

Нелинейные системы

© 2023 г. А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук
(a.u.aleksandrov@spbu.ru)

(Санкт-Петербургский государственный университет;
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук (a.tikhonov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМИ ПОЗИЦИОННЫМИ СИЛАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ¹

Рассматриваются механические системы с линейными скоростными силами и существенно нелинейными позиционными силами, содержащими слагаемые с распределенным запаздыванием. С помощью прямого метода Ляпунова и метода декомпозиции устанавливаются условия асимптотической устойчивости положений равновесия изучаемых систем. Разработанные подходы применяются для решения задачи одноосной стабилизации твердого тела. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие выводы, полученные аналитически.

Ключевые слова: механические системы, распределенное запаздывание, устойчивость, декомпозиция, функционал Ляпунова–Красовского, одноосная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231023010014, EDN: LTXJDN

1. Введение

Проблемы исследования устойчивости движений механических систем при заданных силах и их стабилизации при возможности использования управляющих сил актуальны в современной теории управления [1–5]. Если действующие на систему силы существенно нелинейны, т.е. их разложения в ряды по степеням обобщенных координат или скоростей не содержат линейных членов, то одним из основных методов анализа устойчивости становится прямой метод Ляпунова. В случае наличия запаздывания в системе применение этого метода базируется или на подходе Разумихина, или на использовании функционалов Ляпунова–Красовского [6–8]. Однако следует заметить, что

¹ Результаты разделов 3 и 4 получены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573) в Институте проблем машиноведения РАН.

для существенно нелинейных систем проблема построения функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского значительно усложняется.

Одним из эффективных способов решения указанной проблемы является метод декомпозиции. Метод направлен на исследование свойств решений дифференциальных систем большой размерности на основе анализа свойств выделяемых из нее подсистем меньших размерностей [1, 9–11]. Он широко и успешно применяется для исследования устойчивости и стабилизации механических систем. Например, в [12–16] метод декомпозиции использовался для построения управлений в электромеханических и робототехнических системах, в [17] метод декомпозиции применен в задаче об отслеживании траекторий механических систем, в [18] — для построения управления угловой ориентацией космического аппарата, в [2] — при решении задачи о переводе управляемой лагранжевой системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние за конечное время. В монографии [9], при рассмотрении механической системы, моделируемой линейными автономными дифференциальными уравнениями 2-го порядка, было показано, что исследование ее устойчивости можно свести к исследованию устойчивости двух изолированных подсистем относительно дифференциальных уравнений 1-го порядка. Этот результат получил дальнейшее развитие в публикациях [19–22].

Системы с запаздыванием представляют собой одну из важных и широко распространенных категорий динамических систем, встречающихся в механике в связи с нелинейными эффектами типа гистерезиса, эффектами памяти формы материала, а также в связи с конечностью распространения сигналов в системах управления [6–8, 23]. Кроме того, запаздывание, в частности — распределенное запаздывание, может намеренно вводиться в управляемые механические системы в качестве интегральной части ПИД-регулятора с целью улучшения характеристик переходных процессов в таких системах [4, 24, 25].

Системы управления с распределенным запаздыванием рассматривались в [4, 24–29], где были получены условия устойчивости на базе функционалов Ляпунова–Красовского как с отрицательно определенными, так и знакопостоянными производными. В [30] линейные управляемые механические системы с распределенным запаздыванием в позиционных силах изучались на предмет устойчивости с использованием метода декомпозиции. Анализ устойчивости опирался на предположение о наличии большого параметра в качестве множителя при векторе сил, зависящих от обобщенных скоростей.

Новизна данной статьи проявляется как в постановке задачи, так и в подходах к ее решению. Рассматривается механическая система, находящаяся под действием позиционных сил, существенно нелинейным образом зависящих от обобщенных координат и содержащих слагаемые с распределенным запаздыванием, а также от сил, линейным образом зависящих от обобщенных скоростей. С использованием специальных конструкций функционалов Ляпунова–Красовского полного типа [6] и метода декомпозиции доказаны

теоремы об условиях асимптотической устойчивости положений равновесия изучаемых систем. Установлено, что, по сравнению с линейным случаем [30], для системы с существенно нелинейными позиционными силами условия устойчивости могут быть сформулированы в более простой и конструктивной форме.

2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, движения которой описываются уравнениями

$$(1) \quad A\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + Q(q(t)) + \int_{t-\tau}^t D(q(\xi))d\xi = 0,$$

где $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ — n -мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей, соответственно, A и B — постоянные матрицы, векторные функции $Q(q)$ и $D(q)$ определены и непрерывны при $q \in \mathbb{R}^n$, τ — постоянное положительное запаздывание. Таким образом, исследуется система с линейными скоростными силами, в то время как позиционные силы, вообще говоря, нелинейны и содержат члены с распределенным запаздыванием.

Каждое решение $q(t, t_0, \chi)$ системы (1) при $t \geq t_0$ определяется начальным моментом времени t_0 и начальной функцией $\chi(\xi)$, где $t_0 \geq 0$, $\chi(\xi)$ принадлежит пространству $C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых функций с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [-\tau, 0]} (\|\chi(\xi)\| + \|\dot{\chi}(\xi)\|)$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Через $q_t(t_0, \chi)$ обозначим отрезок решения: $q_t(t_0, \chi) : \xi \rightarrow q(t + \xi, t_0, \chi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$.

Будем предполагать, что $Q(0) = D(0) = 0$. Значит, рассматриваемая система имеет положение равновесия

$$(2) \quad q = \dot{q} = 0.$$

Цель настоящей работы — получить условия асимптотической устойчивости этого положения равновесия.

Следует отметить, что в статье [30] такая задача решалась для случая линейных позиционных сил. Анализ устойчивости проводился на основе разработанного в [9, 19–21] подхода к декомпозиции механических систем. Однако установленные в [30] условия формулируются в терминах разрешимости некоторой системы линейных матричных неравенств и гарантируют асимптотическую устойчивость положения равновесия только при наличии большого параметра в качестве множителя при скоростных силах.

В данной работе исследуется случай, когда позиционные силы являются существенно нелинейными. Наряду с методом декомпозиции используется подход, основанный на построении для рассматриваемой системы функционала Ляпунова–Красовского полного типа [6] специального вида. Показывается, что, в отличие от линейного случая, для асимптотической устойчивости

системы с существенно нелинейными позиционными силами не требуется наличия большого параметра при скоростных силах, а сами условия устойчивости формулируются в более простой и конструктивной форме. Полученные результаты применяются для решения задачи одноосной стабилизации твердого тела.

3. Построение функционала Ляпунова–Красовского полного типа

Предположим, что система (1) представима в виде

$$(3) \quad A\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + \frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} + P(q(t))q(t) + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi = 0.$$

Здесь A и B — симметрические и положительно определенные матрицы, $\Pi(q)$ и $\tilde{\Pi}(q)$ — непрерывно дифференцируемые при $q \in \mathbb{R}^n$ однородные функции порядка $\mu + 1 > 2$, $P(q)$ — непрерывная при $q \in \mathbb{R}^n$ кососимметрическая матрица, для которой при всех $q \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$(4) \quad \|P(q)\| \leq p_0 \|q\|^{\sigma-1},$$

где постоянные p_0 и σ удовлетворяют условиям $p_0 > 0$, $\sigma > 1$.

Таким образом, рассматриваем случай, когда A — симметрическая и положительно определенная матрица инерционных характеристик системы, а линейные скоростные силы являются диссипативными. Кроме того, в соответствии с теоремой о канонической структуре силовых полей [31] считаем, что нелинейные позиционные силы представлены в виде сумм потенциальных и неконсервативных составляющих, причем для подинтегральной вектор-функции неконсервативная составляющая равна нулю.

Известно [21], что если

$$(5) \quad \tilde{\Pi}(q) \equiv 0,$$

то для асимптотической устойчивости положения равновесия (2) достаточно, чтобы функция $\Pi(q)$ была положительно определена, а параметр σ удовлетворял неравенству

$$(6) \quad 2\sigma > \mu + 1.$$

Исследуем устойчивость положения равновесия в случае, когда тождество (5) не выполнено.

Теорема 1. Если $\mu > 1$, функция $\Pi(q) + \tau \tilde{\Pi}(q)$ положительно определена и справедливо неравенство (6), то положение равновесия (2) системы (3) асимптотически устойчиво.

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2, 3 приведены в Приложении.

Замечание 1. Теорема 1 дает конструктивный способ стабилизации механической системы за счет выбора позиционных сил с распределенным запаздыванием. При этом важно, что потенциальная энергия системы $\Pi(q)$ может не быть положительно определенной, а порядок неконсервативных сил может быть меньше порядка однородности векторных функций $\partial\Pi(q)/\partial q$ и $\partial\tilde{\Pi}(q)/\partial q$. Отметим, что для линейных систем такой способ стабилизации приводит к более жестким и менее конструктивным условиям на выбор подынтегрального члена (см. [8, 25, 30]).

С помощью построенного при доказательстве теоремы 1 функционала Ляпунова–Красовского (П.1) можно не только показать, что положение равновесия системы (3) асимптотически устойчиво, но и оценить скорость сходимости решений к положению равновесия.

Действительно, используя соотношения (П.2), (П.3), получаем, что при $\|q_t\| < \delta$ этот функционал удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \leq -\tilde{c} V^{\frac{\mu+1}{2}}, \quad \tilde{c} = \text{const} > 0,$$

интегрируя которое, приходим к следующему результату.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существуют положительные числа $d_1, d_2, d_3, \tilde{\delta}$ такие, что если начальные данные решения $q(t, t_0, \chi)$ системы (3) удовлетворяют условиям $t_0 \geq 0$, $\|\chi\|_\tau < \tilde{\delta}$, то

$$\begin{aligned} \|q(t, t_0, \chi)\| &\leq d_1 \|\chi\|_\tau (1 + d_3 \|\chi\|_\tau^{\mu-1} (t - t_0))^{-\frac{1}{\mu-1}}, \\ \|\dot{q}(t, t_0, \chi)\| &\leq d_2 \|\chi\|_\tau (1 + d_3 \|\chi\|_\tau^{\mu-1} (t - t_0))^{-\frac{1}{\mu-1}} \end{aligned}$$

при всех $t \geq t_0$.

4. Исследование устойчивости на основе декомпозиции

Рассмотрим теперь случай, когда матрицы A и B в системе (1) являются постоянными и неособыми (в отличие от предыдущего раздела, не предполагается, что они симметрические и положительно определенные), а векторные функции $Q(q)$ и $D(q)$ непрерывны при $q \in \mathbb{R}^n$ и являются однородными порядка $\mu > 1$. Для анализа устойчивости такой системы применим метод декомпозиции в форме, предложенной в работах [9, 19–22].

Строим изолированные подсистемы без запаздывания

$$(7) \quad A\dot{x}(t) = -Bx(t),$$

$$(8) \quad B\dot{y}(t) = -Q(y(t)) - \tau D(y(t)).$$

Теорема 2. Если $\mu > 1$ и нулевые решения подсистем (7), (8) асимптотически устойчивы, то положение равновесия (2) системы (1) также асимптотически устойчиво.

Замечание 2. Как и теорема 1, теорема 2 дает конструктивный способ стабилизации механической системы за счет выбора подынтегральной функции в лагранжиане с распределенным запаздыванием, а с помощью построенного при ее доказательстве функционала Ляпунова–Красовского можно оценить скорость сходимости решений к положению равновесия.

5. Одноосная стабилизация твердого тела

Рассмотренные выше дифференциальные системы (1) и (3) имеют структуру, типичную для математических моделей, описывающих большое разнообразие механических систем. Тем не менее во многих актуальных приложениях могут встречаться математические модели, в которых дифференциальные уравнения движения разрешены относительно первых производных. Это обстоятельство не препятствует применению разработанных подходов к таким моделям. К числу этих моделей относятся задачи динамики объектов, аппроксимируемых твердым телом, поворачивающимся относительно своего центра масс. Рассмотрим в данном разделе одну из таких задач, в которой разработанные подходы успешно применяются для одноосной стабилизации твердого тела в пространстве.

Рассмотрим твердое тело, совершающее вращательное движение относительно своего центра масс (точка O) с угловой скоростью ω . Пусть $Oxyz$ — система жестко связанных с телом главных центральных осей инерции, а $\Theta = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — тензор инерции тела в этих осях. Динамические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение тела под действием управляющего момента M_u , имеют вид

$$(9) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = M_u.$$

Переходя к задаче об одноосной стабилизации тела, введем в рассмотрение орт r , неподвижный в системе координат $Oxyz$, и орт s , неподвижный в инерциальном пространстве. По теореме о полной и локальной производной для орта s имеем равенство (кинематическое уравнение Пуассона)

$$(10) \quad \dot{s}(t) + \omega(t) \times s(t) = 0,$$

составляющее вместе с уравнениями (9) замкнутую дифференциальную систему. Задача об одноосной стабилизации твердого тела [32] заключается в том, чтобы найти управляющий момент M_u , позволяющий обеспечить для системы (9), (10) существование и асимптотическую устойчивость решения

$$(11) \quad s = r, \quad \omega = 0,$$

соответствующего положению равновесия оси тела.

Как доказано в [32], данная задача может быть решена с использованием управляющего момента вида $M_u = -a\|s(t) - r\|^{\mu-1}s(t) \times r - F\omega(t)$. Здесь первая составляющая представляет собой восстанавливающий момент, а вторая — диссипативный момент. При этом $a > 0$, $\mu \geq 1$, F — постоянная положительно определенная матрица. Похожая задача, относящаяся к классу нелинейных динамических задач [5, 33], отличающаяся, однако, линейностью управляющего момента и неинерциальностью базовой системы координат (такие системы координат широко используются в космодинамике [34, 35] наряду с инерциальными системами координат), была рассмотрена в работе [36]. С целью выполнения требования к гладкости переходных процессов, принципиально важного для некоторых задач управления ориентацией ИСЗ (в частности, в условиях, близких к резонансным [34, 37]), в [36] было применено управление с распределенным запаздыванием (интегральный член), что оказалось эффективным.

Применим аналогичный подход в данной задаче. Для этого введем в систему управления наряду с моментом M_u также момент

$$M_\tau = b \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu-1}s(\xi) \times r d\xi,$$

где b — постоянный коэффициент, τ — постоянное положительное запаздывание. Тогда уравнения Эйлера примут вид

$$(12) \quad \Theta\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta\omega(t)) = -F\omega(t) - a\|s(t) - r\|^{\mu-1}s(t) \times r + \\ + b \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu-1}s(\xi) \times r d\xi.$$

Будем считать, что начальные функции $\chi(\xi)$ для системы (10), (12) принадлежат пространству $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^6)$ непрерывных функций с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [- \tau, 0]} \|\chi(\xi)\|$. Требуется определить условия асимптотической устойчивости положения равновесия (11) системы (10), (12). Такая задача решалась в работе [30] в случае линейных ($\mu = 1$) восстанавливающего момента и момента M_τ . Было доказано, что одноосную стабилизацию тела можно гарантировать, если выполнено неравенство

$$(13) \quad |b|\tau < a,$$

и в диссипативной составляющей управляющего момента имеется достаточно большой положительный множитель.

Цель настоящего раздела — показать, что при использовании существенно нелинейных ($\mu > 1$) восстанавливающего момента и момента M_τ одноосная стабилизация тела может быть обеспечена при менее жестких ограничениях

на параметры системы. В частности, ослабление требований к величине диссипативного момента играет важную роль в задачах угловой стабилизации ИСЗ, поскольку создание диссипативных моментов в космических условиях представляет непростую задачу.

Теорема 3. Пусть $\mu > 1$. Тогда при выполнении неравенства

$$(14) \quad b\tau < a$$

положение равновесия (11) системы (10), (12) асимптотически устойчиво.

Замечание 3. По сравнению с условием (13), неравенство (14) задает более широкую область допустимых значений параметров системы, при этом в теореме 3 не требуется наличия большого параметра в качестве множителя при моменте диссипативных сил. Кроме того, в отличие от линейного случая (см. [30]), из теоремы 3 следует, что при использовании существенно нелинейного момента M_τ одноосную стабилизацию тела можно гарантировать при $a = 0$, $b < 0$, т.е. когда на тело не действует восстанавливающий момент.

6. Результаты численного моделирования

Рассматривается твердое тело с моментами инерции $J_1 = 5$, $J_2 = 6$, $J_3 = 4$. Здесь и далее все физические величины имеют размерности в системе СИ. Ставится задача одноосной стабилизации тела в инерциальной системе координат в положении равновесия (11), при котором $r = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^\top$. Задача решается с использованием управления, построенного в предыдущем разделе, в соответствии с уравнениями (10), (12).

Пусть $F = h \cdot \text{diag}(1, 1, 1)$, $h = 0,7$, $a = 2$, $b = 2$, $\tau = 0,9$. Выбрав $\mu = 1$, соответствующий случаю линейных позиционных сил, получаем пример, который был ранее рассмотрен в статье [30]. Так же, как в [30], предположим, что тело отклонено от положения равновесия так, что при $t \in [-\tau, 0]$ углы крена, тангажа и рыскания (“самолетные” углы) соответственно имели значения $\varphi(t) = 0,5$, $\theta(t) = 0,6$, $\psi(t) = -0,8$, а проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции были равны $\omega_x(t) = \omega_y(t) = \omega_z(t) = 1$. Процесс стабилизации тела, характеризуемый поведением направляющих косинусов стабилизируемой оси относительно базовой системы координат, показан на рис. 1.

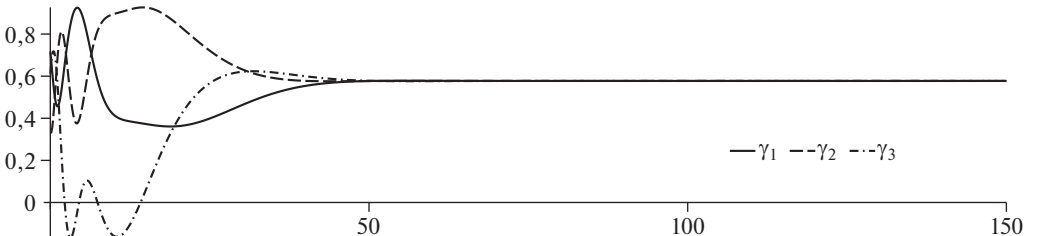


Рис. 1. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = 2$, $\mu = 1$.

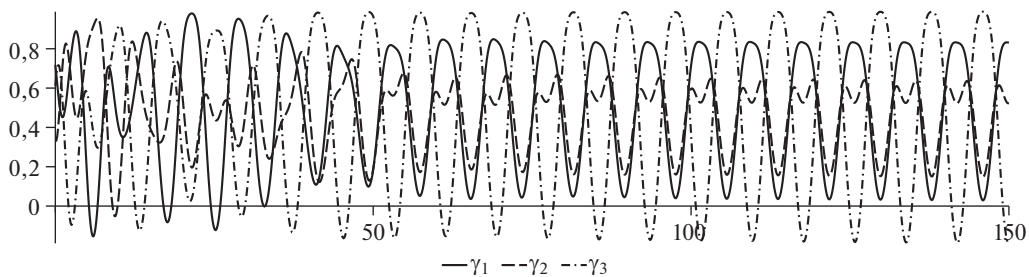


Рис. 2. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = -2$, $\mu = 1$.

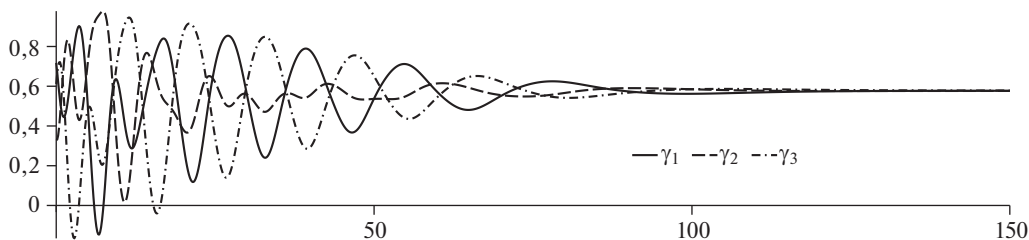


Рис. 3. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $b = -2$, $\mu = 2$.

Неравенство (13) в этом случае выполняется. Точно так же, неравенство (13) будет выполняться, если заменить знак параметра b на противоположный. Однако численное интегрирование свидетельствует о том, что при $b = -2$ и прежних значениях всех прочих параметров и начальных условий, выбранное управление не справляется с задачей стабилизации оси тела (см. рис. 2). Напомним, что доказанная в [30] теорема гарантирует стабилизацию только при достаточно больших значениях параметра h .

Выберем теперь $\mu = 2$, что соответствует нелинейному восстанавливающему моменту в управлении, и снова проинтегрируем уравнения (10), (12) при $b = -2$ и прежних значениях всех прочих параметров и начальных условий. Результат, показанный на рис. 3, свидетельствует о сходимости процесса стабилизации оси тела, что полностью согласуется с утверждением теоремы 3.

Проиллюстрируем также замечание 3 к теореме 3. Для этого существенно уменьшим коэффициенты при восстанавливающем и диссипативном моментах, выбрав $a = 0,6$, $h = 0,2$, и положим $b = -0,6$. Сначала выберем $\mu = 1$. Неравенство (13) в этом случае не выполняется, а процесс стабилизации оси тела не сходится. Хаотичный процесс, показанный для ясности на коротком промежутке времени на рис. 4, продолжается таким же образом и на интервале времени, имеющем в 100 раз большую продолжительность.

Теперь выберем $\mu = 2$, оставив без изменения все прочие параметры и начальные условия. В этом случае выполняется неравенство (14). Соответствующие результаты численного моделирования показаны на рис. 5.

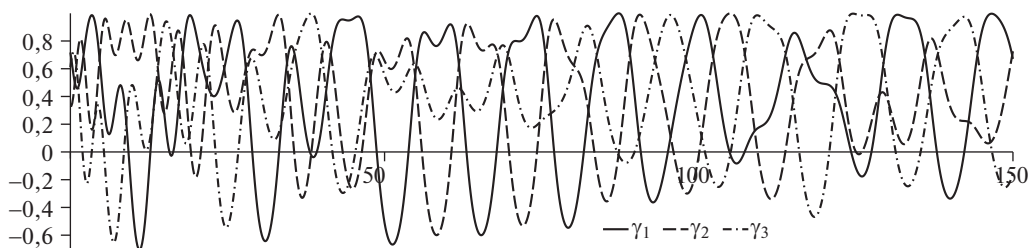


Рис. 4. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $a = 0,6$, $h = 0,2$, $b = -0,6$, $\mu = 1$.

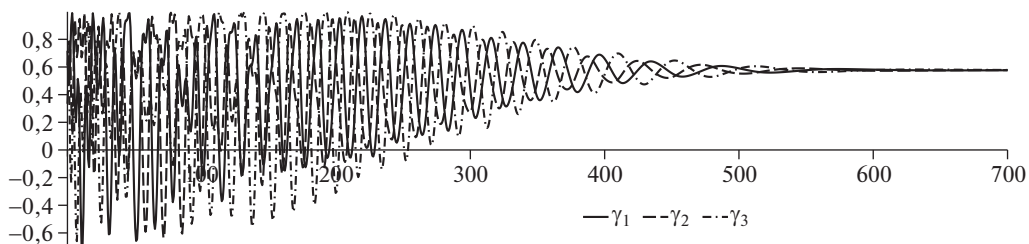


Рис. 5. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $a = 0,6$, $h = 0,2$, $b = -0,6$, $\mu = 2$.

Видно, что процесс одноосной стабилизации тела сходится к программному положению, что согласуется с утверждением теоремы 3. Медленная сходимость процесса объясняется существенной нелинейностью управления, а также малостью значений коэффициентов a и h . При этом малость упомянутых коэффициентов не всегда может рассматриваться лишь как недостаток системы управления. В частности, в задачах угловой стабилизации ИСЗ такое положение дел может являться естественным следствием условий функционирования системы управления.

В замечании 3 также отмечено, что вывод теоремы 3 допускает нулевое значение коэффициента a . Выберем $a = 0$, $h = 1$, $\tau = 1$, $b = -1$, $\mu = 2$, оставив без изменения остальные параметры и начальные условия движения. Представленные на рис. 6 результаты моделирования подтверждают теоретический вывод.

Кроме того, для рассматриваемого случая, используя доказательство теоремы 3, получаем следующие оценки области притяжения и скорости сходимости решений:

$$(15) \quad \|s(t) - r\| \leq 9,21\|\chi\|_{\tau} (1 + 0,23\|\chi\|_{\tau}(t - t_0))^{-1},$$

$$\|\omega(t)\| \leq 7,44\|\chi\|_{\tau} (1 + 0,23\|\chi\|_{\tau}(t - t_0))^{-1}$$

при $\|\chi\|_{\tau} < 0,28$. Далее эти теоретические результаты сравниваются с результатами компьютерного моделирования. На рис. 7 показаны два графика: сплошной линией — полученные численным интегрированием значения

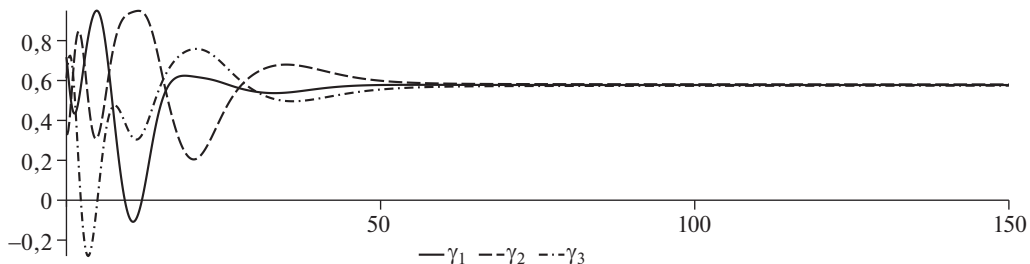


Рис. 6. Направляющие косинусы стабилизируемой оси, $a = 0$, $h = 1$, $b = -1$, $\mu = 2$.

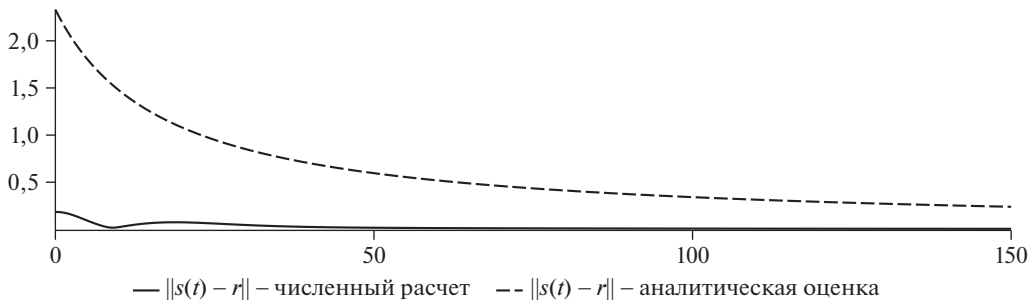


Рис. 7. Сравнение численных и аналитических результатов.

$\|s(t) - r\|$ в зависимости от t , а пунктирной линией — оценка, соответствующая правой части неравенства (15).

Расчеты выполнены для следующих начальных функций: $\varphi(t) = 0,8$, $\theta(t) = 0,8$, $\psi(t) = -0,8$, $\omega_x(t) = \omega_y(t) = \omega_z(t) = 0,1$ при $t \in [-\tau, 0]$. При таком выборе значение $\|\chi\|_\tau$ оказывается равным $0,25$ и, следовательно, неравенство $\|\chi\|_\tau < 0,28$ выполнено.

7. Заключение

В статье рассмотрены вопросы устойчивости решений дифференциальных систем, описывающих движения в механических системах, в том числе, в системах управления, отличающихся существенной нелинейностью позиционных сил и наличием распределенного запаздывания. С использованием функционалов Ляпунова–Красовского полного типа специальной конструкции и метода декомпозиции показано, что, в отличие от линейного случая, для асимптотической устойчивости системы с существенно нелинейными позиционными силами не требуется наличия большого параметра при скоростных силах, причем условия асимптотической устойчивости формулируются в более простой и конструктивной форме. Доказаны две теоремы об устойчивости положений равновесия указанных механических систем, а также теорема о стабилизации оси твердого тела в пространстве с помощью нелинейного по позиционным силам управления с распределенным запаздыванием. Приведе-

ны результаты численного моделирования, подтверждающие выводы, полученные аналитически. В качестве направления для дальнейших исследований отметим вопрос о влиянии величины запаздывания на оценку области притяжения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Используя подходы, разработанные в статьях [20–22, 38], строим функционал Ляпунова–Красовского в следующем виде:

$$(П.1) \quad V(q_t) = \frac{1}{2}\lambda\dot{q}^\top(t)A\dot{q}(t) + \frac{1}{2}q^\top(t)Bq(t) + q^\top(t)A\dot{q}(t) - \\ - q^\top(t) \int_{t-\tau}^t (\xi - t + \tau) \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi + \int_{t-\tau}^t (\alpha + \beta(\xi - t + \tau)) \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi,$$

где λ, α, β — положительные параметры. Дифференцируя его в силу системы (3), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\lambda\dot{q}^\top(t)B\dot{q}(t) + \dot{q}^\top(t)A\dot{q}(t) - \\ & - \lambda\dot{q}^\top(t) \left(\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} + \int_{t-\tau}^t \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi + P(q(t))q(t) \right) - \\ & - q^\top(t) \left(\frac{\partial \Pi(q(t))}{\partial q} + \tau \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(t))}{\partial q} \right) - \dot{q}^\top(t) \int_{t-\tau}^t (\xi - t + \tau) \frac{\partial \tilde{\Pi}(q(\xi))}{\partial q} d\xi - \\ & - \beta \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi + (\alpha + \beta\tau) \|q(t)\|^{\mu+1} - \alpha \|q(t-\tau)\|^{\mu+1}. \end{aligned}$$

Учитывая свойства однородных функций [32], нетрудно показать, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \lambda c_1 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_2 \|q(t)\|^2 - c_3 \|q(t)\| \|\dot{q}(t)\| - c_4 \tau \|q(t)\| \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi + \\ & + \alpha \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \leq V(q_t) \leq \lambda c_5 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_6 \|q(t)\|^2 + c_3 \|q(t)\| \|\dot{q}(t)\| + \\ & + c_4 \tau \|q(t)\| \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi + (\alpha + \beta\tau) \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -(\lambda c_7 - c_8) \|\dot{q}(t)\|^2 + \lambda \|\dot{q}(t)\| \left(c_9 \|q(t)\|^\mu + c_{10} \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi + p_0 \|q(t)\|^\sigma \right) - \\
& - c_{11} \|q(t)\|^{\mu+1} + c_{12} \tau \|\dot{q}(t)\| \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^\mu d\xi - \\
& - \beta \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi + (\alpha + \beta \tau) \|q(t)\|^{\mu+1} - \alpha \|q(t-\tau)\|^{\mu+1}.
\end{aligned}$$

Здесь c_k — положительные постоянные, $k = 1, \dots, 12$.

С использованием неравенства Юнга [7] получаем, что положительные числа $\lambda, \alpha, \beta, \delta$ можно выбрать так, чтобы при $\|q_t\|_\tau < \delta$ выполнялись соотношения

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\lambda c_1 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_2 \|q(t)\|^2 + \alpha \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \right) \leq V(q_t) \leq \\
(П.2) \quad & \leq 2 \left(\lambda c_5 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_6 \|q(t)\|^2 + (\alpha + \beta \tau) \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \right),
\end{aligned}$$

$$(П.3) \quad \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\lambda c_7 \|\dot{q}(t)\|^2 + c_{11} \|q(t)\|^{\mu+1} + \beta \int_{t-\tau}^t \|q(\xi)\|^{\mu+1} d\xi \right).$$

Следовательно, (П.1) — функционал Ляпунова–Красовского полного типа, удовлетворяющий требованиям теоремы об асимптотической устойчивости [6, с. 22].

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Переходя к новым переменным $x(t) = \dot{q}(t)$, $y(t) = q(t) + B^{-1}A\dot{q}(t)$, преобразуем систему (1) к виду

$$\begin{aligned}
(П.4) \quad A\dot{x}(t) = & -Bx(t) - Q(y(t) - B^{-1}Ax(t)) - \int_{t-\tau}^t D(y(\xi) - B^{-1}Ax(\xi))d\xi, \\
B\dot{y}(t) = & -Q(y(t) - B^{-1}Ax(t)) - \int_{t-\tau}^t D(y(\xi) - B^{-1}Ax(\xi))d\xi.
\end{aligned}$$

Нулевые решения изолированных подсистем (7), (8) асимптотически устойчивы. Поэтому (см. [32, 39]) для любых чисел $\nu_1 \geq 2$, $\nu_2 \geq 2$ найдутся

дважды непрерывно дифференцируемые однородные порядка ν_1 и ν_2 соответственно функции Ляпунова $V_1(x)$ и $V_2(y)$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} m_{11}\|x\|^{\nu_1} &\leq V_1(x) \leq m_{12}\|x\|^{\nu_1}, & m_{21}\|y\|^{\nu_2} &\leq V_2(y) \leq m_{22}\|y\|^{\nu_2}, \\ \left\| \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \right\| &\leq m_{13}\|x\|^{\nu_1-1}, & \left\| \frac{\partial V_2(y)}{\partial y} \right\| &\leq m_{23}\|y\|^{\nu_2-1}, \\ \left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \right)^\top A^{-1}Bx(t) &\geq m_{14}\|x\|^{\nu_1}, \\ \left(\frac{\partial V_2(y)}{\partial y} \right)^\top B^{-1}(Q(y) + \tau D(y)) &\geq m_{24}\|y\|^{\nu_2+\mu-1}. \end{aligned}$$

Здесь m_{kj} — положительные постоянные, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(П.5) \quad \tilde{V}(x, y) = V_1(x) + V_2(y).$$

Вычисляя ее производную в силу системы (П.4) и используя свойства однородных функций, получаем оценку

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &\leq -m_{14}\|x(t)\|^{\nu_1} + c_1\|x(t)\|^{\nu_1-1}(\|x(t)\|^\mu + \|y(t)\|^\mu) + \\ &+ c_2\|x(t)\|^{\nu_1-1} \int_{t-\tau}^t (\|x(\xi)\|^\mu + \|y(\xi)\|^\mu) d\xi - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^\top B^{-1} \int_{t-\tau}^t D(y(\xi)) d\xi - \\ &- \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^\top B^{-1}Q(y(t)) + c_3\|y(t)\|^{\nu_2-1}\|Q(y(t)) - Q(y(t) - B^{-1}Ax(t))\| + \\ &+ c_4\|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|D(y(\xi)) - D(y(\xi) - B^{-1}Ax(\xi))\| d\xi, \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные постоянные.

Заметим, что для любых чисел $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ можно указать $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \|Q(y) - Q(y - B^{-1}Ax)\| &\leq \varepsilon_1\|y\|^\mu + h_1\|x\|^\mu, \\ \|D(y) - D(y - B^{-1}Ax)\| &\leq \varepsilon_2\|y\|^\mu + h_2\|x\|^\mu \end{aligned}$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Выберем теперь функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$V(x_t, y_t) = \tilde{V}(x(t), y(t)) - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^\top B^{-1} \int_{t-\tau}^t (\xi + \tau - t) D(y(\xi)) d\xi + \\ + \int_{t-\tau}^t (\alpha_1 + \beta_1(\xi + \tau - t)) \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \int_{t-\tau}^t (\alpha_2 + \beta_2(\xi + \tau - t)) \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi,$$

где $\tilde{V}(x, y)$ — функция Ляпунова, построенная по формуле (П.5), а $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — положительные параметры. Имеем

$$\begin{aligned} & c_5 \|x(t)\|^{\nu_1} + c_6 \|y(t)\|^{\nu_2} - c_7 \tau \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi + \\ & + \alpha_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \alpha_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \leq V(x_t, y_t) \leq \\ & \leq c_8 \|x(t)\|^{\nu_1} + c_9 \|y(t)\|^{\nu_2} + c_7 \tau \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi + \\ & + (\alpha_1 + \beta_1 \tau) \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + (\alpha_2 + \beta_2 \tau) \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi, \\ \dot{V} & \leq -m_{14} \|x(t)\|^{\nu_1} - m_{24} \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + c_1 \|x(t)\|^{\nu_1-1} (\|x(t)\|^\mu + \|y(t)\|^\mu) + \\ & + c_2 \|x(t)\|^{\nu_1-1} \int_{t-\tau}^t (\|x(\xi)\|^\mu + \|y(\xi)\|^\mu) d\xi + c_3 \|y(t)\|^{\nu_2-1} (\varepsilon_1 \|y(t)\|^\mu + h_1 \|x(t)\|^\mu) + \\ & + \tau c_{10} \|y(t)\|^{\nu_2-2} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi \left(\|x(t)\|^\mu + \|y(t)\|^\mu + \int_{t-\tau}^t (\|x(\xi)\|^\mu + \|y(\xi)\|^\mu) d\xi \right) + \\ & + \varepsilon_2 c_4 \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^\mu d\xi + h_2 c_4 \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^\mu d\xi - \\ & - \beta_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi - \beta_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi + \\ & + (\alpha_1 + \beta_1 \tau) \|x(t)\|^{\nu_1} - \alpha_1 \|x(t-\tau)\|^{\nu_1} + (\alpha_2 + \beta_2 \tau) \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} - \\ & - \alpha_2 \|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1}. \end{aligned}$$

Здесь $c_k > 0$, $k = 5, \dots, 10$.

Используя неравенство Юнга [7], получаем, что если порядки однородности функций $V_1(x)$ и $V_2(y)$ удовлетворяют условию $1 < (\nu_2 + \mu - 1)/\nu_1 < \mu$, а величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \delta$ достаточно малы, то при $\|x_t\|_\tau + \|y_t\|_\tau < \delta$ будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(c_6 \|y(t)\|^{\nu_2} + \alpha_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \right) + c_5 \|x(t)\|^{\nu_1} + \\
& + \alpha_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi \leq V(x_t, y_t) \leq \\
& \leq c_8 \|x(t)\|^{\nu_1} + (\alpha_1 + \beta_1 \tau) \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \\
& + 2 \left(c_9 \|y(t)\|^{\nu_2} + (\alpha_2 + \beta_2 \tau) \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \right), \\
\dot{V} & \leq -\frac{1}{2} \left(m_{14} \|x(t)\|^{\nu_1} + m_{24} \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + \right. \\
& \left. + \beta_1 \int_{t-\tau}^t \|x(\xi)\|^{\nu_1} d\xi + \beta_2 \int_{t-\tau}^t \|y(\xi)\|^{\nu_2+\mu-1} d\xi \right).
\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Функционал Ляпунова–Красовского выбираем в виде

$$\begin{aligned}
V(s_t, \omega_t) &= \frac{1}{2} \lambda \omega^\top(t) \Theta \omega(t) + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + (s(t) \times r)^\top F^{-1} \Theta \omega(t) + \\
& + b(s(t) \times r)^\top F^{-1} \int_{t-\tau}^t (\xi + \tau - t) \|s(\xi) - r\|^{\mu-1} s(\xi) \times r d\xi + \\
& + \int_{t-\tau}^t (\alpha + \beta(\xi + \tau - t)) \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi,
\end{aligned}$$

где λ, α, β — положительные параметры.

Для данного функционала и его производной в силу системы (10), (12) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& c_1 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 - c_2 \|s(t) - r\| \|\omega(t)\| - \\
& - c_3 |b| \tau \|s(t) - r\| \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^\mu d\xi + \alpha \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \leq V(s_t, \omega_t) \leq \\
& \leq c_4 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + c_2 \|s(t) - r\| \|\omega(t)\| + \\
& + c_3 |b| \tau \|s(t) - r\| \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^\mu d\xi + (\alpha + \beta \tau) \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi, \\
& \dot{V} \leq -(\lambda c_5 - c_6) \|\omega(t)\|^2 + \lambda a \|\omega(t)\| \|s(t) - r\|^\mu + \\
& + b(\lambda + c_7 \tau) \|\omega(t)\| \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^\mu d\xi + \\
& + c_8 \|\omega(t)\|^2 \|s(t) - r\| - (a - \tau b) c_9 \|s(t) - r\|^{\mu-1} \|s(t) \times r\|^2 - \\
& - \beta \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi + (\alpha + \beta \tau) \|s(t) - r\|^{\mu+1} - \alpha \|s(t - \tau) - r\|^{\mu+1}.
\end{aligned}$$

Здесь $c_k > 0$, $k = 1, \dots, 9$.

Используя неравенство Юнга, нетрудно показать, что если $\lambda > 0$ достаточно велико, а положительные числа α , β , δ достаточно малы, то при $\|s_t - r\|_\tau + \|\omega(t)\| < \delta$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(c_1 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + \alpha \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \right) \leq V(s_t, \omega_t) \leq \\
& \leq 2 \left(c_4 \lambda \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|s(t) - r\|^2 + (\alpha + \beta \tau) \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \right), \\
& \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\lambda c_5 \|\omega(t)\|^2 + (a - \tau b) c_9 \|s(t) - r\|^{\mu+1} + \beta \int_{t-\tau}^t \|s(\xi) - r\|^{\mu+1} d\xi \right).
\end{aligned}$$

Следовательно [6, с. 22], положение равновесия (11) асимптотически устойчиво.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
2. Ананьевский И.М., Решмин С.А. Непрерывное управление механической системой на основе метода декомпозиции // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 4. С. 3–17.
3. Тхай В.Н. Стабилизация колебания управляемой механической системы с n степенями свободы // АиТ. 2020. № 9. С. 93–104.
Tkhai V.N. Stabilizing the oscillations of a controlled mechanical system with n degrees of freedom // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
4. Su Y.X., Zheng C.H. PID control for global finite-time regulation of robotic manipulators // International J. of Systems Science. 2017. V. 48. No. 3. P. 547–558. <https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1193256>
5. Sedighi H.M., Daneshmand F. Non-linear transversely vibrating beams by the homotopy perturbation method with an auxiliary term // J. of Applied and Computational Mechanics. 2015. V. 1. No. 1. P. 1–9.
6. Kharitonov V.L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013.
7. Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhauser, 2014.
8. Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European J. of Control. 2014. V. 20. P. 271–283.
9. Зубов В.И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970.
10. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
11. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
12. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. Ч. 1 // АиТ. 1989. № 1. С. 87–99.
Pyatnitskii E.S. Design of hierarchical control systems for mechanical and electromechanical processes by decomposition. I // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 1. P. 64–73.
13. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. Ч. II // АиТ. 1989. № 2. С. 57–71.
Pyatnitskii E.S. Design of hierarchical control systems for mechanical and electromechanical processes by decomposition. II // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 2. P. 175–186.
14. Матюхин В.И. Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции // АиТ. 1989. № 3. С. 33–44.
Matyukhin V.I. Motion stability of manipulator robots in decomposition mode // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 3. P. 314–323.

15. *Матюхин В.П., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // *АиТ*. 1989. № 9. С. 67–81.
Matyukhin V.I., Pyatnitskii T.S. Controlling the motion of manipulation robots through decomposition with an allowance for the dynamics of actuators // *Autom. Remote Control*. 1989. V. 50. No. 9. P. 1201–1212.
16. *Решмин С.А.* Синтез управления двухзвенным манипулятором // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 1997. № 2. С. 146–150.
17. *Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2002. № 5. С. 25–32.
18. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2012. № 1. С. 92–108.
19. *Косов А.А.* Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Сер. 10. 2005. Вып. 4. С. 123–129.
20. *Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // *АиТ*. 2011. № 6. С. 5–17.
Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Chen Ya. Stability and stabilization of mechanical systems with switching // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 6. P. 1143–1154.
21. *Александров А.Ю., Косов А.А.* Об устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // *ПММ*. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 774–788.
22. *Aleksandrov A.Yu., Stepenko N.A.* Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching // *J. Appl. Comput. Mech*. 2022. V. 8. No. 3. P. 1113–1119.
23. *Zhang X., Chen X., Zhu G., Su C.-Y.* Output feedback adaptive motion control and its experimental verification for time-delay non-linear systems with asymmetric hysteresis // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2020. V. 67. No. 8. P. 6824–6834.
24. *Formal'sky A.M.* On a modification of the PID controller // *Dynamics and Control*. 1997. V. 7. P. 269–277.
25. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* Об устойчивости некоторых управляемых систем с последействием // *Дифференц. уравнения*. 1989. Т. 25. № 11. С. 1848–1852.
Anan'evskii I.M., Kolmanovskii V.B. Stability of some control systems with aftereffect // *Differ. Equ.* 1989. V. 25. No. 11. P. 1287–1290.
26. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // *АиТ*. 1989. № 9. С. 34–43.
Anan'evskii I.M., Kolmanovskii V.B. On stabilization of some control systems with an after-effect // *Autom. Remote Control*. 1989. No. 9. P. 1174–1181.
27. *Павликов С.В.* О стабилизации движений управляемых механических систем с запаздывающим регулятором // *Докл. РАН*. 2007. Т. 412. № 2. С. 176–178.
28. *Павликов С. В.* Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // *ПММ*. 2007. Т. 71. № 3. С. 377–387.

29. *Shen J., Lam J.* Decay rate constrained stability analysis for positive systems with discrete and distributed delays // *Systems Science & Control Engineering*, 2014. V. 2. No. 1. P. 7–12. <https://doi.org/10.1080/21642583.2013.870054>
30. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Анализ устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием на основе декомпозиции // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 13–26.
31. *Зубов В.И.* Каноническая структура векторного силового поля // *Проблемы механики твердого деформируемого тела*. Л.: Судостроение, 1970. С. 167–170.
32. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
33. *Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Y.D.* Methods of qualitative analysis in the problem of rigid body motion in medium // *International J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2011. V. 21. No. 10. P. 2955–2961.
34. *Kosjakov E.A., Tikhonov A.A.* Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body // *International J. of Non-Linear Mechanics*. 2015. V. 73. P. 51–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006>
35. *Tikhonov A.A.* Natural magneto-velocity coordinate system for satellite attitude stabilization: The concept and kinematic analysis // *J. of Applied and Computational Mechanics*. 2021. V. 7. No. 4. P. 2113–2119.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.37817.3094>
36. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay // *IEEE Access*. 2021. V. 9. P. 132623–132630.
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3115400>
37. *Тихонов А.А.* Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 4: многочастотные резонансы // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1*. 2000. Вып. 1 (№ 1). С. 131–137.
38. *Efimov D., Aleksandrov A.* Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov-Krasovskii functionals // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2021. V. 31. P. 3730–3746. <https://doi.org/10.1002/rnc.5115>
39. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // *Systems Control Lett.* 1992. V. 19. P. 467–473.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.06.2022

После доработки 25.08.2022

Принята к публикации 29.09.2022