

© 2023 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ПО ЛАГРАНЖУ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ¹

Показано, что нормы линейного оператора в детерминированном и стохастическом случаях являются оптимальными значениями двойственных по Лагранжу задач. Для линейных нестационарных систем на конечном горизонте принцип двойственности приводит к стохастическим интерпретациям обобщенных H_2 - и H_∞ -норм системы. Рассмотрены стохастические минимаксные задачи фильтрации и управления при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов. Получены уравнения обобщенных H_∞ -субоптимальных регуляторов, фильтров и идентификаторов, обеспечивающих компромисс между дисперсией ошибки на конце интервала наблюдений и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

Ключевые слова: стохастическое минимаксное управление, фильтр Калмана, двойственность по Лагранжу, обобщенное H_∞ -оптимальное управление и фильтрация, обобщенное H_2 -оптимальное управление, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023020022, EDN: OMHKZN

1. Введение

Как известно, существуют две основные концепции в теории управления при наличии неопределенности: стохастическая, когда неопределенные факторы типа начальных условий, возмущений и помех предполагаются случайными и при этом они наделяются некоторыми вероятностными характеристиками такими, например, как математическое ожидание и ковариация, и детерминистская, когда неопределенные факторы предполагаются детерминированными и принимающими значения в некоторых множествах. В первом случае цель состоит в оптимизации функционала качества системы в вероятностном смысле при условии, что вероятностные характеристики или их границы заданы, а во втором — в минимизации максимального значения

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2021-1394).

функционала на множестве значений неопределенных факторов, удовлетворяющих заданным ограничениям. В рамках обеих концепций разработаны эффективные методы решения разнообразных задач линейно-квадратичного оценивания, фильтрации и управления, в том числе задачи с критерием вида H_∞ -нормы для детерминированных и стохастических систем (см., например, [1–5]). Вместе с тем обе концепции имеют свои недостатки: в стохастической парадигме сложно определить вероятностные характеристики неопределенных факторов, а в детерминистской — трудно найти адекватные ограничения для значений неопределенных факторов. Для преодоления этих недостатков, а также для расширения круга решаемых задач и интерпретации результатов, получаемых в одной парадигме, в терминах другой крайне важно выявить взаимосвязь между этими парадигмами.

Надо отметить, что к этой теме обращались неоднократно: связь между рекуррентным методом наименьших квадратов и фильтром Калмана является классическим тому примером [6]. Кроме того, в [7] показано, что стационарный фильтр Калмана является оптимальным не только при случайных помехах типа белого шума, но он также обеспечивает минимум максимального по времени значения евклидовой нормы ошибки при детерминированных помехах с ограниченной энергией. В широко известной статье [8] J.C. Willems привел чисто детерминистскую интерпретацию результатов, полученных в линейно-квадратичной оптимальной стохастической фильтрации и управлении (см. также [9]). А именно, он доказал, что если среди всех детерминированных возмущений, при которых может реализоваться наблюдаемый сигнал, выбрать то, которое имеет наименьшую норму, и подставить это возмущение в уравнения системы, то в результате получатся уравнения, совпадающие с уравнениями оптимального фильтра или регулятора при случайных, нормально распределенных возмущениях.

В данной статье показано, что задача максимизации квадрата евклидовой нормы выхода линейного оператора (преобразования), который отображает детерминированные векторы, удовлетворяющие эллипсоидальному ограничению, и задача максимизации дисперсии выхода этого оператора, отображающего случайные векторы, удовлетворяющие усредненному эллипсоидальному ограничению, являются двойственными по Лагранжу. Для операторов, порождаемых линейными динамическими системами, это приводит к двойственности стохастических и детерминированных минимаксных задач оценивания и управления с критериями вида обобщенных H_2 - и H_∞ -норм. Применение принципа двойственности позволяет сформулировать и решить новые задачи оптимального и робастного управления и фильтрации в стохастической постановке при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов. В работе получены уравнения обобщенных H_∞ -субоптимальных регуляторов, фильтров и идентификаторов, обеспечивающих компромисс между дисперсией ошибки на конце интервала наблюдений и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

2. О двойственности по Лагранжу стохастической и детерминистской парадигм

Пусть два вектора $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ и $\eta \in \mathbb{R}^{n_\eta}$, которые будем называть входом и выходом, связаны линейной зависимостью

$$(2.1) \quad \eta = \Psi \xi,$$

в которой Ψ — детерминированная $(n_\eta \times n_\xi)$ -матрица. Введем обозначения

$$|a|_R^2 = a^T R^{-1} a, \quad \|b\|_{G[t_0, t]}^2 = \sum_{i=t_0}^{t-1} |b(i)|_{G(i)}^2,$$

где $R = R^T > 0$ и $G(t) = G^T > 0$ — весовые матрицы. Определим обобщенную норму оператора Ψ с весовой матрицей $K = K^T > 0$ как

$$(2.2) \quad \|\Psi\|_K^2 = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\eta|^2}{|\xi|_K^2} = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T \Psi^T \Psi \xi}{\xi^T K^{-1} \xi} = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^T).$$

Эта индуцированная обобщенная норма оператора Ψ , которую будем также называть уровнем гашения детерминированных возмущений, равна максимальному значению евклидовой нормы выхода η при всех входах ξ , принадлежащих эллипсоиду $\mathcal{E}_\xi(K) = \{\xi : \xi^T K^{-1} \xi \leq 1\}$, и может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи.

Задача D.

$$(2.3) \quad \gamma_d^2(\Psi) = \max_{\xi} |\eta|^2 : \eta = \Psi \xi, \quad \xi^T K^{-1} \xi \leq 1.$$

Если $\xi = \xi_s$ — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $E\xi_s \xi_s^T = K_\xi$, то ковариационная матрица выхода равна $K_\eta = \Psi K_\xi \Psi^T$, а математическое ожидание квадрата евклидовой нормы выхода равно следу этой матрицы, т.е. $E|\eta|^2 = \text{tr}(\Psi K_\xi \Psi^T)$. При неизвестной ковариационной матрице вектора ξ определим уровень гашения случайных возмущений оператора Ψ как квадратный корень из максимального значения отношения дисперсии выхода к математическому ожиданию квадратичной формы с матрицей K^{-1} входа при всех ненулевых ковариационных матрицах входа K_ξ [10], т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E|\eta|^2}{E|\xi|_K^2} = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{\text{tr} \Psi K_\xi \Psi^T}{\text{tr} K^{-1} K_\xi}.$$

Эта величина, представляющая собой индуцированную норму оператора Ψ , когда ξ и η — случайные векторы с нормами $|\xi|_s = (E\xi^T K^{-1} \xi)^{1/2}$ и $|\eta|_s = (E|\eta|^2)^{1/2}$, может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи.

Задача S.

$$(2.4) \quad \gamma_s^2(\Psi) = \max_{K_\xi \geq 0} \text{tr} \Psi K_\xi \Psi^T : \eta = \Psi \xi, \quad \text{tr} K^{-1} K_\xi \leq 1.$$

Теорема 2.1. Задачи S и D являются двойственными, и уровни гашения случайных и детерминированных возмущений с весовой матрицей K оператора Ψ совпадают со спектральным радиусом ковариационной матрицы выхода при ковариационной матрице входа, равной весовой матрице, т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi) = \gamma_d^2(\Psi) = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^T).$$

Доказательство теоремы 2.1. Запишем функцию Лагранжа для задачи S и выразим оптимальное значение двойственной ей функции как

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_{K_\xi \geq 0} \left[\text{tr } \Psi K_\xi \Psi^T + \lambda(1 - \text{tr } K^{-1} K_\xi) \right] = \min_{\lambda \geq 0} \max_{K_\xi \geq 0} \left[\lambda + \text{tr } K_\xi (\Psi^T \Psi - \lambda K^{-1}) \right].$$

Для того, чтобы эта величина была конечной, должно выполняться неравенство $\Psi^T \Psi - \lambda K^{-1} \leq 0$ и тогда максимум достигается при $K_\xi = 0$. При этом оптимальное значение двойственной задачи совпадает с (2.2). Так как функция является выпуклой и имеет внутреннюю точку, удовлетворяющую ограничению, то оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают [11]. Теорема доказана.

К этому стоит добавить, что образ оператора Ψ или, другими словами, множество достижимости вектора η в (2.1) при всех детерминированных векторах ξ , принадлежащих эллипсоиду $\mathcal{E}_\xi(K)$, может характеризоваться в терминах ковариационной матрицы случайного вектора ξ , как сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2.2. Множество достижимости вектора η в (2.1), когда детерминированный вход ξ принимает значения в эллипсоиде $\mathcal{E}_\xi(K)$ и матрица $K_\eta = \Psi K \Psi^T$ невырожденная, является эллипсоид $\mathcal{E}_\eta(K_\eta)$ с матрицей K_η , совпадающей с ковариационной матрицей случайного вектора η , когда ковариационная матрица случайного вектора ξ равна K .

Доказательство теоремы 2.2. Найдем опорную функцию множества достижимости η в (2.1)

$$\varrho(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{E}_\xi(K)} x^T \eta,$$

которая в случае вектора x единичной длины является верхней гранью проекций x на это множество. Для полученной задачи на условный экстремум запишем функцию Лагранжа

$$L(\xi, \lambda) = x^T \Psi \xi + \lambda(1 - \xi^T K^{-1} \xi).$$

Приравнивая нулю градиент этой функции по ξ , найдем $\xi = (2\lambda)^{-1} K \Psi^T x$ и, подставляя это соотношение в ограничение, получим $2\lambda = (x^T \Psi K \Psi^T x)^{1/2}$. Окончательно имеем $\varrho(x) = (x^T \Psi K \Psi^T x)^{1/2}$, что согласно [12] отвечает опорной функции эллипсоида $\mathcal{E}_\eta(\Psi K \Psi^T)$. Теорема доказана.

Приведенные выше результаты остаются в силе, если случайный вектор ξ имеет ненулевое математическое ожидание $E\xi = \xi_*$. В этом случае уровень гашения случайных возмущений определяется как

$$\gamma_s^2(\Psi) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E|\eta - \Psi\xi_*|^2}{E|\xi - \xi_*|_K^2} = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{\text{tr } \Psi K_\xi \Psi^T}{\text{tr } K^{-1} K_\xi},$$

где $K_\xi = E(\xi - \xi_*)(\xi - \xi_*)^T$, а уровень гашения детерминированных возмущений определяется как

$$\gamma_d^2(\Psi) = \sup_{\xi \neq \xi_*} \frac{|\eta - \Psi\xi_*|^2}{|\xi - \xi_*|_K^2} = \sup_{\xi \neq \xi_*} \frac{(\xi - \xi_*)^T \Psi^T \Psi (\xi - \xi_*)}{(\xi - \xi_*)^T K^{-1} (\xi - \xi_*)} = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^T).$$

Множеством достижимости вектора η в этом случае будет эллипсоид с центром в точке $\eta_* = \Psi\xi_*$ и матрицей $K_\eta = \Psi K \Psi^T$.

Далее применим эти результаты к линейным операторам, которые порождаются линейными динамическими системами.

3. Максимальное уклонение и обобщенная H_2 -норма

Определим линейный оператор $\Psi_2(t)$, который отображает вход $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ в выход $\eta = z(t)$ линейной динамической системы, описываемой уравнениями

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ z(t) &= C(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Так как решение этой системы представимо в виде

$$(3.2) \quad z(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} F(t, i+1)B(i)v(i),$$

где $F(t, i) = C(t)\Phi(t, i+1)B(i)$, $i = t_0, \dots, t-1$ — матричная импульсная переходная функция системы, $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица системы, удовлетворяющая уравнению

$$(3.3) \quad \Phi(t+1, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I,$$

то

$$(3.4) \quad \Psi_2(t) = (C(t)\Phi(t, t_0) \quad F(t, t_0) \quad \dots \quad C(t)B(t-1)).$$

При выборе весовой матрицы блочно-диагонального вида

$$K(t) = \text{diag}(R, G(t_0), \dots, G(t-1)),$$

где $R = R^T > 0$ и $G(i) = G^T(i) > 0$, $i = 0, \dots, t-1$, обобщенная норма этого оператора

$$\|\Psi_2(t)\|_{K(t)}^2 = \sup_{\xi(t) \neq 0} \frac{|\Psi_2(t)\xi(t)|^2}{|\xi(t)|_{K(t)}^2} = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2}$$

представляет собой так называемое максимальное уклонение выхода системы в момент времени t при произвольных детерминированных начальном состоянии и возмущении, удовлетворяющих ограничению

$$(3.5) \quad |\xi(t)|_{K(t)}^2 = |x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 \leq 1,$$

которое будем называть эллипсоидальным. Кроме того, напомним, что обобщенная H_2 -норма системы (3.1) на конечном горизонте $[t_0, t_f]$ с весовыми матрицами R и $G(t)$ определяется как

$$\|H\|_{g^2}^2 = \sup_{x_0, v(t), t \in [t_0, t_f-1]} \frac{\max_{\tau \in [t_0, t]} |z(\tau)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2},$$

т.е. как максимальное по времени из максимальных уклонений выхода [13, 14].

Определим уровень гашения случайных возмущений в системе (3.1) в момент времени t как уровень гашения случайных возмущений оператора $\Psi_2(t)$, т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi_2(t)) = \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2)},$$

где случайные начальное состояние и возмущения не являются независимыми, а в общем случае представляют собой цветной шум.

Согласно теореме 2.1 уровни гашения случайных и детерминированных возмущений равны $\lambda_{\max}[K_z(t)]$, где $K_z(t)$ — ковариационная матрица выхода системы, когда ее вход $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ имеет ковариационную матрицу $K(t) = \text{diag}(R, G(t_0), \dots, G(t-1))$, т.е. когда ее начальное состояние и возмущения независимы и имеют ковариационные матрицы R и $G(t)$ соответственно. Из уравнений системы получим $K_z(t) = C(t)P(t)C^T(t)$, где $P(t)$ — решение уравнения

$$(3.6) \quad P(t+1) = A(t)P(t)A^T(t) + B(t)G(t)B^T(t)$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. В системе (3.1) уровень гашения случайных возмущений совпадает с максимальным уклонением выхода, т.е.

$$(3.7) \quad \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2)} =$$

$$= \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2} = \lambda_{\max}[C(t)P(t)C^T(t)],$$

где $P(t)$ — решение уравнения (3.6).

Следствие 3.1. Обобщенная H_2 -норма системы (3.1) характеризуется как

$$\|H\|_{g_2}^2 = \max_{t \in [t_0, t_f]} \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2)} = \max_{t \in [t_0, t_f]} \lambda_{\max}[C(t)P(t)C^T(t)].$$

Замечание 1. Из (3.6), (3.7) следует, что уровень гашения случайных возмущений в момент времени t может быть найден как решение следующей задачи полуопределенного программирования:

$$(3.8) \quad \min \lambda : Y(i+1) - A(i)Y(i)A^T(i) - B(i)G(i)B^T(i) \geq 0, \quad i = t_0, \dots, t-1,$$

$$Y(t_0) = R, \quad C(t)Y(t)C^T(t) \leq \lambda I.$$

а обобщенная H_2 -норма — как минимальное $\lambda > 0$, при котором разрешимы неравенства (3.8) при $t = t_f$ и неравенства $C(i)Y(i)C^T(i) \leq \lambda I$ для $i = t_0, \dots, t_f$.

4. Обобщенная H_∞ -норма

Определим линейный оператор Ψ_∞ , для которого в силу системы

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), & x(t_0) &= x_0, \\ z(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), & t &\in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

выполняется $\eta = \Psi_\infty \xi$, где

$$\eta = \text{col}(z(t_0), \dots, z(t_f - 1), S^{1/2}x(t_f)), \quad \xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1)),$$

$S = S^T \geq 0$ — заданная матрица. Учитывая (3.2) и (3.3), найдем

$$\Psi_\infty = \begin{pmatrix} C(t_0) & D(t_0) & \cdot & 0 \\ C(t_0+1)\Phi(t_0+1, t_0) & F(t_0+1, t_0) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C(t_f-1)\Phi(t_f-1, t_0) & F(t_f-1, t_0) & \cdot & D(t_f-1) \\ S^{1/2}\Phi(t_f, t_0) & S^{1/2}\Phi(t_f, t_0+1)B(t_0) & \cdot & S^{1/2}B(t_f-1) \end{pmatrix}.$$

При выборе весовой матрицы $K = \text{diag}(R, G(t_0), \dots, G(t_f - 1))$ обобщенная норма этого оператора совпадает с ее обобщенной H_∞ -нормой, т.е.

$$\|\Psi_\infty\|_K^2 = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|\Psi_\infty \xi|^2}{|\xi|_K^2} = \sup_{x(t_0), v(\tau), \tau \in [t_0, t_f - 1]} \frac{\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x(t_f)^T S x(t_f)}{|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2} = \|H\|_{g_\infty}^2,$$

где $S = S^T \geq 0$ — заданная весовая матрица. Таким образом, уровень гашения детерминированных возмущений системы (4.1) находится как решение следующей задачи.

Задача D_∞. В предположении, что начальное и внешнее возмущения в системе (4.1) образуют последовательность детерминированных векторов $\xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$ найти

$$(4.2) \quad \gamma_d^2(\Psi_\infty) = \max_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t_f - 1]} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |z(t)|^2 + x^T(t_f) S x(t_f) : |x_0|_R^2 + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |v(t)|_{G(t)}^2 \leq 1.$$

В свою очередь определим уровень гашения случайных возмущений

$$(4.3) \quad \gamma_s^2(\Psi_\infty) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E \left[\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f) \right]}{E \left[|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2 \right]},$$

где K_ξ — ковариационная матрица вектора $\xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$. Согласно теореме 2.1 уровни гашения случайных и детерминированных возмущений равны между собой, т.е. $\gamma_s^2(\Psi_\infty) = \|H\|_{g_\infty}^2$.

Покажем, что уровень гашения случайных возмущений может быть найден как решение задачи полуопределенного программирования, в которой переменными являются определенные ковариационные матрицы. Обозначая

$$(4.4) \quad E \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T = W(t), \quad M = (I \ 0), \quad H = (0 \ I)$$

и опуская аргумент t там, где это не вызывает сомнений, из (4.1) получим, что матрицы $W(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$(4.5) \quad MW(t+1)M^T = (A \ B)W(t)(A \ B)^T, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1.$$

Выразим математические ожидания в (4.3) в терминах матриц $W(t)$ и сформулируем следующую задачу.

Задача S_∞ .

$$(4.6) \quad \gamma_s^2(\Psi_\infty) = \max_{W(t) \geq 0, t \in [t_0, t_f]} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr}(C-D)W(t)(C-D)^T + \text{tr} SMW(t_f)M^T : \\ \text{tr} R^{-1}MW(t_0)M^T + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} G^{-1}HW(t)H^T \leq 1,$$

где матрицы $W(t)$ удовлетворяют уравнениям (4.5).

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Теорема 4.1. Задачи S_∞ и D_∞ являются двойственными по Лагранжу и их оптимальные значения совпадают с обобщенной H_∞ -нормой системы (4.1), т.е.

$$\|H\|_{g\infty}^2 = \sup_{W(t) \geq 0, t \in [t_0, t_f]} \frac{\sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr}(C-D)W(t)(C-D)^T + \text{tr} SMW(t_f)M^T}{\text{tr} R^{-1}MW(t_0)M^T + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} G^{-1}HW(t)H^T},$$

которая вычисляется как

$$(4.7) \quad \|H\|_{g\infty}^2 = \min_{\lambda \geq 0, X(t)} \lambda : \\ \begin{pmatrix} A^T X(t+1)A - X(t) & * & * \\ B^T X(t+1)A & B^T X(t+1)B - G^{-1} & * \\ C & D & -\lambda I \end{pmatrix} \leq 0, \\ X(t_0) = R^{-1}, \quad \begin{pmatrix} X(t_f) & * \\ S^{1/2} & \lambda I \end{pmatrix} \geq 0, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1.$$

Теперь перейдем к задачам фильтрации и управления.

5. Фильтрация

5.1. Обобщенная H_2 -оптимальная фильтрация

Рассмотрим задачу фильтрации для линейного дискретного объекта, заданного разностными уравнениями:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \\ z(t) &= C_z(t)x(t), \quad t = t_0, \dots, t_f, \end{aligned}$$

в которых $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние объекта, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — измеряемый выход, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ — целевой выход, x_0 и $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ — начальное состояние и внешнее

возмущение, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — заданные матричные функции соответствующих размерностей. Для оценивания неизмеряемого состояния объекта по измерениям выхода определим фильтр, описываемый уравнением

$$(5.2) \quad \begin{aligned} x_f(t+1) &= A(t)x_f(t) + \Theta(t)[y(t) - C(t)x_f(t)], \quad x_f(0) = 0, \\ z_f(t) &= C_z(t)x_f(t), \end{aligned}$$

в котором $x_f(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние фильтра, $z_f(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ — оценка целевого выхода, $\Theta(t)$ — матрица параметров фильтра. Обозначая ошибки оценки состояния $e(t) = x(t) - x_f(t)$ и оценки выхода $e_z(t) = z(t) - z_f(t)$, из (5.1) и (5.2) получим уравнения ошибок фильтрации

$$(5.3) \quad \begin{aligned} e(t+1) &= A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t), \quad e(0) = x_0, \\ e_z(t) &= C_z(t)e(t), \end{aligned}$$

где $A_c(t) = A(t) - \Theta(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - \Theta(t)D(t)$. Допустим, что ковариационная матрица $K_{\xi(t)}$ случайного вектора начального состояния и возмущений $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ неизвестна. Найдем параметры $\Theta_*(t)$ фильтра (5.2), при которых уровень гашения случайных возмущений с весовыми матрицами $R > 0$ и $G(i) > 0$, $i = 1, \dots, t-1$, т.е.

$$(5.4) \quad J_s(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|e_z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2)},$$

где Θ_i^j обозначает набор $\Theta(i), \dots, \Theta(j)$, будет минимальным.

Согласно теореме 3.1 такой фильтр обеспечивает минимум максимальному уклонению ошибки при детерминированных факторах, т.е.

$$J_d(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|e_z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2},$$

и совпадает с фильтром, который минимизирует спектральный радиус ковариационной матрицы выхода $e_z(t)$ уравнения (5.3) при условии, что начальное состояние и возмущения образуют последовательность случайных независимых векторов с ковариационными матрицами R и $G(t)$. Это значит, что его параметры находятся из условия $\min_{\Theta} \lambda_{\max}(K_z(\Theta))$, где $K_z(\Theta) = C_z(t)P(t)C_z^T(t)$ и $P(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} P(t+1) &= [A(t) - \Theta(t)C(t)]P(t)[A(t) - \Theta(t)C(t)]^T + \\ &+ [B(t) - \Theta(t)D(t)]G(t)[B(t) - \Theta(t)D(t)]^T \end{aligned}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Ради упрощения формул предположим, что возмущения в объекте и в измерении выхода между собой независимы и что матрицы $D(t)$ полного ранга, т.е.

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} B(t) \\ D(t) \end{pmatrix} G(t) \begin{pmatrix} B(t) \\ D(t) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} G_B(t) & 0 \\ 0 & G_D(t) \end{pmatrix}, \quad G_D(t) > 0.$$

Выделяя в правой части последнего уравнения полный квадрат по $\Theta(t)$, найдем

$$(5.6) \quad \Theta_*(t) = A(t)P_2(t)C^T(t) [C(t)P_2(t)C^T(t) + G_D(t)]^{-1},$$

где матрица $P_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$P_2(t+1) = A(t)P_2(t)A^T(t) - A(t)P_2(t)C^T(t) [C(t)P_2(t)C^T(t) + G_D(t)]^{-1} C(t)P_2(t)A^T(t) + G_B(t)$$

или, применяя известную формулу обращения матриц, (см., например, [15, с. 254]), уравнению

$$(5.7) \quad P_2(t+1) = A(t) [P_2^{-1}(t) + C^T(t)G_D^{-1}(t)C(t)]^{-1} A^T(t) + G_B(t)$$

с начальным условием $P_2(t_0) = R$.

Заметим, что найденный фильтр совпадает с фильтром Калмана [2] для оценки состояния системы (5.1) при случайных независимых начальном состоянии и возмущении с ковариационными матрицами, равными весовым матрицам R и $G(t)$. Другими словами, фильтр Калмана, построенный для системы со случайными независимыми начальным состоянием и возмущениями с заданными ковариационными матрицами R и $G(t)$, в дополнении к тому, что обеспечивает минимум максимальному отклонению ошибки при детерминированных факторах, удовлетворяющих ограничению

$$(5.8) \quad |x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2 \leq 1,$$

также доставляет минимум уровню гашения случайных возмущений (5.4) при соответствующих весовых матрицах R и $G(t)$. Кроме того, согласно теореме 2.2 множество достижимости ошибки $e_z(t)$ при условии (5.8) составляет эллипсоид $\mathcal{E}_z[C_z(t)P_2(t)C_z^T(t)]$ и, следовательно, неизвестный вектор $z(t)$ находится в таком же эллипсоиде с центром в $z_f(t)$.

Параметры $\Theta_{g2}(t)$ обобщенного H_2 -оптимального фильтра, при котором минимизируется максимальная из дисперсий ошибок оценок на всем интервале, т.е.

$$J_{g2}(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \max_{t \in [t_0, t_f]} \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|e_z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0,t]}^2)},$$

находятся стандартным образом с помощью линейных матричных неравенств (3.8) (см., например, [15]), в которых нужно A заменить на $A - \Theta(t)C$, B на $B - \Theta(t)D$ и обозначить $X(t+1)\Theta(t) = Z(t)$. Тогда параметры фильтра вычисляются как $\Theta_{g2}(t) = X_*^{-1}(t+1)Z_*(t)$, где звездочками обозначены решения этих неравенств.

5.2. Обобщенная H_∞ -оптимальная фильтрация

Рассмотрим теперь обобщенную H_∞ -оптимальную фильтрацию в стохастической постановке, когда ковариационная матрица K_ξ вектора начального состояния и возмущений $\xi = \text{col}(x(t_0), v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$ в (5.1) неизвестна и требуется найти параметры фильтра (5.2), при которых на траекториях системы (5.3) минимизируется функционал

$$J_{g\infty}(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E \left[\|e_z\|_{[t_0, t_f]}^2 + e_x^T(t_f) S e_x(t_f) \right]}{E \left[|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2 \right]}.$$

Теорема 5.1. Обобщенная H_∞ -норма системы (5.3), описывающей динамику ошибки оценки состояния (5.1), меньше λ , т.е. $J_{g\infty} < \lambda$, если фильтр (5.2) имеет параметры

$$(5.9) \quad \Theta_\infty(t) = A(t) \left[P_\infty^{-1}(t) + C^T(t) G_D^{-1}(t) C(t) - \right. \\ \left. - \lambda^{-1} C_z^T(t) C_z(t) \right]^{-1} C^T(t) G_D^{-1}(t),$$

где

$$(5.10) \quad P_\infty(t+1) = A(t) \left[P_\infty^{-1}(t) + C^T(t) G_D^{-1}(t) C(t) - \right. \\ \left. - \lambda^{-1} C_z^T(t) C_z(t) \right]^{-1} A^T(t) + G_B(t),$$

$P_\infty(t_0) = R$, и для всех t выполнено $C_z(t) P_\infty(t) C_z^T(t) < \lambda I$ и $S^{1/2} P_\infty(t_f) S^{1/2} < \lambda I$.

Уравнения (5.9) и (5.10) определяют так называемые центральные обобщенные H_∞ -субоптимальные решения. Эти уравнения приведены в компактной форме и могут быть записаны в виде, не содержащем обратных матриц $P_\infty^{-1}(t)$, если применить формулу обращения матриц. Параметры обобщенного H_∞ -субоптимального фильтра, при котором $J_{g\infty} < \lambda$, в том числе и с минимальным λ , могут быть также получены стандартным образом, решая линейные матричные неравенства (4.7).

Заметим еще, сравнивая (5.10) и (5.7), что при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $P_\infty(t) \rightarrow P_2(t)$. Переходя в (5.9) и (5.10) к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ и применяя формулу обращения матриц, нетрудно убедиться в том, что в пределе $\Theta_\infty(t)$ совпадает с $\Theta_*(t)$, заданной в (5.6), а обобщенный H_∞ -субоптимальный фильтр переходит в фильтр Калмана, построенный для системы (5.1), в которой независимые начальное состояние и возмущения имеют ковариационные матрицы R и $G(t)$ соответственно. Задавая $0 < \lambda < \infty$, можно добиться компромисса между дисперсией ошибки оценки состояния в определенный момент времени и суммой дисперсий ошибок оценок целевого выхода на всем предшествующем интервале времени.

5.3. Оптимальное оценивание параметров линейной регрессии

В качестве приложения рассмотрим задачу оптимального оценивания неизвестных параметров линейной регрессии

$$(5.11) \quad \chi(t) = \Phi(t)\zeta_0 + v(t), \quad t = t_0, \dots, t_f,$$

где $\chi(t)$ — вектор измерений, $\Phi(t)$ — матрица регрессоров, ζ_0 — вектор неизвестных параметров, $v(t)$ — вектор помех измерений. Представим ее как задачу построения оптимального наблюдателя состояния системы

$$(5.12) \quad \zeta(t+1) = \zeta(t), \quad \zeta(t_0) = \zeta_0$$

вида

$$\hat{\zeta}(t+1) = \hat{\zeta}(t) + \Theta(t)[\chi(t) - \Phi(t)\hat{\zeta}(t)], \quad \hat{\zeta}(t_0) = \zeta_*.$$

При этом ошибка $\tilde{\zeta}(i) = \zeta_0 - \hat{\zeta}(i)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\zeta}(i+1) = [I - \Theta(i)\Phi(i)]\tilde{\zeta}(i) - \Theta(i)v(i), \quad \tilde{\zeta}(t_0) = \zeta_0 - \zeta_*, \quad i = t_0, \dots, t-1.$$

Нетрудно проверить, что при неизвестной ковариационной матрице вектора, составленного из начальной ошибки $\zeta_0 - \zeta_*$ и помех в измерениях на всем интервале, матрица параметров оптимального фильтра (5.2), (5.6), обеспечивающего для уравнения ошибки минимум уровня гашения случайных возмущений в момент времени t , равна $\Theta_*(t) = P_2(t)\Phi(t)[\Phi(t)P_2(t)\Phi^T(t) + G(t)]^{-1}$. Оптимальные оценки тогда определяются рекуррентными уравнениями

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \hat{\zeta}(t+1) &= \hat{\zeta}(t) + P_2(t+1)\Phi^T(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\hat{\zeta}(t)], \quad \hat{\zeta}(t_0) = \zeta_*, \\ P_2^{-1}(t+1) &= P_2^{-1}(t) + \Phi^T(t)G^{-1}(t)\Phi(t), \quad P_2(t_0) = R. \end{aligned}$$

Как хорошо известно, эти уравнения описывают рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов, а также фильтр Калмана для оценки состояния системы (5.12) при ковариациях $E\zeta_0\zeta_0^T = R$ и $Ev(t)v^T(t) = G(t)$, и оценка $\hat{\zeta}(t)$ минимизирует критерий

$$J_t(\zeta) = (\zeta - \zeta_*)^T R^{-1}(\zeta - \zeta_*) + \sum_{i=0}^{t-1} (\chi(i) - \Phi(i)\zeta)^T G^{-1}(i)(\chi(i) - \Phi(i)\zeta).$$

Таким образом, метод наименьших взвешенных квадратов определяет оценку, которая минимизирует уровень гашения случайных возмущений при соответствующих весовых матрицах и которая согласно принципу двойственности минимизирует максимальное отклонение ошибки при неизвестных детерминированных параметрах и помехах, удовлетворяющих ограничению

$$(5.14) \quad |\zeta_0 - \zeta_*|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 \leq 1, \quad t \in [t_0, t_f].$$

И, наконец, построим обобщенный H_∞ -субоптимальный фильтр для оценки неизвестных параметров в линейной регрессии (5.11), при котором сумма квадратов ошибок на всем рассматриваемом интервале времени не превышает с множителем λ взвешенную сумму квадратов начального отклонения оценки и помех измерений. В соответствии с (5.9), (5.10) параметры этого фильтра будут определяться как

$$\Theta_\infty(t) = [P_\infty(t) + \Phi^T(t)G^{-1}(t)\Phi(t) - \lambda^{-1}I]^{-1} \Phi^T(t)G^{-1}(t),$$

а сам фильтр при условии $P_\infty(t) < \lambda I$ и $S^{1/2}P_\infty(t_f)S^{1/2} < \lambda I$ определяется рекуррентными уравнениями

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \hat{\zeta}(t+1) &= \hat{\zeta}(t) + P_\infty(t+1)\Phi^T(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\hat{\zeta}(t)], \quad \hat{\zeta}(t_0) = \zeta_*, \\ P_\infty^{-1}(t+1) &= P_\infty^{-1}(t) + \Phi^T(t)G^{-1}(t)\Phi(t) - \lambda^{-1}I, \quad P_\infty(t_0) = R. \end{aligned}$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ уравнения обобщенного H_∞ -оптимального фильтра переходят в рекуррентные уравнения метода наименьших взвешенных квадратов. За счет выбора подходящего значения λ здесь также можно обеспечить компромисс между дисперсией ошибки в конце интервала и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

6. Управление

Рассмотрим задачу управления для линейного дискретного объекта, заданного разностными уравнениями

$$(6.1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B(t)v(t), \quad x(0) = x_0, \\ z(t) &= C_z(t)x(t) + D_z(t)u(t), \quad t = t_0, \dots, t_f. \end{aligned}$$

Допустим, что начальное состояние и внешние возмущения представляют собой случайный вектор $\xi(t) = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей $K_{\xi(t)}$ и цель управления вида $u(t) = \Theta(t)x(t)$ состоит в минимизации функционала

$$J_s(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{K_{\xi(t)} \geq 0} \frac{E|z(t)|^2}{E(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2)}.$$

Согласно теореме 3.1 такое управление обеспечивает минимум максимально-му отклонению выхода при детерминированных факторах, т.е.

$$J_d(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2},$$

и совпадает с управлением, которое минимизирует спектральный радиус ковариационной матрицы выхода системы (6.1) в момент времени t при условии, что начальное состояние и возмущения образуют последовательность

случайных независимых векторов с ковариационными матрицами R и $G(i)$, $i = t_0, \dots, t-1$. Параметры такого закона управления могут быть найдены, решая задачу полуопределенного программирования при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами, получаемыми стандартным образом из (3.8). Заметим, что задачи, в которых цель управления формулировалась в терминах ковариационной матрицы выхода в стационарном режиме на бесконечном горизонте, рассматривались в [16].

Пусть теперь начальное состояние и возмущения на всем интервале $[t_0, t_f]$ образуют случайный вектор $\xi = \text{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t_f - 1))$ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей K_ξ . Цель управления вида $u(t) = \Theta(t)x(t)$ состоит в минимизации суммарной “энергии” выхода на всем интервале с учетом конечного состояния при условии ограниченности суммарной “энергии” начального состояния и внешнего возмущения на всем интервале. При этом “энергия” измеряется математическим ожиданием квадратичной формы соответствующего вектора с некоторой заданной весовой матрицей. В соответствии с этим оптимизируемый функционал имеет вид

$$(6.2) \quad J_s(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{K_\xi \geq 0} \frac{E \left[\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f) \right]}{E \left[|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2 \right]},$$

где $S = S^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ и $G(t) = G^T(t) > 0$ — заданные весовые матрицы. Заметим, что в классической задаче линейно-квадратического управления в стохастической постановке предполагается, что последовательность векторов начального состояния и возмущений образует последовательность независимых случайных векторов с заданными ковариационными матрицами.

Согласно теореме 4.1 поставленная задача двойственна задаче управления объектом (6.1), в котором начальное состояние и внешние возмущения образуют произвольную детерминированную последовательность векторов, а функционал имеет вид обобщенной H_∞ -нормы с соответствующими весовыми матрицами

$$(6.3) \quad J_d(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau \in [t_0, t_f-1]} \frac{\|z\|_{[t_0, t_f]}^2 + x^T(t_f) S x(t_f)}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t_f]}^2}.$$

Параметры искомого закона управления находятся на основе решения задачи полуопределенного программирования, получаемой стандартным образом из (4.7).

7. Заключение

Установлен принцип двойственности для линейных операторов в детерминированном и стохастическом случаях. Этот результат оказывается полезным, так как связывает между собой стохастическую и детерминистскую

парадигмы в задачах управления и фильтрации. В частности, если детерминированные начальное состояние и возмущение в линейной нестационарной системе на конечном горизонте удовлетворяют эллипсоидальному ограничению с заданными весовыми матрицами, то максимальное по времени из максимальных отклонений выхода, т.е. обобщенная H_2 -норма системы, и максимальное значение интегрального квадратичного функционала, т.е. обобщенная H_∞ -норма системы, совпадают соответственно с максимальным по времени из максимальных значений дисперсий выхода и с максимальным значением усредненного интегрального квадратичного функционала при случайных начальном состоянии и возмущении с неизвестными ковариационными матрицами, удовлетворяющими усредненному эллипсоидальному ограничению. Обе эти нормы также характеризуются как спектральные нормы ковариационных матриц выходов линейных операторов при случайных независимых начальном состоянии и возмущениях в системе, ковариационные матрицы которых совпадают с соответствующими весовыми матрицами эллипсоидального ограничения.

В статье для линейных динамических систем сформулированы новые минимаксные задачи в стохастической постановке при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов и показано, что их решения совпадают с решениями двойственных детерминированных минимаксных задач. Так, минимаксное стохастическое управление при неизвестной совместной ковариационной матрице начального состояния и возмущений, имеющей ограниченный след, совпадает с детерминированным обобщенным H_∞ -оптимальным управлением. Оптимальный фильтр, минимизирующий уровень гашения случайных начального состояния и возмущений с неизвестной совместной ковариационной матрицей, совпадает с оптимальным фильтром, минимизирующим максимальное отклонение ошибки фильтрации при детерминированных начальном состоянии и возмущениях, удовлетворяющих эллипсоидальному ограничению с заданными весовыми матрицами. Этот фильтр оказывается фильтром Калмана, построенным для данной системы при случайных независимых начальном состоянии и возмущениях, ковариационные матрицы которых равны соответствующим весовым матрицам эллипсоидального ограничения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 4.1. Запишем функцию Лагранжа для задачи S_∞ и найдем двойственную ей функцию:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \geq 0, X(t)} \max_{W(t) \geq 0} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} (C(t) D(t)) W(t) (C(t) D(t))^T + \text{tr} S M W(t_f) M^T - \\ - \lambda \left[\text{tr} R^{-1} M W(t_0) M^T + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} G^{-1}(t) H W(t) H^T - 1 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} \left[(A(t) \ B(t)) W(t) (A(t) \ B(t))^T - MW(t+1)M^T \right] X(t+1) = \\
& = \min_{\lambda \geq 0, X(t)} \max_{W(t) \geq 0} \left\{ \lambda + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \text{tr} W(t) \left[(C(t) \ D(t))^T (C(t) \ D(t)) + \right. \right. \\
& + (A(t) \ B(t))^T X(t+1) (A(t) \ B(t)) - M^T X(t) M - \lambda H^T G^{-1}(t) H \left. \right] + \\
& \left. + \text{tr} W(t_f) M^T [S - X(t_f)] M \right\},
\end{aligned}$$

где $X(t_0) = \lambda R^{-1}$. Для того, чтобы двойственная функция была конечной, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
& (C(t) \ D(t))^T (C(t) \ D(t)) + (A(t) \ B(t))^T X(t+1) (A(t) \ B(t)) - \\
& - M^T X(t) M - \lambda H^T G^{-1}(t) H \leq 0, \quad t = t_0, \dots, t_f - 1, \quad S - X(t_f) \leq 0,
\end{aligned}
\tag{П.1}$$

поскольку в противном случае $W(t)$ может быть выбрана так, что соответствующее слагаемое становится неограниченным. Таким образом, неравенства (П.1) должны быть выполнены, но тогда минимум в минимаксной задаче достигается при $W(t) = 0$, $t = t_0, \dots, t_f$ и мы приходим к двойственной задаче: найти $\min \lambda$ при ограничениях (П.1), которые с учетом введенных обозначений и замены $X(t)$ на $\lambda X(t)$ записываются в виде неравенств (4.7). Так как функция является выпуклой и имеется внутренняя точка, удовлетворяющая ограничениям, то значения прямой и двойственной задач совпадают.

Определим функцию $V(t) = x^T(t)X(t)x(t)$, где $X(t)$ удовлетворяет неравенствам (4.7). Приращение этой функции по траектории системы (4.1) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
& \Delta V(t) + \lambda^{-1} |z(t)|^2 - v^T(t) G^{-1} v(t) \leq 0, \\
& V(t_0) = x^T(t_0) R^{-1} x(t_0), \quad V(t_f) \geq \lambda^{-1} x^T(t_f) S x(t_f).
\end{aligned}
\tag{П.2}$$

Отсюда получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_f-1} |z(t)|^2 + x^T(t_f) S x(t_f) \leq \lambda + \lambda \left[x(t_0) R^{-1} x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} v^T(t) G^{-1}(t) v(t) - 1 \right],$$

т.е. минимальное значение λ , при котором разрешимы неравенства (4.7), является оптимальным значением в задаче D_∞ и совпадает с обобщенной H_∞ -нормой системы (4.1).

Доказательство теоремы 5.1. Из теоремы 4.1 применительно к системе (5.3) следует, что если выполнены неравенства (4.7), в которых матрица A заменена $A - \Theta C$ и B заменена $B - \Theta C$, то обобщенная H_∞ -норма

системы меньше λ . Применяя лемму Шура, преобразуем эти неравенства к виду

$$Y(t+1) - (A - \Theta C)Y(t)(A - \Theta C)^T - (B - \Theta D)G(B - \Theta D)^T - \\ - (A - \Theta C)Y(t)C_z^T(\lambda I - C_z Y(t)C_z^T)^{-1}C_z Y(t)(A - \Theta C)^T \geq 0$$

при условии, что $C_z Y(t)C_z^T < \lambda I$. Выделяя в левой части этого неравенства полный квадрат по Θ и учитывая обозначения (5.5), в результате некоторых манипуляций получим

$$Y(t+1) - A[Y^{-1}(t) + C^T G_D^{-1} C - \lambda^{-1} C_z^T C_z]^{-1} A^T - G_B - \\ - (\Theta - \Theta_\infty)[Y^{-1}(t) + C^T G_D^{-1} C - \lambda^{-1} C_z^T C_z](\Theta - \Theta_\infty)^T \geq 0,$$

где Θ_∞ задана в (5.9) при $P(t) = Y(t)$. Отсюда следует, что если параметры фильтра определяются формулой (5.9), в которой матрица $P(t)$ удовлетворяет уравнению (5.10), то $\gamma_s^2 < \lambda$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear Estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
4. Hinrichsen D., Pritchard A.J. Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
5. Petersen I.R., Ugrinovskii V.A., Savkin A.V. Robust Control Design Using H_∞ -Methods. London: Springer-Verlag, 2000.
6. Schweppe F.C. Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
7. Wilson D. Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. No. 5. P. 583–585.
8. Willems J.C. Deterministic least squares filtering. Journal of Econometrics. 2004. V. 118. P. 341–373.
9. Buchstaller D., Liu J., French M. The Deterministic Interpretation of the Kalman Filter // Int. J. Control. 2021. V. 94. No. 11. P. 3226–3236.
10. Коган М.М. Оптимальное оценивание и фильтрация при неизвестных ковариациях случайных факторов // АиТ. 2014. № 11. С. 88–109.
11. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2004.
12. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
13. Wilson D.A. Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. V. 34. No. 1. P. 94–97.

14. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // *АиТ*. 2019. № 12. С. 3–24.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
16. *Hsieh C., Skelton R.* All Covariance Controllers for Linear Discrete-Time Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1990. V. 35. No. 8. P. 908–915.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 24.08.2022

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022