

© 2023 г. Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. II

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой механической системы на внешнее механическое воздействие. Вычисляются передаточные функции каналов от силового воздействия на одной из границ к перемещению сечений среды и к температуре. Устанавливается асимптотика поведения передаточной функции по каждому из этих каналов в окрестности нуля комплексной плоскости. Отдельно рассматривается случай отсутствия теплообмена системы с внешней средой.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, передаточные функции, асимптотика.

DOI: 10.31857/S0005231023040037, EDN: QHTUJG

1. Введение

Термомеханические системы, в которых происходят процессы механических колебаний и процессы теплопередачи, широко используются в современной технике, в связи с чем возникает необходимость математического исследования динамических свойств таких систем и отыскания методов управления ими.

Литература по изучению явления термоупругости достаточно обширна. После ранних работ [1–3] по изучению этого явления появилась [4], где исследовалась термоупругость как часть общего явления упругости. В современной литературе появились работы [5–7], посвященные изучению различных свойств термоупругих сред. В [8] развита современная теория термомеханики упругопластического деформирования. В [9] изложена постановка связанной динамической задачи термоупругости в одномерной среде.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной распределенной упругой термомеханической системы. В качестве исходной основы для составления математической модели процессов в такой системе была принята классическая работа [4], но в отличие от [10] исследуемая система считается подверженной не тепловому, а механическому (силовому) воздействию на одной из границ. Уравнения динамики системы в данной работе

приняты в виде

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \beta_{\tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \end{cases}$$

где $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$; $a, c, \beta, \beta_{\tau}$ — положительные константы (см., например, [4]).

Здесь $\varphi(x)(t)$ — перемещение сечения, находящегося на расстоянии $l - x$ от места приложения силового воздействия, $\theta(x)(t)$ — температура среды в сечении x .

Принимаются нулевые начальные условия по времени и граничные условия:

а) на функцию φ

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(l) = u, \end{cases}$$

где u — управляющее воздействие, имеющее физический смысл механического (силового) воздействия на систему,

б) на функцию θ

$$(1.3) \quad \begin{cases} \left(-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \theta \right) (0) = 0, \\ \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \theta \right) (l) = 0, \end{cases}$$

где α, λ — положительные константы.

2. Вычисление векторной передаточной функции $u \rightarrow (\varphi(x), \theta(x))$

Выполнив преобразование Лапласа уравнений (1.1) и граничных условий ((1.2), (1.3)) по времени, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно пары функций $(\bar{\varphi}(x), \bar{\theta}(x))$ — изображения по Лапласу пары функций $(\varphi(x)(t), \theta(x)(t))$,

$$(2.1) \quad \begin{cases} c^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}(x)(p) - p^2 \bar{\varphi}(x)(p) - \beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(x)(p) = 0, \\ a \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}(x)(p) - p \bar{\theta}(x)(p) - \beta_{\tau} p \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(x)(p) = 0, \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(0) = 0, \\ p^2 \bar{\varphi}(l) = \bar{u}, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) = \kappa \bar{\theta}(0), \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(l) = -\kappa \bar{\theta}(l), \end{cases}$$

где $\kappa = \frac{\alpha}{\lambda}$.

Исследование краевой задачи (2.1)–(2.3) приводит к следующим выражениям для передаточных функций по каналам $u \rightarrow \varphi(x)$ и $u \rightarrow \theta(x)$:

Теорема 1. Передаточная функция системы по каналу $u \rightarrow \varphi(x)$ имеет вид

$$(2.4) \quad W_{u \rightarrow \varphi(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A} [ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)] - \beta \frac{a_{21}}{\Delta_A} [\kappa a D_1(x) + p D_0(x)],$$

а передаточная функция по каналу $u \rightarrow \theta(x)$ имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} W_{u \rightarrow \theta(x)} &= \frac{a_{22}}{\Delta_A} \beta_{\text{T}} p^3 D_0(x) + \\ &+ \frac{a_{21}}{\Delta_A} [-ac^2 D_3(x) - \kappa ac^2 D_2(x) + b_2 p D_1(x) + \kappa a p^2 D_0(x)]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено: $\Delta_A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$,

$$a_{11} = p^2 (ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)),$$

$$a_{12} = \beta p^2 (\kappa a D_1(l) + p D_0(l)),$$

$$a_{21} = \beta_{\text{T}} p^3 (D_1(l) + \kappa D_0(l)),$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= ac^2 D_4(l) + 2\kappa ac^2 D_3(l) + (\kappa^2 ac^2 - b_2 p) D_2(l) - \\ &- \kappa p (2ap + \beta \beta_{\text{T}}) D_1(l) - \kappa^2 a p^2 D_0(l), \end{aligned}$$

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 0; 2; 4),$$

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 1; 3),$$

$$\rho_{1,2} = \frac{p(ap + b_1) \pm R}{2ac^2}, \quad R = ap\sqrt{(p + \mu)^2 + y^2}, \quad \mu = \frac{\beta \beta_{\text{T}} - c^2}{a}, \quad y = 2\frac{c}{a}\sqrt{\beta \beta_{\text{T}}},$$

$$b_1 = \beta \beta_{\text{T}} + c^2, \quad b_2 = \beta \beta_{\text{T}} + ap.$$

3. Асимптотика поведения передаточных функций системы при $p \rightarrow 0$

Изучение динамических свойств исследуемой системы начнем с исследования поведения ее передаточных функций в окрестности нуля комплексной плоскости **C**.

Теорема 2. В окрестности нуля плоскости \mathbf{C} передаточная функция $W_{u \rightarrow \varphi(x)}$ может быть представлена в виде

$$(3.1) \quad W_{u \rightarrow \varphi(x)} = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)),$$

а передаточная функция $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ может быть представлена в виде

$$(3.2) \quad W_{u \rightarrow \theta(x)} = \frac{\beta_{\tau}}{6ac^2} p \left[x^3 - l^2 \frac{3 + \kappa l}{2 + \kappa l} \left(x + \frac{1}{\kappa} \right) + O(p) \right].$$

Здесь под $O(p)$ понимается функция $f(p)$ ($p \in \mathbf{C}$), для которой отношение $\frac{f(p)}{p}$ остается ограниченным при $p \rightarrow 0$.

Таким образом, по каналу $u \rightarrow \varphi(x)$ исследуемая система обладает двойным интегрирующим свойством, а по каналу $u \rightarrow \theta(x)$ — дифференцирующим свойством.

Замечание. Как видно из (3.2), в выражение для асимптотики передаточной функции $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ при $p \rightarrow 0$ входит отношение $\frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda}{\alpha}$. Поэтому случай $\kappa = 0$, т.е. случай отсутствия у исследуемой системы теплообмена с внешней средой, требует отдельного рассмотрения. Оно проводится в следующем разделе.

4. Случай $\kappa = 0$

$$(4.1) \quad W_{u \rightarrow \varphi(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A} (ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)) - \beta \frac{a_{21}}{\Delta_A} p D_0(x),$$

$$(4.2) \quad W_{u \rightarrow \theta(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A} \beta_{\tau} p^3 D_0(x) + \frac{a_{21}}{\Delta_A} (-ac^2 D_3(x) + b_2 p D_1(x)).$$

Функции a_{jk} ($j, k = 1, 2$) в данном случае имеют вид

$$(4.3) \quad a_{11} = p^2 (ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)), \quad a_{12} = \beta p^3 D_0(l), \quad a_{21} = \beta_{\tau} p^3 D_1(l),$$

$$(4.4) \quad a_{22} = ac^2 D_4(l) - b_2 p D_2(l).$$

Теорема 3. В случае $\kappa = 0$ передаточная функция $W_{u \rightarrow \varphi(x)}$ в окрестности нуля комплексной плоскости \mathbf{C} может быть представлена в том же виде (3.1), что и в общем случае (см. теорему 2); передаточная же функция $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ в этой окрестности может быть представлена в виде

$$(4.5) \quad W_{u \rightarrow \theta(x)} = -\beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)).$$

Таким образом, в случае $\kappa = 0$ передаточная функция исследуемой системы по каналу $u \rightarrow \theta(x)$ имеет при $p \rightarrow 0$ конечный отличный от нуля предел. Такое свойство можно назвать статическим.

Доказательства теорем 1–3 см. в Приложениях П.1–П.3.

5. Заключение

Проведенное в работе исследование динамических свойств термомеханического объекта управления при механическом (силовом) внешнем воздействии показывает наличие у объекта свойства двойного интегрирования по каналу воздействие \rightarrow перемещение сечений одномерной среды и (но только при наличии теплообмена с внешней средой) свойства дифференцирования по каналу воздействие \rightarrow температура.

Полученные выводы должны учитываться при проектировании системы управления термомеханическими объектами, для которых приемлемо принятое здесь математическое описание (1.1)–(1.3) их динамических свойств.

Проведенное в [10] и в данной работе исследование показывает, что учет внутренней обратной связи в объекте — от перемещения сечений к температуре — весьма осложняет задачу описания динамических свойств объекта по сравнению с исследованным ранее случаем неучета этой обратной связи (см. [11]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1.

1. Выполним преобразование Лапласа уравнений (2.1) по пространственной координате x (см. [12, п. 80, формулы 6 и 7]) с учетом первого из граничных условий (2.2):

$$(П.1.1) \quad \begin{cases} (c^2q^2 - p^2) \bar{\varphi}(q) - \beta q \bar{\theta}(q) = z_1(q), \\ -\beta_T q p \bar{\varphi}(q) + (aq^2 - p) \bar{\theta}(q) = z_2(q), \end{cases}$$

где $z_1(q) = c^2 q \bar{\varphi}(0) - \beta \bar{\theta}(0)$, $z_2(q) = aq \bar{\theta}(0) + a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) - \beta_T p \bar{\varphi}(0)$.

Решение системы (П.1.1) относительно $(\bar{\varphi}(q), \bar{\theta}(q))$ с учетом выражений для $z_i(q)$ имеет вид

$$(П.1.2) \quad \bar{\varphi}(q) = \frac{ac^2 q^3 \bar{\varphi}(0) + B_1 q + \beta p \bar{\theta}(0)}{\Delta(q)},$$

$$(П.1.3) \quad \bar{\theta}(q) = \frac{ac^2 q^3 \bar{\theta}(0) + ac^2 q^2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) + B_2 p^2 - b_2 q p \bar{\theta}(0)}{\Delta(q)},$$

где

$$\Delta(q) = ac^2 (q^2 - \rho_1) (q^2 - \rho_2), \quad \rho_{1,2} = \frac{p(ap + b_1) \pm R}{2ac^2},$$

$$R = ap \sqrt{(p + \mu)^2 + y^2}, \quad \mu = \frac{\beta \beta_T - c^2}{a}, \quad y = 2 \frac{c}{a} \sqrt{\beta \beta_T},$$

$$b_1 = \beta \beta_T + c^2, \quad b_2 = \beta \beta_T + ap,$$

$$B_1 = \beta a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) - b_1 p \bar{\varphi}(0), \quad B_2 = \beta_T p \bar{\varphi}(0) - a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0).$$

Опираясь на соотношение

$$(П.1.4) \quad \frac{1}{\Delta(q)} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{q^2 - \rho_1} - \frac{1}{q^2 - \rho_2} \right),$$

от (П.1.2) и (П.1.3) переходим к оригиналам по координате x (см. [12, п. 80, формула 4]):

$$(П.1.5) \quad \bar{\varphi}(x) = ac^2 D_3(x) \bar{\varphi}(0) + D_1(x) B_1 + \beta p D_0(x) \bar{\theta}(0),$$

$$(П.1.6) \quad \bar{\theta}(x) = ac^2 D_3(x) \bar{\theta}(0) + ac^2 D_2(x) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) - b_2 p D_1(x) \bar{\theta}(0) + p^2 D_0(x) B_2,$$

где

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 0; 2),$$

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 1; 3).$$

Второе из граничных условий (2.2) согласно (П.1.5) и первому из условий (2.3) принимает вид

$$(П.1.7) \quad p^2 \left[(ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)) \bar{\varphi}(0) + \beta (p D_0(l) + \kappa D_1(l)) \bar{\theta}(0) \right] = \bar{u}.$$

Второе из условий (2.3) согласно (П.1.6) принимает вид

$$(П.1.8) \quad ac^2 (D_4(l) + \kappa D_3(l)) \bar{\theta}(0) + ac^2 \kappa (D_3(l) + \kappa D_2(l)) \bar{\theta}(0) - \\ - b_2 p (D_2(l) + \kappa D_1(l)) \bar{\theta}(0) + p^2 (D_1(l) + \kappa D_0(l)) (\beta_{\text{т}} p \bar{\varphi}(0) - \kappa a \bar{\theta}(0)) = 0,$$

где

$$D_4(l) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{3/2} \sinh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{3/2} \sinh(x\sqrt{\rho_2}) \right).$$

Условия (П.1.7) и (П.1.8) образуют систему уравнений относительно вектора $\begin{pmatrix} \bar{\varphi}(0) \\ \bar{\theta}(0) \end{pmatrix}$:

$$(П.1.9) \quad A \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(0) \\ \bar{\theta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{jk}; j, k = 1, 2)$, $a_{11} = p^2 (ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l))$;

$$a_{12} = \beta p^2 (\kappa a D_1(l) + p D_0(l)), \quad a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3 (D_1(l) + \kappa D_0(l));$$

$$a_{22} = ac^2 D_4(l) + 2\kappa ac^2 D_3(l) + (\kappa^2 ac^2 - b_2 p) D_2(l) - \\ - \kappa p (2ap + \beta_{\text{т}}) D_1(l) - \kappa^2 ap^2 D_0(l).$$

Решение системы (П.1.9):

$$(П.1.10) \quad \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(0) \\ \overline{\theta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix} \frac{\overline{u}}{\Delta_A},$$

где $\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Подставляя (П.1.10) в (П.1.5) и (П.1.6) с учетом выражений для B_i и первого из условий (2.3) получаем окончательные выражения для $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\theta}(x)$:

$$(П.1.11) \quad \overline{\varphi}(x) = \left\{ a_{22} [ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)] - \beta a_{21} [\kappa a D_1(x) + p D_0(x)] \right\} \frac{\overline{u}}{\Delta_A};$$

$$(П.1.12) \quad \overline{\theta}(x) = \left\{ a_{22} \beta_{\tau} p^3 D_0(x) + \right. \\ \left. + a_{21} [-ac^2 D_3(x) - \kappa ac^2 D_2(x) + b_2 p D_1(x) + \kappa a p^2 D_0(x)] \right\} \frac{\overline{u}}{\Delta_A}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2.

1. Функции R и ρ_j ($j = 1, 2$; см. пояснения к (2.4) и (2.5)) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.1) \quad R = b_1 p (1 + O(p)); \quad \rho_1 = \frac{b_1 p}{ac^2} (1 + O(p)); \quad \rho_2 = O(p^2).$$

2. Функции $D_j(x)$ ($j = 0 \div 4$) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.2) \quad D_0(x) = \frac{x^3 \rho_1 - \rho_2}{6R} + O(p^2) = \frac{x^3}{6ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.3) \quad D_1(x) = \frac{x^2 \rho_1 - \rho_2}{2R} + O(p^2) = \frac{x^2}{2ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.4) \quad D_2(x) = x \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O(p^2) = \frac{x}{ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.5) \quad D_3(x) = \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O(p^2) = \frac{1}{ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.6) \quad D_4(x) = x \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{R} + O(p^2) = x \frac{\rho_1 + \rho_2}{ac^2} + O(p^2) = x \frac{b_1}{a^2 c^4} p + O(p^2).$$

3. Функции a_{jk} ($j, k = 1, 2$; см. пояснения к (П.1.9)) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.7) \quad a_{11} = p^2 \left(1 - \frac{b_1 l^2}{2ac^2} p + O(p^2) \right) = p^2 (1 + O(p));$$

$$(П.2.8) \quad a_{12} = \beta p^2 \left(\frac{l^3}{6ac^2} p + \kappa \frac{l^2}{2c^2} + O(p^2) \right) = \beta \kappa \frac{l^2}{2c^2} p^2 (1 + O(p));$$

$$(П.2.9) \quad \begin{aligned} a_{21} &= \beta_{\tau} p^3 \left(\frac{l^2}{2ac^2} + \kappa \frac{l^3}{6ac^2} + O(p^2) \right) = \\ &= \beta_{\tau} p^3 \frac{l^2}{2ac^2} \left(1 + \kappa \frac{l}{3} \right) (1 + O(p^2)); \end{aligned}$$

$$(П.2.10) \quad \begin{aligned} a_{22} &= \frac{b_1 l}{ac^2} p + 2\kappa + l \left(\kappa^2 - \frac{b_2}{ac^2} p \right) - \kappa p \frac{l^2}{c^2} \left(p + \frac{\beta \beta_{\tau}}{2a} \right) - \\ &- \kappa^2 p^2 \frac{l^3}{6c^2} + O(p^2) = \kappa (2 + \kappa l) (1 + O(p)). \end{aligned}$$

4. Функция Δ_A (см. пояснения к (П.1.10)) и отношения $\frac{a_{2j}}{\Delta_A}$ ($j = 1, 2$; см. (2.4) и (2.5)) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.11) \quad \begin{aligned} \Delta_A &= p^2 \kappa (2 + \kappa l) (1 + O(p)) - p^5 \kappa \frac{\beta \beta_{\tau} l^4}{4ac^4} \left(1 + \kappa \frac{l}{3} \right) (1 + O(p)) = \\ &= p^2 \kappa (2 + \kappa l) (1 + O(p)); \end{aligned}$$

$$(П.2.12) \quad \frac{a_{21}}{\Delta_A} = p \frac{\beta_{\tau} l^2 (1 + \kappa l / 3)}{2\kappa ac^2 (2 + \kappa l)} (1 + O(p)) = p \frac{\beta_{\tau} l^2 (3 + \kappa l)}{6\kappa ac^2 (2 + \kappa l)} (1 + O(p)),$$

$$(П.2.13) \quad \frac{a_{22}}{\Delta_A} = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)).$$

5. Передаточные функции $W_{u \rightarrow \varphi(x)}$ и $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.14) \quad \begin{aligned} W_{u \rightarrow \varphi(x)} &= \frac{1}{p^2} \left(1 - p \frac{b_1}{2ac^2} x^2 \right) (1 + O(p^2)) - \\ &- p \frac{\beta \beta_{\tau} l^2 (1 + \kappa l / 3)}{2ac^2 \kappa (2 + \kappa l)} \left(\kappa \frac{x^2}{2c^2} + p \frac{x^3}{6ac^2} + O(p^2) \right) = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)), \end{aligned}$$

$$(П.2.15) \quad \begin{aligned} W_{u \rightarrow \theta(x)} &= p \beta_{\tau} \left[\frac{x^3}{6ac^2} - \right. \\ &- \left. \frac{l^2 (3 + \kappa l)}{6ac^2 \kappa (2 + \kappa l)} \left(1 + \kappa x - p x^2 \frac{b_2}{2ac^2} - p^2 x^3 \frac{\kappa}{6c^2} \right) \right] (1 + O(p)) = \\ &= p \frac{\beta_{\tau}}{6ac^2} \left[x^3 - l^2 \frac{3 + \kappa l}{2 + \kappa l} \left(x + \frac{1}{\kappa} \right) \right] (1 + O(p)). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.

1. Как следует из (3.5) и (3.6), при $\kappa = 0$ функции a_{jk} ($j, k = 1, 2$) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.3.1) \quad a_{11} = p^2 (1 + O(p)) \quad (\text{совпадает с (П.2.7)}),$$

$$(П.3.2) \quad a_{12} = \beta p^3 \left(\frac{l^3}{6ac^2} + O(p^2) \right) = \beta p^3 \frac{l^3}{6ac^2} (1 + O(p^2)),$$

$$(П.3.3) \quad a_{21} = \beta_{\tau} p^3 \left(\frac{l^2}{2ac^2} + O(p^2) \right) = \beta_{\tau} p^3 \frac{l^2}{2ac^2} (1 + O(p^2)),$$

$$(П.3.4) \quad a_{22} = p \frac{l}{ac^2} (b_1 - b_2) + O(p^2) = \\ = p \frac{l}{ac^2} (c^2 - ap) + O(p^2) = p \frac{l}{a} (1 + O(p)).$$

2. Отсюда вытекает:

$$(П.3.5) \quad \Delta_A = p^3 \frac{l}{a} (1 + O(p)) - \beta \beta_{\tau} p^6 \frac{l^5}{12a^2c^4} (1 + O(p^2)) = p^3 \frac{l}{a} (1 + O(p)),$$

$$(П.3.6) \quad \frac{a_{21}}{\Delta_A} = \beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)), \quad \frac{a_{22}}{\Delta_A} = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)).$$

3. Отсюда получаем:

$$(П.3.7) \quad W_{u \rightarrow \varphi}(x) = \frac{1 + O(p)}{p^2} \left[1 + O(p^2) - b_1 p \left(\frac{x^2}{2ac^2} + O(p^2) \right) \right] - \\ - p \beta \beta_{\tau} \left(\frac{lx^3}{12ac^4} + O(p^2) \right) = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)),$$

$$(П.3.8) \quad W_{u \rightarrow \theta}(x) = p \beta_{\tau} \frac{x^3}{6ac^2} (1 + O(p)) + \\ + \beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)) \left[pb_2 \frac{x^2}{2ac^2} - 1 + O(p^2) \right] = -\beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1964.
2. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
3. Nayfeh A.H., Nemat-Nasser S. Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation // ActaMechanica. 1971. V. 12. P. 53–69.
4. Новацкий В. Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
Novacki W. Teoria sprężystości. Warszawa. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.

5. *Jordan P.M., Puri P.* On the propagation of plane waves in type – I11 thermoelasticmedia // Proc. Royal Soc. Lond. A. 2004.
6. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
7. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
9. *Торсукова Е.Б., Христинич Д.В.* Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вестник ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016 г. Вып. 1.
10. *Солнечный Э.М.* Исследование динамических свойств распределенной термомеханической системы с учетом внутренней обратной связи. I // АиТ. 2020. № 4.
11. *Солнечный Э.М.* Исследование динамических свойств распределенного термомеханического объекта управления. Доклад на Одиннадцатой международной конференции MLSД. 1-3.10.2018.
Solnechnyi E.M. The Dynamic Properties Investigation for a Distributed Thermomechanical Control Plant. Published in: 2018 Eleventh International Conference “Management of large-scale system development” 1–3 Oct. 2018.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного М.: Изд. Лань. 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 11.05.2021

После доработки 30.10.2022

Принята к публикации 30.11.2022