

Стохастические системы

© 2023 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНЫХ СИСТЕМ¹

Исследуются задачи вероятностной и квантильной оптимизации многомерной управляемой скачкообразной диффузии. Используются оценки вероятности чебышевского типа. Рассматриваемые задачи сводятся к одной вспомогательной детерминированной задаче оптимального управления моментными характеристиками процесса. К ее решению применяется метод глобального улучшения Кротова.

Ключевые слова: вероятностный критерий, квантильная оптимизация, скачкообразная диффузия, метод Кротова.

DOI: 10.31857/S0005231023060065, EDN: CSKLTC

1. Введение

С прикладной и теоретической точек зрения одинаково хорошо известны две близкие задачи вероятностной оптимизации: максимизировать вероятность попадания управляемого динамического объекта в некоторую область заданного размера и минимизировать размер области, в которую этот объект попадает с заданной вероятностью. Функционалы качества в таких задачах принято называть соответственно функционалом вероятности и квантильным критерием [1]. Задачи такого рода естественно формулируются для объектов, функционирующих под действием случайных внешних возмущений, динамика которых описывается теми или иными стохастическими уравнениями. В данной работе рассматривается класс динамических объектов, описываемых математической моделью центрированного случайного процесса с непрерывным временем диффузионно-скачкообразного типа. В качестве целевой области выбрана окрестность ожидаемого (нулевого) значения вектора состояния системы в конечный момент времени. Управление считается программным, т.е. ищется в виде детерминированной функции только одного аргумента — времени.

¹ Разделы 4, 6 и 8 написаны К.А. Царьковым за счет средств проекта Российского научного фонда № 22-11-00042 <https://rscf.ru/project/22-11-00042> в ИПУ РАН.

Задачи оптимизации вероятностных критериев имеют многочисленные приложения в экономике и технике. Обширный обзор таких приложений приведен в [1], там же обсуждается возможность использовать в качестве аналитического аппарата для исследования этих задач детерминированные оценки вероятности чебышевского типа. Конкретные алгоритмы решения изложены в [1] для конечномерных статических математических моделей. Динамические модели с дискретным временем и задачи оптимизации вероятностных критериев для них изучались в [2] и затем в [3, 4]. В бесконечномерном случае для задач оптимизации функционала вероятности хорошо известны достаточные условия оптимальности управления с обратной связью в диффузионных стохастических системах [5]. Аналогичные результаты для задач управления скачкообразными диффузиями приведены в [6]. Достаточные условия в задаче оптимизации квантильного критерия для диффузионной модели получены в [7]. В этих работах также приведены различные численные схемы приближенного решения указанных задач оптимизации управления с обратной связью. Общие необходимые условия оптимальности программного управления (стохастический принцип максимума) относительно функционала вероятности для диффузионно-скачкообразной модели при наличии плотности распределения содержатся в виде частного случая, например, в [8]. Однако конструктивных алгоритмов точного или приближенного поиска оптимальных функций управления в таких задачах авторам известно крайне мало. Отчасти к таковым можно отнести подход, основанный на аппроксимации плотности частичными суммами рядов по семиинвариантам [9].

В [10, 11] с точки зрения построения конструктивных алгоритмов исследовались задачи оптимального программного управления линейными по состоянию диффузионными и диффузионно-скачкообразными системами относительно линейно-квадратичного функционала качества. Такой функционал может быть записан явно в терминах моментных характеристик управляемого процесса. Рассматриваемые здесь задачи отличаются тем, что подобного явного выражения функционала качества в общем случае не имеют. В связи с этим решение задач в настоящей работе предлагается осуществить приближенно в несколько этапов. Сперва в явном виде при помощи моментных характеристик управляемого случайного процесса выписываются оценки вероятностных функционалов качества. Далее на основе этих оценок строится детерминированная задача оптимального управления, решение которой обеспечивает приближение к решению исходных задач. Затем к исследованию полученной детерминированной задачи применяется итерационный метод глобального улучшения, предложенный В.Ф. Кротовым [12]. На последнем этапе найденный результат анализируется при помощи упомянутых оценок.

Сформулированная выше схема решения в основном определяет структуру статьи. В следующих двух разделах формулируется и обсуждается математическая постановка задачи, в двух последних разделах разбирается ряд содержательных с точки зрения теории и практики примеров.

2. Постановки задач оптимизации

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$(1) \quad d\xi(t) = A(t, u(t))\xi(t)dt + \sum_{l=1}^{\nu_1} \left(B_l(t, u(t))\xi(t) + C_l(t, u(t)) \right) dw_l(t) + \\ + \sum_{r=1}^{\nu_2} D_r(t, u(t))\xi(t^-) dp_r(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

где $t \in [0; T]$ — время; $\xi(t)$ — n -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t ; ξ_0 — заданный центрированный случайный вектор с конечным вторым моментом; $u(t)$ — m -мерный вектор программы управления в момент t , причем $u(t) \in U$, где U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, и функция $t \mapsto u(t)$ кусочно-непрерывна (через $\mathcal{U}$ обозначим множество всех таких программ управления); $w_l(\cdot)$ — стандартные винеровские процессы; $p_r(\cdot)$ — пуассоновские процессы с управляемыми неоднородными интенсивностями скачков $\lambda_r(t, u(t))$; отображения A , B_l , C_l , D_r и λ_r заданы и непрерывны на $[0; T] \times U$, причем $\lambda_r(t, u) \geq 0 \forall (t, u) \in [0; T] \times U$; здесь и далее в работе используется обозначение $\xi(t^-) := \lim_{s \rightarrow t-0} \xi(s)$, $t \in (0; T]$, $\xi(0^-) := \xi_0$. Предполагается, что начальная точка ξ_0 , винеровские процессы $w_l(\cdot)$ и пуассоновские процессы $p_r(\cdot)$ независимы в совокупности.

Будем одновременно исследовать следующие две задачи относительно классических вероятностных критериев (см. [1, глава 2]). Пусть заданы вектор $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ и число $\varphi > 0$. Обозначим через Π_φ замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ со сторонами $2\varphi\kappa_i$, $i = \overline{1, n}$, и центром в нуле, т.е.

$$\Pi_\varphi := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \varphi\kappa_i, i = \overline{1, n}\}.$$

В первой задаче требуется для заданного числа $\varphi > 0$ подобрать программу управления $u \in \mathcal{U}$ так, чтобы максимизировать вероятность попадания случайного вектора $\xi(T)$ в множество Π_φ . Иными словами, решается задача вероятностной оптимизации

$$(2) \quad P_\varphi(u) := \mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\varphi\} \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}}.$$

Во второй задаче требуется для заданного числа $\alpha \in (0; 1)$ подобрать $u \in \mathcal{U}$ так, чтобы минимизировать размер φ параллелепипеда Π_φ , в который случайный вектор $\xi(T)$ попадает с вероятностью не меньшей, чем α . Иными словами, решается задача квантильной оптимизации

$$(3) \quad \varphi_\alpha(u) := \inf \{ \varphi > 0 : \mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\varphi\} \geq \alpha \} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

3. Лине́йные стохастические системы диффузионного типа

Предположим сперва, что в системе (1) $B_l = D_r = 0$, т.е. управляемый процесс задается линейным уравнением Ито

$$d\xi(t) = A(t, u(t))\xi(t)dt + C(t, u(t))dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

где $C : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times \nu_1}$, $w(\cdot)$ — ν_1 -мерный стандартный винеровский процесс, и пусть, кроме того, случайный вектор ξ_0 имеет нормальное распределение с нулевым средним и положительно определенной ковариационной матрицей N_0 . Как известно [13, теорема 11.7], в этом случае при любом $t \in [0; T]$ вектор $\xi(t)$ также нормально распределен, имеет нулевое среднее и положительно определенную ковариационную матрицу $N(t)$. Важно, что известное распределение позволяет при любом фиксированном управлении $u \in \mathcal{U}$ точно вычислять значение вероятности $P_\varphi(u)$. Для этого можно использовать плотность распределения вектора $\xi(T)$ [13, стр. 300], с помощью которой получаем

$$(4) \quad P_\varphi(u) = (2\pi)^{-n/2} (\det[N(T)])^{-1/2} \int_{\Pi_\varphi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle y, N(T)^{-1} y \rangle \right\} dy.$$

Этот путь весьма привлекателен для линейных стохастических систем диффузионного типа, так как в дальнейшем позволяет решать экстремальную задачу (2) непосредственно, однако для задач общего вида (1) он не подходит.

4. Оценки вероятностных критериев

Пусть $u \in \mathcal{U}$ — какая-то программа управления. Тогда уравнение (1) имеет на интервале $[0; T]$ единственное сильное решение [14, стр. 517] с нулевым ожиданием и конечным вторым моментом. В частности, определена ковариационная матрица $N(T)$ случайного вектора $\xi(T)$.

Пусть $\varkappa \in \mathbb{R}_+^n$. Предположим, что все диагональные элементы матрицы $N(T)$ строго положительны. Справедлива следующая оценка, впервые полученная Олкином и Праттом в [15]:

$$\mathbf{P} \left\{ \max \left\{ \frac{|\xi_i(T)|}{\varkappa_i \sqrt{N_{ii}(T)}}, i = \overline{1, n} \right\} \geq 1 \right\} \leq \frac{\left(\sqrt{\eta} + \sqrt{(n\theta - \eta)(n - 1)} \right)^2}{n^2},$$

где

$$\eta = \sum_{i,j=1}^n \frac{N_{ij}(T)}{\varkappa_i \varkappa_j \sqrt{N_{ii}(T)} \sqrt{N_{jj}(T)}}, \quad \theta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varkappa_i^2}.$$

Положим $\varkappa_i = \varphi \kappa_i / \sqrt{N_{ii}(T)}$, тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \max \left\{ \frac{|\xi_i(T)|}{\kappa_i}, i = \overline{1, n} \right\} \geq \varphi \right\} \leq \frac{\left(\sqrt{\eta} + \sqrt{(n\theta - \eta)(n-1)} \right)^2}{n^2},$$

$$\eta = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i,j=1}^n \frac{N_{ij}(T)}{\kappa_i \kappa_j}, \quad \theta = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i=1}^n \frac{N_{ii}(T)}{\kappa_i^2}.$$

Отметим, что эта формула уже имеет смысл и в том случае, когда некоторые из диагональных элементов матрицы $N(T)$ равны нулю.

Следствием полученной формулы являются такие две оценки значений $P_\varphi(u)$ и $\varphi_\alpha(u)$:

$$(5) \quad P_\varphi(u) \geq P_\varphi^*(u) := \frac{n^2 - \varphi^{-2} f(u)}{n^2},$$

$$(6) \quad \varphi_\alpha(u) \leq \varphi_\alpha^*(u) := \inf \{ \varphi > 0 : \varphi^{-2} f(u) \leq n^2(1 - \alpha) \} = n^{-1} \sqrt{(1 - \alpha)^{-1} f(u)},$$

где

$$f(u) = \left(\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]} + \sqrt{\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \right)^2,$$

$$Q = \text{diag}(\kappa_1^{-1}, \dots, \kappa_n^{-1}), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 1-n & \dots & 1-n \\ 1-n & (n-1)^2 & \ddots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1-n & \dots & (n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две новые задачи оптимизации:

$$P_\varphi^*(u) = 1 - n^{-2} \varphi^{-1} f(u) \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}}, \quad \varphi_\alpha^*(u) = n^{-1} \sqrt{(1 - \alpha)^{-1} f(u)} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

В силу оценок (5) и (6) их решение позволяет получить приближение к решению исходных задач (2) и (3). В то же время, как легко видеть, эти две задачи эквиваленты одной задаче

$$f(u) = \left(\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]} + \sqrt{\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \right)^2 \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}},$$

в которой отсутствуют параметры φ и α , т.е. ее решение, если оно существует, является приближением к решению задач (2) и (3) для всех значений $\varphi > 0$ и $\alpha \in (0; 1)$ одновременно. Именно эту задачу и будем далее исследовать. После того как процедура исследования будет изложена, обсудим еще один возможный и достаточно естественный подход.

Замечание 1. Как известно [15, теорема 3.7], равенство в оценке Олкина-Пратта достигается только в случае распределения весьма специального вида, которому не может удовлетворять случайный вектор $\xi(T)$. Отсюда следует, что значения $P_\varphi^*(u)$ и $\varphi_\alpha^*(u)$, найденные в результате исследования задачи $f(u) \rightarrow \inf$, могут оказаться чересчур грубыми оценками искомых значений $P(u)$ и $\varphi_\alpha(u)$. Нужно, однако, иметь в виду, что последнее не соотносится напрямую с качеством результатов, получаемых предлагаемым ниже способом. Идея подхода настоящей работы основывается на предположении о том, что точные значения оптимизируемых функционалов и их оценки изменяются одновременно при выборе того или иного управления $u \in \mathcal{U}$. Это эвристическое соображение проверяется в разделе 9 на различных примерах.

5. Вспомогательная детерминированная задача оптимизации

Для любого $u \in \mathcal{U}$ ковариационная матричная функция $N(t)$ соответствующего случайного процесса $\xi(t)$ определена и является решением задачи Коши для некоторого обыкновенного матричного дифференциального уравнения. Это уравнение можно выписать явно, что и сделано, например, в [11, 16]. Вместе с начальным условием оно имеет вид

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \dot{N}(t) = & A(t, u(t))N(t) + N(t)A(t, u(t))^T + \\
 & + \sum_{l=1}^{\nu_1} \left(B_l(t, u(t))N(t)B_l(t, u(t))^T + C_l(t, u(t))C_l(t, u(t))^T \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^{\nu_2} \lambda_r(t, u(t)) \left(D_r(t, u(t))N(t) + N(t)D_r(t, u(t))^T + \right. \\
 & \left. + D_r(t, u(t))N(t)D_r(t, u(t))^T \right), \\
 & N(0) = \mathbb{E}[\xi_0 \xi_0^T].
 \end{aligned}$$

Дополним его полученной в предыдущем разделе задачей:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad J(N(T)) = & \text{tr}[(QEQ + Q\Lambda Q)N(T)] + \\
 & + 2\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что задача (7)–(8) является детерминированной, задана относительно терминального (вообще говоря, невыпуклого) функционала качества управления и линейной по состоянию $N(t)$ динамической системы (7). Она допускает наглядное векторное представление

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) = & \tilde{A}(t, u(t))x(t) + \tilde{B}(t, u(t)), \quad x(0) = x_0, \\
 \tilde{J}(x(T)) = & \langle q_e + q_\lambda, x(T) \rangle + 2\sqrt{\langle q_e, x(T) \rangle \langle q_\lambda, x(T) \rangle} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}},
 \end{aligned}$$

где векторы x и x_0 получены симметрической векторизацией матриц N и N_0 (симметричные элементы вне главной диагонали включаются в состав компонент соответствующего вектора только один раз), а векторы q_e и q_Λ получены аналогичным способом из матриц QEQ и $Q\Lambda Q$, но элементы вне главной диагонали удвоены, т.е., например,

$$q_e = ((QEQ)_{11}, 2(QEQ)_{12}, 2(QEQ)_{13}, \dots, (QEQ)_{22}, 2(QEQ)_{23}, \dots, (QEQ)_{nn}).$$

Матрица $\tilde{A}$ и вектор $\tilde{B}$ составлены в соответствии с уравнением (7).

К решению такой задачи может быть применен метод глобального улучшения В.Ф. Кротова [12], содержащий в себе, помимо итерационной процедуры, некоторые необходимые условия оптимальности. С их формулировки и начнем.

6. Необходимые условия оптимальности

Для удобства перепишем задачу, полученную в предыдущих разделах, в более стандартных обозначениях. Будем считать, что рассматривается управляемая динамическая система

$$(9) \quad \dot{x}(t) = A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)), \quad x(0) = x_0 \in C_q \subset \mathbb{R}^n,$$

где $A : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — известные непрерывные отображения, размерность вектора состояния $n \in \{1, 3, 6, \dots, k(k+1)/2, \dots\}$, множество C_q , которому принадлежит заданное начальное условие x_0 , характеризуется тем, что для всякого $x \in C_q$ числа $\langle q_1, x \rangle$ и $\langle q_2, x \rangle$ строго положительны, если только $|q_1||q_2| \neq 0$ и $q_1 \neq -q_2$, здесь $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ — известные векторы. В случае $|q_1||q_2| = 0$ положим $C_q = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle q_1 + q_2, x \rangle > 0\}$. Случай $q_1 = -q_2$ исключим из рассмотрения. В соответствии с постановкой задачи (7)–(8) дополнительно предполагается, что отображения A и B таковы, что для любого $u \in \mathcal{U}$ и для любого $t \in [0; T]$ вектор $x(t)$ принадлежит множеству C_q . Решается задача

$$(10) \quad J(x(T)) = \langle q_1 + q_2, x(T) \rangle + 2\sqrt{\langle q_1, x(T) \rangle \langle q_2, x(T) \rangle} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

Замечание 2. В действительности исходя из соотношений задачи (7)–(8) вектор $x(t)$ принадлежит некоторому фиксированному множеству, в которое переходит множество всех возможных ковариационных матриц при описанном в предыдущем разделе отображении векторизации. При этом уже векторы q_1 и q_2 по определению таковы, что выполняются неравенства $\langle q_1, x \rangle > 0$, $\langle q_2, x \rangle \geq 0$, причем $\langle q_2, x \rangle = 0 \Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow n = 1$. Однако для дальнейшего будет удобно расширить область определения функции (10), а векторы q_i считать произвольными (не направленными в противоположные стороны).

Итак, по построению для любых $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$, $q_1 \neq -q_2$, функция J вида (10) определена на множестве C_q и принимает строго положительные значения.

Лемма 1. Для любых $q_1 \neq -q_2$ множество C_q — это непустой открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, а функция $J : C_q \rightarrow \mathbb{R}_+$ дифференцируема и вогнута на C_q .

Доказательство леммы 1. Свойства множества C_q очевидны по построению. Также из построений и теоремы о производной суперпозиции следует дифференцируемость функции J . Составим, наконец, для J функцию Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x, y) = J(x) - J(y) - \langle J'(y), x - y \rangle.$$

Вогнутость означает, что $\forall x, y \in C_q \quad \mathcal{E}(x, y) \leq 0$. Прямым подсчетом находим

$$\mathcal{E}(x, y) = - \frac{\left(\sqrt{\langle q_1, x \rangle \langle q_2, y \rangle} + \sqrt{\langle q_1, y \rangle \langle q_2, x \rangle} \right)^2}{\sqrt{\langle q_1, y \rangle \langle q_2, y \rangle}},$$

если оба вектора q_i отличны от нуля, и $\mathcal{E}(x, y) \equiv 0$, если один из них равен нулю. Лемма доказана.

В силу этого утверждения к задаче (9)–(10) применима классическая линейная реализация метода Кротова [17, 18], которая состоит в следующем.

Пусть $\mathcal{A}^n([0; T])$ обозначает пространство абсолютно непрерывных n -мерных вектор-функций на отрезке $[0; T]$ и пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ — некоторая произвольная программа управления, $\hat{x} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — соответствующее ей (единственное) решение линейной задачи Коши

$$(11) \quad \dot{x}(t) = A(t, \hat{u}(t))x(t) + B(t, \hat{u}(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть далее $\hat{\psi} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — решение задачи Коши для сопряженной системы

$$(12) \quad \dot{\psi}(t) = -A(t, \hat{u}(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = -J'(\hat{x}(T)).$$

Рассмотрим функции

$$(13) \quad \hat{R}(t, x, u) = \langle \dot{\hat{\psi}}(t), x \rangle + \langle \hat{\psi}(t), A(t, u)x + B(t, u) \rangle,$$

$$(14) \quad \hat{G}(x) = \langle \hat{\psi}(T), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle + J(x).$$

Здесь обозначения $\hat{R}$ и $\hat{G}$ связаны с тем, что эти функции определяются элементом $\hat{\psi} \in \mathcal{A}^n([0; T])$, т.е., в конечном счете, выбранным произвольно управлением $\hat{u} \in \mathcal{U}$.

Лемма 2. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — решение (11), $\hat{\psi} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — решение (12). Тогда

$$(15) \quad \hat{R}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{R}(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0; T],$$

$$(16) \quad \hat{G}(\hat{x}(T)) = \max_{x \in C_q} \hat{G}(x).$$

Доказательство леммы 2. В силу (12)

$$\hat{R}(t, x, \hat{u}(t)) = \langle \hat{\psi}(t), B(t, \hat{u}(t)) \rangle \quad \forall t \in [0; T]$$

и условие (15) выполняется тривиально, а условие (16) эквивалентно соотношению

$$\mathcal{E}(x, \hat{x}(T)) = J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C_q,$$

которое верно для всех вогнутых на C_q функций. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (11), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (12), а $\pi : [0; T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – произвольное отображение, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\hat{R}(t, x, \pi(t, x)) = \max_{v \in U} \hat{R}(t, x, v) \quad \forall x \in C_q \quad \forall t \in [0; T];$
- 2) существует решение $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ нелинейной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, \pi(t, x(t)))x(t) + B(t, \pi(t, x(t))), \quad x(0) = x_0;$$

- 3) существует $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ такое, что $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t)) \quad \forall t \in [0; T].$

Тогда $J(\tilde{x}(T)) \leq J(\hat{x}(T)).$

Доказательство теоремы 1. Исходя из формулы Ньютона–Лейбница и определений (13), (14) имеем

$$J(\tilde{x}(T)) = \hat{G}(\tilde{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = \hat{G}(\tilde{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \tilde{x}(t), \pi(t, \tilde{x}(t))) dt$$

в силу 2) и 3). Тогда из условия 1) и соотношений (15), (16)

$$J(\tilde{x}(T)) \leq \hat{G}(\tilde{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \hat{G}(\hat{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = J(\hat{x}(T)).$$

Теорема доказана.

Теорема 1 естественным образом содержит в себе необходимые условия оптимальности в задаче (9)–(10).

Следствие 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ – оптимальное управление в задаче (10), $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (11), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (12). Тогда для любого отображения π , удовлетворяющего условиям 1)–3) теоремы 1, и для соответствующего ему в смысле этих условий $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ выполняется $J(\tilde{x}(T)) = J(\hat{x}(T)).$

Следующим простым утверждением устанавливается связь полученного результата с принципом максимума.

Следствие 2. Пусть $\hat{u}$, $\hat{x}$, $\hat{\psi}$ взяты из теоремы 1. Если существует отображение π , для которого при некотором $\tilde{u}$ выполняются условия 1)–3) и при почти всех t верно равенство $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t)$, то $\hat{u}$ — экстремаль Понтрягина.

Замечание 3. Неулучшаемость в смысле значения функционала J управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$ за счет произвольного $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, построенного по теореме 1, вообще говоря, не означает, что пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ удовлетворяет принципу максимума [19]. В то же время экстремаль Понтрягина может оказаться улучшаемой в том же смысле [20].

Замечание 4. При некоторых дополнительных предположениях (например, когда отображение π и траектория $\tilde{x}$ определены условиями 1) и 2) теоремы 1 однозначно) можно показать, что неулучшаемость управления $\hat{u}$ влечет выполнение принципа максимума для пары $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Здесь не будем останавливаться на этом вопросе подробно.

Следующим полезным замечанием авторы обязаны рецензенту настоящей статьи.

Замечание 5. В рамках задачи (7)–(8) оба вектора q_i в (10) не равны нулю тогда и только тогда, когда $n > 1$ (см. замечание 2). В соответствии с доказательством леммы 1 в этом случае функция J строго вогнута на C_q . Отсюда следует, что последнее неравенство в доказательстве теоремы 1 заведомо будет строгим при $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$. Таким образом, при исследовании задачи (7)–(8) в случае $n > 1$ выполнение условий 1)–3) теоремы 1 и дополнительного требования $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$ гарантирует улучшение управления $\hat{u}$.

7. Итерационный метод глобального улучшения

Наиболее важным для приложений следствием теоремы 1 является следующий метод последовательного глобального улучшения произвольно заданной программы управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$.

- 1) Положить $u^{(0)} = \hat{u}$, $k = 0$.
- 2) Найти решение $x^{(k)}(t)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, u^{(k)}(t))x(t) + B(t, u^{(k)}(t)), \quad x(0) = x_0.$$

- 3) Найти решение $\psi^{(k)}(t)$ задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A(t, u^{(k)}(t))^T \psi(t),$$

$$\psi(T) = - \left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_2, x^{(k)}(T) \rangle}{\langle q_1, x^{(k)}(T) \rangle}} \right) q_1 - \left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_1, x^{(k)}(T) \rangle}{\langle q_2, x^{(k)}(T) \rangle}} \right) q_2.$$

- 4) Найти функцию позиционного управления $\pi^{(k)}(t, x)$, удовлетворяющую при всех $x \in C_q$ и почти всех $t \in [0; T]$ условию

$$\langle \psi^{(k)}(t), A(t, \pi^{(k)}(t, x))x + B(t, \pi^{(k)}(t, x)) \rangle = \max_{v \in U} \langle \psi^{(k)}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle.$$

5) Найти решение $x^{(k+1)}(t)$ нелинейной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, \pi^{(k)}(t, x(t)))x(t) + B(t, \pi^{(k)}(t, x(t))), \quad x(0) = x_0.$$

6) Проверить условие улучшения

$$J(x^{(k+1)}(T)) < J(x^{(k)}(T)),$$

при отсутствии улучшения положить $\tilde{u} = u^{(k)}$ и закончить расчеты.

7) Положить $u^{(k+1)}(t) = \pi^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t))$.

8) Увеличить k на единицу и перейти к шагу 3.

Интегрирование нелинейной системы уравнений на шаге 5 возможно осуществить численно, параллельно с выполнением шага 4; в этом случае на шаге 4 всякий раз решается конечномерная задача минимизации и непосредственно определяются значения вектора $u^{(k+1)}(t)$; шаг 7 выполнять не требуется. В практических целях естественно заменить проверку условия улучшения на шаге 6 проверкой условия остановки

$$|J(x^{(k+1)}(T)) - J(x^{(k)}(T))| < \varepsilon,$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано заранее на шаге 1.

8. О минимизации нормы конечного состояния

Вернемся еще раз к исходным задачам (2)–(3). Вполне естественно предположить, что качественное приближение к решению этих задач может быть получено путем минимизации функционала

$$(17) \quad \mathcal{J}(N(T)) = \text{tr}[QN(T)].$$

В частности, если Q — единичная матрица (т.е. если в задачах (2)–(3) область Π_φ квадратная), то речь идет о минимизации стандартной нормы случайного вектора $\xi(T)$, так как в этом случае

$$\mathcal{J}(N(T)) = \text{tr}N(T) = \mathbb{E}[|\xi(T)|^2] =: \|\xi(T)\|^2.$$

Ясно, что задача оптимального управления системой (7) с функционалом (17) несколько проще задачи (7)–(8), так как она полностью линейна по переменной состояния. Для нее соответственно упрощаются, пусть и незначительно, запись и проверка необходимых условий оптимальности, а также итерационная процедура глобального улучшения Кротова. Упрощение состоит в том, что на шаге 3 метода улучшения двойственная задача Коши решается с известным заранее условием $\psi(T) = \text{const}$. Более того, линейная структура задачи позволяет сформулировать несколько альтернативных итерационных процедур глобального улучшения, двойственного и челночного типа [20],

которые, вообще говоря, не эквивалентны сформулированной выше прямой процедуре (см. по этому поводу примеры в [20, 21]).

Однако не всегда улучшение по Кротову в терминах функционала (17) является одновременно улучшением в терминах функционала (8). В самом деле, рассмотрим на интервале времени $[0; 1]$ управляемую систему

$$d\xi_1(t) = 0, \quad d\xi_2(t) = -u(t)\xi_1(t)dt + u(t)dw(t),$$

для которой заданы геометрические ограничения на управление $0 \leq u(t) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0; 1)$. Пусть в начальный момент времени вектор $\xi(0)$ имеет нормальное распределение с нулевым ожиданием и ковариационной матрицей

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Целевую область Π_φ выберем квадратной, т.е. положим $\kappa = (1, 1)$.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [0; \varepsilon] \subset \mathbb{R}$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & -2u & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

векторы q_i имеют вид $q_1 = (1, 2, 1)$, $q_2 = (1, -2, 1)$.

Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Используем метод Кротова, чтобы улучшить это управление в смысле функционала $\mathcal{J}(x(1)) = x_1(1) + x_3(1)$. Для этого в формуле (14) заменим J на $\mathcal{J}$ и воспользуемся конструкциями из теоремы 1. Имеем, прежде всего,

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_3(t) \equiv 1, \quad \hat{x}_2(t) \equiv \varepsilon,$$

так что

$$\mathcal{J}(\hat{x}(1)) = 2.$$

Далее, так как в данном случае $\hat{\psi}(1) = (-1, 0, -1)$, то

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_3(t) &\equiv -1, \quad \hat{\psi}_2(t) \equiv 0, \\ \langle \hat{\psi}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle &= -v^2 + 2x_2v. \end{aligned}$$

Применяем теорему 1. Из условия 1) находим

$$\pi(t, x) = \begin{cases} 0, & x_2 \leq 0 \\ x_2, & 0 < x_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon, & x_2 > \varepsilon, \end{cases}$$

из условия 2)

$$\tilde{x}_1(t) \equiv 1, \quad \tilde{x}_2(t) = \varepsilon e^{-t}, \quad \tilde{x}_3(t) = \frac{\varepsilon^2}{2} (e^{-2t} - 1) + 1,$$

из условия 3)

$$\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t)) = \tilde{x}_2(t) = \varepsilon e^{-t}.$$

При этом

$$\mathcal{J}(\tilde{x}(1)) = 2 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - e^{-2}).$$

В то же время

$$\begin{aligned} J(\hat{x}(1)) &= 2\mathcal{J}(\hat{x}(1)) + 2\sqrt{\mathcal{J}(\hat{x}(1))^2 - 4\hat{x}_2(1)^2} = 4 + 4\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \\ J(\tilde{x}(1)) &= 2 - \varepsilon^2 (1 - e^{-2}) + 2\sqrt{\left(2 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - e^{-2})\right)^2 - 4\varepsilon^2 e^{-2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ одновременно выполнена пара неравенств

$$\mathcal{J}(\hat{x}(1)) > \mathcal{J}(\tilde{x}(1)), \quad J(\hat{x}(1)) < J(\tilde{x}(1)).$$

В частности, это верно при значениях ε , близких к 1. Более того, при таких значениях параметра численные эксперименты показывают, что оба неравенства остаются в силе при сколь угодно большом числе повторных итераций.

Отметим теперь, что рассматриваемая стохастическая система линейна, поэтому случайные векторы $\hat{\xi}(1)$ и $\tilde{\xi}(1)$, отвечающие управлениям $\hat{u}$ и $\tilde{u}$, так же, как и $\xi(0)$, имеют нормальное распределение, причем их ковариационные матрицы соответственно равны

$$\hat{N}(1) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(1) & \hat{x}_2(1) \\ \hat{x}_2(1) & \hat{x}_3(1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) & \tilde{x}_2(1) \\ \tilde{x}_2(1) & \tilde{x}_3(1) \end{pmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0,9999$ по формуле (4) находим $P_1(\hat{u}) \approx 0,68$ и $P_1(\tilde{u}) \approx 0,58$, т.е., несмотря на уменьшение нормы случайного вектора конечного состояния, вероятность попадания в целевую область уменьшилась сразу на 10%.

Итак, существуют задачи, для которых улучшение некоторой программы управления по Кротову в смысле нормы вектора состояния системы в конечный момент времени является ухудшением не только в смысле оценок (5)–(6), но и в смысле решения исходных задач (2)–(3). В то же время подход, предложенный в данной статье, работает в этой ситуации корректно: оценки (5)–(6) ухудшены быть не могут. Тем не менее при его использовании в общем случае также может иметь место ухудшение качества управления относительно исходной вероятности в задачах (2)–(3), но в силу упомянутых оценок можно рассчитывать на то, что если это и произойдет, ухудшение окажется не настолько значительным (см. пример 2 далее).

9. Примеры

Пример 1. На интервале времени $[0; T]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= (u(t)\xi_1(t) - \xi_2(t))dt + (\xi_2(t) - \xi_1(t))dw(t), & \xi_1(0) &\sim \mathcal{N}(0, 1), \\ d\xi_2(t) &= (\xi_1(t) + u(t)\xi_2(t))dt + (\xi_1(t) + \xi_2(t))dw(t), & \xi_2(0) &\sim \mathcal{N}(0, 1), \end{aligned}$$

случайные величины $\xi_1(0)$ и $\xi_2(0)$ независимы. Геометрические ограничения на управление заданы в виде $|u(t)| \leq u_{\max}$. Целевую область Π_φ выберем квадратной, т.е. положим $\kappa = (1, 1)$.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-u_{\max}; u_{\max}] \subset \mathbb{R}$, $B(t, u) \equiv 0$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 2u + 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2u & 0 \\ 1 & 4 & 2u + 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

векторы q_i имеют вид $q_1 = (1, 2, 1)$, $q_2 = (1, -2, 1)$.

Заметим сразу, что в силу уравнения (9) для любого $u \in \mathcal{U}$ вторая компонента вектора $x(t)$ (смешанная ковариация компонент вектора $\xi(t)$) тождественно равна нулю. Отсюда следует, что

$$\langle q_1, x(T) \rangle = \langle q_2, x(T) \rangle = \langle q_0, x(T) \rangle, \quad q_0 = (1, 0, 1),$$

т.е.

$$J(x(T)) = 4\langle q_0, x(T) \rangle = 4\mathcal{J}(x(T))$$

и задача (9)–(10) полностью эквивалентна задаче (9), (17) минимизации нормы случайного вектора $\xi(T)$. Для удобства будем далее работать с функционалом $\mathcal{J}$.

Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Имеем

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_3(t) = e^{2t}, \quad \hat{x}_2(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}(\hat{x}(T)) = 2e^{2T}.$$

Так как функционал $\mathcal{J}$ линеен, $\hat{\psi}(T) = -q_0$, откуда

$$\hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_3(t) = -e^{2(T-t)}, \quad \hat{\psi}_2(t) \equiv 0,$$

$$\langle \hat{\psi}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle = -2e^{2(T-t)}(v + 1)(x_1 + x_3), \quad x_1 + x_3 = \langle q_0, x \rangle > 0.$$

Следовательно, из условия 1) теоремы 1 $\pi(t, x) \equiv -u_{\max}$. В действительности, как нетрудно проверить, в рассматриваемой задаче для любого $u \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{J}(x(T)) = 2e^{2T} \exp \left\{ 2 \int_0^T u(t) dt \right\},$$

поэтому $\tilde{u}(t) \equiv -u_{\max}$ доставляет абсолютный оптимум функционалу $\mathcal{J}$. Показано, что этот оптимум находится методом глобального улучшения Кротова ровно за одну итерацию.

Пусть для определенности $u_{\max} = 1$, $T = 1$, тогда $\tilde{u}(t) \equiv -1$ и $J(\tilde{x}(T)) = 4\mathcal{J}(\tilde{x}(T)) = 8$. Подставляя это значение вместо $f(u)$ в формулы (5)–(6) при $n = 2$, находим такие оценки для значений функционалов (2) и (3):

$$P_\varphi(\tilde{u}) \geq 1 - 2\varphi^{-2}, \quad \varphi_\alpha(\tilde{u}) \leq \sqrt{2(1 - \alpha)^{-1}}.$$

Пример 2. Завершим теперь исследование специального примера, построенного в предыдущем разделе. Напомним постановку задачи: на интервале времени $[0; 1]$ рассматривается управляемая система

$$d\xi_1(t) = 0, \quad d\xi_2(t) = -u(t)\xi_1(t)dt + u(t)dw(t),$$

$$\xi(0) \sim \mathcal{N}(0, N_0), \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

геометрические ограничения на управление заданы в виде $0 \leq u(t) \leq \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; 1)$, целевая область Π_φ — квадратная, $\kappa = (1, 1)$. Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10): $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [0; \varepsilon] \subset \mathbb{R}$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & -2u & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

векторы q_i — те же самые, что и в примере 1.

Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Имеем

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_3(t) \equiv 1, \quad \hat{x}_2(t) \equiv \varepsilon \quad \Rightarrow \quad J(\hat{x}(1)) = 4 + 4\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Так как

$$\hat{\psi}(1) = -J'(\hat{x}(T)) = -\left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_2, \hat{x}(T) \rangle}{\langle q_1, \hat{x}(T) \rangle}}\right) q_1 - \left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_1, \hat{x}(T) \rangle}{\langle q_2, \hat{x}(T) \rangle}}\right) q_2,$$

получаем

$$\hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_3(t) \equiv -\beta_1, \quad \hat{\psi}_2(t) \equiv -\beta_2,$$

$$\langle \hat{\psi}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle = -\beta_1 v^2 + (\beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2)v,$$

где

$$\beta_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right), \quad \beta_2 = -\frac{4\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Из условия 1) теоремы 1 находим

$$\pi(t, x) = \begin{cases} 0, & \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2 \leq 0 \\ \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2, & 0 < \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon, & \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2 > \varepsilon. \end{cases}$$

Так как для любого $\varepsilon \in (0; 1)$

$$\pi(0, x_0) = \beta_2 + 2\beta_1 \varepsilon = 4\varepsilon > \varepsilon$$

и

$$\beta_2 + 2\beta_1 \varepsilon (1 - t^*) = \varepsilon$$

при

$$t^* = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^{-1} \in (0; 1),$$

новое управление $\tilde{u}$ будет иметь переключения начиная с момента времени t^* .

Положим $\varepsilon = 0,9999$. Тогда $J(\hat{x}(1)) \approx 4,057$, а для нового управления $\tilde{u}$ и соответствующей ему траектории $\tilde{x}$ исходя из численного расчета находим $J(\tilde{x}(1)) \approx 4,041$. В силу оценки (5) это лишь означает, что $P_\varphi(\tilde{u}) \geq P_\varphi^*(\tilde{u}) \approx 1 - \varphi^{-1}$, так что $P_1(\tilde{u}) \geq 0$. Но в действительности ковариационная матрица для нового решения имеет вид

$$\tilde{N}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) & \tilde{x}_2(1) \\ \tilde{x}_2(1) & \tilde{x}_3(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0,991 \\ 0,991 & 0,983 \end{pmatrix},$$

откуда в силу формулы (4)

$$P_1(\tilde{u}) \approx 0,681 > 0,68 \approx P_1(\hat{u}).$$

Таким образом, метод Кротова, построенный на основании оценок (5)–(6), позволяет даже в таком специально подобранном «плохом» примере повысить, пусть и незначительно, вероятность попадания в целевую область, при том что сами оценки никакой полезной информации не содержат. Влияние повторных итераций на результат здесь оказывается несущественным.

Пример 3. На интервале времени $[0; 1]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= \xi_2(t)dt + \xi_2(t^-)dp(t), \quad \xi_1(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ d\xi_2(t) &= u_1(t)\xi_1(t)dt, \quad \xi_2(0) = 0, \end{aligned}$$

где пуассоновский процесс $p(\cdot)$ имеет интенсивность $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)$. Геометрические ограничения на управление заданы в виде $|u_1(t)| \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$. Целевая область Π_φ квадратная, $\kappa = (1, 1)$.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-1; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$, $B(t, u) \equiv 0$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 2 + 2u_2 & u_2 \\ u_1 & 0 & 1 + u_2 \\ 0 & 2u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы q_i — те же самые, что и в примерах 1, 2.

Пусть задано управление $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \equiv 0$. Значение вспомогательного функционала качества (10) на нем равно 4. Дальнейшие расчеты выполним численно, следуя изложенной в разделе 7 итерационной процедуре. В результате через десять итераций будет найдено новое управление $\tilde{u}(t)$ (см. рис. 1 и 2), на котором функционал приблизительно равен 1,28. Используя теперь оценки (5) и (6), можно утверждать, что при управлении $\tilde{u}(t)$ вероятность

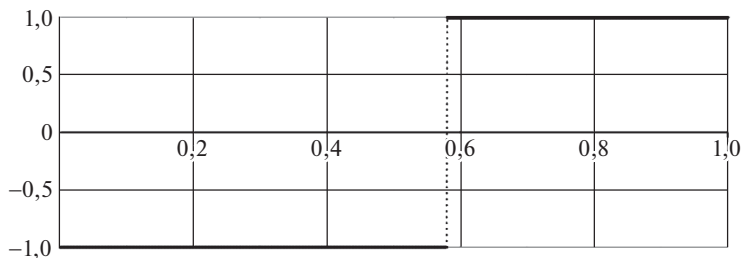


Рис. 1. Функция $\tilde{u}_1(t)$ в примере 3.

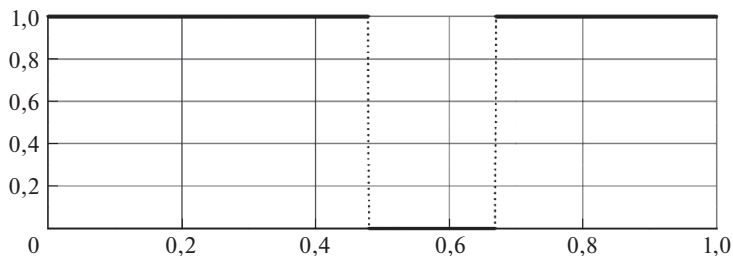


Рис. 2. Функция $\tilde{u}_2(t)$ в примере 3.

попадания случайного вектора $\tilde{\xi}(T)$ в квадрат Π_1 не меньше, чем 68%, а если требуется гарантировать вероятность попадания в заданную квадратную область с вероятностью не меньшей, чем $\alpha = 0,85$, то квадрат Π_1 следует увеличить как минимум в $\varphi = 1,46$ раза. Если заменить функционал (10) на функционал (17) и применить метод, то будет найдена другая программа управления $u^*(t)$, лишь немного отличающаяся (в большую сторону) от $\tilde{u}(t)$ по значению (10). При этом на каждой итерации вместе с уменьшением значений (17) будут уменьшаться и значения (10). Чтобы точнее оценить качество найденных программ, проведем численно моделирование некоторого количества реализаций случайного процесса $\xi(t)$ и оценим частоту попаданий величины $\xi(1)$ в целевую область Π_φ при разных ее размерах. Результаты представлены в таблице. Во втором столбце для сравнения приведены точные значения $P_\varphi(\hat{u})$, вычисленные по формуле (4).

Таким образом, в рамках рассматриваемого примера (так же, как и в случае с примером 1) задачу (9)–(10) без потери качества решения исходной пары проблем (1)–(3) можно поменять на более простую линейную задачу (9), (17).

Статистика попаданий в область Π_φ по результатам моделирования

φ	$P_\varphi(\hat{u})$	$\hat{u}(t) \equiv 0$	$u(t) = \tilde{u}(t)$	$u(t) = u^*(t)$
1	0,68	74 из 100	90 из 100	95 из 100
1,5	0,87	90 из 100	99 из 100	100 из 100
2,6	0,99	99 из 100	100 из 100	100 из 100

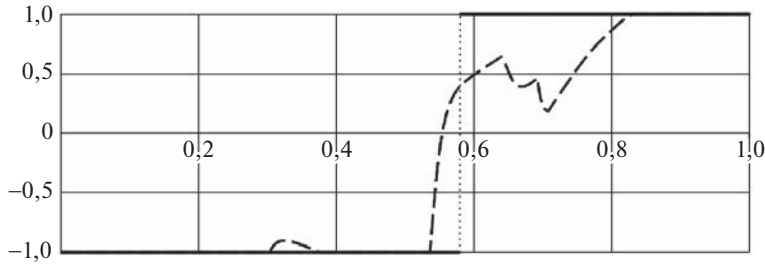


Рис. 3. Сравнение первых компонент вектор-функции $\tilde{u}(t)$ в примерах 3 и 4.

Пример 4. Предположим, что управление $u_1(t)$ в системе из предыдущего примера реализуется с ошибкой мультипликативного типа. Для этого на интервале времени $[0; 1]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= \xi_2(t)dt + \xi_2(t^-)dp(t), \quad \xi_1(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ d\xi_2(t) &= u_1(t)\xi_1(t)dt + \varepsilon u_1(t)\xi_1(t)dw(t), \quad \xi_2(0) = 0, \end{aligned}$$

где пуассоновский процесс $p(\cdot)$ имеет ту же интенсивность $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)$. Геометрические ограничения не изменены и заданы в виде $|u_1(t)| \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$. Целевая область Π_φ квадратная, $\kappa = (1, 1)$. Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) отличаются от примера 3 только одним элементом матрицы $A(t, u)$, а именно, $A_{31}(t, u) = \varepsilon^2 u_1^2$, где ε возьмем равным 0,1.

Повторив расчеты примера 3 для того же начального приближения $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \equiv 0$, на десятой итерации получим новое управление $\tilde{u}(t)$, первая компонента которого, в отличие от представленной на рис. 1, становится непрерывной, а вторая не отличается от представленной на рис. 2. При этом подстановка управления $\tilde{u}$ из примера 3 в рассматриваемую здесь возмущенную систему дает значение оценочного функционала (10) приблизительно 1,4, в то время как на новом $\tilde{u}$ имеем меньшее значение 1,39. Сравнение функций $\tilde{u}_1(t)$, полученных в этом и предыдущем примерах, приведено на рис. 3.

Пример 5. Рассмотрим задачу стабилизации высоты летательного аппарата из [22]: на интервале $[0; T]$ задана система

$$\begin{aligned} dH(t) &= V(t)dt, \\ dV(t) &= (u_1(t)H(t) + u_2(t)V(t))dt + \epsilon(u_1(t)H(t) + u_2(t)V(t))dw_1(t) + cdw_2(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$H(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad V(0) = 0,$$

где H и V — отклонения высоты и вертикальной скорости от заданных значений, ϵ — коэффициент ошибки реализации управления, c — параметр силы ветрового воздействия. Геометрические ограничения на управление характеризуют технические возможности по усилению в линейном регуляторе обратной связи и заданы в виде $|u_i(t)| \leq u_{\max}$. В конечный момент времени T требуется максимизировать вероятность нахождения отклонений по высоте и скорости набора высоты в пределах заданных погрешностей. Будем считать,

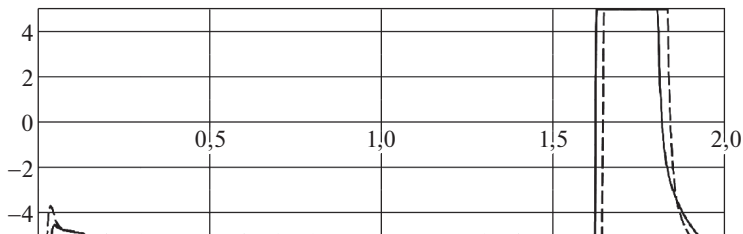


Рис. 4. Сравнение первых компонент найденных управлений в примере 5.

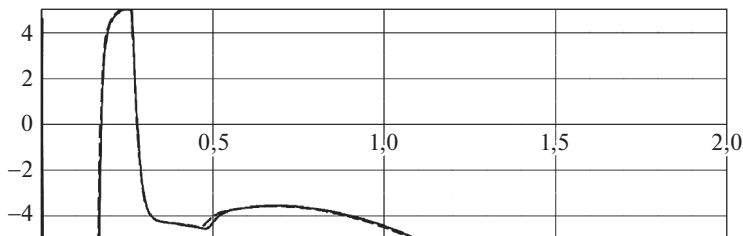


Рис. 5. Сравнение вторых компонент найденных управлений в примере 5.

что точная скорость вдвое важнее точной высоты. Иначе говоря, решается задача попасть в прямоугольную целевую область Π_φ при $\kappa = (2, 1)$ с наибольшей вероятностью. Такого рода задачи естественно возникают на практике, например при дозаправке самолетов в воздухе или при стыковке космических аппаратов.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^2 \subset \mathbb{R}^2$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ u_1 & u_2 & 1 \\ \epsilon^2 u_1^2 & 2u_1 + 2\epsilon^2 u_1 u_2 & 2u_2 + \epsilon^2 u_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

векторы q_i имеют вид $q_1 = (0, 25, 1, 1)$, $q_2 = (0, 25, -1, 1)$. Для определенности положим $\epsilon = 0, 1$, $c = 1$, $u_{\max} = 5$, $T = 2$.

Пусть задано управление $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \equiv 0$. Значение вспомогательного функционала качества (10) на нем примерно равно 10. Применяя численно метод глобального улучшения, построим новое управление $\tilde{u}$ со значением функционала (10) приблизительно 0,43. Как и ранее, построим для сравнения еще управление u^* , применяя метод к функционалу (17). Значение функционала (10) на нем получается примерно таким же. Графики обеих компонент представлены для сравнения на рис. 4 и 5 (соответствие графиков вариантам не существенно).

В завершение отметим, что при построении улучшений программ управления в разобранных примерах метод Кротова уже за одну итерацию находит программу со значением функционала J , существенно меньшим исходного, дальнейшие итерации вносят лишь небольшие корректировки. Аналогичная ситуация была ранее отмечена при решении линейных по состоянию задач оптимального управления [12, 17, 18].

10. Заключение

В работе исследованы задачи вероятностной и квантильной оптимизации многомерной управляемой скачкообразной диффузии. При помощи многомерных оценок вероятности чебышевского типа рассматриваемые задачи сведены к одной вспомогательной детерминированной задаче оптимального управления моментными характеристиками случайного процесса. К решению этой задачи применен метод последовательных глобальных улучшений В.Ф. Кротова. Эффективность подхода продемонстрирована на ряде примеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
2. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
3. Азанов В.М., Кан Ю.С. Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of optimal strategies in the problems of discrete system control by the probabilistic criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.
4. Кибзун А.И., Игнатов А.Н. О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию // АиТ. 2017. № 10. С. 139–154.
Kibzun A.I., Ignatov A.N. On the existence of optimal strategies in the control problem for a stochastic discrete time system with respect to the probability criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1845–1856.
5. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
6. Hanson F.B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation. Philadelphia, USA: SIAM Books, 2007.
7. Кан Ю.С. Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.
8. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
9. Роднищев Н.Е. Приближенный анализ точности дискретного оптимального управления нелинейных стохастических систем методом семинвариантов // Известия вузов. Авиационная техника. 1987. № 1. С. 63–69.

10. *Хрусталеv М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // *АиТ.* 2017. № 6. С. 84–105.
Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A. Optimization of Quasilinear Stochastic Control-Nonlinear Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 6. P. 1028–1045.
11. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Оптимизация нелинейных по управлению стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // *АиТ.* 2022. № 9. С. 128–149.
Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Optimization of Stochastic Jump Diffusion Systems Nonlinear in the Control // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 1433–1451.
12. *Коннов А.И., Кротов В.Ф.* О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // *Автоматика и телемеханика.* 1999. № 10. С. 77–88.
Konnov A.I., Krotov V.F. On global methods for the successive improvement of control processes // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 10. P. 1427–1436.
13. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
14. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
15. *Olkin I., Pratt J.W.* A multivariate Tchebycheff inequality // *Annals Math. Stat.* 1958. V. 29. I. 1. P. 226–234.
16. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия относительного минимума в задаче оптимального управления квазилинейными стохастическими системами // *АиТ.* 2018. № 12. С. 83–102.
Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Sufficient Relative Minimum Conditions in the Optimal Control Problem for Quasilinear Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 12. P. 2169–2185.
17. *Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // *Автоматика и телемеханика.* 2011. № 6. С. 64–78.
Krotov V.F., Bulatov A.V., Baturina O.V. Optimization of linear systems with controllable coefficients // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 6. P. 1199–1212.
18. *Трушкова Е.А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *Автоматика и телемеханика.* 2011. № 6. С. 151–159.
Trushkova E.A. Global control improvement algorithms // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 6. P. 1282–1290.
19. *Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // *Известия вузов. Математика.* 2009. № 1. С. 3–43.
20. *Дыхта В.А.* Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ.* 2014. № 11. С. 19–37.
Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 11. P. 1906–1921.

21. *Khrustalev M., Tsarkov K.* Global Improvement Methods for State-Linear Controllable Dynamical Systems // Proceedings of the 16th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2022, Moscow). М.: IEEE, 2022.
22. *Агапова А.С., Хрусталеv М.М.* Исследование проблемы равновесия по Нэшу в квазилинейных стационарных стохастических динамических системах, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2021. № 6. С. 35–42.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 15.12.2022

После доработки 03.04.2023

Принята к публикации 19.04.2023