Автоматика и телемеханика, № 1, 2024

Линейные системы

© 2024 г. **М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)**
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

СИНТЕЗ ОБОБЩЕННОГО H_∞-СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ И АПРИОРНЫМ ДАННЫМ[1]

Показано, что при отсутствии математической модели линейного непрерывного или дискретного динамического объекта закон управления, обеспечивающий субоптимальное гашение начального и/или внешнего возмущений, может быть реализован по экспериментальным и априорным данным. В основе подхода лежат методы построения робастного управления, теория двойственности и аппарат линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: обобщенная H_∞-норма, неопределенность, робастное управление, экспериментальные данные, двойственные системы, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024010015

1. Введение

В последнее время все возрастающее внимание в теории управления уделяется построению законов управления для динамических объектов в условиях большой неопределенности относительно их математических моделей, действующих внешних возмущений и неизвестных начальных условий. В работах этого направления предполагается, что с объектом можно провести серию экспериментов, задавая входные воздействия и измеряя выходные переменные. Задача состоит в том, чтобы на основе полученных измерений, а также априорных данных, не идентифицируя неизвестные параметры объекта, непосредственно определить параметры обратных связей, при которых гарантируется определенное качество замкнутой системы управления.

В [1] было установлено, что для полной характеризации линейной стационарной динамической системы может быть использована единственная траектория, полученная при выполнении так называемого условия неисчезающего возбуждения. С учетом этого фундаментального результата в [2] для объектов с неизвестными матрицами уравнения динамики состояния и заданными матрицами уравнения целевого выхода были предложены различные варианты прямого синтеза законов управления на основе экспериментальных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2023-945).

данных, в которых выполняется указанное условие. В [3] было показано, что для построения законов управления по экспериментальным данным достаточно выполнения условия информативности данных по отношению к синтезируемому закону управления, которое менее ограничительно по сравнению с условием неисчезающего возбуждения. В [4] построение H_2- и H_∞-оптимальных законов управления полностью неопределенным дискретным объектом по измерениям входа и выхода осуществляется на основе матричного варианта S-леммы [5], а в [6] – на основе леммы Питерсена [7]. В [8, 9] параметры обратной связи по состоянию находятся на основе априорных данных и измерений входа и выхода дискретного неопределенного объекта, на который действует неизмеряемое возмущение из определенного класса.

В настоящей работе синтез обобщенных H_∞-субоптимальных, обеспечивающих гашение начального и/или внешнего возмущения и, как частный случай, линейно-квадратичных законов управления для непрерывных и дискретных объектов с полностью неизвестными матрицами уравнений динамики состояния и целевого выхода осуществляется на основе априорных и экспериментальных данных. В основу синтеза положен подход, примененный в [9] и состоящий в "погружении" неопределенной системы в искусственную систему с известными уравнениями и с дополнительным возмущением, влияние которого соответствует влиянию неизвестных слагаемых в исходном уравнении. Идея такого искусственного "погружения" или, другими словами, представление неопределенной системы в виде системы, в обратной связи которой находится блок с неизвестными ограниченными параметрами или неизвестный ограниченный оператор, активно применялась в синтезе робастного управления на основе H_∞-оптимального управления (см. обзор [10]). Однако непосредственное применение такого подхода к синтезу законов управления на основе экспериментальных данных вызывало трудности. В данной работе показано, что эта проблема разрешается, если перейти от исходной неопределенной системы к двойственной неопределенной системе, которую следует "погрузить" в соответствующую расширенную систему. Для реализации такого подхода потребовалось предварительно установить связь между обобщенными H_∞-нормами прямой и двойственной систем.

Статья структурирована следующим образом. После введения в разделе 2 дается общая постановка задачи и показывается, как на основе априорных и экспериментальных данных выводятся два квадратичных неравенства относительно неизвестных матриц уравнений динамики состояния и целевого выхода. В разделе 3 приводятся необходимые сведения об обобщенной H_∞-норме и доказывается утверждение о вычислении этой нормы в терминах двойственной системы. В разделе 4 описывается процедура синтеза обобщенных H_∞-субоптимальных законов управления по априорным и экспериментальным данным и доказывается основная теорема. В разделе 5 приводятся результаты ряда экспериментов с неопределенной системой, показывающие эффективность синтезируемого управления. В разделе 6 подводятся итоги и делаются выводы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неопределенную систему вида

$$
\begin{aligned}
&\partial x(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad x(0) = x_0, \\
&z(t) = Cx(t) + Du(t),
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

где ∂ – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае, $x(t) \in \mathrm{R}^{n_x}$ – состояние, $u(t) \in \mathrm{R}^{n_u}$ – управление, $w(t) \in \mathrm{R}^{n_w}$ – возмущение, $z(t) \in \mathrm{R}^{n_z}$ – целевой выход. Предполагается, что возмущение $w(t) \in L_2(l_2)$ и матрицы системы A, B, C и D неизвестны. В общем плане требуется на основе априорной информации и данных, полученных из экспериментов, синтезировать линейные обратные связи по состоянию, при которых уровень гашения возмущений в замкнутой системе не превышает заданное значение.

Информация о неизвестных параметрах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. А именно, допустим, что в случае дискретной системы получены измерения ее состояния $x_0, x_1, \ldots, x_N$ и целевого выхода $z_0, \ldots, z_{N-1}$ при выбранных управлениях $u_0, \ldots, u_{N-1}$ и некотором неизвестном возмущении $w_0, \ldots, w_{N-1}$. Составим матрицы

$$
\begin{gathered}
\Phi = (x_0 \cdots x_{N-1}), \quad \Phi_+ = (x_1 \cdots x_N), \\
U = (u_0 \cdots u_{N-1}), \quad W = (w_0 \cdots w_{N-1}), \quad Z = (z_0 \cdots z_{N-1}).
\end{gathered}
$$

В случае непрерывной системы допустим, что имеются измерения в моменты времени $t_0, \ldots, t_{N-1}$ состояния $x(t_0), \ldots, x(t_{N-1})$, производных состояния $\dot{x}(t_0), \ldots, \dot{x}(t_{N-1})$ и целевого выхода $z(t_0), \ldots, z(t_{N-1})$ при выбранных управлениях $u(t_0), \ldots, u(t_{N-1})$ и некоторых неизвестных возмущениях $w(t_0), \ldots, w(t_{N-1})$. Составим матрицы

$$
\begin{gathered}
\Phi = (x(t_0) \cdots x(t_{N-1})), \quad \Phi_+ = (\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{N-1})), \\
U = (u(t_0) \cdots u(t_{N-1})), \quad W = (w(t_0) \cdots w(t_{N-1})), \quad Z = (z(t_0) \cdots z(t_{N-1})).
\end{gathered}
$$

Для матриц с экспериментальными данными в непрерывном и дискретном случаях имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
\Phi_+ &= A_{real}\Phi + B_{real}U + W, \\
Z &= C_{real}\Phi + D_{real}U,
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

в которых A_{real}, B_{real}, C_{real} и D_{real} – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим:

$$
\Delta_{real} = \begin{pmatrix} A_{real} & B_{real} \\ C_{real} & D_{real} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ U \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ Z \end{pmatrix}, \quad \widehat{W} = \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix}
$$

и запишем уравнения (2.2) в виде линейной матричной регрессии

$$
\widetilde{\Phi} = \Delta_{real}\widehat{\Phi} + \widehat{W}. \tag{2.3}
$$

Допустим, что возмущение в эксперименте удовлетворяет условию

$$\sum_{i=0}^{N-1} w(t_i)w^{\mathrm{T}}(t_i) = WW^{\mathrm{T}} \leqslant \Omega. \tag{2.4}$$

В частности, если возмущение при всех t удовлетворяет ограничению $\|w(t)\|_\infty \leqslant d_w$ для некоторого заданного d_w, которое будем называть уровнем возмущения, то $\Omega = d_w^2 n_w N I_{n_x}$. В случае, когда суммарная энергия возмущения во время эксперимента ограничена $\sum_{i=0}^{N-1} |w(t_i)|^2 \leqslant \alpha^2$, то $\Omega = \alpha^2 I$. Если в (2.1) $w(t) = B_v v(t)$, $v(t) \in \mathrm{R}^{n_v}$ для некоторой матрицы B_v и $\|v(t)\|_\infty \leqslant d_v$, то $\Omega = d_v^2 n_v N B_v B_v^{\mathrm{T}}$.

Из (2.4) следует, что

$$\widehat{W}\widehat{W}^{\mathrm{T}} \leqslant \begin{pmatrix} \Omega & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}. \tag{2.5}$$

Определим множество $\mathbf{\Delta_p}$ матриц Δ порядка $(n_x+n_z)\times(n_x+n_u)$, которые могли бы генерировать полученные в эксперименте матрицы Φ, Φ_+ и Z при выбранных управлениях U и некоторых допустимых возмущениях W, удовлетворяющих ограничению (2.4). Для этих матриц равенство $\widetilde{\Phi} = \Delta\widehat{\Phi} + \widehat{W}$ должно выполняться при некоторой $\widehat{W}$, удовлетворяющей (2.5). Следовательно,

$$\mathbf{\Delta_p} = \left\{\Delta : \, \widetilde{\Phi} = \Delta\widehat{\Phi} + \widehat{W}, \quad \widehat{W}\widehat{W}^{\mathrm{T}} \leqslant \widehat{\Omega}\right\}$$

и $\Delta \in \mathbf{\Delta_p}$ тогда и только тогда, когда

$$(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})^{\mathrm{T}} \leqslant \widehat{\Omega}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что $\Delta_{real} \in \mathbf{\Delta_p}$. Для дальнейшего применения представим последнее неравенство в виде

$$(\Delta \; I_{n_x+n_z})\,\Psi_1\,(\Delta \; I_{n_x+n_z})^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \tag{2.7}$$

где симметрическая матрица Ψ_1 порядка $2n_x + n_u + n_z$ разбивается на блоки соответствующего порядка и вычисляется следующим образом:

$$\Psi_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} \Phi\Phi^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ U\Phi^{\mathrm{T}} & UU^{\mathrm{T}} & * & * \\ \hline -\Phi_+\Phi^{\mathrm{T}} & -\Phi_+U^{\mathrm{T}} & \Phi_+{\Phi_+}^{\mathrm{T}} - \Omega & * \\ -Z\Phi^{\mathrm{T}} & -ZU^{\mathrm{T}} & Z{\Phi_+}^{\mathrm{T}} & ZZ^{\mathrm{T}} \end{array}\right). \tag{2.8}$$

Таким образом, множество матриц Δ, согласованных с полученными экспериментальными данными, удовлетворяет неравенству (2.7). Условия ограниченности множества $\mathbf{\Delta_p}$ формулируются в следующем утверждении, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 2.1. Если информационная матрица $\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}$ невырожденна, то множество $\mathbf{\Delta_p}$ представляет собой невырожденный "матричный эллипсоид" с центром в Δ_{LS}, определяемый неравенством

$$(\Delta - \Delta_{LS})(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})(\Delta - \Delta_{LS})^{\mathrm{T}} \leqslant \Gamma, \tag{2.9}$$

в котором

$$\Gamma = \widehat{\Omega} + \widetilde{\Phi}[\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{2.10}$$

а $\Delta_{LS} = \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}$ – оптимальная оценка неизвестной матрицы Δ_{real} в (2.3) методом наименьших квадратов, минимизирующая по Δ квадрат матричной нормы невязки $\|\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi}\|_F^2$.

Из этой леммы следует, что при невырожденности информационной матрицы "размер" множества $\mathbf{\Delta_p}$ определяется матрицами регрессоров $\widehat{\Phi}$ и в конечном итоге зависит от реального объекта, выбираемых в эксперименте управлений U и возмущений W.

Далее, пусть имеется дополнительная информация о том, что неизвестная матрица Δ_{real} удовлетворяет ограничению

$$(\Delta - \Delta_*)(\Delta - \Delta_*)^{\mathrm{T}} \leqslant \rho^2 I, \quad \Delta_* = \begin{pmatrix} A_* & B_* \\ C_* & D_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_*^{(1)} \\ \Delta_*^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

в котором Δ_* и ρ – заданные матрица и параметр, характеризующие центр и размер области неопределенности. Запишем это неравенство в виде

$$(\Delta\, I_{n_x+n_z})\, \Psi_2\, (\Delta\, I_{n_x+n_z})^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \tag{2.12}$$

где

$$\Psi_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n_x} & \star & \star & \star \\ 0_{n_u\times n_x} & I_{n_u} & \star & \star \\ \hline -A_* & -B_* & \Delta_*^{(1)}\Delta_*^{(1)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_x} & \star \\ -C_* & -D_* & \Delta_*^{(2)}\Delta_*^{(1)\mathrm{T}} & \Delta_*^{(2)}\Delta_*^{(2)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_z} \end{array}\right). \tag{2.13}$$

Обозначим: $\mathbf{\Delta_a}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенству (2.12), и $\mathbf{\Delta_{set}} = \mathbf{\Delta_p} \bigcap \mathbf{\Delta_a}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенствам (2.7) и (2.12). Очевидно, что $\Delta_{real} \in \mathbf{\Delta_{set}}$ (см. рис. 1).

Качество системы (2.1) при заданной матрице Δ, замкнутой управлением вида линейной стационарной обратной связи по состоянию $u(t) = \Theta x(t)$, будем оценивать уровнем гашения внешнего и начального возмущений, т.е. обобщенной H_∞-нормой

$$\gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) = \sup_{x_0,\, w} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|w\|^2\right)^{1/2}},$$

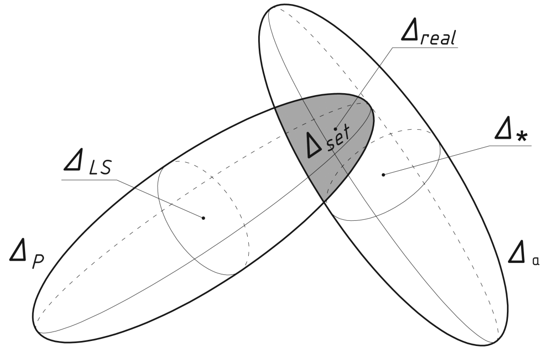

Рис. 1. Множество $\mathbf{\Delta_{set}}$ неизвестных параметров Δ, согласованных с экспериментальными и априорными данными.

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ – весовая матрица, $\|\xi\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в дискретном случае и $\|\xi\|^2 = \int_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в непрерывном случае. При отсутствии внешнего возмущения, т.е. при $w(t) \equiv 0$, обобщенная H_∞-норма принимает вид так называемой γ_0-нормы

$$\gamma_0(\Delta, \Theta) = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0\right)^{1/2}},$$

которая характеризует "наихудшее" значение квадратичного функционала на траекториях системы, когда начальное состояние принадлежит эллипсоиду $x^{\mathrm{T}} R^{-1} x \leqslant 1$. Если начальное состояние нулевое, то обобщенная H_∞-норма (при $R \to 0$) превращается в обычную H_∞-норму

$$\gamma_\infty(\Delta, \Theta) = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|}{\|w\|}.$$

Качество неопределенной системы (2.1), замкнутой управлением вида $u(t) = \Theta x(t)$, будем оценивать минимальной верхней границей уровня гашения внешнего и начального возмущений, т.е. минимальной верхней границей обобщенной H_∞-нормы для всех матриц объекта, согласованных с экспериментальными и априорными данными:

$$\gamma_*(\Theta) = \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta_{set}}} \gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta). \tag{2.14}$$

Робастное обобщенное H_∞-оптимальное управление определяется как управление с матрицей параметров Θ_*, при которой достигается минимальное значение этой границы, т.е. которая является решением минимаксной задачи

$$\inf_{\Theta} \sup_{\Delta \in \mathbf{\Delta_{set}}} \gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) = \inf_{\Theta} \gamma_*(\Theta) = \gamma_*(\Theta_*). \tag{2.15}$$

Задача заключается в том, чтобы, не имея и не строя математическую модель системы, синтезировать робастное обобщенное H_∞-субоптимальное управление с матрицей параметров Θ, при которой обобщенная H_∞-норма замкнутой системы для всех объектов, матрицы которых согласованы с полученными экспериментальными данными, ограничена заданной константой, т.е. $\gamma_*(\Theta) < \gamma$.

3. Обобщенная H_∞-норма в терминах двойственной системы

Напомним, что обобщенная H_∞-норма от входа v к выходу z

$$\gamma_{g\infty} = \sup_{x_0,\, v} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2\right)^{1/2}} \tag{3.1}$$

устойчивой системы

$$\begin{aligned} \partial x(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}v(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}x(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

удовлетворяет условию $\gamma_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда разрешимы относительно матрицы $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ следующие линейные матричные неравенства: для непрерывной системы

$$\begin{pmatrix} Y\mathcal{A}^T + \mathcal{A}Y & \star & \star \\ \mathcal{B}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & \star \\ \mathcal{C}Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \star \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0 \tag{3.3}$$

и для дискретной системы

$$\begin{pmatrix} -Y & \star & \star & \star \\ Y\mathcal{A}^{\mathrm{T}} & -Y & \star & \star \\ \mathcal{B}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ 0 & \mathcal{C}Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \star \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0. \tag{3.4}$$

Как показано в [11, 12], неравенства (3.3) и (3.4) означают, что для положительно определенной функции $V(x) = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ с $Y > \gamma^{-2} R$ в силу системы (3.2) выполняется соответствующее из неравенств

$$\dot{V}(x) + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0, \quad \Delta V(x) + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall\, x, v. \tag{3.5}$$

Следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении, позволяет характеризовать обобщенную H_∞-норму системы (3.2) в терминах двойственной системы.

Л е м м а 3.1. *Обобщенная H_∞-норма системы* (3.2) *удовлетворяет условию $\gamma_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма $V_a(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ с $P > R$, для которой по траектории двойственной системы*

$$\begin{aligned} \partial x_a(t) &= \mathcal{A}^{\mathrm{T}} x_a(t) + \mathcal{C}^{\mathrm{T}} v_a(t), \\ z_a(t) &= \mathcal{B}^{\mathrm{T}} x_a(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

выполняется соответствующее из неравенств

$$\dot{V}_a(x_a(t)) + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |v_a(t)|^2 < 0,$$
$$\Delta V_a(x_a(t)) + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |v_a(t)|^2 < 0. \tag{3.7}$$

Следствие 3.1. При $v(t) \equiv 0$ γ_0-норма системы (3.2) удовлетворяет условию $\gamma_0 < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует квадратичная форма $V_a(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ с $P > R$, для которой по траектории двойственной системы

$$\partial x_a(t) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}} x_a(t) + \mathcal{C}^{\mathrm{T}} v_a(t)$$

выполняется соответствующее из неравенств (3.7) при $z_a(t) \equiv 0$.

Замечание 1. Формально двойственная система описывается в непрерывном и дискретном случаях уравнениями

$$\dot{\widehat{x}}_a = -\mathcal{A}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a - \mathcal{C}^{\mathrm{T}} \widehat{v}_a,$$
$$\widehat{z}_a = \mathcal{B}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a \tag{3.8}$$

и

$$\widehat{x}_a(t) = \mathcal{A}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a(t+1) + \mathcal{C}^{\mathrm{T}} \widehat{v}_a(t),$$
$$\widehat{z}_a(t) = \mathcal{B}^{\mathrm{T}} \widehat{x}_a(t+1) \tag{3.9}$$

соответственно. Как показано в доказательстве этой леммы, от систем (3.8) и (3.9) можно перейти к системе (3.6), которая также будет называться двойственной и для которой выполняется соответствующее из неравенств (3.7).

Замечание 2. Матрицы квадратичных форм $V(x) = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ и $V_a(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ прямой и двойственной систем, как следует из доказательства леммы 3.1, связаны соотношением $P = \gamma^2 Y$.

4. Синтез обобщенных H_∞-субоптимальных законов управления

Опишем основные шаги получения верхней границы обобщенной H_∞-нормы и соответствующих матриц параметров Θ законов управления для неопределенной замкнутой системы

$$\partial x(t) = (A + B\Theta) x(t) + w(t),$$
$$z(t) = (C + D\Theta) x(t). \tag{4.1}$$

Предполагая, что параметры Θ выбраны так, что замкнутая система устойчива, и учитывая введенные обозначения, представим эти уравнения в виде

$$\partial x(t) = (I_{n_x} \ 0_{n_x \times n_z})\, \Delta \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{pmatrix} x(t) + w(t),$$
$$z(t) = (0_{n_z \times n_x} \ I_{n_z})\, \Delta \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{pmatrix} x(t), \tag{4.2}$$

где Δ – неизвестная $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$-матрица, Θ – $(n_u \times n_x)$-матрица параметров регулятора. Уравнения двойственных непрерывной и дискретной систем согласно лемме 3.1 имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\partial x_a(t) = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_a(t) + \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_a(t), \\
&z_a(t) = x_a(t).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом $w_\Delta(t) \in L_2(l_2)$ и выходом $z_\Delta(t)$, определяемую в непрерывном и дискретном случаях уравнениями

$$
\begin{aligned}
&\partial \widehat{x}(t) = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_\Delta(t), \\
&\widehat{z}(t) = \widehat{x}(t), \quad z_\Delta(t) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \widehat{w}(t),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

в которых $\widehat{x}(t)$ – состояние, $\widehat{w}(t)$ – возмущение, $\widehat{z}(t)$ – целевой выход. Заметим, что при $w_\Delta(t) = \Delta^{\mathrm{T}} z_\Delta(t)$ уравнения (4.4) совпадают с уравнениями системы (4.3). Допустим, что дополнительные входной и выходной сигналы в системе (4.4) при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют двум неравенствам

$$
\begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_1 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_2 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leqslant 0,
\tag{4.5}
$$

где матрицы Ψ_1 и Ψ_2 заданы в (2.8) и (2.13). Множество всех таких сигналов $w_\Delta(t)$ обозначим через $\mathbf{W}_{\boldsymbol{\Delta}}$. При $w_\Delta(t) = \Delta^{\mathrm{T}} z_\Delta(t)$ для всех $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$, как следует из (2.7) и (2.12), выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_1 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} = z_\Delta^{\mathrm{T}}(t) \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_1 \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leqslant 0, \\
&\begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_2 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} = z_\Delta^{\mathrm{T}}(t) \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_2 \begin{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $w_\Delta(t) = \Delta^{\mathrm{T}} z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_{\boldsymbol{\Delta}}$ и, следовательно, система (4.3) с $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$, двойственная исходной неопределенной системе, "погружена" в расширенную систему (4.4), (4.5). С учетом леммы 3.1 это позволяет получить верхнюю границу обобщенной H_∞-нормы неопределенной системы, используя соответствующее свойство расширенной системы.

Теорема 4.1. *Верхняя граница обобщенной H_∞-нормы неопределенной системы* (2.1) *при законе управления $u(t) = \Theta x(t)$, где $\Theta = QP^{-1}$, меньше γ,* *если следующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, Q, $\mu_1 \geqslant 0$ и $\mu_2 \geqslant 0$: для непрерывной системы*

$$
\begin{pmatrix}
I - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{11}^{(i)} & \star & \star & \star \\
-\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{21}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{22}^{(i)} - \gamma^2 I & \star & \star \\
P - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{31}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{32}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{33}^{(i)} & \star \\
Q - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{41}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{42}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{43}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{44}^{(i)}
\end{pmatrix} < 0 \tag{4.6}
$$

и для дискретной системы

$$
\begin{pmatrix}
-P & \star & \star & \star & \star \\
0 & -P + I - \sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{11}^{(i)} & \star & \star & \star \\
0 & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{21}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{22}^{(i)} - \gamma^2 I & \star & \star \\
P & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{31}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{32}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{33}^{(i)} & \star \\
Q & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{41}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{42}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{43}^{(i)} & -\sum\limits_{i=1}^{2} \mu_i \, \Xi_{44}^{(i)}
\end{pmatrix} < 0, \tag{4.7}
$$

где $P > R$,

$$
\Xi_{11}^{(1)} = \Phi_+ {\Phi_+}^{\mathrm{T}} - \Omega, \quad \Xi_{21}^{(1)} = Z {\Phi_+}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{22}^{(1)} = Z Z^{\mathrm{T}},
$$
$$
\Xi_{31}^{(1)} = -\Phi {\Phi_+}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{32}^{(1)} = -\Phi Z^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{33}^{(1)} = \Phi \Phi^{\mathrm{T}},
$$
$$
\Xi_{41}^{(1)} = -U {\Phi_+}^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{42}^{(1)} = -U Z^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{43}^{(1)} = U \Phi^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{44}^{(1)} = U U^{\mathrm{T}},
$$
$$
\Xi_{11}^{(2)} = \Delta_*^{(1)} \Delta_*^{(1)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_x}, \quad \Xi_{21}^{(2)} = \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(1)\mathrm{T}}, \quad \Xi_{22}^{(2)} = \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(2)\mathrm{T}} - \rho^2 I_{n_z},
$$
$$
\Xi_{31}^{(2)} = -A_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{32}^{(2)} = -C_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{33}^{(2)} = I_{n_x},
$$
$$
\Xi_{41}^{(2)} = -B_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{42}^{(2)} = -D_*^{\mathrm{T}}, \quad \Xi_{43}^{(2)} = 0_{n_u \times n_x}, \quad \Xi_{44}^{(2)} = I_{n_u}.
$$

Доказательство теоремы 4.1. Выясним условия, при которых существует положительно определенная квадратичная функция $\widehat{V}(\widehat{x}) = \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x}$ с $P > R$, для которой в силу уравнений расширенной системы (4.4) при всех $w_\Delta(t)$, удовлетворяющих (4.5), выполняется соответствующее из неравенств (3.7). Достаточным условием для этого в силу S-процедуры является существование функции $\widehat{V}(\widehat{x}) = \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x}$ с $P > R$, для которой в силу уравнений (4.4) при всех $\widehat{x}$, $\widehat{w}$, w_Δ и некоторых $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ выполняется соответствующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&\dot{\widehat{V}}(\widehat{x}) + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \\
&\Delta \widehat{V}(\widehat{x}) + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Эти неравенства сводятся к следующим неравенствам для квадратичных форм относительно переменных $\widehat{x}$, $\widehat{w}$, w_Δ:

$$
\begin{aligned}
&2\widehat{x}^{\mathrm{T}} P \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_\Delta + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \\
&w_\Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_\Delta - \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x} + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |\widehat{w}|^2 - \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где $\widehat{z} = \widehat{x}$ и $z_\Delta = \mathrm{col}\,(\widehat{x}, \widehat{w})$. Так как система (4.3), являющаяся двойственной к исходной системе (4.2), "погружена" в расширенную систему и выполняется условие (4.5), то по траекториям (4.3) при всех $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$ выполняется неравенство (3.7). Согласно лемме 3.1 отсюда следует, что для исходной неопределенной системы при любом $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$ выполнено $\gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) < \gamma$ и, следовательно, $\gamma_*(\Theta) < \gamma$. Осталось только записать неравенства (4.9) для квадратичных форм в виде матричных неравенств, ввести новую матричную переменную $Q = \Theta P$ и, применяя стандартным образом лемму Шура, получить линейные матричные неравенства (4.6) и (4.7) соответственно. Теорема доказана.

Замечание 3. Для нахождения верхней границы γ_0-нормы требуется исключить слагаемое I в блоке, стоящем в первой строке и первом столбце неравенств (4.6) для непрерывной системы, и в блоке, стоящем во второй строке и втором столбце неравенств (4.7) для дискретной системы. Это следует из того, что в случае γ_0-нормы в неравенствах (4.8) и соответственно в (4.9) исчезает слагаемое $|\widehat{z}|^2$. Для нахождения верхней границы "обычной" H_∞-нормы в условиях теоремы 4.1 следует положить $R = 0$.

Замечание 4. Согласно неущербности S-процедуры при двух квадратичных ограничениях (теорема 4.1 [13]), если при некоторых μ_1 и μ_2 выполняется неравенство $\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2 > 0$ (что проверяется непосредственным решением этого линейного матричного неравенства относительно μ_1 и μ_2), то выполнение соответствующего неравенства (4.8) является не только достаточным, но и необходимым условием существования указанной функции $\widehat{V}(\widehat{x}) = \widehat{x}^{\mathrm{T}} P \widehat{x}$ для расширенной системы.

Обозначим минимальное значение γ, при котором каждое из неравенств (4.6) или (4.7) имеет решение, через $\gamma_{rob}(\Theta_{rob})$, где Θ_{rob} – соответствующая матрица параметров управления. Так как

$$\gamma_*(\Theta_*) \leqslant \gamma_*(\Theta_{rob}) \leqslant \gamma_{rob}(\Theta_{rob}),$$

где Θ_* – матрица параметров робастного обобщенного H_∞-оптимального управления, определенного в (2.15), то $\gamma_{rob}(\Theta_{rob})$ является верхней границей минимального уровня гашения возмущений в неопределенной системе при робастном обобщенном H_∞-оптимальном управлении для заданных априорных и экспериментальных данных. Отметим также, что теорема 4.1 позволяет выяснить, является ли гарантированная обобщенная H_∞-норма замкнутой неопределенной системы (4.1) при заданной обратной связи с матрицей параметров $\widehat{\Theta}$ меньше, чем заданное число γ^2. Для этого в неравенстве (4.6) для непрерывной системы или в неравенстве (4.7) для дискретной системы следует положить $Q = \widehat{\Theta}P$ и решить их относительно переменных P, μ_1 и μ_2.

5. Иллюстративный пример

Для иллюстрации рассмотрим дискретный объект вида (2.1) пятого порядка $n_x = 5$ с двумя управлениями $n_u = 2$, возмущением при $n_w = 5$ и двумя целевыми выходами $n_z = 2$ с матрицами, каждый элемент которых был выбран случайно на интервале $[-1, 1]$. Таким образом, система содержит 49 неизвестных параметров. В эксперименте начальные условия и компоненты вектора управления выбирались случайно на интервале $[-1, 1]$, а возмущение – также случайно на интервале $[-d, d]$. Было сделано $N = 50$ измерений. Весовая матрица начального возмущения имеет вид $R = 0{,}01 I_5$. На рис. 2 приведены типичные три графика квадратов уровней гашения возмущений замкнутой системы при управлении, синтезированном на основе только экспериментальных данных, в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте. Сплошная кривая соответствует квадрату гарантированной обобщенной H_∞-нормы $\gamma^2_{rob}(\Theta_{rob})$ при законе управления с матрицей параметров Θ_{rob}, найденной в результате решения линейных матричных неравенств (4.7) при минимальном значении γ^2. Штрих-пунктирная кривая отвечает квадрату уровня гашения возмущений $\gamma_{real} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{real}, \Theta_{rob})$, т.е. обобщенной H_∞-норме замкнутой системы, состоящей из реального объекта с матрицей параметров Δ_{real} (если бы ее знали) и обратной связи с параметрами Θ_{rob}. Пунктирная кривая отвечает квадрату уровня гашения возмущений $\gamma_{prob} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{prob}, \Theta_{rob})$, т.е. обобщенной H_∞-норме замкнутой системы, состоящей из пробного объекта, которому соответствует матрица $\Delta_{prob} = \Delta_{LS} + \Gamma^{1/2}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1/2}$, находящаяся согласно лемме 2.1 на границе эллипсоида неопределенности $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$, и обратной связи с параметрами Θ_{rob}. Рост этих кривых с возрастанием уровня возмущения d в эксперименте объясняется тем, что при увеличении d возрастают размеры эллипсоида $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{p}}$ неизвестных параметров Δ, согласованных с экспериментальными данными.

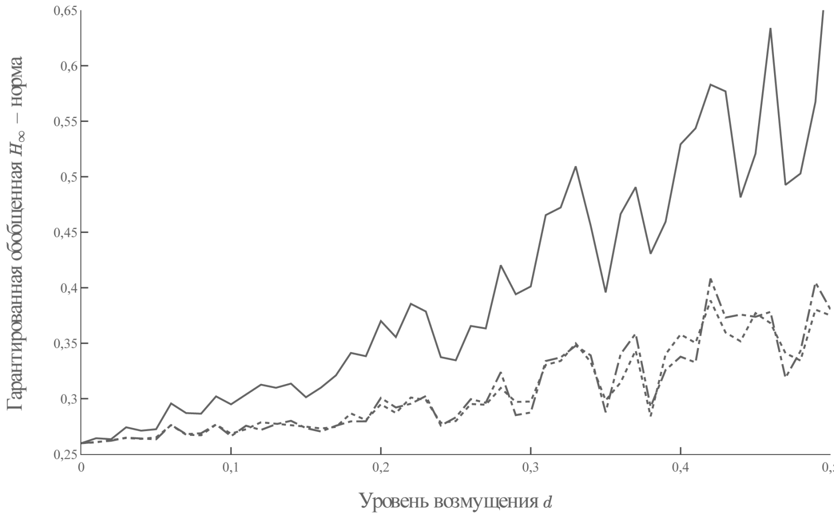

Рис. 2. Гарантированная обобщенная H_∞-норма и обобщенные H_∞-нормы для реального и пробного объектов как функции уровня возмущения в измерениях.

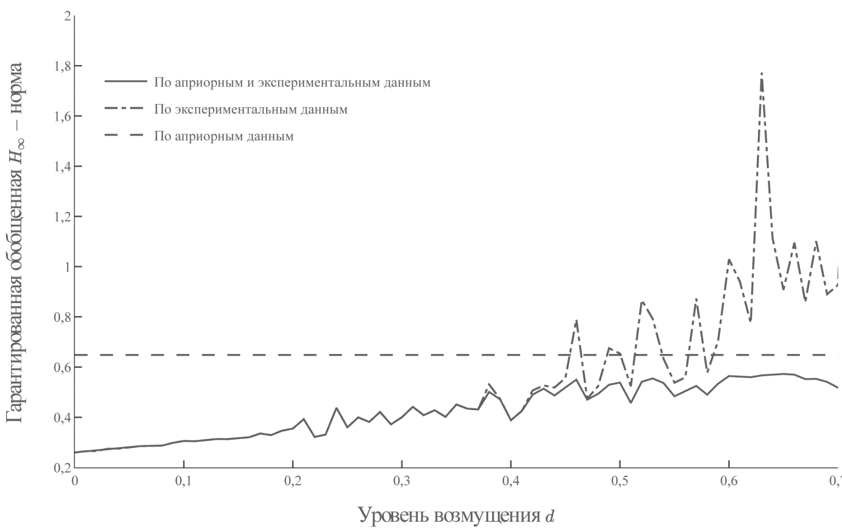

Рис. 3. Гарантированные оценки H_∞-нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

Из рис. 2 видно, что кривая γ_{rob}^2 с некоторым запасом мажорирует уровни гашения возмущений замкнутой системы для конкретных объектов с матрицами Δ_{real} и Δ_{prob} из множества $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{set}}$ и что при найденном законе управления с матрицей параметров Θ_{rob} обобщенные H_∞-нормы замкнутых систем незначительно превышают (особенно при небольших уровнях возмущения d) свои минимальные значения $\gamma^2 \simeq 0{,}26$ для полностью известной модели. Заметим, что запас, с которым γ^2_{rob} превышает γ^2_{real} и γ^2_{prob}, существенным образом зависит от экспериментальных данных и может быть значительно меньше, чем на графиках, приведенных на рис. 2.

На рис. 3 приведены три гарантированные оценки обобщенной H_∞-нормы, полученные только по априорной информации, только по экспериментальным данным и совместно по априорной информации и экспериментальным данным в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте. Априорная информация состояла в том, что неизвестные матрицы системы удовлетворяют условию (2.11), в котором $\rho = 0{,}1$ и $A_* = A_{real} + (\rho/2)I$, $B_* = B_{real}$, $C_* = C_{real}$, $D_* = D_{real}$. Эти результаты говорят о том, что гарантированные оценки норм замкнутой неопределенной системы, синтезированной при использовании как априорных, так и экспериментальных данных, начиная с некоторого уровня возмущений в эксперименте значительно меньше соответствующих оценок норм замкнутой системы при управлениях, синтезированных только по априорным или только по экспериментальным данным.

Отметим также следующее. Рассмотрим объект с матрицами A_{LS}, B_{LS}, C_{LS} и D_{LS}, составляющими матрицу параметров Δ_{LS}, полученную методом наименьших квадратов по тем же экспериментальным данным. Найдем для него матрицу параметров обобщенной H_∞-оптимальной обратной связи $\Theta_{LS} = QP^{-1}$, решая линейные матричные неравенства (3.4) при $Y = P$, $\mathcal{A}Y = A_{LS}P + B_{LS}Q$, $\mathcal{C}Y = C_{LS}P + D_{LS}Q$ и $\mathcal{B} = I$. Это, по существу, так называемое непрямое, т.е. найденное по оценкам неизвестных параметров объекта, H_∞-субоптимальное адаптивное управление. Если имеется достаточное число измерений и информационная матрица невырожденная, то обобщенная H_∞-норма замкнутой системы, состоящей из реального объекта и обратной связи с $\Theta = \Theta_{LS}$, может оказаться меньше, чем соответствующая гарантированная обобщенная H_∞-норма при обратной связи с $\Theta = \Theta_{rob}$. Однако в последнем случае имеется верхняя оценка обобщенной H_∞-нормы замкнутой системы для любого объекта из множества $\mathbf{\Delta_{set}}$, согласованного с полученными экспериментальными данными, а для обратной связи с $\Theta = \Theta_{LS}$ получить такую оценку из неравенств (4.7), как показывает эксперимент, удается только при очень маленьких уровнях возмущения d. Так, в рассматриваемом примере при $d = 0{,}02$ имеем $\gamma^2_{rob}(\Theta_{rob}) = 0{,}27$, в то время как $\gamma^2_{rob}(\Theta_{LS}) = 41{,}77$, а при $d > 0{,}03$ неравенство (4.7), в котором $Q = \Theta_{LS}P$, неразрешимо.

6. Заключение

Статья посвящена методам построения обобщенного H_∞-субоптимального и, как частный случай, линейно-квадратичного управления для линейных непрерывных и дискретных динамических объектов при полном отсутствии их математических моделей. В ней показано, что классические методы построения робастного управления по априорным данным для динамических объектов, уравнения которых содержат неизвестные параметры со значениями в некоторых ограниченных множествах, при должной модификации могут быть применены к синтезу управления по априорным и экспериментальным данным. Эти методы, как известно, состоят в "погружении" неопределенной системы в некоторую расширенную систему с дополнительными входом и выходом, удовлетворяющими квадратичному неравенству, применении S-процедуры и приведении задачи к синтезу H_∞-оптимального управления для расширенной системы. В данной статье показано, что требуемая модификация включает в себя характеризацию критерия управления (обобщенную H_∞-норму системы при наличии начального и внешнего возмущений или значение квадратичного функционала при наличии только начального возмущения) в терминах двойственной системы, "погружение" двойственной неопределенной системы в некоторую расширенную систему и дальнейшее применение техники линейных матричных неравенств. В результате параметры линейных субоптимальных обратных связей выражаются в терминах решений линейных матричных неравенств, содержащих только априорные и экспериментальные данные. Иллюстративный пример со случайно генерированным объектом пятого порядка демонстрирует, что при совместном применении априорных и экспериментальных данных качество системы управления значительно улучшается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1. Для неизвестной матрицы Δ_{real} в (2.3) определим оценку Δ_{LS} методом наименьших квадратов, которая минимизирует по Δ квадрат матричной нормы невязки, т.е. функцию $\|\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi}\|_F^2 =$ $= \mathrm{tr}\,(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})^{\mathrm{T}}(\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi})$. Вычисляя градиент по Δ от этой функции и приравнивая его к нулю $-2\widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}} + 2\Delta\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}} = 0$, найдем оптимальную оценку $\Delta_{LS} = \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}$ в предположении, что информационная матрица $\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}$ невырожденна. Далее преобразуем неравенство (2.6) к виду

$$\Delta\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}} - \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}} - \Delta\widehat{\Phi}\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}} - \widehat{\Omega} \leqslant 0$$

и запишем его как

$$[\Delta - \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}](\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})[\Delta - \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{\mathrm{T}} \leqslant \Gamma,$$

где $\Gamma = \widehat{\Omega} + \widetilde{\Phi}[\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widetilde{\Phi}^{\mathrm{T}}$. Подставляя в Γ выражение для $\widetilde{\Phi}$ из (2.3) и учитывая (2.5), получим

$$\Gamma = \widehat{\Omega} + \widehat{W}[\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widehat{W}^{\mathrm{T}} \geqslant \widehat{W}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}}(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^{\mathrm{T}})^{-1}\widehat{\Phi}\widehat{W}^{\mathrm{T}} \geqslant 0.$$

Доказательство леммы 3.1. Определим линейный оператор Γ, отображающий пару $(x(0), v(t)) \in \mathrm{R}^n \times L_2(l_2) = \Xi$, состоящую из начального состояния системы и возмущения на входе, в целевой выход $z(t) \in L_2(l_2) = \Upsilon$, т.е.

$$\Gamma:\ \Xi = \mathrm{R}^{n_x} \times L_2(l_2) \to \Upsilon = L_2(l_2):\ (x(0), v) \to z.$$

Скалярные произведения в этих пространствах определяются как

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\Xi = x_1^{\mathrm T}(0)R^{-1}x_2(0) + \langle v_1(t), v_2(t)\rangle_{L_2(l_2)}, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_\Upsilon = \langle z_1(t), z_2(t)\rangle_{L_2(l_2)}.$$

При этом обобщенная H_∞-норма совпадает с индуцированной нормой такого оператора, так как

$$\|\Gamma\| = \sup_{(x_0,\,v)\neq 0} \frac{\|\Gamma(x_0,\,v)\|}{\|(x_0,\,v)\|} = \sup_{x_0,\,v\neq 0} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm T}R^{-1}x_0 + \|v\|^2\right)^{1/2}} = \gamma_{g\infty}.$$

Покажем, что сопряженный оператор Γ^* определяется как

$$\Gamma^* :\, \Upsilon \to \Xi :\, \widehat{v}_a(t) \to (R\widehat{x}_a(0), \widehat{z}_a(t)),$$

где $\widehat{x}_a(t)$ и $\widehat{z}_a(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.8) и (3.9) в непрерывном и дискретном случаях соответственно.

Действительно, в непрерывном случае в силу уравнений (3.8) имеем

$$\frac{d(x^{\mathrm T}\widehat{x}_a)}{dt} = v^{\mathrm T}\widehat{z}_a - z^{\mathrm T}\widehat{v}_a,$$

а в дискретном случае в силу уравнений (3.9) имеем

$$x^{\mathrm T}(t+1)\widehat{x}_a(t+1) - x^{\mathrm T}(t)\widehat{x}_a(t) = v^{\mathrm T}(t)\widehat{z}_a(t) - z^{\mathrm T}(t)\widehat{v}_a(t).$$

Интегрируя в первом случае и суммируя во втором, получим

$$< z, \widehat{v}_a > = x^{\mathrm T}(0)R^{-1}[R\widehat{x}_a(0)] + < v, \widehat{z}_a > .$$

Таким образом,

$$< \Gamma(x(0), v), \widehat{v}_a >_\Upsilon = < (x(0), v), \Gamma^*(\widehat{v}_a) >_\Xi .$$

Так как нормы сопряженных операторов равны, то

$$\|\Gamma\| = \|\Gamma^*\| = \sup_{\widehat{v}_a\neq 0} \frac{\left(\|\widehat{z}_a\|^2 + \widehat{x}_a^{\mathrm T}(0)R\widehat{x}_a(0)\right)^{1/2}}{\|\widehat{v}_a\|}.$$

Далее покажем, что неравенство $\|\Gamma^*\| < \gamma$ выполняется тогда и только тогда, когда существует функция $V(\widehat{x}_a) = \widehat{x}_a^{\mathrm T}P\widehat{x}_a$ с $P > R$, для которой по траектории непрерывной системы (3.8) или дискретной системы (3.9) выполняется соответствующее из неравенств

$$\text{(П.1)} \qquad \begin{gathered} \dot V(\widehat{x}_a(t)) - |\widehat{z}_a(t)|^2 + \gamma^2|\widehat{v}_a(t)|^2 > 0, \\ \Delta V(\widehat{x}_a(t)) - |\widehat{z}_a(t)|^2 + \gamma^2|\widehat{v}_a(t)|^2 > 0. \end{gathered}$$

Действительно, интегрируя первое неравенство или суммируя второе неравенство и учитывая, что $P > R$, получим $\|\widehat{z}_a\|^2 + \widehat{x}_a^{\mathrm T}(0)R\widehat{x}_a(0) < \gamma^2\|\widehat{v}_a\|^2$ для всех $\widehat{v}_a(t)$, т.е. $\|\Gamma^*\| < \gamma$. Обратно, пусть $\|\Gamma^*\| < \gamma$. Отсюда следует, что $\|\Gamma\| < \gamma$. Согласно [11, 12] это значит, что существует функция $V(x) = x^{\mathrm{T}} Y^{-1} x$ с матрицей Y, удовлетворяющая неравенствам (3.3) в непрерывном случае и неравенствам (3.4) в дискретном случае. Рассмотрим здесь только непрерывный случай, так как в дискретном случае доказательство проводится аналогично. Используя лемму Шура, преобразуем первое из неравенств (3.3) к виду

$$\begin{pmatrix} Y\mathcal{A}^T + \mathcal{A}Y + \gamma^{-2}\mathcal{B}\mathcal{B}^{\mathrm{T}} & \star \\ \mathcal{C}Y & -I \end{pmatrix} < 0.$$

Сделаем замену $Y = \gamma^{-2}P$ и запишем это неравенство эквивалентно в виде следующего неравенства для квадратичной формы относительно абстрактных переменных $\widehat{x}_a$ и $\widehat{v}_a$:

$$2\widehat{x}_a^{\mathrm{T}} P(-\mathcal{A}^T\widehat{x}_a - \mathcal{C}^{\mathrm{T}}\widehat{v}_a) - \widehat{x}_a^{\mathrm{T}}\mathcal{B}\mathcal{B}^{\mathrm{T}}\widehat{x}_a + \gamma^2\widehat{v}_a^{\mathrm{T}}\widehat{v}_a > 0,$$

которое совпадает с первым неравенством в (П.1). Учитывая, что $Y > \gamma^{-2}R$, получим, что для функции $V_a(\widehat{x}_a) = \widehat{x}_a^{\mathrm{T}} P\widehat{x}_a$ с $P > R$ по траектории системы (3.8) выполняется первое неравенство в (П.1). Таким образом, неравенство $\|\Gamma^*\| < \gamma$, а значит и неравенство $\|\Gamma\| = \gamma_{g\infty} < \gamma$, выполняется тогда и только тогда, когда в силу системы (3.8) или (3.9) выполняется соответствующее из неравенств (П.1). Теперь осталось только от уравнений (3.8) или (3.9), обратив время, перейти к системе (3.6), по траекториям которой для функции $V(x_a) = x_a^{\mathrm{T}} P x_a$ будет выполняться соответствующее из неравенств (3.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I., De Moor B.* A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
2. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
3. *Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
4. *Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.
5. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестн. Ленинград. ун.-та. Математика. 1977. Т. 4. С. 73–93.
6. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537.
7. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
8. *Berberich J., Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.

9. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42.
10. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.
12. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Pareto suboptimal H_∞ controls with transients // Proc. Eur. Control Conf. 2021, Rotterdam. P. 542–547.
13. *Polyak B.T.* Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // J. Optim. Theory Appli. 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 28.09.2023

После доработки 27.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023