

© 2023 г. А.В. БЕРЕНДАКОВА (abv1998@yandex.ru),
Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com),
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

О МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ВНЕШНИХ ОЦЕНОК ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ¹

Рассматривается задача построения внешней оценки предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с выпуклыми ограничениями на управление. Предложен метод декомпозиции, позволяющий свести задачу для исходной системы к подсистемам меньшей размерности посредством перехода в нормальный жорданов базис матрицы системы. Сформулировано и доказано утверждение о структуре опорной гиперплоскости к предельному множеству управляемости. На основе принципа сжимающих отображений предложен метод построения внешней оценки предельного множества управляемости с произвольным порядком точности в смысле расстояния Хаусдорфа. Приведены примеры.

Ключевые слова: дискретная система управления, предельное множество управляемости, опорное полупространство, принцип сжимающих отображений, выпуклое множество, полиэдральная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0005231023020010, EDN: OMDNFB

1. Введение

Вопросы построения множеств достижимости и управляемости [1–6] тесно связаны с задачами управления динамическими системами. В большинстве механических систем управляющее воздействие является ограниченным по своим возможностям: реактивные двигатели летательного аппарата имеют ограниченную тягу и конечный запас топлива, сервоприводы различных роботизированных систем также способны развивать некоторое фиксированное усилие. Данные ограничения приводят к тому, что управляемый объект может быть выведен на желаемый режим работы, вообще говоря, не из всех начальных состояний. В связи с этим оказывается актуальной задача анализа каждого отдельно взятого начального состояния по вопросу управляемости и достижимости [7].

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

Для дискретных систем управления известен подход, направленный на построение предельных множеств управляемости и достижимости. Однако зачастую даже в линейном случае удается только сформулировать достаточные условия того, что данные множества будут ограниченными. При этом даются только самые общие оценки их структуры. В [1] продемонстрировано, что предельные множества управляемости и достижимости линейных систем представляют собой цилиндр с некоторым выпуклым сечением. В [2] для случая определенной структуры матрицы линейной системы на основе принципа максимума предложен метод оценивания предельного множества достижимости.

Отдельный интерес методы построения и оценивания предельного множества 0-управляемости представляют в случае решения задачи быстродействия [8–12]. Данная задача имеет определенную специфику именно для дискретного времени, в то время как в непрерывном случае ее решение давно известно и сводится к использованию релейного управления [8, 9]. Для систем, описываемых конечно-разностными соотношениями, применение стандартных методов (принцип максимума [13, 14] и метод динамического программирования [15]) приводят либо к процедуре полного перебора, либо к вырожденной ситуации, поскольку экстремум почти для всех начальных состояний не является регулярным, а множители Лагранжа на оптимальном решении одновременно обращаются в нуль [3, 16–19]. В связи с этим применяется подход, основанный на использовании множеств 0-управляемости. Подробно методы решения данной задачи изложены в [20–23].

Тем не менее в этих работах постулируется разрешимость исходной задачи быстродействия, но при этом не приводятся необходимых и достаточных условий выполнимости данного факта. В свою очередь, имея возможность построить предельное множество 0-управляемости либо его оценку, можно для ряда начальных состояний определить, разрешима ли задача быстродействия в принципе.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приводится постановка задачи и вводятся основные понятия. В разделе 3 сформулированы и доказаны основные леммы, позволяющие на основе перехода в нормальный жорданов базис матрицы системы произвести декомпозицию исходной системы на подсистемы меньших размерностей. В разделе 4 приводятся необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости системы, а также предлагается их внешняя оценка на основе использования аппарата опорных гиперплоскостей. В разделе 5 на основе принципа сжимающих отображений представлен метод, позволяющий построить внешнюю оценку предельного множества 0-управляемости дискретной линейной системы с произвольной степенью точности в смысле расстояния Хаусдорфа. Различные численные примеры, демонстрирующие эффективность доказанных теорем и лемм, представлены в разделе 6.

Приведем нестандартные обозначения, используемые далее в статье.

Для произвольного $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\text{conv} \mathcal{U}$ выпуклую оболочку множества $\mathcal{U}$ — наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее $\mathcal{U}$ в качестве подмножества. Через $\partial \mathcal{U}$ обозначим множество граничных точек $\mathcal{U}$, через $\text{int} \mathcal{U}$ — множество внутренних точек $\mathcal{U}$. Замкнутый и открытый шары радиуса $R > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $B_R(x_0)$ и $O_R(x_0)$ соответственно.

Пространство $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать в качестве евклидова со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Под нормой вектора $x \in \mathbb{R}^n$, если не оговорено иное, будем понимать норму, ассоциированную со скалярным произведением: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

2. Постановка задачи

Рассматривается n -мерная линейная автономная дискретная система управления $(A, \mathcal{U})$ с ограниченным управлением

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где $x(k), u(k) \in \mathbb{R}^n$ — векторы состояния и управления соответственно, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество допустимых значений управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы (1). Предполагается, что $0 \in \text{int} \mathcal{U}$.

Определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где каждое $\mathcal{X}(N)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых посредством выбора допустимого управления систему (1) можно перевести в начало координат за N шагов:

$$(2) \quad \mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Требуется построить предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{\infty}$, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему $(A, \mathcal{U})$ можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_{\infty} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

С учетом (2) также справедливо представление

$$(3) \quad \mathcal{X}_{\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N).$$

3. Декомпозиция линейной системы

Как будет продемонстрировано далее, структура предельного множества 0-управляемости системы (1) определяется свойствами матрицы системы A . В [1] доказано, что $\mathcal{X}_\infty$ представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, которые по модулю не превосходят 1. По этой причине процесс построения $\mathcal{X}_\infty$ связан с переходом в нормальный жорданов базис A . В связи с чем в разделе 3 рассмотрим свойства системы (1) и множеств вида (2) и (3), связанные с различными линейными преобразованиями системы координат.

Пусть $(A_1, \mathcal{U}_1)$ и $(A_2, \mathcal{U}_2)$ — n_1 -мерная и n_2 -мерная системы вида (1). Обозначим через $(A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$ систему $(A, \mathcal{U})$ размерности $n_1 + n_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

Лемма 1. Пусть через $\{\mathcal{X}_i(N)\}_{N=0}^\infty$ и $\mathcal{X}_{i,\infty}$ обозначены класс множеств 0-управляемости и предельное множество 0-управляемости соответственно системы $(A_i, \mathcal{U}_i)$, $i \in \{1, 2\}$, также $(A, \mathcal{U}) = (A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$.

Тогда

- 1) $\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_1(N) \times \mathcal{X}_2(N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

Доказательства леммы 1 и всех последующих утверждений приведены в Приложении.

Лемма 2. Пусть $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$, $(A, \mathcal{U})$ — n -мерная система вида (1), через $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^\infty$ и $\mathcal{Y}_\infty$ обозначены класс множеств 0-управляемости и предельное множество 0-управляемости соответственно системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$.

Тогда

- 1) $\mathcal{X}(N) = S\mathcal{Y}(N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) $\mathcal{X}_\infty = S\mathcal{Y}_\infty$.

Лемма 3. Пусть $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)},$$

при этом все собственные значения матрицы A_1 не превосходят по модулю 1. Через $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ обозначена проекция выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на n_2 -мерное подпространство:

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

$n_2 \times (n_1+n_2)$

Тогда для $(n_1 + n_2)$ -мерной системы $(A, \mathcal{U})$ справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{2,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(A_2, \mathcal{U}_2)$.

Приведенные леммы определяют структуру предельного множества 0-управляемости произвольной системы вида (1). Согласно лемме 3 каждое множество $\mathcal{X}_\infty$ представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных и присоединенных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, не превосходящим 1 по модулю. Для перехода в нормальный жорданов базис матрицы A можно воспользоваться леммой 2. При этом процедура построения $\mathcal{X}_\infty$ в силу блочно-диагонального вида нормальной жордановой формы матрицы с учетом леммы 1 может быть сведена к построению аналогичных множеств для подсистем меньшей размерности с жордановыми клетками в качестве матриц.

4. Построение оценок предельных множеств 0-управляемости

Рассмотрим метод построения полиэдральных оценок множества $\mathcal{X}_\infty$, основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств. Для этого сформулируем и докажем теорему, гарантирующую, что для произвольной системы вида (1) множество $\mathcal{X}_\infty$ является выпуклым.

Теорема 1. Для любой n -мерной системы $(A, \mathcal{U})$ вида (1) верно, что $\mathcal{X}_\infty$ — открытое и выпуклое множество.

В силу лемм 1, 2 и 3 задачу построения предельного множества 0-управляемости можно рассматривать исключительно для систем, собственные значения матриц которых строго больше 1. Поскольку в силу теоремы 1 $\mathcal{X}_\infty$ выпукло, то его замыкание можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полупространств [24, теорема 18.8]. Сформулируем в виде леммы 4 структуру опорного полупространства к $\mathcal{X}_\infty$.

Лемма 4. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, $\mathcal{X}_\infty$ определяется соотношениями (3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \quad \mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{H}_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \right\};$$

$$2) \quad x^* = - \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \overline{\mathcal{X}_\infty} \cap \partial \mathcal{H}_p, \quad \text{где}$$

$$u_k^* = \arg \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).$$

Поскольку согласно лемме 2 допустимо предполагать, что матрица A приведена к нормальной жордановой форме, то для построения базовых внеш-

них оценок $\mathcal{X}_\infty$ достаточно рассмотреть только случай, когда A имеет вид жордановой клетки.

Лемма 5. Пусть для n -мерной системы $(A, \mathcal{U})$ выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $|\lambda| > 1$, $u_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $u_{i,\min} = \min_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Примеч

1) если $\lambda > 1$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min \{(-1)^{j+1} u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1} u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}},$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max \{(-1)^{j+1} u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1} u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}};$$

2) если $\lambda < -1$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} - u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right),$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right).$$

Следствие 1. Пусть в условиях леммы 5 $n = 1$.

Тогда

$$\mathcal{X}_\infty = \left(\frac{-u_{1,\max} - \max\{\lambda u_{1,\max}; \lambda u_{1,\min}\}}{|\lambda|^2 - 1}; \frac{-u_{1,\min} - \min\{\lambda u_{1,\max}; \lambda u_{1,\min}\}}{|\lambda|^2 - 1} \right).$$

Лемма 6. Пусть для $2n$ -мерной системы $(A, \mathcal{U})$ выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O \\ O & rA_\varphi & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & rA_\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r > 1$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $r_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \|(u_{2i-1} \ u_{2i})^\top\|_{\mathbb{R}^2}$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$R_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j,\max}}{(r-1)^{j+1}},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} : \|(x_{2i-1} \ x_{2i})^T\|_{\mathbb{R}^2} < R_{i,\max} \right\}.$$

Леммы 5 и 6 позволяют построить внешние оценки предельного множества 0-управляемости системы (1) в направлении каждого из собственных и присоединенных векторов. Для построения соответствующих опорных гиперплоскостей, ограничивающих $\mathcal{X}_\infty$, достаточно вычислить собственные значения матрицы A . В случае, если полученных ограничений на $\mathcal{X}_\infty$ недостаточно, можно воспользоваться леммой 4 для построения произвольной опорной гиперплоскости.

5. Внешняя оценка предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений

Рассмотрим случай, когда предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_\infty$ системы $(A, \mathcal{U})$ ограничено, что в силу леммы 4 эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1. Откуда следует, что матрица A обратима [25] и справедлива следующая лемма, определяющая структуру множеств 0-управляемости системы $(A, \mathcal{U})$.

Лемма 7 [26, лемма 1]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ множество 0-управляемости (2) системы $(A, \mathcal{U})$ удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{X}(N) = - \sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 7 может быть также сведена к эквивалентным рекуррентным соотношениям следующего вида:

$$\mathcal{X}(N) = A^{-1} \mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1} \mathcal{U}).$$

Обозначим через $\mathbb{K}_n$ множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$, а через ρ_H — расстояние Хаусдорфа [27]:

$$\mathbb{K}_n = \{ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} \text{ — компакт} \},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\}.$$

Если учесть, что $\mathcal{U}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, то каждое множество вида (2) также является выпуклым компактом, так как представимо в виде алгебраической суммы линейных преобразований компактов [24]. Тогда в метрическом пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ можно определить отображение $T: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$(4) \quad T(\mathcal{X}) = A^{-1}\mathcal{X} + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

С учетом леммы 7 и соотношения (4), если отображение T либо $\underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств 0-управляемости (2) в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ может быть определен посредством принципа сжимающих отображений [28]. Также принцип сжимающих отображений позволяет оценить погрешность приближения предельной точки при помощи метода простой итерации. С другой стороны, предельная точка с точностью до замыкания в силу (3) должна совпадать с $\mathcal{X}_\infty$. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (2), множество $\mathcal{X}_\infty$ определяется соотношением (3), отображение T имеет вид (4).

Тогда

- 1) *существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T_M = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;*
- 2) *$\overline{\mathcal{X}_\infty}$ — единственная неподвижная точка отображения T в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$;*
- 3) *справедлива оценка*

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Значение коэффициента сжатия α из теоремы 2, вообще говоря, зависит от выбора нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, как следствие, от ассоциированной с ней операторной нормы матрицы A^{-1} . Например, известны следующие оценки величины α при выборе различных норм в $\mathbb{R}^n$ [28]:

$$(5) \quad \alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Методы, позволяющие в общем случае определить, при каком значении $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ отображение T_M окажется сжимающим, на данный момент неизвестны. Однако с учетом оценок (5) величина M может быть определена численно посредством последовательного вычисления α для различных значений $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Также выбор нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ влияет на значение расстояния Хаусдорфа в $\mathbb{K}_n$, что в конечном счете определяет структуру внешних оценок множества $\mathcal{X}_\infty$. Данный факт сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (2), множество $\mathcal{X}_\infty$ определяется соотношением (3), величина $M \in \mathbb{N}$ выбрана так, чтобы T_M являлось сжимающим отображением с коэффициентами сжатия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty \in [0; 1)$, которые ассоциированы с нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ соответственно. Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \text{conv} \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)^T}_i : \right. \\ \left. r \in \{-R_1, R_1\}, \quad i = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2 \right\},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq R_\infty \right\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p} \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3 позволяет построить внешние оценки множества $\mathcal{X}_\infty$ с любой наперед заданной точностью. В отличие от результатов раздела 4 данные оценки не являются касательными к предельному множеству 0-управляемости и имеют весьма сложную структуру, поскольку представляют собой сумму по Минковскому различных выпуклых множеств. Для получения более точных оценок можно использовать оба подхода одновременно:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \hat{\mathcal{X}}_\infty^1 \cap \hat{\mathcal{X}}_\infty^2,$$

где $\hat{\mathcal{X}}_\infty^1$ — внешняя оценка $\mathcal{X}_\infty$, построенная на основе лемм 4–6, $\hat{\mathcal{X}}_\infty^2$ — внешняя оценка $\mathcal{X}_\infty$, построенная согласно теореме 3.

6. Примеры

Продemonстрируем полученные в разделах 4 и 5 теоретические результаты на примере построения предельного множества 0-управляемости для различных линейных дискретных систем вида (1).

Пример 1. Пусть матрица системы $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

В качестве множества допустимых значений управления рассмотрим куб $\mathcal{U} = [-1; 1]^5$. Построим внешнюю оценку предельного множества 0-управляемости системы $(A, \mathcal{U})$. Матрица A представима в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \left(\frac{1}{2}\right), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

По лемме 3 для предельного множества 0-управляемости системы $(A, \mathcal{U})$ справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R} \times \mathcal{X}_{23,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{23,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(A_{23}, \mathcal{U}_{23})$,

$$A_{23} = \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{23} = [-1; 1]^4.$$

Предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{23,\infty}$ по лемме 1 представимо в виде

$$\mathcal{X}_{23,\infty} = \mathcal{X}_{2,\infty} \times \mathcal{X}_{3,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{2,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости подсистемы $(A_2, \mathcal{U}_2)$, $\mathcal{U}_2 = [-1; 1]^2$, $\mathcal{X}_{3,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости подсистемы $(A_3, \mathcal{U}_3)$, $\mathcal{U}_3 = [-1; 1]^2$.

Рассмотрим подсистему $(A_2, \mathcal{U}_2)$. У матрицы A_2 существует единственное собственное значение $\lambda_2 = 2$ кратности 2. Тогда $(A_2, \mathcal{U}_2)$ удовлетворяет условиям леммы 5. Откуда следует, что

$$\mathcal{X}_{2,\infty} \subset \bigcap_{i=1}^2 \{x \in \mathbb{R}^2: x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

$$x_{1,\min} = \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{1+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{1+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} =$$

$$= \min\{(-1)u_{1,\min}; (-1)u_{1,\max}\} + \min\{(-1)^2u_{2,\min}; (-1)^2u_{2,\max}\} = -2,$$

$$\begin{aligned}
x_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{1+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{1+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\
&= \max\{(-1)u_{1,\min}; (-1)u_{1,\max}\} + \max\{(-1)^2u_{2,\min}; (-1)^2u_{2,\max}\} = 2, \\
x_{2,\min} &= \sum_{j=0}^{2-2} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{2+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{2+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\
&= \min\{(-1)u_{2,\min}; (-1)u_{2,\max}\} = -1, \\
x_{2,\max} &= \sum_{j=0}^{2-2} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{2+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{2+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\
&= \max\{(-1)u_{2,\min}; (-1)u_{2,\max}\} = 1.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{X}_{2,\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 \in (-2; 2)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2: x_2 \in (-1; 1)\} = (-2; 2) \times (-1; 1).$$

Рассмотрим подсистему $(A_3, \mathcal{U}_3)$. У матрицы A_3 существует два комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda_3 = (3 - 3i)\sqrt{2}$, $\lambda_4 = (3 + 3i)\sqrt{2}$. Матрица A_3 представима в виде

$$A_3 = rA_\varphi = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

где $r = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда по лемме 6

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{3,\infty} &\subset \{x \in \mathbb{R}^2: \|(x_1 \ x_2)^T\|_2 \leq R_{1,\max}\}, \\
r_{1,\max} &= \max_{u \in \mathcal{U}_3} \|(u_1 \ u_2)^T\|_2 = \max_{u \in \mathcal{U}_3} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2}, \\
R_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{1-1} \frac{r_{1+j,\max}}{(r-1)^{j+1}} = \frac{r_{1,\max}}{(6-1)} = \frac{\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что $\mathcal{X}_{3,\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^2: \|(x_1 \ x_2)^T\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{5}\}$.

Тогда согласно леммам 1 и 3 предельное множество 0-управляемости системы $(A, \mathcal{U})$ можно оценить следующим образом:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathbb{R} \times (-2; 2) \times (-1; 1) \times \left\{ x \in \mathbb{R}^2: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \right\}.$$

Пример 2. Построим для подсистемы $(A_2, \mathcal{U}_2)$ из примера 1 оценку предельного множества 0-управляемости $\mathcal{X}_{2,\infty}$ согласно теореме 3. В качестве значения параметра, определяющего норму в $\mathbb{R}^2$, выберем $p = 1$, т.е.

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

Тогда

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \|A_2^{-1}\| = \alpha_1 = \frac{3}{4},$$

т.е. $M = 1$. Согласно лемме 7

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) = -A_2^{-1}\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}, \\ \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_1 = \frac{5}{4}, \\ R_1(N) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^N}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \frac{5}{4} = 5 \left(\frac{3}{4}\right)^N. \end{aligned}$$

Построим внешние оценки для различных N .

$$\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \sum_{k=1}^N A_2^{-k}\mathcal{U}_2 + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} R_1(N) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R_1(N) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(N) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -R_1(N) \end{pmatrix} \right\}.$$

Оценки $\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ для случаев $N = 2$ и $N = 10$ представлены на рис. 1 и 2.

Пример 3. Рассмотрим трехмерную систему $(A, \mathcal{U})$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0,5 & -3,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & -2,5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = [-1; 1]^3.$$

Матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = -3$ кратности 3, которому соответствуют единственный линейно независимый собственный вектор h_1 и присоединенные векторы h_2, h_3 :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормальная жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

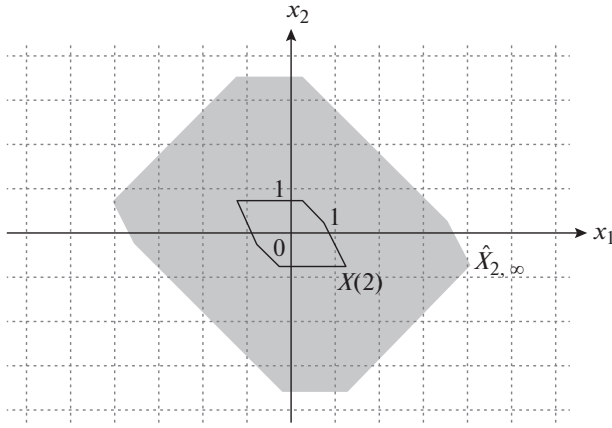


Рис. 1. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ для случая $N = 2$ (серым цветом).

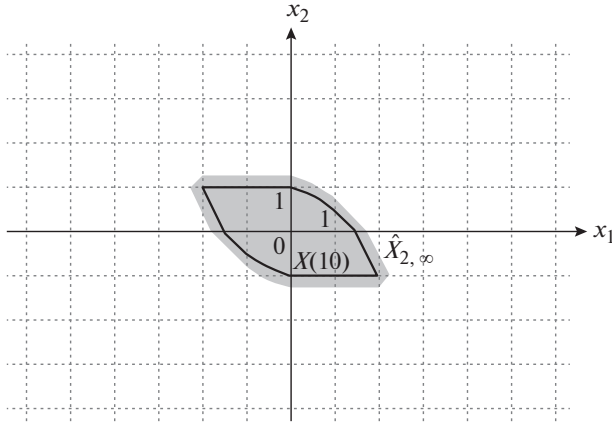


Рис. 2. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ для случая $N = 10$ (серым цветом).

Согласно лемме 2

$$(6) \quad \mathcal{X}_{\infty} = S\mathcal{Y}_{\infty},$$

где $\mathcal{X}_{\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(A, \mathcal{U})$, $\mathcal{Y}_{\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(J, S^{-1}\mathcal{U})$.

$$S^{-1}\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Система $(J, S^{-1}\mathcal{U})$ удовлетворяет условиям леммы 5. Откуда следует, что

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^3 \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y_i \in (y_{i,\min}; y_{i,\max}) \right\},$$

$$y_{i,\min} = \sum_{j=0}^{3-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} - u_{i+j,\max}}{2 \cdot 2^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2 \cdot 4^{j+1}} \right),$$

$$y_{i,\max} = \sum_{j=0}^{3-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2 \cdot 2^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2 \cdot 4^{j+1}} \right),$$

где $u_{i,\max} = \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} u_i = 1,5$, $u_{i,\min} = \min_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} u_i = -1,5$, $i = \overline{1,3}$.

$$y_{1,\min} = -\frac{21}{16}, \quad y_{1,\max} = \frac{21}{16}, \quad y_{2,\min} = -\frac{9}{8}, \quad y_{2,\max} = \frac{9}{8}, \quad y_{3,\min} = -\frac{3}{4}, \quad y_{3,\max} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \left(-\frac{21}{16}; \frac{21}{16} \right) \times \left(-\frac{9}{8}; \frac{9}{8} \right) \times \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right).$$

В силу (6) верно включение

$$\mathcal{X}_\infty \subset \text{intconv} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{39}{16} \\ -\frac{33}{16} \\ -\frac{15}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{39}{16} \\ -\frac{9}{16} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} \\ \frac{33}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} \\ -\frac{9}{16} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{9}{16} \\ -\frac{15}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{33}{16} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{39}{16} \\ \frac{9}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{39}{16} \\ \frac{33}{16} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Заключение

В статье рассмотрена задача построения внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением. Множество допустимых значений управлений предполагается выпуклым компактом, содержащим начало координат. Доказано, что структура предельного множества 0-управляемости зависит от нормальной жордановой формы и собственных значений матрицы системы.

Сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие свести задачу построения предельного множества 0-управляемости системы с матрицей блочно-диагонального вида к задаче построения аналогичных множеств для подсистем меньшей размерности. Для подсистем, у матрицы которых все собственные значения не превосходят по модулю единицу, доказано, что предельное множество 0-управляемости совпадает со всем фазовым пространством. Для подсистем, у матрицы которых все собственные значения по модулю строго больше единицы, доказано, что предельное множество 0-управляемости представляет собой выпуклое, ограниченное и открытое множество. В этом случае разработан метод построения полиэдральных оценок предельного множества 0-управляемости, основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств. Опорные полупространства, ориентированные по направлению собственных и присоединенных векторов матрицы системы, построены явно. Также для случая ограниченного предельного множества 0-управляемости разработан метод построения его внешней оценки на основе принципа сжимающих отображений с любой наперед заданной точностью.

На примерах опробованы полученные теоретические результаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Обозначим через $x_{0,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $x_{0,2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ начальные состояния системы $(A_1, \mathcal{U}_1)$ и $(A_2, \mathcal{U}_2)$ соответственно. Тогда $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ — начальное состояние системы $(A, \mathcal{U})$.

В силу (1) верно, что для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x(N) &= A^N x_0 + A^{N-1} u(0) + A^{N-2} u(1) + \dots + u(N-1) = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^N & O \\ O & A_2^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^{N-1} & O \\ O & A_2^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} u_1(N-1) \\ u_2(N-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^N x_{0,1} + A_1^{N-1} u_1(0) + \dots + u_1(N-1) \\ A_2^N x_{0,2} + A_2^{N-1} u_2(0) + \dots + u_2(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда $x(N) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют $u_1(0), \dots, u_1(N-1) \in \mathcal{U}_1$ и $u_2(0), \dots, u_2(N-1) \in \mathcal{U}_2$ такие, что $x_1(N) = 0$, $x_2(N) = 0$. Данные равенства в силу (2) эквивалентны включению $x_{0,1} \in \mathcal{X}_1(N)$, $x_{0,2} \in \mathcal{X}_2(N)$. Следовательно,

$$\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_1(N) \times \mathcal{X}_2(N).$$

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$. Тогда согласно (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N}) = \mathcal{X}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_1(N) \times \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_2(N) = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}.$$

Тогда $\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Следовательно, существуют $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_0 \in \mathcal{X}_1(\tilde{N}_1) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N}_2) \subset \mathcal{X}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N})$, где $\tilde{N} = \max\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2\}$. Тогда в силу пункта 1 леммы 1

$$x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_{\infty}.$$

Откуда $\mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty} \subset \mathcal{X}_{\infty}$.

Окончательно получаем, что $\mathcal{X}_{\infty} = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $\{y(k)\}_{k=0}^N$ — траектория системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$, т.е. $y(N)$ согласно (1) для начального состояния $y_0 \in \mathbb{R}^n$ допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} y(N) &= S^{-1}ASy(N-1) + v(N-1) = \dots = \\ &= S^{-1}A^N Sy_0 + S^{-1}A^{N-1}Sv(0) + \dots + v(N-1), \end{aligned}$$

где $v(0), \dots, v(N-1) \in S^{-1}\mathcal{U}$.

В силу (2) $y_0 \in \mathcal{Y}(N)$ тогда и только тогда, когда $y(N) = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} S^{-1}A^N Sy_0 + S^{-1}A^{N-1}Sv(0) + \dots + v(N-1) &= 0, \\ A^N Sy_0 + A^{N-1}Sv(0) + \dots + Sv(N-1) &= 0, \end{aligned}$$

что в силу (2) эквивалентно включению $Sy_0 \in \mathcal{X}(N)$, так как по построению $Sv(0), \dots, Sv(N-1) \in \mathcal{U}$. Откуда следует равенство $\mathcal{X}(N) = S\mathcal{Y}(N)$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_{\infty}$. В силу (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x_0 \in S\mathcal{Y}(\tilde{N})$ согласно пункту 1 леммы 2. Следовательно, $S^{-1}x_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Тогда $S^{-1}x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N) = \mathcal{Y}_{\infty}$, т.е. $x_0 \in S\mathcal{Y}_{\infty}$. Тогда $\mathcal{X}_{\infty} \subset S\mathcal{Y}_{\infty}$.

Пусть $x_0 \in S\mathcal{Y}_{\infty}$, тогда $S^{-1}x_0 \in \mathcal{Y}_{\infty}$. В силу (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $S^{-1}x_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Тогда $x_0 \in S\mathcal{Y}(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N})$ в силу пункта 1 леммы 2. Согласно соотношениям (3) также верно включение $x_0 \in \mathcal{X}_{\infty}$. Тогда $S\mathcal{Y}_{\infty} \subset \mathcal{X}_{\infty}$.

Окончательно получаем, что $S\mathcal{Y}_{\infty} = \mathcal{X}_{\infty}$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Тогда $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$, где $x_{0,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_{0,2} \in \mathcal{X}_{2,\infty}$, откуда согласно (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_{0,2} \in \mathcal{X}_2(\tilde{N})$, что согласно (2) эквивалентно существованию $u_2^*(0), \dots, u_2^*(\tilde{N}-1) \in \mathcal{U}_2$ таких, что $x_2(\tilde{N}) = 0$. Тогда для системы $(A, \mathcal{U})$ найдутся $u(0), \dots, u(\tilde{N}-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2^*(k) \end{pmatrix}$, $k = \overline{0, \tilde{N}-1}$. В силу (1) для $x(\tilde{N})$ верно представление

$$x(\tilde{N}) = \begin{pmatrix} A_1^{\tilde{N}} x_{0,1} + A_1^{\tilde{N}-1} u_1(0) + \dots + u_1(\tilde{N}-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом леммы 1 достаточно показать, что найдется такое $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, что $\mathcal{U}_1 \times \{0\} \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $\mathcal{X}_{1,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(A_1, \mathcal{U}_1)$.

Обозначим через $S \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ матрицу перехода в нормальный жорданов базис матрицы A_1 . Поскольку $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то существует $u_{\max} > 0$ такое, что $S[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1} \times \{0\} \subset \mathcal{U}$. При этом в силу невырожденности матрицы S и леммы 2 верно равенство $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$ для случая $\mathcal{U}_1 = S[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1}$ тогда и только тогда, когда $S^{-1}\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $S^{-1}\mathcal{X}_{1,\infty}$ — предельное множество 0-управляемости системы $(S^{-1}A_1S, [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$. При этом согласно теореме о нормальной жордановой форме [25] верно равенство

$$S^{-1}A_1S = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\tilde{n}_1} \end{pmatrix},$$

где жордановы клетки J_i , соответствующие действительным собственным значениям $\lambda_i \in \mathbb{R}$ матрицы A_1 , имеют вид

$$(II.1) \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i},$$

а жордановы клетки J_i , соответствующие комплексным собственным значениям $\lambda_i \in \mathbb{C}$ матрицы A_1 , имеют вид

$$(II.2) \quad J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i},$$

$$A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix},$$

где $r_i = |\lambda_i|$, $\varphi_i = \arg(\lambda_i)$.

Таким образом, в силу леммы 1 достаточно показать, что для $|\lambda_i| \leq 1$ предельные множества 0-управляемости системы $(J_i, [-u_{\max}; u_{\max}]^{m_i})$ для случая (II.1) и системы $(J_i, [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m_i})$ для случая (II.2) совпадают с $\mathbb{R}^{m_i}$ и $\mathbb{R}^{2m_i}$ соответственно для всех $i = \overline{1, \tilde{n}_1}$.

Пусть $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ удовлетворяет (П.1). Тогда для всех $N \geq m$ верно, что

$$(П.3) \quad J^N = \begin{pmatrix} \lambda^N & N\lambda^{N-1} & C_N^2 \lambda^{N-2} & \dots & C_N^{m-1} \lambda^{N-m+1} \\ 0 & \lambda^N & N\lambda^{N-1} & \dots & C_N^{m-2} \lambda^{N-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^N \end{pmatrix},$$

где здесь и везде далее через C_N^m обозначено число сочетаний из N по m :

$$C_N^m = \frac{N!}{(N-m)!m!}.$$

Обозначим через $\{y(k), v(k-1), y_0\}_{k=1}^N$ процесс управления системы $(J, [-u_{\max}; u_{\max}]^m)$. Тогда

$$y(N) = J^N y_0 + \sum_{k=0}^{N-1} J^k v(N-k-1).$$

Если обозначить $z_0 = J^N y_0$, то в силу (П.3) для каждой i -й координаты z_0 верно, что

$$z_{0,i} = \sum_{j=0}^{m-i} \lambda^{N-j} C_N^j y_{0,j+i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Предположим, что $|\lambda| < 1$. Тогда для $N \geq 2m$ верно, что

$$\begin{aligned} |z_{0,i}| &\leq \sum_{j=0}^{m-i} |\lambda^{N-j} y_{0,j+i} C_N^j| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |\lambda^{N-j}| \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| |C_N^j| \leq \\ &\leq m |\lambda^{N-m+1}| \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| C_N^{m-1} \leq \\ &\leq m \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| |\lambda|^{N-m+1} \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-m+2)}{(m-1)!} \leq \\ &\leq m \max_{i=\overline{1, m}} |y_{0,i}| |\lambda|^{N-m+1} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i = \overline{1, m}$

$$-u_{\max} < z_{0,i} < u_{\max}.$$

Выберем $v(0) = \dots = v(\tilde{N}-2) = 0$ и $v(\tilde{N}-1) = -z_0 \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$. Получим, что $y(\tilde{N}) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_{\infty} = \mathbb{R}^m$.

Предположим, что $|\lambda| = 1$. Тогда в силу (П.3) для некоторого $N_m \in \mathbb{N}$ и m -й координаты $y(N_m)$ верно соотношение

$$y_m(N_m) = \lambda^{N_m} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \lambda^k v_m(N_m - k - 1).$$

Определим $N_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $|y_m(0)| \leq N_m u_{\max}$. Тогда можно выбрать $v(0), \dots, v(N_m - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$, исходя из следующего условия:

$$v_m(N_m - k - 1) = -\frac{\lambda^{N_m} y_m(0)}{\lambda^k N_m} \in [-u_{\max}; u_{\max}], \quad k = \overline{0, N_m - 1}.$$

Получим, что

$$y_m(N_m) = \lambda^{N_m} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \lambda^k \frac{-\lambda^{N_m} y_m(0)}{\lambda^k N_m} = 0.$$

Предположим, что для некоторых $N \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, m-1}$ верны соотношения $y_m(N) = \dots = y_{m-i+1}(N) = 0$. Тогда если $v_m(N + N_{m-i} - k - 1) = \dots = v_{m-i+1}(N + N_{m-i} - k - 1) = 0$, $k = \overline{0, N_{m-i} - 1}$, то согласно (П.3)

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = \lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \lambda^k v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1),$$

где $N_{m-i} \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $|y_{m-i}(N)| \leq N_{m-i} u_{\max}$. Тогда можно определить $v(N), \dots, v(N + N_{m-i} - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$ так, чтобы

$$v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1) = \frac{-\lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N)}{N_{m-i} \lambda^k}, \quad k = \overline{0, N_{m-i} - 1}.$$

Получим, что

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = \lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \lambda^k \frac{-\lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N)}{N_{m-i} \lambda^k} = 0,$$

$$y_m(N + N_{m-i}) = \dots = y_{m-i+1}(N + N_{m-i}) = 0.$$

Согласно методу математической индукции найдется $N \in \mathbb{N}$ такой, что $y(N) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(N)$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_{\infty} = \mathbb{R}^m$.

Пусть $J \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ удовлетворяет случаю (П.2). Тогда для всех $N \geq m$

$$(П.4) \quad J^N = \begin{pmatrix} r^N A_{N\varphi} & N r^{N-1} A_{(N-1)\varphi} & \dots & C_N^{m-1} r^{N-m+1} A_{(N-m+1)\varphi} \\ 0 & r^N A_{N\varphi} & \dots & C_N^{m-2} r^{N-m+2} A_{(N-m+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^N A_{N\varphi} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\{y(k), v(k-1), y_0\}_{k=1}^N$ процесс управления системы $(J, [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m})$. Тогда

$$y(N) = J^N y_0 + \sum_{k=0}^{N-1} J^k v(N-k-1).$$

Если обозначить $z_0 = J^N y_0$, то в силу (П.4) для каждого i -го двухмерного подвектора z_0 верно, что

$$z_{0,i} = \sum_{j=0}^{m-i} C_N^j r^{N-j} A_{(N-j)\varphi} y_{0,j+i} \in \mathbb{R}^2, \quad i = \overline{1, m},$$

где $z_0 = (z_{0,1}^T, \dots, z_{0,m}^T)^T$, $y_0 = (y_{0,1}^T, \dots, y_{0,m}^T)^T$.

Предположим, что $r < 1$. Тогда для $N \geq 2m$ верно, что

$$\begin{aligned} \|z_{0,i}\| &\leq \sum_{j=0}^{m-i} \|r^{N-j} A_{(N-j)\varphi} y_{0,j+i} C_N^j\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} r^{N-j} \|A_{(N-j)\varphi} y_{0,i}\| C_N^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} r^{N-j} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| C_N^j \leq \\ &\leq m r^{N-m+1} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-m+2)}{(m-1)!} \leq \\ &\leq m r^{N-m+1} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i = \overline{1, m}$

$$\|z_{0,i}\| < u_{\max}.$$

Выберем $v(0) = \dots = v(\tilde{N}-2) = 0$ и $v(\tilde{N}-1) = -z_0 \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$. Получим, что $y(\tilde{N}) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_{\infty} = \mathbb{R}^{2m}$.

Предположим, что $r = 1$. Тогда в силу (П.4) для некоторого $N_m \in \mathbb{N}$ и m -го двухмерного подвектора $y(N_m)$ верно соотношение

$$y_m(N_m) = A_{N_m\varphi} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} A_{k\varphi} v_m(N_m-k-1).$$

Определим $N_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|y_m(0)\| \leq N_m u_{\max}$. Тогда можно выбрать $v(0), \dots, v(N_m-1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$, исходя из равенства

$$v_m(N_m-k-1) = -\frac{A_{(N_m-k)\varphi} y_m(0)}{N_m} \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}, \quad k = \overline{0, N_m-1}.$$

Получим, что

$$y_m(N_m) = A_{N_m\varphi}y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \frac{-A_{N_m\varphi}y_m(0)}{N_m} = 0.$$

Предположим, что для некоторых $N \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, m-1}$ верны соотношения $y_m(N) = \dots = y_{m-i+1}(N) = 0$. Тогда если $v_m(N + N_{m-i} - k - 1) = \dots = v_{m-i+1}(N + N_{m-i} - k - 1) = 0$, $k = \overline{0, N_{m-i} - 1}$, то согласно (П.4)

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = A_{N_{m-i}\varphi}y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} A_{k\varphi}v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1),$$

где $N_{m-i} \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $\|y_{m-i}(N)\| \leq N_{m-i}u_{\max}$. Теперь можно доопределить $v(N), \dots, v(N + N_{m-i} - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$ так, чтобы

$$v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1) = \frac{-A_{(N_{m-i}-k)\varphi}y_{m-i}(N)}{N_{m-i}}, \quad k = \overline{0, N_{m-i} - 1}.$$

Получим, что

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = A_{N_{m-i}\varphi}y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \frac{-A_{N_{m-i}\varphi}y_{m-i}(N)}{N_{m-i}} = 0,$$

$$y_m(N + N_{m-i}) = \dots = y_{m-i+1}(N + N_{m-i}) = 0.$$

Тогда согласно методу математической индукции найдется $N \in \mathbb{N}$ такой, что $y(N) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{Y}(N)$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ и соотношения (3) следует, что $\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^{2m}$.

Лемма 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$, что в силу (3) эквивалентно существованию $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такого, что $x_0 \in \mathcal{X}(N)$. В силу (2) найдутся $u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $x(N) = 0$. Тогда с учетом (1) для любых $h \in \partial B_1(0)$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(N) &= A^N(x_0 + \varepsilon h) + A^{N-1}u(0) + \dots + u(N-1) = \\ &= A^N x_0 + A^{N-1}u(0) + \dots + u(N-1) + A^N h\varepsilon = x(N) + A^N h\varepsilon = A^N h\varepsilon, \\ \tilde{x}(N+1) &= A\tilde{x}(N) + u(N) = A^{N+1}h\varepsilon + u(N), \end{aligned}$$

где $u(N) \in \mathcal{U}$. Поскольку $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, существуют $\delta > 0$ такая, что $O_\delta(0) \subset \mathcal{U}$, и $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon A^{N+1}B_1(0) \subset O_\delta(0)$. Выберем

$$u(N) = -A^{N+1}h\varepsilon \in \varepsilon A^{N+1}B_1(0) \subset O_\delta(0) \subset \mathcal{U}.$$

Тогда $\tilde{x}(N+1) = 0$, т.е. для любых $h \in B_1(0)$ верно включение $x_0 + \varepsilon h \in \mathcal{X}(N+1)$. Таким образом $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}(N+1) \subset \mathcal{X}_\infty$, т.е. $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}_\infty$. Следовательно, $\mathcal{X}_\infty$ открытое.

Пусть $x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathcal{X}_\infty, \alpha \in [0; 1]$. Тогда существует $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_{0,1}, x_{0,2} \in \mathcal{X}(N)$, т.е. существуют $u^1(0), u^1(1), \dots, u^1(N-1), u^2(0), u^2(1), \dots, u^2(N-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $x^1(N) = 0, x^2(N) = 0$. Согласно (1) верны соотношения

$$0 = x^1(N) = A^N x_{0,1} + A^{N-1} u^1(0) + A^{N-2} u^1(1) + \dots + u^1(N-1),$$

$$0 = x^2(N) = A^N x_{0,2} + A^{N-1} u^2(0) + A^{N-2} u^2(1) + \dots + u^2(N-1),$$

$$0 = \alpha x^1(N) = \alpha A^N x_{0,1} + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha A^k u^1(N-k-1),$$

$$0 = (1-\alpha) x^2(N) = (1-\alpha) A^N x_{0,2} + \sum_{k=0}^{N-1} (1-\alpha) A^k u^2(N-k-1),$$

$$0 = A^N (\alpha x_{0,1} + (1-\alpha) x_{0,2}) + \sum_{k=0}^{N-1} A^k (\alpha u^1(N-k-1) + (1-\alpha) u^2(N-k-1)).$$

В силу выпуклости $\mathcal{U}$ верно включение $v(N-k-1) = \alpha u^1(N-k-1) + (1-\alpha) u^2(N-k-1) \in \mathcal{U}, k = \overline{0, N-1}$. Тогда $\alpha x_{0,1} + (1-\alpha) x_{0,2} \in \mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}_\infty$. Откуда следует, что $\mathcal{X}_\infty$ выпуклое.

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$. Тогда в силу (3) существует $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_0 \in \mathcal{X}(N)$. В силу (2) существуют $u(0), u(1), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}$ такие, что $x(N) = 0$. С учетом (1) верны соотношения

$$0 = x(N) = A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1),$$

$$0 = x_0 + A^{-N} \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1).$$

Выразим из полученного равенства x_0 и внесем матрицу A^{-N} под знак суммы:

$$x_0 = - \sum_{k=0}^{N-1} A^{-N+k} u(N-k-1).$$

Изменив порядок суммирования на обратный, окончательно получим следующее представление x_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &= (A^{-N} u(N-1) + A^{-N+1} u(N-2) + \dots + A^{-1} u(0)) = \\ &= - \sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1). \end{aligned}$$

Пусть p принадлежит $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\begin{aligned}(p, x_0) &= \left(p, -\sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1) \right) = \sum_{k=1}^N \left(p, -A^{-k} u(k-1) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N \left((-A^{-k})^T p, u(k-1) \right) \leq \sum_{k=1}^N \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).\end{aligned}$$

Поскольку $0 \in \mathcal{U}$, то для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \geq 0.$$

Тогда

$$(p, x_0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right),$$

т.е. $x_0 \in \mathcal{H}_p$. Откуда $\mathcal{X}_{\infty} \subset \mathcal{H}_p$.

Рассмотрим следующую величину для некоторого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$(p, x^*) = \sum_{k=1}^{\infty} (p, -A^{-k} u_k^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-(A^{-k})^T p, u_k^* \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).$$

Тогда $x^* \in \partial \mathcal{H}_p$.

Поскольку все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^*$ сходится. Тогда $x_N = -\sum_{k=1}^N A^{-k} u_k^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x^*$. Покажем, что $x_N \in \mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}_{\infty}$. Выберем $u(k) = u_{k+1}^* \in \mathcal{U}$. Тогда

$$x(N) = A^N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1) = \sum_{k=1}^N A^{N-k} u_k^* + \sum_{k=0}^{N-1} A^k u_{N-k-1}^* = 0.$$

Тогда $x_N \in \mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}_{\infty}$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Откуда следует, что $x^* = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N \in \overline{\mathcal{X}_{\infty}}$.

Лемма 4 доказана.

Следствие 2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, $\mathcal{X}_{\infty}$ определяется соотношениями (3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \quad \mathcal{X}_{\infty} \subset \mathcal{H}_{-p} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \min_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right) \right\};$$

$$2) \quad x^* = - \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \overline{\mathcal{X}_{\infty}} \cap \partial \mathcal{H}_{-p}, \quad \text{где}$$

$$u_k^* = \arg \min_{u_k \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-k})^T p, u_k \right).$$

Доказательство следствия 2. Для доказательства достаточно записать положения леммы 4 для вектора $-p$.

Доказательство леммы 5. Пусть $p = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)^T \in \mathbb{R}^n$, где 1 соответствует i -й координате вектора p . Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda^{-k} & (-1)k\lambda^{-k-1} & (-1)^2 k(k+1)\lambda^{-k-2} \frac{1}{2} \dots (-1)^{n-1} \frac{(k+n-2)!}{(n-1)!(k-1)!} \lambda^{-k-n+1} \\ 0 & \lambda^{-k} & (-1)k\lambda^{-k-1} & \dots (-1)^{n-2} \frac{(k+n-3)!}{(n-2)!(k-1)!} \lambda^{-k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{-k} \end{pmatrix},$$

$$-(A^{-k})^T p = - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda^{-k} \\ (-1)k\lambda^{-k-1} \\ \vdots \\ (-1)^{n-i} \frac{(k+n-i-1)!}{(k-1)!(n-i)!} \lambda^{-k-n+i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &= -(\lambda^{-k} u_i - k\lambda^{-k-1} u_{i+1} + \dots + (-1)^{n-i} \lambda^{-k-n+i} C_{k+n-i-1}^{n-i} u_n) = \\ &= - \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} (-1)^j u_{j+i} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} (-1)^{j+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\lambda > 1$. Так как $u_i \in [u_{i,\min}; u_{i,\max}]$, для всех $k \in \mathbb{N}$ будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &\leq \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j \max\{(-1)^{j+1} u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1} u_{j+i,\max}\}, \\ -(A^{-k})^T p, u) &\leq - \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j \min\{(-1)^{j+1} u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1} u_{j+i,\max}\}. \end{aligned}$$

Также верны равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(\lambda - 1)^{j+1}}.$$

Откуда с учетом леммы 4 и следствия 2 следует, что для всех $x \in \mathcal{X}_{\infty}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}} &\leq (p, x) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{X}_{\infty}$ открыто в силу теоремы 1, данные неравенства выполняются строго, т.е.

$$\mathcal{X}_{\infty} \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Рассмотрим случай $\lambda < -1$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\begin{aligned} -(A^{-k})^T p, u &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-k-j} (-1)^{-k-j+j+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-k-j} (-1)^{-k+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\max_{u \in \mathcal{U}} (-(A^{-(2k-1)})^T p, u) = \\ &= \max_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} (-1)^{-(2k-1)+1} u_{j+i} C_{(2k-1)+j-1}^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j,\max} C_{(2k-1)+j-1}^j, \\ &\max_{u \in \mathcal{U}} (-(A^{-2k})^T p, u) = \max_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-1)^{-2k+1} u_{j+i} C_{2k+j-1}^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-u_{i+j,\min}) C_{2k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
(p, x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \max} C_{(2k-1)+j-1}^j - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} u_{i+j, \min} C_{2k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} \right) - \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} \right) = x_{i, \max}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&\min_{u \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-(2k-1)})^T p, u \right) = \\
&= \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} (-1)^{-(2k-1)+1} u_{j+i} C_{(2k-1)+j-1}^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{j+i, \min} C_{(2k-1)+j-1}^j, \\
&\min_{u \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-2k})^T p, u \right) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-1)^{-2k+1} u_{j+i} C_{2k+j-1}^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-u_{j+i, \max}) C_{2k+j-1}^j.
\end{aligned}$$

Тогда согласно следствию 2 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
(p, x) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \min} C_{(2k-1)+j-1}^j - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} u_{i+j, \max} C_{2k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} \right) - \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{2(|\lambda|-1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda|+1)^{j+1}} \right) = x_{i, \min}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{X}_\infty$ открыто в силу теоремы 1, то

$$x_{i,\min} < (p, x) < x_{i,\max},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство леммы 6. Пусть $p = (0 \ 0 \ \dots \ \tilde{p}^T \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{p} = (p_1 \ p_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $p_1^2 + p_2^2 = 1$, где $\tilde{p}$ соответствует $(2i-1)$ -й и $2i$ -й координатам вектора p . Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} r^{-k} A_{-k\varphi} & -kr^{-k-1} A_{(-k-1)\varphi} & \dots & (-1)^{n-1} C_{n+k-2}^{n-1} r^{-k-n+1} A_{(-k-n+1)\varphi} \\ 0 & r^{-k} A_{-k\varphi} & \dots & (-1)^{n-2} C_{n+k-3}^{n-2} r^{-k-n+2} A_{(-k-n+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^{-k} A_{-k\varphi} \end{pmatrix},$$

$$-(A^{-k})^T p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{-k} A_{-k\varphi} \tilde{p} \\ -kr^{-k-1} A_{(-k-1)\varphi} \tilde{p} \\ \vdots \\ (-1)^{n-i} C_{k+n-i-1}^{n-i} r^{-k-n+i} A_{(-k-n+i)\varphi} \tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Пусть $u^i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, n}$, $u = (u^{1T}, \dots, u^{nT})^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(-(A^{-k})^T p, u \right) &= - \left(r^{-k} (A_{-k\varphi} \tilde{p}, u^i) + (-1) k r^{-k-1} (A_{(-k-1)\varphi} \tilde{p}, u^{i+1}) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-i} C_{k+n-i-1}^{n-i} r^{-k-n+i} (A_{(-k-n+i)\varphi} \tilde{p}, u^n) \right) = \\ &= - \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} (A_{(-k-j)\varphi} \tilde{p}, u^{i+j}) C_{k+j-1}^j \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} \| (A_{(-k-j)\varphi} \tilde{p}) \| \| u^{i+j} \| C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} \| u^{i+j} \| C_{k+j-1}^j \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned} (p, x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j, \max}}{(r-1)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{X}_\infty$ в силу теоремы 1 открыто, то

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|(x_{2i-1} x_{2i})^T\|_{\mathbb{R}^2} < R_{i, \max}\}.$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим для некоторых $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $C \in \mathbb{K}_n$ отображение вида

$$\tilde{T}(\mathcal{X}) = B\mathcal{X} + C.$$

Покажем, что если $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — сжатие с коэффициентом сжатия $\beta \in [0; 1)$, то $\tilde{T}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является сжатием.

$$\begin{aligned} \rho_H(\tilde{T}(\mathcal{X}), \tilde{T}(\mathcal{Y})) &= \max \left\{ \sup_{x \in \tilde{T}(\mathcal{X})} \inf_{y \in \tilde{T}(\mathcal{Y})} \rho(x, y); \sup_{y \in \tilde{T}(\mathcal{Y})} \inf_{x \in \tilde{T}(\mathcal{X})} \rho(x, y) \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in C}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in C}} \|Bx + c_1 - By - c_2\|; \sup_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in C}} \inf_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in C}} \|Bx + c_1 - By - c_2\| \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in C}} \inf_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in C}} (\|B(x - y)\| + \|c_1 - c_2\|); \sup_{\substack{y \in \mathcal{Y} \\ c_2 \in C}} \inf_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ c_1 \in C}} (\|B(x - y)\| + \|c_1 - c_2\|) \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|B(x - y)\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|B(x - y)\| \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \beta \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \beta \|x - y\| \right\} = \beta \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}). \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{T}$ — сжатие с коэффициентом β .

С учетом (4) верно равенство

$$T^M(\mathcal{X}) = A^{-M}\mathcal{X} + \sum_{k=1}^M (-A^{-k}\mathcal{U}) = \tilde{T}(\mathcal{X}),$$

где

$$B = A^{-M}, \quad C = \sum_{k=1}^M (-A^{-k}\mathcal{U}).$$

Поскольку все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1, то все собственные значения матрицы A^{-1} по модулю строго меньше 1. Тогда согласно [24, теорема 5.6.12] $\|A^{-k}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. По определению предела для $\alpha \in [0; 1)$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такой, что $\|A^{-M}\| < \alpha$. Поскольку справедливо неравенство

$$\|A^{-M}(x - y)\| \leq \|A^{-M}\| \|x - y\| < \alpha \|x - y\|,$$

то A^{-M} является сжатием с коэффициентом $\alpha \in [0; 1)$. Тогда $T^M: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является сжатием с коэффициентом α .

В силу леммы 7 для любого $N \in \mathbb{N}$ верно, что $\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(N+1)$, также $\mathcal{X}(N)$ — компакт. Тогда согласно [27, следствие A.3.4]

$$(П.5) \quad \rho_H(\mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

С другой стороны, согласно [27, теорема A.3.9] метрическое пространство $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ полное. Поэтому сжимающее отображение $\tilde{T}$ имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{X}^* \in \mathbb{K}_n$, которая может быть найдена методом простой итерации:

$$(П.6) \quad \mathcal{X}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{(\tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T})}_N(\mathcal{X}),$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ произвольный. Выберем $\mathcal{X} = \{0\}$. Тогда с учетом леммы 7

$$\underbrace{(\tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T})}_N(\{0\}) = - \sum_{k=1}^{MN} A^{-k}\mathcal{U} = \mathcal{X}(NM).$$

В силу единственности предельной точки и формул (П.5) и (П.6)

$$\overline{\mathcal{X}_\infty} = \overline{\bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N)} = \mathcal{X}^*.$$

Погрешность в методе простой итерации может быть оценена следующим соотношением [28]:

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу пункта 3 теоремы 2

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p^N} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) = R_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}.$$

Тогда в силу определения расстояния Хаусдорфа

$$\mathcal{X}_\infty \subset \overline{\mathcal{X}_\infty} \subset \mathcal{X}(NM) + B_{R_p}(0),$$

где

$$B_{R_1}(0) = \text{conv} \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)}_i^T : r \in \{-R_1, R_1\}, \quad i = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$B_{R_2}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2 \right\},$$

$$B_{R_\infty}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq R_\infty \right\}.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *Авт.* 2003. № 12. С. 17–32.
Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // *Autom. Remote Control.* 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.
2. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // *J. Optim. Theory Appl.* 1988. V. 56. No. 1. P. 67–88.
3. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // *J. Franklin Inst.* 1961. V. 272. No. 3. P. 208–228.
4. *Hamza M.H., Rasmy M.E.* A Simple Method for Determining the Reachable Set for Linear Discrete Systems // *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1971. V. 16. P. 281–282.
5. *Corradini M.L., Cristofaro A., Giannoni F., Orlando G.* Estimation of the Null Controllable Region: Discrete-Time Plants / *Control Systems with Saturating Inputs. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer. 2012. V. 424. P. 33–52.

6. *Hu T., Miller D.E., Qiu L.* Null Controllable Region of LTI Discrete-Time Systems with Input Saturation // *Automatica*. 2002. V. 38. No. 11. P. 2009–2013.
7. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. 1961. Т. 2. С. 521–547.
8. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
10. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
11. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Наука, 2005.
12. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
13. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // *J. SIAM Control*. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
14. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
15. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
16. *Kurzanskiy A.F., Varaiya P.* Theory and Computational Techniques for Analysis of Discrete-Time Control Systems with Disturbances // *Optim. Method Software*. 2011. V. 26. No. 4–5. P. 719–746.
17. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
18. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // *Int. J. Control*. 1986. V. 43. No. 5. P. 1343–1351.
19. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // *АиТ*. 1965. № 2. С. 193–207.
Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order // *Autom. Remote Control*. 1965. V. 25. No. 9. P. 193–206.
20. *Ибрагимов Д.Н., Сиrotин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ*. 2015. № 9. С. 3–30.
Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.
21. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // *Электрон. журн. Тр. МАИ*. 2015. № 83. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
22. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // *Электрон. журн. Тр. МАИ*. 2016. № 87. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
23. *Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю.* Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // *Моделирование и анализ данных*. 2019. № 2. С. 83–98.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
25. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

26. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 10. С. 3–32.
Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
27. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
28. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 28.03.2022

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022