \end{aligned}$$

где $\tau_{\text{ц}}$ — момент выхода на целевую орбиту, $C_x(\tau_{\text{ц-}})$, $C_y(\tau_{\text{ц-}})$, $C_z(\tau_{\text{ц-}})$ — компоненты вектора кинетического момента орбитального движения КА в момент времени $\tau_{\text{ц-}}$.

Отметим, что характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на геостационар учитывается по упрощенной схеме (учитывается в рамках центрального ньютоновского поля, все импульсные маневры считаются апсидальными, поворот орбиты производится только вторым импульсом, первый разгонный и последний установочный импульсы плоскость орбиты не меняют, что в совокупности очень существенно упрощает постановку задачи). В качестве R_{max} выбирается удаление от Земли, с одной стороны, достаточно большое, а с другой — позволяющее пренебречь влиянием других тел Солнечной системы, в первую очередь влиянием Луны и Солнца, учет, например, Луны, позволит вообще избежать включения двигателя в удаленной точке (см., например, [21]). Разумеется, такой учет возможен на следующих шагах методики лестницы задач, на этой ступени лестницы он также не рассматривается. Довыведение спутника осуществляется за счет трех импульсных воздействий:

$$\Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\text{ц}}) = \Delta v_{\text{дов1}}(\tau_{\text{ц}}) + \Delta v_{\text{дов2}}(\tau_{\text{ц}}) + \Delta v_{\text{дов3}}(\tau_{\text{ц}}).$$

Первое импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов1}}(\tau_{\text{ц}})$ подается в перигее целевой орбиты, и оно, не меняя наклона, повышает апогей до максимально возможного удаления КА от Земли R_{max} :

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов1}}(\tau_{\text{ц}}) &= \sqrt{V_{\text{цп}}^2 + V_{1\text{п}}^2 - 2V_{\text{цп}}V_{1\text{п}}}, \\ V_{\text{цп}} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ац}}}{R_{\text{пп}}(R_{\text{ац}} + R_{\text{пп}})}}, \quad V_{1\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{пп}}(R_{\text{max}} + R_{\text{пп}})}}, \end{aligned}$$

где $R_{\text{пп}}$ — радиус перигея целевой орбиты, $V_{\text{цп}}$ — скорость в перигее целевой орбиты.

Второе импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов2}}(\tau_{\text{ц}})$ подается в апогее, увеличивает перигей до радиуса ГСО $R_{\text{ГСО}}$ и уменьшает наклон до нуля:

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов2}}(\tau_{\text{ц}}) &= \sqrt{V_{1\text{а}}^2 + V_{2\text{а}}^2 - 2V_{1\text{а}}V_{2\text{а}}\cos i_{\text{ц}}}, \\ V_{1\text{а}} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{пп}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{пп}})}}, \quad V_{2\text{а}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ГСО}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \end{aligned}$$

где $i_{\text{ц}}$ — угол наклона целевой орбиты к плоскости экватора. В момент прохождения апогея эта величина может быть вычислена по формуле

$$(13) \quad \cos i_{\text{ц}} = \frac{\sqrt{v_x^2(\tau_{\text{ц}}) + v_y^2(\tau_{\text{ц}})}}{\sqrt{v_x^2(\tau_{\text{ц}}) + v_y^2(\tau_{\text{ц}}) + v_z^2(\tau_{\text{ц}})}}.$$

Третье импульсное воздействие $\Delta v_{\text{довз}}(\tau_{\text{ц}})$ в перигее, не меняя наклона, уменьшает апогей до радиуса ГСО, тем самым переводя спутник в не заданную заранее точку геостационарной орбиты:

$$(14) \quad \Delta v_{\text{довз}}(\cdot) = V_{2\text{п}} - v_{\text{ГСО}},$$

$$V_{2\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{ГСО}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \quad v_{\text{ГСО}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}.$$

Отметим, что величина $\Delta v_{\text{довз}}$ фактически является константой (зависит от заданной величины $R_{\text{ГСО}}$ и заданного параметра задачи R_{max}).

После отстыковки спутника маневр ЦБ продолжается. За счет дополнительного включения двигателя происходит понижение высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до 100 км (условная граница атмосферы):

$$(15) \quad r_{\text{п}}(T) = R_3 + 100 \text{ км.}$$

В конечный момент времени T расходуется все топливо из основного бака ЦБ. Исходя из того, что в первой постановке задачи предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров, и сухая масса основного бака ЦБ пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α , а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β [11], получаем:

$$(16) \quad m(T) - \alpha m_{\text{топл.}} - \beta n = 0,$$

$$m_{\text{топл.}} = \left(m \left(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}} \right) - m(\tau_{\text{ц-}}) \right) + \left(m(\tau_{\text{ц+}}) - m(T) \right).$$

Во второй постановке задачи заданы сухая масса ЦБ и ограничение на топливо в основном баке ЦБ, поэтому

$$(17) \quad m(T) - m^{\text{ЦБ}} = 0,$$

$$\left(m \left(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}} \right) - m(\tau_{\text{ц-}}) \right) + \left(m(\tau_{\text{ц+}}) - m(T) \right) \leq m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}},$$

где $m^{\text{ЦБ}}$ — заданная сухая обезразмеренная масса ЦБ, включающая массу двигателя и дополнительных конструкций, $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}}$ — максимальная обезразмеренная масса топлива, которое можно залить в основной бак ЦБ.

Стоит отметить, что непрерывность координат и скоростей КА выполняется во все моменты времени. Также отметим особенность рассматриваемой задачи: функционал задачи является функцией фазовых переменных в промежуточный момент времени.

3. Принцип максимума Понтрягина

Рассматриваемая задача является задачей оптимального управления с промежуточными условиями и решается на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [12].

Функция Понтрягина в случае центрального ньютоновского гравитационного поля имеет вид

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_m \left(-\frac{P}{c} \right) + \\ + p_{vx} \left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_x}{m} \right) + p_{vy} \left(-\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_y}{m} \right) + p_{vz} \left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_z}{m} \right),$$

в задачах с учетом второй зональной гармоники функция Понтрягина имеет вид

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_m \left(-\frac{P}{c} \right) + \\ + p_{vx} \left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5xz^2}{r^2} - x \right) + \frac{P_x}{m} \right) + \\ + p_{vy} \left(-\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5yz^2}{r^2} - y \right) + \frac{P_y}{m} \right) + \\ + p_{vz} \left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5z^3}{r^2} - 3z \right) + \frac{P_z}{m} \right),$$

терминант (для первой постановки задачи) —

$$l = l_0 + l_{c61} + l_{c62} + l_{6e3} + l_{\text{ц}} + l_T - \lambda_0 (m(\tau_{\text{ц}}-) - m(\tau_{\text{ц}}+)),$$

где

$$l_0 = \lambda_{R0} (x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 - R_0^2) + \\ + \lambda_{C0} (x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z}) + \\ + \lambda_{vx0} \left(v_x(0) + \frac{v_0}{R_0} (y(0) \cos i_0 + z(0) \sin i_0) \right) + \\ + \lambda_{vy0} \left(v_y(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \cos i_0 \right) + \\ + \lambda_{vz0} \left(v_z(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \sin i_0 \right) + \lambda_{m0} (m(0) - m_0), \\ l_{c61} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi c61} \left(\xi \left(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}} \right) - \xi \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) \right) + \lambda_{\tau c61} \left(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) + \\ + \lambda_{c61} \left(r_{\text{п}} \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) - R_3 - 100 \right),$$

$$\begin{aligned}
l_{c62} &= \lambda_{m\tau} \left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} \right) - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТВ}} \right) + \alpha \left(m_0 - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТВ}} \right) \right) \right) + \\
&+ \lambda_{\tau} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} - \tau_{c61-}^{\text{ДТВ}} - 120 \right) + \lambda_{\tau c62} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} - \tau_{c62-}^{\text{ДТВ}} \right), \\
l_{6e3} &= \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi 6e3} \left(\xi \left(\tau_{6e3+} \right) - \xi \left(\tau_{6e3-} \right) \right) + \lambda_{\tau 6e3} \left(\tau_{6e3+} - \tau_{6e3-} \right) + \\
&+ \lambda_{6e3} \left(r_{\Pi} \left(\tau_{6e3-} \right) - R_3 - 200 \right), \\
l_{\Pi} &= \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi \Pi} \left(\xi \left(\tau_{\Pi+} \right) - \xi \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \lambda_{\tau \Pi} \left(\tau_{\Pi+} - \tau_{\Pi-} \right) + \\
&+ \lambda_{\Pi} \left(C_y \left(\tau_{\Pi-} \right) v_x \left(\tau_{\Pi-} \right) - C_x \left(\tau_{\Pi-} \right) v_y \left(\tau_{\Pi-} \right) - \frac{\mu z \left(\tau_{\Pi-} \right)}{r \left(\tau_{\Pi-} \right)} \right) + \\
&+ \lambda_{\text{дов}} \left(\Delta v_{\text{дов}} \left(x \left(\tau_{\Pi-} \right), y \left(\tau_{\Pi-} \right), z \left(\tau_{\Pi-} \right), v_x \left(\tau_{\Pi-} \right), v_y \left(\tau_{\Pi-} \right), v_z \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) - \Delta v^* \right), \\
l_T &= \lambda_T \left(r_{\Pi} \left(T \right) - R_3 - 100 \right) + \\
&+ \lambda_{mT} \left(m \left(T \right) - \alpha \left(\left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} \right) - m \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \left(m \left(\tau_{\Pi+} \right) - m \left(T \right) \right) \right) - \beta n \right).
\end{aligned}$$

Во второй постановке задачи l_{c62} и l_T имеют вид

$$\begin{aligned}
l_{c62} &= \lambda_{m\tau 1} \left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} \right) - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТВ}} \right) + m^{\text{ДТВ}} \right) + \\
&+ \lambda_{m\tau 2} \left(m_0 - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТВ}} \right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ДТВ}} \right) + \\
&+ \lambda_{\tau} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} - \tau_{c61-}^{\text{ДТВ}} - 120 \right) + \lambda_{\tau c62} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} - \tau_{c62-}^{\text{ДТВ}} \right), \\
l_T &= \lambda_T \left(r_{\Pi} \left(T \right) - R_3 - 100 \right) + \lambda_{mT 1} \left(m \left(T \right) - m^{\text{ЦБ}} \right) + \\
&+ \lambda_{mT 2} \left(\left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТВ}} \right) - m \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \left(m \left(\tau_{\Pi+} \right) - m \left(T \right) \right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $p_x(\cdot)$, $p_y(\cdot)$, $p_z(\cdot)$, $p_{v_x}(\cdot)$, $p_{v_y}(\cdot)$, $p_{v_z}(\cdot)$, $p_m(\cdot)$ – сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из участков траектории; λ_0 , λ_{R0} , λ_{C0} , $\lambda_{v_{x0}}$, $\lambda_{v_{y0}}$, $\lambda_{v_{z0}}$, λ_{m0} , $\lambda_{\xi c61}$, $\lambda_{\xi 6e3}$, $\lambda_{\xi \Pi}$ ($\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z$), $\lambda_{\tau c61}$, λ_{c61} , $\lambda_{m\tau}$, λ_{τ} , $\lambda_{\tau c62}$, $\lambda_{\tau 6e3}$, λ_{6e3} , $\lambda_{\tau \Pi}$, λ_{Π} , $\lambda_{\text{дов}}$, λ_T , λ_{mT} , $\lambda_{m\tau 1}$, $\lambda_{m\tau 2}$, $\lambda_{mT 1}$, $\lambda_{mT 2}$ – числовые множители Лагранжа.

Стоит отметить, что на участке $[\tau_{c61}^{\text{ДТВ}}, \tau_{c62}^{\text{ДТВ}}]$ отсутствует слагаемое, соответствующее дифференциальному уравнению $\dot{m} = -\frac{P}{c}$ в функции Понтрягина.

Условия стационарности по фазовым переменным (уравнения Эйлера–Лагранжа) имеют вид в случае центрального ньютоновского гравитацион-

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vx} - \frac{3x}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
 \dot{p}_y &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vy} - \frac{3y}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
 \dot{p}_z &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vz} - \frac{3z}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
 \dot{p}_{vx} &= -p_x, \quad \dot{p}_{vy} = -p_y, \quad \dot{p}_{vz} = -p_z, \\
 \dot{p}_m &= \frac{P_x p_{vx} + P_y p_{vy} + P_z p_{vz}}{m^2}.
 \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа в случае перелета в гравитационном поле с учетом второй зональной гармоники в явном виде не выписывались. Правые части этих уравнений вычислялись с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования [19].

Выпишем условия трансверсальности в силу их громоздкости в формальном виде:

$$\begin{aligned}
 p_\xi(0) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(0)}, \quad p_\xi(T) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(T)}, \\
 p_\xi(\beta_+) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(\beta_+)}, \quad p_\xi(\beta_-) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(\beta_-)}, \\
 \xi &= x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \beta = \tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}, \tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}, \tau_{без}, \tau_{ц}.
 \end{aligned}$$

Следствием условий трансверсальности в начальный момент времени являются

$$\begin{aligned}
 p_x(0) &= 2\lambda_{R0}x(0) + \lambda_{C0}C_{0x} - \frac{v_0}{R_0} (p_{vy}(0) \cos i_0 + p_{vz}(0) \sin i_0), \\
 p_y(0) &= 2\lambda_{R0}y(0) + \lambda_{C0}C_{0y} + \frac{v_0}{R_0} p_{vx}(0) \cos i_0, \\
 p_z(0) &= 2\lambda_{R0}z(0) + \lambda_{C0}C_{0z} + \frac{v_0}{R_0} p_{vy}(0) \sin i_0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Следствиями условий трансверсальности в моменты времени $\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}$ и $\tau_{без}$ являются

$$\begin{aligned}
 p_\xi(\gamma_-) - p_\xi(\gamma_+) + \lambda_i \frac{\partial r_{\text{п}}(\gamma_-)}{\partial \xi(\gamma_-)} &= 0, \\
 \xi &= x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \gamma = \tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}, \tau_{без}, \quad i = \text{сб1}, \text{без}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Следствиями условий трансверсальности в момент времени τ_{Π} являются

$$(20) \quad p_{\xi}(\tau_{\Pi-}) - p_{\xi}(\tau_{\Pi+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\Pi-})}{\partial \xi(\tau_{\Pi-})} + \lambda_{\Pi} \frac{\partial \mathcal{A}(\tau_{\Pi-})}{\partial \xi(\tau_{\Pi-})} = 0,$$

$$\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z.$$

Производные функций $r_{\Pi}(\cdot)$, $\Delta v_{\text{дов}}(\cdot)$, $\mathcal{A}(\cdot)$, входящие в следствия из условий трансверсальности (19), (20), а также условия трансверсальности в конечный момент времени T вычисляются при помощи технологии численно-аналитического дифференцирования.

Следствием условий трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ и T в первой постановке задачи является равенство

$$(21) \quad (1 + \alpha)p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) - p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) - \alpha p_m(T) = 0.$$

Докажем это следствие. Условия трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ и T имеют вид

$$p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = -\frac{\partial l}{\partial m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})} = \lambda_{m\tau}(1 + \alpha),$$

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) = \frac{\partial l}{\partial m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}})} = \lambda_{m\tau} - \alpha \lambda_{mT},$$

$$p_m(T) = -\frac{\partial l}{\partial m(T)} = -\lambda_{mT}(1 + \alpha).$$

Имеем следующую цепочку равенств:

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) - \lambda_{m\tau} + \alpha \lambda_{mT} = 0, \quad \lambda_{m\tau} = \frac{p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})}{1 + \alpha}, \quad \lambda_{mT} = -\frac{p_m(T)}{1 + \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) - \frac{p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})}{1 + \alpha} - \alpha \frac{p_m(T)}{1 + \alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha)p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) - p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) - \alpha p_m(T) = 0.$$

Следствием условий трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ во второй постановке задачи является равенство

$$(22) \quad p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) - p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = \lambda_{mT2} - \lambda_{m\tau2}.$$

Докажем это равенство. В моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ по переменной m условия трансверсальности имеют вид

$$p_m(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) = \lambda_{m\tau1} + \lambda_{mT2}, \quad p_m(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}}) = \lambda_{m\tau1} + \lambda_{m\tau2}.$$

Вычитаем из первого равенства второе и получаем следствие (22).

Следствием условий трансверсальности по переменной m в момент времени $\tau_{ц}$ является непрерывность сопряженной переменной:

$$(23) \quad p_m(\tau_{ц+}) = p_m(\tau_{ц-}),$$

поскольку $p_m(\tau_{ц-}) = -\alpha\lambda_{mT}$, $p_m(\tau_{ц+}) = -\alpha\lambda_{mT}$ – в первой постановке задачи и $p_m(\tau_{ц-}) = -\alpha\lambda_{mT2}$, $p_m(\tau_{ц+}) = -\alpha\lambda_{mT2}$ – во второй постановке задачи.

В начальный момент времени условие стационарности отсутствует. Следствием условий стационарности в моменты времени $\tau_{сб1}^{ДТВ}$, $\tau_{сб2}^{ДТВ}$ является $H(\tau_{сб2+}^{ДТВ}) = H(\tau_{сб1-}^{ДТВ})$. В моменты времени $\tau_{бес}$ и $\tau_{ц}$ выполняются условия непрерывности функции Понтрягина: $H(\tau_{бес+}) = H(\tau_{бес-})$ и $H(\tau_{ц+}) = H(\tau_{ц-})$. Условие стационарности в не заданный заранее момент времени T : $H(T) = 0$.

Пусть $\vec{e}$ – единичный вектор. Тогда условия оптимальности по управлению P_x , P_y , P_z имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{P} &= P\vec{e}, \quad \vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \\ P_x &= P \cos \alpha, \quad P_y = P \cos \beta, \quad P_z = P \cos \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{opt} &= \arg \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[\frac{p_{vx}P_x + p_{vy}P_y + p_{vz}P_z}{m} - \frac{p_m}{c}P \right] = \\ &= \arg \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[\frac{p_{vx}P \cos \alpha + p_{vy}P \cos \beta + p_{vz}P \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c}P \right] = \\ &= \arg \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[P \left(\frac{p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) \right], \end{aligned}$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы.

Если $\left(\frac{p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) > 0$, то $P_{opt} = P_{\max}$; если же $\left(\frac{p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) < 0$, то $P_{opt} = 0$. Таким образом,

$$P_{opt} = \begin{cases} P_{\max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \end{cases}$$

где $\chi \equiv \frac{\rho}{m} - \frac{p_m}{c}$ – функция переключения.

Заметим, что $p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma$ – скалярное произведение векторов $\vec{p}_v = (p_{vx}, p_{vy}, p_{vz})$ и $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Оно достигает максимального значения при сонаправленности векторов $\vec{p}_v$ и $\vec{e}$:

$$\cos \alpha_{opt} = \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad \cos \beta_{opt} = \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad \cos \gamma_{opt} = \frac{p_{vz}}{\rho},$$

где $\rho = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2}$. Таким образом, учет оптимального направления вектора тяги позволяет определить:

$$(P_x)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad (P_y)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad (P_z)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vz}}{\rho}.$$

Режимы особого управления, потенциально возможные в рассматриваемых задачах, в данной работе не рассматриваются.

Условия дополняющей нежесткости и неотрицательности в первой постановке задачи имеют вид

$$(24) \quad \begin{aligned} \lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\text{ц}-}) - \Delta v^*) &= 0, \\ \lambda_0 &\geq 0, \quad \lambda_{\text{дов}} \geq 0. \end{aligned}$$

Во второй постановке задачи в дополнение к (24) имеются следующие условия дополняющей нежесткости и неотрицательности:

$$(25) \quad \begin{aligned} \lambda_{m\tau 2} \left(m_0 - m \left(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}} \right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} \right) &= 0, \\ \lambda_{mT 2} \left(\left(m \left(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}} \right) - m(\tau_{\text{ц-}}) \right) + \left(m(\tau_{\text{ц+}}) - m(T) \right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} \right) &= 0, \\ \lambda_{m\tau 2} &\geq 0, \quad \lambda_{mT 2} \geq 0. \end{aligned}$$

В качестве условия нормировки используется:

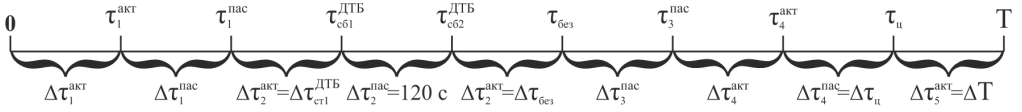
$$(26) \quad p_{vx}^2(0) + p_{vy}^2(0) + p_{vz}^2(0) = 1.$$

4. Структура траектории и численные результаты

Структура траектории определяется на основе результатов проведенных ранее исследований [1, 8–10]. Главным достоинством подхода заданной структуры траектории является то, что он позволяет построить экстремали Понтрягина — при наличии “хорошей” вычислительной схемы метода стрельбы и “хорошего” начального приближения модифицированный метод Ньютона сходится за несколько итераций.

Другие возможные способы решения рассматриваемых краевых задач апробировались, но к успеху (к построению экстремалей Понтрягина) не приводили.

Начальное приближение к значениям фазовых и сопряженных переменных, входящих в вектор параметров пристрелки, выбирается на основе ранее полученного решения в модифицированной импульсной постановке [1] в соответствии с [12]: в моменты включения тяги они соответствуют значениям фазовых и сопряженных переменных до импульсного воздействия, в моменты выключения тяги — значениям фазовых и сопряженных переменных после импульсного воздействия, продолжительность активных участков оценивается исходя из расхода топлива на данное включение двигателя, продолжительность пассивных участков равняется соответствующей продолжительности пассивных участков между импульсными воздействиями. Вначале решается задача с большой ограниченной тягой в первой постановке при $n = 10$. Далее методом продолжения по параметру (тяговооруженности) получается решение для $n = 0, 1$. Переход от задачи в первой постановке к задаче во второй



Вычислительная схема метода стрельбы.

постановке также осуществляется методом продолжения по параметру: соответствующее уравнение из первой постановки задачи умножается на $(1 - \gamma)$, а из второй — на γ , где $\gamma \in [0, 1]$.

Опишем вычислительную схему метода стрельбы (см. рисунок). В вектор параметров пристрелки входят:

- числовые множители Лагранжа λ_{R0} , λ_{C0} , $\lambda_{св1}$, $\lambda_{бес}$, $\lambda_{ц}$, $\lambda_{дов}$, λ_T , во второй постановке задачи добавляется еще один числовой множитель Лагранжа λ_{mT2} ;
- угловое положение КА на опорной круговой орбите φ_0 , значения четырех сопряженных переменных в начальный момент времени $p_{vx}(0)$, $p_{vy}(0)$, $p_{vz}(0)$, $p_m(0)$ (по угловому положению вычисляются значения координат и скоростей КА в начальный момент времени, значения сопряженных переменных $p_x(0)$, $p_y(0)$, $p_z(0)$ вычисляются по формулам (18). По условию (3) $m(0) = 1$ и, поэтому, $m(0)$ в вектор параметров пристрелки не включается. Таким образом получаем стартовую точку для решения задачи Коши);
- продолжительность первого активного участка $\Delta\tau_1^{\text{акт}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $y(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, $p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$;
- продолжительность первого пассивного участка $\Delta\tau_1^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $y(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, $p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$;
- продолжительность второго активного участка, на котором происходит понижение высоты перигея орбиты КА до условной границы атмосферы, $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{св1}^{\text{ДТВ}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $y(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $z(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $v_x(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $v_y(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $v_z(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $p_x(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $p_y(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $p_z(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $p_{vx}(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $p_{vy}(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$, $p_{vz}(\tau_{св1+}^{\text{ДТВ}})$ (продолжительность второго пассивного участка $\Delta\tau_2^{\text{пасс}}$, во время которого происходит сброс ДТВ является параметром задачи (120 с) и не входит в вектор параметров пристрелки);
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $y(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $z(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $v_x(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $v_y(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $v_z(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $p_x(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $p_y(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $p_z(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $p_{vx}(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $p_{vy}(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$, $p_{vz}(\tau_{св2+}^{\text{ДТВ}})$,

в том числе сопряженная переменная, соответствующая массе $p_m(\tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}) = p_m(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}})$ (масса КА после сброса ДТБ не входит в вектор параметров пристрелки и вычисляется в первой постановке задачи по формуле (6), во второй постановке – (7));

- продолжительность третьего активного участка $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{безд}$, на котором происходит повышение высоты перигея орбиты КА до 200 км;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{безд+}), y(\tau_{безд+}), z(\tau_{безд+}), v_x(\tau_{безд+}), v_y(\tau_{безд+}), v_z(\tau_{безд+}), p_x(\tau_{безд+}), p_y(\tau_{безд+}), p_z(\tau_{безд+}), p_{vx}(\tau_{безд+}), p_{vy}(\tau_{безд+}), p_{vz}(\tau_{безд+})$;
- продолжительность третьего пассивного участка $\Delta\tau_3^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$;
- продолжительность четвертого активного участка $\Delta\tau_4^{\text{акт}}$ – в конце данного участка КА выходит на целевую орбиту;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{4+}^{\text{акт}}), y(\tau_{4+}^{\text{акт}}), z(\tau_{4+}^{\text{акт}}), v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}), v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}), v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}})$;
- продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{ц}$ – полет на целевой орбите (для удобства вычислений в качестве точки $\tau_{ц}$ выбрана точка последнего включения двигателя для сброса ЦБ, а не первая точка целевой орбиты, на которую переходит КА, – это возможно, поскольку данные точки соединены пассивным участком);
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных ЦБ после включения двигателя $x(\tau_{ц+}), y(\tau_{ц+}), z(\tau_{ц+}), v_x(\tau_{ц+}), v_y(\tau_{ц+}), v_z(\tau_{ц+}), p_x(\tau_{ц+}), p_y(\tau_{ц+}), p_z(\tau_{ц+}), p_{vx}(\tau_{ц+}), p_{vy}(\tau_{ц+}), p_{vz}(\tau_{ц+})$, масса $m(\tau_{ц+})$ ЦБ после отстыковки спутника (сопряженная переменная $p_m(\tau_{ц+})$ не входит в вектор параметров пристрелки, поскольку согласно следствию (23) p_m непрерывна в точке $\tau_{ц}$);
- продолжительность пятого активного участка, на котором происходит понижение перигея ЦБ 100 км (условной границы атмосферы), $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T$. В вектор-функцию невязок входят:
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{акт}}$;
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{пасс}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}$ (19);
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{безд}$ (19);
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_3^{\text{пасс}}$;

- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_4^{\text{акт}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{ц}}$ (20);
- равенство нулю z-компоненты вектора Лапласа (второе условие (10));
- условие расхода всего топлива из основного бака ЦБ в конечный момент времени: в первой постановке задачи — (16), во второй постановке задачи — (17);
- условие дополняющей нежесткости — равенство импульса довыведения с целевой орбиты на геостационарную заданной величине (первое условие (24));
- три условия на перигей орбиты КА в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{без}}$, T (5), (9), (15);
- четыре условия на функцию переключения: $\chi(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = 0$, $\chi(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0$, $\chi(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0$, $\chi(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = 0$;
- шесть условий трансверсальности в конечный момент времени T ;
- следствие из условий трансверсальности по переменной m : в первой постановке задачи — (21), во второй постановке задачи — (22) (с учетом $\lambda_{m\tau 2} = 0$);
- три следствия из условий стационарности $H(\tau_{\text{сб2}+}^{\text{ДТБ}}) = H(\tau_{\text{сб1}-}^{\text{ДТБ}})$, $H(\tau_{\text{без}+}) = H(\tau_{\text{без}-})$ и $H(\tau_{\text{ц}+}) = H(\tau_{\text{ц}-})$;
- условие стационарности в конечный момент времени: $H(T) = 0$;
- условие нормировки (26),
- во второй постановке задачи в вектор-функцию невязок входит также второе условие дополняющей нежесткости из (25) (первое условие дополняющей нежесткости из (25) не входит в вектор-функцию невязок и выполнение соответствующего неравенства (8) проверяется после решения задачи — на экстремали Понtryгина выполнено строгое неравенство, что соответствует случаю $\lambda_{m\tau 2} = 0$).

Таким образом, в первой постановке задачи — 118 параметров пристрелки и 118 невязок, во второй постановке задачи — 119 параметров пристрелки и 119 невязок, т.е. число неизвестных параметров совпадает с числом уравнений для их определения.

В приложении приводится экстремаль Понtryгина в задаче с учетом второй зональной гармоники во второй постановке при $n = 0,1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $i_0 = 0,9$ рад, $\Delta v^* = 1,5$ км/с, $m(0) = 1$ ($M(0) = 22\,500$ кг), сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0,052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0,0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0,6488889$ (соответствует массе 14 600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0,2266667$ (соответствует массе 5100 кг), $R_{\text{max}} = 280\,000$ км.

5. Заключение

Одним из результатов проведенных ранее в импульсной постановке исследований оказалась возможность сброса ДТБ и ЦБ РБ в атмосферу Земли с малыми накладными расходами. Этот же результат удалось подтвердить и в случае КА с двигателем большой ограниченной тяги.

Оказалось, что решение задачи перелета КА с двигателем большой ограниченной тяги в определенной мере близко к решению в импульсной постановке. Методика перехода от решения задачи в импульсной постановке к решению с двигателем большой тяги [12] в рассматриваемом случае оказалась эффективной — экстремаль Понтрягина построена.

Задачи в первой и второй постановках (с оптимизируемой конструкцией и с фиксированными массовыми характеристиками) удалось включить в параметрическое семейство. Переход от решения первой задачи (с выбранными константами $\alpha = 0,08$ и $\beta = 0,01$) ко второй (экстремаль приведена в Приложении) эффективно получен методом продолжения решения по параметру.

Отличие экстремали в случае учета второй зональной гармоники от соответствующей экстремали без учета второй зональной гармоники мало в смысле сходимости использованного метода Ньютона (метод Ньютона сходится за 11 итераций).

Технология численно-аналитического дифференцирования показала свою эффективность и технологичность (упрощение программного кода, уменьшение вероятности ошибок программирования).

Методика “лестница задач” позволила решить представленную в работе задачу, выбрать эффективную вычислительную схему и хорошее начальное приближение, справиться с трудностями численного решения, связанными со сложностью и громоздкостью постановки задачи, продемонстрировав таким образом свою эффективность. В качестве другого законченного примера эффективного применения методики “лестница задач” можно рекомендовать, например, диссертацию А.С. Самохина [22]. Отметим, что при увеличении максимально возможного удаления КА от Земли $R_{\max}$ меняется постановка задачи — нужно будет учитывать влияние гравитационного поля Луны [21] и то, что данная задача находится на следующих ступенях методики “лестница задач”.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с учетом второй зональной гармоники

Приводится экстремаль Понтрягина в задаче с учетом второй зональной гармоники во второй постановке при $n = 0,1$, $P_{\text{уд}} = 350$ с, $i_0 = 0,9$ рад, $\Delta v^* = 1,5$ км/с, $m(0) = 1$ ($M(0) = 22\,500$ кг), сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0,052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0,0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ,

$m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0,6488889$ (соответствует массе 14 600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0,2266667$ (соответствует массе 5100 кг), $R_{\text{max}} = 280\,000$ км.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\lambda_{R0} &= 0,000143381, & \lambda_{C0} &= 0,000591830, \\
\lambda_{vx0} &= 0,454024806, & \lambda_{vy0} &= 0,573821987, \\
\lambda_{vz0} &= 0,681608247, & \lambda_{m0} &= 0,003461557, \\
\lambda_{xc61} &= -0,000341292, & \lambda_{yc61} &= 7,242061031 \cdot 10^{-7}, \\
\lambda_{zc61} &= -4,016946803 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{vxc61} &= -0,006462504, \\
\lambda_{vyx61} &= -0,749532226, & \lambda_{vzc61} &= -0,815268562, \\
\lambda_{xbез} &= -4,192288919 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{ybез} &= 1,862663610 \cdot 10^{-6}, \\
\lambda_{zbез} &= 3,375542260 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{vxbез} &= 0,005756096, \\
\lambda_{vyбез} &= 0,122589304, & \lambda_{vzбез} &= 0,271310189, \\
\lambda_{xц} &= 2,712182075 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{yц} &= -1,138471581 \cdot 10^{-9}, \\
\lambda_{zц} &= -6,622593433 \cdot 10^{-13}, & \lambda_{vxц} &= 0,000524475, \\
\lambda_{vyц} &= 0,124996420, & \lambda_{vzц} &= 0,154483787, \\
\lambda_{\tau c61} &= 1,017515559 \cdot 10^{-10}, & \lambda_{c61} &= 0,000457417, \\
\lambda_{m\tau 1} &= 0,005674790, & \lambda_{m\tau 2} &= 0, \\
\lambda_{\tau} &= -7,385740053 \cdot 10^{-11}, & \lambda_{\tau c62} &= 8,771225602 \cdot 10^{-11}, \\
\lambda_{\tau без} &= 1,237010821 \cdot 10^{-11}, & \lambda_{без} &= -0,000291125, \\
\lambda_{\tau ц} &= -1,948360860 \cdot 10^{-19}, & \lambda_{ц} &= -0,020742502, \\
\lambda_{\text{дов}} &= 1,164436713, & \lambda_T &= 4,669488715 \cdot 10^{-6}, \\
\lambda_{mT1} &= -0,009927899, & \lambda_{mT2} &= 0,000804002, \\
\lambda_0 &= 0,009915863.
\end{aligned}$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0,7817944$ рад:

$$\begin{aligned}
x(0) &= 4668,258 \text{ км}, & y(0) &= -2880,996 \text{ км}, & z(0) &= -3630,510 \text{ км}, \\
v_x(0) &= 5,484390 \text{ км/с}, & v_y(0) &= 3,433812 \text{ км/с}, & v_z(0) &= 4,327147 \text{ км/с}, \\
p_x(0) &= 0,000284790, & p_y(0) &= -0,000515932, & p_z(0) &= -0,000601403, \\
p_{vx}(0) &= 0,454024806, & p_{vy}(0) &= 0,573821987, & p_{vz}(0) &= 0,681608247, \\
m(0) &= 1, & p_m(0) &= 0,003461557.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1234,190$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a1} = 15\,500,572$ км, перигеем $r_{п1} = 6702,795$ км и углом наклона $i_1 =$

= 0,8956402 рад. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_1^{\text{акт}}$ включения двигателя:

$$\begin{aligned}x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5360,198 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3045,731 \text{ км}, \\z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3807,202 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4,376498 \text{ км/с}, \\v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4,635010 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5,786158 \text{ км/с}, \\p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0,000331052, & p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0,000386951, \\p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0,000452488, & p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0,371919208, \\p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0,637424282, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0,754898302, \\m(\tau_1^{\text{акт}}) &= 0,6473743, & p_m(\tau_1^{\text{акт}}) &= 0,005597245.\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 5219,504$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{a2} = 15\,497,241$ км, перигеем $r_{п2} = 6704,141$ км и углом наклона $i_2 = 0,8956703$ рад. Координаты и скорости КА в момент $\tau_1^{\text{пасс}}$ включения двигателя:

$$\begin{aligned}x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -15495,958 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 133,386 \text{ км}, \\z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 131,434 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0,061410 \text{ км/с}, \\v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2,462966 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3,076413 \text{ км/с}, \\p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0,000121015, & p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2,300740522 \cdot 10^{-6}, \\p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3,527557800 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0,007053866, \\p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0,600617145, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0,868167234, \\m(\tau_1^{\text{пасс}}) &= 0,6473743, & p_m(\tau_1^{\text{пасс}}) &= 0,005597245.\end{aligned}$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{сб1}^{\text{ДТВ}} = 30,961$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a3} = 15\,497,241$ км, перигеем $r_{п3} = 6478,25$ км и углом наклона $i_3 = 0,8948234$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_{сб1}^{\text{ДТВ}}$ выключения двигателя:

$$\begin{aligned}x(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= x(\tau_{сб1+}^{\text{ДТВ}}) = -15\,497,060 \text{ км}, & y(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= y(\tau_{сб1+}^{\text{ДТВ}}) = 57,540 \text{ км}, \\z(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= z(\tau_{сб1+}^{\text{ДТВ}}) = 36,780 \text{ км}, & v_x(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= v_x(\tau_{сб1+}^{\text{ДТВ}}) = -0,009780 \text{ км/с}, \\v_y(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= v_y(\tau_{сб1+}^{\text{ДТВ}}) = -2,436415 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= v_z(\tau_{сб1+}^{\text{ДТВ}}) = -3,037856 \text{ км/с}, \\p_x(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= 0,000121065, & p_y(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= -3,087854169 \cdot 10^{-7}, \\p_z(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= -6,465598107 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{сб1-}^{\text{ДТВ}}) &= 0,003306216,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{vy}(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) &= 0,600657543, & p_{vz}(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) &= 0,868231852, \\
p_x(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -0,000341292, & p_y(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= 7,242061031 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -4,016946803 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -0,006462504, \\
p_{vy}(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -0,749532226, & p_{vz}(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -0,815268562, \\
m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) &= 0,6385284, & p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) &= 0,005674790.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{a4} = 15\,497,245$ км, перигеем $r_{п4} = 6478,246$ км и углом наклона $i_4 = 0,8948232$ рад. Координаты и скорости КА в момент $\tau_{c62}^{\text{ДТБ}}$ включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -15486,279 \text{ км}, & y(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -234,799 \text{ км}, \\
z(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -327,697 \text{ км}, & v_x(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = 0,189472 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -2,435275 \text{ км/с}, \\
v_z(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -3,035984 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_x(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -0,000341191, \\
p_y(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_y(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -8,913952605 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_z(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -1,089032490 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vx}(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vx}(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = 0,034488810, \\
p_{vy}(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vy}(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -0,749040916, \\
p_{vz}(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vz}(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -0,814591115, \\
m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0,5865284, & p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0,006478792.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{6\text{ез}} = 12,584$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a5} = 15\,497,362$ км, перигеем $r_{п5} = 6578,25$ км и углом наклона $i_5 = 0,8944602$ рад — “безопасная” орбита. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_{6\text{ез}}$ выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{6\text{ез}-}) &= x(\tau_{6\text{ез}+}) = -15\,483,759 \text{ км}, & y(\tau_{6\text{ез}-}) &= y(\tau_{6\text{ез}+}) = -265,532 \text{ км}, \\
z(\tau_{6\text{ез}-}) &= z(\tau_{6\text{ез}+}) = -365,996 \text{ км}, & v_x(\tau_{6\text{ез}-}) &= v_x(\tau_{6\text{ез}+}) = 0,211071 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{6\text{ез}-}) &= v_y(\tau_{6\text{ез}+}) = -2,449215 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{6\text{ез}-}) &= v_z(\tau_{6\text{ез}+}) = -3,051042 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{6\text{ез}-}) &= -0,000341167, & p_y(\tau_{6\text{ез}-}) &= -9,925271032 \cdot 10^{-6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_z(\tau_{6\text{е}3-}) &= -1,199086427 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{6\text{е}3-}) &= 0,038782187, \\
p_{vy}(\tau_{6\text{е}3-}) &= -0,748922381, & p_{vz}(\tau_{6\text{е}3-}) &= -0,814447148, \\
p_x(\tau_{6\text{е}3+}) &= -4,192288919 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{6\text{е}3+}) &= 1,862663610 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{6\text{е}3+}) &= 3,375542260 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{6\text{е}3+}) &= 0,005756096, \\
p_{vy}(\tau_{6\text{е}3+}) &= 0,122589304, & p_{vz}(\tau_{6\text{е}3+}) &= 0,271310189, \\
m(\tau_{6\text{е}3}) &= 0,5829330, & p_m(\tau_{6\text{е}3}) &= 0,006518753.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 5213,308$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{a6} = 15\,511,458$ км, перигеем $r_{п6} = 6576,991$ км и углом наклона $i_6 = 0,8945149$ рад. Координаты и скорости КА в момент $\tau_3^{\text{пасс}}$ включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5800,915 \text{ км}, & y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2325,058 \text{ км}, \\
z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2873,476 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 3,552179 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5,123342 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6,398453 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0,000705371, & p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -0,000362590, \\
p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -0,000422128, & p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0,375643830, \\
p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0,672228633, & p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0,795432792, \\
m(\tau_3^{\text{пасс}}) &= 0,5829330, & p_m(\tau_3^{\text{пасс}}) &= 0,006518753.
\end{aligned}$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 780,500$ с. КА переходит на целевую орбиту с апогеем $r_{a7} = 227\,835,611$ км, перигеем $r_{п7} = 6644,321$ км и углом наклона $i_7 = 0,8906535$ рад. Координаты, скорости и масса КА в момент $\tau_4^{\text{акт}}$ выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6084,753 \text{ км}, & y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2384,542 \text{ км}, \\
z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2973,927 \text{ км}, & v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -2,938015 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6,263591 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7,730739 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0,000708160, & p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0,000286427, \\
p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0,000340122, & p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0,318610391, \\
p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0,697696303, & p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0,821832874, \\
m(\tau_4^{\text{акт}}) &= 0,3599331, & p_m(\tau_4^{\text{акт}}) &= 0,010719865.
\end{aligned}$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{п} = 0,2963061$ (6666,888 кг). В момент $\tau_{п}$ происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы.

Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка (пассивного полета ЦБ на целевой орбите) $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}} = 197\,376,995$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на орбите с апогеем $r_{\text{а8}} = 226\,259,913$ км, перигеем $r_{\text{п8}} = 6643,293$ км и углом наклона $i_8 = 0,8905128$ рад. Координаты и масса ЦБ в момент $\tau_{\text{ц}}$ включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{ц-}}) &= x(\tau_{\text{ц+}}) = -226\,257,921 \text{ км}, & y(\tau_{\text{ц-}}) &= y(\tau_{\text{ц+}}) = 949,323 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{ц-}}) &= z(\tau_{\text{ц+}}) = 0,031 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{ц-}}) &= v_x(\tau_{\text{ц+}}) = -0,000838 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{ц-}}) &= v_y(\tau_{\text{ц+}}) = -0,199407 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{ц-}}) &= v_z(\tau_{\text{ц+}}) = -0,246448 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{ц-}}) &= -7,173006000 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц-}}) &= 1,993046144 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(\tau_{\text{ц-}}) &= -3,571982769 \cdot 10^{-8}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц-}}) &= -0,003979552, \\
p_{vy}(\tau_{\text{ц-}}) &= -0,672797915, & p_{vz}(\tau_{\text{ц-}}) &= 0,617436221, \\
p_x(\tau_{\text{ц+}}) &= 2,712182075 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц+}}) &= -1,138471581 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(\tau_{\text{ц+}}) &= -6,622593433 \cdot 10^{-13}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0,000524475, \\
p_{vy}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0,124996420, & p_{vz}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0,154483787, \\
m(\tau_{\text{ц-}}) &= 0,3599331, & m(\tau_{\text{ц+}}) &= 0,0636269, \\
p_m(\tau_{\text{ц-}}) &= p_m(\tau_{\text{ц+}}) = 0,010719865.
\end{aligned}$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0,250$ с – ЦБ переводится на орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{\text{а9}} = 226\,259,913$ км, перигеем $r_{\text{п9}} = 6478,25$ км и углом наклона $i_9 = 0,8905128$ рад. Координаты, скорости и масса ЦБ в момент T выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(T) &= -226\,257,922 \text{ км}, & y(T) &= 949,274 \text{ км}, \\
z(T) &= -0,030 \text{ км}, & v_x(T) &= -0,000826 \text{ км/с}, \\
v_y(T) &= -0,196984 \text{ км/с}, & v_z(T) &= -0,243454 \text{ км/с}, \\
p_x(T) &= 2,712182120 \cdot 10^{-7}, & p_y(T) &= -1,137397235 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(T) &= 6,655346255 \cdot 10^{-13}, & p_{vx}(T) &= 0,000524407, \\
p_{vy}(T) &= 0,124996420, & p_{vz}(T) &= 0,154483787, \\
m(T) &= 0,0635556, & p_m(T) &= 0,010731902.
\end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{дов1}} = 0,029677 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов2}} = 0,491271 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов3}} = 0,979052 \text{ км/с}.$$

Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 199,034 кг (0,0088460). Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 80,897 кг (0,0035954). Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 1,606 кг ($7,1361228 \cdot 10^{-5}$). Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 281,536 кг (0,0125127).

Соответствие фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков можно проверить с помощью численного интегрирования. Условия принципа максимума Понтрягина можно проверить путем подстановки фазовых, сопряженных переменных и числовых множителей Лагранжа в соответствующие формулы, при этом для проверки условий трансверсальности можно использовать технологию численно-аналитического дифференцирования. Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования использовался метод Дормана–Принса 8 (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Оптимизация перелета КА со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу Земли // А и Т. 2023. № 3. С. 22–43.
2. Макаров Ю.Н. Мониторинг техногенного засорения космического пространства. Проблемы и решения // Наноиндустрия. 2019. № 1(87). С. 6–14.
3. Ведешин Л.А. Концепция создания системы мониторинга и управления экологическим состоянием околоземного космического пространства // Тр. ИПА РАН. 2019. № 51. С. 26–31.
4. Пикалов Р.С., Юдинцев В.В. Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Тр. МАИ. 2018. Выпуск 100.
5. Shan M., Guo J., Gill E. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods // Progr. Aerospac. Sci. 2015. V. 80. P. 18–32.
6. Трушляков В.И., Юткин Е.А. Обзор средств стыковки и захвата объектов крупногабаритного космического мусора // Омский научный вестник. 2013. № 2. С. 56–61.
7. Pelton J.N. New solutions for the space debris problem, Springer, 2015, 94 p.
8. Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу // Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 4(88). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869>
9. Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I) // Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 9(93). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917>
10. Григорьев И.С., Проскуряков А.И. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II) //

Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 10(94).

<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1925>

11. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
12. Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 4. С. 358–366.
13. Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. факультете МГУ, 2005.
14. Григорьев К.Г., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. факультете МГУ, 2007.
15. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
16. Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1963. № 6(3). С. 1114–1116.
17. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.
18. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М.: Мир, 1977.
19. Численно-аналитическое дифференцирование ext_value
http://mech.math.msu.su/iliagri/ext_value.htm
20. Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
21. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли // Космические исследования. 1971. Т. IX, вып. 2. С. 163–172.
22. Самохин А.С. Методика построения экстремалей Понтрягина в задачах сквозной траекторной оптимизации межпланетных перелетов с учетом планетоцентрических участков: дис. канд. физ. матем. наук 01.02.01 / Самохин А.С. М., 2021. 157 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 24.08.2023

После доработки 06.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023