

© 2023 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ О СВЕРТЫВАНИИ¹

С использованием теоремы Пятницкого о свертывании круговой критерий абсолютной устойчивости для систем Лурье с несколькими нелинейностями получен без S -процедуры. Для связанных систем с переключениями между тремя линейными подсистемами получен новый критерий существования квадратичной функции Ляпунова. На основе теоремы о свертывании доказано две теоремы, позволяющие существенно уменьшать размерность связанных систем линейных матричных неравенств. Рассмотрены вопросы улучшения кругового критерия для систем Лурье с двумя нелинейностями.

Ключевые слова: системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства, круговой критерий.

DOI: 10.31857/S000523102302006X, EDN: ONHTGO

1. Введение

Теория устойчивости систем с переключениями [1] и теория абсолютной устойчивости [2] являются основными инструментами для изучения устойчивости систем с неопределенностью [3]. Важным результатом в этой области является круговой критерий — достаточное условие существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в случае системы Лурье с несколькими нелинейностями [2, 4, 5]². К достаточности приводит использование специального приема — S -процедуры [6], который в этом случае приводит только к достаточным условиям. Первоначально полученная Пятницким теорема появилась (с указанием авторства) в [7], а затем и в [8] как средство, позволяющее устранить этот недостаток S -процедуры. Существование КФЛ в случае нескольких нелинейностей определяется разрешимостью системы линейных

¹ Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

² В [4] термин “круговой критерий” не используется, в [5] круговой критерий приводится как для задачи устойчивости, так и для задачи неустойчивости.

матричных неравенств [8]. В теореме Пятницкого показывается, как получить одно матричное неравенство (МН), эквивалентное системе из двух МН. Основанная на этой теореме операция перехода от системы из двух МН к одному ей эквивалентному в [8] названа свертыванием. С помощью операции свертывания необходимые и достаточные условия существования КФЛ получены в случае двух [7] и нескольких [8] нелинейностей. Теорему Пятницкого не следует рассматривать как альтернативу S -процедуры, но области применения этих приемов тесно коррелируют. Здесь в разделе 2 показано, как круговой критерий в случае нескольких нелинейностей можно получить с помощью операции свертывания и без использования S -процедуры.

В разделе 3 для линейных систем с переключениями между тремя подсистемами получен новый частотный критерий существования КФЛ, более простой по сравнению с аналогичным критерием из [9].

В разделе 4 показывается, как с помощью теоремы Пятницкого можно существенно уменьшать количество МН в связных [8, 9] системах линейных МН (ЛМН), которые определяют существование КФЛ для линейных систем с переключениями с произвольным количеством подсистем.

Вопросы улучшения кругового критерия для систем Лурье с двумя нелинейностями рассматриваются в разделе 5. Там же приводится численный пример такого улучшения для системы шестого порядка.

Целью работы является как демонстрация возможностей теоремы Пятницкого при получении нового доказательства классического результата, так и получение на ее основе новых более эффективных условий существования КФЛ для широкого класса систем Лурье и систем с переключениями.

2. Теорема о свертывании и круговой критерий для систем с несколькими нелинейностями

Здесь теорему Пятницкого, на которой основана операция свертывания, будем называть теоремой о свертывании и использовать в следующей формулировке [8, 9].

Теорема 1. Для выполнения системы двух матричных неравенств

$$(2.1) \quad I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\tilde{\varepsilon} > 0$, при котором выполнено одно неравенство

$$(2.2) \quad I_1 + Q^+(\tilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\tilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon^2} q.$$

Очевидно, из выполнения неравенства (2.2) при некотором произвольном $\varepsilon > 0$ следует выполнение системы (2.1).

Операция свертывания, основанная на теореме 1, в [8] названа свертыванием ранга два, или r_2 -свертыванием. В оригинале [7] теорема Пятницкого приводится в более общей формулировке для произвольной матрицы Q .

Система Лурье с несколькими нелинейностями имеет вид

$$(2.3) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j(t, \sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_j, c_j \in \mathbb{R}^n,$$

где нелинейности $\varphi_j(t, \sigma_j)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения $x(t)$, $j = \overline{1, m}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Абсолютная устойчивость системы (2.3) в классе N_φ нелинейностей $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$(2.4) \quad 0 \leq \varphi_j \sigma_j \leq \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, m},$$

означает, что эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

Коротко, в удобной для настоящего изложения форме напомним рассуждения, основанные на S -процедуре и приводящие к круговому критерию в случае системы (2.3) с произвольным конечным m [4, 5]. S -процедура — это специальный прием, позволяющий перейти от неравенства на квадратичную форму, которое должно выполняться не во всем пространстве, а только в некоторой области, выделяемой квадратичными ограничениями, к неравенству на квадратичную форму, которое должно выполняться во всем пространстве, т.е. к МН. S -процедура имеет различные формулировки. В формулировке, которая здесь используется, S -процедура устанавливает соотношение между следующими условиями:

$$(2.5) \quad x^\top G_0 x < 0 \text{ при } x^\top G_1 x \geq 0, \dots, x^\top G_m x \geq 0, \quad x \neq 0,$$

$$(2.6) \quad \text{существуют } \tau_j > 0 \ (j = \overline{1, m}): x^\top G_0 x + \sum_{j=1}^m \tau_j x^\top G_j x < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0,$$

где $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_j^\top = G_j$, $j = \overline{0, m}$. Очевидно, из выполнения (2.6) следует выполнение (2.5). В случае $m = 1$ доказывается [10, с. 135] неуязвимость S -процедуры, что означает, что в этом случае условие (2.6) является не только достаточным, но и необходимым для выполнения условия (2.5).

Различные формулировки S -процедуры, историю появления этого приема и самого термина, разъяснение терминов “ущербна” и “неущербна” и другие подробности можно найти в [2, 3, 6, 10].

Секторные ограничения (2.4) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$(2.7) \quad F_j(x, \varphi_j) = \varphi_j(\langle c_j, x \rangle - \varphi_j) \geq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

На производную $\dot{v}(x)$ функции Ляпунова $v(x) = x^\top Lx$ ($L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L^\top = L$) в силу системы (2.3) имеем неравенство

$$(2.8) \quad x^\top (A^\top L + LA)x + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_j \langle Lb_j, x \rangle < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0,$$

которое должно выполняться при всех (x, φ) , удовлетворяющих (2.7). В соответствии с приемом S -процедуры составим квадратичную форму

$$(2.9) \quad x^\top (A^\top L + LA)x + 2 \sum_{j=1}^m \varphi_j \langle Lb_j, x \rangle + \sum_{j=1}^m \tau_j \varphi_j (\langle c_j, x \rangle - \varphi_j) < 0,$$

где $\tau_j > 0$ — неопределенные параметры, $j = \overline{1, m}$.

Неравенство (2.8) в матричной форме имеет вид

$$(Ax + B\varphi)^\top Lx + x^\top L(Ax + B\varphi) < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0,$$

где $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$, а функция ограничений $F(x, \varphi, \tau)$ представима в виде

$$F(x, \varphi, \tau) = \sum_{j=1}^m \tau_j \varphi_j (\langle c_j, x \rangle - \varphi_j) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & C\tau/2 \\ \tau C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где

$$C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m), \quad \Gamma = \tau = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_m\}.$$

Во вновь принятых обозначениях отрицательная определенность формы (2.9) эквивалентна матричному неравенству

$$(2.10) \quad \begin{pmatrix} A^\top L + AL & LB + C\tau/2 \\ B^\top L + \tau C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} < 0.$$

Условия разрешимости МН (2.10) следуют из частотной теоремы (КУР лемма) [6, 10]. Наиболее удобная для настоящего изложения версия частотной теоремы приведена в следствии 1 на с. 54 в [10]. Там утверждается, что при гурвицевой A и $\Gamma > 0$ разрешимость неравенства (2.10) эквивалентна выполнению частотного неравенства

$$(2.11) \quad \Gamma + \text{Re } W(i\omega) > 0, \quad W(i\omega) = \tau C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B, \quad \omega \in [-\infty, \infty],$$

где $\text{Re } W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ — эрмитово сопряженная к W , E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица. Таким образом, круговой критерий для системы (2.3) с несколькими нелинейностями состоит в проверке частотного условия (2.11), которое является достаточным условием существования КФЛ для таких систем.

В [9] показывается, как с помощью теоремы 1 получить достаточные условия существования КФЛ для системы (2.3), так чтобы эти условия совпадали с круговым критерием абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейностями. Здесь получим аналогичный результат для систем управления с произвольным конечным числом нелинейностей.

Хорошо известно и специально отмечено в [11], что абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в классе нелинейностей N_φ эквивалентна устойчивости системы с переключениями между линейными системами $\dot{x} = A_s x$ с матрицами A_s следующего вида [8]:

$$(2.12) \quad A_s = A + \sum_{j=1}^m h_{sj} b_j c_j^\top, \quad h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m, \quad s = \overline{1, N}, \quad (N = 2^m),$$

где h_{sj} независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Будем считать, что $h_1 = (0, \dots, 0)$, т.е. $A_1 = A$. Наличие КФЛ $v(x) = x^\top L x$ для системы Лурье (2.3) определяется [8] разрешимостью системы ЛМН:

$$(2.13) \quad I_s = A_s^\top L + L A_s < 0, \quad s = \overline{1, N}.$$

Из представления (2.12) следует

$$I_s = A^\top L + L A + \sum_{j=1}^m h_{sj} (L b_j c_j^\top + c_j b_j^\top L) = A^\top L + L A + \sum_{j=1}^m h_{sj} Q_j,$$

где

$$(2.14) \quad Q_j = p_j q_j^\top + q_j p_j^\top, \quad p_j \triangleq L b_j, \quad q_j \triangleq c_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для матриц Q_j используем представление в виде разности $Q_j = Q_j^+ - Q_j^-$, как это делается в теореме 1. Тогда МН

$$(2.15) \quad Q_j \leq Q_j^+(\varepsilon_j) = \frac{\varepsilon_j^2}{2} u_j^+(\varepsilon_j) u_j^+(\varepsilon_j)^\top, \quad u_j^+(\varepsilon_j) \triangleq p_j + \frac{1}{\varepsilon_j^2} q_j, \quad j = \overline{1, m},$$

выполняются при любых $\varepsilon_j > 0$. Рассмотрим следующее МН:

$$(2.16) \quad I_{\text{cir}} \triangleq A^\top L + L A + \sum_{j=1}^m Q_j^+(\varepsilon_j) < 0.$$

Так как $h_{sj} = 0$ или $h_{sj} = 1$, то

$$(2.17) \quad I_s \leq I_{\text{cir}}, \quad s = \overline{1, N}.$$

Из (2.17) следует, что выполнение МН (2.16) гарантирует выполнение системы (2.13). Подставляя в $Q_j^+(\varepsilon_j)$ выражения для p_j и q_j из (2.14) и переобозначая в (2.15) дополнительные переменные

$$(2.18) \quad \tau_j \triangleq 2/\varepsilon_j^2,$$

из леммы Шура получим, что МН (2.16) эквивалентно МН (2.10). Таким образом, круговой критерий получен без использования S -процедуры.

Собственно, необходимость из теоремы 1 нужна только при $m = 1$, чтобы показать, что в этом случае система (2.13) и МН $I_{\text{cir}} < 0$ эквивалентны.

МН (2.10) так же, как эквивалентное ему МН (2.16), далее будем называть МН кругового критерия (МНКК).

3. Устойчивость систем с переключениями между тремя линейными стационарными подсистемами

Выше было отмечено, что задача абсолютной устойчивости системы Лурье (2.3) является частным случаем задачи об устойчивости при произвольных переключениях линейной системы с переключениями

$$(3.1) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\},$$

где $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $A(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{A}$ — кусочно-постоянное отображение. В случае $m = 1$ системе (2.3) соответствует система (3.1) с переключениями между двумя подсистемами. Вопрос о существовании КФЛ для таких систем определяется разрешимостью системы из двух МН вида (2.13), эквивалентное такой системе результирующее МН (РМН) является ЛМН и частотное условие его разрешимости (круговой критерий) является в этом случае необходимым и достаточным условием существования КФЛ. Следующий естественный шаг — получить аналогичный результат для системы (3.1) при $N = 3$. В этом случае вопрос о существовании КФЛ определяется разрешимостью системы из трех МН вида (2.13). Таким образом, задача настоящего раздела состоит в получении РМН для системы из трех МН вида (2.13) в форме ЛМН и частотного критерия разрешимости этого РМН.

Отметим сразу, что возможность реализации подобной программы для системы (2.3) при $m = 2$ или системы (3.1) при $N = 4$ пока не просматривается.

В случае $N = 3$ матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$, задающие связную [9] систему (3.1), можно представить в виде

$$(3.2) \quad A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top.$$

Соответствующая система неравенств (2.13) при $N = 3$ после переобозначений (2.14) при $m = 2$ примет вид

$$(3.3) \quad I_1 + p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top < 0, \quad I_1 < 0, \quad I_1 + p_2 q_2^\top + q_2 p_2^\top < 0.$$

Применяя теорему 1 сначала к двум первым, а затем к двум последним неравенствам из (3.3), получим, что система (3.3) разрешима тогда и только тогда, когда существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что разрешима система из двух МН

$$(3.4) \quad \tilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(\varepsilon_1) u_1^+(\varepsilon_1)^\top < 0, \quad \tilde{I}_2 = I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(\varepsilon_2) u_2^+(\varepsilon_2)^\top < 0.$$

В [9] получено РМН, эквивалентное системе (3.4), и приведено частотное условие разрешимости этого МН. Однако РМН из [9] не является ЛМН относительно входящих в него дополнительных параметров и, как следствие, частотное условие его разрешимости весьма громоздко. Здесь предлагается новый прием, который позволяет получить РМН для системы (3.4) в виде ЛМН и существенно упростить частотное условие существования КФЛ для

системы (3.1) при $N = 3$. Ключевая идея этого приема состоит в том, чтобы перейти от неравенств на $(n \times n)$ -матрицы в (3.4) к эквивалентным им неравенствам на $((n + 1) \times (n + 1))$ -матрицы, используя лемму Шура. В результате получается следующая система МН, эквивалентная (3.4):

$$(3.5) \quad \tilde{I}_1 < 0 \cong \hat{\tilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ \\ (u_1^+)^T & -2/\varepsilon_1^2 \end{pmatrix} < 0, \quad \tilde{I}_2 < 0 \cong \hat{\tilde{I}}_2 = \begin{pmatrix} I_1 & u_2^+ \\ (u_2^+)^T & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Матрица разности имеет вид

$$\hat{\tilde{I}}_2 - \hat{\tilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & u_2^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^T & 2/\varepsilon_1^2 - 2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix},$$

где во избежание путаницы используется обозначение $0_{n \times m}$ — это матрица размера $n \times m$, все элементы которой равны 0. Здесь и далее символы “ $\bullet$ ” обозначают элементы под главной диагональю симметрической матрицы, которые совпадают с соответствующими элементами над главной диагональю. Введем обозначения $\hat{p} \triangleq u_2^+ - u_1^+$ и $\gamma \triangleq 1/\varepsilon_1^2 - 1/\varepsilon_2^2$, тогда легко видеть, что

$$\hat{\tilde{I}}_2 - \hat{\tilde{I}}_1 = \tilde{p} \tilde{q}^T + \tilde{q} \tilde{p}^T, \quad \tilde{p} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе (3.5) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость системы (3.5) эквивалентна существованию такого $\varepsilon_3 > 0$, что разрешимо одно МН

$$(3.6) \quad \tilde{\tilde{I}} = \hat{\tilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} \left(\tilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_3^2} \tilde{q} \right) \left(\tilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_3^2} \tilde{q} \right)^T < 0.$$

По лемме Шура МН (3.6) эквивалентно следующему МН в расширенном пространстве:

$$(3.7) \quad \tilde{\tilde{I}} < 0 \cong \tilde{\tilde{\tilde{I}}} = \begin{pmatrix} \hat{\tilde{I}}_1 & \tilde{p} + (1/\varepsilon_3^2) \tilde{q} \\ (\bullet)^T & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & \hat{p} \\ (\bullet)^T & -2/\varepsilon_1^2 & \gamma + 1/\varepsilon_3^2 \\ (\bullet)^T & \gamma + 1/\varepsilon_3^2 & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Используя для τ_j ($s = \overline{1, 3}$) обозначения (2.18), для элементов матрицы $\tilde{\tilde{\tilde{I}}}$ получим соотношения:

$$u_1^+(\tau_1) = p_1 + \frac{\tau_1}{2} q_1, \quad u_2^+(\tau_2) = p_2 + \frac{\tau_2}{2} q_2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\tau_1 - \tau_2 \right).$$

Полученный результат об эквивалентности связной системы (3.3) из трех МН и МН (3.7) сформулируем в нейтральных терминах.

Теорема 2. Пусть в системе (3.3) неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν , т.е. $I_s = I_s(\nu)$, $s = \overline{1, 3}$, и $Q_j(\nu) = p_j(\nu)q_j^\top + q_j p_j^\top(\nu)$, где $p_j = p_j(\nu)$ зависит от ν линейно, а q_j от ν не зависит, $j = 1, 2$. Тогда система (3.3) эквивалентна одному МН

$$\tilde{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} I_1(\nu) & p_1(\nu) + \frac{\tau_1}{2}q_1 & p_2(\nu) - p_1(\nu) + \frac{\tau_2}{2}q_2 - \frac{\tau_1}{2}q_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно $(\nu, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Выразим $\tilde{\tilde{I}}$ в исходных терминах, используя (2.14) для p_j и q_j :

$$(3.8) \quad \tilde{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & L(b_2 - b_1) - (\tau_1/2)c_1 + (\tau_2/2)c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_2 + \tau_3)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0.$$

Таким образом, МН (3.8) является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j , $j = \overline{1, 3}$, и численно решается стандартными программными средствами.

Более того, МН (3.8) может быть представлено в виде (2.10) при

$$(3.9) \quad B = (b_1 \quad b_2 - b_1), \quad C = (c_1 \quad c_2), \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1 - \tau_3) \\ \bullet & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае разрешимость МН (2.10) определяется из частотной теоремы [10, с. 54] (КУР лемма), что приводит к следующему критерию существования КФЛ для системы с переключениями (3.1) при $N = 3$.

Теорема 3. Пусть при $N = 3$ в системе (3.1) матрицы A_s определяются соотношениями (3.2) и матрица A гурвицева. Если существует какой-либо набор чисел $\tau_j > 0$, $j = \overline{1, 3}$, такой что $\Gamma > 0$ и при любых $\omega \in [-\infty, \infty]$ выполняется частотное неравенство (2.11), в котором матрица Γ и элементы матрицы $W(i\omega)$ определены в (3.9), тогда у системы (3.1) существует КФЛ (система (2.13) разрешима, система (3.1) устойчива). Если у системы (3.1) существует КФЛ (система (2.13) разрешима), то такой набор чисел $\tau_j > 0$, $j = \overline{1, 3}$, существует.

Понятно, что критерий теоремы 3 существенно проще и лучше, чем критерий теоремы 2 из [9].

4. Альтернативный взгляд на круговой критерий.

Уменьшение размерности систем ЛМН

Круговой критерий получается как условие разрешимости МНКК (2.10), которое является ЛМН относительно входящих в него неизвестных L и τ_j ,

$j = 1, m$, и численно решается стандартными программными средствами. Таким образом, вместо системы (2.13), имеющей общую размерность $2^m n$, можно рассматривать одно МНКК (2.10) размерности $n + m$ с m дополнительными параметрами. При этом необходимо учитывать возможные потери в области существования КФЛ, связанные с ущербностью S -процедуры.

Критерий теоремы 2 позволяет без потерь в области существования КФЛ перейти от системы (2.13), которая в случае $N = 3$ имеет общую размерность $3n$, к одному МН (3.8) размерности $n + 2$, зависящему от трех дополнительных параметров.

Абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в случае $m = 2$ эквивалентна [9] устойчивости при произвольных переключениях системы (3.1), в которой матрицы A_s определяются соотношениями

$$(4.1) \quad A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top, \quad A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top, \quad b_s, c_s \in \mathbb{R}^n.$$

Теорему 2 можно применить к соответствующей системе ЛМН (2.13) при $N = 4$. Для этого нужно теорему 2 применить сначала к трем неравенствам из системы и затем полученное неравенство объединить в систему с оставшимся МН. В результате получим систему из двух МН, которая эквивалентна исходной, имеет общую размерность $2n + 2$ и зависит от трех дополнительных параметров. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 4$ имеет размерность $4n$.

В следующей теореме, которая объединяет теорему 1 и лемму Шура, предлагается еще один прием уменьшения размерности связанных систем ЛМН.

Теорема 4. Пусть в системе (2.1) неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν , т.е. $I_1 = I_1(\nu)$ и $I_2 = I_2(\nu)$, и Q допускает представление $Q(\nu) = I_2(\nu) - I_1(\nu) = p(\nu)q^\top + qp^\top(\nu)$, где $p = p(\nu)$ зависит от ν линейно, а q от ν не зависит. Тогда система (2.1) эквивалентна одному МН

$$\begin{pmatrix} I_1(\nu) & p(\nu) + (\tau/2)q \\ (\bullet)^\top & -\tau \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно (ν, τ) .

В результате использования теоремы 4 для системы ЛМН (2.13) при $N = 4$ получим систему из двух МН, которая эквивалентна исходной, имеет общую размерность $2n + 2$ и зависит от двух дополнительных параметров. По сравнению с использованием теоремы 2 выгода минимальна — на один дополнительный параметр меньше.

Сравним с прикладной точки зрения эффективность использования теоремы 2 и теоремы 4 для уменьшения размерности систем ЛМН еще в двух случаях системы (2.13): при $N = 6$ и при $N = 8$. В случае $N = 8$ пусть это будет система (2.13) для определения условий существования КФЛ для системы

Лурье (2.3) при $m = 3$, т.е. $N = 2^m$. Теорему 4 можно применить к четырем парам МН — в результате получим систему из четырех неравенств общей размерности $4n + 4$ с четырьмя дополнительными параметрами. С другой стороны, можно применить теорему 2 к двум тройкам МН и теорему 4 к оставшейся паре МН — в результате получим систему из трех неравенств общей размерности $3n + 5$ с семью дополнительными параметрами. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 8$ имеет размерность $8n$.

В случае $N = 6$ рассмотрим систему с переключениями с некоторым запасом связности, который позволит применить теорему 2 к двум тройкам из этой системы, а теорему 4 к трем двойкам. Например, это может быть система с переключениями типа призма, в которой матрицы A_s определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A_1 &= A, & A_2 &= A + b_3 c_3^\top, \\ A_3 &= A + b_1 c_1^\top, & A_4 &= A + b_1 c_1^\top + b_3 c_3^\top, \\ A_5 &= A + b_2 c_2^\top, & A_6 &= A + b_2 c_2^\top + b_3 c_3^\top, \quad b_s, c_s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Тогда двукратное применение теоремы 2 приведет к системе из двух неравенств общей размерности $2n + 4$ с шестью дополнительными параметрами, а трехкратное применение теоремы 4 — к системе из трех неравенств общей размерности $3n + 3$ с тремя дополнительными параметрами. Исходная система ЛМН (2.13) при $N = 6$ имеет размерность $6n$.

В конце раздела покажем, как теорему 4 применить для уменьшения размерности системы (2.13) при решении вопроса о существовании КФЛ для системы Лурье (2.3) с произвольным конечным m . Каждое применение теоремы 4, с одной стороны, уменьшает количество МН в системе на единицу, с другой стороны, увеличивает на единицу количество неизвестных. От системы (2.13) относительно $n(n + 1)/2$ неизвестных, имеющей в этом случае общую размерность $2^m n$, можно перейти к эквивалентной системе размерности $2^{m-1}(n + 1)$ относительно $n(n + 1)/2 + 2^{m-1}$ неизвестных.

Теорема 5. При $N = 2^m$ система МН (2.13) эквивалентна системе МН

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} A_s^\top L + L A_s & L b_m + (\tau_s/2) c_m \\ (\bullet)^\top & -\tau_s \end{pmatrix} < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}},$$

с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\tau_s > 0$.

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

5. Улучшение кругового критерия в случае двух нелинейностей

В разделе 4 было отмечено, что абсолютная устойчивость системы Лурье (2.3) в случае $m = 2$ эквивалентна [9] устойчивости системы с переключениями (3.1), в которой матрицы A_s определяются соотношениями (4.1).

В этом случае система МН (2.13) примет вид

$$(5.1) \quad I_s = A_s^\top L + LA_s < 0, \quad s = \overline{1, 4},$$

где матрицы A_s определены в (4.1).

В [12] при $m = 2$ рассматривается задача существования КФЛ для систем Лурье с дискретным временем. Там для улучшения критерия Цыпкина предлагаются критерий A и критерий B . В [12] показано, что на одних примерах критерий A дает более точный результат, чем критерий Цыпкина, на других — наоборот. Критерий B либо повторяет, либо улучшает оценку области устойчивости по сравнению с критерием Цыпкина. В непрерывном случае аналогом критерия Цыпкина является круговой критерий, поэтому интересно, к каким результатам в непрерывном случае приведут подходы, использованные при получении критерия A и критерия B .

Чтобы перейти к предметному обсуждению, кратко повторим схему из [12] получения РМН [8], эквивалентного исходной системе (5.1):

$$\begin{array}{ccccccc}
 I_2 & \longleftrightarrow & I_1 & \longleftrightarrow & I_3 & \longleftrightarrow & I_4 \\
 & & \downarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_3 & & \downarrow \varepsilon_2 \\
 & & \tilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_3 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_2 \\
 & & & \downarrow \varepsilon_4 & & \downarrow \varepsilon_5 & \\
 & & & \tilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_2 & \\
 & & & & \downarrow \varepsilon_6 & & \\
 & & & & \tilde{I} & &
 \end{array}$$

В этой схеме горизонтальные стрелки указывают на пары неравенств, к которым применима теорема 1. Вертикальные стрелки указывают на МН, полученные в результате применения этой теоремы, а ε_s — появляющиеся при этом новые параметры. Чтобы на схеме выражения для МН через $u_s^\pm$ были одинаковы для непрерывного и дискретного случая, сохраним выражения из (2.14) для p_j и q_j через Lb_j и c_j , но изменим выражения из (2.15) для $u_s^\pm$ через p_j и q_j , т.е. теперь векторам $u_s^\pm$ будут соответствовать другие величины, отличные от определенных в (2.15) и используемых в разделах 2 и 3. Приведем выражения для МН из схемы через p_s и q_s из (2.14) при $m = 2$. Далее используем обозначение $\varepsilon_s^\pm = 1 \pm 1/\varepsilon_s^2$.

Неравенства первого уровня:

$$(5.2) \quad \tilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = I_2 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^-(u_1^-)^\top < 0, \quad u_1^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_1^2} q_1,$$

$$(5.3) \quad \tilde{I}_2 = I_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top = I_4 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^-(u_2^-)^\top < 0, \quad u_2^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_2^2} q_1,$$

$$(5.4) \quad \tilde{I}_3 = I_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top = I_3 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^-(u_3^-)^\top < 0, \quad u_3^\pm = p_2 \pm \frac{1}{\varepsilon_3^2} q_2,$$

где $\tilde{I}_1 < 0 \cong I_1 < 0$, $I_2 < 0$, $\tilde{I}_2 < 0 \cong I_3 < 0$, $I_4 < 0$, $\tilde{I}_3 < 0 \cong I_1 < 0$, $I_3 < 0$.

Неравенства второго уровня:

$$(5.5) \quad \tilde{\tilde{I}}_1 = \tilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^+(u_4^+)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^-(u_4^-)^\top < 0, \quad u_4^\pm = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4^\mp}{2} u_1^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4^\pm}{2} u_3^+,$$

$$(5.6) \quad \tilde{\tilde{I}}_2 = \tilde{I}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^+(u_5^+)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^-(u_5^-)^\top < 0, \quad u_5^\pm = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_5^\mp}{2} u_2^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_5^\pm}{2} u_3^-,$$

где $\tilde{\tilde{I}}_1 < 0 \cong \tilde{I}_1 < 0$, $\tilde{I}_3 < 0$, $\tilde{\tilde{I}}_2 < 0 \cong \tilde{I}_2 < 0$, $\tilde{I}_3 < 0$.

Результирующее матричное неравенство:

$$(5.7) \quad \tilde{\tilde{I}} = \tilde{\tilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^+(u_6^+)^\top = \tilde{\tilde{I}}_2 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^-(u_6^-)^\top < 0, \quad u_6^\pm = \frac{\varepsilon_4 \varepsilon_6^\mp}{2} u_4^- + \frac{\varepsilon_5 \varepsilon_6^\pm}{2} u_5^-,$$

где $\tilde{\tilde{I}} < 0 \cong \tilde{\tilde{I}}_1 < 0$, $\tilde{\tilde{I}}_2 < 0$.

При получении критерия A в [12] используется подход (подход A), который, если перенести его на непрерывный случай, состоит в следующем: в РМН (5.7) два из шести дополнительных параметров полагаются равными 1, а именно $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$. Из-за этого предположения неравенство $\tilde{\tilde{I}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1, 1, \varepsilon_6) \triangleq \tilde{\tilde{I}}_{(1)} < 0$ является лишь достаточным условием для выполнения всей системы (5.1). Далее сравниваются условия выполнимости этого МН $\tilde{\tilde{I}}_{(1)} < 0$ и условия кругового критерия. Покажем, как работает подход A в непрерывном случае. Выражения для МН второго уровня через $u_s^\pm$ одинаковы для непрерывного и дискретного случая, поэтому кратко повторим выкладки из [12]. Если в (5.5) и (5.6) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ (в этом случае $\varepsilon_4^+ = \varepsilon_5^+ = 2$, $\varepsilon_4^- = \varepsilon_5^- = 0$), то

$$u_4^+ = \varepsilon_3 u_3^+, \quad u_4^- = \varepsilon_1 u_1^+, \quad u_5^+ = \varepsilon_3 u_3^-, \quad u_5^- = \varepsilon_2 u_2^+,$$

и для соответствующих МН второго уровня справедливы выражения

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\tilde{I}}_{1(1)} &= \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top < 0, \\ \tilde{\tilde{I}}_{2(1)} &= \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top = I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top < 0. \end{aligned}$$

Учитывая выражения из (5.2)–(5.4) для $u_s^\pm$ через p_j и q_j , получим, что МНКК (2.16) при $m = 2$ имеет вид (для экономии места считаем, что $u_s^+(u_s^+)^\top(\varepsilon)$ и $u_s^-(u_s^-)^\top(\varepsilon)$ одно и то же)

$$(5.9) \quad I_{\text{cir}} = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top(\varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top(\varepsilon_3) < 0.$$

Очевидно, из разрешимости любого из двух МН (5.8) следует разрешимость МНКК (5.9).

С другой стороны, пусть (здесь и далее) МНКК (5.9) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Тогда первое из МН (5.8) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$, а второе — при $\varepsilon_2 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Следовательно, разрешимо МН $\tilde{I}(\varepsilon_{1cir}, \varepsilon_{1cir}, \varepsilon_{2cir}, 1, 1, \varepsilon_6) < 0$ с некоторым ε_6 , которое определяется при использовании теоремы 1 для системы (5.8) из двух МН. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6. *Разрешимость МНКК (2.16) при $m = 2$ эквивалентна разрешимости РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$.*

Таким образом, в непрерывном случае использование подхода A приводит к тем же условиям существования КФЛ, что и условия кругового критерия.

При получении критерия B в [12] используется подход (подход B), который, если перенести его на непрерывный случай, состоит в следующем: в РМН (5.7) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$, т.е. оставить пять дополнительных параметров вместо шести. Далее сравнить аналитически условия выполнимости МН $\tilde{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon_6) \triangleq \tilde{I}_{(\varepsilon)} < 0$ и МНКК (5.9).

Такое сравнение было проведено (детали опустим). В результате в рамках сделанных огрубляющих предположений, которые делают возможным такое сравнение, не удалось аналитически показать улучшения кругового критерия при подходе B . Тем не менее возможность такого улучшения остается. Чтобы это проверить, нужно сравнить области квадратичной устойчивости (ОКУ), получаемые из разрешимости РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ и МНКК (5.9) на численных примерах.

Заметим, что МН (5.5) и (5.6), и тем более РМН (5.7), не являются ЛМН относительно входящих в них переменных. Поэтому перейдем от неравенств второго уровня (5.5) и (5.6) к эквивалентным им неравенствам, которые являются ЛМН. По теореме 2, система из трех МН $I_s < 0$, $s = \overline{1, 3}$, из системы (5.1) эквивалентна одному МН

$$(5.10) \quad \tilde{I}_1 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & L(b_2 - b_1) - \frac{\tau_1}{2}c_1 + \frac{\tau_3}{2}c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j , $j = 1, 3, 4$, и эквивалентно МН (5.5). Аналогично, система из трех МН $I_s < 0$, $s = \overline{2, 4}$, из (5.1) эквивалентна одному МН

$$(5.11) \quad \tilde{I}_2 = \begin{pmatrix} A_3^\top L + LA_3 & Lb_1 + \frac{\tau_2}{2}c_1 & L(b_2 - b_1) - \frac{\tau_2}{2}c_1 - \frac{\tau_3}{2}c_2 \\ (\bullet)^\top & -\tau_2 & (\tau_2 - \tau_3 + \tau_5)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_5 \end{pmatrix} < 0,$$

которое является ЛМН относительно неизвестных L и τ_j , $j = 2, 3, 5$, и эквивалентно МН (5.6). Если объединить эти два МН в систему

$$(5.12) \quad \begin{matrix} \cong \\ \bar{I}_1 < 0, \quad \bar{I}_2 < 0, \end{matrix}$$

то разрешимость системы (5.12) эквивалентна разрешимости РМН (5.7).

Возникает естественный вопрос о соотношении параметров ε_j , от которых зависит РМН (5.7), и τ_j , от которых зависит система (5.12). Параметры ε_j появляются в РМН (5.7) в соответствии со схемой и формулами (5.2)–(5.7). Параметры τ_j появляются в системе (5.12) в соответствии с теоремой 2. При выводе теоремы 2 параметр ε_3 из (3.6) появляется в результате применения теоремы о свертывании к МН размерности $n + 1$ (аналога ε_3 в схеме и в РМН (5.7) нет). Поэтому хотя между параметрами ε_j , $j = \overline{1, 3}$, из схемы и РМН (5.7) и параметрами τ_j , $j = \overline{1, 3}$, из (5.12) выполняется соответствие (2.18), но между параметрами τ_4 и τ_5 из (5.12) и параметрами ε_4 и ε_5 из РМН (5.7) такого соответствия нет. Таким образом, из $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ не следует $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ и наоборот. Поэтому разрешимость РМН (5.7) при $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ не эквивалентна разрешимости системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$, хотя разрешимость РМН (5.7) эквивалентна разрешимости системы (5.12).

Возникает новая версия подхода B . В непрерывном случае будем считать аналогом критерия B из [12] условие разрешимости системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ — назовем его критерием C . Сравним теперь условия критерия C и условия кругового критерия. Для этого выясним, при каких τ_4 и τ_5 выполнены МН системы (5.12) при условии выполнения МНКК.

Теорема 7. Пусть МНКК (5.9) разрешимо при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1cir}$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_{2cir}$. Тогда система (5.12) выполняется при

$$\tau_1 = \tau_2 = 2/\varepsilon_{1cir}^2, \quad \tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2, \quad \tau_4 = \tau_5 = 2/\varepsilon_{1cir}^2 + 2/\varepsilon_{2cir}^2.$$

Доказательство теоремы 7 приведено в Приложении.

Из теоремы 7 следует, что ОКУ по критерию C не хуже, чем по круговому критерию. При этом использование критерия C не гарантирует улучшения кругового критерия. Тем не менее такое улучшение удастся показать на численных примерах. Для полноты картины приведем один такой пример, в котором ОКУ по критерию C шире, чем по круговому критерию.

Пример 1. Рассматривается система Лурье вида (2.3) при $n = 6$, в которой матрица A имеет форму Фробениуса и поэтому здесь задается только последней строкой

$$\begin{aligned} A &\sim [-10, 0 \quad -34, 0 \quad -49, 0 \quad -40, 0 \quad -20, 0 \quad -6, 0], \\ \text{spectr}(A) &= [-1, 0 \quad -1, 0 \quad -1, 0 - i \quad -1, 0 + i \quad -1, 0 - 2i \quad -1, 0 + 2i], \\ b_1^\top &= (0 \ 0 \ 0 \ k_1 \ 0 \ 0), \quad b_2^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_2 \ 0), \\ c_1^\top &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1), \quad c_2^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1). \end{aligned}$$

Таблица

Прогр. \ Лучи	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(3, 1)
NS	0,45684	0,32608	0,25301	0,28482	0,20674
CC	0,44831	0,31943	0,24813	0,28088	0,20453
C	0,45684	0,32608	0,25301	0,28482	0,20674

Для рассматриваемого примера находятся оценки ОКУ, вычисляемые с помощью трех тестируемых алгоритмов. Алгоритм *NS* (обозначения алгоритмов далее будут использоваться в таблице) состоит в нахождении ОКУ в соответствии с необходимыми и достаточными условиями существования КФЛ путем проверки системы (5.1). Алгоритм *CC* состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью кругового критерия, т.е. путем проверки МНКК (2.10). Алгоритм *C* состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью критерия *C*, т.е. путем проверки системы (5.12) при $\tau_4 = \tau_5 = \tau$.

Для нахождения ОКУ рассматривается луч, выходящий из точки 0. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ (естественно, $\alpha_s \geq 0$), направленный вдоль этого луча, и решается задача определения наибольшего числа k , такого что при $(k_1, k_2) = k\bar{\alpha}$ выполняется условие соответствующего критерия. Сравнение алгоритмов из указанного набора проводилось по пяти различным направлениям $\bar{\alpha}_i, i = \overline{1, 5}$.

В приведенной таблице в верхней строке указываются лучи $\bar{\alpha}_i, i = \overline{1, 5}$, вдоль которых оценивается ОКУ, а в левом столбце приведены обозначения используемых для этого алгоритмов.

В соответствии с проведенными вычислениями приходим к выводу, что для рассматриваемого примера ОКУ по критерию *C* не только превосходит ОКУ по круговому критерию, но и совпадает (с точностью до погрешности вычислений) с точной ОКУ для всех рассмотренных направлений $\bar{\alpha}_i$.

Система (5.12) имеет общий порядок $2n + 4$ и в случае $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ зависит от пяти дополнительных параметров. В то же время система $\overset{\cong}{I_1} < 0, I_4 < 0$, или система $I_1 < 0, \overset{\cong}{I_2} < 0$, имеют (каждая) общий порядок $2n + 2$ и зависят от трех дополнительных параметров. При этом каждая из этих систем эквивалентна исходной (5.1) без потерь в области разрешимости. Кроме этого, применяя к системе (5.1) теорему 5, получим систему из двух ЛМН, эквивалентную исходной, имеющую общий порядок $2n + 2$ и зависящую от двух дополнительных параметров. Таким образом, проверка условия критерия *C* вызывает исключительно теоретический интерес. С прикладной точки зрения, чтобы численно проверить разрешимость системы (5.1), лучше всего решать систему из двух ЛМН, полученную из теоремы 5.

Замечание 1. Во всех приведенных в статье условиях существования КФЛ, которые состоят в проверке ЛМН, зависящих от дополнительных параметров, в силу линейности можно без потерь в области разрешимости положить один дополнительный параметр равным 1, уменьшая тем самым на

единицу количество дополнительных параметров. К этим условиям относятся МНКК (2.10), ЛМН (3.8), системы ЛМН (4.2) и (5.12).

6. Заключение

Во-первых, круговой критерий для системы Лурье с несколькими нелинейностями получен без S -процедуры. Во-вторых, для связной системы с переключениями между тремя линейными подсистемами получен критерий существования КФЛ как в форме условий разрешимости одного ЛМН, так и в форме частотного условия. В-третьих, доказаны две теоремы, позволяющие существенно уменьшить размерность связной системы ЛМН. Использование этих теорем демонстрируется для случая системы Лурье при $m = 2$, $m = 3$ и произвольном конечном m , а также для систем с переключениями при $N = 6$. В-четвертых, проведено сравнение различных подходов для улучшения кругового критерия для системы Лурье при $m = 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 5. Пусть при $N = 2^m$ в системе (2.13) МН занумерованы таким образом, что первые 2^{m-1} МН $I_s < 0$, $s = \overline{1, 2^{m-1}}$, совпадают с неравенствами системы (2.13) при $N = 2^{m-1}$, а следующие 2^{m-1} МН $I_s < 0$, $s = \overline{2^{m-1} + 1, 2^m}$, занумерованы следующим образом:

$$I_{s+2^{m-1}} = I_s + \left(Lb_m c_m^\top + c_m b_m^\top L \right) < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}}.$$

Тогда к парам МН

$$(П.1) \quad I_s < 0, \quad I_{s+2^{m-1}} < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}},$$

применима теорема 1. В результате получим, что система МН (2.13) эквивалентна системе МН

$$(П.2) \quad I_s + \frac{\varepsilon_s^2}{2} \left(Lb_m + \frac{1}{\varepsilon_s^2} c_m \right) \left(Lb_m + \frac{1}{\varepsilon_s^2} c_m \right)^\top < 0, \quad s = \overline{1, 2^{m-1}},$$

с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\varepsilon_s > 0$. Если в (П.2) взять $\varepsilon_s = \varepsilon_m > 0$, $s = \overline{1, 2^{m-1}}$, то получим еще одно доказательство, теперь по индукции, перехода от системы (2.13) к МНКК (2.16). Если к каждой паре (П.1) применить теорему 4, то получим, что система МН (2.13) эквивалентна системе МН (4.2) с 2^{m-1} дополнительными параметрами $\tau_s \triangleq 2/\varepsilon_s^2$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 7. Покажем, что из выполнения МНКК (5.9) следует существование τ_4 , при котором выполнено МН (5.10). Как и в [12], чтобы определить условия, при которых из отрицательной определенности одной матрицы $I_a(\nu) < 0$, зависящей от условного параметра ν , следует отрицательная определенность другой матрицы $I_b(\nu) < 0$,

будем исходить из очевидного достаточного требования: если $I_a(\nu) < 0$ и $I_b(\nu) \leq I_a(\nu)$, то $I_b(\nu) < 0$.

Для удобства вернемся к обозначениям, используемым при получении теоремы 2, и преобразуем МН (5.10) (лемма А4 [13, с. 253])

$$\begin{aligned} \cong \hat{I}_1 &= \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \delta_1 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0 \cong \hat{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \delta_1 \end{pmatrix}^\top = \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & -\tau_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\tau_1} \begin{pmatrix} u_1^+ (u_1^+)^\top & \delta_1 u_1^+ \\ (\bullet)^\top & \delta_1^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_1 + \frac{1}{\tau_1} u_1^+ (u_1^+)^\top & \frac{\delta_1 - \tau_1}{\tau_1} u_1^+ + u_3^+ \\ (\bullet)^\top & \frac{\delta_1^2}{\tau_1} - \tau_4 \end{pmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение $\delta_1 \triangleq (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2$ и опущены аргументы у векторов $u_j^\pm = u_j^\pm(\tau_j)$. Введем еще упрощающие обозначения $\alpha_1 \triangleq \frac{\delta_1 - \tau_1}{\tau_1}$ и $\beta_1 \triangleq \frac{\tau_1}{\tau_1 \tau_4 - \delta_1^2}$, тогда по лемме Шура получим

$$(П.3) \quad \hat{I}_1 < 0 \cong \hat{\hat{I}}_1 = I_1 + \frac{1}{\tau_1} u_1^+ (u_1^+)^\top + \beta_1 (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+) (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+)^\top < 0.$$

При $\tau_1 = 2/\varepsilon_{1cir}^2$ и $\tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2$ разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам I_{cir} из (5.9) и $\hat{\hat{I}}_1$ из (П.3), представляет собой разность квадратов

$$\hat{\hat{I}}_1 - I_{cir} \triangleq \Delta_1 = \beta_1 (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+) (\alpha_1 u_1^+ + u_3^+)^\top - \frac{1}{\tau_3} u_3^+ (u_3^+)^\top.$$

Неравенство $\Delta_1 \leq 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_1 u_1^+ + u_3^+ = \lambda_1 u_3^+,$$

что возможно только если $\alpha_1 = 0$ или $\tau_4 = \tau_1 + \tau_3$. В этом случае $\Delta_1 = 0$.

Далее выясним, при каких τ_5 из выполнения МНКК (5.9) следует выполнение МН (5.11). Для этого повторим с МН (5.11) манипуляции, проделанные выше с МН (5.10). В результате получим

$$(П.4) \quad \cong \hat{I}_2 < 0 \cong \hat{\hat{I}}_2 = I_3 + \frac{1}{\tau_2} u_2^+ (u_2^+)^\top + \beta_2 (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-) (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-)^\top < 0,$$

где $\delta_2 \triangleq (\tau_2 - \tau_3 + \tau_5)/2$, $\alpha_2 \triangleq \frac{\delta_2 - \tau_2}{\tau_2}$ и $\beta_2 \triangleq \frac{\tau_2}{\tau_2 \tau_5 - \delta_2^2}$. Примем во внимание $u_2^+(\tau) = u_1^+(\tau)$ и воспользуемся соотношением $I_1 + \frac{1}{\tau_3} u_3^+(u_3^+)^\top(\tau_3) = I_3 + \frac{1}{\tau_3} u_3^-(u_3^-)^\top(\tau_3)$. Тогда при $\tau_2 = 2/\varepsilon_{1cir}^2$ и $\tau_3 = 2/\varepsilon_{2cir}^2$ разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам I_{cir} из (5.9) и $\widehat{I}_2$ из (П.4), представляет собой разность квадратов

$$\widehat{I}_2 - I_{cir} \triangleq \Delta_2 = \beta_2 (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-) (\alpha_2 u_2^+ + u_3^-)^\top - \frac{1}{\tau_3} u_3^-(u_3^-)^\top.$$

Неравенство $\Delta_2 \leq 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_2 u_2^+ + u_3^- = \lambda_2 u_3^-,$$

что возможно только если $\alpha_2 = 0$ или $\tau_5 = \tau_2 + \tau_3$. В этом случае $\Delta_2 = 0$.

Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhäuser, 2003.
2. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. <https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143937>
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ.* 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
4. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // *АиТ.* 1967. № 6. С. 5–30.
Yakubovich V.A. Frequency conditions for the absolute stability of control systems with several nonlinear or linear nonstationary blocks // *Autom. Remote Control.* 1967. V. 28. No. 6. P. 1. P. 857–880.
5. *Якубович В.А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II. Системы с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // *АиТ.* 1971. № 6. С. 25–34.
Yakubovich V.A. Absolute Instability of Nonlinear Control Systems. II // *Autom. Remote Control.* 1971. V. 32. No. 6. P. 1. P. 876–884.
6. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // *АиТ.* 2006. № 10. С. 77–121.
Gusev S.V., Likharnikov A.L. Kalman–Popov–Yakubovich Lemma and the S-Procedure: A Historical Essay // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.

7. *Скородинский В.И.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. I // *АиТ.* 1981. № 9. С. 21–29.
Skorodinskii V.I. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Two Nonlinear Nonstationary Elements. I // *Autom. Remote Control.* 1981. V. 42. No. 9. P. 1. P. 1149–1157.
8. *Каменецкий В.А.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // *АиТ.* 1983. № 12. С. 20–30.
Kamenetskiy V.A. Absolute Stability and Absolute Instability of Control Systems with Several Nonlinear Nonstationary Elements // *Autom. Remote Control.* 1983. V. 44. No. 12. P. 1543–1552.
9. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // *АиТ.* 2017. № 12. С. 3–25.
Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Hybrid Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 12. P. 2101–2119.
10. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
11. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // *АиТ.* 2019. № 8. С. 9–28.
Kamenetskiy V.A. Switched Systems, Lur’e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.
12. *Каменецкий В.А.* Дискретные попарно связанные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // *АиТ.* 2022. № 9. С. 55–80.
Kamenetskiy V.A. Discrete-Time Pairwise Connected Switched Systems and Lur’e Systems. Tsyppkin’s Criterion for Systems with Two Nonlinearities // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 1371–1392.
13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 14.07.2020

После доработки 07.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022