

Управление в технических системах

© 2023 г. В.В. ХУТОРЦЕВ, д-р техн. наук (hvv.56@mail.ru)
(Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи)

УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ОБЪЕКТОВ НАБЛЮДЕНИЯ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА В МНОГОКАНАЛЬНОЙ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрена задача поиска объектов наблюдения для случая, когда последовательность их появления удовлетворяет закономерностям пространственно-временного пуассоновского потока. Ее решение получено без учета ограничений, связанных с существенным превышением интенсивности поисковых усилий над интенсивностью потока объектов наблюдения. В качестве математической модели, используемой для оптимизации поиска, рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику изменения математического ожидания числа объектов, присутствующих в подобластях области обзора поисковой системы, но до сих пор не обнаруженных. Определена процедура оптимизации распределения интенсивностей поисковых усилий в каналах поисковой системы для динамического и установившегося режимов поиска. Приведены примеры.

Ключевые слова: поиск объектов наблюдения, пространственно-временной пуассоновский поток, распределение интенсивностей поиска в каналах поисковой системы, система дифференциальных уравнений Колмогорова.

DOI: 10.31857/S000523102301004X, **EDN:** LUKGVX

1. Введение

Одной из важных разновидностей общего класса задач управления измерительными процессами [1, 2] является класс задач управления поиском [3–6]. Рациональное распределение поисковых усилий в поисковой системе (ПС) обеспечивает сокращение необнаруженных объектов наблюдения (ОН) в зоне обзора ПС, уменьшение времени поиска, повышение достоверности обнаружения ОН и т.д.

Как правило, задача поиска рассматривается исходя из предположения о том, что в зоне обзора ПС находится один или несколько ОН и их количество не меняется [3–6]. Такое допущение является достаточно жестким, поскольку для ряда практических задач число ОН является произвольным, а сами объекты могут появляться последовательно, например в соответствии с закономерностями пространственно-временного случайного потока.

Исследованию задачи поиска в последнем случае посвящены работы [7–9]. Их общей чертой является допущение о существенном превышении интенсивности поисковых усилий ПС над интенсивностью пуассоновского потока ОН. Указанное допущение выполняется для ПС в условиях высокого энергетического отношения сигнал-шум. Оно позволяет приближенно свести математическую модель эволюции во времени вероятностных характеристик поиска в виде бесконечномерной системы дифференциальных уравнений Колмогорова к математической модели дискретного марковского процесса с двумя состояниями, описываемой двумерной системой дифференциальных уравнений.

Для ряда практических случаев, когда энергетическое отношение сигнал-шум оказывается недостаточным, допущение о существенном превышении интенсивности поисковых усилий ПС над интенсивностью пуассоновского потока ОН может не выполняться. Указанная ситуация, в частности, возникает, когда при заданной интенсивности потока ОН в области обзора невозможно обеспечить необходимую интенсивность поисковых усилий. Например, для задачи активного радиолокационного поиска при фиксированной мощности зондирующего сигнала это может быть обусловлено большим расстоянием между областью обзора и приемным пунктом ПС либо малыми значениями эффективных поверхностей рассеивания объектов наблюдения из потока. Снижение интенсивности поисковых усилий при заданной интенсивности пуассоновского потока ОН влечет за собой увеличение условной вероятности пропуска ОН [3] и, как следствие, рост вероятности присутствия в области обзора не одного, а сразу нескольких необнаруженных ОН, что делает неправильным применение подходов, рассмотренных в [7–9].

В связи с этим актуальным становится вопрос определения управления распределением поисковых усилий в многоканальных ПС параллельного типа при интенсивностях пуассоновского потока появления ОН в области обзора поисковой системы как сопоставимых с интенсивностью поиска, так и превышающих ее по величине.

2. Анализ структуры математической модели поиска.

Постановка задачи

Обозначим через $X \in R^n$ ($0 < n \leq 3$) область обзора поисковой системы с введенной в ней декартовой системой координат $\{x_1, \dots, x_n\}$. Предположим, что объекты наблюдения появляются в X в соответствии с закономерностями пространственно-временного пуассоновского потока φ [10–13].

Рассмотрим многоканальную ПС, включающую I каналов, каждый из которых обслуживает свою часть области обзора X , которой соответствует подмножество X_i , $i = \overline{1, I}$.

Каждый из каналов обслуживает свою часть области обзора X , которой соответствует подобласть X_i , $i = \overline{1, I}$. При этом будем полагать, что $X = \bigcup_i X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, I}$, $i \neq j$. Тогда любые два потока, определяемые

из φ как

$$(2.1) \quad \varphi_i(t) = \varphi(X_i, t), \quad \varphi_j(t) = \varphi(X_j, t), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, I}, \quad i \neq j,$$

являются пуассоновскими и независимыми.

Временной пуассоновский поток, соответствующий X , может быть определен через (2.1) как

$$(2.2) \quad \varphi(t) = \varphi(X, t) = \sum_i \varphi(X_i, t).$$

Обозначим плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока через $\nu(x, t)$, где $\nu(x, t)$ — неотрицательная измеримая на X функция. Тогда меры интенсивностей, или интенсивности $\xi_i(t)$, временных пуассоновских потоков $\varphi_i(t) = \varphi(X_i, t)$, порождаемых пространственно-временным пуассоновским потоком φ в X_i , $i = \overline{1, I}$, могут быть определены через интеграл по мере Лебега от $\nu(x, t)$ [10–13]

$$(2.3) \quad \xi_i(t) = \int_{X_i} \nu(x, t) dx, \quad i = \overline{1, I}.$$

Для интегрального потока $\varphi(t) = \varphi(X, t)$ соответственно получим

$$(2.4) \quad \xi(t) = \int_X \nu(x, t) dx = \sum_i \int_{X_i} \nu(x, t) dx = \sum_i \xi_i(t).$$

Здесь $dx = \prod_{q=1}^n dx_q$, $0 < n \leq 3$.

В соответствии с (2.3), (2.4) меры интенсивностей, или интенсивности $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $\xi(t)$, являются известными детерминированными функциями, в частности могут быть и константами, и характеризуют временные пуассоновские потоки $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $\varphi(t)$ как потоки с переменными параметрами [14].

Вероятность появления очередного ОН в подобласти X_i в течение времени $[t, t + \Delta t]$ определяется как $\xi_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ [7–9], где $o(\Delta t)$ — остаток порядка малости выше, чем Δt .

Пусть i -й канал ПС обеспечивает интенсивность поиска $\lambda_i(t) \geq 0$, $t \in [0, \bar{t}]$, где $\bar{t}$ — длительность интервала времени поиска. Это означает, что если в X_i присутствует k ОН, то вероятность того, что в течение времени $[t, t + \Delta t]$ хотя бы один из них будет найден, составляет $k\lambda_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ [3, 7]. Интенсивности поиска $\lambda_i(t)$ в подобластях X_i , $i = \overline{1, I}$ полагаются неизвестными детерминированными функциями, подлежащими определению в результате решения оптимизационной задачи.

Задача поисковой системы применительно к подобласти X_i может быть интерпретирована как задача ее обслуживания при потоке ОН, образующем нагрузку пуассоновского типа с мерой интенсивности $\xi_i(t)$. Для описания задач

этого класса, как правило, используется математический аппарат процессов размножения и гибели [10–12, 14–17]. В качестве математической модели таких процессов служит система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова относительно вероятностей пребывания процесса в каждом из возможных состояний, образующая задачу Коши с некоторыми начальными условиями [14–16]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{P}_{i0} &= -\xi_i(t)P_{i0} + \lambda_i(t)P_{i1}, \\ \dot{P}_{ik} &= -(\xi_i(t) + k\lambda_i(t))P_{ik} + \xi_i(t)P_{ik-1} + (k+1)\lambda_i(t)P_{ik+1}, \\ k &= 1, 2, \dots, \quad P_{i0}(0) = 1, \quad P_{ik}(0) = 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in [0, \bar{t}], \end{aligned}$$

где P_{i0} — вероятность отсутствия необнаруженных ОН в X_i ; P_{ik} — вероятность нахождения в X_i k необнаруженных ОН; функции $\{\lambda_i(t), \xi_i(t), i = \overline{1, I}\}$ на интервале $[0, \bar{t}]$ полагаются непрерывными и ограниченными.

Задача Коши (2.5) отражает физический смысл задачи поиска, осуществляемого последовательно во времени по мере появления ОН в области обзора X . В силу линейной зависимости коэффициентов при P_{ik} от k решение (2.5) в соответствии с [15, 17] существует, единственно и обеспечивает выполнение требования регулярности $\sum_k P_{ik} = 1$.

Необходимо отметить, что решение системы (2.5) при $t \in [0, \bar{t}]$, в том числе и при $t = \bar{t}$, для каждого из $k = 1, 2, \dots$ определяется значениями функций $\xi_i(t)$, $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, I}$ и может быть получено с помощью метода производящей функции [14, 15, 17]. В соответствии с общими закономерностями пуассоновских процессов и процессов, ими порождаемых [10–12, 14, 15], при $k \rightarrow \infty$ $P_{ik}(t) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, I} \forall t \in [0, \bar{t}]$.

Использование математических моделей (2.5) для поиска закона управления распределением поисковых усилий в ПС является затруднительным в силу их бесконечной размерности.

Проведем преобразование систем дифференциальных уравнений Колмогорова (2.5) (Приложение 1). В результате получим

$$(2.6) \quad \dot{\mu} = -\lambda(t) \circ \mu + \xi(t), \quad \mu(0) = 0, \quad t \in [0, \bar{t}],$$

где $\mu, \lambda, \xi \in R^I$; $\mu^T = [\mu_1 \dots \mu_I]$; $\lambda(t)^T = [\lambda_1(t) \dots \lambda_I(t)]$; $\xi(t)^T = [\xi_1(t) \dots \xi_I(t)]$; $\mu_i = \sum_k k P_{ik}$ — математическое ожидание числа необнаруженных ОН, находящихся в X_i , $i = \overline{1, I}$; буква T означает операцию транспонирования; операция $\circ$ обозначает произведение Адамара.

Из (2.6) очевидно следует, что $\mu \geq 0 \forall t \in [0, \bar{t}]$. Векторное уравнение (2.6) описывает математическую модель фиктивной динамической системы [1], характеризующей эволюцию во времени математических ожиданий количества необнаруженных ОН, находящихся в подобластях X_i области обзора X . Уравнение (2.6) для каждого значения $i = \overline{1, I}$ является одномерной сверткой бесконечномерной системы (2.5).

Определим критерий качества функционирования поисковой системы соотношением

$$(2.7) \quad \Upsilon = A^T \mu(\bar{t}) + B \int_0^{\bar{t}} \lambda(t)^T \lambda(t) dt \rightarrow \min_{\lambda},$$

где $A^T = [a_1 \dots a_I]$; $a_i > 0$, $i = \overline{1, I}$, $B \in R^1 > 0$ — весовые коэффициенты.

Критерий (2.7) предполагает минимизацию в конечный момент наблюдения двух компонент. Первая компонента характеризует взвешенное суммарное математическое ожидание числа необнаруженных ОН, находящихся в области обзора X , вторая — соответствует аналогу энергетических затрат ПС на проведение поиска.

Поставим задачу определить такое распределение интенсивностей поисковых усилий $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $t \in [0, \bar{t}]$ в (2.6) между каналами многоканальной поисковой системы, обслуживающими непересекающиеся подобласти X_i , $i = \overline{1, I}$ области обзора X , которое бы удовлетворяло критерию (2.7).

3. Синтез управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной поисковой системе

Для синтеза управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока φ в многоканальной поисковой системе в соответствии с (2.6), (2.7) составим гамильтониан

$$(3.1) \quad H = \psi^T(-\lambda \circ \mu + \xi) + B\lambda^T \lambda,$$

где $\psi = \psi(t) \in R^I$ — вектор сопряженных переменных.

Из (3.1) получим систему уравнений относительно $\psi(t)$:

$$(3.2) \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial \mu} H = \psi \circ \lambda, \quad t \in [0, \bar{t}].$$

С учетом (2.7) краевые условия для (3.2) можно представить в виде

$$(3.3) \quad \psi(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \mu(\bar{t})} A^T \mu(\bar{t}) = A.$$

Из условия минимума гамильтониана по λ получим

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} H = -\psi \circ \mu + 2B\lambda = 0.$$

С учетом (3.4) определим структуру оптимального управления

$$(3.5) \quad \lambda = \frac{1}{2B} \psi \circ \mu.$$

Из (2.6), (3.2), (3.3) очевидно следует, что $\lambda \geq 0 \forall t \in [0, \bar{t}]$.

Совокупность соотношений (2.6), (3.2), (3.3), (3.5) образует двухточечную краевую задачу, решение которой является весьма затруднительным. В связи с этим для определения оптимального управления поиском можно воспользоваться методом последовательных приближений Крылова–Черноусько [1, 18].

Пусть на q -м шаге итерационной процедуры сформирован закон управления поиском λ^q .

Метод последовательных приближений предполагает выполнение следующих операций.

1. Проводится решение уравнений (2.6) в прямом времени и формируются значения вектора переменных μ^q , соответствующих управлению λ^q .

2. Проводится решение системы уравнений (3.2) в обратном времени с конечными условиями (3.3) и определяются значения вектора сопряженных переменных $\psi^q(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, соответствующих управлению λ^q и вектору переменных μ^q .

3. По полученным значениям векторов $\mu^q(t)$, $\psi^q(t)$ в соответствии с (3.5) рассчитывается промежуточное значение вектора управлений, соответствующее $(q + 1)$ -му шагу итерационной процедуры

$$(3.6) \quad \tilde{\lambda}^{q+1}(t) = \frac{1}{2B} \psi^q(t) \circ \mu^q(t), \quad t \in [0, \bar{t}].$$

4. Исходя из принципа частичного обновления управления [1, 18] по (3.6) с учетом значений вектора управлений λ^q , полученного на предыдущем шаге, проводится расчет его $(q + 1)$ -й итерации

$$(3.7) \quad \{\lambda^{q+1}(t)\} = \{\tilde{\lambda}^{q+1}(t)\}_{\varepsilon^q} \cup \{\lambda^q(t)\}_{1-\varepsilon^q}, \quad t \in [0, \bar{t}],$$

где $\varepsilon^q \in (0, 1)$.

Параметр ε^q обозначает степень обновления закона управления поиском $\lambda^q(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$. Он определяется из условия минимума целевой функции критерия (2.7) на соответствующем шаге итерационной процедуры.

Далее в качестве исходного для $(q + 2)$ -го шага используется управление $\lambda^{q+1}(t)$, и итерационная процедура 1–4 повторяется.

Отметим, что для начального шага итерационной процедуры ($q = 0$) начальный закон управления λ^0 выбирается из множества допустимых законов управления, задаваемых структурой (3.5).

Оптимальное управление определяется соотношением

$$(3.8) \quad \lambda_{\text{оп}}(t) = \lim_{q \rightarrow \infty} \lambda^q(t), \quad t \in [0, \bar{t}].$$

На практике, как правило, ограничиваются конечным числом итераций $q \leq Q$, где Q — номер шага, после которого вариации целевой функции критерия (2.7) становятся незначительными. При этом полагают, что $\lambda_{\text{оп}}(t) \simeq \lambda^Q(t)$.

4. Пример синтеза закона управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока для двухканальной поисковой системы

Пусть

$$(4.1) \quad I = 2, \quad A^T = [1 \ 1], \quad B = 0,1, \quad \bar{t} = 1, \quad \xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 1.$$

Здесь и далее переменные представлены в безразмерных единицах. Различные значения интенсивностей потоков ξ_1 и ξ_2 в подобластях X_1, X_2 области обзора X , соответствующих каналам двухканальной поисковой системы, выбраны для иллюстрации влияния их величин на структуру закона управления поиском.

С учетом (4.1) конкретизируем математические модели (2.5). В результате получим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{P}_{10} &= -2P_{10} + \lambda_1(t)P_{11}, \\ \dot{P}_{1k} &= -(2 + k\lambda_1(t))P_{1k} + 2P_{1k-1} + (k+1)\lambda_1(t)P_{1k+1}, \\ \dot{P}_{20} &= -P_{20} + \lambda_2(t)P_{21}, \\ \dot{P}_{2k} &= -(1 + k\lambda_2(t))P_{2k} + P_{2k-1} + (k+1)\lambda_2(t)P_{2k+1}, \\ k &= 1, 2, \dots, \quad P_{10}(0) = P_{20}(0) = 1, \quad P_{1k}(0) = P_{2k}(0) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

В соответствии с (2.6) из (4.2) следуют уравнения эволюции во времени математических ожиданий числа необнаруженных ОН в подобластях X_1, X_2 области обзора X :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= -\lambda_1(t)\mu_1 + 2, \quad \mu_1(0) = 0, \\ \dot{\mu}_2 &= -\lambda_2(t)\mu_2 + 1, \quad \mu_2(0) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Конкретизируя критерий качества (2.7), получим

$$(4.4) \quad \Upsilon = \mu_1(\bar{t}) + \mu_2(\bar{t}) + B \int_0^{\bar{t}} (\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) dt \rightarrow \min_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Гамильтониан в соответствии с (3.1) определяется соотношением

$$(4.5) \quad H = \psi_1(-\lambda_1\mu_1 + 2) + \psi_2(-\lambda_2\mu_2 + 1) + B(\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Из (3.2), (3.3), (4.3), (4.5) следуют уравнения для сопряженных переменных

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_1\lambda_1, \quad \psi_1(\bar{t}) = 1, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_2\lambda_2, \quad \psi_2(\bar{t}) = 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

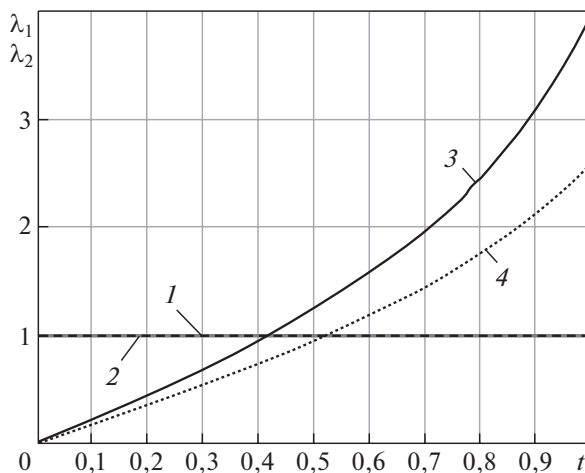


Рис. 1.

Из (3.5) следует структура закона управления поиском

$$(4.7) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2B} \psi_1 \mu_1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2B} \psi_2 \mu_2.$$

При реализации процедуры метода последовательных приближений в качестве начального приближения для подобластей X_1 и X_2 области обзора ПС X использовалось равномерное распределение интенсивности поиска на интервале $[0, 1]$ (прямые 1, 2, рис. 1)

$$(4.8) \quad \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \begin{cases} f = 1, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

На каждом шаге итерационной процедуры в соответствии с п. 4 алгоритма последовательных приближений подбиралось оптимальное значение параметра $\varepsilon^q \in (0, 1)$, связанного в соответствии с (3.7) с частичным обновлением управления.

График зависимости целевой функции $\Upsilon(q)$ критерия (4.4) от номера итерации при $f = 1$ представлен на рис. 2 (кривая 1).

На этом же рисунке изображены зависимости целевой функции от номера итерации при других начальных приближениях закона управления поиском, соответствующих $f = 0,75$ (кривая 2) и $f = 0,5$ (кривая 3).

Представленные графики имеют кусочно-линейную структуру и иллюстрируют наибольший вклад первого шага итерационной процедуры в уменьшение значений целевой функции Υ .

Во всех случаях вариации значений Υ становятся несущественными уже при $q > 2$. Соответствующие $q = Q = 3$, $f = 1$ законы управления поиском для подобластей $X_1 - \lambda_1(t)$ и $X_2 - \lambda_2(t)$ области обзора X двухканальной

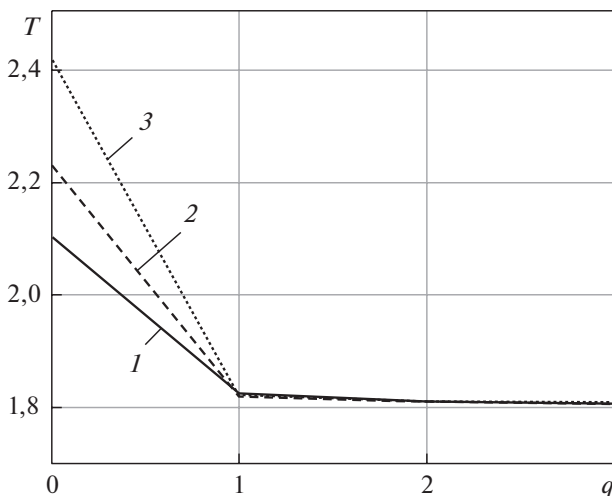


Рис. 2.

ПС представлены на рис. 1 (соответственно кривые 3, 4). Необходимо отметить, что аналогичные законы управления, полученные при $f = 0,75$, $f = 0,5$, практически не отличаются. Из графиков следует, что интенсивность поисковых усилий для подобласти X_1 выше, чем для подобласти X_2 . Это связано с тем, что в соответствии с (4.1) мера интенсивности ξ_1 пуассоновского потока $\varphi_1(t) = \varphi(X_1, t)$ больше, чем мера интенсивности ξ_2 пуассоновского потока $\varphi_2(t) = \varphi(X_2, t)$.

Отметим, что в условиях примера выигрыш от оптимизации закона управления поиском, определяемый в соответствии с соотношением $\delta = \frac{\Upsilon_0 - \Upsilon_{\text{оп}}}{\Upsilon_0}$, составляет $\delta \simeq 0,14$ ($f = 1$), $\delta \simeq 0,19$ ($f = 0,75$), $\delta \simeq 0,25$ ($f = 0,5$).

5. Оптимизация распределения интенсивностей поисковых усилий между каналами многоканальной поисковой системы при установившемся режиме поиска объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока

При решении ряда практических задач функционирование ПС в процессе поиска объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока осуществляется в установившемся режиме. В частности, к ним может быть отнесена задача поиска и обнаружения космического мусора, поток частиц которого может рассматриваться как стационарный пуассоновский поток [19].

Пусть плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока φ не зависит от времени $\nu(x, t) = \nu(x)$. Тогда для подобластей X_i , $i = \overline{1, I}$ области обзора X меры интенсивностей пуассоновских потоков $\varphi_i(t) = \varphi(X_i, t)$, $i = \overline{1, I}$ не будут зависеть от времени:

$$(5.1) \quad \xi_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Определим для интенсивностей поисковых усилий в каналах ПС следующие ограничения:

$$(5.2) \quad \lambda_i = \text{const}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, I},$$

$$(5.3) \quad \|\lambda\|_1 = \Lambda,$$

где $\|\cdot\|_1$ с учетом (5.2) означает l_1 -норму вектора λ на C^I [20].

Тогда математическая модель (2.6) для математического ожидания числа необнаруженных объектов наблюдения в установившемся режиме ($\dot{\mu} = 0$) может быть представлена в виде

$$(5.4) \quad \lambda \circ \mu = \xi.$$

Определим с учетом ограничения (5.3) критерий качества распределения поисковых усилий в каналах ПС

$$(5.5) \quad \Upsilon = A^T \mu + \eta(\|\lambda\|_1 - \Lambda) \rightarrow \min_{\lambda},$$

где $\eta \in R^1$ — неопределенный множитель Лагранжа.

Решение оптимизационной задачи (5.4), (5.5) приводит к следующему результату:

$$(5.6) \quad \lambda_{\text{оп}} = sV,$$

где

$$s = \frac{\Lambda}{\sum_i \sqrt{a_i \xi_i}}, \quad V^T = [\sqrt{a_1 \xi_1} \dots \sqrt{a_I \xi_I}].$$

Проведем сравнение полученного оптимального распределения поисковых усилий (5.6) в ПС с равномерным законом управления поиском

$$(5.7) \quad \lambda_{\text{равн}} = \frac{\Lambda}{I} E_I,$$

где $(E_I)^T = [1 \dots 1] \in R^I$ — единичный вектор.

Пусть $A = E_I$. Тогда математическое ожидание числа необнаруженных ОН, находящихся в области обзора X , для (5.6) составляет

$$(5.8) \quad \mu_{\text{оп}} = \sum_i \mu_{\text{оп}i} = \frac{\left(\sum_i \sqrt{\xi_i}\right)^2}{\Lambda},$$

где

$$\mu_{\text{оп}i} = \frac{\sqrt{\xi_i} \sum_i \sqrt{\xi_i}}{\Lambda}.$$

При равномерном распределении поисковых усилий (5.7) для аналогичной характеристики соответственно получим

$$(5.9) \quad \mu_{\text{равн}} = \mu_{\text{равн}i} = \frac{I \sum_i \xi_i}{\Lambda},$$

где

$$\mu_{\text{равн}i} = \frac{I \xi_i}{\Lambda}.$$

Относительный выигрыш определяется как $\delta = \frac{\mu_{\text{равн}} - \mu_{\text{оп}}}{\mu_{\text{равн}}}$ или

$$(5.10) \quad \delta = 1 - \frac{\left(\sum_i \sqrt{\xi_i} \right)^2}{I \sum_i \xi_i}.$$

Можно показать (Приложение 2), что при любых $\xi_i > 0$, $i = \overline{1, I}$

$$(5.11) \quad \frac{\left(\sum_i \sqrt{\xi_i} \right)^2}{I \sum_i \xi_i} \leq 1,$$

где знак равенства, очевидно, имеет место при одинаковых значениях интенсивностей $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_I$.

Тогда, например, при экспоненциальном распределении мер интенсивностей ξ_i пуассоновских потоков $\varphi_i(t)$ в X_i , $i = \overline{1, I}$, задаваемом соотношением $\xi_i = \exp \left\{ -\frac{(i-m)^2}{D} \right\}$, где $m = 50$, $D = 500$, $I = 100$, выигрыш от оптимизации составляет $\delta = 0,246$.

6. Заключение

Рассмотренный подход к управлению поиском ОН из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной поисковой системе не предполагает использование ограничений о существенном превышении интенсивности поисковых усилий ПС над интенсивностью пуассоновского потока объектов наблюдения.

В его основе лежат математические модели эволюции во времени вероятностных характеристик пуассоновских потоков в подобластях области обзора, обслуживаемых каналами ПС. Каждая из указанных моделей, представляющая из себя бесконечную систему дифференциальных уравнений Колмогорова, сведена к скалярному дифференциальному уравнению, описывающему динамику изменения математического ожидания числа необнаруженных ОН, находящихся в соответствующей подобласти области обзора.

Размерность оптимизируемой фиктивной динамической системы равна количеству каналов ПС. В силу высокой сложности возникающей при оптимизации двухточечной краевой задачи определение управления поиском целесообразно проводить с использованием метода последовательных приближений Крылова–Черноусько с применением принципа частичного обновления управления.

Задача оптимизации распределения поисковых усилий в многоканальной ПС существенно упрощается, если поисковая система функционирует в установившемся режиме. Ее решение сводится к поиску аргумента условного экстремума методом неопределенных множителей Лагранжа.

Приведенные примеры проиллюстрировали выигрыш, получаемый от оптимизации распределения поисковых усилий в многоканальной ПИ при поиске ОН из пространственно-временного пуассоновского потока.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Последовательность преобразования дифференциальных уравнений Колмогорова (2.5)

Домножим k -е уравнение каждой i -й ($i = \overline{1, I}$) системы (2.5) на k ($k = 1, 2, \dots$) и просуммируем их по k . В результате получим

$$(П.1.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \dot{P}_{ik} k = \lambda_i F + \xi_i G,$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} \dot{P}_{ik} k = \dot{\mu}_i$ — скорость изменения математического ожидания числа необнаруженных ОН, находящихся в X_i , $i = \overline{1, I}$;

$$(П.1.2) \quad G = - \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik} k + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik-1} k,$$

$$(П.1.3) \quad F_i = - \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik} k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik+1} k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik+1} k.$$

Раскрывая суммы в (П.1.2), можно показать, что

$$(П.1.4) \quad G = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} = 1.$$

Проводя аналогичную операцию применительно к (П.1.3), получим

$$(П.1.5) \quad F_i = - \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik} k = -\mu_i.$$

Из (П.1.1), (П.1.4), (П.1.5) следует, что

$$(П.1.6) \quad \dot{\mu}_i = -\lambda_i(t)\mu_i + \xi_i(t), \quad i = \overline{1, I}.$$

Описание системы дифференциальных уравнений (П.1.6) соответствует векторной записи (2.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Обоснование неравенства (5.11)

Из (5.11) следует, что

$$(П.2.1) \quad I \sum_{i=1}^I \xi_i \geq \sum_{i=1}^I \xi_i + 2 \sum_{j=1}^{I-1} \sum_{i=j+1}^I \sqrt{\xi_j \xi_i}.$$

Или

$$(П.2.2) \quad (I-1) \sum_{i=1}^I \xi_i \geq 2 \sum_{j=1}^{I-1} \sum_{i=j+1}^I \sqrt{\xi_j \xi_i}.$$

Запишем систему неравенств

$$(П.2.3) \quad \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &\geq 2\sqrt{\xi_1 \xi_2}, \\ \xi_1 + \xi_3 &\geq 2\sqrt{\xi_1 \xi_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{I-1} + \xi_I &\geq 2\sqrt{\xi_{I-1} \xi_I}. \end{aligned}$$

Суммируя неравенства в (П.2.3), получим (П.2.2) и соответственно (П.2.1). Соотношение (5.11) справедливо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.
2. *Болдырихин Н.В., Хуторцев В.В.* Управление наблюдениями за потоками случайных процессов // *АиТ.* 2006. № 12. С. 43–55.
Boldyrikhin N.V., Khutortsev V.V. Control of observations over random processes fluxes // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 12. P. 1900–1912.
3. *Хеллман О.* Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука, 1985.
4. *Альведе Р., Вегснер И.* Задачи поиска. М.: Мир, 1985.
5. *Абчук В.А., Суздаль В.Г.* Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977.
6. *Аркин В.И.* Задача оптимального распределения поисковых усилий // *Теория вероятностей и ее применения.* 1964. Т. 9. № 1. С. 179–180.

7. Баранов И.В., Хуторцев В.В. Текущая оптимизация поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6. С. 24–34.
8. Хуторцев В.В. Оптимизация последовательно-параллельного поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 31–41.
9. Хуторцев В.В. Управление поиском объектов из пространственно-временного пуассоновского потока при неоднородной области обзора информационно-измерительной системы // АИТ. 2021. № 9. С. 133–149.
Khutortsev V.V. Controlled Search for Targets Arriving According to a Spatio-Temporal Poisson Point Process by an Information Measurement System with Inhomogeneous Scope // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1568–1580.
10. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
11. Daley D.J., Vere-Jones D. An introduction to the theory of point processes. New York: Springer, 2013. 702 p.
12. Last G. Stochastic analysis for Poisson processes / Peccati G. and Reitzner M. (eds.) Stochast. Anal. for Poisson Point Proc. Springer, Milan. 2016. P. 1–36.
13. Хуторцев В.В. Плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока с нулевой вероятностью наступления событий на стохастических подмножествах его пространственной области определения // Математика и математическое моделирование. 2020. № 3. С. 15–28.
14. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. 1955. Т. 49. С. 3–122.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
16. Колмогоров А.Н. Проблема ожидания / А.Н. Колмогоров. Теория вероятностей и математическая статистика: Сб. статей. М.: Наука, 1986. С. 106–111.
17. Feller W. On Boundaries and Lateral Conditions for the Kolmogorov Differential Equations // Ann. Math. 1957. V. 65. No. 3. P. 527–570.
18. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 142–153.
19. Асланов В.С., Пироженко А.В., Волшенюк О.Л., Кислов А.В., Ящук А.В. Определение времени выживания космической тросовой системы // Изв. Самарского научного центра РАН. 2010. Т. 12. № 4. С. 138–143.
20. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 24.05.2022

После доработки 13.07.2022

Принята к публикации 29.09.2022